Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias

Hipersuperficies Isoparamétricas en la Esfera $\mathbb{S}^{n+1}$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
NOEL JARAMILLO ARCE

DIRECTOR DE TESIS:
DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

2011

$\boxed{\textbf{Hipersuperficies Isoparamétricas en la Esfera } \mathbb{S}^{n+1}}$

Tesis Maestría
2011

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx - n(H^2+1)$$

Noel Jaramillo Arce

Facultad de Ciencias, UNAM

Índice general

Introducción

La idea del siguiente trabajo, es hacer una breve exposición de algunos resultados concernientes a las hipersuperficies isoparamétricas en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$; Élie Cartan usó el término isoparamétrica (*mismo parámetro*) para referirse a las hipersuperficies $M^n \subset N^{n+1}(c)$ que tienen todas sus curvaturas principales λ_i constantes, en un espacio de curvatura constante $N^{n+1}(c)$.

Es conocido que en geometría riemanniana y en particular en el estudio de hipersuperficies, $M^n \subset N^{n+1}$ la curvatura de una subvariedad M en su espacio ambiente es descrita por la segunda forma fundamental h o del operador de forma asociado A:

$$-A_\xi X = (\widetilde{\nabla}_X \xi)^\top.$$

El determinante $K(p) = \det A_p$ es llamado la curvatura de Gauss-Kronecker de M en un punto p; este determinante es igual al producto de las curvaturas principales

$$K(p) = \lambda_1(p)\lambda_2(p)\cdots\lambda_n(p)$$

cuando la dimensión de la hipersuperficie es dos, el determinante es conocido como la curvatura de Gauss.

La traza de A_p dividida por $\dfrac{1}{n}$ es conocida como la curvatura media $H(p)$ de M en p y es el promedio de las curvaturas principales.

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(p).$$

Cuando la curvatura media es cero, $H = 0$, la hipersuperficie se llama mínima.

Por otro lado tenemos, las ecuaciones fundamentales de las subvariedades: Gauss, Codazzi y Ricci. Que estudiaremos en el capítulo 1, estas ecuaciones O. Bonnet las utilizó para probar el Teorema Fundamental de las Superficies en $\mathbb{R}^3$, el de que una superficie queda determinada, salvo isométrias, por las dos primeras formas fundamentales. En subvariedades estas ecuaciones nos describen las condiciones de cómo una variedad puede ser inmersa isométricamente en un espacio riemanniano.

En particular cuando consideramos una hipersuperficie inmersa en un espacio de curvatura constante c, la ecuación de Gauss puede escribirse como

$$n(n-1)(R-c) = -S + n^2H^2$$

donde R es la curvatura escalar normalizada y $S = \sum h_{ij}^2$ es el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental de la hipersuperficie; la cantidad S, mide qué tanto la hipersuperficie deja de ser totalmente geodésica.

Esta forma peculiar de escribir la ecuación de Gauss nos ayuda a obtener información sobre hipersuperficies con curvatura escalar R constante, con el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental S constante o curvatura media H constante.

Por ejemplo cuando consideramos hipersuperficies mínimas en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, tenemos que S depende sólo de la hipersuperficie, es decir, es intrínseco

$$S = n(n-1)(1-R)$$

en particular S es constante si y sólo si M tiene curvatura escalar R es constante.

En el capítulo 2 haremos un estudio de hipersuperficies mínimas en la esfera y trabajaremos con el laplaciano objetos matemáticos inventados por J. Simons como h_{ij}, $S = \sum_i \lambda_i^2$, $f_s = \sum_i \lambda_i^s$ con $s \geq 3$, etc. con el fin de encontrar algunos invariantes geométricos de las hipersuperficies.

Primero consideraremos hipersuperficies de curvatura media H constante: para ello veremos el tensor simétrico

$$\phi(x, y) = \langle Hx - Ax, y\rangle$$

de gran interés y estudiado por H. Alencar y M. do Carmo, el cual está relacionado con la curvatura media y la segunda forma fundamental, veremos que si su traza es cero, es decir, $\mathrm{tr}\phi = 0$ se tiene que

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

De aquí que $|\phi|^2 = 0$ si y sólo si la hipersuperficie es totalmente umbílica. El propósito es describir cotas para el laplaciano $\Delta|\phi|^2$ y caracterizar las hipersuperficies que aparecen cuando las cotas de éste se alcanzan.

En segundo lugar estudiaremos las hipersuperficies con curvatura escalar R constante, el estudio de estas hipersuperficies también se basa en el cálculo del laplaciano de algunos objetos geométricos mencionados anteriormente. Pero Cheng-Yau dieron algunos resultados haciendo uso del operador $\square$, a saber

$$\square f = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij}$$

y que estudiaremos con detalle.

Y para finalizar el capítulo 2 veremos hipersuperficies con el cuadrado longitud de la segunda forma fundamental S constante, estudiado por S. S. Chern, M. do Carmo y S. Kobayashi, y donde el problema es determinar las hipersuperficies mínimas M^n en la esfera $\mathbb{S}^{n+p}$ cuyo cuadrado de la longitud de la segunda forma satisface

$$S = \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}.$$

Un caso especial es cuando la codimensión es $p = 1$, donde se prueba que para una hipersuperficie mínima y compacta de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+1}$; si cumple $0 \leq S \leq n$, entonces o $S = 0$, es decir, M es una hipersuperficie totalmente geodésica en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ lo que significa que M es una hiperesfera ecuatorial, o $S = n$, en cuyo caso M es un toro de Clifford en $\mathbb{S}^{n+1}$. Analizaremos que pasa en codimensión $p > 1$.

En el último capítulo estudiaremos las hipersuperficies isoparamétricas, probaremos la fórmula fundamental de Cartan

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_i}}^{g} m_j \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0$$

donde g el número de curvaturas principales distintas de una hipersuperficie M, es decir, las curvaturas principales $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ con sus respectivas multiplicidades $m_1, \ldots, m_g$.

Usando esta identidad, E. Cartan mostró que el número de curvaturas principales distintas de una hipersuperficie de curvatura constante en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$ es a lo más dos. De aquí que la clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ son esferas, hiperplanos o productos de ambos y en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ son las hipersuperficies totalmente umbílicas, es decir, las curvaturas principales son iguales en todos sus puntos.

En cambio, para el caso de hipersuperficies en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ la fórmula de Cartan no proporciona condiciones suficientes sobre el número de curvaturas principales g de la hipersuperficie, para tratar de lograr su clasificación. A pesar de eso, E. Cartan logró dar varios ejemplos como esferas máximas y productos de esferas, y en 1968 S.S. Chern propuso la siguiente conjetura.

Conjetura de Chern: Sea M^n con $n \geq 2$ una hipersuperficie mínima cerrada de $\mathbb{S}^{n+1}$ con curvatura escalar R constante, entonces M^n es isoparamétrica.

Concluiremos con algunos resultados recientes acerca de la conjetura de Chern y con algunos ejemplos.

Capítulo 1

Ecuaciones Fundamentales para Subvariedades

Las ecuaciones fundamentales de las subvariedades, debidas a Gauss, Codazzi y Ricci nos describen las condiciones para que una variedad pueda ser inmersa isométricamente en un espacio riemanniano. Estas ecuaciones son de gran importancia cuando el espacio ambiente es un espacio de curvatura constante, esencialmente su papel es parecido a las ecuaciones de compatibilidad en la teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$.

1.1. Fórmula de Gauss y Ecuación de Weingarten

Empezaremos considerando M una variedad riemanniana de dimensión n inmersa isométricamente en otra variedad N de dimensión $n+1$. Entonces podemos descomponer el espacio tangente de N como $TN = TM \oplus TM^{\perp}$. Si $\widetilde{\nabla}$ es una conexión de Levi-Civita sobre N ésta induce una conexión sobre M dada por la fórmula de Gauss:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$$

donde $\nabla_X Y$ es la expresión de la componente tangencial de $\widetilde{\nabla}_X Y$, esto es, $(\widetilde{\nabla}_X Y)^{\top} = \nabla_X Y$ y la parte normal $h(X,Y)$ es conocida como la segunda forma fundamental.

Si ξ es un campo normal a M tenemos la ecuación de Weingarten

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi$$

donde el operador $A_\xi X = -\nabla_X \xi$ es llamado el operador de forma de M. Este operador es lineal en ξ y en X, para probarlo basta ver que

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\alpha X}(\beta\xi) &= \alpha\left\{(X\beta)\xi + \beta\widetilde{\nabla}_X \xi\right\}\\ &= \alpha(X\beta)\xi - \alpha\beta A_\xi X + \alpha\beta\nabla^{\perp}_X \xi\\ &= -A_{\beta\xi}(\alpha X) + \nabla^{\perp}_{\alpha X}(\beta\xi);\end{aligned}$$

por lo tanto

$$A_{\beta\xi}(\alpha X) = \alpha\beta A_\xi X$$

y

$$\nabla^{\perp}_{\alpha X}(\beta\xi) = \alpha(X\beta)\xi + \alpha\beta\nabla^{\perp}_{X}\xi.$$

la propiedad aditiva es trivial, lo que nos da linealidad de $-A_\xi X = \nabla_X \xi$ y de paso mostramos que $\nabla^{\perp}$ es una conexión sobre el haz normal NM, la cual llamamos conexión normal.

Consideremos la ecuación $\langle Y, \xi\rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi\rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_X \xi\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, \xi\rangle + \langle h(X,Y), \xi\rangle + \langle Y, -A_\xi X\rangle + \langle Y, \nabla^{\perp}_X \xi\rangle \\ &= \langle h(X,Y), \xi\rangle - \langle Y, A_\xi X\rangle \end{aligned}$$

lo que nos muestra la relación que existe entre la segunda forma fundamental h y el operador de forma A:

$$\langle h(X,Y), \xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle.$$

Ahora consideramos $e_1, \ldots, e_n$ un marco ortonormal del espacio tangente a M en p. Definimos la curvatura media en p como:

$$H = \frac{1}{n}\mathrm{tr}h = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} h(e_i, e_i).$$

En codimensión mayor que 1, elegimos un marco ortonormal $\{\xi_\alpha\}$ de NM en p, tenemos así que la traza de h queda como:

$$\mathrm{tr}h = \sum_{\alpha,i}\langle h(e_i,e_i), \xi_\alpha)\rangle = \sum_{\alpha,i}\langle A_{\xi_\alpha}(e_i), e_i\rangle = \sum_{\alpha}\mathrm{tr}(A_{\xi_\alpha}),$$

entonces una definición alternativa para la curvatura media es

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\mathrm{tr}(A_{\xi_\alpha}).$$

Para un vector normal fijo ξ, como el operador A_ξ es un operador autoadjunto podemos elegir $e_1, \ldots, e_n$ un marco ortonormal dado por los vectores propios de A_ξ, esto es

$$A_\xi(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Los números λ_i son llamados valores propios del operador A_ξ o curvaturas principales en dirección del vector normal ξ y los vectores propios son las direcciones principales.

Como sabemos, una hipersuperficie es mínima si $H = 0$ es todas partes, para justificar este nombre tenemos el siguiente resultado, ver [23].

Teorema 1.1 (Fórmula de la Primera Variación) *Sea M una variedad riemanniana compacta, $f : M \longrightarrow N$ una inmersión isométrica con H vector de curvatura media. Sea f_t una familia de inmersiones que satisfacen $f_t\big|_{\partial M} = f\big|_{\partial M}$ con $|t| < \epsilon$ y $f_0 = f$. Denotamos a $V = \frac{\partial f_t}{\partial t}\big|_{t=0}$ como el vector de variación a lo largo de f. Entonces*

$$\frac{d}{dt}Vol\,(f_t M)\bigg|_{t=0} = -\int_M \langle nH, V\rangle dVol.$$

$\blacksquare$

Por lo tanto los puntos críticos de la funcional de volumen son hipersuperficies mínimas.

El jacobiano de la aplicación de Gauss nos da una interesante interpretación geométrica del operador de Weingarten A. Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$, definimos la aplicación de Gauss $\eta : M \longrightarrow \mathbb{S}^n(1)$ por

$$\eta(p) \quad = \quad \text{Punto final del traslado de} \quad \mathbf{n}(p) \quad \text{al origen de} \quad \mathbb{R}^{n+1}.$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a M en el punto p. Como T_pM y $T_{\eta(p)}\mathbb{S}^n(1)$ son planos paralelos podemos identificarlos, y así la diferencial

$$d\eta_p = T_pM \longrightarrow T_pM = T_{\eta(p)}\mathbb{S}^n(1)$$

está dada por

$$d\eta_p(x) = \frac{d}{dt}(\mathbf{n} \circ c(t))|_{t=0} = \widetilde{\nabla}_{\frac{dc}{dt}}\mathbf{n}(c(t))|_{t=0} = \widetilde{\nabla}_x\mathbf{n} = (\widetilde{\nabla}_x\mathbf{n})^\top = -A_\eta(x)$$

donde $c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ es una curva diferenciable tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = x$ y el hecho $\widetilde{\nabla}_x\mathbf{n} = (\widetilde{\nabla}_x\mathbf{n})^\top$ se debe a

$$0 = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{n}(c(t)), \mathbf{n}(c(t))\rangle|_{t=0} = 2\langle \widetilde{\nabla}_{\frac{dc}{dt}}\mathbf{n}(c(t)), \mathbf{n}(c(t))\rangle|_{t=0} = 2\langle \widetilde{\nabla}_x\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle$$

por lo tanto la diferencial de la aplicación de Gauss es precisamente el operador de forma, es decir

$$d\eta_p = -A_\eta.$$

1.2. Hipersuperficies Totalmente Geodésicas y Umbílicas

Una subvariedad M de una variedad riemanniana N es totalmente geodésica si toda geodésica de M es geodésica de N . Por la fórmula de Gauss $\widetilde{\nabla}_XY = \nabla_XY + h(X, Y)$, tenemos que M es totalmente geodésica si y sólo si la segunda forma fundamental se anula en todo M.

Por ejemplo las subvariedades completas, conexas y totalmente geodésicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^n$ son subespacios afines e hiperesferas ecuatoriales, respectivamente.

Una subvariedad M de una variedad riemanniana N tiene un punto umbílico $p \in M$ si en ese punto todas las curvaturas principales λ_i son iguales. La subvariedad es totalmente umbílica si todos sus puntos son umbílicos.

Supongamos que M es totalmente umbílica, dado $p \in M$ existe una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ del espacio tangente T_pM. Sean $X, Y \in T_pM$, ξ en el espacio normal N_pM y λ curvatura principal de A_ξ. Usamos la fórmula $\langle h(X, Y), \xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle$ para ver que

$$
\begin{aligned}
\langle h(X,Y) - \langle X,Y\rangle H_p, \xi\rangle &= \langle A_\xi X, Y\rangle - \langle X,Y\rangle\langle H_p,\xi\rangle \\
&= \langle X,Y\rangle(\lambda - \langle H_p,\xi\rangle) \\
&= \langle X,Y\rangle(\lambda - \frac{1}{n}\sum_i \langle h(e_i,e_i),\xi\rangle) \\
&= \langle X,Y\rangle(\lambda - \frac{1}{n}\sum_i \langle A_\xi e_i,e_i\rangle) \\
&= \langle X,Y\rangle(\lambda - \frac{1}{n}\sum_i \lambda\langle e_i,e_i\rangle) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$h(X,Y) = H_p\langle X,Y\rangle.$$

Usando la ecuación anterior tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle A_\xi X, Y\rangle &= \langle h(X,Y),\xi\rangle \\
&= \langle H_p\langle X,Y\rangle,\xi\rangle \\
&= \langle H_p,\xi\rangle\langle X,Y\rangle \\
&= \langle\langle H_p,\xi\rangle X,Y\rangle
\end{aligned}
$$

Por lo que otra definición equivalente de una subvariedad totalmente umbíilica puede ser descrita cuando el operador de forma es un múltiplo del operador identidad, es decir

$$A_\xi = \langle H_p,\xi\rangle I.$$

Como ejemplos de subvariedades completas, conexas umbílicas en $\mathbb{R}^n$ tenemos los espacios afines y las intersecciones de espacios afines con hiperesferas y de $\mathbb{S}^n$ son las intersecciones de $\mathbb{S}^n$ con subespacios afines de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Consideraremos un caso especial de hipersuperficies en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Una descripción del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ de curvatura constante $c < 0$, está definida considerando la métrica

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i - x_{n+2}y_{n+2}$$

donde los vectores x, y están en $\mathbb{R}^{n+2}$. Entonces $\mathbb{R}^{n+2}$ con esta métrica es llamado el espacio-tiempo de Minkowski. Si denotamos a $R = -\sqrt{\frac{1}{c}}$ y definimos

$$\mathbb{H}^{n+1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \quad | \quad x_{n+2} > 0, \quad \langle x,x\rangle = -R^2\}$$

No es difícil mostrar que la restricción de la métrica al espacio tangente de $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ nos da una hipersuperficie completa de curvatura constante c. Así obtenemos uno de los modelos del espacio hiperbólico. Nosotros estamos interesados en estudiar las hipersuperficies completas con un máximo de dos curvaturas principales constantes diferentes en $\mathbb{H}^{n+1}(c)$. Este tipo de hipersuperficies fueron descritas por Lawson y completamente clasificadas por Ryan en el trabajo [18], esto es:

Lema 1.1 (Ryan) *Sea M^n una hipersuperficie completa en $\mathbb{H}^{n+1}(c)$. Supongamos que, bajo una elección adecuada de un marco ortonormal tangente a T_pM^n, el operador de forma sobre T_pM^n está expresado por una matriz A. Si M^n tiene a lo más dos curvaturas principales constantes distintas, entonces M^n es una de las siguientes hipersuperficies:*

- $M_1 = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}(c) \mid x_1 = 0\}$. *En este caso, $A = 0$ y M_1 es totalmente geodésica. Por lo tanto M_1 es isométrica a $\mathbb{H}^n(c)$;*
- $M_2 = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}(c) \mid x_1 = r > 0\}$. *En este caso, $A = \dfrac{\frac{1}{R^2}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}}} I_n$, donde I_n denota la matriz identidad de grado n, y M_2 es isométrica a $\mathbb{H}^n\left(\dfrac{-1}{r^2 + R^2}\right)$;*
- $M_3 = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}(c) \mid x_{n+2} = x_{n+1} + R\}$. *En este caso, $A = \frac{1}{R} I_n$ y M_3 es isométrica al espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$;*
- $M_4 = \left\{x \in \mathbb{H}^{n+1}(c) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 > 0\right\}$. *En este caso, $A = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}} I_n$ y M_4 es isométrica a una esfera de radio r, $\mathbb{S}^n$;*
- $M_5 = \left\{x \in \mathbb{H}^{n+1}(c) \mid \sum_{i=1}^{k+1} x_i^2 = r^2 > 0, \quad \sum_{j=k+2}^{n+1} x_j - x_{n+2}^2 = -(R^2 + r^2)\right\}$. *En este caso, $A = \lambda I_k \oplus \mu I_{n-k}$, donde $\lambda = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}}$ y $\mu = \dfrac{\frac{1}{R^2}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}}}$. Por lo tanto M_5 es isométrica a $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{H}^{n-k}\left(\dfrac{-1}{r^2 + R^2}\right)$.*

■

A $M_1, \cdots, M_5$ se le suelen llamar ejemplos estándar de hipersuperficies completas en $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ con un máximo de dos curvaturas principales constantes distintas. Es obvio que $M_1, \cdots, M_4$ son hipersuperficies totalmente umbilicas. M_3 se llama horoesfera y M_4 es una esfera geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$.

1.3. Ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci

En geometría riemanniana las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci son conocidas como las ecuaciones fundamentales para subvariedades encajadas en algún espacio riemanniano y su importancia radica en que relacionan la curvatura de la variedad con la curvatura de su espacio ambiente.

Es bien sabido que en cualquier variedad riemanniana M el tensor de curvatura está dado por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Del tensor de curvatura, se pueden deducir otras descripciones de la curvatura de la variedad, por ejemplo:

La curvatura seccional está dada por

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2} = \frac{R(X,Y,X,Y)}{|X \wedge Y|^2}$$

donde

$$R(X,Y,Z,W)=\langle R(Z,W)Y,X\rangle \qquad \text{y} \qquad |X\wedge Y|=\sqrt{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}$$

Y ciertas combinaciones de la curvatura seccional nos dan otras relaciones de la curvatura que van a ser de gran utilidad.

La curvatura de Ricci se define como

$$Ric(X,Y)=\sum_{j=1}^{n} R(X,e_j,Y,e_j),$$

donde e_i es una base ortonormal de T_pM.

La curvatura escalar es

$$R=\sum_{i=1}^{n} Ric(e_i,e_i)=\sum_{i,j} R(e_i,e_j,e_i,e_j).$$

En el caso de una subvariedad $M\subset N$, tomaremos el tensor de curvatura de N y lo restringiremos a M para obtener las ecuaciones fundamentales. El tensor de Riemann de N está dado por

$$\widetilde{R}(X,Y)Z=\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z-\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z-\widetilde{\nabla}_{[XY]}Z.$$

Si usamos la fórmula de Gauss, tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= \widetilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z+h(Y,Z))-\widetilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z+h(X,Z))-(\nabla_{[XY]}Z+h([XY],Z))\\
&= \nabla_X\nabla_Y Z+h(X,\nabla_Y Z)+\widetilde{\nabla}_X h(Y,Z)\\
&- \nabla_Y\nabla_X Z-h(Y,\nabla_X Z)-\widetilde{\nabla}_Y h(X,Z)\\
&- \nabla_{[XY]}Z-h([XY],Z)\\
&= R(X,Y)Z-h([X,Y],Z)+h(X,\nabla_Y Z)-h(Y,\nabla_X Z)+\widetilde{\nabla}_X h(Y,Z)-\widetilde{\nabla}_Y h(X,Z)
\end{aligned}$$

de la ecuación de Weingarten obtenemos

$$\widetilde{\nabla}_X h(Y,Z)=-A_{h(Y,Z)}X+\nabla^{\perp}_X h(Y,Z)$$

así

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z-A_{h(Y,Z)}X+A_{h(X,Z)}Y-h([X,Y],Z)+h(X,\nabla_Y Z)-h(Y,\nabla_X Z)\\
&+\nabla^{\perp}_X h(Y,Z)-\nabla^{\perp}_Y h(X,Z).
\end{aligned}$$

Sea W un campo tangente, entonces la parte tangencial de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ es

$$\langle\widetilde{R}(X,Y)Z,W\rangle=\langle R(X,Y)Z,W\rangle-\langle A_{h(Y,Z)}X,W\rangle+\langle A_{h(X,Z)},Y\rangle$$

usamos el hecho que $\langle h(X,Y),\xi\rangle=\langle A_\xi X,Y\rangle$ y llegamos a la famosa ecuación de Gauss la cual relaciona la curvatura de la variedad con la del espacio ambiente.

$$\boxed{\langle\widetilde{R}(X,Y)Z,W\rangle=\langle R(X,Y)Z,W\rangle-\langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle+\langle h(Y,W),h(X,Z)\rangle}$$

Cuando tenemos que el espacio ambiente N es un espacio de curvatura constante c la ecuación de Gauss se puede ver como:

$$R(X,Y,W,Z) = c(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) + \langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle - \langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle.$$

Ahora si denotamos la parte normal de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ por $(\widetilde{R}(X,Y)Z)^\perp$ tenemos

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^\perp = \nabla_X^\perp h(Y,Z) + h(X,\nabla_Y Z) - \nabla_Y^\perp h(X,Z) - h(Y,\nabla_X Z) - h([X,Y],Z),$$

la derivada covariante de h está dada por

$$(\nabla_X^\perp h)(Y,Z) = \nabla_X^\perp(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z)$$

de igual menera calculamos $(\nabla_Y^\perp h)(X,Z)$ y cuando la sustituimos en la ecuación anterior, llegamos a la ecuación de Codazzi:

$$\boxed{(\widetilde{R}(X,Y)Z)^\perp = (\widetilde{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\widetilde{\nabla}_Y h)(X,Z)}$$

Para deducir la ecuación de Ricci para una subvariedad en general, tomamos dos campos normales ξ, η a M; entonces

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\xi - \widetilde{\nabla}_{[XY]}\xi$$

si usamos la ecuación de Weingarten en el lado derecho de $\widetilde{R}(X,Y)\xi$ obtenemos

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = -\widetilde{\nabla}_X(A_\xi Y) + \widetilde{\nabla}_X\nabla_Y^\perp\xi + \widetilde{\nabla}_Y(A_\xi X) - \widetilde{\nabla}_Y\nabla_X^\perp\xi + A_\xi[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}^\perp\xi,$$

nuevamente en la ecuación anterior usamos la fórmula de Gauss $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$ y la ecuación de Weingarten $\widetilde{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp\xi$, para obtener que

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)\xi = R(X,Y)^\perp\xi &- \nabla_X(A_\xi Y) - h(X,A_\xi Y) - A_{\nabla_Y^\perp\xi}X \\ &+ \nabla_Y(A_\xi X) + h(Y,A_\xi X) + A_{\nabla_X^\perp\xi}Y + A_\xi[X,Y],\end{aligned}$$

donde escribimos a $R(X,Y)^\perp\xi$ como

$$R(X,Y)^\perp\xi = \nabla_X^\perp\nabla_Y^\perp\xi - \nabla_Y^\perp\nabla_X^\perp\xi - \nabla_{[XY]}^\perp\xi.$$

Al hacer el producto con un vector normal η, tenemos

$$\langle\widetilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R(X,Y)^\perp\xi,\eta\rangle - \langle h(X,A_\xi Y),\eta\rangle + \langle h(Y,A_\xi X),\eta\rangle;$$

usamos otra vez $\langle h(X,Y),\xi\rangle = \langle A_\xi X,Y\rangle$ y el hecho de que A es un operador autoadjunto para llegar a la ecuación de Ricci:

$$\boxed{\langle\widetilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R(X,Y)^\perp\xi,\eta\rangle - \langle[A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle}$$

donde escribimos $[A_\xi,A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$. En particular cuando N es una variedad de curvatura constante la ecuación de Ricci se reduce a

$$\langle R(X,Y)^{\perp}\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle.$$

Uno de los objetos de estudio que se trabajan en geometría riemanniana y en particular en el estudio de subvariedades con curvatura media H constante o curvatura escalar R constante es el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental S, que se define como

$$S = \sum_{i,j} \langle h(e_i,e_j), h(e_i,e_j)\rangle = \sum_{i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2$$

donde usamos la siguiente notación $h(e_i,e_j) = \sum_\alpha h_{ij}^{\alpha}\xi_\alpha$.

Cuando tenemos una subvariedad inmersa en un espacio de curvatura constante c, la curvatura escalar R en términos de una base ortonormal se escribe como:

$$R = \sum_{i,j} R(e_i,e_j,e_i,e_j) = \sum_{i,j} c(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}g_{ij}) + \sum_{i,j,\alpha,\beta} \langle h_{ii}^{\alpha}\xi_\alpha, h_{jj}^{\beta}\xi_\beta\rangle - \sum_{i,j,\alpha,\beta} \langle h_{ij}^{\alpha}\xi_\alpha, h_{ij}^{\beta}\xi_\beta\rangle$$

$$R = \sum_{i,j} R(e_i,e_j,e_i,e_j) = cn(n-1) + \sum_{i,j,\alpha} h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha} - \sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}$$

por lo tanto la curvatura escalar R se puede ver como

$$R = n(n-1)c - S + n^2H^2.$$

Por ejemplo para el caso de una subvariedad de dimensión 2, la fórmula queda como

$$R = 2(2-1)c - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 4\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^2 = 2c + 2\lambda_1\lambda_2.$$

Cuando la curvatura del espacio ambiente N es $c = 0$, es decir en $\mathbb{R}^{n+1}$, tenemos que la curvatura escalar R es dos veces el producto de las curvaturas principales $2\lambda_1\lambda_2$. A veces se suele tomar la curvatura escalar normalizada

$$R = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} R(e_i,e_j,e_i,e_j)$$

teniendo que la curvatura escalar ahora sí es la curvatura de Gauss K.

Si usamos la curvatura escalar normalizada, la fórmula $R = n(n-1)c - S + n^2H^2$ se transforma en

$$n(n-1)(R-c) = -S + n^2H^2.$$

Esta identidad es parte fundamental para el estudio de las hipersuperficies con curvatura media H constante (incluyendo las hipersuperficies mínimas), hipersuperficies con curvatura escalar R constante y hipersuperficies con el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental S constante.

Volviendo a las ecuaciones fundamentales de las subvariedades: Gauss, Codazzi y Ricci es posible establecer un resultado análogo al teorema fundamental de las superficies mejor conocido como teorema de Bonnet. Este resultado nos describe las condiciones para que una variedad pueda ser inmersa isométricamente en un espacio riemanniano y la prueba se puede encontar en texto de M. Dajczer, [6].

Teorema 1.2 (Teorema Fundamental de las Subvariedades) *Sea M una variedad riemanniana simplemente conexa de dimensión m, supongamos que existe un haz plano E de dimensión q sobre M, con h segunda forma fundamental y A el operador de forma asociado. Si se satisfacen las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci, es decir*

- $R(X,Y,Z,W) = c(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) + \langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle - \langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle$,
- $(\widetilde{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\widetilde{\nabla}_Y h)(X,Z)$,
- $\langle R(X,Y)^{\perp}\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$.

Entonces M puede ser inmersa isométricamente en un espacio de dimensión $m+q$ de curvatura constante, con haz normal E.

■

1.4. Ecuaciones de Estructura de Cartan

Las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci se pueden obtener por medio de las ecuaciones de estructura de Cartan. Consideremos M una variedad riemanniana de dimensión m isométricamente inmersa en otra variedad N de dimensión n. Tomemos un marco móvil ortonormal adaptado en N, esto es, (e_A) con $A = 1,\ldots,n$ de los cuales (e_i) con $i = 1,\ldots,m$ son tangentes a M y (e_α) con $\alpha = m+1,\ldots,n$ son normales a M.

Si tenemos dos marcos móviles ortonormales adaptados e' y e relacionados por la ecuación matricial $e' = ea$, donde la matriz a es de la forma

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

donde $U \in O(m)$ y $V \in O(n-m)$. La conexión de Cartan para N está dada por una matriz de 1-formas (ω^A_B) que satisfacen las ecuaciones de estructura de Cartan

$$\omega^A_B = -\omega^B_A$$

$$d\omega^A + \omega^A_B \wedge \omega^B = 0$$

$$d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \widetilde{\Omega}^A_B$$

donde las 1-formas (ω^A) son el comarco asociado al marco móvil (e_A), la 2-forma $\widetilde{\Omega}^A_B$ es la forma de curvatura de N y d es la derivada exterior. La conexión de Cartan es otra manera de ver la conexión de Levi-Civita en una variedad riemanniana, es decir,

$$\omega^A_B(e_C) = \langle \nabla_{e_C} e_B, e_A\rangle;$$

o equivalentemente

$$\nabla_{e_C} e_B = \sum_D \omega^D_B(e_C) e_D.$$

Cabe mencionar que cuando se cambia de marco de referencia $e' = ea$, la conexión de Cartan y la forma de curvatura se transforman mediante las fórmulas

$$\omega' = a^{-1}da + a^{-1}\omega \qquad \text{y} \qquad \Omega' = a^{-1}\Omega a.$$

La restrición de (ω_B^A) a (ω_j^i) nos da una conexión de Levi-Civita ∇ en M correspondiente a la métrica inducida por la variedad riemanniana N, pues como $\omega^\alpha = 0$ sobre M tenemos

$$d\omega^i = -\omega_B^i \wedge \omega^B = -\omega_j^i \wedge \omega^j - \omega_\alpha^i \wedge \omega^\alpha.$$

De manera similar la restricción de (ω_B^A) a (ω_β^α) nos da una conexión de Levi-Civita $\nabla^\perp$ en el espacio normal a M, pues $\omega^i = 0$ evaluado en vectores en el espacio normal

$$d\omega^\alpha = -\omega_B^\alpha \wedge \omega^B = -\omega_i^\alpha \wedge \omega^i - \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta.$$

El lema de Cartan parece un resultado técnico pero es uno de los resultados más importantes en el estudio de las subvariedades, ver [21]:

Lema 1.2 (Lema de Cartan) *Consideremos M una variedad de dimensión n, sea $r \leq n$ y $\omega_1, \ldots, \omega_r$ 1-formas sobre M linealmente independientes en $p \in M$. Dadas $\theta_1, \ldots, \theta_r$ 1-formas sobre M con la propiedad*

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_i \wedge \omega_i = 0$$

Entonces, existen funciones diferenciables h_{ij} sobre M, con $h_{ij} = h_{ji}$ tales que

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} h_{ij}\omega_j$$

para toda $i = 1, \ldots, r$.

■

Para vectores tangentes a M las 1-formas ω^α se anulan, es decir, $\omega^\alpha = 0$. Por lo tanto

$$0 = d\omega^\alpha = -\omega_A^\alpha \wedge \omega^A = -\omega_i^\alpha \wedge \omega^i;$$

por el lema de Cartan, $\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j$ para funciones diferenciables $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$. Las funciones h_{ij}^α son las componentes de la segunda forma fundamental en la dirección de e_α, pues

$$\nabla e_\alpha = \omega_\alpha^j e_j + \omega_\alpha^\beta e_\beta.$$

Además como $v = \omega^i e_i$, la segunda forma queda como un 2-tensor simétrico

$$II(v) = -\langle \nabla e_\alpha, v \rangle = -\langle \omega_\alpha^j e_j + \omega_\alpha^\beta e_\beta, \omega^i e_i \rangle = -\omega_\alpha^i \omega^i = \omega_i^\alpha \omega^i = h_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j,$$

por lo tanto la segunda forma se puede escribir como:

$$II = \sum_{ij} h_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j.$$

De la relación $(\widetilde{\nabla}_X \xi)^\top = -A_\xi X$ con $\xi = e_\alpha$ y $X = e_i$ vemos que

$$(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_\alpha)^\top = (\omega_\alpha^A(e_i)e_A)^\top = \omega_\alpha^j(e_i)e_j = -A_{e_\alpha} e_i,$$

por lo tanto el operador A viene dado por

$$A_{e_\alpha}(e_i) = -\omega^j_\alpha(e_i)e_j = \omega^\alpha_j(e_i)e_j = h^\alpha_{jk}\omega^k(e_i)e_j = h^\alpha_{ij}e_j.$$

Las ecuaciones de Gauss, Ricci y Codazzi se expresan en términos de formas de la siguiente manera: la idea es restringir los índices de las ecuaciones estructurales de Cartan de manera adecuada.

Si nos centramos en la segunda ecuación de estructura para N, $d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \widetilde{\Omega}^A_B$ y restringimos los índices a la subvariedad M, tenemos

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha_j = \widetilde{\Omega}^i_j.$$

La segunda ecuación estructural para la conexión en M es

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \Omega^i_j;$$

como

$$\omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha_j = -\omega^\alpha_i \wedge \omega^\alpha_j = -h^\alpha_{ik}\omega^k \wedge h^\alpha_{jl}\omega^l = -h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}\omega^k \wedge \omega^l,$$

si hacemos la diferencia $\widetilde{\Omega}^i_j - \Omega^i_j$ tenemos

$$\widetilde{\Omega}^i_j - \Omega^i_j = -h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}\omega^k \wedge \omega^l.$$

Evaluamos en esta relación en cualesquiera dos vectores e_r y e_s, teniendo en cuenta que la 2-forma de curvatura queda como $\Omega^i_j(e_r, e_s) = R_{ijrs}$

$$\widetilde{R}_{ijrs} - R_{ijrs} = -h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}(\delta^k_r\delta^l_s - \delta^k_s\delta^l_r) = h^\alpha_{is}h^\alpha_{jr} - h^\alpha_{ir}h^\alpha_{js}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\widetilde{R}_{ijrs} - R_{ijrs} = h^\alpha_{is}h^\alpha_{jr} - h^\alpha_{ir}h^\alpha_{js}}$$

que precisamente es la ecuación de Gauss que teníamos anteriormente si sustituimos los campos como $X = e_r$, $Y = e_s$, $Z = e_i$ y $W = e_j$.

Otra vez consideramos la segunda ecuación estructural de N, $d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \widetilde{\Omega}^A_B$ y restringimos los índices de $A = \alpha$ y $B = i$ para deducir la ecuación de Codazzi, es decir

$$d\omega^\alpha_i + \omega^\alpha_j \wedge \omega^j_i + \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta_i = \widetilde{\Omega}^\alpha_i.$$

Como

$$d\omega^\alpha_i = d(h^\alpha_{ik}\omega^k) = dh^\alpha_{ik} \wedge \omega^k - h^\alpha_{ik}d\omega^k = dh^\alpha_{ik} \wedge \omega^k - h^\alpha_{ij}d\omega^j = dh^\alpha_{ik} \wedge \omega^k - h^\alpha_{ij}\omega^j_k \wedge \omega^k;$$

en el último término usamos la primera ecuación de estructura para M. Los otros sumandos vienen dados por

$$\omega^\alpha_j \wedge \omega^j_i = h^\alpha_{jk}\omega^k \wedge \omega^j_i = -h^\alpha_{jk}\omega^j_i \wedge \omega^k$$

$$\omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta_i = \omega^\alpha_\beta \wedge (h^\beta_{ik}\omega^k) = h^\beta_{ik}\omega^\alpha_\beta \wedge \omega^k$$

Por lo tanto la segunda ecuación estructural con $A = \alpha$ y $B = i$ queda como

$$(dh^\alpha_{ik} - h^\alpha_{ij}\omega^j_k - h^\alpha_{jk}\omega^j_i + h^\beta_{ik}\omega^\alpha_\beta) \wedge \omega^k = \widetilde{\Omega}^\alpha_i$$

evaluamos en esta igualdad los vectores e_r y e_s que son tangentes a M, para obtener

$$(dh^\alpha_{ik} - h^\alpha_{ij}\omega^j_k - h^\alpha_{jk}\omega^j_i + h^\beta_{ik}\omega^\alpha_\beta)(e_r)\omega^k(e_s) - (dh^\alpha_{ik} - h^\alpha_{ij}\omega^j_k - h^\alpha_{jk}\omega^j_i + h^\beta_{ik}\omega^\alpha_\beta)(e_s)\omega^k(e_r) = \widetilde{\Omega}^\alpha_i(e_r, e_s).$$

Usamos el hecho de que $\omega^k(e_s) = \delta^k_s$ y $\omega^k(e_r) = \delta^k_r$ para llegar a la ecuación de Codazzi:

$$\boxed{dh^\alpha_{is}(e_r) - h^\alpha_{ij}\omega^j_s(e_r) - h^\alpha_{js}\omega^j_i(e_r) + h^\beta_{is}\omega^\alpha_\beta(e_r) - dh^\alpha_{ir}(e_s) + h^\alpha_{ij}\omega^j_r(e_s) + h^\alpha_{jr}\omega^j_i(e_s) - h^\beta_{ir}\omega^\alpha_\beta(e_s) = \widetilde{R}_{\alpha irs}}$$

La fórmula no parece clara pero si la reescribimos como

$$\widetilde{R}_{\alpha irs} = (\nabla_{e_r} h^\alpha)(e_s, e_i) - (\nabla_{e_s} h^\alpha)(e_r, e_i) + h^\beta(e_s, e_i)\langle \nabla^\perp_{e_r} e_\beta, e_\alpha\rangle - h^\beta(e_r, e_i)\langle \nabla^\perp_{e_s} e_\beta, e_\alpha\rangle,$$

tenemos precisamente $(\widetilde{R}(X,Y)Z)^\perp = (\widetilde{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\widetilde{\nabla}_Y h)(X,Z)$ con los campos $X = e_s$, $Y = e_r$ y $Z = e_i$.

Por último para la ecuación de Ricci, de $d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \widetilde{\Omega}^A_B$ restringimos los índices a $M^\perp$

$$d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_i \wedge \omega^i_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta = \widetilde{\Omega}^\alpha_\beta;$$

vemos que

$$\omega^\alpha_i \wedge \omega^i_\beta = -\omega^\alpha_i \wedge \omega^\beta_i = -h^\alpha_{ij}\omega^j \wedge h^\alpha_{ik}\omega^k = -h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik}\omega^j \wedge \omega^k$$

y

$$d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta = {\Omega^\perp}^\alpha_\beta.$$

Si calculamos $\widetilde{\Omega}^\alpha_\beta - {\Omega^\perp}^\alpha_\beta$ llegamos a

$$\widetilde{\Omega}^\alpha_\beta - {\Omega^\perp}^\alpha_\beta = -h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik}\omega^j \wedge \omega^k;$$

al evaluar nuevamente en e_r y e_s tenemos

$$\widetilde{\Omega}^\alpha_\beta(e_r, e_s) - {\Omega^\perp}^\alpha_\beta(e_r, e_s) = -h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik}(\omega^j(e_r)\omega^k(e_s) - \omega^j(e_s)\omega^k(e_r)) = -h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik}(\delta^j_r\delta^k_s - \delta^j_s\delta^k_r)$$

y por lo tanto concluimos con la ecuación de Ricci:

$$\boxed{\widetilde{R}_{\alpha\beta rs} - R^\perp_{\alpha\beta rs} = h^\alpha_{is}h^\alpha_{ir} - h^\alpha_{ir}h^\alpha_{is}}$$

La moraleja es que las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci se obtienen de las ecuaciones de estructura de Cartan restringiendo los índices de manera adecuada.

Capítulo 2

Hipersuperficies Mínimas en la Esfera $\mathbb{S}^{n+1}$

En este capítulo daremos algunos resultados generales de hipersuperficies en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$.

2.1. Derivada de un Tensor, Laplaciano e Identidades de Ricci

En esta sección calcularemos el laplaciano de la segunda forma fundamental (h_{ij}) y el del cuadrado de su longitud $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$, con el fin de encontrar algunos invariantes geométricos de las hipersuperficies.

Las formas de conexión en una variedad riemanniana se pueden escribir con un índice arriba y otro abajo o con dos índices abajo, pues con la ayuda de la métrica se puede subir o bajar cualquiera de sus índices, por ejemplo $\omega_{ij} = g_{ri}\omega_j^r$. De aquí en adelante usaremos como (ω_{ij}) las 1-formas de conexión sobre M, asociado al marco (e_i) y al marco dual (ω_i).

Como sabemos, un tensor T de orden r en una variedad M es una función multilineal

$$T : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{r-copias} \longrightarrow \mathcal{D}(M),$$

esto es, dados $X, Y_1, \dots Y_r$ campos sobre M y $f, g \in \mathcal{D}(M)$ se tiene

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r)$$

para cualquier entrada. La derivada covariante de un tensor de orden r es un tensor de orden $r+1$ y está dada por

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_i, \dots, Y_r).$$

Y la derivada covariante de T con respecto Z, $\nabla_Z T$ está definida por

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z).$$

¿Cómo se ve la derivada en el lenguaje de las formas? En términos de un marco móvil ortonormal $\{e_i\}$ las componentes de $\nabla T(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e_j)$ son $T_{i_1 \dots i_r j}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
T_{i_1\ldots i_r j} &= \nabla T(e_{i_1},\ldots,e_{i_r},e_j) \\
&= e_j(T(e_{i_1},\ldots,e_{i_r})) - T(\nabla_{e_j}e_{i_1},\ldots,e_{i_r}) - \cdots - T(e_{i_1},\ldots,\nabla_{e_j}e_{i_r}) \\
&= dT_{i_1\ldots i_r}(e_j) - T(\sum_k \omega_{i_1k}(e_j)e_k, e_{i_2},\ldots,e_{i_r}) - \cdots - T(e_{i_1},\ldots,e_{i_{r-1}},\sum_k \omega_{i_rk}(e_j)e_k)
\end{aligned}
$$

donde en la última igualdad usamos el hecho que $\nabla_{e_j}e_i = \sum_k \omega_{ik}(e_j)e_k$. Y esta fórmula no es más que

$$
\sum_k T_{i_1\ldots i_rk}\omega_k(e_j) = \left(dT_{i_1\ldots i_r} - T(\sum_k \omega_{i_1k}e_k, e_{i_2}\ldots,e_{i_r}) - \cdots - T(e_{i_1},\ldots,e_{i_{r-1}},\sum_k \omega_{i_rk}e_k) \right)(e_j).
$$

Por lo tanto

$$
\sum_k T_{i_1\ldots i_rk}\omega_k = dT_{i_1\ldots i_r} - \sum_k T_{ki_2\ldots i_r}\omega_{i_1k} - \cdots - \sum_k T_{i_1\ldots,k}\omega_{i_rk}.
$$

ó equivalentemente

$$
\sum_k T_{i_1\ldots i_rk}\omega_k = dT_{i_1\ldots i_r} + \sum_k T_{ki_2\ldots i_r}\omega_{ki_1} + \cdots + \sum_k T_{i_1\ldots,k}\omega_{ki_r}.
$$

Por ejemplo, la derivada covariante de la segunda forma fundamental $h = \sum_{i,j} h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ se escribe como

$$
\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj}\omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj}.
$$

Y la segunda derivada covariante de h es

$$
\sum_l h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} + \sum_l h_{ljk}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l h_{ijl}\omega_{lk}.
$$

Usando las derivadas de h obtendremos la ecuación de Ricci. Como primer paso hacemos el producto cuña de la segunda derivada covariante de (h_{ij}) con ω_k, esto es

$$
\sum_{k,l} h_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k = \sum_k dh_{ijk} \wedge \omega_k + \sum_{k,l} h_{ljk}\omega_{li} \wedge \omega_k + \sum_{k,l} h_{ilk}\omega_{lj} \wedge \omega_k + \sum_{k,l} h_{ijl}\omega_{lk} \wedge \omega_k.
$$

Como segundo paso tomamos la derivada exterior de la derivada covariante de la segunda forma fundamental

$$
\sum_k d(h_{ijk}\omega_k) = d(dh_{ijk}) + \sum_k dh_{kj} \wedge \omega_{ki} + \sum_k h_{kj}d\omega_{ki} + \sum_k dh_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj},
$$

por otro lado

$$
\sum_k d(h_{ijk}\omega_k) = \sum_k dh_{ijk} \wedge \omega_k + \sum_k h_{ijk}d\omega_k.
$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones y despejando $\sum_k dh_{ijk} \wedge \omega_k$, tenemos

$$\sum_k dh_{ijk} \wedge \omega_k = -\sum_k h_{ijk} d\omega_k + \sum_k dh_{kj} \wedge \omega_{ki} + \sum_k h_{kj} d\omega_{ki} + \sum_k dh_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj}$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_k dh_{ijk} \wedge \omega_k = &-\sum_k h_{ijk} d\omega_k \\ &+ \sum_{k,l} h_{kjl}\omega_l \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l} h_{lj}\omega_{lk} \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l} h_{kl}\omega_{lj} \wedge \omega_{ki} \\ &+ \sum_{k,l} h_{kj}\omega_{kl} \wedge \omega_{li} + \sum_k h_{kj}\Omega_{ki} \\ &+ \sum_{k,l} h_{ikl}\omega_l \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l} h_{lk}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l} h_{il}\omega_{lj} \wedge \omega_{kj} \\ &+ \sum_{k,l} h_{kl}\omega_{lj} \wedge \omega_{li} + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k,l} h_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k = \sum_m h_{mj}\Omega_{mi} + \sum_m h_{im}\Omega_{mj};$$

y como la 2-forma de curvatura satisface $\Omega_{ir}(e_l, e_k) = R_{rilk}$, entonces

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{imlk} + \sum_m h_{im}R_{jmlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl} + \sum_m h_{im}R_{mjkl}.$$

Esta última fórmula es llamada identidad de Ricci

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl} + \sum_m h_{im}R_{mjkl}$$

Recordaremos algunas definiciones bastante conocidas en geometría diferencial: Dado un campo vectorial X sobre M, la divergencia de X es una función $\mathrm{div}(X) : M \longrightarrow R$ dada por

$$\mathrm{div}X(p) = \mathrm{tr}\{Y \longrightarrow \nabla_Y X\}.$$

Consideremos una función diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y un marco de referencia (e_i) sobre un abierto U de la variedad; podemos escribir df como

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_i\omega_i,$$

donde las ω_i son las 1-formas duales asociadas al marco móvil (e_i) y la función f_i es la derivada de f en dirección del vector e_i, es decir, $f_i = df(e_i)$. Se definen el gradiente, el hessiano y el laplaciano (operador de Laplace-Beltrami), respectivamente, como:

$$\mathrm{grad}f = \nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i,$$

$$\text{Hess} f = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$$

y

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}$$

donde

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \omega_j = df_i + \sum_{j=1}^{n} f_j \omega_j.$$

Utilizando la identidad de Ricci, calcularemos el laplaciano de la segunda forma fundamental (h_{ij}):

$$\begin{aligned}
\Delta h_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} h_{ijkk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (h_{ijkk} - h_{ikjk}) + \sum_{k=1}^{n} (h_{ikjk} - h_{ikkj}) + \sum_{k=1}^{n} (h_{ikkj} - h_{kkij}) + \left(\sum_{k=1}^{n} h_{kk} \right)_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (h_{ijkk} - h_{ikjk}) - \sum_{m,k=1} h_{mk} R_{mikj} - \sum_{m,k=1} h_{im} R_{mkkj} + \sum_{k=1}^{n} (h_{ikkj} - h_{kkij}) + \left(\sum_{k=1}^{n} h_{kk} \right)_{ij} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} h_{kk} \right)_{ij} - \sum_{m,k=1} h_{mk} R_{mikj} - \sum_{m,k=1} h_{im} R_{mkkj},
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que en la última igualdad usamos la simetría de (h_{ij}) y la ecuación de Codazzi $h_{ijk} = h_{ikj}$, por lo tanto tenemos

$$\Delta h_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} h_{kk} \right)_{ij} - \sum_{m,k=1} h_{mk} R_{mikj} - \sum_{m,k=1} h_{im} R_{mkkj}.$$

Ahora vamos a encontrar una fórmula análoga para el laplaciano del cuadrado de la longitud de la segunda forma, S. Primero sabemos que el laplaciano de un producto de funciones está dado por

$$\Delta fg = f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle \text{grad} f, \text{grad} g \rangle;$$

en particular si $f = g$,

$$\Delta f^2 = 2 f \Delta f + 2 \langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle = 2 f \Delta f + 2 |\text{grad} f|^2 = 2 f \Delta f + 2 \sum_{k=1}^{n} f_k^2.$$

Usando este hecho, el laplaciano del cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental $S = \sum_{i,j=1} h_{ij}^2$ está dado por

$$\frac{1}{2} \Delta S = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \Delta h_{ij} + \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2,$$

donde la norma ∇h está dada por $|\nabla h|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2$. Como anteriormente calculamos Δh_{ij} concluimos que

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla h|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(\mathrm{tr}h)_{ij} - \sum_{i,j,m,k=1}^{n} h_{ij}h_{mk}R_{mikj} - \sum_{i,j,m,k=1}^{n} h_{ij}h_{im}R_{mkkj}.$$

Si tomamos un marco de referencia (e_i) de tal manera que se diagonalice la segunda forma, es decir, $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, esta fórmula se escribe como

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla h|^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathrm{tr}h)_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j R_{ijij} + \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2 R_{ijij};$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla h|^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathrm{tr}h)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}$$

puesto que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2 R_{ijij} - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j R_{ijij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \{\lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2\}R_{ijij} = \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.$$

Todos estos cálculos se pueden hacer para cualquier tensor simétrico de orden dos, y en la siguientes secciones ocuparemos este hecho.

2.2. Hipersuperficies con Curvatura Media Constante

Una de las caracterizaciones de las hipersuperficies mínimas en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ que estudiaremos en esta sección se puede encontrar en el trabajo de H. Alencar y M. do Carmo, [1], el cual trata de encontrar cotas para el operador de forma A y así describir dichas hipersuperficies.

Consideremos la inmersión

$$f : \mathbb{S}^m(r_1) \times \mathbb{S}^n(r_2) \longrightarrow \mathbb{S}^{m+n+1} \subset \mathbb{R}^{m+n+2}, \qquad \text{con} \qquad r_1^2 + r_2^2 = 1.$$

Las curvaturas principales de f están dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \frac{r_2}{r_1} \qquad \text{y} \qquad \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_{m+n} = -\frac{r_1}{r_2},$$

pues si consideramos las proyecciones π_1 y π_2 de $\mathbb{R}^{m+n+2}$ en $\mathbb{R}^{m+1}$ y $\mathbb{R}^{n+1}$ respectivamente, y $e_1, \dots, e_{m+n}, \eta_1, \eta_2$ un marco ortonormal de $\mathbb{R}^{m+n+2}$ tal que:

- $e_1, \dots, e_m$ es un marco en $\mathbb{S}^m(r_1)$, es decir, $e_i = (d\pi_1(e_i), 0)$ para $i = 1, \dots, m$.
- $e_{m+1}, \dots, e_{m+n}$ es un marco en $\mathbb{S}^n(r_2)$, es decir, $e_i = (0, d\pi_2(e_i))$ para $i = m+1, \dots, m+n$.
- $\eta_1 = (\eta_1, 0) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ y $\eta_2 = (0, \eta_2) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ con

$$\eta_1(p) = -\frac{1}{r_1}p, \quad \text{y} \quad \eta_2(p) = -\frac{1}{r_2}q \quad \text{donde} \quad p \in \mathbb{S}^m(r_1) \quad \text{y} \quad q \in \mathbb{S}^m(r_2),$$

tenemos entonces que η_1 y η_2 son las aplicaciones de Gauss de $\mathbb{S}^m(r_1)$ y $\mathbb{S}^n(r_2)$ respectivamente.

Definimos la aplicación de Gauss η del producto $\mathbb{S}^m(r_1)\times\mathbb{S}^n(r_2)$ considerando a η como

$$\eta = r_2\eta_1 - r_1\eta_2.$$

Sabemos que la diferencial de la aplicación de Gauss es precisamente el operador de forma, es decir

$$d\eta_{(p,q)} = -A_{\eta_{(p,q)}}.$$

y que la segunda forma fundamental está definida por $II(v) = \langle A_\eta(v), v\rangle$, donde

$$A_\eta(v) = -r_2 d\eta_1(v) + r_1 d\eta_2(v).$$

Consideremos (ω_i) las 1-formas duales asociadas al marco móvil (e_i) con $i = 1,\ldots,m+n$, entonces

$$\begin{aligned}\langle A_\eta(v), w\rangle &= -r_2\langle d\eta_1(d\pi_1(v)), d\pi_1(w)\rangle + r_1\langle d\eta_2(d\pi_2(v)), d\pi_2(w)\rangle\\ &= \frac{r_2}{r_1}\sum_{i=1}^{m}\omega_i(v)\omega_i(w) - \frac{r_1}{r_2}\sum_{i=m+1}^{m+n}\omega_i(v)\omega_i(w).\end{aligned}$$

Por lo que la segunda forma de la inmersión f en la dirección de η queda como

$$II = \frac{r_2}{r_1}\sum_{i=1}^{m}\omega_i^2 - \frac{r_1}{r_2}\sum_{i=m+1}^{m+n}\omega_i^2$$

y las curvaturas principales están dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \frac{r_2}{r_1}, \qquad \lambda_{m+1},\ldots,\lambda_{m+n} = -\frac{r_1}{r_2},$$

con las direcciones principales $e_1,\ldots,e_{m+n}$ respectivamente.

Por ejemplo: el $H(r)$-toro es una hipersuperficie en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con $0 < r < 1$, definida por la inmersión del producto $\mathbb{S}^{n-1}(r)\times\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ en $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2$, las curvaturas principales corresponden a

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \quad \lambda_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Cuando $n = 2$ y $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tenemos el toro de Clifford que es una inmersión mínima ($H = 0$) de un 2-toro en la esfera de dimensión 3, $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})\times\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \longrightarrow \mathbb{S}^3(1)$, cuyas curvaturas principales vienen dadas por $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y cuya longitud de la segunda forma es $S = 2$. En general tenemos el resultado:

Teorema 2.1 *Sea M una variedad compacta de dimensión n y $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}(1)$ una hipersuperficie mínima. Consideremos $A : T_pM \longrightarrow T_pM$ el operador de forma de M. Supongamos que $S \leq n$ para todo $p \in M$. Entonces*

- *O pasa $S = 0$ (y M es totalmente geodésica) ó $S = n$;*
- *$S = n$ si y sólo si M es un toro de Clifford en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, es decir, M es un producto de esferas $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)\times\mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, $n_1 + n_2 = n$ de radio apropiado.*

■

La primera parte del teorema se debe a J. Simons en [20], la caracterización dada en la segunda parte del teorema se obtuvo por Chern, do Carmo y Kobayashi en [4] y que estudiaremos con todo detalle en la sección 2.4.

En las siguientes secciones se ampliará este resultado a hipersuperficies con curvatura media H constante, curvatura escalar R constante y el cuadrado de la longitud de la segunda forma S constante. Además usaremos el siguiente resultado de do Carmo y Dajczer que se puede encontrar en [8].

Teorema 2.2 *Sea $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}(c)$ una hipersuperficie inmersa en un espacio de curvatura constante c, con $n \geq 3$. Supongamos que las curvaturas principales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de f satisfacen que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = -\lambda \neq 0$, $\lambda_n = -\mu = -\mu(\lambda)$ y $\lambda - \mu \neq 0$. Entonces $f(M^n)$ está contenida en una hipersuperficie de rotación.*

■

Si definimos el tensor simétrico $\phi : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(x, y) = \langle Hx - Ax, y \rangle$, podemos calcular su traza, viendo que

$$\langle H(p)e_i - Ae_i, e_j \rangle = \langle (H(p) - \lambda_i)e_i, e_j \rangle = (H(p) - \lambda_i)\delta_{ij};$$

luego $\mathrm{tr}\phi = 0$, pues

$$\mathrm{tr}\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n}(H(p) - \lambda_i) = nH(p) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

Definimos el cuadrado de la norma de ϕ como

$$|\phi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(H(p) - \lambda_i)^2$$

donde $\mu_i = H(p) - \lambda_i$ es un valor propio de $H(p)x - Ax$ con vector propio e_i para cada $i = 1, \ldots, n$. Ahora

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\mu_i - \mu_j)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i\mu_j + \sum_{i,j=1}^{n} \mu_j^2 = n|\phi|^2 - 2(\mathrm{tr}\phi)^2 + n|\phi|^2 = 2n|\phi|^2,$$

por lo tanto

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^{n} (\mu_i - \mu_j)^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

De aquí se tiene que si la norma $|\phi|^2 = 0$ tenemos que $\phi = 0$ y esto pasa si y sólo si $A = H(p)I$ lo que nos dice que la inmersión es totalmente umbílica.

Así, el tensor simétrico $\phi(x, y) = \langle Hx - Ax, y \rangle$, se vuelve un objeto de estudio importante para la geometría y en particular en el estudio de la hipersuperficies de curvatura media H constante. El propósito es describir cotas para $|\phi|^2$ y caracterizar las hipersuperficies que aparecen cuando las cotas de éste se alcanzan.

Si consideramos una variedad compacta M de dimensión n con curvatura media constante $H \geq 0$ inmersa en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, para cada H se define el polinomio

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx - n(H^2+1)$$

y denotamos por B_H al cuadrado de la raíz positiva de $P_H(x) = 0$. Vemos que para variedades mínimas inmersas en la esfera ($H = 0$), el polinomio queda como $P_0(x) = x^2 - n$ y $B_0 = n$. En general tenemos el resultado obtenido por Alencar y do Carmo.

Un resultado útil para probar este resultado se encuentra en [1] o [16]:

Lema 2.1 (M. Okumura) *Sean μ_i números reales con $i = 1, \ldots, n$; que cumplan $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$ y $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \beta^2$ con $\beta \geq 0$. Entonces*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_{i=1}^n \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3$$

y la igualdad derecha (izquierda) se da si y sólo si $n-1$ de los números μ_i son positivos (negativos) e iguales.

■

Teorema 2.3 (H. Alencar, M. do Carmo) *Sea M una variedad compacta de dimensión n y $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ una inmersión con curvatura media constante H. Sea $\phi : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ un tensor simétrico dado por*

$$\phi(x, y) = \langle Hx - Ax, y \rangle$$

Si $|\phi|^2 \leq B_H$ para todo $p \in M$, entonces

- $|\phi|^2 = 0$ *(M es totalmente umbílica) ó $|\phi|^2 = B_H$.*
- $|\phi|^2 = B_H$ *si y sólo si*
  1. *$H = 0$, entonces M es un toro de Clifford en $\mathbb{S}^{n+1}$;*
  2. *$H \neq 0$, $n \geq 3$, entonces M es un $H(r)$-toro con $r^2 < \frac{n-1}{n}$;*
  3. *$H \neq 0$, $n = 2$, entonces M es un $H(r)$-toro con $r^2 \neq \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}$.*

Demostración: Este resultado requiere hacer algunas estimaciones. Tenemos que el laplaciano de $|\phi|^2$ está dado por

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^n \mu_i(\mathrm{tr}\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2$$

como $\mathrm{tr}\phi = 0$, tenemos que $(\mathrm{tr}\phi)_{ii} = 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$, lo que implica

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2$$

usando la fórmula de Gauss y la definición $\mu_i = H(p) - \lambda_i$ tenemos

$$R_{ijij} = 1 + \lambda_i\lambda_j = 1 + \mu_i\mu_j - (\mu_i + \mu_j)H + H^2;$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(\mu_i-\mu_j)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(1+\mu_i\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2\\ &-\frac{H}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2\\ &+\frac{H^2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\mu_i-\mu_j)^2.\end{aligned}$$

Por una parte,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(1+\mu_i\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^2-2\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\mu_j+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_j^2+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^3\mu_j-2\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^2\mu_j^2+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\mu_j^3\\ &= 2n|\phi|^2-2(\mathrm{tr}\phi)^2+2(\mathrm{tr}\phi)\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3-2|\phi|^4\\ &= 2n|\phi|^2-2|\phi|^4\end{aligned}$$

y la suma

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^3-\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^2\mu_j-\sum_{i,j=1}^{n}\mu_j^2\mu_i+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_j^3\\ &= 2n\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3-2(\mathrm{tr}\phi)|\phi|^2\\ &= 2n\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3.\end{aligned}$$

Entonces $\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(\mu_i-\mu_j)^2$ puede escribirse como

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(\mu_i-\mu_j)^2 = n|\phi|^2-|\phi|^4+nH^2|\phi|^2-nH\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3;$$

por lo tanto el laplaciano de $|\phi|^2$ está dado por

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2+n|\phi|^2-|\phi|^4+nH^2|\phi|^2-nH\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3.$$

Lo que queremos es acotar el sumando $\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3$ de esta última ecuación, para ello utilizamos el lema de Okumura para obtener que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= |\nabla\phi|^2 + n|\phi|^2 - |\phi|^4 + nH^2|\phi|^2 - nH\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3 \\
&\geq |\nabla\phi|^2 - |\phi|^2\left(|\phi|^2 - n(1+H^2) + \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|H\right) \\
&= |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2(-P_H(|\phi|));
\end{aligned}
$$

esto es

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2(-P_H(|\phi|)).$$

Por el teorema de la divergencia $\int_M \mathrm{div}X dV = \int_{\partial M} i_X dA$ y usando que la variedad es compacta tenemos

$$\int_M \Delta|\phi|^2 dV = \int_M \mathrm{div}(\mathrm{grad}|\phi|^2)dV = \int_{\partial M} i_{\mathrm{grad}|\phi|^2} dA = 0,$$

integrando ambos lados de la desigualdad anterior resulta

$$0 = \frac{1}{2}\int_M \Delta|\phi|^2 \geq \int_M |\nabla\phi|^2 + \int_M |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) \geq 0;$$

esto implica que $|\nabla\phi|^2 = 0$ y $|\phi|^2 = 0$ ó $P_H(|\phi|) = 0$ lo que prueba la primera parte del teorema pues la solución positiva de $P_H(|\phi|) = 0$ es $|\phi|^2 = B_H$.

Para la segunda parte, tenemos que $n \geq 2$, pues si $n = 1$ tenemos que $|\phi|^2 = \mu_1^2 = 0$ contradiciendo el hecho que $P_H(0) = -n(H^2+1) < 0$. Además como el lado derecho de la desigualdad se anula independientemente de la compacidad de M, la parte que sigue serán argumentos locales.

Cuando $H = 0$, entonces $|\phi|^2 = B_H = n$ y $|\phi|^2 = S = n$, por el Teorema 2.1 tenemos que M es el toro de Clifford en $\mathbb{S}^{n+1}$.

En el caso de $H \neq 0$ tenemos que se cumple la igualdad en el lema de Okumura,

$$\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|^3 = \sum_{i=1}\mu_i^3$$

de aquí se sigue que los valores propios λ_i son constantes y de todos ellos hay $n-1$ que son iguales, renombrando si es necesario tenemos

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} \qquad \text{y} \qquad \lambda_n \neq \lambda_1.$$

Como $|\nabla\phi| = 0$, tenemos que los μ_i son constantes, de aquí que $\lambda_i = H - \mu_i$ es constante para $n \geq 3$. El Teorema 2.2 afirma que M está contenida en una hipersuperficie de rotación de $\mathbb{S}^{n+1}$, obtenida por una rotación de una curva de curvatura constante, así que identificamos a M como un $H(r)$-toro.

Con la numeración anterior, la igualdad del lema de Okumura, se cumple si

$$\mu_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi|, \qquad \mu_1 = \cdots = \mu_{n-1} = -\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}|\phi|$$

entonces

$$\lambda_n\lambda_1 = \left(H - \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}|\phi|\right)\left(H + \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi|\right)$$

así

$$n\lambda_n\lambda_1 = nH^2 - |\phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| = -n$$

y por lo tanto $\lambda_n\lambda_1 = -1$. Por otro lado,

$$\lambda_n = H - \mu_n = \frac{\lambda_n + (n-1)\lambda_1}{n} + \mu_n$$

que se convierte en

$$(n-1)(\lambda_n - \lambda_1) = -n\mu_n.$$

Como $\mu_n > 0$, tenemos $\lambda_n < \lambda_1$ y como también se cumple $\lambda_n\lambda_1 = -1$ llegamos a que $\lambda_n < 0$. Se sigue que el $H(r)$-toro está dado por $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con las curvaturas principales dadas por

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \quad \lambda_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

y la curvatura media queda como

$$H = \frac{(n-1)\lambda_1 + \lambda_n}{n} = \frac{(n-1)\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}{n} = \frac{(n-1) - nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}} > 0$$

que es positiva si $(n-1) - nr^2 > 0$, es decir $r^2 < \frac{n-1}{n}$, lo que concluye la segunda parte.

Para el caso $n = 2$, tenemos que $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ es una superficie que tiene dos curvaturas principales constantes en la esfera $\mathbb{S}^3$ y sabemos que es totalmente umbílica, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2$ o es un $H(r)$-toro, pues $|\phi| \neq 0$.

Por un argumento igual al anterior vemos que $\lambda_1\lambda_2 = -1$, luego entonces la curvatura media positiva es

$$H = \frac{1-2r^2}{2r\sqrt{1-r^2}} \qquad \text{ó} \qquad H = \frac{2r^2-1}{2r\sqrt{1-r^2}}$$

y como $H \neq 0$, tenemos que $r^2 \neq \frac{1}{2}$, que demuestra la última parte del teorema.

■

2.3. Hipersuperficies con Curvatura Escalar Constante en Espacios de Curvatura Constante

El estudio de los problemas de rigidez en hipersuperficies mínimas en la esfera se basa al igual que en la sección anterior en el cálculo del laplaciano de algunos invariantes geométricos sobre M desarrollados por J. Simons [20], por ejemplo $S = \sum_i \lambda_i^2$, $f_s = \sum_i \lambda_i^s$ con $s \geq 3$, etc. En el trabajo de Haizhong Li, [10], se dan resultados de rigidez donde se hace uso del operador $\Box$ estudiado por Cheng y Yau en [5], a saber

$$\square f = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij}$$

el cual explicaremos a continuación.

Consideremos $M \subset N^{n+1}(c)$ una hipersuperficie compacta de dimensión n en un espacio de curvatura constante c, donde $N^{n+1}(0) = \mathbb{R}^{n+1}$, $N^{n+1}(1) = \mathbb{S}^{n+1}$ y $N^{n+1}(-1) = \mathbb{H}^{n+1}$.

Sea $h = \sum_{i,j=1} h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ la segunda forma fundamental, supongamos que en una vecindad de M, eligimos un marco móvil (e_i) tal que

$$h = \sum_{i,j=1} h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j = \sum_i \lambda_i \omega_i \otimes \omega_i.$$

Sabemos que la curvatura escalar está dada por $R = \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} R_{ijij}$, y la ecuación de Gauss puede escribir como

$$n(n-1)(R-c) = n^2 H^2 - S.$$

Por lo tanto tenemos un invariante para las hipersuperficies mínimas o con curvatura escalar constante y que es precisamente la longitud de la segunda forma fundamental.

Tomemos $T = \sum_{ij} T_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ un tensor simétrico en M, donde

$$T_{ij} = T(e_i, e_j) = \langle nHe_i, e_j\rangle - h(e_i, e_j) = nH\delta_{ij} - h_{ij};$$

definimos el operador asociado a este tensor T que actúa sobre las funciones diferenciables en M, como

$$\square f = \sum_{ij} T_{ij} f_{ij} = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij}.$$

Usaremos un resultado de Cheng y Yau que puede consultarse en [5]:

Teorema 2.4 (S. Y. Cheng, S.T. Yau) *Sea M una variedad riemanniana compacta y orientable de dimensión n; supongamos que $\phi = \sum_{i,j=1} \phi_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ es un tensor simétrico en M, definimos el operador*

$$\square f = \sum_{i,j} \phi_{ij} f_{ij}.$$

Entonces $\square$ es un operador autoadjunto relativo al producto interno en $L^2(M)$ si y sólo si para toda $j = 1, \ldots, n$ se tiene que $\sum_j \phi_{ijj} = 0$.

■

En nuestro caso veremos que $\sum_j T_{ijj} = 0$, es decir, el tensor T_{ij} es libre de divergencia:

$$
\begin{aligned}
T_{ijj} = (nH\delta_{ij})_j - h_{ijj} &= \delta_{ij}(nH)_j - h_{ijj} \\
&= \delta_{ij}(\sum_{k=1}^{n} h_{kkj}) - h_{ijj} \\
&= \delta_{ij}(\sum_{k=1}^{n} h_{kjk}) - h_{ijj} \\
&= \delta_{ij}(\sum_{k=1}^{n} h_{jkk}) - h_{ijj}.
\end{aligned}
$$

Así se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} T_{ijj} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n} h_{jkk} - \sum_{j=1}^{n} h_{ijj} = \sum_{k=1}^{n} h_{ikk} - \sum_{j=1}^{n} h_{ijj} = 0;$$

por lo tanto usando el teorema 2.4, tenemos que $\Box$ es un operador autoadjunto con el producto interno definido en $L^2(M)$, es decir,

$$\int_M f\Box g = \int_M g\Box f.$$

Usando este operador $\Box$, Haizhong Li obtuvo algunos resultados sobre la rigidez en hipersuperficies de curvatura escalar constante R. Haremos nuevamente algunas estimaciones como en la sección anterior; empezaremos por considerar como siempre (e_i) un marco móvil y su marco dual (ω_i) en una subvariedad contenida en un espacio de curvatura constante de tal forma que la segunda forma se vea como $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$.

Lema 2.2 *Sea M una hipersuperficie compacta de dimensión n en $N^{n+1}(c)$ y sea $\widetilde{R} = R - c$, entonces*

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta R + |\nabla h|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.$$

Demostración: Tenemos en primer lugar que

$$
\begin{aligned}
\Box(nH) &= \sum_{i,j}(nH\delta_{ij} - h_{ij})(nH)_{ij} \\
&= nH\sum_{i}(nH)_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(nH)_{ij} \\
&= nH\Delta(nH) - \sum_{i}^{n} \lambda_i (nH)_{ii};
\end{aligned}
$$

ahora, el laplaciano de nH es

$$\Delta(nH)^2 = 2nH\Delta(nH) + 2n^2|\nabla H|^2.$$

Por lo tanto

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}\Delta(nH)^2 - n^2|\nabla H|^2 - \sum_{ij}^{n} \lambda_i (nH)_{ii}.$$

En segundo lugar, sabemos que

$$(nH)^2 = n^2H^2 = n(n-1)\widetilde{R} + S \qquad \text{con} \qquad \widetilde{R} = R - c;$$

así,

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta R + \frac{1}{2}\Delta S - n^2|\nabla H|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (nH)_{ii}.$$

En la sección anterior demostramos que el laplaciano de la norma de un tensor simétrico de orden dos está dado por

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla h|^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\mathrm{tr} h)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2;$$

combinando las dos últimas ecuaciones queda demostrado el lema:

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta R + |\nabla h|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}$$

■

De ahora en adelante vamos a trabajar con hipersuperficies de curvatura escalar normalizada R constante, por lo que el operador $\Box(nH)$ toma la forma

$$\Box(nH) = |\nabla h|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.$$

Si usamos la ecuación de Gauss $R_{ijij} = c + \lambda_i\lambda_j$ obtenemos

$$\Box(nH) = |\nabla h|^2 - n^2|\nabla H|^2 + ncS - S^2 - n^2H^2c + nH\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3.$$

Consideremos $\mu_i = \lambda_i - H$ y $|\beta|^2 = \sum_i \mu_i^2$; entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} H = nH - nH = 0$$

y

$$|\beta|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2 - 2\lambda_i H + H^2) = S - 2H\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} H^2 = S - 2nH^2 + nH^2 = S - nH^2;$$

además,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^3=\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+H)^3=\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^3+3\mu_i^2H+3\mu_iH^2+H^3)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3+3H|\beta|^2+nH^3.$$

Por lo tanto podemos escribir $\square(nH)$ como

$$\square(nH)=|\nabla h|^2-n^2|\nabla H|^2+|\beta|^2(nc+nH^2-|\beta|^2)+nH\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3.$$

Si utilizamos nuevamente el lema de Okumura para acotar $\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3$, tenemos

$$\square(nH)=|\nabla h|^2-n^2|\nabla H|^2+|\beta|^2\left(nc+nH^2-|\beta|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\beta|\right),$$

concluimos que para hipersuperfices en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ el operador $\square(nH)$ debe cumplir

$$\square(nH)=|\nabla h|^2-n^2|\nabla H|^2+|\beta|^2(-P_H(|\beta|));$$

recordando que $c=1$ y que el polinomio $P_H(x)$ fue definido como

$$P_H(x)=x^2+\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx-n(H^2+1).$$

El siguiente lema es esencial para propósitos posteriores

Lema 2.3 *Supongamos que la curvatura escalar normalizada R es constante y $R-c\geq 0$, entonces*

$$|\nabla h|^2\geq n^2|\nabla H|^2.$$

Demostración: Tomemos la derivada covariante de $n^2H^2-S=n(n-1)(R-c)$ con R constante:

$$2n^2HH_k=2\sum_{i,j}h_{ij}h_{ijk},$$

de aquí que

$$\begin{aligned}\sum_k n^4H^2(H_k)^2&=\sum_k(\sum_{i,j}h_{ij}h_{ijk})^2\\&\leq(\sum_{i,j}h_{ij}^2)(\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2);\end{aligned}$$

por lo tanto

$$n^4H^2|\nabla H|^2\leq S|\nabla h|^2.$$

Por otro lado sabemos que $R-c\geq 0$, esto implica que $n^2H^2\geq S$, por lo que tenemos demostrada la desigualdad requerida:

$$n^4H^2|\nabla H|^2\leq S|\nabla h|^2\leq n^2H^2|\nabla h|^2.$$

$\blacksquare$

Ahora vamos a realizar algunos cálculos, abreviando $\widetilde{R} = R - c$. Por la ecuación de Gauss tenemos

$$|\beta|^2 = S - nH^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)(S - n\widetilde{R}).$$

Utilizando esta última igualdad y el lema anterior podemos ver que $\Box(nH)$ se escribe como

$$\begin{aligned}\Box(nH) &\geq \frac{n-1}{n}(S - n\widetilde{R})\left(nc + nH^2 - S + nH^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{S - n\widetilde{R}}\right)\\ &= \frac{n-1}{n}(S - n\widetilde{R})\left(nc + 2nH^2 - S - (n-2)|H|\sqrt{S - n\widetilde{R}}\right)\\ &= \frac{n-1}{n}(S - n\widetilde{R})\left(nc + 2(n-1)\widetilde{R} - \left(\frac{n-2}{n}\right)S - \frac{n-2}{n}\sqrt{(n(n-1)\widetilde{R} + S)(S - n\widetilde{R})}\right).\end{aligned}$$

Esta desigualdad será la base para demostrar el siguiente resultado que caracteriza las hipersuperficies de curvatura escalar constante R en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$.

Teorema 2.5 (Li Haizhong) *Sea M una hipersuperficie compacta de dimensión $n \geq 3$ con curvatura escalar normalizada R constante en la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+1}$. Si*

- $\widetilde{R} = R - 1 \geq 0$,
- *S, el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental de M satisface*

$$n\widetilde{R} \leq S \leq \frac{n}{(n-2)(n\widetilde{R}+2)}\Big(n(n-1)\widetilde{R}^2 + 4(n-1)\widetilde{R} + n\Big).$$

Entonces pasa que $S = n\widetilde{R}$ y M es totalmente umbílica; o bien

$$S = \frac{n}{(n-2)(n\widetilde{R}+2)}\Big(n(n-1)\widetilde{R}^2 + 4(n-1)\widetilde{R} + n\Big)$$

y M es un producto de esferas, $M = \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$, donde $r = \sqrt{\dfrac{n-2}{n(\widetilde{R}+1)}}$.

Demostración: La prueba se basa en que el operador $\Box$ es autoadjunto. Usando la desigualdad anterior con $c = 1$, es decir,

$$\Box(nH) \geq \frac{n-1}{n}(S - n\widetilde{R})\left(n + 2(n-1)\widetilde{R} - \left(\frac{n-2}{n}\right)S - \frac{n-2}{n}\sqrt{(n(n-1)\widetilde{R} + S)(S - n\widetilde{R})}\right).$$

De nuestra hipótesis tenemos que

$$S \leq \frac{n}{(n-2)(n\widetilde{R}+2)}\Big(n(n-1)\widetilde{R}^2 + 4(n-1)\widetilde{R} + n\Big),$$

que es equivalente a

$$\left(n+2(n-1)\widetilde{R}-\left(\frac{n-2}{n}\right)S\right)^2 \geq \frac{(n-2)^2}{n^2}\left((n(n-1)\widetilde{R}+S)(S-n\widetilde{R})\right).$$

Un hecho importante es ver que para $n \geq 3$ se tiene $n+2(n-1)\widetilde{R}-(\frac{n-2}{n})S > 0$, de aquí tenemos la siguiente desigualdad

$$n+2(n-1)\widetilde{R}-\left(\frac{n-2}{n}\right)S \geq \frac{(n-2)}{n}\sqrt{(n(n-1)\widetilde{R}+S)(S-n\widetilde{R})};$$

por lo tanto,

$$n+2(n-1)\widetilde{R}-\left(\frac{n-2}{n}\right)S - \frac{(n-2)}{n}\sqrt{(n(n-1)\widetilde{R}+S)(S-n\widetilde{R})} \geq 0.$$

Usando el hecho que $S \geq n\widetilde{R}$ concluimos que $\Box(nH) \geq 0$:

$$\Box(nH) \geq \frac{n-1}{n}(S-n\widetilde{R})\left(n+2(n-1)\widetilde{R}-\left(\frac{n-2}{n}\right)S-\frac{n-2}{n}\sqrt{(n(n-1)\widetilde{R}+S)(S-n\widetilde{R})}\right) \geq 0.$$

Ahora usemos que el operador $\Box$ es autoadjunto en $L^2(M)$:

$$\int_M \Box(nH) = \int_M nH\Box(1) = \int_M (nH)\cdot 0 = 0;$$

por otro lado sabemos por el lema 2.3 que $|\nabla h|^2 \geq n^2|\nabla H|^2$, por lo tanto

$$0 = \int_M \Box(nH) \geq \int_M |\nabla h|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \int_M |\beta|^2\left(n+nH^2-|\beta|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\beta|\right) \geq 0,$$

como cada sumando es positivo, obtenemos las siguientes dos igualdades

$$|\nabla h|^2 = n^2|\nabla H|^2 \qquad \text{y} \qquad |\beta|^2\left(n+nH^2-|\beta|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\beta|\right) = 0.$$

La primera igualdad implica que $\lambda_i = h_{ii} = cte$ para todo $i = 1,\ldots,n$ mostrando que H es constante, de la segunda ecuación tenemos dos casos:

$$|\beta|^2 = S-n\widetilde{R} = 0 \qquad \text{ó} \qquad -P_H(|\beta|) = n(1+H^2)-|\beta|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\beta| = 0.$$

De $|\beta|^2 = S-n\widetilde{R} = 0$, tenemos que $S = n\widetilde{R}$ y esto implica que M es totalmente umbílica.

Observemos que

$$n^2H^2 - S = n(n-1)\widetilde{R} \geq 0$$

sí $H = 0$, implica que $-S \geq 0$ y en consecuencia $S = 0$ y $|\beta| = 0$ regresando al caso anterior y no podemos tener el polinomio $P_0(|\beta|) = |\beta|^2 - n = 0$.

Para el segundo caso con $n \geq 3$, tenemos que para $H \neq 0$ por el teorema 2.3 de Alencar do Carmo asegura que M es un $H(r)$-toro, es decir $M = \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)$ con dos curvaturas principales dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \quad \lambda_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Para encontrar el radio r, hacemos el siguiente cálculo:

$$n(n-1)\widetilde{R} = n^2H^2 - S = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = (n-1)\frac{n-2-nr^2}{r^2};$$

por lo tanto, $nr^2\widetilde{R} = n - 2 - nr^2$ y

$$r = \sqrt{\frac{n-2}{n(\widetilde{R}+1)}},$$

lo que termina la prueba.

■

En el caso de hipersuperficies inmersas en $\mathbb{R}^{n+1}$, tenemos

Teorema 2.6 *Sea M una hipersuperficie compacta de dimensión $n \geq 3$ con curvatura escalar normalizada R constante en $\mathbb{R}^{n+1}$. Si el cuadrado de la longitud de la segunda forma de M satisface*

$$nR \leq S \leq \frac{n(n-1)}{n-2}R.$$

Entonces $S = nR$ y M es una esfera $\mathbb{S}^n(r)$ con $r = \sqrt{\frac{1}{R}}$.

Demostración: En el caso de $\mathbb{R}^{n+1}$, se tiene que la curvatura es $c = 0$, además notamos que la condición $\widetilde{R} = R - 0 \geq 0$ se satisface automaticamente, por la siguiente razón: como M es compacta, existe un punto $p_0 \in M$ tal que $\lambda_i(p_0) > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$n(n-1)R = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j(p_0) > 0$$

pero como R es constante, tenemos que $R \geq 0$ sobre toda M. Como $c = 0$, tenemos

$$\Box(nH) \geq \frac{n-1}{n}(S - n\widetilde{R})\left(2(n-1)\widetilde{R} - \left(\frac{n-2}{n}\right)S - \frac{n-2}{n}\sqrt{(n(n-1)\widetilde{R}+S)(S-n\widetilde{R})}\right);$$

de la condición $nR \leq S \leq \dfrac{n(n-1)}{n-2}R$, vemos que $\Box(nH) \geq 0$ y con el mismo proceso del teorema anterior llegamos a que $S = nR$ y M es una esfera $\mathbb{S}^n(r)$ con $r = \sqrt{\frac{1}{R}}$.

■

Para $c = -1$, haciendo el mismo proceso se tiene un resultado análogo

Teorema 2.7 *Sea M una hipersuperficie compacta de dimensión $n \geq 3$ con curvatura escalar normalizada R constante en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Si*

- $\widetilde{R} = R + 1 \geq 0$,
- *S, el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental de M satisface*

$$n\widetilde{R} \leq S \leq \frac{n}{(n-2)(n\widetilde{R}-2)}\left(n(n-1)\widetilde{R}^2 - 4(n-1)\widetilde{R} + n\right).$$

Entonces $S = n\widetilde{R}$ y M es totalmente umbílica; o bien

$$S = \frac{n}{(n-2)(n\widetilde{R}-2)}\left(n(n-1)\widetilde{R}^2 - 4(n-1)\widetilde{R} + n\right)$$

y M es una hipersuperficie en $\mathbb{H}^{n+1}$ con dos curvaturas principales, es decir, M es isométrica a $M = \mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{H}^1(\frac{-1}{r^2+1})$ para alguna $r > 0$.

■

Los detalles para $c = -1$ fueron dado por L. Ximin y S. Weihong, y se pueden encontrar en [22].

2.4. Hipersuperficies Mínimas en la Esfera con Longitud de la Segunda Forma Fundamental Constante

En esta sección estudiaremos el trabajo de Chern, do Carmo y Kobayashi [4], donde el problema es determinar las hipersuperficies mínimas M^n en la esfera $\mathbb{S}^{n+p}$ cuya longitud de la segunda forma satisface

$$S = \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}.$$

En el caso de dimensión 2, vimos que el toro de Clifford es una inmersión mínima de un 2-toro en la esfera de dimensión 3, $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \longrightarrow \mathbb{S}^3(1)$ y cuya longitud de la segunda forma es $S = 2$. En dimensiones mayores que 2, el toro de Clifford $M_{m,n-m}$ es un encaje en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$

$$M_{m,n-m} = \mathbb{S}^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right) \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}(1)$$

con $n > m$ y definido de la siguiente manera:

Sea (u, v) un punto de $M_{m,n-m}$ donde $u \in \mathbb{R}^{m+1}$ y $v \in \mathbb{R}^{n-m+1}$ tal que la longitud de u es $\sqrt{\frac{m}{n}}$ y la de v es $\sqrt{\frac{n-m}{n}}$. Podemos considerar a (u, v) como un vector unitario en $\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m+1}$. Las curvaturas principales están dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \sqrt{\frac{n-m}{m}}, \qquad \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = -\sqrt{\frac{m}{n-m}};$$

$M_{m,n-m}$ es una hipersuperficie mínima en $\mathbb{S}^{n+1}$ ya que

$$H = \frac{1}{n}\left(m\sqrt{\frac{n-m}{m}} - (n-m)\sqrt{\frac{m}{n-m}}\right) = 0.$$

También se satisface que la longitud de la segunda forma S es n, pues

$$S = m(\frac{n-m}{m}) + (n-m)(\frac{m}{n-m}) = n.$$

La superficie de Veronese está definida por la inmersión isométrica

$$\mathbb{S}^2(\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{S}^4(1)$$

dada por

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}xy, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}xz, \quad u^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}yz, \quad u^4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \quad u^5 = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

donde $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Los puntos (x, y, z) y $(-x, -y, -z)$ de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ son mapeados al mismo punto de $\mathbb{S}^4(1)$. Este mapeo define un encaje del espacio proyectivo real en $\mathbb{S}^4(1)$. Mostraremos más adelante que es una superficie mínima y satisface $S = \frac{4}{3}$.

El resultado principal establece que la superficie de Veronesse en $\mathbb{S}^4(1)$ y las hipersuperficies $M_{m,n-m}$ en $\mathbb{S}^{n+1}$ son las únicas hipersuperficies mínimas de dimensión n en $\mathbb{S}^{n+p}$ que satisfacen $S = \dfrac{n}{2 - \frac{1}{p}}$.

Empezaremos considerando una variedad mínima M de dimensión n inmersa en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, sabemos que el laplaciano de la segunda forma en una variedad M está dado por

$$\Delta h_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} h_{kk}\right)_{ij} + \sum_{m,k=1} h_{mk}R_{mijk} + \sum_{m,k=1} h_{im}R_{mkjk}$$

Usando que M es mínima, es decir, $\sum_k h_{kk} = 0$ y la ecuación de Gauss

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})$$

tenemos que

$$\Delta h_{ij} = (n - S)h_{ij}$$

donde denotamos $S = \sum h_{ij}^2$ como el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental h. Por ejemplo, en el caso de una variedad mínima M de dimensión 3, tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta h_{ij} &= \sum_{m,k=1} h_{mk}R_{mijk} + \sum_{m,k=1} h_{im}R_{mkjk} \\
&= \sum_{m,k=1} h_{mk}(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij} + h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij}) + \sum_{m=1} h_{im}(2\delta_{mj} - h_{mk}h_{kj}) \\
&= 3h_{ij} - \sum_{m,k=1} h_{km}h_{mk}h_{ij}. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Sabemos también que el laplaciano de S es igual a

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j} h_{ij}\Delta h_{ij} + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2,$$

por lo que

$$\frac{1}{2}\Delta S = (n-S)S + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2.$$

Integrando esta última ecuación sobre M (compacta o $S = cte$); se tiene que si $0 < S < n$, entonces M está contenida en una esfera ecuatorial si $S = 0$ ó M es un producto de esferas, cuando $S = n$.

En general, cuando M es una variedad mínima de dimensión n inmersa en otra variedad N de dimensión $n+p$, se puede hacer algo parecido y que formularemos a continuación:

Primero, sabemos que la segunda forma fundamental en dirección de α está dada por h_{ij}^{α} y que la derivada de h_{ij}^{α} está dada por

$$\sum_k h_{ijk}^{\alpha}\omega^k = dh_{ij}^{\alpha} - \sum_l h_{il}^{\alpha}\omega_j^l - \sum_l h_{lj}^{\alpha}\omega_i^l + \sum_{\beta} h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}.$$

Cuando tenemos que M es una variedad mínima y el espacio ambiente N es un espacio de curvatura constante c, se satisface

$$\sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} = -\sum (h_{ik}^{\alpha}h_{kj}^{\beta} - h_{ik}^{\beta}h_{kj}^{\alpha})(h_{il}^{\alpha}h_{lj}^{\beta} - h_{il}^{\beta}h_{lj}^{\alpha}) - \sum h_{ij}^{\alpha}h_{lk}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}h_{kl}^{\beta} + nc\sum (h_{ij}^{\alpha})^2.$$

Ahora, para cada α denotamos por H_{α} a la matriz h_{ij}^{α} y $S_{\alpha\beta} = \sum_{ij} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}$ la matriz simétrica $(S_{\alpha\beta})$ de orden $p\times p$. Podemos suponer que $(S_{\alpha\beta})$ es una matriz diagonal para una elección adecuada de $e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}$; entonces

$$S_{\alpha} = S_{\alpha\alpha}$$

y el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental

$$S = S_{\alpha\alpha} = \sum_{i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2 = \sum_{\alpha} S_{\alpha}.$$

En general, para una matriz $A = (a_{ij})$ denotamos por $\mathbf{N}(A)$ el cuadrado de la norma de A, es decir

$$\mathbf{N}(A) = \mathrm{tr}(AA^t) = \sum (a_{ij})^2.$$

Para cualquier matriz ortogonal T se satisface la ecuación $\mathbf{N}(A) = \mathbf{N}(TAT^{-1})$; usando este hecho se puede reescribir $\sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$ como

$$\sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} = -\sum_{\alpha\beta} \mathbf{N}(H_{\alpha}H_{\beta} - H_{\beta}H_{\alpha}) - \sum_{\alpha} S_{\alpha}^2 + ncS.$$

Ahora, necesitamos acotar la suma $\sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$ para ello probaremos el siguiente lema algebraico:

Lema 2.4 *Sea A y B matrices simétricas de $n\times n$, entonces*

$$\boldsymbol{N}(AB - BA) \leq 2\boldsymbol{N}(A)\boldsymbol{N}(B),$$

la igualdad se cumple para matrices A, B distintas de cero si y sólo si A y B pueden transformarse simultáneamente mediante una matriz ortogonal en múltiplos escalares de $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ respectivamente, donde

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix};$$

más aún, si A_1, A_2 y A_3 son matrices simétricas de $n \times n$ tales que

$$\boldsymbol{N}(A_\lambda A_\mu - A_\mu A_\lambda) = 2\boldsymbol{N}(A_\lambda)\boldsymbol{N}(A_\mu), \qquad 1 \leq \lambda, \mu \leq 3, \quad \lambda \neq \mu,$$

entonces al menos una de las matrices A_λ debe ser cero.

Demostración: Para probar este resultado podemos suponer que B es una matriz diagonal, con $b_1, \ldots, b_n$ los elementos de la diagonal. Un cálculo directo muestra que

$$\mathbf{N}(AB - BA) = \sum_{i \neq k} a_{ik}^2 (b_i - b_k)^2,$$

usamos la desigualdad $(b_i - b_k)^2 \leq 2(b_i^2 + b_k^2)$ y obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(AB - BA) &= \sum_{i \neq k} a_{ik}^2 (b_i - b_k)^2 \\ &\leq 2 \sum_{i \neq k} a_{ik}^2 (b_i^2 + b_k^2) \\ &\leq 2 (\sum_{i,k} a_{ik}^2)(\sum_i b_i^2) \\ &= 2\mathbf{N}(A)\mathbf{N}(B). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que A y B son matrices diferentes de cero y que la igualdad se da, entonces todas las desigualdades anteriores se vuelven igualdades e inmediatamente de la primera se tiene que

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0 \qquad \text{y que} \qquad b_i + b_k = 0 \qquad \text{si} \qquad a_{ik} \neq 0.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_{12} \neq 0$. Entonces $b_1 = -b_2$ y de la segunda desigualdad

$$b_3 = \cdots = b_n = 0$$

pero como $B \neq 0$, entonces $b_1 = -b_2 \neq 0$ y concluimos que $a_{ik} = 0$ para $(i, k) \neq (1, 2)$.

Para probar la última parte del enunciado, consideremos A_1, A_2, y A_3 matrices simétricas distintas de cero. Por la segunda parte del lema una de esas matrices puede ser transformada en un múltiplo escalar de la matriz $\widetilde{A}$ así como un múltiplo escalar de $\widetilde{B}$ por medio de matrices ortogonales, pero esto es imposible por que $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ no son ortogonalmente equivalentes.

■

Aplicando este lema a nuestra ecuación $-\sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
-\sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} &= \sum_{\alpha\beta}\mathbf{N}(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha) + \sum_{\alpha} S_\alpha^2 - ncS \\
&\leq 2\sum_{\alpha\neq\beta}\mathbf{N}(H_\alpha)\mathbf{N}(H_\beta) + \sum_{\alpha} S_\alpha^2 - ncS \\
&= 2\sum_{\alpha\neq\beta} S_\alpha S_\beta + \sum_{\alpha} S_\alpha^2 - ncS \\
&= \left(\sum_{\alpha} S_\alpha\right)^2 + 2\sum_{\alpha<\beta} S_\alpha S_\beta - ncS \\
&= (p\sigma_1)^2 + p(p-1)\sigma_2 - ncS,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad consideramos

$$p\sigma_1 = \sum_{\alpha} S_\alpha = S \qquad \frac{p(p-1)}{2}\sigma_2 = \sum_{\alpha<\beta} S_\alpha S_\beta.$$

Usamos el hecho

$$p^2(p-1)(\sigma_1^2 - \sigma_2) = \sum_{\alpha<\beta}(S_\alpha - S_\beta)^2 \geq 0$$

para obtener

$$\begin{aligned}
-\sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} &\leq p^2\sigma_1^2 + p(p-1)\sigma_2 - ncS \\
&= (2p^2 - p)\sigma_1^2 - p(p-1)(\sigma_1^2 - \sigma_2) - ncS \\
&\leq p(2p-1)\sigma_1^2 - ncS \\
&= \left(2 - \frac{1}{p}\right) S^2 - ncS.
\end{aligned}$$

Lema 2.5 *Sea M una variedad compacta y orientada de dimensión n inmersa en una variedad riemanniana N de dimensión $n+p$. Entonces*

$$\int_M \left(\sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\right) dV = -\int_M \sum (h_{ijk}^{\alpha})^2 dV \leq 0$$

Demostración: Sabemos que el laplaciano de $\sum (h_{ij}^{\alpha})^2$ es

$$\frac{1}{2}\Delta\left(\sum (h_{ij}^{\alpha})^2\right) = \sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} + \sum (h_{ijk}^{\alpha})^2$$

ahora integramos ambos lados de la igualdad y aplicamos el teorema de Green usando que M es compacta, esto es

$$0 = \int_M \sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} dV + \int_M \sum (h_{ijk}^{\alpha})^2 dV$$

■

Teorema 2.8 *Sea M una variedad compacta y orientada de dimensión n inmersa mínimamente en N, un espacio de dimensión $n+p$ de curvatura constante c. Entonces*

$$\int_M \left\{(2-\frac{1}{p})S - nc\right\} SdV \geq 0.$$

Demostración: Se sigue de lema anterior.

■

Corolario 2.1 *Sea M una variedad compacta y orientada de dimensión n inmersa mínimamente en N, un espacio de dimensión $n+p$ de curvatura constante c. Si M no es totalmente geodésica y si $S \leq \dfrac{nc}{2-\frac{1}{p}}$ sobre toda M, entonces*

$$S = \frac{nc}{2-\frac{1}{p}}.$$

Demostración: Esto proviene del hecho que $(2-\frac{1}{p})S - nc \geq 0$, pues implica que

$$S \geq \frac{nc}{2-\frac{1}{p}}$$

y por otro lado nuestra hipótesis nos dice que $S \leq \frac{nc}{2-\frac{1}{p}}$. Por lo tanto queda probado.

■

Supongamos ahora que $S = \sum(h_{ij}^{\alpha})^2$ es constante, si M es compacta o no tenemos de todas formas que

$$0 = \sum h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} + \sum(h_{ijk}^{\alpha})^2,$$

combinado con

$$-\sum h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \leq \left\{(2-\frac{1}{p})S - nc\right\} S$$

obtenemos

$$\sum(h_{ijk}^{\alpha})^2 \leq \left\{(2-\frac{1}{p})S - nc\right\} S.$$

Por lo tanto si $S = \dfrac{nc}{2-\frac{1}{p}}$, tenemos que la segunda forma fundamental h_{ij}^{α} es un tensor paralelo, es decir, $h_{ijk}^{\alpha} = 0$ pues $\sum(h_{ijk}^{\alpha})^2 = 0$.

En lo que sigue trabajaremos cuando N es de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+1}$ y M no es totalmente geodésica. En este caso tenemos que S es igual a

$$S = \sum(h_{ijk}^{\alpha})^2 = \frac{n}{(2-\frac{1}{p})}.$$

Además, como $h_{ijk}^{\alpha} = 0$, entonces $\Delta h_{ij}^{\alpha} = 0$, por lo tanto

$$-\sum h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} = 0 \qquad \text{y} \qquad (2-\frac{1}{p})S^2 - ncS = 0$$

Por lo que todas las desigualdades se convierten en igualdades.

Esto es, anteriormente hicimos uso de la desigualdad $\mathbf{N}(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha) \leq 2\mathbf{N}(H_\alpha)\mathbf{N}(H_\beta)$, ahora se transforma en la igualdad

$$\mathbf{N}(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha) = 2\mathbf{N}(H_\alpha)\mathbf{N}(H_\beta), \qquad \alpha \neq \beta$$

y la desigualdad $p^2(p-1)(\sigma_1^2 - \sigma_2) = \sum_{\alpha<\beta}(S_\alpha - S_\beta)^2 \geq 0$, queda como

$$p^2(p-1)(\sigma_1^2 - \sigma_2) = 0.$$

Usando el lema 2.4 concluimos que al menos hay dos de las matrices H_α que son distintas de cero, en tal caso podemos suponer que son múltiplos escalares de $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ respectivamente, como en el mismo lema.

Consideraremos dos casos, cuando la codimensión de la variedad M inmersa en $\mathbb{S}^{n+p}$ es $p = 1$ y cuando es $p \geq 2$.

Caso $p = 1$

Sea $h_{ij} = h_{ij}^{n+1}$ y consideremos un marco móvil de tal manera que

$$h_{ij} = 0 \qquad \text{para} \qquad i \neq j.$$

Denotamos a

$$h_i = h_{ii},$$

con esta notación tenemos el siguiente lema

Lema 2.6 *Después de un posible reordenamiento de los elementos de la base $e_1, \ldots, e_n$, tenemos*

- $h_1 = \cdots = h_m = \lambda = cte$, $\quad h_{m+1} = \cdots = h_n = \mu = cte \quad$ *y* $\quad \lambda\mu = -1 \quad$ *con* $1 < m < n$;
- $\omega_j^i = 0 \quad$ *para* $\quad 1 \leq i \leq m \quad$ *y* $\quad m+1 \leq j \leq n$.

Demostración: Como $h_{ijk} = 0$, sustituyendo en la derivada de h_{ij}^α

$$\sum_k h_{ijk}^\alpha \omega^k = dh_{ij}^\alpha - \sum_l h_{il}^\alpha \omega_j^l - \sum_l h_{lj}^\alpha \omega_i^l + \sum_\beta h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha$$

con $i = j$, tenemos

$$0 = dh_i - 2\sum_l h_{il}\omega_j^l = dh_i.$$

Por lo tanto h_i es constante. Ahora como $dh_i = 0$ y dado que $h_{ijk} = 0$

$$0 = \sum_l h_{il}\omega_j^l + \sum_l h_{lj}\omega_i^l = (h_i - h_j)\omega_j^i,$$

lo que muestra que $\omega_j^i = 0$ cuando $h_i - h_j \neq 0$. Entonces como $h_i \neq h_j$, la segunda ecuación de estructura de Cartan queda como

$$0 = d\omega_j^i = -\sum_{i=1}^n \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1} + \omega^i \wedge \omega^j = -\omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1} + \omega^i \wedge \omega^j.$$

Por el lema de Cartan escribimos $\omega_i^{n+1} = \sum h_{ij}^{n+1}\omega^j = \sum h_{ij}\omega^j$,

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1} + \omega^i \wedge \omega^j \\ &= \sum_{k,l} h_{ik}h_{jl}\omega^k \wedge \omega^l + \omega^i \wedge \omega^j \\ &= (h_i h_j + 1)\omega^i \wedge \omega^j. \end{aligned}$$

Como $h_i \neq h_j$, entonces tenemos $h_i h_j = -1$. Denotamos $\lambda = h_1$. Renombrando los índices de la base $e_1, \ldots, e_n$, poniendo $\lambda = h_1 = \cdots = h_m$ y $\lambda \neq h_j$ para $j \geq m+1$.

Entonces, el hecho de que M es una subvariedad mínima y no totalmente geodésica nos conduce a que no todas las $h_1, \ldots, h_n$ son iguales a λ. Como $h_1 h_j = -1$ para $j \geq m+1$, obtenemos que $h_{m+1} = \cdots = h_n = -\dfrac{1}{\lambda}$. Por último llamamos $\mu = -\dfrac{1}{\lambda}$.

■

Por la parte dos del lema anterior se sigue que las dos distribuciones definidas por

$$\omega^1 = \cdots = \omega^m = 0 \qquad \text{y} \qquad \omega^{m+1} = \cdots = \omega^n = 0$$

son integrables, lo que nos da una descomposición local de M. Por lo tanto, cualquier punto de M tiene una vecindad U que es un producto riemanniano $V_1 \times V_2$ con $\dim V_1 = m$ y $\dim V_2 = n-m$. Donde las curvaturas de V_1 y V_2 está dadas por

$$R_{ijkl} = (1+\lambda^2)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad \text{para} \qquad 1 \leq i,j,k,l \leq m$$

y

$$R_{ijkl} = (1+\mu^2)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad \text{para} \qquad m+1 \leq i,j,k,l \leq n.$$

Si $m = 1$, entonces V_1 es una curva y tiene curvatura constante, lo mismo para $n - m = 1$. Ahora; si $m \geq 2$, entonces V_1 es un espacio de curvatura constante $1+\lambda^2$ y si $n-m \geq 2$, entonces V_2 tiene curvatura $1+\mu^2$.

Como la inmersión es mínima tenemos que

$$0 = \sum h_i = m\lambda + (n-m)\mu.$$

Por otro lado, como $S = \dfrac{n}{2-\frac{1}{p}} = n$ implica que

$$n = S = \sum h_i^2 = m\lambda^2 + (n-m)\mu^2.$$

Usando estas dos relaciones, junto con $\lambda\mu = -1$ concluimos que

$$\lambda = \sqrt{\frac{n-m}{m}}, \qquad \mu = -\sqrt{\frac{m}{n-m}}$$

ó

$$\lambda = -\sqrt{\frac{n-m}{m}}, \qquad \mu = \sqrt{\frac{m}{n-m}}.$$

Cambiando e_{n+1} por $-e_{n+1}$ si es necesario, supondremos la primera. En suma, tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.9 *Sea M una hipersuperficie mínimamente inmersa en N un espacio de dimensión $n+1$ y de curvatura constante 1 que satisface $S = n$. Entonces M es localmente un producto riemanianno $V_1 \times V_2 = U \subset M$ de espacios V_1 y V_2 de curvatura constante con $\dim V_1 = m \geq 1$ y $\dim V_2 = n - m \geq 1$. Y la matriz de conexión (ω_B^A) de N restringida a M está dada por*

$$\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_m^1 & & & & \lambda\omega^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & & \vdots \\ \omega_1^m & \cdots & \omega_m^m & & & & \lambda\omega^m \\ & & & \omega_{m+1}^{m+1} & \cdots & \omega_n^{m+1} & \mu\omega^{m+1} \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \omega_{m+1}^n & \cdots & \omega_n^n & \mu\omega^n \\ -\lambda\omega^1 & \cdots & -\lambda\omega^m & -\mu\omega^{m+1} & \cdots & -\mu\omega^n & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda = \sqrt{\dfrac{(n-m)}{m}}$ *y* $\mu = -\sqrt{\dfrac{n}{(n-m)}}$.

■

Caso $p \geq 2$

En este caso, la ecuación $p(p-1)(\sigma_1^2 - \sigma_2) = 0$ implica que

$$\sigma_1^2 = \sigma_2.$$

Sabemos que a lo más dos de las matrices H_α, $\alpha = n+1, \ldots, n+p$, son diferentes de cero. Supongamos que sólo una de ellas lo es, digamos que H_α es diferente de cero; entonces tenemos que $\sigma_1 = \frac{1}{p} S_\alpha$ y $\sigma_2 = 0$ lo que contradice $\sigma_1^2 = \sigma_2$.

Por lo tanto podemos suponer que

$$H_{n+1} = \lambda \widetilde{A}, \qquad H_{n+2} = \mu \widetilde{B}, \qquad \lambda, \mu \neq 0,$$

$$H_\alpha = 0 \qquad \text{para} \qquad \alpha \geq n+3$$

donde las matrices $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ están definidas como en el lema 2.4. Recordando que $\omega_i^\alpha = \sum h_{ij}^\alpha \omega^j$, podemos escribir esto como

$$\omega_1^{n+1} = \lambda\omega^2, \qquad \omega_2^{n+1} = \lambda\omega^1, \qquad \omega_i^{n+1} = 0 \qquad \text{para} \qquad i = 3, \ldots, n.$$

$$\omega_1^{n+2} = \mu\omega^1, \qquad \omega_2^{n+2} = -\mu\omega^2, \qquad \omega_i^{n+2} = 0 \qquad \text{para} \qquad i = 3, \ldots, n.$$

$$\omega_i^\alpha = 0 \qquad \text{para} \qquad \alpha = n+3, \ldots, n+p \qquad \text{e} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Otra vez, como $h_{ijk} = 0$, tenemos

$$dh_{ij}^\alpha = \sum_l h_{il}^\alpha \omega_j^l + \sum_l h_{lj}^\alpha \omega_i^l - \sum_\beta h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

Consideremos las siguientes sustituciones en esta fórmula:

- si $\alpha = n+1$, $i = 1$ y $j = 2$, vemos que $d\lambda = dh_{12}^{n+1} = 0$, lo que implica que λ es constante.
- si $\alpha = n+1$, $i = 1$ y $j \geq 3$, tenemos que $w_j^2 = 0$ para $j \geq 3$.
- si $\alpha = n+1$, $i = 2$ y $j \geq 3$, concluimos que $w_j^1 = 0$ para $j \geq 3$.
- similarmente para $\alpha = n+2$, $i = 1$ y $j = 1$, se ve que μ tiene que ser constante.

Esto nos conduce a que si $j \geq 3$, la segunda ecuación estructural queda de la forma

$$0 = d\omega_j^1 = -\sum_k \omega_k^1 \wedge \omega_j^k + \omega^1 \wedge \omega^j = \omega^1 \wedge \omega^j.$$

Y como $\omega_1, \ldots, \omega_n$ es una base ortonormal, de $\omega^1 \wedge \omega^j = 0$ concluimos $\omega^j = 0$ para $j \geq 3$. Por lo tanto la dimensión de M es 2. Entonces

$$p\sigma_1 = 2(\lambda^2 + \mu^2) \qquad \text{y} \qquad p(p-1)\sigma_2 = 8\lambda^2\mu^2;$$

así obtenemos que

$$p^2(p-1)(\sigma_1^2 - \sigma_2) = 4\left((p-1)\lambda^4 - 2\lambda^2\mu^2 + (p-1)\mu^4\right).$$

El lado izquierdo de esta ecuación es cero, entonces el discriminante del lado derecho tiene que ser no negativo, es decir,

$$1 - (p-1)^2 \geq 0$$

como $p \geq 2$, p debe ser 2; por lo tanto la dimensión de N es 4. De la ecuación $\lambda^4 - 2\lambda^2\mu^2 + \mu^4 = 0$ obtenemos que $\lambda^2 = \mu^2$, entonces la longitud de la segunda forma es

$$\frac{4}{3} = S = 4\lambda^2;$$

puesto que con $n = p = 2$

$$S = \sum (h_{ij}^\alpha)^2 = \frac{2}{2 - \frac{1}{2}}.$$

Remplazando e_3 por $-e_3$ y e_4 por $-e_4$ si es necesario, podemos suponer que $-\lambda = \mu = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Ahora, si $\alpha = 3$ y $i = j = 1$; obtenemos

$$\omega_4^3 = \frac{2\lambda}{\mu}\omega_1^2 = -2\omega_1^2,$$

por lo tanto la curvatura de M está dada por

$$\Omega_2^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^4 = (1 - \lambda^2 - \mu^2)\omega^1 \wedge \omega^2 = \frac{1}{3}\omega^1 \wedge \omega^2.$$

En suma

Teorema 2.10 *Sea M una variedad mínimamente inmersa en un espacio de dimensión $n+1$ con curvatura constante 1 y que satisface $S = \dfrac{n}{2-\frac{1}{p}}$. Si $p \geq 2$, entonces $n = p = 2$ y la matriz de la conexión (ω_B^A) de N restringida a M está dada por*

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \mu\omega^2 & -\mu\omega^1 \\ \omega_1^2 & 0 & \mu\omega^1 & \mu\omega^2 \\ \lambda\omega^2 & \lambda\omega^1 & 0 & 2\omega_2^1 \\ -\lambda\omega^1 & \lambda\omega^2 & 2\omega_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $-\lambda = \mu = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

∎

Para la construcción de ejemplos al teorema 2.9 y 2.10 necesitaremos considerar algunos resultados de hipersuperficies mínimas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ y en la esfera $\mathbb{S}^n$. Sea M una variedad riemanniana de dimensión m. Sea f una función diferenciable, es decir, $f \in \mathcal{D}(M)$; elegimos un marco ortonormal $(e_1, \ldots, e_m)$ en M, entonces el operador de Laplace-Beltrami está dado por

$$\Delta f = \sum_i \{e_i e_i(f) - (\nabla_{e_i} e_i) f\}$$

o equivalentemente para cada $p \in M$, en coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^m)$ tenemos

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right),$$

donde la métrica riemanniana está dada por $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$ denotando a $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ y $g = \det(g_{ij})$.

El operador de Laplace-Beltrami Δ es una generalización del laplaciano usual en el espacio euclidiano. Haremos uso de él para estudiar subvariedades mínimas en el espacio euclidiano.

Teorema 2.11 *Sea $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión isométrica con vector de curvatura media H, entonces*

$$\Delta\psi = mH$$

donde $\Delta\psi = (\Delta\psi^1, \ldots, \Delta\psi^n)$.

Demostración: Sea $(e_1, \ldots, e_m)$ un marco ortonormal, usamos el hecho que $e_i(\psi) = \psi_\star e_i \cong e_i$. Además $e_i e_i \psi = \widetilde{\nabla}_{e_i} e_i$, donde $\widetilde{\nabla}$ denota la conexión euclidiana. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_i \{e_i e_i(\psi) - (\nabla_{e_i} e_i)\psi\} \\ &= \sum_i \left\{ \widetilde{\nabla}_{e_i} e_i - (\nabla_{e_i} e_i) \right\} \\ &= \sum_i (\widetilde{\nabla}_{e_i} e_i)^N \\ &= mH. \end{aligned}$$

∎

Corolario 2.2 *Una inmersión isométrica $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una inmersión mínima si y sólo si cada componente de ψ es una función armónica sobre M.*

$\blacksquare$

Algunas propiedades de subvariedades mínimas en la esfera están relacionadas con las propiedades de subvariedades mínimas en el espacio euclidiano.

Sea $\psi : M \longrightarrow \widetilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ una inmersión isométrica con conexión $\widetilde{\nabla}$ sobre $\widetilde{M}$, $\nabla^\star$ sobre $\mathbb{R}^n$ y con vector de curvatura media H de M en $\widetilde{M}$ y $H^\star$ de M en $\mathbb{R}^n$. Si elegimos un marco ortonormal $e_1, \cdots, e_m$ en M, entonces del teorema 2.11 y del hecho

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{m}\sum_i (\widetilde{\nabla}_{e_i} e_i)^N \\ &= \frac{1}{m}\sum_i ((\nabla^\star_{e_i} e_i)^T)^N \\ &= \frac{1}{m}\sum_i ((\nabla^\star_{e_i} e_i)^N)^T \\ &= (H^\star)^T, \end{aligned}$$

tenemos que $H = (H^\star)^T = (\Delta\psi)^T$.

Si $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ es totalmente geodésica entonces $\widetilde{\nabla} = \nabla^\star$ sobre todo $\widetilde{M}$ y $H = H^\star$, lo cual significa que si M es una subvariedad mínima de $\widetilde{M}$ y $\widetilde{M}$ es totalmente geodésica en $\mathbb{R}^n$, entonces M es mínima en $\mathbb{R}^n$.

Si $\psi : M \longrightarrow \widetilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ es una inmersión mínima si y sólo si $(\Delta\psi)^T = 0$, es decir, $\Delta\psi$ es siempre ortonormal a $\widetilde{M}$.

Un caso particular es cuando $\widetilde{M}$ es la esfera $\mathbb{S}^n$, obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 2.12 *Sea M una variedad riemanniana de dimensión m y $\psi : M \longrightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión isométrica, entonces ψ es una inmersión mínima en $\mathbb{S}^n$ si y sólo si*

$$\Delta\psi = -m\psi.$$

Demostración: De la ecuación $H = (H^\star)^T = (\Delta\psi)^T = 0$, se sigue que $\Delta\psi$ es un vector paralelo al vector normal a $\mathbb{S}^n$ en $\psi(p)$, esto es, $\Delta\psi = \lambda\psi$ donde $\lambda \in \mathcal{D}(M)$. Entonces de la ecuación $|\psi|^2 = 1$, tenemos que el laplaciano de $\Delta|\psi|^2$ es

$$0 = \Delta|\psi|^2 = \langle \psi, \Delta\psi \rangle + |\nabla\psi|^2 = \lambda|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 = \lambda + |\nabla\psi|^2,$$

lo que implica que

$$\lambda = -|\nabla\psi|^2 = -\langle \nabla_{e_i}\psi, \nabla_{e_i}\psi \rangle = -\langle e_i, e_i \rangle = -m.$$

$\blacksquare$

Vemos que las inmersiones mínimas de variedades diferenciables M en la esfera $\mathbb{S}^n$ son justamente aquellas inmersiones cuyas funciones coordenadas en un espacio ambiente euclidiano son eigenfunciones del operador de Laplace-Beltrami con la métrica inducida por la inmersión y con eigenvalor -dim$M$.

Más aún, para la esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de radio $r > 0$ tenemos el teorema de T. Takahashi, ver [23].

Teorema 2.13 (T. Takahashi) *Consideremos M una variedad riemanniana de dimensión m y $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión isométrica, tal que $\Delta\psi = \lambda\psi$, con $\lambda \neq 0$. Entonces*

- $\lambda > 0$;
- $\psi(M) \subset \mathbb{S}^n(r)$ *donde* $r^2 = \frac{m}{\lambda}$;
- *La inmersión $\psi : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es mínima.*

Demostración: Del teorema 2.12 se sigue que $\Delta\psi = -\lambda\psi = H$ y para cualquier punto $p \in M$ el vector $\psi(p)$ es normal a la inmersión. Para cualquier campo vectorial X sobre M, tenemos que

$$X\langle\psi, \psi\rangle = 2\langle X(\psi), \psi\rangle = 2\langle\psi_\star X, \psi\rangle = 2\langle X, \psi\rangle = 0,$$

esto implica que

$$|\psi|^2 = \langle\psi, \psi\rangle = cte = r^2.$$

Por lo tanto

$$0 = \frac{1}{2}\Delta|\psi|^2 = \langle\psi, \Delta\psi\rangle + |\nabla\psi|^2 = -\lambda r^2 + m$$

de aquí

$$\lambda = \frac{m}{r^2} > 0,$$

lo que prueba las primeras dos partes del teorema. Para la tercera

$$H = (H^\star)^T = (\Delta\psi)^T = (-\frac{1}{m}\lambda\psi)^T = 0,$$

lo que completa la prueba.

■

Ahora consideremos

$$\mathcal{P}(d) = \left\{\text{Polinomios homogéneos de grado} \quad d \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^{n+1}\right\},$$

y los polinomios homogéneos armónicos

$$\mathcal{H}(d) = \{f \in \mathcal{P}(d) \quad | \quad \Delta f = 0\}.$$

Denotamos al conjunto de polinomios homogéneos armónicos en la esfera por

$$\mathcal{SH}(d) = \left\{f|_{\mathbb{S}^n(c)} \quad | \quad f \in \mathcal{H}(d)\right\}.$$

Lema 2.7 *Si $f \in \mathcal{SH}(d)$, entonces*

$$\Delta_{\mathbb{S}^n(c)} f = -\frac{d(n+d-1)}{c^2} f.$$

Demostración: Sea $e_1, \dots, e_n$ un marco ortonormal y $\nu = \dfrac{x}{c}$ un campo normal a lo largo de $\mathbb{S}^n(c)$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{S}^n(c)} f &= e_i e_i(f) - (\nabla_{e_i} e_i)(f) \\
&= e_i e_i(f) + \nu\nu(f) - (\widetilde{\nabla}_{e_i} e_i)(f) - \widetilde{\nabla}_{\nu}\nu(f) + h(e_i, e_i)(f) - \nu\nu(f) + \widetilde{\nabla}_{\nu}\nu(f) \\
&= \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} f + nH(f) - \nu\nu(f) \\
&= -\frac{n}{c}\nu(f) - \nu\nu(f),
\end{aligned}$$

donde $H = -\dfrac{1}{c}\nu$ es el vector de curvatura media de $\mathbb{S}^n(c)$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. Como f es una función homogénea, sabemos que

$$\nu f(x)|_{\mathbb{S}^n(c)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} f(tx)|_{t=1} = \frac{d}{c} f(x)$$

y

$$\nu\nu f(x)|_{\mathbb{S}^n(c)} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(tx)|_{t=1} = \frac{d(d-1)}{c^2} f(x).$$

Por lo tanto

$$\Delta_{\mathbb{S}^n(c)} f = -\frac{n}{c}\nu(f) - \nu\nu(f) = -\frac{n}{c}\frac{d}{c} f(x) - \frac{d(d-1)}{c^2} f(x) = \frac{-d(n+d-1)}{c^2} f(x).$$

■

El teorema de Takahashi y el lema 2.7 nos permiten definir inmersiones mínimas usando polinomios homogéneos armónicos en la esfera

$$\mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{d(n+d-1)}{n}}\right) \longrightarrow \mathbb{S}^N(1)$$

con $N = \dim\mathcal{SH}(d)$, es decir, $\dim\mathcal{SH}(d) = \binom{n+d}{d} - \binom{n+d-2}{2}$. En el caso de $n = d = 2$, tenemos

$$\mathbb{S}^2(\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{S}^4(1)$$

y puede ser realizado por el mapeo

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}xy, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}xz, \quad u^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}yz, \quad u^4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \quad u^5 = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

donde $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

El teorema 2.8 nos dice que el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental de una hipersuperficie compacta mínima en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ no toma cualquier valor, sino que omite los valores que están en el intervalo $\left(0, \frac{n}{2-\frac{1}{p}}\right)$.

Por ejemplo:

- El mapeo

$$\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^q \longrightarrow \mathbb{S}^{m+q+mq}$$

donde $(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ y $(x_1, \ldots, x_{q+1}) \in \mathbb{S}^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ y definido por $u_{ij} = x_i x_j$ es una inmersión mínima. Entonces tenemos

$$R = \text{curvatura escalar de} \quad \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^q = m(m-1) + q(q-1).$$

y por la ecuación de Gauss

$$S = (m+q)(m+q+1) - R = 2mq.$$

Por otro lado como

$$\frac{n}{2-\frac{1}{p}} = \frac{mq(m+q)}{2mq-1},$$

tenemos que S está en el intervalo $\left[0, \frac{n}{2-\frac{1}{p}}\right]$ si $m = q = 1$. Lo que implica que $S = 2$ y por el teorema 2.9 obtenemos que la inmersión mínima es un toro de Clifford.

- Como un segundo ejemplo, si consideramos E el espacio de matrices simétricas (u_{ij}) de orden $(n+1) \times (n+1)$, con $i, j = 1, \ldots, n$ tal que $\sum_i u_{ii} = 0$; tenemos que E es un espacio vectorial de dimensión $\frac{1}{2}n(n+3)$.

  Definimos una norma en E por $||(u_{ij})||^2 = \sum_{i,j} u_{ij}^2$. Tomemos la esfera unitaria en $\mathbb{S}^{n+p}$ en E donde $p = \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$. Entonces, la inmersión

$$\mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\right) \longrightarrow \mathbb{S}^{n+p}$$

  definida por $u_{ij} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}(x_i x_j - \frac{2}{n}\delta_{ij})$ es una inmersión mínima. Por lo que

$$R = \text{curvatura escalar de} \quad \mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\right) = \frac{n^2(n-1)}{2(n+1)}$$

  y

$$S = n(n-1) - R = \frac{n(n-1)(n-2)}{2(n+1)}.$$

  Mientras que

$$\frac{n}{2-\frac{1}{p}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2(n^2+n-3)},$$

  entonces tenemos que S está en el intervalo $\left[0, \frac{n}{2-\frac{1}{p}}\right]$ si $n = 2$. Por lo que tenemos la superficie de Veronese $\mathbb{S}^2(\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{S}^4(1)$.

- Un último ejemplo haciendo uso de polinomios armónicos de grado 3, consideramos la inmersión mínima de $\mathbb{S}^2(\sqrt{6}) \longrightarrow \mathbb{S}^6(1)$ definida por

$$u^1 = \frac{\sqrt{6}}{72}z(-3x^2 - 3y^2 + 2z^2), \quad u^2 = \frac{1}{24}x(-x^2 - y^2 + 4z^2), \quad u^3 = \frac{\sqrt{10}}{24}z(x^2 - y^2),$$
$$u^4 = \frac{\sqrt{15}}{72}x(-x^2 - 3y^2), \quad u^5 = \frac{1}{24}y(-x^2 - y^2 + 4z^2), \quad u^6 = \frac{\sqrt{10}}{12}xyz$$
$$u^7 = \frac{\sqrt{15}}{72}y(3x^2 - y^2)$$

  con $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Entonces

$$R = \text{curvatura escalar de} \quad \mathbb{S}^2(\sqrt{6}) = \frac{1}{3}$$

  y

$$S = 2 - R = \frac{5}{3}.$$

  Mientras que

$$\frac{n}{2 - \frac{1}{p}} = \frac{8}{7},$$

  vemos que $\frac{5}{3}$ no se encuentra en el intervalo $(0, \frac{8}{7})$; por lo que es una inmersión mínima en la esfera diferente al toro de Clifford y la superficie de Veronese.

Por lo tanto, el resultado de Chern, do Carmo y Kobayashi estudia las hipersuperficies mínimas en la esfera que satisfacen

$$S = \frac{n}{2 - \frac{1}{p}},$$

concluyendo que si las hipersuperficies son compactas, ellas son o bien el toro de Clifford o la superficie de Veronese.

Entonces se planteó la siguiente pregunta: dada la dimensión n y codimensión p entre todas las subvariedades mínimas con curvatura escalar constante en la esfera, ¿El conjunto de todos los valores posibles de S es discreto? ¿Cuales son los posibles valores de S? En este rumbo Peng y Terng [17], probaron que

Teorema 2.14 (Peng-Terng) *Sea M una hipersuperficie cerrada de dimensión $n \geq 3$ inmersa mínimamente en la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+1}$ con longitud de la segunda forma fundamental constante, $S = cte$. Si $S > n$, entonces $S > n + \frac{1}{12n}$. Para el caso de $n = 3$ si $S > 3$, entonces $S \geq 6$.*

∎

Capítulo 3

Hipersuperficies Isoparamétricas en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$

En este capítulo daremos algunos resultados generales de hipersuperficies isoparamétricas en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, es decir, hipersuperficies que tienen todas sus curvaturas principales λ_i constantes.

3.1. Hipersuperficies Isoparamétricas

Geométricamente una familia de hipersuperficies isoparamétricas puede ser definida por una familia de hipersuperficies paralelas. Sea $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}(c)$ una inmersión de una hipersuperficie en una variedad de curvatura constante c.

Supongamos las siguientes condiciones locales. Para cada $x \in M^n$, tomemos ξ_x un campo normal unitario a la hipersuperficie M^n. Para cada $t > 0$, tomemos $f_t(x)$ el punto de $N^{n+1}(c)$ sobre la geodésica que comienza en $f(x)$ en dirección ξ_x y que tiene una distancia t de $f(x)$.

Por ejemplo, en el caso euclidiano ($c = 0$). Tenemos

$$f_t(x) = f(x) + t\xi_x.$$

Considerando la esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, una familia de hipersuperficies paralelas queda definida por

$$f_t(x) = (\cos t)f(x) + (\operatorname{sen} t)\xi_x.$$

En cualquier caso, f_t es una inmersión de M^n en $N^{n+1}(c)$ siempre que t sea lo suficientemente pequeño. Para $t = 0$ tenemos que f_0 es la inmersión original f.

Para el caso de hipersuperficies paralelas $f_t : M \longrightarrow M_t$ en el espacio euclidiano tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1 *Sea $f_t : M \longrightarrow M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión como se acaba de describir anteriormente. Entonces $(f_t)_\star X = X - tAX$ y el operador de forma satisface que $A_t(f_t)_\star X = AX$, para todo $X \in T_xM$. f_t preserva direcciones principales de curvatura, puntos umbílicos y tercera forma fundamental. Además*

$$g_t = g - 2th + t^2 d, \qquad h_t = h - td$$

donde g, h y d son la primera, segunda y tercera forma fundamental sobre M. Y si λ es la curvatura principal en el punto x en la dirección de X, entonces

$$\frac{\lambda}{1 - t\lambda}$$

es la curvatura principal correspondiente de M_t en $f_t(x)$ en la dirección de $(f_t)_\star X$.

Demostración: Calcularemos $(f_t)_\star X$. Sea $\alpha(s) = (a_1(s), \ldots, a_n(s))$ una curva sobre M tal que $\alpha(0) = x$ y $X = \alpha'(0) = (a_1'(0), \ldots, a_n'(0))$. Consideremos $N(\alpha(s)) = (b_1(s), \ldots, b_n(s))$ el campo normal unitario a lo largo de α, entonces

$$(f_t \circ \alpha)(s) = f_t(a_1(s), \ldots, a_n(s)) = (a_1(s) + tb_1(s), \ldots, a_n(s) + tb_n(s)),$$

por lo tanto

$$(f_t)_\star X = (f_t \circ \alpha)'(0) = (a_1'(0) + tb_1'(0), \ldots, a_n'(0) + tb_n'(0)) = X - tAX.$$

Ahora por definición de hipersuperficie paralela tenemos que $N(\alpha(s)) = N(f_t \circ \alpha(s))$, entonces

$$AX = -\widetilde{\nabla}_X N = (b_1'(0), \ldots, b_n'(0)) = -\widetilde{\nabla}_{(f_t)_\star X} N = A_t(f_t)_\star X;$$

esta ecuación muestra que f_t preserva la tercera forma fundamental d, esto es,

$$d_t((f_t)_\star X, (f_t)_\star Y) = g_t(A_t(f_t)_\star X, A_t(f_t)_\star Y) = g(AX, AY) = d(X, Y).$$

Sea X un vector unitario en $x \in M$ tal que $AX = \lambda X$, entonces $A_t(f_t)_\star X = AX = \lambda X$. Por otro lado $(f_t)_\star X = X - tAX = (1 - t\lambda)X$. De aquí que:

Si $1 - t\lambda = 0$, entonces $(f_t)_\star X = 0$ y $A_t(f_t)_\star X = 0 = \lambda X$, por lo que $\lambda = 0$ y $1 = 0$ que no puede ser. Entonces, si M_t es una hipersuperficie paralela se tiene que $1 - t\lambda \neq 0$, por lo tanto

$$A_t(f_t)_\star X = \frac{\lambda}{1 - t\lambda}(f_t)_\star X$$

y f_t preserva dirección de curvatura y puntos umbílicos. Por último

$$\begin{aligned}
g_t((f_t)_\star X, (f_t)_\star Y) &= g_t(X - tAX, Y - tAY) \\
&= g(X, Y) - 2tg(X, AY) + t^2 g(AX, AY) \\
&= g(X, Y) - 2tg(AX, Y) + t^2 g(A^2X, Y) \\
&= g(X, Y) - 2th(X, Y) + t^2 d(X, Y)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
h_t((f_t)_\star X, (f_t)_\star Y) &= g_t(A_t(f_t)_\star X, (f_t)_\star Y) \\
&= g(AX, Y - tAY) \\
&= g(AX, Y) - tg(A^2X, Y) \\
&= h(X, Y) - td(X, Y).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

En términos del operador A de M, el operador de forma de una hipersuperficie paralela M_t viene dado por

$$A_t = A(I - tA)^{-1}$$

donde I denota la transformación identidad.

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ las curvaturas principales en un punto $x \in M$, con vectores principales $e_1, \ldots, e_n$ los cuales son ortonormales con la métrica g. Sabemos que

$$A(e_k) = \lambda_k e_k, \qquad \text{con} \qquad 1 \leq k \leq n$$

entonces

$$A_t(\bar{e_k}) = \frac{\lambda_k}{1 - t\lambda_k}\bar{e_k}$$

donde $\bar{e_k} = \dfrac{e_k}{1 - te_k}$ son ortonormales con la métrica g_t. Notemos que esta última fórmula vale sólo para $t < \dfrac{1}{\text{máx}\,|\lambda_k|}$. Por lo tanto $\dfrac{\lambda_k}{1 - t\lambda_k}$ son las curvaturas principales a la inmersión f_t.

El siguiente resultado lo usaremos para definir geométricamente una familia isoparamétrica de hipersuperficies en términos de hipersuperficies paralelas.

Teorema 3.2 *f tiene curvaturas principales constantes si y sólo si f_t tiene curvatura media constante para cada t.*

Demostración: Si f tiene curvaturas principales constantes, es decir, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son constantes, entonces las curvaturas principales $\dfrac{\lambda_k}{1 - t\lambda_k}$ son constantes en M_t para cada t y por lo tanto f_t tiene curvatura media constante. Ahora, supongamos que f_t tiene curvatura media constante para cada t de manera que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k(x)}{1 - t\lambda_k(x)} = \phi(t)$$

donde indicamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de f como funciones sobre M^n; el lado derecho es una función de t. Entonces, evaluando

$$\phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, \frac{d^2\phi(t)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n\phi(t)}{dt^n}$$

en $t = 0$, obtenemos que

$$\sum \lambda_k(x) = c_1, \sum \lambda_k^2(x) = c_2, \ldots, \sum \lambda_k^n(x) = c_n$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes. Y estas relaciones implican que cada una de las funciones $\lambda(x)$ son constantes sobre M^n.

$\blacksquare$

El teorema 3.2 es válido tanto para familias de hipersuperficies en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ como en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, con una prueba similar.

Por lo tanto una definición geométrica de una familia isoparamétrica de hipersuperficies es la siguiente: En $N^{n+1}(c)$, una familia isoparamétrica de hipersuperficies es una familia de hipersuperficies paralelas $f_t : M^n \longrightarrow N^{n+1}(c)$ obtenidas de una hipersuperficie $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}(c)$ con curvaturas principales constantes.

Ahora daremos una definición analítica de una familia isoparamétrica de hipersuperficies que es equivalente a la anterior. Sea F una función diferenciable sobre una variedad riemanniana $N^{n+1}(c)$. Sea

$$M_s = \{x \in N^{n+1}(c) \quad | \quad F(x) = s\}$$

siempre que grad$F$ no sea cero sobre M_s, obtenemos una hipersuperficie de nivel en $N^{n+1}(c)$. Tenemos que

$$\xi = \frac{\mathrm{grad}F}{\|\mathrm{grad}F\|}$$

es un campo normal unitario de la hipersuperficie M_s. Sabemos también que la segunda forma fundamental h para M_s viene dada por

$$h(X,Y) = -\frac{\mathrm{Hess}_F(X,Y)}{\|\mathrm{grad}F\|}$$

donde Hess_F denota el hessiano de la función F sobre $N^{n+1}(c)$. Entonces la curvatura media de M_s se puede escribir en términos del laplaciano ΔF y la norma $\|\mathrm{grad}F\|$ como:

Lema 3.1 *La curvatura media está dada por*

$$nH = \frac{gradF(\|gradF\|) - \|gradF\|\Delta F}{\|gradF\|^2}$$

Demostración: Consideremos marco móvil ortonormal $E_1, \ldots, E_n, E_{n+1} = \xi$ en una vecindad de un punto $p \in M_s$ en $N^{n+1}(c)$. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}h &= -\frac{1}{\|\mathrm{grad}F\|}\mathrm{tr}h \\
&= -\frac{1}{\|\mathrm{grad}F\|}\mathrm{tr}\mathrm{Hess}_F(E_i, E_j) \\
&= -\frac{1}{\|\mathrm{grad}F\|}\sum_{i=1}^{n+1}\mathrm{Hess}_F(E_i, E_i) \\
&= -\frac{1}{\|\mathrm{grad}F\|}\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Hess}_F(E_i, E_i) + \mathrm{Hess}_F(\xi,\xi)\right\}.
\end{aligned}$$

Por un lado, el primer miembro de la suma es

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Hess}_F(E_i, E_i) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}(\mathrm{grad}F), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}(\|\mathrm{grad}F\|\xi), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i(\|\mathrm{grad}F\|)\langle\xi, E_i\rangle + \|\mathrm{grad}F\|\langle\nabla_{E_i}\xi, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\|\mathrm{grad}F\|\langle d\xi(E_i), E_i\rangle \\
&= \|\mathrm{grad}F\|\mathrm{tr}(d\xi) \\
&= -n\|\mathrm{grad}F\|H.
\end{aligned}$$

Y el otro sumando

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_F(\xi,\xi) &= \|\mathrm{grad}F\|^{-2}\mathrm{Hess}_F(\mathrm{grad}F,\mathrm{grad}F)\\
&= \|\mathrm{grad}F\|^{-2}\langle\nabla_{\mathrm{grad}F}(\mathrm{grad}F),\mathrm{grad}F\rangle\\
&= \frac{\|\mathrm{grad}F\|^{-2}}{2}\mathrm{grad}F(\|\mathrm{grad}F\|^2)\\
&= \|\mathrm{grad}F\|^{-1}\mathrm{grad}F(\|\mathrm{grad}F\|).
\end{aligned}$$

Ahora como la traza del operador hessiano es el laplaciano, entonces $\mathrm{tr}h = -\frac{\Delta F}{\|\mathrm{grad}F\|}$. Por lo tanto

$$-\frac{\Delta F}{\|\mathrm{grad}F\|} = -\frac{1}{\|\mathrm{grad}F\|}\left\{-n\|\mathrm{grad}F\|H + \|\mathrm{grad}F\|^{-1}\mathrm{grad}F(\|\mathrm{grad}F\|)\right\}$$

y

$$-\frac{\Delta F}{\|\mathrm{grad}F\|} = nH - \|\mathrm{grad}F\|^{-2}\mathrm{grad}F(\|\mathrm{grad}F\|).$$

■

Ahora suponemos que $\|\mathrm{grad}F\|^2$ y ΔF son funciones de F, es decir, existen funciones Φ_1 y Φ_2 de variable real tal que para todo $x \in M_s$ se tenga que

$$\|\mathrm{grad}F\|^2 = \Phi_1(F(x)), \qquad \Delta F = \Phi_2(F(x));$$

bajo esta última suposición podemos ver que cada hipersuperficie de nivel M_s, tiene curvatura media H constante.

Por ejemplo:

- Sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, tomemos la función $F(x_1,\dots,x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots + x_{k+1}^2$, donde k es un entero fijo $0 \le k \le n$. Entonces

  $$\|\mathrm{grad}F\|^2 = 4F, \qquad \Delta F = 2(k+1).$$

  Por lo tanto, las hipersuperficies de nivel M_s con $s > 0$ quedan como:

  $$M_s = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad x_1^2 + \cdots + x_{k+1}^2 = s\}$$

  y son de la forma $\mathbb{S}^k(\sqrt{s}) \times \mathbb{R}^{n-k}$, donde $\mathbb{S}^k(\sqrt{s})$ es una esfera de radio $\sqrt{s}$ en $\mathbb{R}^{k+1}$ perpendicular al subespacio euclidiano $\mathbb{R}^{n-k}$.

- Sobre $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, tomemos F como la restricción de x_1 a $\mathbb{S}^{n+1}$. Entonces

  $$\|\mathrm{grad}F\|^2 = 1 - F^2, \qquad \Delta F = -(n+1)F.$$

  Sea F la restricción de la proyección sobre, digamos, la primera coordenada x_1 de $\mathbb{R}^{n+2}$. Observemos primero que el gradiente de la proyección como función en $\mathbb{R}^{n+2}$ es un vector constante e_1. Ahora es fácilmente convencerse que el gradiente de la restricción de la proyección es precisamente la proyección del gradiente sobre el espacio tangente a la esfera; es decir,

$$\mathrm{grad}F(p) = e_1 - \langle e_1, p\rangle p,$$

de esta expresión tenemos

$$\|\mathrm{grad}F\|^2 = 1 - \langle e_1, p\rangle^2 = 1 - F^2.$$

Para el laplaciano de F, podemos usar un marco móvil ortonormal E_i, $i = 1, \ldots, n+1$ tangente a la esfera de modo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \mathrm{grad}F &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \widetilde{\nabla}_{E_i} \mathrm{grad}F, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \widetilde{\nabla}_{E_i}(e_1 - \langle e_1, p\rangle p), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \langle -\langle e_1, p\rangle \widetilde{\nabla}_{E_i} p - \langle e_1, \widetilde{\nabla}_{E_i} p\rangle p, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \langle -\langle e_1, p\rangle E_i - \langle e_1, E_i\rangle p, E_i\rangle \\
&= -(n+1)\langle e_1, p\rangle;
\end{aligned}$$

para el paso del tercer al cuarto renglón hemos usado el hecho de que la derivada del vector de posición p en la dirección de cualquier vector X es precisamente igual a X.

Por lo tanto, las hipersuperficies de nivel M_s con $-1 < s < 1$ quedan como:

$$M_s = \{x \in \mathbb{S}^{n+1} \quad | \quad F(x) = s\}$$

y son pequeñas esferas de dimensión n en $\mathbb{S}^{n+1}$ excepto para $s = 0$ que es una esfera ecuatorial.

- Otra vez sobre $\mathbb{S}^{n+1}$ tomemos $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ con $x \in \mathbb{S}^{n+1}$, donde k es un entero fijo con $2 \leq k \leq n$. Entonces

$$\|\mathrm{grad}F\|^2 = 4F(1-F), \qquad \Delta F = 2(k+1) - 2(n+2)F.$$

Por lo tanto, para cada s tal que $0 < s < 1$, las hipersuperficies de nivel M_s con $s > 0$ queda como:

$$M_s = \{x \in \mathbb{S}^{n+1} \quad | \quad F(x) = s\}$$

y es conocido que es un producto de esferas $\mathbb{S}^k(\sqrt{s}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-s})$ inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}$.

Volvamos al caso general, sea F una función que satisface la condición $\|\mathrm{grad}F\|^2 = \Phi_1(F(x))$ y $\Delta F = \Phi_2(F(x))$. El campo vectorial ξ en realidad está definido en $N^{n+1}(c)$, esto es, sobre un subconjunto abierto sobre el cual $\mathrm{grad}F \neq 0$. Con estas condiciones tenemos que las curvas integrales de ξ son geodésicas en $N^{n+1}(c)$.

Teorema 3.3 *Cada curva integral de ξ es una geodésica en $N^{n+1}(c)$.*

Demostración: Probaremos que $\widetilde{\nabla}_\xi \xi = 0$. Sea X un campo vectorial ortogonal a ξ en M, en consecuencia X es tangente a cada hipersuperficie de nivel de manera que $XF = 0$ y $\xi(XF) = 0$.

Como $\xi F = dF(\xi) = \|\text{grad}F\|$ es función de F, tenemos que ξF es constante sobre cada hipersuperficie de nivel. Por lo tanto $X(\xi F) = 0$ y $[X, \xi]\, F = 0$.

Usando el hecho que $[X, \xi] = \widetilde{\nabla}_X \xi - \widetilde{\nabla}_\xi X$, obtenemos que

$$g(\widetilde{\nabla}_X \xi, \xi) - g(\widetilde{\nabla}_\xi X, \xi) = g([X, \xi]\, , \xi) = 0.$$

Pero $g(\widetilde{\nabla}_X \xi, \xi) = 0$ pues $g(\xi, \xi) = 1$; concluimos que $g(\widetilde{\nabla}_\xi X, \xi) = 0$. Por otro lado, $g(X, \xi) = 0$ implica $g(\widetilde{\nabla}_\xi X, \xi) + g(X, \widetilde{\nabla}_\xi \xi) = 0$. Se sigue que

$$g(\widetilde{\nabla}_\xi \xi, X) = 0,$$

esto muestra que $\widetilde{\nabla}_\xi \xi$ es ortogonal a cualquier campo vectorial X ortogonal a ξ. Entonces tenemos que $g(\widetilde{\nabla}_\xi \xi, \xi) = 0$ y así concluimos que $\widetilde{\nabla}_\xi \xi = 0$.

■

Usando este último teorema podemos ver que una familia de hipersuperficie paralelas definidas por una función F que satisface $\|\text{grad}F\|^2 = \Phi_1(F(x))$ y $\Delta F = \Phi_2(F(x))$ es esencialmente una familia de hipersuperficies obtenida de una hipersuperfie con curvaturas principales constantes. Un caso especial es cuando $\|\text{grad}F\|^2 = 1$, la hipersuperficie M_{s+t} es obtenida de M_s moviendo cualquier punto de M_s una distancia t sobre la geodésica en la dirección de ξ.

A la inversa, suponemos que M_t es una familia de hipersuperficies paralelas obtenidas de una hipersuperficie M_0 con curvaturas principales constantes. Consideramos a t como una función diferenciable sobre algún abierto de $N^{n+1}(c)$ de tal manera que el campo gradiente es un campo vectorial unitario con la propiedad $\widetilde{\nabla}_\xi \xi = 0$. Además, puesto que la curvatura media H de cada hipersuperficie M_t es constante, la fórmula

$$nH = \frac{\text{grad}F(\|\text{grad}F\|) - \|\text{grad}F\|\Delta F}{\|\text{grad}F\|^2}$$

muestra que Δt es constante para cada M_t, esto es, Δt es función de t. Lo que muestra que ambas definiciones son equivalentes.

3.2. Fórmula Fundamental de Cartan

Cartan usó el término isoparamétrica (*mismo parámetro*) para referirse a las hipersuperficies $M^n \subset N^{n+1}(c)$ que tienen todas sus curvaturas principales constantes, en un espacio de curvatura constante $N^{n+1}(c)$. Entonces una hipersuperficie es llamada isoparamétrica si sus curvaturas principales son constantes.

Uno de los problemas planteados por Cartan fue: ¿Existe una hipersuperficie $M^n \subset N^{n+1}(c)$ con más de tres distintas curvaturas principales constantes, no todas con la misma multiplicidad?

La fórmula fundamental de Cartan ayuda a resolver el problema de clasificación de hipersuperficies isoparamétricas tanto en $\mathbb{R}^n$ como en $\mathbb{H}^n$.

Para establecer dicha fórmula, denotamos con g el número de curvaturas principales distintas de una hipersuperficie M, es decir, las curvaturas principales $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ con sus respectivas multiplicidades $m_1, \ldots, m_g$.

Teorema 3.4 (Fórmula Fundamental de Cartan) *Sea M una hipersuperficie con curvaturas principales constantes en una variedad riemanniana N de curvatura contante c. Entonces*

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_i}}^{g} m_j \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0$$

para toda $i = 1, \ldots, g$.

Demostración: Un tensor simétrico $\phi = \sum_{i,j} \phi_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ es de Codazzi si satisface $\phi_{ijk} = \phi_{ikj}$. El matemático chino Haizhong Li define el concepto de variedad isoparamétrica M generalizando la segunda forma fundamental de una hipersuperficie en espacios de curvatura constante, es decir, supone que existe un tensor de Codazzi de tal forma que las eingenfunciones de ϕ son funciones constantes sobre M.

En nuestro caso ϕ es la segunda forma fundamental $h = \sum_{i,j} h_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$. La derivada covariante de h está definida por

$$\sum_k h_{ijk} \omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj} \omega_{ki} + \sum_k h_{ik} \omega_{kj}.$$

Cerca de un punto $p \in M$ podemos elegir un marco móvil ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ y su comarco asociado $\omega_1, \ldots, \omega_n$ de tal manera que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$.

Consideremos primero el caso $n = 2$ y supongamos que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces elegimos $i = 1$ y $j = 2$ en la ecuación anterior

$$h_{121} \omega_1 + h_{122} \omega_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_{12}.$$

Si $i = j = 1$ e $i = j = 2$, entonces $h_{112} = 0$ y $h_{221} = 0$ respectivamente. Usamos que h satisface la ecuación de Codazzi, esto es, h es simétrica en los tres índices, $h_{112} = h_{121}$ y $h_{221} = h_{122}$. Por lo tanto la 1-forma de conexión $\omega_{12} = 0$, así la curvatura de Gauss de la variedad es $K = 0$ y se cumple el resultado.

Para el caso $n \geq 3$, introducimos la siguiente notación $[i] = \{j : \lambda_j = \lambda_i\}$. Para cualesquiera índices i y j, tenemos

$$\sum_k h_{ijk} \omega_k = (\lambda_i - \lambda_j) \omega_{ij},$$

vemos que $h_{ijk} = 0$ si $j \in [i]$ ó $k \in [i]$. Para $j \notin [i]$ escribimos las 1-formas $\omega_{ij} = \sum_k \mu_{ijk} \omega_k$. Entonces para $j \notin [i]$

$$\mu_{ijk} = \frac{h_{ijk}}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

La idea de la prueba es calcular $h_{iijj} - h_{jjii}$. Por la identidad de Ricci,

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj} R_{mikl} + \sum_m h_{im} R_{mjkl}$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
h_{ijij} - h_{ijji} &= \sum_m h_{mj} R_{miij} + \sum_m h_{im} R_{mjij} \\
&= h_{jj} R_{jiij} + h_{ii} R_{ijij} \\
&= (h_{ii} - h_{jj}) R_{ijij} \\
&= (\lambda_i - \lambda_j) R_{ijij}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
h_{iijj} - h_{jjii} = (\lambda_i - \lambda_j) R_{ijij}.
$$

La segunda derivada covariante de h es:

$$
\sum_l h_{ijkl} \omega_k = dh_{ijk} + \sum_m h_{mjk} \omega_{mi} + \sum_m h_{imk} \omega_{mj} + \sum_m h_{ijm} \omega_{mk},
$$

de aquí

$$
\sum_l h_{iijl} \omega_l = dh_{iij} + \sum_m h_{mij} \omega_{mi} + \sum_m h_{imj} \omega_{mi} + \sum_m h_{iim} \omega_{mj} = 2 \sum_k h_{kij} \omega_{ki}
$$

por lo tanto

$$
\sum_l h_{iijl} \omega_l = 2 \sum_k h_{kij} \omega_{ki}.
$$

Además

$$
\sum_{k \notin [i],[j]} \sum_l h_{kij} \mu_{kil} \omega_l = 2 \sum_{k \notin [i],[j]} h_{kij} \omega_{ki}.
$$

De estas dos últimas ecuaciones y $\mu_{kij} = \dfrac{h_{kij}}{\lambda_k - \lambda_i}$ concluimos

$$
h_{iijj} = 2 \sum_{k \notin [i],[j]} \frac{h_{kij}^2}{\lambda_k - \lambda_i}.
$$

Por la misma razón

$$
h_{jjii} = 2 \sum_{k \notin [i],[j]} \frac{h_{kji}^2}{\lambda_k - \lambda_j}.
$$

Así

$$
h_{iijj} - h_{jjii} = 2 \sum_{k \notin [i],[j]} h_{kij}^2 \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} - \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j} \right) = 2 \sum_{k \notin [i],[j]} h_{kij}^2 \frac{\lambda_i - \lambda_j}{(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_j)};
$$

usando la fórmula $h_{iijj} - h_{jjii} = (\lambda_i - \lambda_j) R_{ijij}$, tenemos que

$$
\frac{R_{ijij}}{\lambda_i - \lambda_j} = 2 \sum_{k \notin [i],[j]} h_{kij}^2 \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_j)}.
$$

Tomando la suma para $j \notin [i]$

$$\begin{aligned}\sum_{j\notin[i]} \frac{R_{ijij}}{\lambda_i - \lambda_j} &= 2\sum_{j\notin[i]}\sum_{k\notin[i],[j]} h_{kij}^2 \frac{1}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_k-\lambda_i)(\lambda_k-\lambda_j)} \\ &= -\sum_{k\notin[i]} \frac{R_{ikik}}{\lambda_i-\lambda_k}\end{aligned}$$

y usando la ecuación de Gauss obtenemos el resultado

$$\sum_{j\notin[i]} \frac{R_{ijij}}{\lambda_i-\lambda_j} = \sum_{j\notin[i]} \frac{c+\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} = 0.$$

$\blacksquare$

De la fórmula fundamental de Cartan se puede deducir fácilmente que el número de curvaturas principales distintas para hipersuperficies en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$ es a lo más dos. Esto es;

En el caso de $f : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

Si $g = 1$, tenemos que $f(M^{n-1})$ es totalmente umbílica, es decir, $f(M^{n-1})$ es un subconjunto abierto de un hiperplano o de una hiperesfera

Ahora, con $g \geq 2$, eligiendo apropiadamente un campo normal unitario podemos suponer que al menos una de las curvaturas principales es positiva. Si λ_i es la curvatura principal más pequeña, entonces cada término de la suma

$$\frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$$

es negativo pero esta suma vale cero. Por lo tanto, existen al menos dos curvaturas principales distintas, y si hay dos una de ellas es cero. De aquí que si $g = 2$, tenemos que $f(M^{n-1})$ es un cilindro esférico.

En el caso de $f : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{H}^n$:

Si $g = 1$, tenemos que $f(M^{n-1})$ es totalmente umbílica, es decir, $f(M^{n-1})$ es una de las hipersuperficies $M_1, \ldots, M_4$ del lema 1.1.

Ahora, con $g \geq 2$, como en el caso anterior podemos elegir apropiadamente un campo normal unitario de manera tal que al menos una de las curvaturas principales sea positiva. Debe existir una curvatura λ_i de tal manera que ninguna curvatura principal se encuentra entre λ_i y $\dfrac{1}{\lambda_i}$, es decir, λ_i es la curvatura principal más grande entre 0 y 1.

O λ_i es la curvatura principal más pequeña mayor o igual a 1. Entonces para este λ_i cada término de la suma

$$\frac{-1+\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$$

es negativo a menos que $\lambda_i = \dfrac{1}{\lambda_i}$ pero esta suma vale cero. Por lo tanto, existen al menos dos curvaturas principales distintas y si hay dos una es recíproca de la otra.

Para $g = 2$, tenemos que $f(M^{n-1})$ es un subconjunto abierto del producto $\mathbb{S}^k \times \mathbb{H}^{n-k-1}$ de $\mathbb{H}^n$, como en el lema 1.1.

En la esfera $\mathbb{S}^n$ la identidad de Cartan no proporciona restricciones sobre el número de curvaturas principales g para tratar de alguna manera de clasificar tales superficies, aunque Cartan dio varios ejemplos para $g = 1, 2, 3$ ó 4 curvaturas principales distintas.

Por ejemplo en el caso $g = 1$, la hipersuperficie $f(M^{n-1})$ es totalmente umbílica, esto es, $f(M^{n-1})$ es un abierto de una hiperesfera ecuatorial en $\mathbb{S}^n$. Si $g = 2$, entonces $f(M^{n-1})$ debe ser un producto estándar de dos esferas, es decir,

$$\mathbb{S}^p(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2) \longrightarrow \mathbb{S}^n(1) \subset \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1} = \mathbb{R}^{n+1}$$

con $p + q + 1 = n$.

Considerando la esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ y una familia de hipersuperficies paralelas

$$f_t(x) = (\cos t)f(x) + (\operatorname{sen} t)\xi_x,$$

el operador de forma A_t queda como

$$A_t = (\cos tA + \operatorname{sen} tI)(\cos tI - \operatorname{sen} tA)^{-1} = (\cot tA + I)(\cot tI - A)^{-1}.$$

Si λ_k son las curvaturas principales de $f = f_0$, es decir, $Ae_k = \lambda_k e_k$; entonces las curvaturas principales de la inmersión f_t son

$$\frac{\cot t\lambda_k + 1}{\cot t - \lambda_k} = \cot(\theta_k - t), \quad \text{donde} \quad \lambda_k = \cot\theta_k \quad \text{y} \quad 0 \leq k \leq n.$$

En cuanto a las hipersuperficies isoparamétricas en la esfera Münzner dio la siguiente caracterización en [14].

Teorema 3.5 (H. F. Münzner) *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ las distintas curvaturas principales con sus respectivas multiplicidades $m_1, \ldots, m_g$. Entonces*

- *g puede ser sólo $1, 2, 3, 4$ ó 6.*
- *Si $g = 3$. entonces $m_1 = m_2 = m_3$ y si $g = 4$ ó 6, entonces $m_1 = m_3 = m_5$, $m_2 = m_4 = m_6$.*
- *Si $\lambda_k = \cot(\theta_k)$ con $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_g < \pi$ y con multiplicidades m_k, entonces*

$$\theta_k = \theta_1 + \frac{k-1}{g}\pi \qquad \text{con} \qquad k = 1, \ldots, g.$$

■

Es fácil ver que hay una hipersuperficie mínima entre cada familia de hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{S}^{n+1}$ sabiendo elegir una t tal que

$$\sum_{k=1}^{g} m_k\lambda_k = \sum_{k=1}^{g} m_k \cot(\theta_k - t) = 0$$

usando esta última fórmula, la fórmula de fundamental de Cartan y el teorema 3.4 obtenemos que la longitud de la segunda forma fundamental es $S = (g - 1)n$.

Corolario 3.1 *Sea M una hipersuperficie inmersa mínimamente en $\mathbb{S}^{n+1}$ con curvaturas principales constantes. Entonces la longitud de la segunda forma S de M puede ser sólo $0, n, 2n, 3n$ o $5n$. Más precisamente, si M tiene g curvaturas principales distintas entonces $S = (g - 1)n$ y curvatura escalar $R \geq 0$.*

$\blacksquare$

La diferencial de f_t en x está dada por $\cos tI - \operatorname{sen} tA_\xi$. Si X es un campo vectorial correspondiente a la distribución relativa a la curvatura principal $\lambda_i = \cot\theta_i$, entonces

$$(f_t)_{\star x}X = (\cos t - \operatorname{sen} t\cot\theta_i)X = \frac{\operatorname{sen}(\theta_i - t)}{\operatorname{sen}\theta_i}X.$$

Por lo que $(f_t)(x)$ es una varidad focal M_i si $t = \theta_i$ con $i = 1, \dots, g$ luego las variedades focales tienen curvaturas principales $\cot(\theta_k - \theta_i)$ para toda $i \neq k$.

El teorema de Münzner nos da una interpretación geométrica de la Fórmula fundamental de Cartan, la minimalidad de las variedades focales, es decir

Teorema 3.6 *Cada variedad focal M_{θ_i} de una hipersuperficie isoparamétrica en la esfera es una variedad mínima.*

Demostración: Sea η un campo normal unitario a M_{θ_i}, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A_\eta) &= \sum_{h\neq i} m_h \cot(\theta_h - \theta_i)\\ &= \sum_{k=1}^{g-1} m_k \cot(\frac{k\pi}{g})\\ &= -\sum_{k=1}^{g-1} m_k \cot(\pi - \frac{k\pi}{g})\\ &= -\sum_{k=1}^{g-1} m_k \cot(\frac{(g-k)\pi}{g})\\ &= -\sum_{j=1}^{g-1} m_{g-j} \cot(\frac{j\pi}{g}).\end{aligned}$$

Si g es impar, entonces por el teorema de Münzner todas las multiplicidades m_k son iguales y si g es par tenemos que $m_{g-j} = m_j$, entonces el último término de la ecuación anterior es igual a $-\operatorname{tr}(A_\eta)$. Por lo tanto $\operatorname{tr}(A_\eta) = 0$ y M_{θ_i} es mínima.

$\blacksquare$

Si observamos que

$$\cot(\theta_k - \theta_i) = \frac{1 + \lambda_i\lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$$

entonces

$$\operatorname{tr}(A_\eta) = \sum_{\lambda_j\neq\lambda_i} m_j \frac{1 + \lambda_i\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j},$$

así obtenemos como corolario la fórmula fundamental de Cartan.

Corolario 3.2 (Fórmula Fundamental de Cartan)

$$\sum_{\lambda_j \neq \lambda_i} m_j \frac{1 + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0.$$

■

3.3. Conjetura de Chern

En esta sección presentaremos la conjetura de Chern y algunas de sus generalizaciones. La conjetura de Chern para hipersuperficies isoparamétricas en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ puede ser enunciada como sigue:

Conjetura de Chern: Sea M^n con $n \geq 2$ una hipersuperficie mínima cerrada de $\mathbb{S}^{n+1}$ con curvatura escalar R constante, entonces M^n es isoparamétrica.

Chern propuso originalmente una versión menos fuerte en [4], es decir, para una variedad M^n inmersa mínimamente en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ se tiene

$$\int_M (S - n) S dV \geq 0$$

que es precisamente el teorema 2.8. Notemos que para una hipersuperficie inmersa mínimamente en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ la longitud al cuadrado de la segunda forma fundamental S es constante si y sólo si la curvatura escalar R es constante. En este caso $S = 0$ ó $S \geq n$, lo que llevó a Chern a proponer:

Conjetura: Consideremos M^n una hipersuperficie mínima cerrada en $\mathbb{S}^{n+1}$ con curvatura escalar R constante. Entonces para cada n, el conjunto de todos los posibles valores para R (equivalentemente para S) es discreto.

De esta conjetura, los únicos ejemplos de hipersuperficies mínimas con curvatura escalar R constante en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ son hipersuperficies isoparamétricas como las del teorema 2.5, esto es, todas sus curvatura principales son constantes.

Hasta ahora no hay prueba alguna de la conjetura pero existen resultados parciales, en particular, para hipersuperficies en dimensiones bajas y con condiciones para funciones que dependen de la curvatura de M. Mencionaremos algunos resultados recientes de dicha conjetura:

Para el caso $n = 2$, bajo las hipótesis de la conjetura tenemos que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ y $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = cte$, por lo tanto $\lambda_1 = -\lambda_2 = cte$.

Para el caso $n = 3$, en el teorema 2.14 de Peng y Terng, dan una cota para la longitud de la segunda forma fundamental. Pero el resultado más general para dicha conjetura es

Teorema 3.7 (S. Almeida, F. Brito; S. Chang) *Sea $M^3 \subset \mathbb{S}^4(1)$ una hipersuperficie cerrada con curvatura media H y curvatura escalar R constante. Entonces M^3 es isoparamétrica.*

■

Para el caso $n = 4$ se tiene un resultado recientemente probado bajo la hipótesis adicional que M es una hipersuperfice de Willmore, es decir, puntos críticos de la funcional de Willmore

$$W(M) = \int_M \rho^n \qquad \text{donde} \qquad \rho^2 = S - nH^2;$$

que para hipersuperficies mínimas con curvatura escalar R constante en la esfera es equivalente a

$$f_3 = \sum_{i,j,k} h_{ij}h_{jk}h_{ki} = 2HS - 4H^3 = 0.$$

Este trabajo de Haizhong Li se puede encontrar en [11] y para este tipo de hipersuperficies se tiene el siguiente resultado, ver [13].

Teorema 3.8 (T. Lusala, M. Scherfner, L. Amancio, M. Sousa Jr) *Sea $M^4 \subset \mathbb{S}^5(1)$ una hipersuperficie de Willmore mínima de $\mathbb{S}^5(1)$ con curvatura escalar R constante, entonces M^4 es isoparamétrica.*

■

Algunos ejemplos de este último resultado son:

- La esfera máxima totalmente geodésica $\mathbb{S}^4(1) \subset \mathbb{S}^5(1)$ es una hipersuperficie de Willmore mínima con $S = 0$.
- La hipersuperficie mínima de Cartan M_t^4 en $\mathbb{S}^5(1)$.

  Si consideramos el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$ como un espacio vectorial real, es decir, $\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^3 + i\mathbb{R}^3$. Tomemos $z, w \in \mathbb{C}^3$ de la forma $z = x + iy$, $w = u + iv$, el producto interno real en $\mathbb{C}^3$ viene dado por

  $$\langle x + iy, u + iv\rangle = \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle.$$

  Si $\mathbb{S}^5(1) = \{z \in \mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^3 + i\mathbb{R}^3 : \|z\| = 1\}$ y consideramos la función $F : \mathbb{S}^5(1) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

  $$F(z) = (\|x\| + \|y\|)^2 + 4\langle x, y\rangle^2, \qquad z = x + iy;$$

  la superficie de nivel de F dada por

  $$M_t^4 = \{z \in \mathbb{S}^5(1) : F(z) = \cos^2(2t)\} = F^{-1}\left(\cos^2(2t)\right),$$

  satisface que tanto la norma del gradiente y el laplaciano son funciones de F, esto es

  $$\|\mathrm{grad}F\|^2 = 16F(1 - F) \qquad \text{y} \qquad \Delta F = 16(1 - 2F).$$

  Por lo tanto, para valores de t en el intervalo $(0, \frac{\pi}{4})$, es una hipersuperficie isoparamétrica con cuatro curvaturas principales diferentes.

  $$\lambda_1 = \frac{1 + \mathrm{sen}(2t)}{\cos(2t)}, \qquad \lambda_2 = \frac{-1 + \mathrm{sen}(2t)}{\cos(2t)}, \qquad \lambda_3 = \tan(t), \qquad \lambda_4 = -\cot(t).$$

  De entre todas esas hipersuperficies, sólo la hipersuperficie mínima $M^4_{\frac{\pi}{8}}$ es una hipersuperficie de Willmore y sus curvaturas principales son

  $$1 + \sqrt{2}, \qquad 1 - \sqrt{2}, \qquad -1 + \sqrt{2}, \qquad -1 - \sqrt{2}.$$

- El toro de Clifford $W_{2,2} = \mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$ es una hipersuperficie de Willmore mínima cerrada que es isoparamétrica en $\mathbb{S}^5(1)$ con dos curvaturas principales distintas.

A manera de conclusión: considerar hipersuperficies mínimas en las esfera, es una hipótesis muy rígida. Si además también ponemos condiciones sobre la segunda forma fundamental, como $S = cte$, esto obligará a que la hipersuperficie sea aún más rígida. Por lo que en la conjetura de Chern se esperan valores de S discretos para $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$. Se pueden encontrar una serie de resultados acerca de esta conjetura en [19].

Bibliografía

[1] H. Alencar, M. do Carmo, Hypersurfaces with Constant Mean Curvature. Proc. of the AMS 120: 1223-1229, (1994).

[2] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, Submanifolds and Holonomy. Chapman and Hall/CRC, (2003).

[3] S. S. Chern, Minimal Submanifolds in a Riemannian Manifold. Mimeographed Lecture Notes, Univ. of Kansas, (1968).

[4] S. S. Chern, M. do Carmo, S. Kobayashi, Minimal Submanifolds of a Sphere with Ssecond Fundamental Form of Constant Length. Functional Analysis and Related Fields, Proceedings of a Conference for M. Stone, (1970), pp. 59-75

[5] S.Y. Cheng, S.T. Yau, Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature. Math.Ann. 225, (1977), 195-204.

[6] M. Dajczer, et al., Submanifolds and Isometric Inmersions. Mathematics Lecture Series, vol. 13, Publish or Perish Inc., Houston, TX, (1990).

[7] M. P. do Carmo, Riemannian Geometry. Birkhäuser, (1992).

[8] M. P. do Carmo, M. Dajczer, Rotation Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 227, (1983), 685-709.

[9] H. Li, Generalized Cartan Identities on Isoparametric Manifolds. Ann. Global Anal. Geom. 15, (1997), 45–50.

[10] H. Li, Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in Space Forms. Math. Ann. 305 (1996), pp. 665–672.

[11] H. Li, Willmore Hypersurfaces in a Sphere. Asian J. Math., 3 (2001), pp. 365–377.

[12] J. M. Lee, Riemannian Manifolds. Springer, (1997).

[13] T. Lusala, M. Scherfner, L. Amancio, M. Sousa Jr, Closed Minimal Willmore Hypersurfaces of $\mathbb{S}^5(1)$ with Constant Scalar Curvature. Asian J. Math., 9(2005), pp. 65–78.

[14] H. F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. Math. Ann. 251, (1980), 57-71.

[15] K. Nomizu, Elie Cartan's Work on Isoparametric Families of Hypersurfaces. Proc. Symp. Pure Math. Vol. 27, Pt. 1, Amer. Math. Soc., Providence, (1975), 191-200.

[16] M. Okumura, Hypersurfaces and A Pinching Problem on the Ssecond Fundamental Tensor. Amer. J. Math. 96 (1974), 207-213.

[17] C. K. Peng and C. L. Terng, Minimal Hypersurfaces of Sphere with Constant Scalar Curvature. Ann. Math. Stud. 103, (1983), 177–198.

[18] P. J. Ryan, Hypersurfaces with parallel Ricci tensor. Osaka J. Math. 8 (1971), 251-259.

[19] M. Scherfner, S. Weiss, Towards a Proof of the Chern Conjecture for Isoparametric Hypersurfaces in Spheres. Proc. 33. South German Diff. Geom. Colloq. (2008).

[20] J. Simons, Minimal Varieties in Riemannian Manifolds. Ann. of Math.(2) 88, (1968), 62-105.

[21] T. J. Willmore, Riemannian Geometry. Oxford University Press, (1993).

[22] L. Ximin, S. Weihong, Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in a Hyperbolic Space Form. Balkan Journal of Geometry and Its Applications (BJGA), Vol. 7, No. 1, (2002).

[23] Y. Xin, Minimal Submanifolds and Related Topics. World Scientific Publ., (2003).