UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre la interpretación de la Teoría General de la Relatividad mediante la formulación de R. Utiyama.

T E S I , S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FISICO

P R E S E N T A:

JORGE ALBERTO MANERO OROZCO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. SAHEN HACYAN SALERYAN

2011

Universidad Nacional
Autónoma de México
UNAM

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

SOBRE LA INTERPRETACIÓN DE LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD MEDIANTE LA FORMULACIÓN DE R. UTIYAMA.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Manero
   Orozco
   Jorge Alberto
   55496829
   Universidad Nacional Autónoma de México
   México
   Facultad de Ciencias
   Física
   303501684

2. Datos del Asesor.
   Doctor
   Sahen
   Hacyan
   Saleryan

3. Datos del sinodal 1
   Doctor
   José Ernesto
   Marquina
   Fábrega

4. Datos del sinodal 2
   Doctor
   Miguel
   Alcubierre
   Moya

5. Datos del sinodal 3
   Doctor
   Marco Antonio
   Martínez
   Negrete

6. Datos del sinodal 4
   Doctora
   Rosa María
   Couvert
   Rojas

7. Datos del trabajo escrito
   Sobre la interpretación de la Teoría General
   de la Relatividad mediante la formulación
   de R. Utiyama.
   51 p.
   2011

Agradecimientos

Gracias a esta gran universidad y a todos mis maestros de la Facultad de Ciencias.

Agradezco a Dr. José Marquina Fábrega, Dr. Miguel Alcubierre Moya, Dr. Marco Antonio Martínez Negrete y Dra. Rosa María Couvert Rojas, por sus muy valiosos comentarios que ayudaron a mejorar esta tesis.

En especial agradezco al Dr. Sahen Hacyan Saleryan, quién generosamente me brindó la oportunidad de trabajar con él, y me enseñó otra interpretación de la Teoría General de la Relatividad, desde una perspectiva más filosófica.

Gracias a mis papás, a mi hermano, y a Ingrid por instruirme y motivarme tanto en el arte, la ciencia, y en especial, en la vida.

Gracias Natalia por ser parte de mi vida, por enseñarme a comprender muchas otras cosas.

Gracias a mis queridos amigos más cercanos, con quienes compartí esta gran etapa de mi vida tanto en el ambiente académico como en el emocional.

Índice

Parte I
Introducción

1. Introducción general

A finales del año de 1915, Albert Einstein había publicado la teoría de la relatividad general, y no sólo introducía el concepto de espacio-tiempo como un elemento esencial en su teoría sino que también formulaba nuevas leyes universales que daban la estructura del campo gravitacional y su relación necesaria con la geometría riemanniana.
A partir de este descubrimiento, Einstein afirmaba que las ecuaciones gravitacionales de campo que llevan su nombre, revelaban las propiedades geométricas del mundo y que estas propiedades podían ser comprobadas experimentalmente. En este sentido la geometría había tomado un rumbo distinto, en el que su relación con la experiencia[1] nunca había estado tan estrecha.
En torno a la relación que la geometría guarda con la experiencia, han existido toda una gama de posiciones en la que, basándose en el conocimiento de la época en la cual se desarrollaron, han tenido que cuestionar y reformular sus tendencias con el auge de esta nueva teoría que integraría el mundo de las matemáticas con el mundo de los fenómenos. Pero ¿Sería realmente la geometría un objeto de la experiencia[2]?
En primera instancia daremos una breve exposición de las tendencias más significativas, con la finalidad de entender el contexto filosófico en el que se constituye el concepto de geometría, contemplando su posible relación con la teoría einsteniana.

1.1. Las tendencias más importantes

Según Kant la estructura de las matemáticas, y en particular de la geometría, se yergue sobre juicios sintéticos a priori. Sus proposiciones son apriorísticas porque sus conceptos preceden a la experiencia[3]: son tanto universales como necesarios.
Sin embargo no se les puede considerar como juicios analíticos, pues aumentan el conocimiento dado mediante conexiones necesarias entre proposiciones.
Los enunciados analíticos, son juicios que se refieren siempre al mismo concepto, sin agregar nada al contenido del conocimiento. Empero, a diferencia de éstos, las proposiciones matemáticas son extensivas, ya que añaden un nuevo concepto al sujeto mediante la intuición.
En este sentido, Kant no habla de una geometría que describe la realidad como tal, sino la manera y el orden en que nuestra mente la percibe. Este proceso ocurre mediante una intuición que se haya a priori en nuestra mente, en otras palabras, una geometría de la intuición pura.

[1]Al mencionar experiencia nos referimos a la percepción de la realidad mediante los sentidos. En otras palabras, un conocimiento empírico como son los cálculos y las mediciones.
[2]La pregunta se refiere a que si los axiomas y proposiciones geométricas pueden comprobarse empíricamente.
[3]La experiencia en tanto conocimiento empírico.

Sin embargo, el problema con esta filosofía radica en la concepción canónica de que la geometría es evidentemente euclidiana: a diferencia de las geometrías no-euclidianas, todos sus axiomas son conceptos apriorísticos, derivados de la intuición espacial de la realidad.
En suma, se puede interpretar que la filosofía kantiana había negado que la geometría fuera un conjunto de proposiciones verificables mediante experimentos. La geometría y la experiencia eran entes independientes, en tanto que sus axiomas eran producidos por una intuición pura que se hallaba de antemano en nuesta mente. Así pues, durante dos siglos la influencia kantiana instauró una visión crítica de la razón en la que se escindía el lenguaje geométrico de la experiencia.

No fue hasta después de Einstein, que se llegó a la relación necesaria entre la geometría y la física, y de esta forma nacieron otro tipo de tendencias como la del filósofo Bertrand Russell. Según él:

> "Geometría" es un nombre que cubre dos estudios diferentes. Por una parte, está la geometría pura, la cual deduce consecuencias de axiomas, sin investigar si los axiomas son 'verdaderos'; ello no contiene nada que no se siga de la lógica, no es 'sintética' y no necesita figuras como las que se usan en libros de texto de geometría. Por otra parte, está la geometría como una rama de la física, tal como aparece, por ejemplo, en la teoría general de la relatividad; ésta es una ciencia empírica, en la que los axiomas son inferidos a partir de las medidas y se han encontrado que son diferentes de los de Euclides. Así, de las dos clases de geometría una es a priori pero no sintética, en tanto que la otra es sintética pero no a priori."[4]

En breve, Russell enfatiza el hecho de que la geometría pura es a priori y no es sintética, pero además, sus conceptos no están coordinados con ningún elemento de la realidad, son enunciados apodícticos. En efecto, su veracidad no se sustenta en lo que dicen sus axiomas con respecto a la experiencia, sino en la relación lógica con las proposiciones que se deducen a partir de ellas. Sin embargo, la geometría de la física se yergue sobre axiomas que son inferidos a partir de lo que medimos, y que por ende es a posteriori en tanto que depende de un conocimiento empírico, como son las mediciones y los cálculos; en general, de nuestra percepción sensorial de los objetos reales.
Anteriormente a Russell, la filosofía de Henri Poincaré pretende hacer un esfuerzo para reivindicar las dos escuelas antagónicas. Al hacer la distinción entre dos geometrías, la empírica y la matemática, Poincaré alude a la representación como elemento imprescindible en la percepción de la realidad: Los sentidos nos revelan tanto la esencia como la forma geométrica del mundo, pero esta forma no es a priori como bien sostenía Kant, sino que nace de la representación de la realidad. Argumenta que el espacio es en tanto 'espacio representativo' como, también 'espacio geométrico'.
Las representaciones en el espacio de experiencia[5] reproducen las sensaciones y bosquejan la regularidad de los objetos de percepción a partir de generalizaciones, enunciados hipotéticos,

[4] B. Russell, History of Western Philosophy, London: Allen and Unwin, 1967, p.688.
[5] Espacio visual, táctil, motor y sensorial.

probables y contingentes, a lo que él llama geometría empírica; sin embargo, la geometría pura o matemática, es la que se ocupa de explicar, de manera aproximada, la causa de éstas regularidades mediante su configuración. En efecto, la geometría pura no es una ciencia empírica sino que se constituye sobre objetos ideales y mentales[6]. En contra de lo que decía Kant, Poincaré expresa: "Ninguna de nuestras sensaciones, aislada, habría podido conducirnos a la idea de espacio; hemos sido conducidos a ella solamente estudiando las leyes según las cuales esas sensaciones se suceden".

Las representaciones empíricas se geometrizan de acuerdo a un sistema que se elige por convención. Estas convenciones son guiadas por los hechos experimentales y pueden explicar de manera más detallada los movimientos y las regularidades de los objetos de percepción mediante un sistema simbólico independiente de la realidad.

Por consiguiente, con este marco teórico, abría que elucidar la importancia histórica de la geometría euclidiana. Para Poincaré, su importancia radica en que ha sido convencionalmente usada por ser la más eficiente y simple, sin embargo ratifica que no es necesaria. En tanto que los objetos de esta geometría empírica residen en el espacio perceptual, es mejor elegir de todas las existentes, la más simple e innata: la geometría de Euclídes. En fin, la geometría euclidiana sólo es una referencia para poder representar en nuestra mente la configuración de los objetos que percibimos de la realidad.

1.2. Una idea antagónica: Hans Reichenbach

Según Reichenbach la base lógica de la relatividad general consiste en que algunas aseveraciones, ya sean verdaderas o falsas, deben ser sustituidas por definiciones.

En este sentido se vuelve una teoría construida sobre una estructura de axiomas y de juicios apodícticos. Sin embargo la arbitrariedad de éstos no vuelve a la estructura un sistema provisorio y contingente, pues como veremos a continuación, todos las definiciones que se establezcan tienen que ser equivalentes bajo relaciones y transformaciones bien definidas.

Las definiciones de la teoría de la relatividad, como lo son la congruencia de distancias y la simultaneidad, son tales que existe una coordinación entre objetos reales con conceptos físicos[7]. En este sentido, son producto de experiencias sensibles y de la intuición. Sin embargo, éstas pueden cambiar dependiendo de la forma y los niveles extensivos de descripción, y por ello un cambio en las definiciones induce varios sistemas descriptivos: distintas geometrías.

La tesis central de Reichenbach radica en que éstos sistemas descriptivos tienen que ser equivalentes. En efecto, pretende pasar por alto cualquier sistema privilegiado, incorporando una relatividad en la geometría, independientemente de su simplicidad y estructura. A diferencia del convencionalismo de Poincaré, quién sostenía que a ningún enunciado geométrico se le puede asignar un significado empírico, Reichenbach reiteraba que las definiciones, como formulaciones

[6]Tomasini Bassols, Alejandro, Filosofía y Matemáticas: ensayos en torno a Wittgenstein, México, Plaza y Valdés, 2006, p. 98-99.

[7]Por ejemplo: Una longitud equivalente está definida de acuerdo con varios objetos reales que tengan la misma longitud

axiomáticas de la teoría, determinan los criterios de congruencia: las medidas de distancia y de tiempo en diferentes lugares del espacio-tiempo. En este sentido la elección de una geometría es arbitraria siempre y cuando no haya una definición de congruencia, pues de lo contrario la definición involucra, como ya se dijo anteriormente, un conocimiento empírico que proviene de una experiencia particular, la cual determina completamente el sistema descriptivo utilizado.

“La elección de una geometría es arbitraria, siempre y cuando no se haya especificado una definición de congruencia. Una vez que ésta definición se haya enunciado, la elección de la geometría apropiada para describir un espacio físico se vuelve una cuestión empírica. Por un instante, es un hecho empírico, que cuando usamos cuerpos sólidos para definir congruencias, nuestro espacio físico es prácticamente euclidiano con dimensiones terrestres. Pero si, en un lugar distinto del universo, la misma definición de congruencia deviniera en una geometría no-euclidiana, ese lugar del universo tendría una estructura geométrica diferente al que tenemos en nuestro mundo.”[8]

En oposición a Kant, Reichenbach considera que una vez definidos los criterios de congruencia, la geometría de Euclídes es un sistema geométrico incompleto, incapaz de describir todos los fenómenos físicos del universo.
Así la geometría riemanniana es la geometría que, de acuerdo a las definiciones de congruencia empleadas en relatividad, es la única que puede describir de forma adecuada los fenómenos que ocurren en todo el universo. Empero, la geometría euclidiana sólo es viable si no se han definido estos criterios de congruencia o si les ha definido a un nivel de descripción particular: el mundo de los cuerpos sólidos en escalas terrestres.

1.3. Una conversación hipotética y la postura einsteniana

En 1949, Paul Schilpp editó un compendio de ensayos dedicados a Einstein, escritos por científicos y filósofos distinguidos. En el último capítulo Einstein imaginó un diálogo entre Reichenbach y Poincaré con la finalidad de vislumbrar sus ideas antagónicas. De esta forma, se preguntó: Desde el punto de vista de la física, ¿Será la geometría verificable, o en caso contrario falseable?
Evidentemente Reichebach arguye en que efectivamente sí existe tal geometría, la cual se determina empíricamente, asumiendo un criterio de congruencia particular.

“La combinación de un enunciado geométrico con las definiciones coordinadas de congruencia empleadas, está sujeta a una prueba empírica y por ende expresa una propiedad del mundo real.”[9]

Por el contrario, Poincaré lo niega.
Einstein nunca tomó una postura explícita con respecto a la geometría, sin embargo, podemos

[8]Ed. Paul, Arthur, Schilpp, Albert Einstein. Philosopher-Scientist, New York, MJF books, 1949, p. 297.
[9]Ed. Paul, Arthur, Schilpp, Albert Einstein. Philosopher-Scientist, New York, MJF books, 1949, p. 297.

suponer que estaba convencido de que la naturaleza no euclidiana del espacio-tiempo era objeto de experimentos, hasta ese momento constatados.
No obstante, en el año de 1956, Utiyama demostró una exacta correspondencia entre las ecuaciones de la geometría riemanniana en un espacio de cuatro dimensiones con aquellas derivadas de un campo normado asociado al grupo de Lorentz. En la formulación de Utiyama la relatividad general puede ser interpretada mediante una teoría de norma, la cual posibilita la deducción de ecuaciones de la interacción gravitacional a partir de simetrías que determinan las leyes dinámicas en consideración.
Por éste motivo y de acuerdo con Poincaré, la descripción del campo gravitacional, ya sea como una variedad riemanniana o como un campo normado, es cuestión de convención.
Ésta será la tesis defendida a lo largo de este trabajo, con la intención de que al final, el lector pueda entender tanto la teoría matemática como también reconocer la postura filosófica de Poincaré con respecto a la geometría.

1.4. El objetivo de nuestro trabajo

En general, nuestro trabajo tiene dos objetivos, el primero de ellos de índole matematico, el segundo de índole filosofico, partiendo de los argumentos planteados en el artículo titulado "Geometry as an object of experience: the missed debate between Poincaré and Einstein": Hacyan, Shahen, European Journal of Physics, 30, 2009.

I. Hacer una interpretación del artículo de Utiyama mediante el formalismo moderno de la geometría diferencial. En efecto, lo que se quiere es mostrar la relación entre el tensor métrico, los símbolos de Christofel y el tensor de Riemann, con, la tétrada, los coeficientes de Cartan y sus diferenciales, respectivamente.

II. De acuerdo con el contexto de la época en la que la Teoría General de la Relatividad se desarrolló, hemos adoptado la concepción de Einstein como la más prominente, puesto que ninguna de las posiciones anteriores considera una nueva geometría, como la responsable de las interacciones gravitacionales entre los cuerpos: la geometría riemanniana.
Sin embargo nuestro trabajo consiste en darle otra interpretación a los resultados de Einstein y remitirnos a las posiciones que se mencionan anteriormente para poder elegir de entre todas, la más conveniente. En un principio, defenderemos la postura de Poincaré en contra del debate sostenido por Einstein. Por consiguiente, se hará una crítica a las ideas que consideremos innecesarias o inviables para nuestro propósito, y para concluir, tomaremos algunos rasgos esenciales de la filosofía de Wittgenstein, con el motivo de esclarecer nuestro argumento. Es importante mencionar que, de acuerdo a mi posición con respecto a la Filosofía de la Ciencia, y al carácter filosófico de éste trabajo, considero necesario remitirnos al aparato matemático, pues sin duda, conocer el lenguaje en el que están escritos los trabajos originales, es imprescindible para su interpretación.

2. La Teoría General de la Relatividad

2.1. Conceptos fundamentales de La Teoría General

La teoría de la relatividad general amplia la relatividad especial a sistemas arbitrarios de coordenadas (ya sean inerciales o acelerados) y permite curvatura en el espacio-tiempo.
De acuerdo con la teoría newtoniana de la gravitación, dos o más cuerpos interactúan gravitacionalmente a distancia mediante fuerzas atractivas en un espacio considerado como absoluto. En antagonía con esta teoría, Einstein introduce el concepto de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones (originalmente propuesta por Minkowski), cambiando profundamente los paradigmas newtonianos y reduciendo sus leyes a casos particulares de una teoría más general.
Sin embargo, la teoría de la relatividad especial únicamente había trasladado el carácter de absoluto a un nivel más extenso, introduciendo el tiempo como otra dimensión. En este sentido se hablaba de un espacio-tiempo absoluto y plano, en el que se definían transformaciones locales de sistemas de referencia inerciales [10], manteniendo así invariantes a las leyes físicas.
No fue hasta que la relatividad general introdujo un espacio-tiempo dinámico como entidad física, donde la interacción gravitacional se convirtió en lo que hoy llamamos campo gravitacional.[11].
Esencialmente la Teoría General de la Relatividad es la generalización de la teoría de la relatividad especial la cual se construye a partir de los siguientes principios fundamentales:

I. Curvatura del espacio-tiempo. El espacio-tiempo es una variedad riemanniana de dimensión 4, en la que está definida localmente una métrica lorentziana. La métrica determina lo que miden reglas y relojes y las propiedades locales de inercia.
De igual forma, objetos libres de fuerzas siguen geodésicas temporales en la variedad, mientras que los fotones siguen geodésicas nulas.

II. Principio de equivalencia. Los campos gravitacionales son indistinguibles de las fuerzas ficticias que aparecen en sistemas de referencia acelerados: únicamente en los sistemas localmente inerciales (caída libre), las leyes de la física son las que se cumplen en relatividad especial.

La equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional, propuesta por Galileo, resulta en que la aceleración gravitacional es independiente del objeto en cuestión, y por ende depende únicamente del campo gravitacional. Este hecho hace posible la geometrización de la gravitación y su dependencia únicamente de factores externos. En este sentido, la teoría de la relatividad general considera que los efectos gravitatorios no se deben a la presencia de fuerzas reales, sino a la curvatura del espacio-tiempo generada por la presencia de materia. Por ello, así como un cuerpo en caída libre es equivalente a uno

[10] Transformaciones de Lorentz.

[11] El campo gravitacional no se manifiesta mediante fuerzas actuantes, sino que corresponde a una medida de la curvatura espacio-temporal.

que se mueve sin gravedad (en cuanto que ambos son sistemas de referencia localmente inerciales), los efectos observados en sistemas acelerados son indistinguibles de los campos gravitatorios.

III. El principio de covariancia. Las leyes físicas tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia, ya sean inerciales o acelerados. En este sentido, todos los sistemas de referencia son indistinguibles y equivalentes.

2.2. La geometría diferencial en la Teoría General de la Relatividad

En el año de 1905 Einstein había publicado la Teoría de la Relatividad Especial, en la que introducía una nueva concepción del espacio y el tiempo al formular nuevas leyes de transformación entre observadores inerciales. Pero no fue hasta 1915 en que publicó la Teoría General mediante un tratamiento más general de las ideas que ya habían sido elucidadas anteriormente. Sin embargo, el lenguaje matemático utilizado era muy distinto al de su primera teoría, pues necesitaba de una geometría que se había desarrollado en el siglo XIX, hasta entonces sin aplicaciones en la física: la geometría riemanniana. En efecto, durante más de diez años trató de traducir las ideas esenciales de la Teoría General a este lenguaje matemático, con el cual encontraría completa compatibilidad de acuerdo con un concepto primordial de la teoría: la covarianza.
En Relatividad General se requiere que las medidas efectuadas por diferentes observadores se relacionen necesariamente mediante leyes de transformación que permitan que las leyes físicas sean invariantes. El principio de covariancia implica que las leyes de la física deben ser expresadas en términos de magnitudes tensoriales definidos en una variedad lorentziana, las cuales son independientes del sistema de coordenadas que se elija.

2.2.1. Criterios de invarianza

Como ya se dijo, los tensores son invariantes bajo cambio de coordenadas. Sin embargo, los operadores y los elementos que se introducen en la geometría local lorentziana, tales como la derivada de un vector y la métrica de Minkowski, definida localmente en la variedad, pueden ser generalizados y definidos independientemente de la elección de las coordenadas en un espacio-tiempo curvo.
Así tenemos que transformar estos elementos a cantidades covariantes globales:

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$$
$$\partial_\mu \to \nabla_\mu$$

A este principio, el cual es consecuencia del principio de equivalencia, se le denomina Regla de acople mínimo. Es necesario y suficiente que toda ley física lo cumpla, con la finalidad de garantizar su validez global. Un ejemplo de ello son las leyes de Newton generalizadas, de donde se infiere que un objeto libre de fuerzas inerciales siga geodésicas nulas en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

2.3. Ecuaciones de campo de Einstein

La derivación de las ecuaciones de campo de Einstein se puede hacer de distintas formas: ya sea mediante el principio de mínima acción, tomando un Lagrangiano particular[12]: hR, ó por medio de la desviación geodésica, tal como se hizo en el trabajo original. Sin embargo, de acuerdo con el propósito de esta tesis, podemos prescindir de la deducción formal y enunciar las fórmulas correspondientes con la finalidad de interpretarlas.
Las ecuaciones de campo de Einstein es un conjunto de diez ecuaciones diferenciales parciales no lineales que describen la interacción gravitacional como un resultado de la curvatura del espacio-tiempo debido a la presencia de materia y energía:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

I. $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, definido como $R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$, donde $R^{\delta}_{\mu\nu\rho}$ es el tensor de Riemann. Ésta magnitud tensorial determina una medida de la geometría de una variedad riemanniana y curva con respecto al espacio euclidiano plano.

II. R es la curvatura escalar definida como $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Es la traza invariante de la curvatura de Ricci bajo la métrica considerada.

III. Λ es la constante cosmológica, la cual fue propuesta por Einstein con la finalidad de contrarrestar los efectos gravitatorios mediante la hipótesis de un universo estático (principio cosmológico).

IV. $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento, el cual contiene la información de la presencia, densidad y distribución de la energía y la materia en todo punto del espacio-tiempo.

También se pueden expresar en términos de densidades tensoriales como:

$$h(R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}g_{\rho\sigma}R) = \mathscr{X}_{\rho\sigma} \tag{2.2}$$

Aquí $\mathscr{X}_{\rho\sigma}$ es el la densidad tensorial de energía-mometo (que incluye la constante cosmológica). En este caso el cambio de coordenadas se hace mediante h, el cual funge como el jacobiano de ambos sistemas de coordenadas.

3. La formulación de Utiyama

3.1. Principio variacional: Campos clásicos

Considero necesario explicar brevemente el principio variacional, en tanto que las propiedades de simetría de una teoría de campo se restringen a su evolución en el tiempo a partir de

[12] $h = \sqrt{-g}$, con $g = det(g_{\mu\nu})$. Más adelante h se identificará como el determinante de una tétrada.

leyes de conservación.
Nuestra discusión comienza con el principio variacional para campos clásicos, con el cual podemos derivar las ecuaciones de campo.
En la teoría de campos, el campo $Q(x,t)$ es el análogo a las coordenadas generalizadas $q_i(t)$ en donde el índice discreto se reemplaza por un vector de posición continuo x. La posición x no es una coordenada, sino un parámetro que fija la coordenada del campo Q en el punto x y en un tiempo t. En algunos casos habrá más de un campo en cada punto del espacio, por lo que se les distingue como $Q^A(x,t)$. En este caso los campos locales serán los únicos de nuestro interés, ya que en ellos la dinámica no junta diferentes puntos del espacio instantáneamente.
Para tener un sistema mecánico los campos Q^A deben estar asociados a un lagrangiano, el cual determina su evolución en el tiempo mediante propiedades especiales que permitan describir una infinidad de coordenadas. En efecto, el lagrangiano L contiene toda la información del sistema mediante:

$$L = L(Q^A(x), Q^A_{,\mu}(x); x).$$

Sólo se considera la primera derivada ya que en esta aproximación pocos son los problemas que son insolubles.
A su vez, es el resultado de integrar una densidad lagrangiana $\mathscr{L}$ en todo el espacio continuo:

$$L = \int \mathscr{L} d^3x.$$

Así el principio variacional establece que la variación de la acción[13] S es nula, lo que involucra una minimización de la energía del sistema mediante su evolución en el tiempo:

$$\frac{\delta S}{\delta Q^A} = \frac{\delta}{\delta Q^A}\int L dt = \frac{\delta}{\delta Q^A}\int \mathscr{L} d^4x = -\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu Q^A)}\right) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q^A} = 0.$$

De esta forma, obtenemos las ecuaciones de movimiento (parte derecha de la ecuación), conocidas también como ecuaciones de campo.

3.2. Teorías de norma

A lo largo de la historia, los científicos han tenido la posibilidad de observar en la naturaleza formas y estructuras bien definidas, encontrar patrones que se suceden en el tiempo ó identificar fenómenos regulares aquí y en otro lugar. En efecto, tanto el principio de inducción que generaliza aquello que se observa en un caso particular, como también la introducción de una hipótesis bajo juicios universales y necesarios, han sido parte de la estructura de la ciencia moderna para construir leyes físicas que sean válidas globalmente. De esta forma, surge la necesidad de descubrir simetrías que permitan la invariancia de las leyes físicas bajo cierto tipo de transformaciones.

[13] $S = \int L dt$.

Actualmente, la identificación de simetrías que permitan establecer leyes para describir objetos o conceptos que parecían en un principio totalmente distintos, ha sido tanto una labor exitosa en la construcción de nuevas teorías físicas, como también ha reformulado aquellas que no parecían tener mayor trascendencia en éste rubro: tal es el caso de la Teoría General de la Relatividad.

3.3. El teorema de Utiyama: la teoría general

Existen simetrías globales que, restringiéndonos al espacio-tiempo de Einstein, corresponden a transformaciones[14] de coordenadas (rotaciones) idénticas en todo punto, y que dejan invariantes a las leyes físicas. Sin embargo también existen simetrías locales, que permiten que las transformaciones sean distintas en cada punto del espacio-tiempo, considerando, de igual manera, la invariancia de las leyes. A éste tipo de simetrías se les llama simetrías de norma.
La transición de las simetrías globales a las simetrías de norma conduce necesariamente a la introducción de nuevos campos normados, que para el caso de la Teoría General de la Relatividad se identifica como el campo gravitatorio y que pronto encontraremos en el formalismo de Utiyama.
El primer indicio de esta posible transición de una teoría global a una teoría de norma es la aproximación de Yang y Mills para la conservación del espín isotópico en interacciones no electromagnéticas entre nucleones.
En primera instancia, Yang y Mills supusieron que el lagrangiano, en el que se encontraban implícitos los campos de interacción mediante una función de onda Ψ de dos componentes, era invariante bajo rotaciones del espín isotópico $\frac{1}{2}$:

$$\Psi = S\Psi' \qquad \text{Donde } S \text{ es una matriz unitaria de 2x2 con determinante 1.}$$

De esta forma, reemplazaron la transformación local del espín isotópico por una transformación global cuyos parámetros dependían de las coordenadas espaciales y temporales. Sin embargo, para mantener la invariancia del lagrangiano bajo esta transformación global tuvieron que introducir un nuevo campo B, bajo la siguiente combinación en las derivadas de Ψ:

$$(\partial_\mu - i\epsilon B_\mu)\Psi$$

En efecto, las propiedades del campo B pudieron ser determinadas mediante el postulado de invariancia del nuevo lagrangiano $A(\Psi, \Psi_\mu, B_\mu)$.
Al campo B normalmente se le denomina campo de Yang-Mills, al cual se le ha definido como una partícula de interacción, con números cuánticos bien definidos. Su importancia radica en que los neutrones y protones pueden ser considerados como dos estados diferentes para una misma función de onda, y éstos pueden transformarse, ya sea en uno o en otro, mediante la emisión o absorción del cuanto B.

[14]Transformaciones de Lorentz.

Análogamente a la aproximación de Yang y Mills pero de una manera más general, Utiyama muestra en el artículo titulado "Invariant Theoretical Interpretation of Interaction"(Utiyama, Ryoyu, Physical Review, Vol. 101, 1597, 1956), que si las propiedades de simetría de una interacción fundamental son bien conocidas en un punto dado de un espacio abstracto, entonces las ecuaciones dinámicas de la interacción, válidas para todo punto del mismo espacio, se pueden deducir de manera precisa.

En otras palabras, si el grupo de transformaciones, las cuales no afectan el tipo de interacción, se conocen localmente, y evidentemente son idénticas en todo punto, entonces se puede postular la invariancia del lagrangiano bajo una transformación global que cambie cada punto de manera distinta e independientemente[15], introduciendo un campo normado (el campo gravitatorio) que, como ya se mencionó, se encuentra íntimamente relacionado con las fuerzas ficticias que aparecen en sistemas no inerciales.

Teorema 3.1 (Utiyama)**.** *Si hay un sistema de campos $Q^A(x)$ invariantes bajo un grupo de transformaciones G dependiendo de parámetros ϵ_1, ϵ_2,$\cdots \epsilon_n$, esto es, la acción de una densidad lagrangiana es invariante bajo G, entonces podemos introducir un nuevo grupo de transformaciones G´ global el cual se obtiene cambiando los parámetros $\epsilon's$ a funciones arbitrarias $\epsilon(x)'s$ tal que, para que se preserve la invarianza de $Q^A(x)$ bajo el grupo de transformaciones G´, es necesario introducir un nuevo campo $A(x)$.*

Mediante este teorema podemos mostrar:

I. La clase de campo $A(x)$.

II. Cómo se transforma $A(x)$ bajo G´.

III. Qué tipo de interacción tienen Q y A.

IV. Determinar la densidad lagrangiana $L(Q, A)$ a partir de $L(Q)$.

V. El tipo de ecuaciones de campo permitidos para A.

Es importante mencionar que el grupo de transformaciones global G´se obtiene cambiando, como ya se dijo, $\epsilon's$ a funciones arbitrarias $\epsilon(x)'s$, esto debido a que se quiere que éste parámetro sea una función de la posición con la cual se introduce la acción del grupo sobre todo el espacio.

Dem. Teorema 3.1 Consideremos un conjunto de campos $Q^A(x)$, (A=1,2,$\cdots N$), con la densidad lagrangiana

$$L(Q^A, Q^A{}_{,\mu}) \qquad Q^A{}_{,\mu} = \partial Q^A/\partial x^\mu$$

[15]Ésto equivale a permitir que dos observadores tengan un movimiento acelerado, uno con respecto al otro.

Ahora, permitamos postular que la integral de acción referida a algún dominio arbitrario de cuatro dimensiones

$$S = \int_\Omega L\, d^4x$$

es invariante bajo la siguiente transformación infinitesimal:

$$\begin{gathered} Q^A \rightarrow Q^A + \delta Q^A \\ \delta Q^A = T_{(a)},{}^A{}_B\, \epsilon^a Q_B \\ \epsilon^a = \text{parámetro infinitesimal}\, (a = 1, 2, \cdots, n) \\ T_{(a)},{}^A{}_B = \text{coeficiente constante} \end{gathered} \tag{3.1}$$

Adicionalmente, la transformación (3.1) se asume que es un grupo de Lie G dependiendo de los n parámetros ϵ^a. Por ende, debe haber un conjunto de constantes $f_b{}^a{}_c$ llamadas "las constantes de estructura", las cuales se definen como:

$$[T_{(a)}, T_{(b)}]^A{}_B = T_{(a)},{}^A{}_C\, T_{(b)},{}^C{}_B - T_{(b)},{}^A{}_C\, T_{(a)},{}^C{}_B = f_a{}^c{}_b\, T_{(c)}{}^A{}_B \tag{3.2}$$

Y tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{gathered} f_a{}^m{}_b\, f_m{}^l{}_c + f_b{}^m{}_c\, f_m{}^l{}_a + f_c{}^m{}_a\, f_m{}^l{}_b = 0 \\ f_a{}^c{}_b = -f_b{}^c{}_a \end{gathered} \tag{3.3}$$

Las relaciones (3.3) pueden ser derivadas a partir de la identidad de Jacobi y de la definición (3.2).
Ahora, a partir del carácter invariante de S bajo la transformación (3.1) y del hecho de que esta invarianza siempre se preserva para cualquier dominio Ω, tenemos la invarianza de la propia densidad lagrangiana:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial Q^A} T_{(a)},{}^A{}_B\, Q^B + \frac{\partial L}{\partial Q^A{}_{,\mu}} T_{(a)},{}^A{}_B\, Q^B{}_{,\mu} \equiv 0 \qquad (a = 1, 2, \cdots n) \tag{3.4}$$

El símbolo $\equiv$ significa que δL debe anularse en cualquier punto global y que esta relación no depende del comportamiento de Q^A y $Q^A{}_{,\mu}$. Si tomamos en consideración la ecuación de campo para Q^A, obtenemos de (3.4) las siguientes leyes de conservación:

$$\partial J^\mu_a / \partial x^\mu = 0 \quad J^\mu_a = \frac{\partial L}{\partial Q^A{}_{,\mu}} T_{(a)},{}^A{}_B\, Q^B \tag{3.5}$$

Ahora, consideremos la siguiente transformación en lugar de (3.1):

$$\begin{gathered} \delta Q^A(x) = T_{(a)},{}^A{}_B\, \epsilon^a(x) Q^B \\ \epsilon^a(x) = \text{parámetro infinitesimal}\, (a = 1, 2, \cdots, n) \\ T_{(a)},{}^A{}_B = \text{coeficiente constante} \end{gathered} \tag{3.6}$$

En este caso δL no se anula, pero en virtud de la identidad (3.4), queda expresado de la siguiente forma :

$$\delta L \equiv \frac{\partial L}{\partial Q^A{}_{,\mu}} T_{(a)},{}^A{}_B\, Q^B \frac{\partial \epsilon^a}{\partial x^\mu} \tag{3.7}$$

Con el motivo de preservar la invarianza del lagrangiano bajo (3.6), es necesario introducir un nuevo campo, de tal forma que el lado derecho de (3.7) pueda cancelarse con la contribución de este nuevo campo:

$$A'^J(x), \quad J = 1, 2, \cdots M$$

Ahora denotemos el nuevo lagrangiano como:

$$L'(Q^A, Q^A{}_{,\mu}, A'^J)$$

Y consideremos la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} \delta Q^A(x) &= T_{(a)},{}^A{}_B\, Q^B \epsilon^a(x) \\ \delta A'^J &= U_{(a)}{}^J{}_K\, A'^K \epsilon^a(x) + C^{J\mu}{}_a \frac{\partial \epsilon^a}{\partial x^\mu} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Donde los coeficiente C y U son constantes desconocidas. Por ahora, propondremos que la nueva integral de acción S' es invariante bajo la transformación (3.8).

Ahora, nuestro trabajo consiste en responder y mostrar las cinco preguntas del principio.

Del postulado de invariancia se puede demostrar que A'^J debe estar contenida en L' con la siguiente combinación:

$$\nabla_\mu Q^A \equiv \frac{\partial Q^A}{\partial x^\mu} - T_{(a)},{}^A{}_B\, Q^B A^a{}_\mu \tag{3.9}$$

Usando $A^a{}_\mu$ en lugar de A'^J, la transformacion de A se reduce a:

$$\begin{aligned} \delta A^a{}_\mu &= S_{(c)}{}^{a,}{}_{\mu},{}^{\nu}{}_b A^b{}_\nu \epsilon^a(x) + \partial \epsilon^a / \partial x^\mu \\ \text{Donde} \qquad S_{(c)}{}^{a,}{}_{\mu},{}^{\nu}{}_b &= C^{-1a}{}_{\mu,J} U_{(c)}{}^J{}_K C^K,{}^\nu{}_b \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ahora, el nuevo lagrangiano debe tener la forma:

$$L'(Q^A, Q^A{}_{,\mu}, A^a{}_\mu) = L''(Q^A, \nabla_\mu Q^A)$$

Entonces si suponemos que:[16]

$$L''(Q^A, \nabla_\mu Q^A) = L(Q^A, \nabla_\mu Q^A)$$

[16]Ésta particular elección de L'' se debe al requerimiento de que cuando el campo A se anula, debemos tener el Lagrangiano original L.

Esto es, reemplazar $\partial Q^A/\partial x^\mu$ en el lagrangiano original L con "la derivada covariante", $\nabla_\mu Q^A$. Y si consideramos la identidad (3.4), entonces obtenemos:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu Q^A}\right|_{Q=\text{cte}} Q^B A^b{}_\nu \{f_a{}^d{}_b \delta^\nu{}_\mu - S_{(a)}{}^{d,}{}_\mu,{}^\nu{}_b\} T_{(d)},{}^A{}_B \equiv 0$$

Por lo tanto podemos determinar los coeficientes desconocidos S como sigue:

$$S_{(a)}{}^{c,}{}_\mu,{}^\nu{}_b = \delta^\nu{}_\mu f_a{}^c{}_b \tag{3.11}$$

Además usando la expresión para S, podemos probar fácilmente el carácter covariante de la derivada:

$$\delta \nabla_\mu Q^A = T_{(a)},{}^A{}_B\, \epsilon^a(x) \nabla_\mu Q^B \tag{3.12}$$

Ahora ,mediante el postulado de invarianza bajo la transformación (3.10), el posible tipo de lagrangiano para el campo libre A, se denota por:

$$L_0(A^a{}_\mu, A^a{}_{\mu,\nu}) \qquad A^a{}_{\mu,\nu} = \partial A^a{}_\mu/\partial x^\nu$$

Así es posible demostrar que la derivada de A aparece en L_0, solamente mediante la siguiente combinación:

$$F^a{}_{\mu\nu} = \frac{\partial A^a{}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^a{}_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} f_b{}^a{}_c (A^b{}_\mu A^c{}_\nu - A^b{}_\nu A^c{}_\mu) \tag{3.13}$$

Propiamente L_0 debe ser una función solamente de F Como es de esperarse. Si usamos la relación (3.3) la transformación de F esta dada por:

$$\delta F^a{}_{\mu\nu} = \epsilon^b(x) f_b{}^a{}_c F^c{}_{\mu\nu} \tag{3.14}$$

Ahora procedemos a definir un conjunto de matrices, $M_{(1)}, M_{(2)}, \cdots, M_{(n)}$, de la siguiente manera:

$$[M_{(a)}, M_{(b)}]^l{}_c F^a = f_a{}^m{}_b M_{(m)},{}^l{}_c$$

De esta forma (3.14) muestra que las n cantidades, $F^1{}_{\mu\nu}, F^2{}_{\mu\nu}, \cdots F^n{}_{\mu\nu}$,son transformadas co-gradientemente a la transformación de Q.
Finalmente sabiendo que la variación del la densidad lagrangiana total $L_T = L_0(F) + L(Q, \nabla Q)$ se anula, y considerando las ecuaciones de campo del Lagrangiano total con respecto al campo Q y A, obtenemos la siguiente ley de conservación:

$$J^\mu{}_a \equiv -\left(\frac{\partial L_T}{\partial \nabla_\mu Q^A} T_{(a)}{}^A{}_B Q^B + \frac{\partial L_0}{\partial F^b{}_{\mu\nu}} f_a{}^b{}_c A^c{}_\nu\right) \quad \text{Donde} \quad J^\mu{}_a = \partial L_T/\partial A^a{}_\mu \tag{3.15}$$

Con:

$$\partial J^\mu{}_a/\partial x^\mu = 0 \quad (a = 1, 2, \cdots n) \tag{3.16}$$

Por lo tanto, hemos obtenido una regla general para introducir un nuevo campo A de una manera definida, cuando existe alguna ley de conservación tal como la que se tiene en (3.5), o también existe una grupo de Lie el cual depende de parámetros bajo los cuales el sistema es invariante.
Q.E.D.

3.4. El grupo de Lorentz y el campo gravitacional

Primero se transforma la acción de un sistema curvilíneo x^μ a un sistema de Lorentz local (donde la acción bajo la transformación de Lorentz resulta invariante). Y después se aplica el teorema anterior para que la acción sea un invariante en el sistema curvilíneo (en todo el espacio global) bajo la transformación de Lorentz generalizada, esto por medio del cambio de los parámetros $\epsilon's$ a un conjunto de funciones $\epsilon(\mu)'s$. Consideremos un sistema de campos $Q^A(x)$ definidos con respecto a un marco de referencia lorentziano. Asumamos que la integral de acción es invariante bajo cualquier transformación de Lorentz:

$$S = \int L(Q^A, Q^A{}_{,k})d^4x$$

Alternadamente, introduzcamos un sistema arbitrario de coordenadas curvilineas x^μ $(\mu = 1,2,3,4)$, representadas por indices griegos.
El cuadrado de la longitud invariante del elemento de linea infinitesimal esta dado por:

$$ds^2 = \eta_{ik}dx^i dx^k = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad \text{Donde} \quad \eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si introducimos dos conjuntos de funciones $h^k{}_\mu$ y $h_k{}^\mu$, las cuales identificamos como tétradas, la transformación de η a g se expresa con sus respectivas relaciones como:

$$\begin{array}{ccc} g^*_{kl}h^k{}_\mu h^l{}_\nu = g_{\mu\nu}(u) & g_{\mu\nu}h_k{}^\mu h_l{}^\nu = g^*_{kl} & h_k{}^\mu h^l{}_\mu = \delta^l{}_k \\ g^{kl*}h_k{}^\mu h_l{}^\nu = g^{\mu\nu}(u) & g^{\mu\nu*}h^k{}_\mu h^l{}_\nu = g^{kl*} & h_k{}^\mu h^k{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \end{array} \tag{3.17}$$

$$det(g_{\mu\nu}) = g = -h^2 \equiv -[det(h^k{}_\mu)]^2$$

El significado geométrico de los conjuntos $h^k{}_\mu$ y $h_k{}^\mu$, es que permiten asignar a cada uno de los cuatro vectores globales un sistema de referencia lorentziano local. Por ende, un sistema de referencia local definido en cualquier punto global se relaciona con otro sistema local mediante transformaciones de Lorentz:

$$x^k \to x^k + \epsilon^k{}_l x^l$$

$$h_k{}^\mu \to h_k{}^\mu + \delta h_k{}^\mu \quad \text{Con} \quad \epsilon^{kl} = -\epsilon^{kl}$$

$$\delta h_k{}^\mu = -\epsilon^l{}_k h_l{}^\mu$$

Debido a su significado geométrico, podemos transformar el tensor global en su correspondiente tensor local usando $h^k{}_\mu$ o $h_k{}^\mu$:

$$Q^k(u) = h^k{}_\mu(u)Q^\mu(u)\ ,\ Q^\mu(u) = h_k{}^\mu(u)Q^k(u) \quad \text{Donde} \quad Q^k(u) = Q^k\{x(u)\}$$

De esta forma podemos reescribir la integral de accion como sigue:

$$\tilde{I} = \int \tilde{L}(Q^A(u), Q^A{}_{,\mu}(u), h^k{}_\mu(u))d^4u \quad \text{Donde } \tilde{L} = L(Q^A(u), h_k{}^\mu(u)Q^A{}_{,\mu}(u))h \tag{3.18}$$

Ahora, debido a que cada punto local le corresponde un punto global y I es invariante bajo transformaciones de Lorentz, entonces también $\tilde{I}$ es invariante bajo las mismas transformaciones:

$$\delta h^k{}_\mu = \epsilon^k{}_l h^l{}_\mu$$

$$\delta Q^A = \tfrac{1}{2}T_{(kl)},{}^A{}_B Q^B \epsilon^{kl} \tag{3.19}$$

$$u^\mu = \text{Sin cambiar}$$

Donde $T_{(kl)},{}^A{}_B$ es el elemento (A, B) de la matriz $T_{(kl)}$ de dimensión NxN, el cual es la representación del generador del grupo de Lorentz. Por ser éste un grupo de Lie y en vista de (3.2), la matriz $T_{(kl)}$ satisface la siguiente relación :

$$[T_{(kl)}, T_{(m,n)}] = \frac{1}{2}f_{kl},{}^{ab}{}_{mn}T_{(ab)}, \; T_{(kl)} = -T_{(lk)} \tag{3.20}$$

Ahora, si a las funciones $h^k{}_\mu$ se les considera un conjunto de campos, nuestro lagrangiano toma la forma adecuada para que se aplique el teorema (3.1), y así garantizar la invarianza global de I.
Consideremos "la transformación de Lorentz generalizada", la cual se genera mediante el reemplazo de los parámetros infinitesimales ϵ^{ik}, por un conjunto de funciones arbitrarias $\epsilon^{ik}(u)$. Bajo ésta transformación, Q^A y $h^k{}_\mu$ son transformados como:

$$\begin{aligned} \delta h^k{}_\mu &= \epsilon^k{}_l(u)h^l{}_\mu \\ \delta Q^A &= \tfrac{1}{2}\epsilon^{kl}(u)T_{(kl)},{}^A{}_B Q^B \end{aligned} \tag{3.21}$$

De esta forma, para mantener la invarianza de I bajo la transformación (3.21), es necesario introducir un nuevo campo $A^{kl}{}_\mu(u)$=$-A^{lk}{}_\mu(u)$ el cual se transforma, de acuerdo con (3.10), como se muestra a continuación:

$$\delta A^{kl}{}_\mu = \frac{1}{4}f_{ab},{}^{kl}{}_{hg}\epsilon^{ab}(u)A^{hg}{}_\mu + \frac{\partial \epsilon^{kl}}{\partial u^\mu} = \epsilon^k{}_m A^{ml}{}_\mu + \epsilon^l{}_m A^{km}{}_\mu + \frac{\partial \epsilon^{kl}}{\partial u^\mu} \tag{3.22}$$

El nuevo lagrangiano es:

$$\tilde{L}(Q^A, \nabla'_\mu Q^A, h^k{}_\mu) = hL\{Q^A, (h_k{}^\mu \nabla'_\mu Q^A)\} \quad \text{Donde } \nabla'_\mu Q^A = \frac{\partial Q^A}{\partial u^\mu} - \frac{1}{2}A^{kl}{}_\mu T_{(kl)},{}^A{}_B Q^B \tag{3.23}$$

A continuación, veremos la relación entre $A^{kl}{}_{\mu}$ y $h^{k}{}_{\mu}$.
Para obtener esta relación debemos considerar el tensor local $Q^{kl}(u)(=Q^{a})$. Así mediante (3.23) tenemos:

$$\nabla'_{\mu}Q^{kl}=\frac{\partial Q^{kl}}{\partial u^{\mu}}-A^{km}{}_{\mu}Q_{m}{}^{l}-A^{lm}{}_{\mu}Q^{k}{}_{m} \tag{3.24}$$

$$\nabla'_{\mu}Q^{k\nu}=\frac{\partial Q^{k\nu}}{\partial u^{\mu}}-A^{km}{}_{\mu}Q_{m}{}^{\nu}+\Gamma'_{\rho\mu}{}^{\nu}Q^{k\rho} \tag{3.25}$$

Donde $Q^{m\nu}$ y Γ' están definidas como:

$$Q^{k\nu}=h_{m}{}^{\nu}Q^{km}$$

$$\Gamma'_{\nu\mu}{}^{\rho}=h_{l}{}^{\rho}\tfrac{\partial h^{l}{}_{\nu}}{\partial u^{\mu}}-h_{k}{}^{\rho}h_{l\nu}A^{kl}{}_{,\mu}$$

Y por (3.23), (3.24), y (3.25) llegamos a la definición de derivada covariante usual ∇_{μ} $Q^{kl\cdots,\rho\sigma\cdots}{}_{ab\cdots,\alpha\beta\cdots}$, sin introducir el concepto de paralelismo, con la excepción de que para los índices latinos los campos $A^{kl}{}_{,\mu}$ deben ocupar el lugar de los coeficientes de la conexión afín Γ, y para los índices griegos, Γ' debe sustituirse en lugar de Γ. De esta manera, la derivada covariante usual coincide con la derivada covariante ∇'_{μ} $Q^{kl\cdots,\rho\sigma\cdots}{}_{ab\cdots,\alpha\beta\cdots}$, en el caso particular de un tensor global.
Así pues la relación entre h y A se puede derivar mediante la siguiente consideración:

$$\begin{aligned}\nabla'_{\mu}g^{kl*} &= -A^{kl}{}_{\mu}-A^{lk}{}_{\mu}=0\\ &= h^{k}{}_{\rho}h^{l}{}_{\nu}\nabla'_{\mu}g^{\rho\nu}=h^{k}{}_{\rho}h^{l}{}_{\nu}\nabla_{\mu}g^{\rho\nu}\end{aligned}$$

De la expresión anterior tenemos:

$$\nabla_{\mu}g^{\rho\nu}=\frac{\partial g^{\rho\nu}}{\partial u^{\mu}}+\Gamma'_{\sigma\mu}{}^{\rho}g^{\sigma\nu}+\Gamma'_{\sigma\mu}{}^{\nu}g^{\rho\sigma}=0$$

Y si asumimos que la conexión es simétrica, $\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\rho}=\Gamma'_{\nu\mu}{}^{\rho}$, entonces la solución de la ecuación anterior es:

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\rho}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial u^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\sigma}}\right)\equiv\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} \tag{3.26}$$

O de la definición de (3.25) $\quad \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho}=h_{l}{}^{\rho}\dfrac{\partial h^{l}{}_{\nu}}{\partial u^{\mu}}-h_{k}{}^{\rho}h_{l\nu}A^{kl}{}_{,\mu}$

Y así hemos obtenido la relación buscada.
Ahora, consideremos el lagrangiano del campo libre A:

$$L_{0}(h^{k}{}_{\mu},A^{kl}{}_{\mu},\partial A^{kl}{}_{\mu}/\partial u^{\nu})$$

El postulado de invarianza para L_0 bajo la transformación de Lorentz generalizada implica que:

$$L_0(h^k{}_\mu, F^{kl}{}_{\mu\nu})$$

Donde F está definida como:

$$\begin{aligned} F^{kl}{}_{\mu\nu} &= \frac{\partial A^{kl}{}_\nu}{\partial u^\mu} - \frac{\partial A^{kl}{}_\mu}{\partial u^\nu} - \frac{1}{4} f_{ab,}{}^{kl}{}_{mn}(A^{ab}{}_\mu A^{mn}{}_\nu - A^{ab}{}_\nu A^{mn}{}_\mu) \\ &= \frac{\partial A^{kl}{}_\nu}{\partial u^\mu} - \frac{\partial A^{kl}{}_\mu}{\partial u^\nu} + (A^{kb}{}_\mu A^l{}_{b\nu} - A^{kb}{}_\nu A^l{}_{b\mu}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

(3.27) puede ser expresado como:

$$F^{kl}{}_{\mu\nu} = \nabla_\mu A^{kl}{}_\nu - \nabla_\nu A^{kl}{}_\mu - (A^{kb}{}_\mu A^l{}_{b\nu} + A^{kb}{}_\nu A^l{}_{b\mu}) \tag{3.28}$$

Ahora, Utiyama demuestra que:

$$F^{kl}{}_{\mu\nu} = h^{l\lambda} h^k{}_\alpha R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} \tag{3.29}$$

De esta forma, A se encuentra en L_0 mediante la combinación F. Así pues el lagrangiano total esta dado por:

$$\tilde{L}_T(Q^A, \nabla_\mu Q^A, h^k{}_\mu, \partial h^k{}_\mu/\partial u^\nu, \partial^2 h^k{}_\mu/\partial u^\nu \partial u^\lambda) = \tilde{L}_0(h^k{}_\mu F^{kl}{}_{\mu\nu}) + \tilde{L}(Q^A, \nabla_\mu Q^A, h^k{}_\mu)$$

Y las ecuaciones de campo para Q y h son:

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta Q^A} = 0$$

$$\frac{\delta \tilde{L}_T}{\delta h^i{}_\mu} = \frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^i{}_\mu} - \frac{\partial}{\partial u^\nu}\left(\frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^i{}_{\mu,\nu}}\right) + \frac{\partial}{\partial u^\mu \partial u^\lambda}\left(\frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^i{}_{\mu,\nu\lambda}}\right) = 0$$

Ahora, siguiendo el mismo procedimiento del caso general, tenemos las siguientes identidades:

$$\frac{\delta \tilde{L}_T}{\delta Q^A}\delta Q^A + \frac{\delta \tilde{L}_T}{\delta h^i{}_\mu}\delta h^i{}_\mu \equiv 0 \tag{3.30}$$

y

$$(\partial/\partial u^\mu)\tilde{M}^\mu \equiv 0 \tag{3.31}$$

Donde $\tilde{M}^\mu$ es:

$$\tilde{M}^\mu = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \nabla_\mu Q^A}\delta Q^A + \frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^i{}_{\rho,\mu}}\delta h^i{}_\rho + \frac{\delta \tilde{L}_T}{\delta h^i{}_{\rho,\mu\nu}}\delta h^i{}_{\rho,\nu} - \frac{\partial}{\partial u^\nu}\left(\frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^i{}_{\rho,\mu\nu}}\right)\delta h^i{}_\rho \tag{3.32}$$

El coeficiente de $\partial^2\epsilon/\partial u^2$ en (3.31) se anula:

$$\frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^i{}_{\rho,\mu\nu}} h_{k\rho} - \frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^k{}_{\rho,\mu\nu}} h_{i\rho} \equiv 0$$

Entonces $\tilde{M}^\mu$ se expresa como:

$$\tilde{M}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{ik}\tilde{M}^\mu{}_{ik}$$

$$\tilde{M}^\mu{}_{ik} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \nabla_\mu Q^A} T_{(ik)},{}^A{}_B Q^B + \left\{ \frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^i{}_{\rho,\mu}} h_{k\rho} + \frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^i{}_{\rho,\mu\nu}} \delta h_{k\rho,\nu} - \frac{\partial}{\partial u^\nu}\left(\frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial h^i{}_{\rho,\mu\nu}}\right)\delta h_{k\rho} \right\}$$
$$-\{\text{k e i intercambiados}\}$$

Por lo tanto, si sustituimos esta expresión en (3.31), obtenemos el resultado trivial:

$$\partial \tilde{M}^\mu{}_{ik}/\partial u^\mu \equiv 0 \qquad \text{Como también} \quad \tilde{M}^\mu{}_{ik} \equiv 0 \tag{3.33}$$

Con éste resultado y usando un lagrangiano particular: hR podemos deducir las ecuaciones de campo de Einstein, sin haber iintroducido un elemento geométrico en la formulación. De aquí, podemos concluir que todos los elementos geométricos importantes tienen una equivalencia directa con los elementos tensoriales que se introducen por medio del postulado de invarianza bajo un grupo de transformaciones que actúan globalmente en un espacio abstracto.
A continuación se definirán y enunciarán conceptos importantes para entender con más claridad la formulación de Utiyama, y por ende, hacer una interpretación formal del mismo mediante campos de referencia móviles y formas diferenciales.

4. Grupo de Lorentz

4.1. Grupos de Lie

Definición 4.1. *Grupo de Lie*
Un grupo de Lie es un grupo $\mathscr{G}$ con una estructura diferenciable tal que el mapeo $\mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ dado por $(x, y) \to xy$, con $x, y \in \mathscr{G}$, y el mapeo $\mathscr{G} \to \mathscr{G}$, definido por $x \to x^{-1}$ son ambos mapeos C^∞.

Es decir, un grupo de Lie es una variedad diferenciable donde se definen mapeos suaves que son compatibles con la estructura diferenciable.

Definición 4.2. *Representación fiel de un grupo*
Sea $\mathscr{G}$ un grupo. La representación fiel de $\mathscr{G}$, es un subgrupo de $GL(n)$[17], con la propiedad de que $\forall g, h \in \mathscr{G}$ distintos existe una transformación lineal $\boldsymbol{R} \in GL(n)$, tal que si $\boldsymbol{R}(g) \neq \boldsymbol{R}(h)$:

$$\boldsymbol{R}(g)\boldsymbol{R}(h) = \boldsymbol{R}(gh)$$

[17]Las matrices invertibles de nxn donde está definido un producto.

Todo grupo de Lie $\mathscr{G}$ tiene una representación fiel si se consideran únicamente los aspectos locales del grupo. En este sentido, es necesario restringir localmente a la variedad del grupo de Lie con una representación de elementos $\mathbf{a} \in \mathscr{G}$ infinitesimales, en este caso con las transformaciones lineales infinitesimales del grupo $GL(n)$ (ver (3.6)):

$$\mathbf{R(a)} = \mathbf{I} + \epsilon^a \mathbf{T} \quad \text{con } \mathbf{T} \in GL(n), \text{ a} = \{1, \ldots, n\}, \text{ y } \epsilon^a\text{=parámetros infinitesimales.} \tag{4.1}$$

Éstas transformaciones definen un álgebra que nos proporciona toda la información de la estructura local del grupo de Lie; considerando la expansión de la inversa de (4.1) hasta segundo orden y calculando el producto $\mathbf{R(a\ \ b\ \ a^{-1}\ \ b^{-1})}$, obtenemos, en lugar de la identidad, un término que junto con la suma y resta definen un álgebra no conmutativa:

Definición 4.3. *Álgebra de Lie*
Un álgebra de Lie $\mathscr{G}$ es un espacio vectorial sobre un campo F, en el cual está definida una operación binaria $[,]$ (bracket de Lie), bilineal y antisimétrica, la cual satisface la siguiente identidad (identidad de Jacobi):

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathscr{G}. \tag{4.2}$$

En efecto, un grupo de Lie tiene asociado localmente un álgebra de Lie, pues dada una variedad diferenciable, en cada punto de ella se define un espacio tangente en el que se tienen los elementos del álgebra como campos vectoriales. .

La representación de los generadores del grupo se expresa mediante las componentes (A, B) de la matriz de transformación $\mathbf{T}$, es decir, $\mathbf{T}_{(a)}, {}^{A}{}_{B}$.
Por ende, si expresamos a $\mathbf{T}$ en términos de su base $\mathbf{T}_{(a)}$, con $a = \{1, \ldots, n\}$, cada elemento de la base es también elemento del álgebra de Lie, cumpliendo así las propiedades que se enunciaron en (4.2).

4.2. Grupo de Lorentz

Definición 4.4. *El grupo de Lorentz se puede ver como el grupo de todas las transformaciones lineales isométricas, extendido al espacio-tiempo de Minkowski, las cuales tienen la particularidad de dejar el origen fijo.*

El grupo de Lorentz es isomorfo al grupo de matrices $O(1, 3)$, el cual a su vez es un grupo de Lie, que preserva la norma definida a partir del tensor métrico de Minkowski g^*:

$$ds^2 = g^*_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{4.3}$$

En coordenadas cartesianas.

En este sentido podemos definir cualquier transformación del grupo de Lorentz mediante matrices de 4×4 heredando algunas propiedades importantes:

I. Sea W una matriz en el grupo de Lorentz. Si W preserva la norma (4.3), entonces:

$$det(W) = \begin{cases} 1 & \text{Transformación de Lorentz propia} \\ -1 & \text{Transformación de Lorentz impropia} \end{cases}$$

II. Todas las matrices que sean transformaciones de Lorentz propias forman un grupo de Lie, las cuales obedecen el álgebra de Lie con todas sus propiedades bien definidas. En el caso de las impropias, el producto no siempre genera otra transformación impropia.

Debido a que el grupo de las transformaciones de Lorentz dejan el origen fijo y son isométricas, las transformaciones de Lorentz propias pueden ser vistas como rotaciones en el espacio-tiempo de Minkowski, las cuales preservan la orientación espacial.

Sin embargo, para obtener cualquier transformación de Lorentz definida en relatividad especial, tenemos que restringir el grupo de Lorentz de tal manera que se preserve la orientación del espacio y la dirección del tiempo.

Definición 4.5. *Grupo de Lorentz restringido* $SO^+(1,3)$
El grupo de Lorentz restringido es el grupo de Lorentz que preserva tanto su orientación como la dirección del tiempo.

Debido a que $SO^+(1,3)$ es un subgrupo del grupo de difeomorfismos en $\mathbf{R}^4$ $diff(\mathbf{R}^4)$, el álgebra de Lie se identifica con campos vectoriales definidos en $\mathbf{R}^4$, mediante seis generadores distintos: [18]

$$\text{Rotaciones}\begin{cases} T_{12} = -z\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial z} \\ T_{23} = -x\dfrac{\partial}{\partial z} + z\dfrac{\partial}{\partial x} \\ T_{31} = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{Boosts}\begin{cases} T_{01} = x\dfrac{\partial}{\partial t} + t\dfrac{\partial}{\partial x} \\ T_{02} = y\dfrac{\partial}{\partial z} + t\dfrac{\partial}{\partial y} \\ T_{03} = z\dfrac{\partial}{\partial x} + t\dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Los primeros tres (de izquierda a derecha) obedecen a los generadores del grupo de rotaciones en $\mathbf{R}^3$ (conocidos como los operadores del momento angular), mientras que los últimos tres (Boosts) se determinan por la dirección temporal con alguna de las direcciones espaciales.
Es evidente que los generadores del momento angular cumplen con la condición íntrínseca (3.2) de los grupos de Lie, sin embargo, el boost no cumple con las condiciones debido a que no hay manera de pasar de una componente espacial a la otra, dejando fija la componente temporal.

[18]Para poder hacer una interpretación de la formulación de Utiyama, respetaremos la notación de los generadores asociándoles a cada uno de ellos dos componentes que involucran las dos coordenadas del campo vectorial.

Por ende el boost no es considerado un subgrupo de Lie.
Podemos calcular las constantes de estructura del subgrupo de rotaciones de la siguiente forma.
Sabemos que:

$$[T_{ab}, T_{cd}] = \epsilon_{abcdef} T_{ef} \tag{4.4}$$

Por ende debido a las propiedades de las constantes de estructura ${f_{ab}}^{cd}{}_{ef}$, entonces:

$$\begin{aligned}
{f_{12}}^{31}{}_{23} = {f_{23}}^{12}{}_{31} = {f_{31}}^{23}{}_{12} &= 1 \\
{f_{12}}^{23}{}_{23} = {f_{12}}^{12}{}_{23} = {f_{23}}^{23}{}_{31} = {f_{23}}^{31}{}_{31} = {f_{31}}^{12}{}_{12} = {f_{31}}^{31}{}_{12} & \\
= {f_{31}}^{23}{}_{23} = {f_{31}}^{31}{}_{23} = {f_{23}}^{23}{}_{12} = {f_{23}}^{12}{}_{12} = {f_{12}}^{12}{}_{31} = {f_{12}}^{31}{}_{31} &= 0 \\
{f_{31}}^{12}{}_{23} = {f_{23}}^{31}{}_{12} = {f_{12}}^{23}{}_{31} &= -1
\end{aligned}$$

5. Formas diferenciales

5.1. Conceptos básicos

5.1.1. Formas diferenciales

Definición 5.1. *Covector*
Sea $\boldsymbol{V}$ *un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo* $\boldsymbol{R}$ *y sea* $\boldsymbol{V^*}$ *su espacio dual. Entonces* $\boldsymbol{V^*}$ *es un espacio cuyos elementos son funciones lineales de* $\boldsymbol{V}$ *a* $\boldsymbol{R}$ *(*σ*:* $\boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{R}$ *); a estos elementos los llamaremos covectores. Si* $\sigma \in \boldsymbol{V^*}$ *entonces para cualquier* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ *y* $\alpha \in \boldsymbol{R}$ *, la adición y multiplicación por escalares en* $\boldsymbol{V^*}$ *está definida por:*

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(\boldsymbol{v}) = \sigma_1(\boldsymbol{v}) + \sigma_2(\boldsymbol{v}), \qquad (\alpha\sigma)(\boldsymbol{v}) = \alpha(\sigma(\boldsymbol{v}))$$

Definición 5.2. *Covector tangente en variedades*
Sea M *una variedad* C^∞ *y asumimos que* $p \in M$*. Sea* $\sigma_p \in T_p^*(M)$ *un mapeo lineal* $\sigma_p : T_p(M) \rightarrow \boldsymbol{R}$ *y su valor en* $X_p \in T_p(M)$ *se denota por* $\sigma_p(X_p)$*. Dada una base* $e_{1p}, \cdots, e_{np}$ *de* $T_p(M)$*, existe una base dual única* ${e^1}_p, \cdots, {e^n}_p$*, la cual satisface* ${e^\mu}_p(e_{\nu p}) = \delta^\mu_\nu$*. Las componentes de* σ_p*en la base dual son equivalentes a los valores de* σ_p *en la base* $e_{1p}, \cdots, e_{np}$*, por lo que:*

$$\sigma_p = \sum_{\mu=1}^{n} \sigma_p(e_{\mu p}) e_p^\mu$$

En otras palabras, las componentes de un vector son covectores base evaluados en el vector correspondiente:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{\nu=1}^{n} e^\nu(\boldsymbol{v}) e_\nu$$

Definición 5.3. *Tensor de orden (r,s)*
Un tensor Φ en V es un mapeo multilineal:

$$\Phi : \underbrace{\boldsymbol{V} \times \cdots \times \boldsymbol{V}}_{r} \times \underbrace{\boldsymbol{V}^* \times \cdots \times \boldsymbol{V}^*}_{s} \to \boldsymbol{R}$$

Donde $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{V}^*$ son el espacio vectorial y el espacio vectorial dual respectivamente, r es el orden del tensor covariante y s el orden del tensor contravariante.

Teorema 5.1. *Con la definición natural de suma y multiplicación por elementos de $\boldsymbol{R}$, el conjunto $\mathscr{T}_s^r$ de todos los tensores de orden (r,s) en $\boldsymbol{V}$ forma un espacio vectorial de dimensión n^{r+s}.*

Definición 5.4. *Campo tensorial*
Un C^∞-campo tensorial covariante de orden r en una variedad M-C^∞ es una función Φ la cual asigna a cada $p \in M$ un elemento ϕ_p de $\mathscr{T}^r(T_p(M))$ y la cual tiene la propiedad adicional que dado cualquier conjunto de C^∞-campos vectoriales $X_1, \ldots, X_r$, en un conjunto abierto U de M, entonces $\Phi(X_1, \ldots, X_r)$ es una C^∞-función en U, definida por $\Phi(X_1, \dot{;} X_r)(p) = \Phi_p(X_{1p}, \ldots, X_{rp})$. Denotamos como $\mathscr{T}^r(M)$ el conjunto de todos los campos tensoriales C^∞-covariantes de orden r en M.

Definición 5.5. *Tensor covariante simétrico y antisimétrico*
Decimos que $\Phi \in \mathscr{T}^r(\boldsymbol{V})$, donde $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial, es simétrico si para cada $1 \leq \mu, \nu \leq r$, tenemos:

$$\Phi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\mu, \ldots, \boldsymbol{v}_\nu, \ldots, \boldsymbol{v}_r) = \Phi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\nu, \ldots, \boldsymbol{v}_\mu, \ldots, \boldsymbol{v}_r).$$

Similarmente, decimos que el tensor es antisimétrico si tenemos que:

$$\Phi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\mu, \ldots, \boldsymbol{v}_\nu, \ldots, \boldsymbol{v}_r) = -\Phi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\nu, \ldots, \boldsymbol{v}_\mu, \ldots, \boldsymbol{v}_r).$$

Definición 5.6. *r-forma diferencial*
Un campo tensorial antisimétrico covariante de orden r en M se le denomina una r-forma diferencial. El conjunto de todas las formas diferenciales, denotada por $\bigwedge^r(M)$, forma un subespacio de $\mathscr{T}^r(M)$.

5.1.2. Producto Cuña

Definición 5.7. *Producto tensorial*
El producto tensorial entre $\varphi \in \mathscr{T}^r$ y $\psi \in \mathscr{T}^s$ es un mapeo bilineal y asociativo $\mathscr{T}^r \times \mathscr{T}^s \to \mathscr{T}^{r+s}$, denotado por $\varphi \otimes \psi$, y definido por:

$$\varphi \otimes \psi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r+s}) = \varphi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r)\psi(\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r+s})$$

Donde se le ha definido como el producto de los tensores evaluados para que se satisfaga la bilinealidad sobre los escalares.

De esta forma si $e^1, \cdots, e^n$ es una base de $\mathbf{V}^* = \mathscr{T}^1$, entonces, la base de $\mathscr{T}^r$ se genera a partir del producto tensorial entre los covectores base, por lo que $\forall \varphi \in \mathscr{T}^r$

$$\varphi = \sum_{\mu 1} \cdots \sum_{\mu r} a_{\mu 1 \cdots \mu r} e^{\mu 1} \otimes \cdots \otimes e^{\mu r}$$

Donde a son las componentes de φ y funciones-C^∞, y $\{e^{\mu 1} \otimes \cdots \otimes e^{\mu r}\}$ es base de $\mathscr{T}^r$ con $1 \leq \mu 1, \ldots, \mu r \leq n$. Por consiguiente el producto entre campos tensoriales sobre M se define como el producto tensorial en cada punto de M. Así se forma el campo tensorial de orden r+s definido en $T_p(M)$ $\forall p \in M$ si es C^∞.
El producto tensorial entre dos tensores antisimétricos de orden r y s, no es en general, un tensor antisimétrico de orden r+s. Pues suponer de antemano la antisimetría de r o s intercambiando dos vectores o covectores, no garantiza la antisimetría del producto al intercambiar un vector por un covector.
Sin embargo, cada tensor en general determina un único tensor antisimétrico, mediante su antisimetrización cambiando el signo de cada término en el caso que sea necesario.
De esta manera es necesario definir el siguiente producto entre tensores que sí cumpla con lo anunciado anteriormente:

Definición 5.8. *Producto cuña*
El producto cuña o producto exterior es un mapeo bilineal y asociativo $\bigwedge^r(\boldsymbol{V}) \times \bigwedge^s(\boldsymbol{V}) \to \bigwedge^{r+s}(\boldsymbol{V})$ *restringido al espacio vectorial de todas las formas diferenciales sobre* $\boldsymbol{R}$, $\bigwedge(M)$. *El producto cuña se denota por* $(\varphi \wedge \psi)_p = \varphi_p \wedge \psi_p$ *con* $\varphi \in \bigwedge^r$, $\psi \in \bigwedge^s$, *y satisface la siguiente fórmula:*

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{rs} \psi \wedge \varphi$$

Es importante mencionar que cualquier tensor es invariante bajo cambio de coordenadas. Las componentes de vectores covariantes fungen como funciones evaluadas en los vectores base, Y así como los vectores son invariantes bajo éstas transformaciones, los tensores de éste tipo también.

5.1.3. Diferencial exterior

Sea M una variedad C^∞ y sea $\bigwedge(M)$ el conjunto de todas las formas diferenciales en M. Entonces existe un único mapeo $\mathbf{R}$ -lineal $d_M : \bigwedge(M) \to \bigwedge(M)$ tal que:

I. Si $f \in \bigwedge^0(M) = C^\infty(M)$, entonces $d_M f = df$, la diferencial de$f$.

II. Si $\theta \in \bigwedge^r(M)$ y $\sigma \in \bigwedge^s(M)$, entonces $d_M(\theta \wedge \sigma) = d_M\theta \wedge \sigma + (-1)^r \theta \wedge d_M\sigma$

III. $d_M^2 = 0$

IV. Es un mapeo restringido a conjuntos abiertos de $\bigwedge^r(M)$ en $\bigwedge^{r+1}(M)$.

De esta forma la diferencial de cada una de las funciones coordenadas de un sistema de coordenadas son covectores y éstos a su vez forman una base de cualquier forma diferencial definida localmente.

5.2. Formas de la conexión y ecuaciones de estructura

A partir de ésta sección es importante diferenciar entre los índices latinos y los griegos. Los índices latinos corresponden a índices tetradiales (locales), mientras que los índices griegos corresponden a índices de coordenadas.

Definición 5.9. *Símbolos de Christoffel*
Sea M una variedad diferenciable, y sea el conjunto $e_1, e_2, \cdots, e_N$ un campo C^∞ de vectores base definido en el espacio tangente T_pM de la variedad M. De acuerdo con la elección arbitraria de un sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}$ local en un abierto U, los vectores base se escriben como $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ $\forall \mu \in [1, n]$. Entonces definimos un conjunto de funciones diferenciales, los símbolos de Christoffel, tal que la derivada covariante de éstos vectores base esté expresada en la misma base:

$$\nabla_{e_\mu} e_\nu = \sum_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} e_\rho \tag{5.1}$$

Por el teorema de Levi-Civita, la conexión riemanniana en M es única y sólo depende de los símbolos de Christoffel (5.1), siendo independiente del sistema de coordenadas que se elija. Una de las propiedades más importantes, imprescindibles para nuestro propósito, es la simetría de los símbolos de Christoffel en sus índices inferiores.
Dado que se trata de una conexión riemanniana, y por ende simétrica, entonces para el conjunto $e_1, e_2, \cdots, e_N$ de vectores base en un sistema de coordenadas se tiene que:

$$\sum_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} e_\rho - \sum_\rho \Gamma^\rho_{\nu\mu} e_\rho = \nabla_{e_\mu} e_\nu - \nabla_{e_\nu} e_\mu = [e_\mu, e_\nu] = 0$$

Por lo tanto obtenemos la simetría $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$.

Ahora, como T_pM es isomorfo al espacio dual tangente T^*_pM, si consideramos uno de ellos, el otro está determinado automáticamente . Entonces $\forall\ p \in U\ \exists\ \{e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ de clase C^∞ en $T^*_pM \ \mid\ e^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$.
Aquí es importante mencionar que los símbolos de Christoffel tienen índices de coordenadas.

Definición 5.10. *Símbolos de Cartan*
Podemos definir n^2 uno-formas Γ^i_j, llamadas formas de la conexión ó símbolos de Cartan, de la siguiente manera:

$$\Gamma^i_j = \sum_k \Gamma^i_{kj} e^k \quad \text{ó} \quad \Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_j(e_k) \tag{5.2}$$

Por la linealidad de la conexión sobre las funciones a_i de clase C^∞, para todo campo vectorial $X = \sum_i^n a_i e_i$, la ecuación (5.1) se puede expresar como:

$$\nabla_X e_j = \sum_k \Gamma_j^k(X) e_k \tag{5.3}$$

Por lo tanto, dado U y un campo de co-vectores base en U, la conexión ∇ en U está completamente determinada por los símbolos de Cartan Γ_j^i.
A diferencia de los símbolos de Christoffel, los símbolos de Cartán están expresados con índices tetradiales.

Definición 5.11. *La referencia móvil*
Una referencia móvil es el conjunto $(M, e_1, e_2 \cdots e_n)$ dependiente de uno o varios parámetros reales, el cual está determinado por una transformación T del grupo lineal-afín que cumple con las siguientes condiciones:

I. *El punto $M \in \boldsymbol{R}^n$ es transformado desde el origen $0 \in \boldsymbol{R}^n$.*

II. *El conjunto de vectores base $e_1, e_2 \cdots e_n$, cada uno en $\boldsymbol{R}^n$, se obtiene mediante la transformación lineal homogénea asociada a T de la base canónica en $\boldsymbol{R}^n$.*

III. *La condición de independencia lineal: $det(M, e_1, e_2 \cdots e_n) \neq 0$*

La referencia móvil constituye un abierto U en $\mathbf{R}^{n(n+1)}$y sus elementos son funciones diferenciales de U bajo la proyección en $\mathbf{R}^n$.
Así, usando la condición I y IV de la definición de producto exterior, sabemos que el conjunto $(dM, de_1, de_2 \cdots de_n)$ son $n+1$ formas diferenciales de orden 1 con valores evaluados en $\mathbf{R}^n$.
Para cada r en el abierto U, el conjunto $e_1(r), e_2(r) \cdots e_n(r)$ forma una base en $\mathbf{R}^n$.

Teorema 5.2. *Sea $U \in M$ abierto y $\{e^k\}_{k=1}^n$ una familia de co-vectores base definidos en el espacio dual T_P^*M. Asi pues se tienen sus vectores base correspondientes $\{e_k\}_{k=1}^n$. Entonces $\exists$ Γ_i^j uno-formas (Símbolos de Cartan) únicas en U, tales que:*

I. $de^i = \sum_j e^j \wedge \Gamma_j^i \qquad 1 \leq i \leq n$

II. $dg_{ij} = \sum_k \Gamma_i^k g_{kj} + \sum_k g_{ik} \Gamma_j^k \qquad 1 \leq i \ , \ j \leq n$

Ahora, como bien sabemos el tensor métrico sube y baja los índices, por lo que:

$$\Gamma_{ij} = \sum_k \Gamma_i^k g_{kj}$$

De esta forma si tomamos $g = g*$ (tensor de Minkowski), entonces de la segunda ecuación sabemos que $dg_{ij}^* = \Gamma_{ij} = +\Gamma_{ji} = 0$. Por lo tanto obtenemos la antisimetría de las formas de la conexión en sus dos índices inferiores:

$$\Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji}$$

Ahora, supongamos que ${R_i}^j{}_{kl}$ son las componentes tetradiales de la curvatura, relativo a los vectores base:

$$R(e_k, e_l) \cdot e_i = \sum_j {R_i}^j{}_{kl}\ e_j$$

Definición 5.12. *Formas de la curvatura*
Ahora, definamos n^2 dos-formas Ω_i^j, llamadas formas de la curvatura, como:

$$\Omega_i^j = \sum_{1\leq k<l\leq n} {R_i}^j{}_{kl}\ e^k \wedge e^l = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1} {R_i}^j{}_{kl}\ e^k \wedge e^l \tag{5.4}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \Omega_i^j(e_k e_l) = \sum_{1\leq k<l\leq n} {R_i}^j{}_{kl}\ e^k \wedge e^l(e_k, e_l) &= \sum_{1\leq k<l\leq n} {R_i}^j{}_{kl}\ [e^k(e_k)e^l(e_l) - e^k(e_l)e^l(e_k)] \\ &= \sum_{1\leq k<l\leq n} {R_i}^j{}_{kl}\ [\delta_k^k\delta_l^l - \delta_l^k\delta_k^l] \end{aligned}$$

El segundo término de la resta se anula sumando los índices correspondientes y considerando sus restricciones. Así pues:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{1\leq k<l\leq n} {R_i}^j{}_{kl}\ \delta_k^k\delta_l^l \right) e_j = \sum_{j=1}^n {R_i}^j{}_{kl} e_j = R(e_k, e_l) \cdot e_i$$

Y como $\forall\ X, Y, Z$ campos vectoriales $R(X,Y)\cdot Z$ es $\mathbf{R}$ -lineal en cada variable, entonces:

$$R(X,Y) \cdot e_i = \sum_{j=1}^n \Omega_i^j(X,Y) e_j \tag{5.5}$$

Como podemos observar $\Omega_i^j(X,Y)(p)$ es una matriz la cual depende de $X(p), Y(p) \in T_pM, \forall\ p \in M$ y no de X y Y como operadores del conjunto de funciones diferenciales en M.
Por lo tanto $\forall\ X$ y Y, la curvatura puede ser expresada en términos de una matriz $\Omega_i^j(X,Y)$ proyectada sobre el campo e_j.

Teorema 5.3. *Sea $U \in M$ abierto y Γ_i^j uno-formas definidas en U, las cuales determinan la conexión de M (ver* (5.2)*), entonces:*

$$\Omega_i^j = d\Gamma_i^j - \sum_{k=1}^n \Gamma_i^k \wedge \Gamma_k^j$$

dem.
$\forall\ X, Y$ campos vectoriales en U, usando (5.5), demostraremos que:

$$R(X,Y)\cdot e_i = \sum_{j=1}^{n}((d\Gamma_i^j - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_i^k \wedge \Gamma_k^j)(X,Y))e_j$$

Antes de comenzar la demostración es necesario tomar en cuenta la siguiente proposición:

$$Sea\ w \text{ una forma diferencial y } X, Y \text{campos vectoriales, entonces :} \tag{5.6}$$

$$dw(X,Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w([X,Y])$$

Ahora sí, considerando la definición de curvatura y substituyendo (5.2), obtenemos:

$$R(X,Y)\cdot e_i = \nabla_X\left(\sum_j \Gamma_i^j(Y)e_j\right) - \nabla_Y\left(\sum_j \Gamma_i^j(X)e_j\right) - \sum_j \Gamma_i^j([X,Y])e_j$$

Y como $\Gamma_i^j(X)$ y $\Gamma_i^j(Y)$ son funciones de clase C^∞, de acuerdo con las propiedades que satisface la conexión afín M:

$$R(X,Y)\cdot e_i = \sum_j \left(X(\Gamma_i^j(Y)) - Y(\Gamma_i^j(X)) - \Gamma_i^j([X,Y])\right)e_j + \sum_{j,k}\Gamma_i^j(Y)\Gamma_j^k(X)e_k - \sum_{j,k}\Gamma_i^j(X)\Gamma_j^k(Y)e_k$$

Por ende, usando (5.6):

$$\begin{aligned} R(X,Y)\cdot e_i &= \sum_j\left(d\Gamma_i^j(X,Y) - \sum_k\left[\Gamma_i^k(X)\Gamma_k^j(Y) - \Gamma_i^k(Y)\Gamma_k^j(X)\right]\right)e_j \\ &= \sum_j\left(\left[d\Gamma_i^j - \Gamma_i^k\wedge\Gamma_k^j\right](X,Y)\right)e_j \end{aligned}$$

Q.E.D.
De esta forma hemos llegado a determinar el tensor de curvatura mediante los símbolos de Cartan. Esto significa que la curvatura es independiente de la elección de cualquier sistema de coordenadas.

Teorema 5.4. *Sea $U \in M$ abierto en M y ${\Gamma^k}_{lj}$ coeficientes de la conexión tetradiales (que no son símbolos de Christoffel). Sea $\{e^i\}_{i=1}^n$ una familia de co-vectores base definidos en el espacio dual T_P^*M, con sus correspondientes $\{e_k\}_{k=1}^n$ entonces:*

I. ${R_i}^j{}_{kl}=\frac{\partial \Gamma^j_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial x^l}-\sum_h\left(\Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl}-\Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk}\right)$

II. $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$

dem.

La demostración II es directa, asumiendo que la conexión está definida en el sistema de coordenadas local e_i y por su simetría. Ahora para demostrar I procedemos de la siguiente manera: Sabemos por el Teorema 5.3 que $\Omega^j_i = d\Gamma^j_i - \sum_{h=1}^n \Gamma^h_i \wedge \Gamma^j_h$. De esta forma:

$$d\Gamma^j_i = d\left[\sum_h \Gamma^j_{hi}\wedge e^h\right] = \sum_l \left[d\Gamma^j_{li}e^h + \Gamma^j_{li}de^l\right]$$

Así, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Omega^j_i &= \sum_l \left[d\Gamma^j_{li}\wedge e^l + \Gamma^j_{li}de^l\right] - \sum_l\left[\sum_k \Gamma^h_{ki}e^k \wedge \sum_h \Gamma^j_{lh}e^l\right]\\
&= \sum_l\left[d\Gamma^j_{li}\wedge e^l + \Gamma^j_{li}\left(\sum_k e^k\wedge \Gamma^l_k\right)\right] - \sum_{k,l}\sum_h \Gamma^h_{ki}\Gamma^j_{lh}(e^k\wedge e^l)\\
&= \sum_l\left[d\Gamma^j_{li}\wedge e^l + \Gamma^j_{li}\left(\sum_{k,m} \Gamma^l_{km}(e^k\wedge e^m)\right)\right] - \sum_{k,l}\sum_h \Gamma^h_{ki}\Gamma^j_{lh}(e^k\wedge e^l)
\end{aligned}$$

Considerando la simetría de los símbolos de Christoffel $\Gamma^l_{km}=\Gamma^l_{mk}$, y que $e^k\wedge e^m = -e^m\wedge e^k$, tenemos que el segundo término es cero:

$$\sum_{k,m}\Gamma^l_{km}(e^k\wedge e^m) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k,m}\Gamma^l_{km}(e^k\wedge e^m) + \sum_{k,m}\Gamma^l_{mk}(e^m\wedge e^k)\right) = \sum_{k,m}\Gamma^l_{km}(e^k\wedge e^m) - \sum_{k,m}\Gamma^l_{km}(e^k\wedge e^m) = 0$$

Así, obtenemos:

$$\Omega^j_i = \sum_l\left[d\Gamma^j_{li}\wedge e^l\right] - \sum_{k,l}\sum_h \Gamma^h_{ki}\Gamma^j_{lh}(e^k\wedge e^l)$$

Abrimos el primer término en sus diferenciales, asumiendo que los Γ^j_{ki}'s son funciones diferenciales. Luego, considerando que $e^k\wedge e^m = -e^m\wedge e^k$ e intercambiando k por l en la suma, entonces:

$$\Omega^j_i = \sum_{kl}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^j_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^j_{ki}}{\partial x^l} + \sum_h \Gamma^h_{li}\Gamma^j_{kh} - \sum_h \Gamma^h_{ki}\Gamma^j_{lh}\right)(e^k\wedge e^l)\right]$$

Y finalmente usando la definición de Ω^j_i (ver (5.4)), obtenemos:

$${R_i}^j{}_{kl} = \frac{\partial \Gamma^j_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial x^l} - \sum_h\left(\Gamma^h_{ik}\Gamma^j_{hl} - \Gamma^h_{il}\Gamma^j_{hk}\right)$$

Q.E.D

Definición 5.13. *Tétrada*
Una tétrada es una referencia móvil de cuatro dimensiones (ya sea la tétrada nula o tres campos vectoriales espaciales y uno temporal) definida en una variedad lorentziana. En este sentido, corresponde a un conjunto de campos vectoriales linealmente independientes que son generados mediante transformaciones lineales a partir de la base canónica usual del espacio tangente.

En la Teoría General de la Relatividad podemos usar una tétrada en lugar del campo tensorial métrico, para definir todos los operadores y elementos tensoriales que se requieren para su formulación.
Sea η la métrica de Minkowski en el espacio local plano y sea M una variedad riemanniana. Una tétrada (vierbein) e^i_μ es un mapeo del espacio tangente T_pM al espacio de Minkowski tal que preserva el producto interior.
De esta forma obtenemos un mapeo de índices tetradiales a índices de coordenadas.
En un punto dado, el elemento de línea infinitesimal está dado por:

$$ds^2 = \eta_{ik}e^i e^k = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{5.7}$$

Donde los elementos e^i y dx^μ son 1-formas diferenciales, tales que:

$$e^i = e^i_\mu dx^\mu \tag{5.8}$$

Otra de las propiedades de la tétrada, es que bajo transformaciones de Lorentz, se cumple que:

$$e^a \rightarrow e^a + \epsilon^a_b e^a \qquad \text{Donde } \epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}$$

Esto implica que la matriz de transformación lorentziana de una 1-forma definida mediante una tétrada es antisimétrica. Por ende, la interpretación geométrica de una tétrada es un marco móvil, que bajo transformaciones de Lorentz rota y determina un sistema de referencia local.
Debido a que la tétrada es una matriz de transformación, los índices latinos pueden subirse o bajarse con el tensor de Minkowski. Por ende:

$$g^*_{kl}{e^k}_\mu = e_{l\mu}$$

Otra de las características importantes de la tétrada es que puede estar definida mediante los coeficientes de Cartán, independientemente del sistema de coordenadas locales o globales:

$$\Gamma^i_j = \Gamma^i_{jk}e^k = \Gamma^i_{jk}e^k_\mu dx^\mu = \Gamma^i_{j\mu}dx^\mu$$

En la siguiente parte le daremos la interpretación correspondiente, de acuerdo a la formulación de Utiyama.

Parte II

La interpretación de la formulación de Utiyama con formas diferenciales

6. La equivalencia entre h^k_μ y e^k_μ

De acuerdo con la sección 3.3 de ésta tesis, se introducen dos conjuntos de funciones ${h^k}_\mu$ y ${h_k}^\mu$ (ver (3.17)). Como se dijo, su significado geométrico permite asignar a cada uno de los vectores globales un sistema de referencia Lorentziano local:

$$\begin{array}{lll} \eta_{kl}{h^k}_\mu {h^l}_\nu = g_{\mu\nu}(u) & g_{\mu\nu}{h_k}^\mu {h_l}^\nu = \eta_{kl} & {h_k}^\mu {h^l}_\mu = {\delta^l}_k \\ \eta^{kl}{h_k}^\mu {h_l}^\nu = g^{\mu\nu}(u) & \eta^{\mu\nu}{h^k}_\mu {h^l}_\nu = \eta^{kl} & {h_k}^\mu {h^k}_\nu = {\delta^\mu}_\nu \end{array} \tag{6.1}$$

Donde η es la métrica de Minkowski en el espacio local plano. Sin embargo, veremos a continuación que éstos conjuntos de matrices definen una tétrada e^i_μ tal que, como ya se dijo anteriormente (5.7) y (5.8), en un punto dado, el elemento de línea infinitesimal está dado por:

$$ds^2 = \eta_{ik}e^i e^k = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Donde los elementos e^i y dx^μ fungen como 1-formas diferenciales, tales que:[19]

$$e^i = e^i_\mu dx^\mu$$

En primera instancia, sabemos que las e^i's son 1-formas definidos en $T^*_p M$ (en un sistema local plano de coordenadas). Mientras que las dx^μ's son 1-formas definidos en un sistema de coordenadas curvilíneas.
Por ende, e^i_μ es un mapeo que tiene la posibilidad de convertir una 1-forma local a una 1-forma global. De esta forma substituyendo (5.7) en (5.8), y comparando con (6.1), obtenemos una equivalencia necesaria:

$$h^i_\mu = e^i_\mu \tag{6.2}$$

Así pues, las matrices h son 1-formas, las cuales cumplen con las propiedades vistas en la sección 4.2. A partir de éste momento utilizaremos la notación e^i_μ al referirnos a las matrices h.

7. El campo A y los coeficientes de rotación de Ricci

Teorema 7.1. *Sean $\{e^\mu_i\}$ un conjunto de 1-formas tales que $e^i = e^i_\mu dx^\mu$. Entonces podemos mostrar que:*

$$R_{abcd} = (e_{\mu a;\nu;\rho} - e_{\mu a;\rho;\nu})e^\mu_b e^\nu_c e^\rho_d$$

[19] La notación de los elementos e^i,dx^i,...,etc. Se respeta a partir de la sección 4.

Dem.
Sabemos que por la derivada covariante de una 1-forma:

$$e_{ua;\nu} \equiv \partial_\nu e_{\mu a} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} e_{\rho a}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} e_{\mu a;\nu;\rho} &\equiv \partial_\rho(\partial_\nu e_{\mu a} - \Gamma^{\beta}_{\nu\mu} e_{\beta a}) - \Gamma^{\mu}_{\rho a}(\partial_\nu e_{ua} - \Gamma^{\beta}_{\nu\mu} e_{\beta a}) \\ e_{\mu a;\rho;\nu} &\equiv \partial_\nu(\partial_\rho e_{\mu a} - \Gamma^{\beta}_{\rho\mu} e_{\beta a}) - \Gamma^{\mu}_{\nu a}(\partial_\rho e_{ua} - \Gamma^{\beta}_{\rho\mu} e_{\beta a}) \end{aligned}$$

Expandiendo términos obtenemos:

$$\begin{aligned} e_{\mu a;\nu;\rho} &\equiv \partial_\rho \partial_\nu e_{\mu a} - \partial_\rho(\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} e_{\beta a}) - \Gamma^{\mu}_{\rho a}\partial_\nu e_{ua} + \Gamma^{\mu}_{\rho a}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} e_{\beta a} \\ &\equiv \partial_\rho \partial_\nu e_{\mu a} - \partial_\rho(\Gamma^{\beta}_{\nu\mu}) e_{\beta a} - \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}\partial_\rho(e_{\beta a}) - \Gamma^{\mu}_{\rho a}\partial_\nu e_{ua} + \Gamma^{\mu}_{\rho a}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} e_{\beta a} \\ e_{\mu a;\rho;\nu} &\equiv \partial_\nu \partial_\rho e_{\mu a} - \partial_\nu(\Gamma^{\beta}_{\rho\mu} e_{\beta a}) - \Gamma^{\mu}_{\nu a}\partial_\rho e_{ua} + \Gamma^{\mu}_{\nu a}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu} e_{\beta a} \\ &\equiv \partial_\nu \partial_\rho e_{\mu a} - \partial_\nu(\Gamma^{\beta}_{\rho\mu}) e_{\beta a} - \Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\partial_\nu(e_{\beta a}) - \Gamma^{\mu}_{\nu a}\partial_\rho e_{ua} + \Gamma^{\mu}_{\nu a}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu} e_{\beta a} \end{aligned}$$

Ahora restando ambas expresiones obtenemos:

$$\begin{aligned} e_{\mu a;\nu;\rho} - e_{\mu a;\rho;\nu} &\equiv \partial_\rho \partial_\nu e_{\mu a} - \partial_\rho(\Gamma^{\beta}_{\nu\mu}) e_{\beta a} - \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}\partial_\rho(e_{\beta a}) - \Gamma^{\mu}_{\rho a}\partial_\nu e_{ua} + \Gamma^{\mu}_{\rho a}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} e_{\beta a} \\ &- \partial_\nu \partial_\rho e_{\mu a} + \partial_\nu(\Gamma^{\beta}_{\rho\mu}) e_{\beta a} + \Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\partial_\nu(e_{\beta a}) + \Gamma^{\mu}_{\nu a}\partial_\rho e_{ua} - \Gamma^{\mu}_{\nu a}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu} e_{\beta a} \\ &\equiv (\partial_\rho \partial_\nu e_{\mu a} - \partial_\nu \partial_\rho e_{\mu a}) + (\partial_\nu(\Gamma^{\beta}_{\rho\mu}) e_{\beta a} - \partial_\rho(\Gamma^{\beta}_{\nu\mu}) e_{\beta a}) + (\Gamma^{\mu}_{\rho a}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} e_{\beta a} - \Gamma^{\mu}_{\nu a}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu} e_{\beta a}) \end{aligned}$$

En la última igualdad se intercambió μ por a, para que el tercer y el cuarto término de cada línea se anularan entre sí. De esta forma, obtenemos:

$$e_{\mu a;\nu;\rho} - e_{\mu a;\rho;\nu} \equiv (\partial_\rho \partial_\nu e_{\mu a} - \partial_\nu \partial_\rho e_{\mu a}) + \left[(\partial_\nu(\Gamma^{\beta}_{\rho\mu}) - \partial_\rho(\Gamma^{\beta}_{\nu\mu})) - (\Gamma^{\mu}_{\nu a}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu} - \Gamma^{\mu}_{\rho a}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu})\right] e_{\beta a}$$

De esta forma:

$$(e_{\mu a;\nu;\rho} - e_{\mu a;\rho;\nu}) e^{\mu}_{b} e^{\nu}_{c} e^{\rho}_{d} \equiv (\partial_\rho \partial_\nu e_{\mu a} - \partial_\nu \partial_\rho e_{\mu a}) + \left[(\partial_\nu(\Gamma^{\beta}_{\rho\mu}) - \partial_\rho(\Gamma^{\beta}_{\nu\mu})) - (\Gamma^{\mu}_{\nu a}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu} - \Gamma^{\mu}_{\rho a}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu})\right] e_{\beta a} e^{\mu}_{b} e^{\nu}_{c} e^{\rho}_{d}$$

Cambiando los índices griegos a índices latinos obtenemos:

$$(e_{\mu a;\nu;\rho} - e_{\mu a;\rho;\nu}) e^{\mu}_{b} e^{\nu}_{c} e^{\rho}_{d} \equiv (\partial_d \partial_c e_{ba} - \partial_c \partial_d e_{ba}) + \left[(\partial_c(\Gamma^{\beta}_{db}) - \partial_d(\Gamma^{\beta}_{cb})) - (\Gamma^{b}_{ca}\Gamma^{\beta}_{db} - \Gamma^{b}_{da}\Gamma^{\beta}_{cb})\right]$$

Finalmente, el primer término de la ecuación se anula debido a que estamos en coordenadas locales planas. Por lo tanto del Teorema 4.3, obtenemos el tensor de Riemann:

$$R_{abcd} = (e_{\mu a;\nu;\rho} - e_{\mu a;\rho;\nu}) e^{\mu}_{b} e^{\nu}_{c} e^{\rho}_{d}$$

Ahora, definimos los coeficientes de rotación de Ricci como:

$$\Gamma_{abc} \equiv e_{\mu a;\nu} e^{\mu}_{b} e^{\nu}_{c} \tag{7.1}$$

Si cambiamos a índices de coordenadas los coeficientes se expresan de la siguiente manera:

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} \equiv e_{\mu a;\nu} e^{a}_{\lambda}$$

Por consiguiente, expresemos el tensor de Riemann, en términos de los coeficientes de rotación de Ricci, con índices de coordenadas:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\rho} &= (e_{\mu a;\nu;\rho} - e_{\mu a;\rho;\nu}) e^{a}_{\lambda} \\ &= \Gamma_{\lambda\mu\nu,\rho} - \Gamma_{\lambda\mu\rho,\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\theta}(\Gamma^{\theta}_{\nu\rho} - \Gamma^{\theta}_{\rho\nu}) + \Gamma_{\lambda\theta\nu}\Gamma^{\theta}_{\mu\rho} - \Gamma_{\lambda\theta\rho}\Gamma^{\theta}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Subiendo los índices λ y μ obtenemos:

$$\begin{aligned} R^{\lambda\mu}{}_{\nu\rho} &= \Gamma^{\lambda\mu}{}_{\nu,\rho} - \Gamma^{\lambda\mu}{}_{\rho,\nu} + \Gamma^{\lambda\mu}{}_{\theta}(\Gamma^{\theta}_{\nu\rho} - \Gamma^{\theta}_{\rho\nu}) + \Gamma^{\lambda}_{\theta\nu}\Gamma^{\theta\mu}{}_{\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\theta\rho}\Gamma^{\theta\mu}{}_{\nu} \\ &= \Gamma^{\lambda\mu}{}_{\nu,\rho} - \Gamma^{\lambda\mu}{}_{\rho,\nu} + \Gamma^{\lambda\mu}{}_{\theta}\Gamma^{\theta}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda\mu}{}_{\theta}\Gamma^{\theta}_{\rho\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\theta\nu}\Gamma^{\theta\mu}{}_{\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\theta\rho}\Gamma^{\theta\mu}{}_{\nu} \end{aligned}$$

Y por la simetría de los coeficientes, obtenemos:

$$R^{\lambda\mu}{}_{\nu\rho} = \Gamma^{\lambda\mu}{}_{\nu,\rho} - \Gamma^{\lambda\mu}{}_{\rho,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\theta\nu}\Gamma^{\theta\mu}{}_{\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\theta\rho}\Gamma^{\theta\mu}{}_{\nu}$$

Ahora bajemos μ y cambiemos los primeros dos índices a índices tetradiales. Considerando que θ es índice mudo, entonces:

$$e^{b\mu}\ e^{a}_{\lambda}\ R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} = \Gamma^{ab}{}_{\nu,\rho} - \Gamma^{ab}{}_{\rho,\nu} + \Gamma^{a}_{l\nu}\Gamma^{lb}{}_{\rho} - \Gamma^{a}_{l\rho}\Gamma^{lb}{}_{\nu} \tag{7.2}$$

Por lo tanto si comparamos esta expresión con (3.28) y (3.29), y sabiendo que (6.2), llegamos a la conclusión de que los coeficientes de rotación de Ricci son equivalentes al campo A definido en la sección 3.3:

$$\Gamma^{ab}{}_{\nu} = A^{ab}{}_{\nu} \tag{7.3}$$

8. La equivalencia entre A^{i}_{j} y Γ^{i}_{j}

Dada la equivalencia entre el tensor A y los coeficientes de rotación de Ricci, podemos manipular éstos últimos de tal manera que bajo índices tetradiales, se tenga una equivalencia entre el campo A^{i}_{j} y Γ^{i}_{j}.

Para ello tenemos que reescribir la forma de la curvatura en términos del campo A de la siguiente manera:

$$\Omega^{i}_{j} = dA^{i}_{j} - A^{i}_{k} \wedge A^{k}_{j}$$

La demostración es la siguiente:
De (5.4) sabemos que:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\left(R^i{}_{jkl}\ e^k \wedge e^l\right)$$

Ahora cambiando a índices de coordenadas, usando la tétrada, se obtiene:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\left(e^i_\alpha e^\beta_j R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\ dx^\gamma \wedge dx^\delta\right)$$

Considerado la notación del artículo de Utiyama, y de (3.29) obtenemos:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\left(F^i{}_{j\gamma\delta}\ dx^\gamma \wedge dx^\delta\right)$$

Y de (3.28), se sigue que:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\left(\nabla_\gamma A^i{}_{j\delta} - \nabla_\delta A^i{}_{j\gamma} - (A^i{}_{k\gamma}A_j{}^k{}_\delta + A^i{}_{k\delta}A_j{}^k{}_\gamma)\right)\ dx^\gamma \wedge dx^\delta$$

Debido a que $dx^\gamma \wedge dx^\delta = -dx^\delta \wedge dx^\gamma$:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial A^i{}_{j\delta}}{\partial x^\gamma}(dx^\gamma \wedge dx^\delta) + \frac{\partial A^i{}_{j\gamma}}{\partial x^\delta}(dx^\delta \wedge dx^\gamma)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\left(A^i{}_{k\gamma}A_j{}^k{}_\delta(dx^\gamma \wedge dx^\delta) + A^i{}_{k\delta}A_j{}^k{}_\gamma(dx^\delta \wedge dx^\gamma)\right)\right]$$

De aquí se tiene:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\left[2(dA^i{}_{j\delta}dx^\delta) - 2(A^i{}_{k\delta}dx^\delta \wedge A^k{}_{j\gamma}dx^\gamma)\right]$$

Contrayendo con las formas diferenciales, finalmente obtenemos:

$$\Omega^i_j = dA^i_j - A^i_k \wedge A^k_j \tag{8.1}$$

Q.E.D
De esta forma, podemos comparar (8.1) con el teorema 5.3, obteniendo la equivalencia deseada:

$$A^i_j = \Gamma^i_j$$

Otro resultado importante es el que se obtuvo en el tercer paso de la demostración:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\left(F^i{}_{j\gamma\delta}\ dx^\gamma \wedge dx^\delta\right)$$

Lo que indica la relación entre la forma de la curvatura y el campo F definido en el artículo de Utiyama.
Como se recordará en (3.13) la derivada de A aparece en el lagrangiano de este mismo campo mediante la combinación F, lo que implica que la forma de la curvatura Ω está implícita en el lagrangiano del campo A. Por ende, la curvatura del espacio-tiempo global se encuentra totalmente definida por A ó por los símbolos de Cartán Γ, cuya importancia radica en que los podemos definir localmente y no depende de las coordenadas que se elija.

Parte III
La interpretación filosófica

De acuerdo con lo visto en las páginas anteriores, tenemos las herramientas necesarias para mantener una postura argumentativa con respecto a las tendencias defendidas por diferentes filósofos y científicos, las cuales se explicaron brevemente en la introducción de esta tesis.

9. Antes de 1956

Antes de la publicación de la formulación de Utiyama, Einstein había cambiado el rumbo de la geometría, en el que su relación con la experiencia nunca había sido tan estrecha.

9.1. La justificación de la postura einsteniana

En primera instancia, es factible considerar la importancia de la teoría en el ámbito interpretativo. A veces se piensa que la interpretación de la teoría general de la relatividad, según Einstein, usa (en el sentido estricto de la palabra) la geometría riemanniana como un lenguaje descriptivo, capaz de conferirle un sustento matemático y formal al desarrollo conceptual de la teoría, como fue el caso de la mecánica cuántica y su formalismo matemático con espacios de Hilbert. Para Einstein ésto sería un error.
Como bien sabemos, para la mecánica cuántica primitiva no fue necesario semejante lenguaje, y si bien, para mencionar un ejemplo, en un momento existieron dos distintas descripciones matemáticas que llegaron a resultados equivalentes, tales como la formulación matricial de Heisenberg, por un lado, y la solución de ecuaciones diferenciales de Schrödinger, por otro. Sin embargo, para Einstein, la propia definición de espacio-tiempo es literalmente una variedad riemanniana de cuatro dimensiones con propiedades como son la curvatura y la torsión. Para él la variedad no significa una descripción provisional, o si se quiere convencional, de una entidad física: el espacio-tiempo, sino que son una y la misma cosa, en otras palabras, su tratamiento es ontológico. Esto quiere decir que la geometría no es simplemente un lenguaje que nos ayuda a comprender la realidad, sino que la misma realidad **es** el conjunto de propiedades geométricas que se derivan de sus axiomas, entendidas como leyes universales.
En el capítulo II de esta tesis, se muestran los principios e ideas generales de la Relatividad General. En este sentido y como podemos observar se expresa, como definición, que el espacio-tiempo es una variedad riemanniana. También se muestra su relación con la Relatividad Especial, mediante el principio de equivalencia y por una correspondencia definitoria atribuida a un concepto intuitivo: la inercia. Finalmente, de acuerdo con lo que se espera de una teoría física basada en juicios lo más generales posibles, se llega a la idea de covarianza, en la cual, la geometría diferencial funge como un lenguaje necesario y único para la teoría. Así se construye la teoría general, no como una idea que en su momento encontró un lenguaje descriptivo ideal,

sino como una estructura que se define ontológicamente.
Así pues, podemos llegar a la conclusión de que para Einstein, el universo es geométrico[20], y así como cualquier propiedad de un objeto o entidad física puede ser medida explícitamente, la curvatura de este espacio también puede ser medida mediante experimentos que, efectivamente, se efectuaron en los años siguientes a la publicación de la teoría general.

9.2. Reichenbach y Einstein

De acuerdo con Reichenbach, la Teoría General de la Relatividad se basa en definiciones: las mediciones que hacen reglas y relojes son definidas de antemano mediante la asociación de una variedad reimanniana y una métrica determinada con el campo gravitacional. Al tratarse de definiciones que, mediante pruebas empíricas, se enlazan con propiedades geométricas[21]de forma necesaria, es evidente la posibilidad de hacer experimentos geométricos. Una verdad geométrica presupone un dato experimental, debido a que las proposiciones de este tipo han indicado su sentido por medio del velo irrevocable de la realidad.
De esta forma, podemos suponer que Einstein estaba de acuerdo con Reichenbach, en afirmar la posibilidad de experimentación en la geometría.

9.3. La falla de Poincaré de acuerdo con la Teoría General de la Relatividad

Ahora, de acuerdo con la postura de Poincaré podemos decir lo siguiente: Para Poincaré no existe tal cosa como un experimento geométrico. La verificación experimental no se hace sobre objetos representados en el lenguaje descriptivo, sino sobre las propiedades de los objetos reales, las cuales se definen independientemente de la geometría convencionalmente usada. En caso contrario, los resultados experimentales dependerían de una geometría que hemos privilegiado, y por ende estaríamos negando la naturaleza empírica de las ciencias físicas.
Henri Poincaré murió en París en el año de 1912, tres años antes de que Einstein publicara su teoría general. Así pues, no le fue posible elucidar la importancia de las geometrías no-euclidianas, y había creído que la geometría de Euclídes tenía que ser, por convención, la geometría usada en la física moderna.
Al mismo tiempo, estaba convencido de que cualquier sistema descriptivo no podía ser objeto de experimentos. Sin embargo, si hubiera vivido para darse cuenta de que la teoría general no sólo había supuesto una descripción provisional del campo gravitacional, sino que le había concedido un lugar ontológico al definirlo como una variedad de cuatro dimensiones, quizá hubiera tenido que cuestionar su postura mediante otro tipo de argumentos.

[20]En un sentido ontológico
[21]En éste caso propiedades geométricas no riemannianas.

10. Después de 1956

10.1. Justificando a Poincaré

Como se vio en la parte I, en el año de 1956 Utiyama derivó las ecuaciones de campo de Einstein, mediante una formulación independientemente del concepto de distancia y desplazamiento paralelo (congruencia). En este sentido había llegado a los mismos resultados de Einstein sin introducir elementos geométricos dentro de su estructura. Como se puede observar en el capítulo III, la teoría de Utiyama no considera un espacio curvo para su formulación, sino que usa espacios matemáticos abstractos y la teoría de grupos continuos de transformaciones. Por un lado, es posible definir espacios matemáticos abstractos sin considerar sistemas de coordenadas, en donde encontramos, en forma más general, la idea de covarianza. Por otro lado, los grupos de transformaciones continuos en espacios abstractos generalizan los conceptos de rotaciones y traslaciones de cuerpos sólidos en el espacio euclidiano. De esta forma, estas transformaciones invariantes pueden ser interpretadas como simetrías, y así, cualquier movimiento puede corresponder a una simetría particular, descrita mediante un álgebra no conmutativa. A esta álgebra se le asocia un grupo de Lie, el cual puede ser clasificada en diferentes categorías. Así Utiyama muestra que las ecuaciones dinámicas de una interacción pueden ser deducidas en todo un espacio abstracto, con sólo saber las propiedades de simetría de ésta interacción en un punto arbitrario de éste espacio, e introduciendo un campo tensorial A, cuyas propiedades se definen en el capítulo III de la parte I.
El punto crucial es que se puede dar explícitamente la exacta correspondencia entre el tensor de Riemmann y el campo tensorial A, para derivar las ecuaciones de campo de Einstein.
En este sentido A yace sobre un espacio abstracto con una estructura matemática equivalente al espacio de Riemann de cuatro dimensiones. Esto implica que el lenguaje descriptivo con el que se llega a las ecuaciones de campo no es único: puede ser que consideremos al campo gravitacional como una variedad remanniana o como un campo normado, siempre llegaremos al mismo resultado y la elección será, por ende, arbitraria.
Aquí le conferimos la razón a Henri Poincaré: Las proposiciones de la geometría riemanniana son convenciones, en el sentido de que es un lenguaje descriptivo y simbólico, el cual considera el campo gravitacional como un objeto ideal, que nos facilita la obtención de las ecuaciones de campo mediante una visión más intuitiva. Sin embargo no significa por ello, que sea el único lenguaje capaz de producir semejantes resultados, y como prueba de ello se encuentra la formulación de Utiyama.
De acuerdo con Poincaré, la geometría más sencilla y plausible para describir a la naturaleza es la euclidiana, sin embargo en el caso de la gravitación, omitiremos éste juicio y pensaremos en concederle a la geometría no euclidiana un lugar considerable.

10.2. Las formas diferenciales como lenguaje geométrico

Es importante mencionar que la formulación de Utiyama también puede ser interpretada como una teoría pseudo-geométrica, dando por hecho que el lenguaje moderno de la geometría diferencial, en este caso la teoría de formas diferenciales, contiene elementos e identidades que fueron usadas por el propio Utiyama, sin conocimiento de causa. En el presente trabajo (en el capítulo III) se introducen funciones h tales que fungen como transformaciones que asocian a una geometría global y curvilínea, una geometría local plana. Así mediante el postulado de invarianza en todo el espacio, se llega a que éstas funciones están contenidas en el lagrangiano total.

Utiyama prueba la correspondencia entre los elementos matemáticos encontrados por las simetrías bajo el grupo de Lorentz y los usados en geometría riemanniana : La métrica, los coeficientes de Christoffel y el tensor de Riemann, por un lado, las funciones h, el campo A y sus diferenciales, por el otro lado. Así, deduce la derivada covariante y el tensor de Riemann, sin dar una definición de paralelismo y por ende sin definir distancias ni congruencias.

Como se muestra en la segunda parte de esta tesis, en el lenguaje de formas diferenciales, los elementos h y A, pueden ser interpretados como tétradas y coeficientes de rotación de Ricci, respectivamente.

En efecto, desde una perspectiva actual, lo que hizo Utiyama, sin saberlo, fue utilizar conceptos geométricos más generales y más fructíferos (formas diferenciales), confiriéndole a los elementos considerados (campos e interacciones) una simetría bajo el grupo de Lorentz.

Así podemos concluir que la formulación de Utiyama es un caso particular para la teoría de formas diferenciales y del grupo de transformaciones; se elige un grupo particular (el grupo de Lorentz) y se aplica el teorema de Utiyama. De esta forma, se trata de una convención elegir cuál sistema de geometrías es la más conveniente: si la geometría Riemanniana, o la geometría de formas diferenciales.

11. Wittgenstein: el lenguaje y la experiencia

A manera de síntesis y con el objetivo de recapitular las ideas que se presentan anteriormente, considero que es necesario remitirnos, de forma tangencial, a la filosofía de Wittgenstein; el propósito no será profundizar en su filosofía sino considerar parte de sus ideas para defender nuestro argumento central: el convencionalismo de Poincaré.

Consideraremos dos textos bibliográficos. El primero de ellos es un ensayo en el que se defiende la postura wittgensteiniana en torno a la relación que guarda la geometría con la experiencia[22]. El segundo de ellos es un compendio de transcripciones de diferentes conferencias, en el que se exponen los argumentos defendidos por Wittgenstein y miembros del Círculo de Viena[23].

[22]Tomasini Bassols, Alejandro, Filosofía y Matemáticas: ensayos en torno a Wittgenstein, México, Plaza y Valdés, 2006.

[23]Ludwig Wittgentein and the Vienna Circle. Converstions Recorded by Frederich Waismann. Edited by B.F. McGuiness, Oxford: Basil Blackwell, 1979.

Poincaré define a la geometría pura como un sistema simbólico independiente de la verdad o falsedad de lo que impera, en pocas palabras, es un sistema convencional. En este sentido es donde el segundo Wittgenstein pone especial atención, sabiendo que su filosofía, parte del supuesto de que el lenguaje con el que se percibe el mundo y lo que se percibe pueden conformar una y la misma cosa.

"Por razones internas al pensamiento de Wittgenstein, sabemos que el estudio de la percepción es ante todo el estudio del lenguaje de la percepción (de como caracterizamos sus objetos, cómo medimos sus distancias, cómo calculamos sus movimientos , etc.)... ...En este sentido, la geometría es parte de la gramática del lenguaje: fija lo que se puede decir en relación con los objetos de percepción."[24]

De esta forma, no existe un sistema lingüístico privilegiado (una geometría euclidiana, riemanniana, etc.), que pueda dar cuenta de la realidad en su totalidad, pues sólo existen geometrías que fijan los mecanismos lingüísticos para poder hablar claramente de los objetos de percepción: hablamos de los objetos terrestres de acuerdo con una geometría que se aproxima a un mundo de dos dimensiones, o analizamos el comportamiento de la luz y la materia del universo de acuerdo con una geometría riemanniana.

Bajo este punto de vista pareciera que cualquier sistema lingüístico es contingente y no tiene una relación necesaria con el mundo real, pues este sistema garantiza que podamos hablar de la realidad mediante símbolos y figuras independientes de ella y sin importar cuáles sean, simplemente que den cuenta a la mente de los hechos. Sin embargo, ¿Por qué en la Teoría General de la Relatividad existe una relación necesaria entre la geometría riemanniana y el cuerpo conceptual de la teoría si, como se dijo, este sistema lingüístico es convencional? Como veremos más adelante, lo que hace que una geometría sea necesaria es su aplicación.

11.1. La aplicación de la geometría

Al igual que las posiciones más significativas que ya se han discutido, Wittgenstein reconoce que existen distintos tipos de geometrías:

La geometría visual es la que establece lo que se puede decir y no decir de los objetos que se perciben en el campo visual; sus enunciados no son hipótesis que podamos mejorar, sino que surgen del estado de los cuerpos reales tal como se encuentran. Son en primera instancia, un sistema de representaciones que determinan la manera en que nos vamos a referir a la realidad. En este sentido la geometría visual no describe a los cuerpos, sino que establece lo que se dice de ellos, y por provenir de la realidad no son, después de todo, suposiciones. Efectivamente, las proposiciones de la geometría visual tienen su origen en la experiencia, sin embargo, los axiomas y proposiciones en sí mismos son vacuos, pues son convenciones que se hacen en un lenguaje sólo para tener la posibilidad de describir los fenómenos. En torno a esta discusión Wittgenstein dice:

[24]Tomasini Bassols, Alejandro, Filosofía y Matemáticas: ensayos en torno a Wittgenstein, México, Plaza y Valdés, 2006, p. 103.

"No hay más que una cosa en el mundo que nosotros podamos postular: nuestro modo de expresarnos. No podemos postular la conducta de los hechos."[25].

Hasta aquí se justifica nuestra idea principal: La geometría no explica al mundo, sino que explica el modelo que hago de él. Pues independientemente del tipo de lenguaje que utilicemos, elegiremos el más conveniente para expresarnos acerca de lo que observamos de la realidad. En este sentido, remitiéndonos a nuestro trabajo, el modelo de campo gravitacional podría ser o una variedad riemanniana o un campo normado.
Por otra parte, Wittgenstein alude a otro sistema de geometría: la matemática. Sin embargo de acuerdo con él, si se tienen distintos sistemas éstos se encuentran incompletos en cuanto que son convenciones , y no existe distinción de su validez hasta que se aplica en un campo, ya sea en mediciones, observaciones, o en teorías científicas.
En la medida en que la geometría se integra al conocimiento científico, ésta toma otra dimensión: forma parte de una hipótesis. Wittgenstein argumenta que de acuerdo con el tipo de aplicación es como podemos romper con el convencionalismo de Poincaré.
En efecto, anterior a su aplicación, el sistema de geometrías es una herramienta lingüística que se elige por convención, empero, lo que puede darse o no darse es cualquiera de sus aplicaciones posibles, y si ésta se da, es plausible que llegue a ser necesaria.
Por este motivo, la Teoría General de la Relatividad mantuvo una relación necesaria con la geometría riemanniana, pues de ser un lenguaje provisorio, se convirtió en un sistema lingúistico indispensable para su formulación.
Sin embargo, si la teoría es un modelo aproximado de la realidad ¿Será la geometría riemanniana un lenguaje estrictamente necesario para referirnos a la realidad como tal?

11.2. Diferentes lenguajes que llegan a resultados equivalentes

Lo que nosotros sostenemos a lo largo de la tesis es un argumento distinto al de Wittgenstein, pero no contradictorio. En este sentido veremos que ambas posturas pueden complementarse, sin perder su idea central: la relación entre la geometría y la realidad.
El argumento principal de la tesis es afirmar que la elección de dos teorías científicas diferentes, las cuales conducen a un mismo resultado (Teoría de Einstein o formulación de Utiyama), sigue siendo una cuestión de convención. Es irrelevante privilegiar un lenguaje descriptivo antes de aplicarse a cualquier teoría científica, así como también lo es privilegiar una teoría si existen otras (con diferentes lenguajes), que lleguen a un mismo resultado.
En lo que respecta a la formulación geométrica y primitiva de la Relatividad General, el cuerpo conceptual de la teoría tuvo que tener una conexión determinante con la geometría riemanniana. La aplicación de esta geometría no se dio, hasta que Einstein introdujo la equivalencia entre el campo gravitatorio y una variedad de cuatro dimensiones. Así teniendo una métrica definida,

[25] Ludwig Wittgentein and the Vienna Circle. Converstions Recorded by Frederich Waismann. Edited by B.F. McGuiness, Oxford: Basil Blackwell, 1979, pp.162-163.

obtuvo las ecuaciones correspondientes a las interacciones, que determinaban el espacio físico en su totalidad.
Alternadamente, en la formulación de Utiyama, se tenía una deducción abstracta y algebraica de las ecuaciones de campo, sin concederle ninguna interpretación geométrica.
Hasta aquí, el argumento es compatible con la filosofía de Wittgenstein y Poincaré. Lo que es un error es considerar al lenguaje como parte esencial de la realidad, como si en ella existieran variedades riemannianas o estructuras matemáticas abstractas. En este sentido la geometría no guarda una relación ontológica con la realidad, como bien creía Einstein, sino que su relación es únicamente simbólica y descriptiva. Regresando a la filosofía de Wittgenstein, la función del lenguaje es fijar las reglas de lo que se va a decir o no decir de la realidad. Lo único que podemos hacer es construir el molde con el cual podamos percibir, de mejor manera, el mundo real. El lenguaje es, después de todo, una descripción que se completa al momento de que se aplica a la teoría, pero que es independiente de la realidad. Así pues si dos teorías llegan a un mismo resultado, lo que es verdaderamente importante es el resultado y el principio al que se llega a partir de dos caminos totalmente distintos, ya sea por medio de la teoría de grupos y transformaciones o por la geometría riemanniana.

De esta forma, podemos expresar con suficientes argumentos, que la geometría es un sistema linguístico que se elige por convención en la medida en que explica **el modelo** que hago del mundo y lo que podemos decir y no decir de él. Así también, asumiendo lo que se vio en esta sección, podemos afirmar que la elección de un sistema linguístico no es convencional con respecto a una teoría en cuyo campo se ha aplicado. Sin embargo este sistema sigue siendo incompleto y convencional cuando se trata de explicar, con su propio lenguaje, a la vasta realidad.

Parte IV
Conclusiones

Con respecto a la pregunta de Einstein ¿Sería la geometría un objeto de experiencia?
En la parte de la introducción, se profundizó en torno al debate sostenido entre la geometría y la experiencia, haciendo una síntesis de las posiciones filosóficas más significativas.
En el año de 1919 se tuvo un indicio empírico de que efectivamente la geometría era un objeto de experiencia, corroborando las hipótesis predichas por Relatividad General mediante la medición de la desviación de la luz proveniente del sol en un eclipse solar. Sin embargo no fue hasta el año de 1956 en que Utiyama publicó su artículo "Invariant Theoretical Interpretation of Interaction"donde se abrió el debate en torno a la relación que la geometría guarda con la experiencia. Utiyama dedujo las ecuaciones de campo de Einstein cambiando el lenguaje descriptivo y sustituyendo la geometría riemanniana por la teoría de grupos de transformaciones invariantes definidos en un espacio abstracto normado.
Desde éste momento le conferimos la razón a Henri Poincaré: Las proposiciones de la geometría riemanniana son convenciones, en el sentido de que es un lenguaje descriptivo y simbólico. Sin embargo no significa por ello, que sea el único lenguaje capaz de producir semejantes resultados, y como prueba de ello se encuentra la formulación de Utiyama. De acuerdo con Poincaré y con nuestra postura, se trata de una convención elegir si el espacio-tiempo es una variedad riemanniana o un campo normado.
Con relación a otras posturas, podemos retomar a Wittgenstein. Él afirma que la geometría por sí sola es un sistema linguístico que se elige por convención, pero si se aplica en teorías científicas tales como la de Einstein, puede llegar a ser necesaria.
Lo que nosotros sostenemos a lo largo de la tesis es un argumento distinto al de Wittgenstein, pero no contradictorio: se trata de la misma forma de ver la relación entre la geometría y la realidad. Si la teoría es un modelo aproximado de la realidad ¿Será la geometría riemanniana un lenguaje estrictamente necesario para referirnos a la realidad como tal?
Es irrelevante privilegiar un lenguaje descriptivo antes de aplicarse a cualquier teoría científica, así como también lo es privilegiar una teoría si existen otras (con diferentes lenguajes), que lleguen a un mismo resultado. Lo que es un error es considerar al lenguaje como parte esencial de la realidad, como si en ella existieran variedades riemannianas o estructuras matemáticas abstractas. En este sentido la geometría no guarda una relación ontológica con la realidad, como bien creía Einstein, sino que su relación es únicamente simbólica y descriptiva. Así podemos concluir que la elección de un sistema linguístico es convencional en relación con la realidad, inclusive si se haya aplicada en teorías científicas, tales como la Teoría General de la Relatividad.

Por otro lado, la formulación de Utiyama también puede ser interpretada como una teoría pseudo-geométrica mediante el lenguaje moderno de la geometría diferencial, en este caso la teoría de formas diferenciales y la teoría de Cartán. La formulación es un caso particular para

la teoría de formas diferenciales y del grupo de transformaciones; se elige un grupo particular (el grupo de Lorentz) y se aplica el teorema de Utiyama.
De esta forma, se identificaron todos los elementos geométricos (con formas diferenciales) en el artículo original, como son las tétradas, los símbolos de cartán y sus diferenciales. Y se verificó la diferencia entre los coeficientes de Cartán y los símbolos de Christoffel, haciendo una distinción muy importante entre elementos con índices tetradiales y con índices de coordenadas, respectivamente.
Por medio de las tétradas pudimos intercambiar este tipo de índices, construyendo nuevos elementos matemáticos que posteriormente fueron identificados con elementos de la geometría riemanniana:
Se mostraron las equivalencias entre los coeficientes de rotación de Ricci ${\Gamma^{ij}}_{\mu}$y el campo normado ${A^{ij}}_{\mu}$, así como los símbolos de Cartán Γ^i_j y el campo A^i_j. Así mismo se llegó a una relación entre la forma de la curvatura y el campo F definido en el artículo de Utiyama. Y de aquí se infirió que la curvatura del espacio-tiempo global se encuentra totalmente definida por A ó por los símbolos de Cartán Γ, cuya importancia radica en que los podemos definir localmente y no depende de las coordenadas que se elija.

Parte V
Bibliografía

I. Utiyama, Ryoyu, Physical Review, Vol. 101, 1597, 1956.

II. Hacyan, Shahen, European Journal of Physics, 30, 2009.

III. Fukuyama, Takeshi, Mod.Phys.Lett, A24:2459-2466, 2009

IV. Do Carmo, Perdigão Manfredo, Riemannian Geometry, Boston, birkhäuser, 1992.

V. Boothby, M. William, An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Revised Second Edition, USA, Academic Press, 2003.

VI. Hamermesh, M, Group Theory and Its Application to Physical Problems, New York, Dover, 1989.

VII. Penrose, Roger, The road to reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe, UK, Vintage books, 2004.

VIII. Cartan, Élie, Riemannian geometry in an orthogonal frame, USA, World Scientific Publishing, 2001.

IX. Flanders, Harley, Differential Forms with Applications to the physical Sciences, USA, Dover, 1989.

X. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, UK, Pergamon Press, 1973.

XI. Ed. Paul, Arthur, Schilpp, Albert Einstein. Philosopher-Scientist, New York, MJF books, 1949.

XII. Poincaré, Henri, Science and hypothesis, USA, London W. Scott, 2006.

XIII. Poincaré, Henri, Filosofía de la Ciencia, México, Nuestros Clásicos/UNAM, 1984.

XIV. Einstein, Albert, El significado de la relatividad, México, Artemisa, 1985.

XV. Kant, Immanuel, Crítica de la razón pura, México, Taurus, 2006.

XVI. T. Cushing, James, Philosophical Concepts in Physics. The historical relation between Philosophy and Scientific Theories, Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

XVII. Weyl, Hermann, Space. Time. Matter, New York, Dover, 1950.

xviii. Tomasini Bassols, Alejandro, Filosofía y Matemáticas: ensayos en torno a Wittgenstein, México, Plaza y Valdés, 2006.

xix. Ludwig Wittgentein and the Vienna Circle. Converstions Recorded by Frederich Waismann. Edited by B.F. McGuiness, Oxford: Basil Blackwell, 1979.