



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DE CÁLCULO FRACCIONARIO EN LA  
VALUACIÓN DE PRODUCTOS DERIVADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

MARÍA FERNANDA DEL CARMEN AGOITIA HURTADO

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. PABLO PADILLA LONGORIA

MÉXICO, D.F.

JULIO, 2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Obviamente quiero comenzar por la persona que me introdujo al tema, no sólo de cálculo fraccionario y procesos de Lévy, sino a las finanzas mismas. Muchísimas gracias al Dr. Pablo Padilla por dos años más siendo esa guía tan importante que hace la diferencia entre el querer y el ser, y por supuesto, porque gracias a tu enfoque me maravillé con las finanzas desde el primer contacto que tuve con ellas. Es para mí todo un orgullo haber trabajado una vez más contigo y espero que aún haya muchas ocasiones más.

Agradezco profundamente a mis sinodales por segunda vez, al Dr. Mogens Bladt y al Dr. Ramsés Mena. Gracias por sus comentarios, sugerencias y dedicación para que este trabajo fluyera del modo deseado. A mis sinodales externos, el Dr. Diego del Castillo Negrete y el Dr. Álvaro Cartea, también agradezco su inconmensurable apoyo para que todo saliera bien. En el caso de los cuatro, fue más que un placer contar con el respaldo de tan notables investigadores.

Al Dr. Ramón Plaza, muchísimas gracias una vez más, por todo el interés, las palabras de aliento y la motivación que sin duda alguna fueron importantes para la exitosa culminación de un peldaño más en mi formación académica.

A los excelentes profesores con los que tuve el placer de tomar clases en la maestría por enriquecer con sus conocimientos este importante escalón entre la licenciatura y el doctorado.

A TODOS mis amigos, ustedes saben quienes son, agradezco su compañía y apoyo. Durante estos dos años de maestría aparecieron nuevos, reaparecieron viejos y queridos y sobre todo, hubo muchos que ya estaban y permanecieron constantes. A todos, de verdad, les tengo un gran y profundo cariño.

A mi noviecito Enrique por compartir conmigo muchísimos buenos momentos llenos de felicidad y, sobre todo, apoyarme y aguantarme en aquellos que resultaron difíciles y complicados. Eres y serás muy importante para mí.

Finalmente, el más profundo y grande de todos mis agradecimientos es para mi hermosísima familia. Marthe y Migue son el mejor ejemplo de paciencia, cariño, apoyo y fortaleza que pueda tener, agradezco tener a un par de hermanos tan maravillosos que siempre, sin importar qué, están presentes para apoyarme y alentarme. A mi padrino Roberto pues también ha compartido conmigo innumerables angustias y buenos momentos, siempre con apoyo, cariño y brindándome lo mejor de él para que todo salga adelante. A Leticia, mi madrinita, Julio y Arturo por su aliento y preocupación porque las cosas vayan bien. También es necesario agradecer a mi gatito Fritz, por toda la alegría que trae consigo, ya que el simple hecho de tenerlo cerca resulta muy inspirador y relajante para cualquiera de nosotros. Finalmente, el agradecimiento más importante de todos, a mis papás, pues estén donde estén sé que me siguen apoyando y están al pendiente de cualquier aventura o desventura; ellos pusieron la primer piedra para mi formación tanto académica como personal y mis hermanos y padrinos han continuado con su trabajo.

# Índice general

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>  | <b>5</b>  |
| 1.1      | Estructura del trabajo . . . . .   | 6         |
| <b>2</b> | <b>Cálculo Fraccionario</b>  | <b>1</b>  |
| 2.1      | Integral fraccionaria . . . . .  | 1         |
| 2.2      | Derivada fraccionaria . . . . .  | 3         |
| 2.2.1    | Derivada de Wyle . . . . .   | 5         |
| 2.2.2    | Derivada de Caputo . . . . .   | 5         |
| 2.3      | Transformada de Fourier . . . . .  | 6         |
| 2.3.1    | Propiedades . . . . .  | 7         |
| 2.3.2    | Transformada de Fourier para la derivada fraccionaria . . . . .                                  | 7         |
| 2.3.3    | Definición de la derivada fraccionaria de Riesz a partir de la transformada de Fourier . . . . . | 8         |
| 2.4      | Transformada de Laplace . . . . .  | 8         |
| 2.4.1    | Propiedades . . . . .  | 8         |
| 2.4.2    | Transformada de Laplace para la derivada fraccionaria . . . . .                                  | 9         |
| <b>3</b> | <b>Procesos de Lévy</b>  | <b>11</b> |
| 3.1      | Definición y resultados importantes . . . . .  | 11        |
| 3.2      | La medida de Lévy y otras propiedades trayectoriales . . . . .                                   | 15        |
| 3.3      | Algunos ejemplos y casos de interés . . . . .  | 16        |
| 3.4      | Procesos Lévy estables . . . . .   | 19        |
| 3.5      | Procesos Lévy estable templado y CGMY . . . . .  | 21        |
| <b>4</b> | <b>Cálculo Fraccionario y Procesos de Lévy</b>   | <b>25</b> |
| 4.1      | Procesos de Renovación . . . . .   | 25        |
| 4.2      | Caminatas Aleatorias en Tiempo Continuo . . . . .  | 27        |
| 4.2.1    | Ecuación de Montroll-Weiss . . . . .   | 28        |

|   |           |
|---|-----------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i>   | 5         |
| 4.2.2 Planteamiento de los vuelos de Lévy . . . . .                                       | 30        |
| 4.2.3 Difusión ordinaria . . . . .  | 32        |
| 4.2.4 Vuelos de Lévy . . . . .  | 33        |
| 4.2.5 Movimiento Browniano fraccionario . . . . .   | 33        |
| 4.2.6 Procesos ambivalentes . . . . .   | 34        |
| 4.3 La ecuación de Fokker-Planck fraccionaria . . . . .                                   | 35        |
| 4.3.1 Una solución para la ecuación de Fokker-Planck fraccionaria . . . . .               | 37        |
| 4.4 Ecuación de calor fraccionaria . . . . .  | 38        |
| 4.4.1 Ecuación de calor ordinaria . . . . .   | 38        |
| 4.4.2 Caso fraccionario . . . . .   | 40        |
| 4.5 Límite fluido para CATCs . . . . .  | 41        |
| 4.5.1 Ecuación de difusión fraccionaria para procesos Lévy estables y templados . . . . . | 44        |
| <b>5 Fórmula de Samuelson para procesos de Lévy</b>                                       | <b>47</b> |
| 5.1 Procesos de Lévy en los modelos de valuación . . . . .                                | 47        |
| 5.2 Fórmula de Samuelson . . . . .  | 48        |
| 5.2.1 Un ejemplo . . . . .  | 49        |
| 5.2.2 La fórmula de Samuelson en el caso de un proceso de Lévy . . . . .                  | 49        |
| 5.3 Valuación de opciones para procesos CGMY . . . . .                                    | 50        |
| 5.3.1 Ejemplo numérico . . . . .  | 51        |
| <b>6 Conclusiones</b>   | <b>53</b> |
| <b>A Método numérico</b>  | <b>55</b> |
| <b>B Programa para resolver la EDFP</b>   | <b>59</b> |



# Capítulo 1

## Introducción

El origen de los contratos de derivados se remonta hasta la época de los fenicios; se sabe que adicionalmente los griegos y los romanos también tenían instrumentos de este tipo. Fue hasta el siglo XVI, en Holanda, que se tuvo un mercado más organizado, principalmente de opciones. Sin embargo, no fue hasta 1900 que se comenzó a pensar en un modelo matemático para valorar estos contratos. Fue precisamente Louis Bachelier el que en su tesis doctoral *Théorie de la spéculation*, usó por primera vez el movimiento Browniano para obtener un modelo que fuera capaz de valorar opciones. 1973 es un año importante en la historia de las finanzas matemáticas, pues Myron Scholes, Fisher Black y Robert Merton presentaron un modelo más completo para valorar opciones, el cual, a pesar de sus múltiples críticas y defectos señalados, sigue siendo la base en el desarrollo de nuevas fórmulas para valorar productos derivados; además de ser el punto de partida de todo estudioso de las finanzas desde un enfoque cuantitativo. En años recientes se ha discutido mucho acerca de la notable mejoría que se obtiene en los modelos financieros de valuación al considerar que la dinámica de un activo está dada por medio de un proceso de Lévy.

Una de las principales críticas al modelo clásico de Black-Scholes es que éste es poco realista en el sentido en el que no logra incorporar de algún modo los cambios que ocurren en lo general en los sistemas financieros y económicos y, de hecho, en el entorno mismo del desarrollo de estos sistemas. Tales cambios pueden generar variaciones bruscas en el precio de un activo y al momento de proponer que la dinámica de tal activo se comporta como un movimiento Browniano, como en el caso Black-Scholes, estas posibles variaciones no se están tomando en cuenta pues este proceso estocástico tiene trayectorias continuas. Pero al suponer un tipo de proceso estocástico cuya dinámica sea discontinua, es decir que da lugar a saltos, se logra tomar en consideración el posible cambio brusco del precio.

Por supuesto que no hay una única forma de incorporar el supuesto de saltos en el proceso que marca la dinámica del activo y esto a dado lugar a la propuesta de diferentes tipos de

procesos de Lévy, generando una gran variedad de modelos y una amplia gama de literatura y discusiones al respecto por parte tanto del mundo académico, como de participantes en la industria.

Por otro lado, como veremos en el capítulo correspondiente, mediante el cálculo fraccionario se generalizan las derivadas e integrales de orden entero a uno arbitrario (no entero, pero real), así podemos hablar de ecuaciones diferenciales fraccionarias como el análogo a las ecuaciones diferenciales ordinarias en este contexto generalizado. El cálculo fraccionario se ha convertido en una herramienta muy importante para modelar diversos problemas en varias ramas de la Física, principalmente aquellos que involucran transporte de fluidos, plasmas y generalizaciones de la ecuación de difusión o calor.

Es conocida la estrecha relación que existe entre la teoría en cuanto a la obtención de la ecuación de calor y la correspondiente para valorar un derivado. Es a través de este punto que se puede pensar en que también se podría hacer uso de los resultados existentes para plantear la ecuación de calor fraccionaria, en un contexto financiero y hay una justificación es sencilla: Hay un punto muy importante a considerar, dado que estamos bajo la suposición de que la dinámica de un activo sigue un proceso de Lévy, al obtener la nueva versión "generalizada" de la ecuación de Black-Scholes, ésta resulta ser una ecuación integro-diferencial parcial. Este tipo de ecuaciones son introducidas precisamente para capturar la no-localidad que inducen los saltos del proceso de Lévy y la ecuación integro-diferencial parcial se puede expresar como una ecuación diferencial fraccionaria, precisamente por la definición misma de la derivada fraccionaria. Desde luego esta es una explicación, a lo largo del presente trabajo veremos otra forma de obtener, bajo la suposición de un proceso de Lévy, una ecuación diferencial fraccionaria que, al resolverla, nos ayudará a valorar un derivado. Esto será, precisamente, adaptando resultados importantes obtenidos en el contexto de los problemas físicos.

## 1.1. Estructura del trabajo

El trabajo está organizado en cinco apartados principales, cada uno correspondiente a un capítulo. Primero llevaremos a cabo un repaso de los conceptos fundamentales concernientes al cálculo fraccionario: las principales definiciones y generalizaciones del contexto clásico, como transformadas de Fourier y Laplace, las cuales serán de bastante ayuda para el desarrollo de otros apartados.

Posteriormente, en el capítulo 2, revisaremos las ideas centrales en cuanto al desarrollo de la teoría de los procesos de Lévy; estudiaremos los conceptos que serán más relevantes para plantear los modelos de valuación correspondientes. Además, veremos con detalle las características de algunos de los procesos más famosos en el contexto de modelación de dinámicas de precios; uno de ellos será el que adaptaremos al final, en el ejemplo numérico:



el proceso conocido como Lévy estable "suavizado" (tempered Lévy stable).

En el capítulo 3, la meta es profundizar un poco en la conexión entre procesos de Lévy y cálculo fraccionario. Para llevar a cabo tal objetivo trataremos con caminatas aleatorias en tiempo continuo, éstas pueden entenderse como una generalización del movimiento Browniano ya que se pueden considerar diferentes distribuciones para los tiempos de espera que el caminante pasa en un cierto estado y adicionalmente, se consideran diferentes distribuciones para los desplazamientos o saltos del caminante, esto es de mucha ayuda en nuestro caso. Posteriormente desarrollaremos la ecuación de Montroll-Weiss y repasaremos resultados importantes que ya se han obtenido en el contexto físico, como las ecuaciones de Fokker-Planck y de calor en su versión fraccionaria.

En el capítulo 4 nos ocuparemos de la herramienta que nos servirá para valorar el derivado: la fórmula de Samuelson. Ésta tiene la importante característica de indiferencia ante la medida con la cuál obtendremos el valor esperado del payoff del derivado. Nuestra metodología para obtener el precio de una opción europea sobre el activo subyacente cuya dinámica está descrita mediante un proceso de Lévy como el que mencionamos anteriormente será la siguiente: Obtendremos una ecuación fraccionaria cuya solución nos ayudará a aproximar la distribución del proceso y por medio de la fórmula de Samuelson, obteniendo la esperanza bajo esta distribución, es que llegaremos al valor del contrato. Compararemos el resultado con otro ya existente en la literatura, donde el precio es obtenido con un método de Monte Carlo, [12].

Las conclusiones se presentan al final, en el último capítulo.



# Capítulo 2

## Cálculo Fraccionario

En esta sección se dará un breve repaso de los principales conceptos matemáticos que servirán de base para el desarrollo de los resultados principales que se explorarán en el presente trabajo.

El cálculo fraccionario se encarga del estudio de las derivadas e integrales de orden arbitrario, y por arbitrario se entiende cualquier elemento de  $\mathbb{R}$ . Esto significa que en lugar de tener expresiones del tipo  $\partial_{x^n}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , tendremos  $\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$  con  $\beta \in \mathbb{R}$ . Esta extensión dio origen a una rama de las matemáticas relativamente nueva, sistemas dinámicos fraccionarios, la cual involucra ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales de órdenes arbitrarios.

El interés por el cálculo fraccionario se vio estimulado por sus aplicaciones en Análisis Numérico y diferentes áreas de la Física e Ingeniería, incluyendo posiblemente a los fenómenos fractales, y recientemente en Finanzas.

### 2.1. Integral fraccionaria

Primero nos centraremos en la deducción del operador integral, ya que éste nos servirá para definir al operador diferencial.

De acuerdo con el enfoque del cálculo fraccionario por parte de Riemann-Liouville, la noción de integral fraccional de orden  $\gamma$  ( $\gamma > 0$ ), es una consecuencia natural de la famosa fórmula integral de Cauchy:

$$J^n f(t) := f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

La cual es una forma de reducir el cálculo de la primitiva de una función  $f(t)$  a una sola integral del tipo de convolución.

Entonces, intuitivamente, una forma natural de extender la fórmula anterior de los enteros positivos a cualquier valor real positivo, es utilizando el hecho de que la función Gamma es una generalización del factorial. Así es que, haciendo notar que  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , introducimos el número real positivo y arbitrario  $\gamma$  y podemos definir la *integral fraccionaria de orden*  $\gamma > 0$ :

$$J^\gamma f(t) := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

Por completez definimos  $J^0 := I$ , i.e. el operador identidad:  $J^0 f(t) = f(t)$ . Así, la expresión (2.2) nos define a la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden  $\gamma$ .

Es importante hacer notar que, de aquí en adelante, las integrales son vistas en el sentido generalizado de Riemann, así es que se requiere que cualquier función sea absolutamente integrable de manera local en  $\mathbb{R}^+$ .

Ahora mencionaremos la siguiente propiedad de semigrupo, que en lo sucesivo nos será de utilidad,

$$J^\gamma J^\beta = J^{\gamma+\beta}, \quad \gamma, \beta \geq 0, \quad (2.3)$$

la cual trae como consecuencia la propiedad de conmutatividad  $J^\gamma J^\beta = J^\beta J^\gamma$ , y el efecto de los operadores  $J^\gamma$  sobre las operaciones potencia

$$J^\gamma t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+\gamma)} t^{\alpha+\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad \alpha > -1, \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Estas propiedades son una generalización natural de aquellas que conocemos cuando el orden es un entero positivo.

Ahora nos es conveniente introducir la siguiente función causal<sup>1</sup>

$$\Phi_\gamma(t) := \frac{t_+^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}, \quad \gamma > 0, \quad (2.5)$$

donde el subíndice  $+$  sólo denota que la función se desvanece para  $t < 0$ . Cuando  $\gamma > 0$ , esta función resulta ser localmente absolutamente integrable en  $\mathbb{R}^+$ . Ahora recordaremos la noción de *convolución de Laplace*, i.e., la la convolución integral con dos funciones causales, la cual se plantea como:

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = g(t) * f(t).$$

---

<sup>1</sup>Recordemos que una función causal  $f(t)$  es aquella que se desvanece idénticamente cuando  $t < 0$ .

Entonces notemos de (2.2) y (2.5), que la integral fraccionaria de orden  $\gamma > 0$  se puede considerar como la convolución de Laplace entre  $\Phi_\gamma(t)$  y  $f(t)$ , i.e.,

$$J^\gamma f = \Phi_\gamma(t) * f(t), \quad \gamma > 0. \quad (2.6)$$

Además, con base en las integrales Eulerianas<sup>2</sup>, podemos deducir la regla de composición

$$\Phi_\gamma(t) * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\gamma+\beta}(t), \quad \gamma, \beta > 0, \quad (2.7)$$

a partir de la cual también podemos obtener (2.3) y (2.4).

Ahora introducimos la transformada de Laplace por medio de la notación

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \tilde{f}(s), \quad s \in \mathbb{C},$$

y usando el signo  $\div$  para denotar a la pareja de la función con su transformada de Laplace, i.e.  $f(t) \div \tilde{f}(s)$ , notamos la siguiente regla para la transformada de Laplace de la integral fraccionaria,

$$D^\gamma f(t) \div \frac{\tilde{f}(s)}{s^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad (2.8)$$

que es una generalización directa del caso con una integral repetida ( $\gamma = n$ ). Más adelante ahondaremos un poco más en esta y otras propiedades de transformada de Laplace.

## 2.2. Derivada fraccionaria

Después de la definición de integral fraccionaria, la de derivada fraccionaria de orden  $\gamma$  se convierte en un requerimiento natural y uno se ve tentado a sustituir  $\gamma$  por  $-\gamma$  en las definiciones anteriores. Pero esta generalización requiere de tener cierto cuidado para garantizar la convergencia de las integrales y conservar las propiedades de la derivada de orden entero.

Denotemos por  $D^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , al operador derivada de orden  $n$ . Primero notemos que

$$D^n J^n = I, \quad J^n D^n \neq I, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.9)$$

o sea que  $D^n$  es inversa izquierda, pero no inversa derecha, del correspondiente operador integral  $J^n$ . De hecho, podemos reconocer fácilmente de (2.1) que:

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0. \quad (2.10)$$

---

<sup>2</sup>Las funciones Beta y Gamma.

Como consecuencia, esperaríamos que  $D^\gamma$  esté definida como inversa izquierda de  $J^\gamma$ . Para este propósito, introduciendo al entero positivo  $m$  tal que  $-1 < \gamma \leq m$ , se puede definir la *derivada fraccionaria de orden  $\gamma$* :

$$D^\gamma f(t) := D^m J^{m-\gamma} f(t),$$

esto a través de

$$D^\gamma f(t) := \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma+1-m}} d\tau \right], m-1 < \gamma < m \quad (2.11)$$

Por completez definimos  $D^0 = J^0 = I$ , entonces podemos reconocer fácilmente que

$$D^\gamma J^\gamma = I, \gamma \geq 0, \quad (2.12)$$

y

$$D^\gamma t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)} t^{\alpha-\gamma}, \gamma > 0, \alpha > -1, t > 0. \quad (2.13)$$

Desde luego, una vez más, estas propiedades resultan ser una generalización de aquellas que conocemos cuando el orden es un entero positivo. Como en (2.13) el argumento de la función Gamma puede ser negativo, es necesario que consideremos la continuación analítica de  $\Gamma(z)$  al semiplano izquierdo.

En la definición (2.13), si bien hemos especificado que la integral corre en un intervalo  $[0, t]$ , no hemos dejado en claro en cuanto a notación para la derivada fraccionaria en qué dominio está definida, esto lo haremos a continuación.

$${}_a D_t^\gamma f = \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma+1-m}} d\tau, \quad m-1 < \gamma < m \quad (2.14)$$

$${}_t D_b^\gamma f = \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \frac{d^m}{dt^m} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma+1-m}} d\tau, \quad m-1 < \gamma < m. \quad (2.15)$$

Además observemos que el valor de la derivada fraccionaria en (2.14) para  $t$  depende del comportamiento de la función  $f$  a la izquierda de  $t$ , es decir en el intervalo  $(a, t)$ . Por esto es que a (2.14) se le llama la *derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por la izquierda*. De manera natural, la *derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por la derecha* se define cambiando los límites, como ocurre en la ecuación (2.15).

### 2.2.1. Derivada de Wyle

Notamos de manera clara, que la definición de la integral y derivada fraccionarias depende del parámetro  $\gamma$ ; el valor de este parámetro variará según el problema que estemos considerando. En un dominio semi infinito, digamos por ejemplo  $t \in (-\infty, t_0)$  o  $t \in (t_0, \infty)$ , la elección de  $a = -\infty$  o  $b = \infty$  corresponde a la llamada *Derivada fraccionaria de Wyle*. El dominio de este operador nos lleva de inmediato a asociar nociones de la transformada de Fourier, más adelante la definiremos con precisión y recordaremos sus características y propiedades principales, sobre todo las que por medio de la derivada fraccionaria de Wyle entran en operación en el cálculo fraccionario.

En este sentido, el operador de derivada fraccionaria general de orden  $\gamma$  se define como una superposición de las derivadas izquierda y derecha con factores de ponderación:

$$D_x^\gamma = w_a^- D_x^\gamma + w_x^+ D_b^\gamma.$$

Un caso de interés, en este contexto de dominio infinito es la derivada fraccionaria totalmente simétrica:

$$D_{|x|}^\gamma = \frac{-1}{2 \cos(\gamma\pi/2)} [-_\infty D_x^\gamma +_x D_\infty^\gamma].$$

### 2.2.2. Derivada de Caputo

Ahora debemos hacer notar el hecho de que la derivada fraccionaria  $D^\gamma f$  no es cero para la función constante  $f(t) \equiv 1$  si  $\gamma \notin \mathbb{N}$ . De hecho, si  $\gamma = 0$ , de (2.13) obtenemos

$$D^\gamma 1 = \frac{t^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}, \quad \gamma \geq 0, t > 0. \quad (2.16)$$

Esto, desde luego, es idénticamente cero para  $\gamma \in \mathbb{N}$ , debido a que la función Gamma tiene polos en los puntos 0, -1, -2, ...

Observemos que una definición alternativa de la derivada fraccionaria, originalmente introducida por Caputo hacia el final de la década de los sesenta, es la llamada *derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\gamma$* :

$${}^C D^\gamma f(t) := J^{m-\gamma} D^m f$$

con  $m - 1 < \gamma \leq m$  y está dada por medio de:

$${}^C D^\gamma f := \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma+1-m}} d\tau, \quad m - 1 < \gamma < m. \quad (2.17)$$

Esta definición es más restrictiva que la de la expresión (2.11) ya que requiere de la integrabilidad absoluta de la derivada de orden  $m$ . Podemos reconocer fácilmente que, en general:

$$D^\gamma f(t) := D^m J^{m-\gamma} f(t) \neq J^{m-\gamma} D^m f(t) := {}^C D^\gamma f(t), \quad (2.18)$$

a menos que la función  $f(t)$ , junto con sus primeras  $m - 1$  derivadas se desvanezcan en  $t = 0^+$ . De hecho, podemos reconocer que, para  $m - 1 < \gamma < m$  y  $t > 0$ ,

$$D^\gamma f(t) = {}^C D^\gamma f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\gamma}}{\Gamma(k-\gamma+1)} f^{(k)}(0^+), \quad (2.19)$$

y por consiguiente, recordando a la derivada fraccionaria de las funciones potencia (4.3),

$$D^\gamma \left( f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+) \right) = {}^C D^\gamma f(t). \quad (2.20)$$

La definición alterna (2.17) para la derivada fraccionaria entonces incorpora los valores iniciales de la función y los de sus derivadas enteras de menor orden. La resta del polinomio de Taylor de orden  $m - 1$  en  $t = 0^+$  a  $f(t)$  se traduce en una clase de regularización de la derivada fraccionaria. En particular, de acuerdo con esta definición, podemos identificar fácilmente la propiedad relevante para la cual la derivada fraccionaria de una constante sigue siendo 0:

$${}^C D^\gamma 1 = 0, \gamma > 0. \quad (2.21)$$

### 2.3. Transformada de Fourier

Si  $f$  es una función definida en  $\mathbb{R}$ , entonces la transformada de Fourier,  $\hat{f}(\omega)$ , es una nueva función definida en  $\mathbb{R}$  dada por

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Es importante señalar que, aún cuando  $f(x)$  es real para toda  $x$ , la nueva función  $\hat{f}$  no será real en general. También, como la integral es sobre todo  $\mathbb{R}$ , el valor  $\hat{f}(\omega)$  no existirá, a menos que la función  $f(x)$  se comporte apropiadamente para  $x$  cerca de  $\pm\infty$ . Pero de todos modos, para funciones bien comportadas que tienden a cero lo suficientemente rápido en  $\pm\infty$ , la integral sí estará bien definida.



### 2.3.1. Propiedades

La transformada de Fourier puede ser considerada como un mapeo, el cual lleva funciones  $f(x)$  a su transformada  $\hat{f}(\omega)$ . De la definición de  $\mathcal{F}(f)(\omega)$  se sigue que el mapeo  $\mathcal{F}$  es lineal, i.e.

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g), \quad (2.22)$$

donde  $f, g$  son funciones y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Ahora consideremos a  $f(x)$  con su respectiva derivada,  $f'(x)$ . Entonces, buscamos una expresión para la transformada de Fourier de esta última. Integrando por partes obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \end{aligned}$$

Entonces, al suponer que  $|f(x)|$  tiende a cero cuando  $x$  tiende a  $\pm\infty$ , de modo que los términos de frontera desaparezcan, tenemos que:

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega). \quad (2.23)$$

Esta propiedad tiene su contraparte en la cual establecemos que la transformada de Fourier de la función  $xf(x)$  está dada por  $i\hat{f}'(\omega)$ , i.e.

$$\mathcal{F}(xf)(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(f)(\omega) = i\hat{f}'(\omega). \quad (2.24)$$

También es importante mencionar la propiedad de escala: para  $a \neq 0$ ,

$$\mathcal{F}(f(ax))(\omega) = \frac{1}{a} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (2.25)$$

### 2.3.2. Transformada de Fourier para la derivada fraccionaria

El operador derivada fraccionaria general está definido como una superposición de las derivadas izquierda y derecha. Además, en un dominio infinito,  $a = -\infty$  o  $b = \infty$ , como es en el caso de la derivada de Wyle, las transformadas de Fourier de los operadores izquierdo y derecho están dadas por:

$$\mathcal{F}\{-\infty D_x^\gamma f(x)\} = (-i\omega)^\gamma \hat{f}(\omega) \quad (2.26)$$

$$\mathcal{F}\{x D_\infty^\gamma f(x)\} = (i\omega)^\gamma \hat{f}(\omega). \quad (2.27)$$

Nos resulta claro, además de razonable que estas expresiones sean una generalización de la expresión (2.23) cuando la derivada no es de primer orden, sino de un orden arbitrario  $\gamma$ .

### 2.3.3. Definición de la derivada fraccionaria de Riesz a partir de la transformada de Fourier

Si  $f(x)$  es una función lo suficientemente bien portada, con transformada de Fourier  $\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , entonces tenemos que:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^\gamma}{d|x|^\gamma}f(x)\right](\omega) = -|\omega|^\gamma \hat{f}(\omega),$$

si definimos

$$\frac{d^\gamma}{d|x|^\gamma}f(x) = \Gamma(1 + \gamma) \frac{\sin(\gamma\pi/2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x + \xi) - 2f(x) + f(x - \xi)}{\xi^{1+\gamma}} d\xi. \quad (2.28)$$

La derivada fraccionaria definida a través de esta última ecuación es llamada *derivada fraccionaria de Riesz* ya que es obtenida a través de la inversión de la integral fraccionaria introducida originalmente por Marcel Riesz, conocida como el potencial de Riesz. Esta representación está hecha con base en una regularización adecuada de una integral hiper-singular.

Para  $\gamma = 2$ , la derivada de Riesz se reduce a la derivada estándar de orden 2, ya que  $-|\omega|^2 = -\omega^2$ .

## 2.4. Transformada de Laplace

De un modo similar al que definimos la transformada de Fourier, introducimos anteriormente a la transformada de Laplace. Recordemos cómo se define y posteriormente repasemos algunas de sus principales propiedades.

Sea  $f$  una función definida en  $\mathbb{R}$ , la transformada de Laplace es una nueva función,  $\tilde{f}(\omega)$ , definida en  $\mathbb{R}^+$  dada por:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx.$$

### 2.4.1. Propiedades

De manera análoga a la transformada de Fourier, la transformada de Laplace cumple con las mismas propiedades de:

1. **Linealidad:**  $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \tilde{f}(s) + \beta \tilde{g}(s)$ .
2. **Reescalamiento:**  $\mathcal{L}[f(ax)](s) = \frac{1}{a} \tilde{f}(s/a)$ , si  $a > 0$ .

Además, tenemos otro par de propiedades en relación con su naturaleza exponencial:

1.  $\mathcal{L}[e^{ax} f(x)](s) = \tilde{f}(s - a)$ .
2. Si  $f(x) = 0$ ,  $x < 0$  y además, si  $a > 0$ , entonces  $\mathcal{L}[f(x - a)](s) = e^{-as} \tilde{f}(s)$ .

Para la relación de la transformada de Laplace con su derivada y con la derivada de la función original, tenemos las siguientes dos propiedades:

1. Si existe la transformada de Laplace de  $f(x)$ , entonces  $\mathcal{L}[xf(x)](s) = -\frac{d}{ds} \tilde{f}(s)$ .
2.  $\mathcal{L}[f'](s) = s\tilde{f}(s) - f(0+)$ .

Esta última propiedad se puede reescribir como:

$$\tilde{f}(s) = \frac{\mathcal{L}[f'](s) + f(0+)}{s} \quad (2.29)$$

### 2.4.2. Transformada de Laplace para la derivada fraccionaria

Si  $f(t)$  es una función con transformada de Laplace  $\mathcal{L}(f)(s)$  y derivada fraccionaria dada por (2.17), es decir, en el sentido de Caputo, entonces tenemos que:

$$\mathcal{L} \left( {}_0^C D_t^\gamma f \right) (s) = s^\gamma \tilde{f}(s) - s^{\gamma-1} f(0+), \quad 0 < \gamma < 1 \quad (2.30)$$



# Capítulo 3

## Procesos de Lévy

Los procesos de Lévy han ganado gran popularidad en Finanzas Matemáticas ya que pueden describir la realidad observada en los mercados de una manera más precisa que los modelos con base en el movimiento Browniano.

Para dar una breve idea del porqué afirmado en el párrafo anterior, observemos el comparativo entre las gráficas de la figura (3.1). En el lado derecho se muestra la gráfica correspondiente a la evolución del logaritmo del precio del corporativo SLM (NYSE-LSM) entre enero y marzo de 1993; ésta se compara con un escenario simulado a partir del modelo de Black-Scholes con el mismo rendimiento y volatilidad (ambos anualizados). Recordemos que, precisamente, una de las principales propiedades del movimiento Browniano son la continuidad de sus trayectorias y la invarianza de escala. Pero al observar la figura (3.2), claramente la gráfica de la evolución del activo muestra saltos claramente visibles y si quisiéramos ver las gráficas con una escala más fina (sólo de un mes, por ejemplo), la simulación del movimiento Browniano muestra una trayectoria idéntica, mientras que el escenario de la evolución muestra un proceso claramente discontinuo.

### 3.1. Definición y resultados importantes

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathcal{P})$  un espacio de probabilidad filtrado, donde  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$  y la filtración  $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{t \in [0, T]}$  satisface las condiciones usuales. Señalemos que, abusando un poco de la notación estándar, cuando escribamos  $t \geq 0$  significará  $t \in [0, T]$ .

**Definición 1.** *Un proceso estocástico,  $L = (L_t)_{t \geq 0}$ , que es càdlàg, adaptado, con valores reales y  $L_0 = 0$  c.s. es un proceso de Lévy si satisface las siguientes condiciones:*

1.  *$L$  tiene incrementos independientes, i.e.  $L_t - L_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$  para cualquier  $0 \leq s < t \leq T$ .*

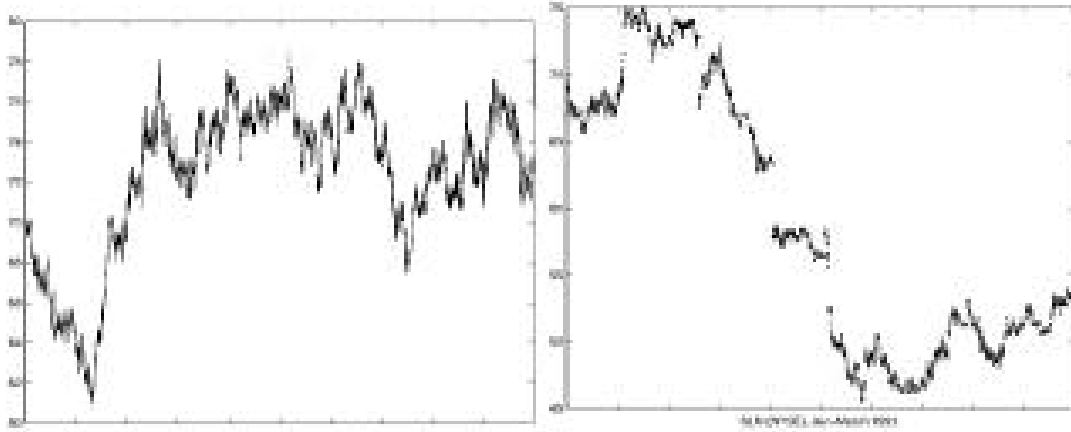


Figura 3.1: Evolución del precio de SLM (NYSE) de enero a marzo de 1993, comparado con una trayectoria de un movimiento Browniano con los mismos parámetros. Figura obtenida de [12]

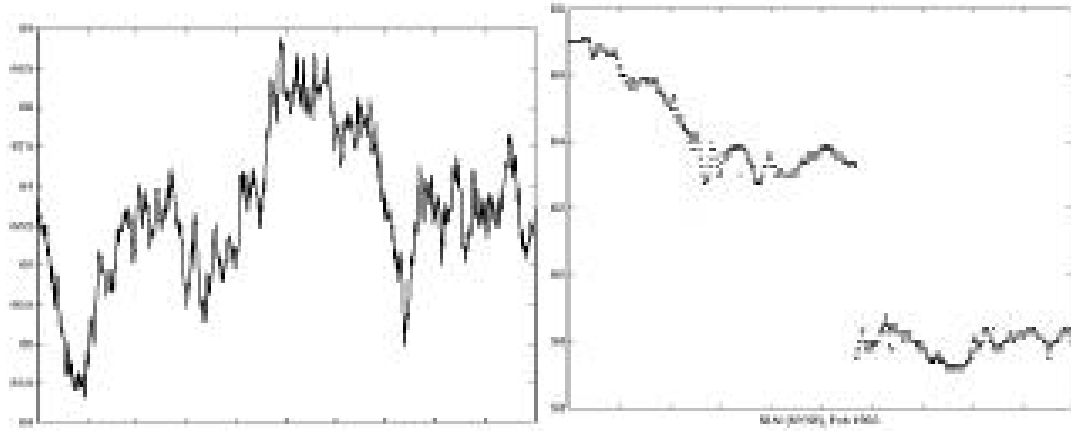


Figura 3.2: Comportamiento del precio de SLM (NYSE) en febrero de 1993, comparado con un escenario simulado a partir del modelo de Black-Scholes con el mismo rendimiento y volatilidad. Figura obtenida de [12]

2.  $L$  tiene incrementos estacionarios, i.e. para cualquier  $s, t \geq 0$ , la distribución de  $L_{t+s} - L_t$  no depende de  $t$ .
3.  $L$  es continuamente estocástico, i.e. para cada  $t \geq 0$  y  $\epsilon > 0$ :  $\lim_{s \rightarrow t} P(|L_t - L_s| > \epsilon) = 0$

Ahora veremos que hay una fuerte relación entre los procesos de Lévy y la clase de las distribuciones infinitamente divisibles. A continuación definiremos estas distribuciones.

**Definición 2.** La ley  $P_X$  de una variable aleatoria  $X$  es infinitamente divisible si para todo  $n \in \mathbb{N}$  existen variables aleatorias  $X_1^{(1/n)}, \dots, X_n^{(1/n)}$  i.i.d. tales que

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(1/n)} + \dots + X_n^{(1/n)}.$$

Alternativamente, podemos caracterizar a una variable aleatoria infinitamente divisible usando su función característica.

**Definición 3.** La ley de una variable aleatoria  $X$  es infinitamente divisible, si para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe una variable aleatoria  $X^{(1/n)}$ , tal que

$$\phi_X(u) = (\phi_{X^{(1/n)}}(u))^n.$$

El siguiente teorema nos brinda una caracterización completa de variables aleatorias infinitamente divisibles vía sus funciones características; es la reconocida fórmula de Lévy-Khintchine.

**Teorema 1.** La ley  $P_X$  de una variable aleatoria  $X$  es infinitamente divisible si y sólo si existe una tripleta  $(b, c, \nu)$  con  $b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}_+$  y la medida  $\nu$  que satisface  $\nu(0) = 0$  y  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2) \nu(dx) < \infty$ , tales que

$$\mathbb{E}[e^{iuX}] = \exp\left[ibu - \frac{u^2c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{|x|<1}) \nu(dx)\right]. \quad (3.1)$$

La tripleta  $(b, c, \nu)$  recibe el nombre de tripleta característica o de Lévy, y el exponente en (3.1):

$$\psi(u) = iub - \frac{u^2c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{|x|<1}) \nu(dx) \quad (3.2)$$

es llamado el exponente característico o de Lévy. Además,  $b \in \mathbb{R}$  es el término de tendencia,  $c \in \mathbb{R}_+$  el coeficiente de difusión o Gaussiano y  $\nu$  la medida de Lévy.

La clase de procesos de Lévy es muy amplia, pero a pesar de eso, se pueden caracterizar de una forma compacta por medio de la función característica del proceso.

Ahora, consideremos un proceso de Lévy,  $L = (L_t)_{t \geq 0}$ ; usando el hecho de que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y cualquier  $t > 0$ ,

$$L_t = L_{t/n} + (L_{2t/n} - L_{t/n}) + \dots + (L_t - L_{(n-1)t/n}) \quad (3.3)$$

junto con la estacionariedad e independencia de los incrementos, concluimos que la variable aleatoria  $L_t$  es infinitamente divisible.

Además, para toda  $u \in \mathbb{R}$  y toda  $t \geq 0$ , definimos:

$$\psi_t(u) = \log \mathbb{E}[e^{iuL_t}]; \quad (3.4)$$

haciendo uso de (3.3), más la estacionariedad e independencia de los incrementos, tenemos que para cualquier  $m \in \mathbb{N}$

$$m\psi_1(u) = \psi_m(u) \quad (3.5)$$

y entonces, para cualquier racional  $t > 0$

$$t\psi_1(u) = \psi_t(u). \quad (3.6)$$

Para algún irracional  $t$ , podemos escoger una sucesión de racionales que decrezca a  $t$  y usando la continuidad por la derecha de  $L$  para probar que la (3.6) es válida para toda  $t \geq 0$ .

Entonces, tenemos que la siguiente propiedad se cumple para cualquier proceso de Lévy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iuL_t}] &= e^{t\psi(u)} \\ &= \exp\left[t\left(ibu - \frac{u^2c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{|x|<1})\nu(dx)\right)\right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\psi(u) := \psi_1(u)$  es el exponente característico de  $L_1 := X$ , una variable aleatoria con distribución infinitamente divisible.

Ahora veremos que, dada una variable aleatoria  $X$ , cuya distribución es infinitamente divisible, podemos construir un proceso de Lévy  $L = (L_t)_{t \geq 0}$  tal que  $L_1 := X$ . Esto será posible a través del siguiente resultado, la descomposición de Lévy-Itô:

**Teorema 2.** *Consideremos una tripleta  $(b, c, \nu)$ , donde  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$  y  $\nu$  es una medida que satisface  $\nu(0) = 0$  y  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2)\nu(dx) < \infty$ . Entonces, existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sobre el cual existen cuatro procesos de Lévy independientes:  $L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}$  y  $L^{(4)}$ . Donde  $L^{(1)}$  es una tendencia constante,  $L^{(2)}$  es un movimiento Browniano,  $L^{(3)}$  es un proceso de Poisson compuesto y  $L^{(4)}$  es una martingala cuadrado integrable (de sólo saltos) con una cantidad c.s. numerable de saltos en cada intervalo finito de tiempo con magnitud menor que 1. Tomando  $L = L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} + L^{(4)}$ , tenemos que existe un espacio de probabilidad en el cual se define, para toda  $u \in \mathbb{R}$ , un proceso de Lévy  $L = (L_t)_{t \geq 0}$  con exponente característico*

$$\psi(u) = iub - \frac{u^2c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{|x|<1})\nu(dx). \quad (3.8)$$



Esta descomposición expresa funciones muestrales de un proceso aditivo como la suma de dos partes independientes -una parte continua y otra expresable como una suma compensada de saltos independientes.

Dicho de otra manera, podemos descomponer a cualquier proceso de Lévy en cuatro procesos de Lévy independientes,  $L = L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} + L^{(4)}$ , i.e.

$$L_t = bt + \sqrt{c}W_t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x \mu^L(ds, dx) + \left( \int_0^t \int_{|x| < 1} x \mu^L(ds, dx) - t \int_{|x| < 1} x \nu(dx) \right) \quad (3.9)$$

donde  $L^{(1)}$  es una tendencia constante,  $L^{(2)}$  es un movimiento Browniano,  $L^{(3)}$  es un proceso de Poisson compuesto y  $L^{(4)}$  es una martingala de sólo saltos.

## 3.2. La medida de Lévy y otras propiedades trayectoriales

La medida de Lévy  $\nu$  es una medida en  $\mathbb{R}$  que satisface

$$\nu(0) = 0 \quad y \quad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2) \nu(dx) < \infty. \quad (3.10)$$

Esto significa que una medida de Lévy no tiene masa en el origen, pero pueden ocurrir singularidades alrededor de él (una cantidad infinita de saltos pequeños). De una manera intuitiva, podemos decir que la medida de Lévy describe el número esperado de saltos de una cierta altura en un intervalo de tiempo de longitud 1.

Por ejemplo, en el caso de la medida de Lévy del proceso de difusión con saltos es  $\nu(dx) = \lambda \cdot F(dx)$ ; de donde podemos deducir que el número esperado de saltos, en un intervalo de tiempo de longitud 1, es  $\lambda$  y el tamaño de los saltos se distribuye según  $F$ .

De forma más general, si  $\nu$  es una medida finita, i.e.  $\nu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \nu(dx) = \lambda < \infty$ , entonces  $F(dx) := \frac{\nu(dx)}{\lambda}$ , que es una medida de probabilidad. Entonces,  $\lambda$  es el número esperado de saltos y  $F(dx)$  la distribución del tamaño de saltos  $x$ . Si  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ , entonces se espera un número infinito de saltos (pequeños).

La medida de Lévy es la responsable de la riqueza de la clase de los procesos de Lévy y contiene información muy útil acerca de la estructura de los procesos, por ejemplo de sus propiedades trayectoriales.

**Proposición 1.** *Sea  $L$  un proceso de Lévy con tripleta  $(b, c, \nu)$ .*

1. *Si  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$  entonces casi todas las trayectorias de  $L$  tienen un número finito de saltos sobre cada intervalo compacto. En este caso, el proceso de Lévy tiene actividad infinita.*

2. Si  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$  entonces casi todas las trayectorias de  $L$  tienen un número infinito de saltos sobre cada intervalo compacto. En este caso, el proceso de Lévy tiene actividad infinita.

Si un proceso de Lévy tiene variación finita o no también depende de la medida de Lévy (y de la presencia o ausencia de una parte Browniana).

**Proposición 2.** Sea  $L$  un proceso de Lévy con tripleta  $(b, c, \nu)$ .

1. Si  $c = 0$  y  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$  entonces casi todas las trayectorias de  $L$  tienen variación finita.
2. Si  $c \neq 0$  o  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) = \infty$  entonces casi todas las trayectorias de  $L$  tienen variación infinita.

Además, la medida de Lévy contiene información acerca de si los momentos de un proceso de Lévy son finitos o no; esta información resulta en extremo importante en finanzas matemáticas, para la existencia de una medida martingala. El que los momentos de un proceso de Lévy sean finitos o no está relacionado con el comportamiento análogo de una integral sobre la medida de Lévy (de manera más precisa, la restricción de la medida de Lévy a saltos mayores que uno en valor absoluto, i.e. saltos grandes).

**Proposición 3.** Sea  $L$  un proceso de Lévy con tripleta  $(b, c, \nu)$ . Entonces

1.  $L_t$  tiene  $p$ -ésimo momento finito, para  $p \in \mathbb{R}_+$ , ( $\mathbb{E}|L_t|^p < \infty$ ) si y sólo si  $\int_{|x| \geq 1} |x|^p \nu(dx) < \infty$ .
2.  $L_t$  tiene  $p$ -ésimo momento exponencial finito, para  $p \in \mathbb{R}$  ( $\mathbb{E}[e^{pL_t}] < \infty$ ) si y sólo si  $\int_{|x| \geq 1} e^{px} \nu(dx) < \infty$ .

### 3.3. Algunos ejemplos y casos de interés

El proceso de Lévy más simple está formado sólo por una tendencia lineal:  $L_t = bt$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$ , un proceso determinista. El movimiento Browniano,  $L_t = bt + \sigma W_t$  es el único proceso de Lévy (no determinista) con trayectorias muestrales continuas. Otros ejemplos de procesos de Lévy son los procesos de Poisson y Poisson compuesto. Notemos que la suma de un movimiento Browniano y un proceso de Poisson compuesto es de nuevo un proceso de Lévy (gracias a la descomposición de Lévy-Itô); éste es llamado con frecuencia "difusión con saltos de Lévy".

**Ejemplo 1.** Sea el proceso  $L = (L_t)_{t \geq 0}$  una difusión con saltos de Lévy, i.e. un movimiento Browniano más un proceso de Poisson compensado. Este se puede reexpresar como:

$$L_t = bt + \sigma W_t + \left( \sum_{k=1}^{N_t} J_k - t\lambda\kappa \right)$$

donde  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ,  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano estándar,  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda$  (i.e.  $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ ) y  $J = (J_k)_{k \geq 1}$  es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución de probabilidad  $F$  y  $\mathbb{E}[J] = \kappa < \infty$ ;  $F$  describe la distribución del tamaño de los saltos. Todas las fuentes de aleatoriedad son mutuamente independientes.

Es bien sabido que el movimiento Browniano es una martingala, lo mismo que para el proceso de Poisson compuesto. Por consiguiente,  $L = (L_t)_{t \geq 0}$  es una martingala si y sólo si  $b = 0$ .

La función característica de  $L_t$  es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iuL_t}] &= \mathbb{E}[\exp iu(bt + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} J_k - t\lambda\kappa)] \\ &= \exp[iubt] \mathbb{E}[\exp(iu\sigma W_t) \exp(iu(\sum_{k=1}^{N_t} J_k - t\lambda\kappa))]; \end{aligned}$$

como todas las fuentes de aleatoriedad son independientes, tenemos:

$$= \exp[iubt] \mathbb{E}[\exp(iu\sigma W_t)] \mathbb{E}[\exp(iu \sum_{k=1}^{N_t} J_k - iut\lambda\kappa)];$$

Tomando en cuenta que

$$\mathbb{E}[e^{iuW_t}] = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t}, \quad W_t \sim \text{Normal}(0, \sigma^2 t)$$

$$\mathbb{E}[e^{iu \sum_{k=1}^{N_t} J_k}] = e^{\lambda t (\mathbb{E}[e^{iuJ} - 1])}, \quad N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \exp[iubt] \exp[-\frac{1}{2}u^2\sigma^2 t] \exp[\lambda t (\mathbb{E}[e^{iuJ} - 1] - iu\mathbb{E}[J])] \\ &= \exp[iubt] \exp[-\frac{1}{2}u^2\sigma^2 t] \exp[\lambda t (\mathbb{E}[e^{iuJ} - 1 - iuJ])]; \end{aligned}$$

como la distribución de  $J$  es  $F$ , tenemos:

$$= \exp[iubt] \exp[-\frac{1}{2}u^2\sigma^2t] \exp[\lambda t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)F(dx)].$$

Dado que  $t$  es factor común, podemos reescribir la última ecuación como:

$$\mathbb{E}[e^{iuL_t}] = \exp[t(iub - \frac{u^2\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)\lambda F(dx))]. \quad (3.11)$$

De esta manera presentamos una caracterización de la distribución de las variables aleatorias bajo la difusión con saltos de Lévy, por medio de su representación de la fórmula de Lévy-Khintchine.

**Ejemplo 2. Subordinador.** Un subordinador es un proceso de Lévy creciente c.s. De forma equivalente, para que  $L$  sea un subordinador, la tripleta de Lévy debe satisfacer  $\nu(-\infty, 0) = 0$ ,  $c = 0$ ,  $\int_{(0,1)} x\nu(dx) < \infty$  y  $\gamma = b + \int_{(0,1)} x\nu(dx) > 0$ .

Así que, la descomposición de Lévy Itô de un subordinador es:

$$L_t = \gamma t + \int_0^t \int_{(0,\infty)} x\mu^L(ds, dx), \quad (3.12)$$

y la fórmula de Lévy-Khintchine toma la forma de:

$$\mathbb{E}[e^{iuL_t}] = \exp[t(iu\gamma + \int_{(0,\infty)} (e^{iux} - 1)\nu(dx))]. \quad (3.13)$$

El proceso de Poisson y el proceso Gaussiano inverso son dos ejemplos comunes de un subordinador.

**Ejemplo 3. Saltos de variación finita.** Un proceso de Lévy tiene saltos de variación finita si y sólo si  $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ . En este caso, la descomposición de Lévy-Itô de  $L$  toma la forma de:

$$L_t = \gamma t + cW_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x\mu^L(ds, dx) \quad (3.14)$$

y la fórmula de Lévy-Khintchine adquiere la forma:

$$\mathbb{E}[e^{iuL_t}] = \exp[t(iu\gamma - \frac{u^2c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1)\nu(dx))]. \quad (3.15)$$

Además, si  $\nu([-1, 1]) < \infty$ , lo que significa que  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ , entonces  $L$  es un proceso de Poisson compuesto.

**Ejemplo 4. Ladeado espectralmente.** Un proceso de Lévy es llamado negativo espectralmente si  $\nu(0, \infty) = 0$ . similarmente, un proceso de Lévy es llamado positivo espectralmente si  $-L$  es negativo espectralmente.

**Ejemplo 5. Primer momento finito.** Anteriormente vimos que un proceso de Lévy tiene primer momento finito si y sólo si  $\int_{|x| \geq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ . Entonces, la descomposición de Lévy-Itô de  $L$  adquiere la forma:

$$L_t = b't + cW_t + \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \mu^L(ds, dx) - t \int_{\mathbb{R}} x \nu(dx) \right) \quad (3.16)$$

y la fórmula de Lévy-Itô toma la forma:

$$\mathbb{E}[e^{iuL_t}] = \exp\left[t\left(iub' - \frac{u^2c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)\nu(dx)\right)\right], \quad (3.17)$$

donde  $b' = b + \int_{|x| \geq 1} x \nu(dx)$ .

### 3.4. Procesos Lévy estables

Recordemos que una de las principales características del movimiento Browniano es su propiedad de autosimilitud, pero si ahora nos preguntamos qué otros procesos de Lévy comparten esta propiedad, llegamos a la siguiente definición:

**Definición 4.** Se dice que un proceso de Lévy,  $L_t$ , es autosimilar si  $\forall a > 0, \exists b(a) > 0$  tal que:

$$\left( \frac{L_{at}}{b(a)} \right)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (L_t)_{t \geq 0}.$$

Por ejemplo, recordando el caso del citado movimiento Browniano: si  $W$  es un proceso de Wiener, entonces:

$$\forall a > 0, \quad \left( \frac{W_{at}}{\sqrt{a}} \right)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (W_t)_{t \geq 0}.$$

Esto es consecuencia de la definición del movimiento Browniano y de las propiedades de la distribución normal.

Ahora, como la función característica de  $L_t$  tiene la forma  $\phi_{L_t}(\cdot) = \exp[-t\psi(\cdot)]$ , donde  $\psi(\cdot)$  es el exponente característico de la fórmula de Lévy-Khintchine, la propiedad de autosimilitud puede traducirse en:

$$\forall a > 0, \exists b(a) > 0 : \phi_{L_t}(u)^a = \phi_{L_t}(ub(a)), \quad \forall u.$$

Las distribuciones que verifican esta propiedad son llamadas *distribuciones estrictamente estables*.

Lo anterior se puede formalizar en la siguiente definición:

**Definición 5.** Una variable aleatoria  $X \in \mathbb{R}^d$  tiene distribución estable si para toda  $a > 0$  existen  $b(a) > 0$  y  $c(a) \in \mathbb{R}^d$  tales que

$$\phi_X(z)^a = \phi_X(zb(a))e^{ic(a)z}, \forall z \in \mathbb{R}^d. \quad (3.18)$$

Se dice que tiene distribución estrictamente estable si

$$\phi_X(z)^a = \phi_X(zb(a)), \forall z \in \mathbb{R}^d. \quad (3.19)$$

El nombre de estable viene de la siguiente propiedad de *estabilidad bajo suma*: si  $X$  tiene distribución estable y  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  son copias independientes de  $X$ , entonces existe un número positivo  $c_n$  y un vector  $\mathbf{d}$  tales que:

$$X^{(1)} + \dots + X^{(n)} \stackrel{d}{=} c_n X + \mathbf{d}.$$

Esta propiedad se cumple claramente si la distribución de  $X$  es la de un proceso de Lévy autosimilar, para un tiempo dado  $t$ .

Se puede probar que para cada distribución estable existe una constante  $\alpha \in (0, 2]$  tal que en...,  $b(a) = a^{1/\alpha}$ . Esta constante es conocida como el *índice de estabilidad* y a las distribuciones estables con índice  $\alpha$  también se les llama distribuciones  $\alpha$ -estables. Las únicas distribuciones 2-estables son Gaussianas.

Entonces un proceso de Lévy autosimilar tiene, por consiguiente, distribuciones estrictamente estables para todos los tiempos. Por esta razón, tales procesos también son llamados *procesos de Lévy estrictamente estables*. Un proceso de Lévy estrictamente  $\alpha$ -estable satisface:

$$\forall a > 0, \quad \left( \frac{L_{at}}{a^{1/\alpha}} \right)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (L_t)_{t \geq 0}. \quad (3.20)$$

Ahora veremos un resultado muy importante que nos da una forma para la tripleta característica de todos los procesos de Lévy estables y las distribuciones estables:

**Proposición 4.** Una distribución en  $\mathbb{R}^d$  es  $\alpha$ -estable con  $0 < \alpha < 2$  si y sólo si ésta es infinitamente divisible con tripleta característica  $(0, \nu, \gamma)$  y existe una medida finita  $\lambda$  sobre  $S$ , una esfera unitaria de  $\mathbb{R}^d$ , tal que

$$\nu(B) = \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty 1_B(r\xi) \frac{dr}{r^{1+\alpha}}. \quad (3.21)$$

Una distribución sobre  $\mathbb{R}^d$  es  $\alpha$ -estable con  $\alpha = 2$  si y sólo si es Gaussiana.

Para procesos de Lévy y variables estables de valores reales ( $d=1$ ), se puede hacer la representación anterior de manera explícita: si  $X$  es una variable  $\alpha$ -estable con valores reales y  $0 < \alpha < 2$  entonces su medida de Lévy es de la forma:

$$\nu_{LS}(x) = Ax^{-1-\alpha}1_{x>0} + B|x|^{-1-\alpha}1_{x<0} \quad (3.22)$$

para algunas constantes positivas  $A$  y  $B$ . Además, gracias a la fórmula de Lévy-Khintchine, su exponente característico al tiempo 1 tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi_{LS}(u) &= -\frac{1}{2}\sigma^\alpha|u|^\alpha \left\{ 1 - i\beta \operatorname{sgn}(u) \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\} + i\mu u \quad \text{si } \alpha \neq 1, \\ \psi_{LS}(u) &= -\frac{1}{2}\sigma|u| \left\{ 1 + i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}(u) \log|u| \right\} + i\mu u \quad \text{si } \alpha = 1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  y  $\mu \in \mathbb{R}$ . Una distribución en  $\mathbb{R}$  con esta parametrización se denotará por  $LS_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , con  $\sigma$  el parámetro de escala,  $-1 \geq \beta \geq 1$  el parámetro de asimetría y  $\mu$  el parámetro de localización. La forma explícita de la medida muestra que las distribuciones  $\alpha$ -estables en  $\mathbb{R}$  nunca admiten segundo momento, y sólo tienen primer momento cuando  $\alpha > 1$ . La densidad de una ley  $\alpha$ -estable no se conoce de forma cerrada, salvo en los siguientes tres casos:

1. La distribución Gaussiana  $LS_2(\sigma, 0, \mu)$  con densidad

$$\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu)^2/4\sigma^2}.$$

2. La distribución Cauchy  $LS_1(\sigma, 0, \mu)$  con densidad

$$\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)}.$$

3. La distribución de Lévy  $LS_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$  con densidad

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right\} 1_{x>\mu}.$$

### 3.5. Procesos Lévy estable templado y CGMY

Con el propósito de evitar la limitación que representa la varianza infinita por parte de los procesos Lévy estables, y para asegurar la existencia de momentos de todos los órdenes,

se propuso trincar las colas de las distribuciones Lévy estables. Este enfoque se extendió multiplicando a la medida de Lévy con un decrecimiento exponencial en cada plano del eje real. Esto para obtener una formulación más tractable de la función característica del proceso estocástico. En la literatura financiera se ha trabajado con un tipo de proceso "templado" que se ha denominado CGMY, y trataremos de él más adelante.

Primeramente, el proceso Lévy estable templado es también un proceso de Lévy que no tiene componente Gaussiana, es decir, es un proceso de saltos puro, con medida de Lévy  $\nu(dx) = \nu(x)dx$  de la forma:

$$\nu(x) = c_- \frac{e^{-\lambda_-|x|}}{|x|^{1+\alpha}} 1_{x<0} + c_+ \frac{e^{-\lambda_+x}}{|x|^{1+\alpha}} 1_{x>0}, \quad (3.24)$$

con parámetros que satisfacen  $c_- > 0$ ,  $c_+ > 0$ ,  $\lambda_- > 0$ ,  $\lambda_+ > 0$  y  $0 < \alpha < 2$ .

Cabe sólo mencionar que para una mayor generalidad, se pueden permitir diferentes valores de  $\alpha$  para semi-ejes positivo y negativo y entonces hablar de un *proceso estable templado generalizado* con medida de Lévy de la forma

$$\nu(x) = \frac{c_- e^{-\lambda_-|x|}}{|x|^{1+\alpha_-}} 1_{x<0} + \frac{c_+ e^{-\lambda_+x}}{x^{1+\alpha_+}} 1_{x>0}.$$

Los procesos estables templados han sido estudiados por varios autores y bajo nombres diferentes. En particular, la versión cuando  $c_+ = c_-$  y  $\alpha_+ = \alpha_-$  fue estudiada por Carr, Geman, Madan y Yor en [2], bajo el nombre de proceso CGMY con medida de Lévy

$$\nu_{CGMY}(x) = C \left[ \frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} 1_{x<0} + \frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} 1_{x>0} \right]. \quad (3.25)$$

Sustituyendo en la fórmula de Lévy-Khintchine con  $u = 0$  y evaluando la integral, obtenemos el exponente característico

$$\psi_{CGMY}(\xi) = C\Gamma(Y)(M - i\xi)^Y - M^Y + (G + i\xi)^Y - G^Y. \quad (3.26)$$

Donde  $C > 0$ ,  $G \geq 0$ ,  $M \geq 0$  y  $Y < 2$ . El parámetro  $C$  se puede ver como una medida del nivel de actividad, en general. Los parámetros  $G$  y  $M$  controlan el decaimiento exponencial de las colas izquierda y derecha, respectivamente; entonces la distribución es simétrica cuando  $G = M$ .

El proceso KoBoL también es un proceso de Lévy de puros saltos, muy similar al CGMY, con densidad de Lévy

$$\nu_{KoBoL}(x) = Dq|x|^{-1-\alpha}e^{-\lambda|x|}1_{x<0} + Dpx^{-1-\alpha}e^{-\lambda x}1_{x>0}. \quad (3.27)$$



Entonces, su exponente característico queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\psi_{KoBoL}(\xi) &= \frac{1}{2}\sigma^\alpha p(\lambda - i\xi)^\alpha + q(\lambda + i\xi)^\alpha - \lambda^\alpha \\ \Psi_{KoBoL}(\xi) &= \frac{1}{2}\sigma^\alpha p(\lambda - i\xi)^\alpha + q(\lambda + i\xi)^\alpha - \lambda^\alpha - i\xi\alpha\lambda^{\alpha-1}(q - p),\end{aligned}\quad (3.28)$$

para  $0 < \alpha < 1$  y  $1 < \alpha \leq 2$ , respectivamente. El parámetro  $\lambda$  juega el mismo rol que  $G$  y  $M$  en el proceso CGMY, mientras que el resto de los parámetros desempeñan una función similar a la de aquellos en el proceso Lévy estable.

Las principales diferencias entre el CGMY y el KoBoL son que, en el primero, se tiene que  $Y < 2$ , mientras que en el segundo,  $0 < \alpha \leq 2$ . Además, la asimetría del CGMY está controlada por  $G$  y  $M$ , mientras que en el KoBoL por  $p$  y  $q$ .



# Capítulo 4

## Cálculo Fraccionario y Procesos de Lévy

A continuación estableceremos ciertas nociones importantes de procesos estocásticos en los términos correspondientes a cálculo fraccionario.

### 4.1. Procesos de Renovación

A un proceso de renovación lo entendemos como un modelo estocástico con el cual describimos una clase de procesos. Estos procesos son de conteo y los tiempos entre eventos sucesivos son variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas, y además obedecen a una cierta ley de probabilidad dada. Estos tiempos entre eventos son llamados tiempos de espera o tiempos entre arribos.

Esto lo representaremos matemáticamente de la siguiente forma: para un proceso de renovación con tiempos de espera  $T_1, T_2, \dots$ , sea

$$t_0 = 0, \quad t_k = \sum_{j=1}^k T_j, \quad k \geq 1. \quad (4.1)$$

Esto significa que  $t_1 = T_1$  es el tiempo de la primera renovación,  $t_2 = T_1 + T_2$  es el tiempo de la segunda y así sucesivamente. En general,  $t_k$  denota cuando ocurre la  $k$ -ésima renovación.

Para que el proceso esté completamente especificado, es necesario que conozcamos la ley de probabilidad para los tiempos de espera. Es por esto que entonces introducimos la función de densidad para la probabilidad,  $\phi(t)$ , y su correspondiente función de distribución  $\Phi(t)$ :

$$\phi(t) := \frac{d}{dt}\Phi(t), \quad \Phi(t) := P(T \leq t) = \int_0^t \phi(s)ds. \quad (4.2)$$

Cuando la variable representa el tiempo de vida de algún componente o sistema técnico, es común referirse a  $\Phi(t)$  como la probabilidad de falla. Además tenemos que:

$$\Psi(t) := P(T \geq t) = \int_t^\infty \phi(s)ds = 1 - \Phi(t), \quad (4.3)$$

la cual representa la probabilidad de supervivencia. Puesto que  $\Psi(t)$  es la probabilidad de que el sistema falle, entonces  $\Psi(t)$  es la correspondiente probabilidad de que el sistema no falle. En ambos casos es sobre el intervalo  $(0, T]$ .

Una cantidad que nos resultará bastante relevante es la función de conteo,  $N(t)$ , definida como:

$$N(t) := \text{máx} \{k | t_k \leq t, k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (4.4)$$

ésta representa el número efectivo de eventos antes del instante  $t$  o en él mismo. En particular tenemos que  $\Psi(t) = P(N(t) = 0)$ , esto quiere decir que todos los eventos ocurren en un tiempo mayor a  $t$  o, equivalentemente, no hubo fallas en  $(0, t]$ .

Ahora, sean  $F_1(t) = \Phi(t)$ ,  $f_1(t) = \phi(t)$ , y en general:

$$F_k(t) := P(t_k = T_1 + \dots + T_k \leq t), \quad f_k(t) = \frac{d}{dt}F_k(t), k \geq 1. \quad (4.5)$$

Con esto tenemos que  $F_k(t)$  representa la probabilidad de que la suma de los primeros  $k$  tiempos de espera sea menor o igual que  $t$  y  $f_k(t)$  es su respectiva densidad. Entonces, es directo que para cualquier  $k \geq 1$  fijo se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_k(t) = P(t_k = T_1 + \dots + T_k < \infty) = 1. \quad (4.6)$$

Lo que vemos es que la suma de  $k$  variables aleatorias, cada una de las cuales es finita con probabilidad 1, es también finita con probabilidad 1. Para establecer consistencia, fijemos que  $F_0(t) \equiv 1$  y  $f_0(t) = \delta(t)$ , la función delta de Dirac.

También veamos que para  $k \geq 0$  tenemos

$$P(N(t) = k) := P(t_k \leq t, t_{k+1} > t) = \int_0^t f_k(s)\Psi(t-s)ds. \quad (4.7)$$

Es ahora que nos resulta útil introducir la notación simplificada,  $*$ , para la convolución de Laplace entre dos funciones causales bien comportadas  $f(t)$  y  $g(t)$ :

$$\int_0^t f(s)g(t-s)ds = (f * g)(t) = (g * f)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

Sea  $f_k(t)$  la función de densidad de probabilidad de la suma de las  $T_1, \dots, T_k$ , como son independientes e idénticamente distribuidas, cada una tiene la misma densidad  $\phi(t)$ , por el hecho de ser independientes, fácilmente deducimos que  $f_k(t)$  resulta ser la  $k$ -ésima convolución de  $\phi(t)$  consigo misma,

$$f_k(t) = (\phi^{*k})(t). \quad (4.8)$$

Con base en esto, podemos simplificar la expresión en (4.7) como:

$$P(N(t) = k) = (\phi^{*k} * \Psi)(t). \quad (4.9)$$

Debido a la presencia de convoluciones de Laplace, nos resulta apropiado introducir métodos de transformada de Laplace, en el sentido en el que la definimos anteriormente. Entonces expresando a la ecuación (5.2) en su dominio de Laplace, tenemos que:

$$\mathcal{L}[P(N(t) = k); s] = [\tilde{\phi}(s)]^k \tilde{\Psi}(s), \quad (4.10)$$

aquí, haciendo uso de la definición en (4.3) y de las propiedades que exploramos para la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(s) &= \mathcal{L}[1 - \Phi](s) \\ &= \mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\Phi](s) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} dx - \tilde{\Phi}(s) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\tilde{\phi}(s)}{s}, \end{aligned}$$

el segundo término de esta última igualdad se obtiene al aplicar la ecuación (2.29). En resumen, tenemos que la ecuación (5.3) se convierte en:

$$\mathcal{L}[P(N(t) = k); s] = [\tilde{\phi}(s)]^k \frac{1 - \tilde{\phi}(s)}{s} \quad (4.11)$$

## 4.2. Caminatas Aleatorias en Tiempo Continuo

Es bien sabido y estudiado que una de las formas para integrar una caminata aleatoria al tiempo continuo es por medio del movimiento Browniano, pero ésta no es la única. Una vía más general que el movimiento Browniano es en forma de una llamada *caminata aleatoria en tiempo continuo* (CATC). En ella, el número de saltos hechos por el caminante en un intervalo de tiempo  $(0, t)$  es una variable aleatoria.

Consideremos un caminante que comienza en el origen al tiempo  $t = 0$ . Se queda fijo en esa posición hasta el tiempo  $t_1$ , cuando da un salto a  $\Delta x_1$ , la partícula espera ahí hasta el tiempo  $t_2 > t_1$ , cuando entonces salta a una nueva localización,  $\Delta x_1 + \Delta x_2$ , y el proceso entonces es renovado. De este modo, los puntos  $t_1, t_2, \dots$  definen a los tiempos de los eventos de salto. Entonces tenemos que  $\tau_1 = t_1 - 0$ ,  $\tau_2 = t_2 - t_1$ , etc. son los tiempos de espera. En la CATC, los tiempos de espera  $\tau_1, \tau_2, \dots$  y los desplazamientos  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$  son variables aleatorias idénticamente distribuidas y mutuamente independientes.

Los tiempos de espera tienen una función de densidad de probabilidad común, denotada por  $\psi(\tau)$ . Los desplazamientos tienen la suya correspondiente, denotada por  $f(\Delta x)$ . Este tipo de caminata aleatoria es llamada a veces CATC disociada, pues las magnitudes de los saltos son estadísticamente independientes de los tiempos de espera. Este es un proceso de renovación y entonces podemos analizarlo con las herramientas que desarrollamos anteriormente.

En el contexto de los mercados financieros, este concepto de CATC cobra una importancia notable, pues basta notar que no sólo los precios de los activos se pueden modelar como variables aleatorias, sino también los tiempos de espera entre dos transacciones consecutivas varían de manera estocástica.

### 4.2.1. Ecuación de Montroll-Weiss

En el contexto de una CATC, el desplazamiento total del caminante es la suma de sus desplazamientos:

$$x = \sum_{i=1}^n \Delta x_i, \quad (4.12)$$

donde  $n$  es el número aleatorio de saltos en el intervalo  $(0, t)$ . Sea  $P(t; n)$  la probabilidad de  $n$  eventos de salto en un tiempo  $t$ . Nuestro objetivo es calcular  $P(x, t)$ , es decir, la probabilidad de encontrar al caminante en  $x$  al tiempo  $t$ . De manera evidente tenemos que:

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(t; n) P_n(x). \quad (4.13)$$

Aquí,  $P_n(x)$  es la función de densidad de probabilidad de encontrar al caminante en  $x$  después de  $n$  saltos. En esta ecuación vemos que se hace un recorrido en todos los valores que puede tomar  $n$ , y considerando éstos, calculamos la probabilidad de que el caminante esté en  $x$  después de  $n$  saltos y la probabilidad de que en efecto haya esos  $n$  saltos al tiempo  $t$ , además, estas probabilidades son independientes.

Ahora fijémonos en quién es  $P(t; n)$ , dado el contexto que planteamos en la sección anterior. El evento que estamos considerando es el salto, entonces el  $N(t)$  que definimos anteriormente ahora denotará el número de saltos antes del instante  $t$ . Entonces la probabilidad de tener  $n$  eventos de salto en un tiempo  $t$  puede ser vista en términos de:

$$P(t; n) = P(N(t) = n),$$

entonces, recordando la ecuación (5.4), su transformada de Laplace está dada por:

$$\mathcal{L}[P(t; n)](s) = \tilde{P}(s; n) = \left[ \tilde{\psi}(s) \right]^k \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s}, \quad (4.14)$$

donde  $\tilde{\psi}(s)$  es la  $\tilde{\phi}(s)$  que se definió previamente.

Por otro lado, ahora encontraremos la transformada de Fourier de  $P_n(x)$ . Primero recordemos que la distribución de los desplazamientos está dada por  $f(\Delta x)$ . Al tomar en cuenta que son independientes, tenemos entonces que la probabilidad de que el caminante esté en  $x$  después de  $n$  saltos está dada de forma inmediata por:

$$P_n(x) = f^n(\Delta x).$$

Con esto en mente, tenemos que:

$$\mathcal{F}[P_n(x)](\omega) = \hat{P}_n(\omega) = \hat{f}^n(\omega), \quad (4.15)$$

$\hat{f}(\omega)$ , la transformada de Fourier de la densidad de la probabilidad de transición, usualmente es llamada la *función de estructura* de la caminata aleatoria.

Entonces, usando (4.13), (4.14) y (4.15), obtenemos la transformada de Fourier-Laplace de  $P(x, t)$ :

$$\tilde{\hat{P}}(\omega, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \tilde{\psi}(s) \right]^k \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s} \hat{f}^n(\omega),$$

y haciendo la suma llegamos a:

$$\tilde{\hat{P}}(\omega, s) = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\psi}(s) \hat{f}(\omega)}. \quad (4.16)$$

Para justificar la convergencia de esta serie, basta notar que  $|\tilde{\psi}(s) \hat{f}(\omega)| \leq 1$ . A (4.16) se le conoce como la ecuación de Montroll-Weiss y tiene solución exacta en el espacio de Fourier-Laplace, ésta es obtenida a través de:

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int e^{st-i\omega x} \tilde{\hat{P}}(\omega, s) ds d\omega \quad (4.17)$$

las transformadas inversas de Fourier y Laplace.

Recordemos que con supuesto del que partimos tenemos la situación en la que los tiempos de espera y el tamaño de los saltos son independientes. Entonces, en este caso la función de densidad conjunta,  $\varphi$ , se puede factorizar como el producto de las partes espacial y temporal, es decir,  $\varphi(\Delta x, \tau) = f(\Delta x)\psi(\tau)$ . Ésta, por supuesto que debe satisfacer la condición de normalización  $\int \int \varphi(\Delta x, \tau) dx d\tau = 1$ . Además, las respectivas marginales también deben satisfacer esta condición de normalización, es decir,  $\int f(\Delta x) dx = 1$  y  $\int \psi(\tau) d\tau = 1$ . Como consecuencia de esto, podemos reescribir a (4.16) de la siguiente manera:

$$\tilde{P}(\omega, s) = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\varphi}(\omega, s)} \quad (4.18)$$

$P(x, t)$  puede exhibir cuatro diferentes comportamientos universales que sólo dependen del comportamiento asintótico de  $f(\Delta x)$  y  $\psi(t)$  y así, del comportamiento de  $\hat{f}(\omega)$  y  $\tilde{\psi}(s)$  para argumentos pequeños. Estos comportamientos serán descritos más adelante, primero es necesario introducir unos cuantos conceptos.

### 4.2.2. Planteamiento de los vuelos de Lévy

En la literatura física, los procesos de Lévy  $\alpha$ -estables se conocen por el nombre de *vuelos de Lévy* o *difusiones anómalas*. Los vuelos de Lévy son procesos de Lévy con varianza infinita y poseen propiedades de invarianza de escala y autosimilitud.

Ya hemos dicho que la posición de un caminante aleatorio ordinario está definida como la suma de  $n$  desplazamientos independientes idénticamente distribuidos,  $\Delta x_i$ :

$$x_n = \sum_{i=1}^n \Delta x_i, \quad (4.19)$$

en esta ocasión, a la notación de  $x$  le agregamos el subíndice  $n$  sólomente para hacer notar que se trata de la posición después de  $n$  desplazamientos.

Recordemos que cada desplazamiento es obtenido de la misma función de densidad de probabilidad,  $f(\Delta x)$ . En este caso sólo estamos considerando (por simplicidad) funciones de densidad de probabilidad para pasos de uno en uno, simétricos y en una sola dimensión. Definimos la posición escalada del caminante como:

$$Y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}}. \quad (4.20)$$



En el límite  $n \rightarrow \infty$ , de acuerdo con el teorema central del límite, su función de densidad de probabilidad,  $W_Y(y, n)$ , es independiente de  $n$  y es Gaussiana, es decir:

$$n \xrightarrow{\text{lím}} \infty W_Y(y, n) = W_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-y^2/2\sigma^2}, \quad (4.21)$$

donde  $\sigma$  es la varianza de los pasos individuales  $\Delta x_i$ . De la expresión en (4.19), nos podemos percatar de la relación universal de escala para caminatas aleatorias ordinarias:

$$x_n \sim \sqrt{n}. \quad (4.22)$$

Alternativamente, podemos calcular la varianza de  $x_n$  como una función del número de pasos  $n$ :

$$\langle x_n^2 \rangle = \sigma^2 n. \quad (4.23)$$

Combinando las ecuaciones (4.20) y (4.21), tenemos que para  $n$  muy grande, la función de densidad de probabilidad  $W_x(X, n)$  para la posición  $x_n$  es asintóticamente una Gaussiana difusa:

$$W_x(X, n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} W_Y(X/\sqrt{n}). \quad (4.24)$$

Aquí, el hecho de que  $W_x(X, n)$  dependa de la razón  $X/\sqrt{n}$  es justamente otra manera de declarar la relación de escala expresada en (4.22). Sin embargo, notemos que a partir de la relación (4.24), no es un requerimiento la existencia de la varianza de los pasos individuales. Las trayectorias a grandes escalas de las caminatas aleatorias ordinarias se parecen al movimiento Browniano ordinario.

Pero en el caso de los vuelos de Lévy, éstos pertenecen a una clase de caminatas aleatorias para las cuales el teorema central del límite no aplica. Ellos pueden ser definidos de una manera similar a las caminatas aleatorias ordinarias, o sea por medio de la ecuación (4.19). Sin embargo, podemos aplicar una generalización del teorema central del límite para el caso en el que las funciones de densidad de probabilidad de los pasos individuales poseen colas con decaimiento algebraico, tales que el segundo momento es divergente, es decir

$$f(\Delta x) \sim \frac{1}{\Delta x^{1+\beta}}, \quad 0 < \beta < 2. \quad (4.25)$$

La generalización del teorema del límite central establece que, si la posición de un vuelo de Lévy se escala de acuerdo con

$$Y_n = \frac{x_n}{n^{1/\beta}}, \quad (4.26)$$

la variable escalada posee una función de densidad de probabilidad independiente de  $n$  en el límite  $n \rightarrow \infty$ , es decir,

$$n \xrightarrow{\text{lím}} \infty W_{Y,\beta}(y, n) = W_{Y,\beta}(y). \quad (4.27)$$

La densidad límite,  $W_{Y,\beta}$ , es conocida como ley Lévy estable de índice  $\beta$  y ya no es Gaussiana. Ésta puede ser expresada más fácil en el espacio de Fourier:

$$W_{Y,\beta}(y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iky - D|k|^\beta} dk, \quad (4.28)$$

donde  $D$  es alguna constante. Asintóticamente, la densidad límite tiene el mismo comportamiento en leyes de potencias que la distribución de un paso individual,

$$W_{Y,\beta}(y) \sim \frac{1}{|y|^{1+\beta}}. \quad (4.29)$$

Al combinar las ecuaciones (4.26) y (4.28), podemos obtener una expresión explícita para la función de distribución de probabilidad de  $x_n$  en el límite para un número grande de pasos,

$$W_{x,\beta}(X, n) \sim \frac{1}{n^{1/\beta}} W_{Y,\beta}(x/n^{1/\beta}).$$

Esto implica que la posición de un vuelo de Lévy se escala de una forma superdifusiva con el número de pasos:

$$x_n \sim n^{1/\beta}$$

De hecho, geoméricamente hablando, las trayectorias de los vuelos de Lévy se pueden distinguir fácilmente de aquellas del movimiento Browniano ordinario. Más adelante ahondaremos un poco en este punto al ver una simulación.

Ahora nos concentraremos en los diferentes comportamientos que puede exhibir la caminata aleatoria.

### 4.2.3. Difusión ordinaria

El caso más ampliamente estudiado y aplicado en el contexto financiero es cuando tanto la varianza de los pasos espaciales como el valor esperado de los incrementos temporales existen. Entonces las transformadas de Fourier y Laplace de  $f(\Delta x)$  y  $\psi(\tau)$  quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= 1 - \sigma^2 \omega^2 + \mathcal{O}(\omega^4) \\ \tilde{\psi}(s) &= 1 - \eta s + \mathcal{O}(s^2), \end{aligned}$$

donde  $\sigma^2$  y  $\eta$  son constantes. Insertando esto en la ecuación de Montroll-Weiss, (4.16), y utilizando la inversión en (4.17), obtenemos el siguiente comportamiento asintótico

$$P(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/Dt}.$$

Y entonces, la CATC es equivalente al movimiento Browniano para grandes escalas espacio-temporal.

#### 4.2.4. Vuelos de Lévy

Cuando los desplazamientos espaciales son obtenidos de una función de densidad de probabilidad en series de potencias como la de (4.25), la transformada de Fourier para argumentos muy pequeños está dada por:

$$\hat{f}(\omega) = 1 - D_\beta |\omega|^\beta + \mathcal{O}(\omega^2).$$

Cuando lo combinamos con incrementos temporales que poseen un valor esperado finito, el mismo procedimiento descrito en el apartado anterior nos da que:

$$P(x, t) \sim \frac{1}{t^{1/\beta}} L_\beta(x/t^{1/\beta}),$$

donde  $L_\beta$  es una ley Lévy estable de índice  $\beta$ . En consecuencia, una CATC con pasos algebraicamente distribuidos con varianza infinita, es equivalente a vuelos de Lévy ordinarios con un escalamiento superdifusivo con tiempo

$$x(t) \sim t^{1/\beta}.$$

#### 4.2.5. Movimiento Browniano fraccionario

El escenario complementario a lo que vimos en los dos apartados anteriores ocurre cuando combinamos pasos ordinarios -varianza finita- con una ley de potencias en la función de densidad de probabilidad para los incrementos temporales, es decir,

$$\psi(\Delta t) \sim \frac{1}{\Delta^{1+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

En este caso, el tiempo entre incrementos espaciales sucesivos puede ser muy largo, relajando de manera efectiva a la caminata aleatoria. Entonces, las respectivas transformadas son:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &\approx 1 - \sigma^2 \omega^2 \\ \tilde{\psi}(s) &= 1 - D_\alpha s^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \end{aligned}$$

con  $D_\alpha$  alguna constante. Entonces, para la posición de este tipo de caminante obtenemos que

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} E_\alpha(-D_\alpha k^2 t^\alpha) dk,$$

donde la función  $E_\alpha$  es la función Mittag-Leffler. Entonces obtenemos que:

$$P(x, t) \sim \frac{1}{t^{\alpha/2}} G_\alpha(x/t^{\alpha/2}),$$

donde  $G_\alpha$  es una función límite no Gaussiana. A partir de esto podemos obtener la relación de escala siguiente:

$$x(t) \sim t^{\alpha/2}.$$

Como  $\alpha < 1$ , este tipo de procesos son subdifusivos y algunas veces llamados movimiento Browniano fraccionario.

#### 4.2.6. Procesos ambivalentes

La última combinación de tiempos de espera y pasos es en donde tiempos de espera largos compiten e interfieren con pasos de rango largo, es decir, cuando tanto  $\psi(\Delta t)$  como  $f(\Delta x)$  decaen asintóticamente como una ley de potencias:

$$f(\Delta x) \sim \frac{1}{\Delta x^{1+\beta}} \quad 0 < \beta < 2$$

y

$$\psi(\Delta t) \sim \frac{1}{\Delta t^{1+\alpha}} \quad 0 < \alpha < 1.$$

En este caso, las transformadas quedan como:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= 1 - D_\beta |\omega|^\beta + \mathcal{O}(\omega^2) \\ \tilde{\psi}(s) &= 1 - D_\alpha s^\alpha + \mathcal{O}(s^2). \end{aligned}$$

La función de densidad de probabilidad asintótica para la posición del proceso ambivalente se puede expresar de nuevo en términos de una inversión de Fourier y de la función Mittag-Leffler de acuerdo con:

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} E_\alpha(-D_\alpha |k|^\beta t^\alpha) dk.$$

Sin embargo, notemos el término  $|k|^\beta$  en el argumento de  $E_\alpha$ . De esta ecuación se puede extraer la relación de escala

$$x(t) \sim t^{\alpha/\beta}.$$

El cociente de los exponentes  $\alpha/\beta$  se asemeja a la interacción entre sub y superdifusión. Para  $\beta < 2\alpha$ , la CATC ambivalente es efectivamente superdifusiva, mientras que para  $\beta > 2\alpha$  es efectivamente subdifusiva. En el caso en el que  $\beta = 2\alpha$ , el proceso exhibe la misma escala que el movimiento Browniano ordinario, a pesar de la diferencia crucial de los momentos infinitos y de la forma no Gaussiana para la función de densidad de probabilidad  $P(x, t)$ .

### 4.3. La ecuación de Fokker-Planck fraccionaria

Para obtener una versión de la ecuación maestra vamos a partir de la ecuación de Montroll-Weiss (4.16):

$$\tilde{P}(\omega, s) = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\psi}(s)\hat{f}(\omega)}.$$

Recordemos que, por la definición de  $\Psi(t)$  y las propiedades de la transformada de Laplace, habíamos llegado a que

$$\frac{1 - \hat{\psi}(s)}{s} = \tilde{\Psi}(s),$$

entonces podemos reescribir a (4.16) como:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\omega, s) &= \frac{\tilde{\Psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s)\hat{f}(\omega)} \\ \tilde{p}(\omega, s) &= \tilde{\Psi}(s) + \tilde{\psi}(s)\hat{f}(\omega)\tilde{p}(\omega, s). \end{aligned}$$

Dada la expresión en (4.17), podemos invertir la transformada de Fourier-Laplace, y por medio de la convolución en cada espacio obtenemos:

$$p(x, t) = \delta_{x_0}\Psi(t) + \int_0^t \psi(t-u)du \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)p(y, u)dy. \quad (4.30)$$

En esta forma de la también llamada ecuación maestra, tenemos una forma para calcular  $p(x, t)$  al partir sólo del conocimiento de las funciones de densidad de probabilidad de los saltos y los tiempos de espera. Cabe señalar que en la literatura se pueden encontrar formas alternativas de obtenerla. Ahora la reexpresaremos de una forma tal que exhiba el carácter no local y no Markoviano de la CATC:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x, t) = \int_0^t \phi(t-u)du \left[ -p(x, u) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)p(y, u)dy \right], \quad (4.31)$$

aquí, el kernel  $\phi(t)$  ha sido definido a través de su transformada de Laplace

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{s\tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(s)}.$$

Si se cumplen algunas condiciones de escala en la función de estructura y en la función de densidad de probabilidad de los tiempos de espera, la ecuación de evolución en el tiempo para  $p(x, t)$  tiene un límite notable.

Supongamos los siguientes comportamientos de escala en el límite hidrodinámico, i.e. escala de saltos grandes y tiempos grandes de observación:

$$\hat{f}(\omega) \sim 1 - |\omega|^\alpha, \quad \omega \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (4.32)$$

y

$$\tilde{\psi}(s) \sim 1 - s^\beta, \quad s \rightarrow 0, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (4.33)$$

Estas aproximaciones son consistentes con las siguientes expresiones explícitas para las transformadas de Fourier y Laplace:

$$\hat{f}(\omega) = \exp(-|\omega|^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (4.34)$$

y

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{1}{1 + s^\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (4.35)$$

Observemos que la ecuación (4.34) representa la función característica de la distribución Lévy estable de índice  $\alpha$ . Para  $0 < \alpha < 2$ , la distribución decae como  $|x|^{-(\alpha+1)}$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , mientras que para  $\alpha = 2$ , se recupera la distribución Gaussiana.

Si una vez más tomamos en cuenta que

$$\tilde{\Psi}(s) = \frac{1 - \tilde{\psi}(s)}{s}$$

y sustituimos la ecuación (4.35) en esta expresión, obtenemos:

$$\tilde{\Psi}(s) = \frac{1 - \frac{1}{1+s^\beta}}{s} = \frac{\frac{1+s^\beta-1}{1+s^\beta}}{\frac{s}{1}} = \frac{s^\beta-1}{1+s^\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (4.36)$$

entonces, la probabilidad de supervivencia resulta ser:

$$\Psi(t) = E_\beta(-t^\beta), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (4.37)$$

donde

$$E_\beta(-t^\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{\beta n}}{\Gamma(\beta n + 1)}$$

es la función Mittag-Leffler de orden  $\beta$ . Entonces la función de densidad de probabilidad para los tiempos de espera es

$$\psi(t) = -\frac{d}{dt}\Psi(t) = -\frac{d}{dt}E_\beta(-t^\beta), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (4.38)$$

Es sabido que para  $0 < \beta < 1$ , la función Mittag-Leffler es una función completamente monótona de  $t$ , para  $t > 0$ , decreciendo de 1 (en  $t = 0$ ) a 0 como  $t^{-\beta}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como consecuencia, la función de densidad de probabilidad para los tiempos de espera es estrictamente positiva y decrece de forma monótona a cero como  $t^{-(\beta+1)}$ . Para  $\beta = 1$ , la función Mittag-Leffler se reduce a  $\exp(-t)$  y recuperamos la CATC Markoviana.

Ahora bien, a continuación sustituimos las expresiones (4.32) y (4.33) en la ecuación de Montroll-Weiss y obtenemos la siguiente relación en el límite:

$$s^\beta \tilde{p}(\omega, s) + |\omega|^\alpha \tilde{p}(\omega, s) = s^{\beta-1}. \quad (4.39)$$

Al invertir esta última ecuación, obtenemos la ecuación de evolución en el tiempo para  $p(x, t)$  en el límite hidrodinámico. Si  $0 < \beta \leq 1$  y  $0 < \alpha \leq 2$ , tenemos para  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial^\beta p(x, t)}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial |x|^\alpha} + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \delta(x), \quad t > 0. \quad (4.40)$$

Aquí, hemos introducido ya las derivadas fraccionarias  $\partial^\beta/\partial t^\beta$  y  $\partial^\alpha/\partial |x|^\alpha$  a través de las transformadas inversas de Laplace y Fourier de  $s^\beta$  y  $-|\omega|^\alpha$ , respectivamente. El operador para el tiempo es la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden  $\beta$ , mientras que el operador de salto es la derivada fraccionaria de Riesz de orden  $\alpha$ .

### 4.3.1. Una solución para la ecuación de Fokker-Planck fraccionaria

Veremos un caso particular de la ecuación maestra fraccionaria resultante en (4.40), el límite  $\beta \rightarrow 1$ , donde tenemos (en el sentido débil):

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} = \delta(t),$$

entonces la ecuación es equivalente al siguiente problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial |x|^\alpha}, \quad p(x, 0) = \delta(x). \quad (4.41)$$

Este es un problema de Cauchy y puede resolverse haciendo transformada de Fourier con respecto a  $x$  de los dos lados de la ecuación. Después de integrar y aplicar transformada inversa de Fourier, obtenemos:

$$p(x, t) = \frac{1}{t^{1/\alpha}} L_\alpha \left( \frac{x}{t^{1/\alpha}} \right), \quad (4.42)$$

donde  $L_\alpha(u)$  es la función de densidad de probabilidad estandarizada de Lévy:

$$L_\alpha(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqu - |q|^\alpha} dq.$$

El tomar el límite  $\beta \rightarrow 1$  en la ecuación de Fokker-Planck fraccionaria, corresponde a considerar incrementos en el tiempo independientes y recuperamos el análisis que hicimos en la sección 3.2.4, donde las caminatas aleatorias en tiempo continuo que obteníamos eran vuelos de Lévy. De forma más específica las llamaremos *procesos Lévy estables simétricos de parámetro  $\alpha$* .

En un caso general, el problema de Cauchy de la ecuación (4.40) se puede resolver de la misma forma que el caso particular, pero hay una sutileza: para poder dar un significado al problema de Cauchy, el operador de Riemann-Liouville debe ser reemplazado por la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\beta$ . Ahora la solución es

$$p(x, t) = \frac{1}{t^{\beta/\alpha}} W_{\alpha, \beta} \left( \frac{x}{t^{\beta/\alpha}} \right),$$

donde  $W_{\alpha, \beta}(u)$  es la siguiente función de escala:

$$W_{\alpha, \beta}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqu} E_\beta(-|q|^\alpha) dq,$$

donde  $E_\beta$  es la función de Mittag-Leffler de orden  $\beta$  y argumento  $-|q|^\alpha$ . Es decir, la solución es un proceso ambivalente como el que introducimos anteriormente.

## 4.4. Ecuación de calor fraccionaria

Se busca obtener una ecuación de evolución para la función de densidad de probabilidad  $P(x, t)$ , ésta es la que se conoce como ecuación de difusión o de calor, pues explica precisamente cómo se difunde el calor en un medio, a partir de una fuente. Primero ilustraremos cómo a partir de la ecuación de Montroll-Weiss, (4.16), se recupera la ecuación de calor y posteriormente deduciremos la correspondiente en términos de derivadas fraccionarias.

### 4.4.1. Ecuación de calor ordinaria

Para obtener la ecuación, tomaremos el límite continuo de (4.16). Para hacer esto, multiplicaremos a los tiempos de espera por un factor de escala  $r$  y a los saltos por otro factor de escala  $h$ . Entonces, la función de densidad de probabilidad de los tiempos de espera escalados  $r\tau_1, r\tau, 2, \dots$  es  $\psi(r\tau)/r$  y la correspondiente para los saltos escalados  $h\Delta x_1, h\Delta x_2, \dots$ ,



$f(h\Delta x)/h$ . Entonces, se sustituirán las transformadas de Fourier y Laplace de estas funciones en la ecuación de Montroll-Weiss, (4.16) y así obtendremos una probabilidad reescalada:

$$\tilde{P}_{rh}(\omega, s) = \frac{1 - \tilde{\psi}(rs)}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\psi}(r, s)\hat{f}(h\omega)}. \quad (4.43)$$

Cuando se toman los límites  $h \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow 0$  en esta ecuación, se obtiene el límite continuo.

Si tomamos como base una suposición del tipo Markoviana, es decir, un decaimiento exponencial para la distribución de los tiempos de espera, y adicionalmente suponemos que los saltos tienen una distribución Gaussiana:

$$\psi(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}, \quad f(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(\Delta x)^2/(2\sigma)},$$

donde  $\langle\tau\rangle = 1/\mu$  es el tiempo de espera característico y  $\langle\Delta x^2\rangle = \sigma$  es la media cuadrática característica del salto. El decaimiento exponencial de estas distribuciones garantiza que el proceso estocástico no tenga memoria y que en el espacio sea local.

En el límite para  $r$  y  $h$  pequeños tenemos que:

$$\tilde{\psi}(rs) = \frac{1}{1 + rs\langle\tau\rangle} \approx 1 - rs\langle\tau\rangle + \dots$$

y

$$\hat{f}(h\omega) = e^{-\langle\Delta x^2\rangle\omega^2 h^2/2} \approx 1 - \langle\Delta x^2\rangle h^2 \frac{\omega^2}{2} + \dots$$

Usando este hecho, la ecuación (4.43) se reduce a:

$$s\tilde{P}(\omega, s) - 1 = -\xi\omega^2\tilde{P}(\omega, s), \quad (4.44)$$

donde  $\xi = h^2\langle\Delta x^2\rangle/(2r\langle\tau\rangle)$ . Por medio de las propiedades de las transformadas de Fourier y Laplace para las derivadas, que introdujimos anteriormente:

$$\mathcal{L}[\partial_t P] = s\tilde{P}(x, s) - \delta(x), \quad \mathcal{F}[\partial_x^2 P] = -\omega^2\hat{P}(\omega, t)$$

con  $P(x, 0) = \delta(x)$ . Con esto y la inversión de las transformadas de Fourier y Laplace, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \xi \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \delta(x), \quad (4.45)$$

la cual es la ecuación de calor usual. Debemos hacer notar que para que este límite esté bien definido, el cociente  $h^2/r$  se supone finito en el límite  $r, h \rightarrow 0$ .

### 4.4.2. Caso fraccionario

Ahora incorporaremos funciones de distribución de probabilidad más anchas tanto para los tiempos de espera como para los saltos, es decir, contrario al caso anterior, supondremos que  $\psi$  y  $f$  tienen un decaimiento asintótico algebraico de la forma

$$\psi \sim \tau^{-(\beta+1)}, \quad f \sim |\Delta x|^{-(\alpha+1)},$$

observemos que para  $0 < \beta < 1$ ,  $\langle \tau \rangle$  diverge, es decir que no hay un tiempo de espera característico. De manera similar, para  $\alpha < n$ ,  $\langle |x|^n \rangle$  diverge, lo cual indica que no hay una escala característica. Del comportamiento asintótico de  $x$  y  $t$ , se sigue que para  $r$  y  $s$  pequeños, las transformadas de Fourier y Laplace de las funciones de distribución de probabilidad escaladas para los tiempos de espera y los saltos se comportan como:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(rs) &= 1 - c_1(rs)^\beta + \dots, \\ \hat{f}(h\omega) &= 1 - c_2(h|\omega|)^\alpha + \dots, \end{aligned}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Sustituyendo esto en la ecuación (4.43), tenemos que, en el límite cuando  $r, h \rightarrow 0$ ,

$$s^\beta \tilde{P}(\omega, s) - s^{\beta-1} = -\xi |\omega|^\alpha \tilde{P}(\omega, s), \quad (4.46)$$

donde  $\xi = c_2 h^\alpha / (c_1 r^\beta)$  es una constante finita.

Ahora sólo queda invertir las transformadas de Fourier y Laplace en esta ecuación, la cual es una generalización fraccionaria de la ecuación de calor (4.45). Recordemos que por las propiedades de Laplace y Fourier para la derivada fraccionaria podemos obtener lo siguiente:

$$\mathcal{L} \left[ {}^C D_t^\beta P \right] = s^\beta \tilde{P}(x, s) - s^{\beta-1} \delta(x),$$

lo cual es satisfecho por la derivada fraccionaria  ${}^C D_t^\beta$  de orden  $0 < \beta < 1$ . Además

$$\mathcal{F} [D_{|x|}^\alpha P] = -|\omega|^\alpha \hat{P}(\omega, t),$$

lo cual es satisfecho por la derivada fraccionaria de orden  $0 < \alpha < 2$ . Entonces usando estas dos propiedades en la ecuación (4.46), más la inversión de las transformadas de Fourier y Laplace, obtenemos la ecuación de calor fraccionaria o ecuación de difusión fraccionaria:

$${}^C D_t^\beta P = \xi D_{|x|}^\alpha P. \quad (4.47)$$

Sólo cabe recordar que, como estamos tomando la transformada de Laplace en el tiempo y la de Fourier en el espacio, implica que tenemos a la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo en el tiempo y en el sentido de Wyle en el espacio.

## 4.5. Límite fluido para CATCs

Hay dos límites fluidos muy bien conocidos en este modelo de CATC. Para tiempos de espera con función de distribución cuyo decaimiento es exponencial y función de distribución de saltos Gaussiana, el límite fluido lleva a la ecuación de difusión. Por otro lado, para distribuciones tanto de tiempos de espera como de saltos con decaimiento algebraico, éstas últimas correspondiendo a procesos Lévy estables, el límite fluido lleva a la ecuación de difusión fraccionaria de orden  $\alpha$  en el espacio y orden  $\beta$  en el tiempo.

Partiremos, una vez más, de la ecuación de Montroll-Weiss (4.16). Anteriormente, en la sección 3.1, obtuvimos la función de distribución para la probabilidad de supervivencia correspondiente a los tiempos de espera,  $\Psi$ , recordemos que su correspondiente transformada de Laplace está dada por:

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{s} - \frac{\tilde{\phi}}{s}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Montroll-Weiss:

$$\tilde{P} = \frac{\tilde{\Psi}}{1 - [1 - s\tilde{\Psi}] \hat{f}}. \quad (4.48)$$

Consideraremos  $\Psi(t) = E_\beta(-t^\beta)$ , donde  $E_\beta$  es la función Mittag-Leffler, para la cual tenemos la siguiente propiedad:

$$\mathcal{L} \left[ t^{n\beta} E_\beta^{(n)}(\pm at^\beta) \right] = \frac{n! s^{\beta-1}}{(s^\beta \mp a)^{n+1}}, \quad \text{Re}(s) > |a|, \quad (4.49)$$

donde  $E_\beta^n(z) = \frac{d^n}{dz^n} E_\beta(z)$ . Utilizando esta última ecuación para representar a  $\tilde{\Psi}(t)$  es necesario sustituir en ella  $n = 0$  y  $a = 1$ , con esto obtenemos:

$$\mathcal{L} [E_\beta(-t^\beta)] = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + 1}.$$

Podemos sustituir esta representación de  $\tilde{\Psi}$  en la forma de la ecuación Montroll-Weiss (4.48):

$$\begin{aligned}
\tilde{\hat{P}} &= \frac{\frac{s^{\beta-1}}{s^{\beta}+1}}{1 - \left[1 - \frac{s^{\beta-1}}{s^{\beta}+1}\right] \hat{f}} \\
&= \frac{\frac{s^{\beta-1}}{s^{\beta}+1}}{1 - \left[\frac{s^{\beta}+1-s^{\beta}}{s^{\beta}+1}\right] \hat{f}} \\
&= \frac{\frac{s^{\beta-1}}{s^{\beta}+1}}{\frac{s^{\beta}+1-\hat{f}}{s^{\beta}+1}} \\
&= \frac{s^{\beta-1}}{s^{\beta} + 1 - \hat{f}}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Utilizando las definiciones de la derivada de Caputo en el tiempo y su transformada de Laplace, las cuales vimos anteriormente, la ecuación (4.50) con  $P(x, t = 0) = \delta(x)$  arroja

$${}^C D_t^\beta \hat{P}(\omega, t) = [\hat{f} - 1] \hat{P}. \tag{4.51}$$

El uso de la función Mittag-Leffler nos permitió la inversión exacta de la transformada de Laplace en términos de la derivada fraccionaria en el tiempo, cabe aclarar que esto no es posible para una función de distribución general para los tiempos de espera. Sin embargo, en el límite fluido lo que importa es el decaimiento asintótico de la función de distribución de probabilidad de supervivencia. En consecuencia, cualquier distribución que exhiba el mismo decaimiento algebraico que la función Mittag-Leffler, es decir  $\phi \sim t^{-(\beta+1)}$ , conducirá a la ecuación (4.51) en el límite fluido. Un hecho muy importante acerca de la función Mittag-Leffler es que su elección nos lleva directamente a la ecuación fraccionaria en el tiempo sin la necesidad de tomar un límite asintótico en él ( $s \rightarrow 0$ ). Observemos además que, como se puede esperar, ya que  $E_1(z) = e^z$ , la inversión también es exacta en el caso Markoviano  $\beta = 1$ .

En el espacio de Fourier, el límite fluido a gran escala macroscópica corresponde a  $\omega \rightarrow 0$ . En este caso, aproximando  $\hat{f}(\omega) = e^{\Lambda(\omega)} \approx 1 + \Lambda(\omega) + \dots$  y sustituyendo para  $\hat{f}$  en la ecuación (4.51) se tiene que

$${}^C D_t^\beta \hat{P}(\omega, t) = \Lambda \hat{P}, \tag{4.52}$$

donde  $\Lambda$  es el exponente característico de  $f$ , la distribución de probabilidad de los saltos. La ecuación (4.52) es una ecuación de transporte macroscópica que describe, en el límite fluido para  $\omega$  pequeña, la dinámica de una CATC con una función de distribución de probabilidad general para los saltos, cuya función característica es  $\hat{f} = e^\Lambda$ .

Aunque en el presente trabajo se utilizará otro camino para resolver este tipo de ecuación, en un caso general se puede usar la ecuación (4.49) junto con la definición de transformada de Laplace para la derivada de Caputo para mostrar de una manera casi inmediata que la solución de (4.52) con condición inicial  $P_0(x) = P(x, t = 0)$  es

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) P_0(y) dy$$

donde la función de Green o propagador,  $G$ , está dada por

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} E_{\beta}(t^{\beta} \Lambda(\omega)) d\omega.$$

Ahora bien, si queremos detallar un poco más la ecuación (4.52) es necesario especificar la forma de la función de distribución de probabilidad de los saltos,  $f$ . Hacemos la suposición de que esta función pertenece a la clase de distribuciones infinitamente divisibles. Entonces, como es de esperar, el logaritmo de la correspondiente función característica,  $\hat{f}$ , está dado por la representación de Lévy-Khintchine y así,  $\Lambda$  no es más que el exponente característico (3.2) que presentamos en la sección 2.1, evaluado en  $\omega$ . Sustituyendo esto en (4.52) y tomando la transformada inversa de Fourier obtenemos

$${}_0^C D_t^{\beta} P = -b \partial_x P + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_x^2 P + \int_{-\infty}^{\infty} [P(x - y, t) - P(x, t) + y 1_{|y| < 1} \partial_x P] \nu(dy). \quad (4.53)$$

Esta última expresión corresponde a la ecuación de transporte macroscópico que describe el límite fluido, en el continuo, de una CATC con una función de distribución de saltos general  $f$ , caracterizada por una densidad de Lévy general,  $\nu$ .

Antes de obtener las ecuaciones correspondientes para procesos Lévy estables y Lévy estables templados, vamos a recuperar la ecuación de calor. En el caso en que la distribución de los saltos es normal,  $\Lambda = \frac{\sigma^2}{2} k^2$ , con esto:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^{\beta} \hat{P}(\omega, t) &= \frac{\sigma^2}{2} \omega^2 \hat{P}(\omega, t) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (ik)^2 \hat{P}(\omega, t) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \mathcal{F} [{}_{-\infty} D_x^2 P(x, t)] \\ &= \frac{\sigma^2}{2} {}_{-\infty} D_x^2 P(x, t). \end{aligned}$$

Con  $\beta = 1$  obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x, t),$$

que corresponde a la ecuación de calor.

### 4.5.1. Ecuación de difusión fraccionaria para procesos Lévy estables y templados

Ahora nos concentraremos en dos tipos específicos de procesos de Lévy y obtendremos sus correspondientes ecuaciones de transporte macroscópico a partir de la ecuación general (4.53).

Primero veremos el caso del proceso Lévy estable. Este tipo de proceso de Lévy fue estudiado en el capítulo previo, ya hemos visto la forma tanto de la densidad de Lévy correspondiente, (3.22), como del exponente característico de este proceso, (3.23).

Para obtener la ecuación, sólo hay que sustituir la forma del exponente característico  $\Lambda$ , por la del término (3.23), en la expresión (4.52)<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\beta \hat{P}(k, t) &= \left( ibk - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 - c|k|^\alpha \left\{ 1 + i\theta \operatorname{sign}(k) \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\} \right) \hat{P}(k, t) \\ &= b(ik)^1 \hat{P}(k, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 (ik)^2 \hat{P}(k, t) - c \left[ 1 + i\operatorname{sign}(k) \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] |k|^\alpha \hat{P}(k, t) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Usando las definiciones de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville por la izquierda (2.14) y por la derecha, (2.15), además de las propiedades de sus transformadas de Fourier (2.26), obtenemos la siguiente ecuación fraccionaria de difusión:

$${}_0^C D_t^\beta P(x, t) = -b\partial_x P(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_x^2 P(x, t) + c[l_{-\infty} D_x^\alpha + r_x D_\infty^\alpha] P(x, t), \quad (4.56)$$

donde

$$l = \frac{1 - \theta}{2 \cos(\alpha\pi/2)}, \quad r = -\frac{1 + \theta}{2 \cos(\alpha\pi/2)}.$$

Ahora haremos el mismo procedimiento para un proceso de Lévy estable templado con parámetros iguales, es decir el proceso CGMY. Recordemos que en el capítulo anterior

---

<sup>1</sup>Para evitar confusiones entre el orden de la derivada fraccionaria y el parámetro de asimetría del proceso estable, cambiaremos la notación estándar  $LS_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  por  $LS_\alpha(\sigma, \theta, b)$

mostramos que su densidad de Lévy está dada por la expresión (3.25) y el exponente característico,  $\Lambda$ , que sustituiremos en la ecuación (4.52), está dado en (3.26). Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\beta \hat{P}(k, t) &= [C\Gamma(Y)(M - ik)^Y - M^Y + (G + ik)^Y - G^Y] \hat{P}(k, t) \\
&= C\Gamma(Y)(M - ik)^Y \hat{P}(k, t) + (G + ik)^Y \hat{P}(k, t) - (M^Y + G^Y) \hat{P}(k, t) \\
&= C\Gamma(Y) \mathcal{F} [e_{-\infty}^{-Mx} D_x^Y e^{Mx} P(x, t)] + \mathcal{F} [e_x^{Gx} D_\infty^Y e^{-Gx} P(x, t)] - (M^Y + G^Y) \mathcal{F} [P(x, t)] \\
{}_0^C D_t^\beta P(x, t) &= C\Gamma(Y) (e_{-\infty}^{-Mx} D_x^Y e^{Mx}) P(x, t) + (e_x^{Gx} D_\infty^Y e^{-Gx}) P(x, t) - (M^Y + G^Y) P(x, t). \quad (4.57)
\end{aligned}$$

El tercer renglón se obtiene usando las propiedades de la transformada de Fourier para derivadas fraccionarias y la última igualdad se obtiene al aplicar directamente la transformada inversa de Fourier.

Ahora que obtuvimos una expresión para la ecuación de difusión fraccionaria que describe el comportamiento de la distribución de un proceso de Lévy estable templado, del tipo CGMY, debemos obtener una forma para encontrar la solución de esta ecuación, lo que nos dará una aproximación a la distribución del proceso, la cual es bien sabido que no se conoce de forma cerrada. Una vez que, por medio de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias aproximemos tal distribución, ésta nos servirá para que, utilizando la fórmula de Samuelson, encontremos el valor de una opción.





# Capítulo 5

## Fórmula de Samuelson para procesos de Lévy

Comenzaremos este capítulo con el planteamiento de un caso más amplio de modelos financieros de valuación: aquellos en los que el supuesto Browniano se sustituye por un proceso de Lévy más general. Posteriormente usaremos la fórmula de Samuelson para valuar contingentes cuyo activo subyacente sigue una dinámica descrita a través de un proceso de Lévy.

### 5.1. Procesos de Lévy en los modelos de valuación

Para entender cómo han sido incorporados los procesos de Lévy en los modelos de valuación, principalmente de derivados, recordaremos primero cómo se construyen las perturbaciones Gaussianas en el contexto de Black-Scholes.

Para encontrar el precio libre de arbitraje (justo) de los instrumentos financieros que derivan su valor del precio de un activo subyacente  $S_t$ , es necesario expresar la dinámica de  $S_t$  bajo la medida de riesgo neutral o medida martingala equivalente. Por ejemplo, en el modelo de Black-Scholes, esto significa que la caminata aleatoria que sigue  $S_t$ , bajo tal medida es:

$$d(\ln S_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t^{\mathbb{Q}} \quad (5.1)$$

donde  $\sigma > 0$ ,  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo y  $dB_t^{\mathbb{Q}}$  es el incremento del movimiento Browniano, se enfatiza que es bajo la medida libre de riesgo por medio del superíndice  $\mathbb{Q}$ .

Sin embargo, debido al pobre funcionamiento del modelo de Black-Scholes, mucha de la literatura financiera reciente propone reemplazar las perturbaciones Brownianas con un

proceso de Lévy, de modo que:

$$d(\ln S_t) = \mu dt + dL_t^{\mathbb{P}} \quad (5.2)$$

donde, por  $dL_t^{\mathbb{P}}$  denotamos los incrementos de un proceso de Lévy bajo la medida física o histórica  $\mathbb{P}$ . La valuación de instrumentos se lleva a cabo bajo una medida martingala equivalente escogida, que no será única debido a la presencia de los saltos que el proceso de Lévy introduce.

Para propósitos de valuación de instrumentos financieros, se supone que, bajo la medida de riesgo neutral, el precio del activo sigue un proceso de Lévy geométrico

$$d(\ln S_t) = (r - \nu)dt + dL_t \quad (5.3)$$

con solución

$$S_T = S_t e^{(r-\nu)(T-t)} + \int_t^T dL_s, \quad (5.4)$$

donde  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo,  $\nu$  es un ajuste de convexidad de modo que  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T] = e^{r(T-t)}S_t$ , y  $dL_t$  es el incremento de un proceso de Lévy bajo la medida martingala equivalente.

Una vez que ya tenemos la forma de describir la dinámica del proceso de precios del activo subyacente,  $S_t$ , cuya aleatoriedad proviene de un proceso de Lévy, para poner precio a un derivado sobre éste, es necesario echar mano de una herramienta más general que Black-Scholes.

## 5.2. Fórmula de Samuelson

Supongamos un modelo financiero de un periodo, es decir, se tiene un activo con valor  $S_T$  al final del periodo y valor inicial  $S_0$ , y también se tiene un bono de precio unitario con rendimiento  $e^{rT}$ . Sea  $g(S_T)$  el valor de un derivado del tipo europeo al tiempo de ejercicio.

**Teorema 3.** *El precio  $p(g)$  de un derivado  $g(S_T)$  está dado por*

$$p(g) = e^{-rT} E^{\mathbb{P}} \left[ g \left( \frac{S_T}{E^{\mathbb{P}}(S_T)} S_0 e^{rT} \right) \right], \quad (5.5)$$

donde  $E^{\mathbb{P}}[\cdot]$  es la esperanza bajo la medida física y la distribución de  $S_T$  es cualquiera.

Es importante señalar que al permitir para  $S_T$  cualquier distribución, se abre la puerta para poner precio a activos cuya dinámica de la trayectoria está especificada por un caso más general que el movimiento Browniano, quedando este como un caso particular como veremos a continuación.

### 5.2.1. Un ejemplo

Como caso particular obtenemos la fórmula de Black-Scholes si suponemos el modelo lognormal:

$$\begin{aligned} p(g) &= e^{-rT} E^{\mathbb{P}} \left[ g \left( \frac{S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}}{S_0 e^{\mu T}} S_0 e^{rT} \right) \right] \\ &= e^{-rT} E^{\mathbb{P}} \left[ g \left( S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} \right) \right], \end{aligned}$$

supongamos además que queremos valorar una opción de compra, i.e.  $g(S_T) = (S_T - K)_+$

$$\begin{aligned} &= e^{-rT} E^{\mathbb{P}} \left[ \left( S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} - K \right)_+ \right] \\ &= S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2). \end{aligned}$$

**Observación 1.** *La esperanza será con respecto a la distribución obtenida a partir de la ecuación obtenida para el límite fluido, es decir, la probabilidad de transición. Cabe señalar que ya hemos obtenido una expresión fraccionaria para ésta en un caso de caminata aleatoria general. Esto nos será de mucha utilidad dado que lo único que conoceremos de  $S_T$  es que tiene una dinámica de puros saltos que tiene desplazamientos Lévy estables templados.*

### 5.2.2. La fórmula de Samuelson en el caso de un proceso de Lévy

En [1] se obtiene una expresión para el precio de una opción de compra, ésta es general en el sentido en el que es aplicable para todo proceso de Lévy.

La idea también tiene como base el modelo Lévy geométrico, de la forma  $S_t = S_0 e^{X_t}$ , donde  $X_t$  es un proceso de Lévy. Si para dicho proceso existe la transformada de Laplace, al sustituir  $s$  por  $iu$  en la fórmula de Lévy-Khintchine obtenemos

$$E(\exp(sX_t)) = \exp(\phi(s)t),$$

donde  $\phi$  está dada por

$$\phi(s) = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + sb - \int_{|x| \geq 1} (1 - e^{-sx}) \nu(dx) - \int_{|x| < 1} (1 - e^{-sx} - sx) \nu(dx). \quad (5.6)$$

Así, podemos conocer cuál es el valor esperado del precio del activo:

$$\begin{aligned} E(S_T) &= E(S_0 \exp(X_T)) \\ &= S_0 E(\exp(X_T)) \\ &= S_0 \exp(T\phi(1)). \end{aligned}$$

Con lo anterior tenemos que

$$\frac{E(S_T)}{S_0} = \exp(T\phi(1))$$

y entonces, la opción de compra se ejerce si  $e^{-T\phi(1)}S_T > e^{-rT}K$ , donde  $K$  es el precio de ejercicio. Esto es equivalente a pedir que  $X_T > (\phi(1) - r)T - \ln \frac{S_0}{K}$ . Para no cargar notación, en lo subsecuente se usará  $y = (\phi(1) - r)T - \ln \frac{S_0}{K}$ .

Con esto se puede ver que

$$E\left(e^{-T\phi(1)}S_T 1_{e^{-T\phi(1)}S_T > e^{-rT}K}\right) = e^{-T\phi(1)}S_0 \int_y^\infty e^x F_{X_T}(dx),$$

donde  $F_{X_T}$  es la distribución de  $X_T$ , la cual puede ser fácil de simular en este caso en el que  $X_T$  es un proceso de Lévy.

Justo como en el caso de Black-Scholes, es posible conseguir un precio único para la opción de compra europea. Este precio está dado por:

$$\begin{aligned} C(K, T) &= E\left(\left(e^{-T\phi(1)}S_T - e^{-rT}K\right) 1_{e^{-T\phi(1)}S_T > e^{-rT}K}\right) \\ &= S_0 e^{-T\phi(1)} \int_y^\infty e^x F_{X_T}(dx) - e^{-rT}K \mathbb{P}(X_T > y). \end{aligned} \quad (5.7)$$

En el presente trabajo, en lugar de simular la distribución de  $X_T$ , utilizaremos la distribución que se obtiene como solución numérica de la ecuación fraccionaria correspondiente.

### 5.3. Valuación de opciones para procesos CGMY

Ahora procederemos a calcular los precios de opciones europeas en un modelo Lévy exponencial conducido por un proceso estable templado del tipo CGMY, es decir que para  $S_t = S_0 e^{X_t}$ ,  $X$  es un proceso CGMY. En este momento ya estamos familiarizados con el exponente característico de este proceso, dado por la expresión (3.26). Entonces, la forma de la función  $\phi(u)$  correspondiente está dada por:

$$\phi(u) = C\Gamma(Y)(M - u)^Y - M^Y + (G + u)^Y - G^Y,$$

de este modo,

$$\phi(1) = C\Gamma(Y)(M - 1)^Y - M^Y + (G + 1)^Y - G^Y.$$

En este caso, (5.7) se convierte en

$$C(K, T) = S_0 e^{-T\phi(1)} \int_y^\infty e^x F_{X_T}(dx) - e^{-rT}K \mathbb{P}(L_{CGMY} > y). \quad (5.8)$$

En este marco bajo el cual  $X_T$  es un proceso del tipo CGMY, el objetivo es aproximar su distribución  $F_{X_T}$  al resolver la ecuación diferencial fraccionaria (4.57) y con ello, evaluar tanto la integral del primer término de la expresión (5.8), como la probabilidad de que  $X_T$  sea mayor que el valor  $y$ .

### 5.3.1. Ejemplo numérico

Supongamos un proceso CGMY con los siguientes parámetros:  $C = 0.5$ ,  $G = 2$ ,  $M = 3.5$  y  $Y = 0.5$ . Encontraremos el valor de la opción de compra europea por medio de la ecuación (5.8) y compararemos el resultado con aquel obtenido en [12], en donde obtienen el valor de una opción de venta europea desarrollando un método de Monte Carlo<sup>1</sup>.

Con los valores asignados a los parámetros del proceso, y tomando  $\beta = 1$ , la ecuación (4.57) toma la siguiente forma:

$$\partial_t P(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( e^{-3.5x} {}_{\infty}D_x^{1/2} e^{3.5x} P(x, t) \right) + e^{2x} {}_x D_{\infty}^{1/2} e^{-2x} P(x, t) - \left( \sqrt{3.5} + \sqrt{2} \right) P(x, t) \quad (5.9)$$

El primer paso es resolver numéricamente esta ecuación para poder obtener una aproximación de la distribución y con ella calcular  $\mathbb{P}(X_T > (\phi(1) - r)T - \ln(\frac{S_0}{K}))$  y aproximar la integral  $\int_{(\phi(1)-r)T - \ln(\frac{S_0}{K})}^{\infty} e^x F_{X_T}(dx)$ . Todas las variables son conocidas, pues suponemos  $r = 4\%$ ,  $T = 0.25$ ,  $K = 100$  y  $S_0 = 100^2$ .

En el apéndice A se encuentra el desarrollo del método numérico de diferencias finitas para derivadas fraccionarias que se utilizó para resolver, y en el apéndice B, el correspondiente programa realizado en `Matlab`.

El perfeccionamiento del método sigue en desarrollo y los resultados se mostrarán en el artículo que se publicará posteriormente ya que la consistencia de las soluciones con respecto a las distribuciones iniciales sigue siendo objeto de estudio.

---

<sup>1</sup>La comparación se hará por medio de la paridad put-call.

<sup>2</sup>Seguimos usando los mismos valores que [12]



# Capítulo 6

## Conclusiones

En el presente trabajo se estudiaron 3 temas por separado para después conjuntarlos.

Por un lado revisamos los resultados más importantes sobre cálculo fraccionario, comenzando por definiciones y conceptos básicos para su desarrollo y culminando con aquellos que nos fueron de mucha utilidad para el planteamiento de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Por otra parte, examinamos teoría básica y muy importante que apoyo el desarrollo de los procesos de Lévy y constituye el soporte para su aplicación, sobre todo en materia de finanzas; nos interesamos principalmente en estudiar y entender las características de los procesos de Lévy estables, ya que su uso ha sido muy apreciado tanto en aplicaciones físicas como financieras. Además, examinamos la fórmula de Samuelson, que constituye una herramienta importante en la valuación de instrumentos financieros, principalmente de derivados como las opciones; su flexibilidad brindó una característica apreciable y muy importante para considerar procesos de Lévy en la dinámica del activo subyacente.

Parte central del trabajo resultó ser el estudio de ciertos modelos, que se desarrollaron a partir del estudio de fenómenos físicos, desde la perspectiva del cálculo fraccionario y haciendo uso de los procesos de Lévy. Éstos presentan cierta tractabilidad que nos ayudó para trasladarlos al marco financiero. Gracias a la ecuación de Montroll-Weiss, llegamos a una ecuación diferencial fraccionaria que nos brinda una aproximación para la distribución de la transición de un proceso. Gracias a esto y a la flexibilidad de la fórmula de Samuelson es que se puede idear un método alternativo para valuar opciones cuyo subyacente siguió una dinámica correspondiente a un proceso de Lévy estable templado (CGMY). Evidentemente, esto puede ser extendido al estudio de casos con otro tipo de procesos de Lévy, en un trabajo posterior que se desprende del presente, examinaremos el caso de un proceso de difusión con saltos.

Otro rubro, que si bien no constituía el punto central del presente trabajo, pero es de vital importancia en la aplicación, es el estudio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias,

los métodos numéricos para su resolución y la estabilidad de sus soluciones. Estudiamos un poco sobre un método de diferencias finitas para el caso fraccionario, el cual puede verse como una generalización del usual. Esto desde luego que no es de extrañar, dado que las derivadas fraccionarias mismas resultan ser una generalización de las ordinarias.

Otro punto de estudio colateral que fue motivado por el presente trabajo fue la valuación de opciones con el método de Monte Carlo bajo la presencia de procesos de Lévy estables templados. Esto fue con el fin de contar con otra forma de valuación adicional a la fórmula de Samuelson y que constituyera un punto de comparación. La esencia de un algoritmo de este estilo es aproximar la trayectoria de un subordinador estable sustituyendo a éste con un subordinador Poisson compuesto, para reemplazar a los saltos pequeños con su esperanza; aproximar la trayectoria del cambio de tiempo para el proceso CGMY usando el método de aceptación y rechazo; por último se aproxima al proceso CGMY con el cambio de tiempo más una subordinación Browniana.



# Apéndice A

## Método numérico

Ahora seguiremos a [7] para presentar el método de diferencias finitas para resolver numéricamente la ecuación diferencial fraccionaria presentada en 5.9, para  $\alpha = 1/2$  y  $\beta = 1$ , presentaremos atención especial a los términos fraccionarios.

El método propuesto tiene como base el uso de la representación de Grúndwald-Letnikov de las derivadas fraccionarias

$${}_a D_x^\alpha P = h \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\Delta_h^\alpha P}{h^\alpha}, \quad {}_x D_b^\alpha P = h \lim_{h \rightarrow 0} \frac{+\Delta_h^\alpha P}{h^\alpha}, \quad (\text{A.1})$$

donde los operadores fraccionarios de diferencias finitas  $\mp \Delta_h^\alpha P$  se definen como

$$\mp \Delta_h^\alpha P(x) = \sum_{j=0}^{m_\mp} w_j^{(\alpha)} P(x \mp jh), \quad (\text{A.2})$$

donde  $m_- = [(x - a)/h]$ ,  $m_+ = [(b - x)/h]$ , y  $[\cdot]$  denota la parte entera. Se puede demostrar que, para funciones bien portadas, esta definición es equivalente a la de Riemann-Liouville. Los coeficientes  $w_j^{(\alpha)}$  pueden generarse recursivamente usando

$$w_0^{(\alpha)} = 1, \quad w_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right) w_{k-1}^{(\alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{A.3})$$

y, para  $h$  finita, esto nos brinda una aproximación de primer orden para la derivada fraccionaria, i.e.

$${}_a D_x^\alpha - \frac{{}_a \Delta_h^\alpha P}{h^\alpha} = \mathcal{O}(h). \quad (\text{A.4})$$

El dominio de integración,  $x \in (a, b)$  se divide en  $N$  segmentos del mismo tamaño con puntos en la red en  $\{x_k\}$  para  $k = 0, 1, \dots, N$ , con  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$  y  $x_{k+1} - x_k = 1/N = h$ .

El valor de  $P$  en un punto  $x_k$  de la malla estará denotado por  $P_k$ . Con base en la definición de Grünwald-Letnikov, aproximamos las derivadas fraccionarias izquierda y derecha de  $P$  en un punto  $k$  de la red usando

$$[{}_a D_x^\alpha P]_k \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k w_j^{(\alpha)} P_{k-j}, \quad [{}_x D_b^\alpha P]_k \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-k} w_j^{(\alpha)} P_{k+j}. \quad (\text{A.5})$$

Primero se discretizará el término  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-3.5x} {}_a D_x^\alpha e^{3.5x} P(x, t) := \mathcal{I}$ ; esto se hará conforme al esquema forward de diferencias finitas,

$$(\partial_x \mathcal{I})_k = \frac{(\mathcal{I})_{k+1} - (\mathcal{I})_k}{h}. \quad (\text{A.6})$$

Usando la aproximación de Grünwald-Letnikov expuesta en (A.5) obtenemos

$$\mathcal{I}_k = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-3.5x_k}}{h^{(\alpha-1)}} \left[ \sum_{j=0}^{k-1} w_j^{\alpha-1} e^{3.5x_{k-j}} P_{k-j} - e^{3.5x_1} P_1 \sum_{j=0}^{k-1} w_j^{(\alpha-1)} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Con esto, (A.6) se convierte en:

$$(\partial_x \mathcal{I})_k = -h^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} [D_I - B_I]_{kj} e^{3.5x_j} P(x_j, t), \quad (\text{A.8})$$

donde

$$D_I = X_{I2} D_{I2} - X_{I1} D_{I1},$$

y donde

$$\begin{aligned} X_{I1} &= \text{diag} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-3.5x_1}, \dots, \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-3.5x_{N-1}} \right] \\ X_{I2} &= \text{diag} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-3.5x_2}, \dots, \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-3.5x_N} \right] \\ D_{I1} &= \begin{pmatrix} w_0^{(\alpha-1)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ w_1^{(\alpha-1)} & w_0^{(\alpha-1)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{N-2}^{(\alpha-1)} & w_{N-3}^{(\alpha-1)} & \dots & \dots & w_1^{(\alpha-1)} & w_0^{(\alpha-1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$D_{I2} = \begin{pmatrix} 0 & w_0^{(\alpha-1)} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & w_1^{(\alpha-1)} & w_0^{(\alpha-1)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & w_{N-2}^{(\alpha-1)} & w_{N-3}^{(\alpha-1)} & \dots & w_2^{(\alpha-1)} & w_1^{(\alpha-1)} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, las matrices de frontera están dadas por:

$$B_I = X_{I2}B_{I2} - X_{I1}B_{I1},$$

con

$$(B_{I1})_{ij} = (B_{I2})_{ij} = \delta_{j,1}V_{i-1}, \quad V_K = \sum_{j=0}^k w_j^{(\alpha-1)}.$$

Ahora se discretizará  $e^{2x} {}_x D_b^\alpha e^{-2x} P(x, t) := \mathcal{D}$ ; esta vez usando el esquema backward de diferencias finitas:

$$(\partial_x \mathcal{D})_k = \frac{(\mathcal{D})_k - (\mathcal{D})_{k-1}}{h}. \quad (\text{A.9})$$

Usando la aproximación de Grünwald-Letnikov se obtiene

$$\mathcal{D}_k = \frac{e^{2x_k}}{h^{\alpha-1}} \left[ \sum_{j=0}^{N-k-1} w_j^{(\alpha-1)} e^{-2x_{k+j}} P_{k+j} + e^{-2x_{N-1}} P_{N-1} \sum_{j=0}^{N-k} (k+j-N) w_j^{(\alpha-1)} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo esto último en (A.9):

$$(\partial_x \mathcal{D})_k = -h^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} [D_D - B_D]_{kj} e^{-2x_j} P(x_j, t), \quad (\text{A.11})$$

donde

$$D_D = X_{D2}D_{D2} - X_{D1}D_{D1},$$

$$\begin{aligned} X_{D1} &= \text{diag} [e^{2x_1}, \dots, e^{2x_{N-1}}] \\ X_{D2} &= \text{diag} [e^{2x_0}, \dots, e^{2x_{N-2}}], \end{aligned}$$

y además

$$D_{D1} = D'_{I1},$$

$$D_{D2} = \begin{pmatrix} w_1^{(\alpha-1)} & w_2^{(\alpha-1)} & \dots & \dots & \dots & w_{N-1}^{(\alpha-1)} \\ w_0^{(\alpha-1)} & w_1^{(\alpha-1)} & 0 & \dots & \dots & w_{N-2}^{(\alpha-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & w_0^{(\alpha-1)} & w_1^{(\alpha-1)} \end{pmatrix}.$$

Ahora las matrices de frontera están dadas por:

$$B_D = X_{D1}B_{D1} - X_{D2}B_{D2},$$

con

$$(B_{D1})_{ij} = \delta_{j,N-1}W_i, \quad (B_{D2})_{ij} = \delta_{i,1}\delta_{i,j} + \delta_{j,N-1}W_{i-1},$$

$$W_k = \sum_{j=0}^{N-k} (k+j-N)w_j^{(\alpha-1)}.$$

Combinando las ecuaciones (A.8) y (A.11),

$$\partial_t P_k = h^{-\alpha} [MP]_k, \quad (\text{A.12})$$

donde

$$M = (D_I - B_I) + (D_D - B_D). \quad (\text{A.13})$$

Para la evolución en el tiempo se usa el método de promedios ponderados,

$$P_k^{m+1} - P_k^m = uV [MP]_k^{m+1} + u(1-V) [MP]_k^m, \quad (\text{A.14})$$

donde  $u = \Delta t/h^\alpha$ , y  $0 \leq V \leq 1$  es un parámetro de ponderación.

Resolviendo para  $T^{m+1}$ , llegamos a que

$$T_k^{m+1} = [1 - uVM]^{-1} [1 + u(1-V)M] P_k^m e^{-2x_k} e^{3.5x_k}. \quad (\text{A.15})$$

En general, el factor de ponderación  $V$  puede depender de  $\alpha$ . Para  $V = 2 - \alpha$ , se reduce al método implícito para  $\alpha = 1$ , que es el método de elección para ecuaciones de primer orden. Por otro lado, para  $\alpha = 2$ , esto se reduce a un método explícito que tiene propiedades deseables de estabilidad. La elección  $V = \frac{3-\alpha}{2}$  también se reduce a un método totalmente implícito para  $\alpha = 1$ , pero para  $\alpha = 2$  se reduce al método de Crank-Nicholson.

# Apéndice B

## Programa para resolver la EDFP

Código en Matlab para resolver una ecuación diferencial fraccionaria por el método de diferencias finitas.

```
function [dist]=distcgm(alpha)
%Función que aproxima la distribución de transición para un proceso
%CGMY de parámetros C=0.5, G=2, M=3.5 y Y=alpha

%Parámetros iniciales
S0=100;
xinf=0*S0; xsup=1*S0;
Nx=100; Nt=100; h=1/Nx;
dx=(xsup-xinf)/Nx %incrementos de x
T=0.25;
x=xinf:dx:xsup;

dt=T/Nt;
tm=[0:dt:T]; %evolución del tiempo

%Condiciones iniciales
P=zeros(Nx+1,Nt+1);
P(:,1)= [dirac(log(x)-log(100))];

%Primero evaluaremos los coeficientes
```

```
w=zeros(1,Nx+1);
w(1)=1;
for i=2:Nx+1
    w(i)=(1-((alpha + 1)/i))*w(i-1);
end

%Para construir D11
Dl1=zeros(Nx-1,Nx-1);
for i=1:Nx-1
    Dl1(i,1)=w(i);
end
for j=2:Nx-1
    for i=j:1:Nx-1
        Dl1(i,j)=w(i-j+1);
    end
end

%Para construir D12
Dl2=zeros(Nx-1,Nx-1);
for i=1:Nx-1
    Dl2(i,2)=w(i);
end
for j=3:Nx-1
    for i=j-1:1:Nx-1
        Dl2(i,j)=w(i-j+2);
    end
end

%Construimos X11 y X12
VX11=zeros(1,Nx-1);
VX12=zeros(1,Nx-1);
for i=1:Nx-1
    VX11(i)=(pi/2)*exp(-3.5*x(i+1));
    VX12(i)=(pi/2)*exp(-3.5*x(i+2));
end
X11=diag(VX11,0);
X12=diag(VX12,0);
```

```

%Para definir D1 usamos lo anterior
D1=(X12*D12)-(X11*D11);

V=cumsum(w);
%Construcción de B11
B11=zeros(Nx-1,Nx-1);
for i=1:Nx-1
    B11(i,1)=V(i);
end

%Construcción de B12
B12=zeros(Nx-1,Nx-1);
for i=1:Nx-1
    B12(i,1)=V(i);
end

%Construcción de B1
B1=(X12*B12)-(X11*B11);

%Construcción de Dr1
Dr1=D11';

%Construcción de Dr2
Dr2=zeros(Nx-1,Nx-1);
for j=1:Nx-1
    Dr2(1,j)=w(i+1);
end
for j=1:Nx-1
    Dr2(2,j)=w(i);
end
for i=3:Nx-1
    for j=i-1:Nx-1
        Dr2(i,j)=w(j-i+2);
    end
end

%Construimos Xr1 y Xr2
VXr1=zeros(1,Nx-1);

```

```

VXr2=zeros(1,Nx-1);
for i=1:Nx-1
    VXr1(i)=exp(2*x(i+1));
    VXr2(i)=exp(2*x(i));
end
Xr1=diag(VXr1,0);
Xr2=diag(VXr2,0);

%Para definir Dr usamos lo anterior
Dr=(Xr2*Dr2)-(Xr1*Dr1);

%El vector W ayudará a definir las Br's
W=zeros(1,Nx);
for k=1:Nx
    for j=1:(11-(k-1))
        W(k)=sum(j+(k-1)-Nx)*w(j);
    end
end

%Construcción de Br1
Br1=zeros(Nx-1,Nx-1);
for i=1:Nx-1
    Br1(i,Nx-1)=W(i);
end

Br=(Xr1*Br1)-(Xr2);

M=(Dl-B1)+(Dr-Br);
nu=dt/(h^(alpha));
Lambda=0.4;
cte=exp(3.5*x((1:Nx)))*exp(-2*x((1:Nx)))';

for i=2:Nt+1
    P(2:Nx,i)=cte*((1-(nu*Lambda*M))\((1-(nu*(1-Lambda)*M))*P(2:Nx,i-1));
end

plot(x(2:Nx),P(2:Nx,Nt+1))

```



# Bibliografía

- [1] M. Bladt y T.H. Rydberg, *An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions*. Insurance: Mathematics and Economics 22, 1998.
- [2] P. Carr, H. Geman, D. Madan y M.Yor, *The finite structure of asset returns: An empirical investigation*, Journal of Business, 75, 2002.
- [3] A. Cartea y D. del Castillo Negrete, *Fractional Diffusion Models of Option Prices in Markets with Jumps*. Physica A, 374, 2007.
- [4] A. Cartea y D. del Castillo Negrete, *On the Fluid Limit of the Continuous-Time Random Walk with General Lévy Jump Distribution Functions*. Phys. Rev. E Vol. 76, 2007.
- [5] R. Cont y P. Tankov, *Financial Modelling With Jump Processes*. Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [6] D. del Castillo Negrete, *Fractional diffusion in plasma turbulence*. Phys. Plasmas 11, 3854, 2004.
- [7] D. del Castillo Negrete, *Fractional diffusion models of nonlocal transport*. Phys. Plasmas 13, 082308, 2006.
- [8] M. del R. Elizondo Camejo, *Incorporación de factores macroeconómicos en los modelos de valuación de productos derivados*. Tesis de doctorado, México, 2009.
- [9] R. Metzler y J. Klafter, Phys. Rep., 339, 2000.
- [10] E.W. Montroll y G.H. Weiss, J. Math. Physics, 6, 167, 1965.
- [11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.

- [12] J. Poirrot y P. Tankov, *Monte Carlo option pricing for tempered stable (CGMY) processes*. Asia Pacific Financial Markets, Vol. 13-4, 2006.
- [13] S.G. Samko, A. A. Kilbas y O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [14] K. I. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.