Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Anillos Máx

que para obtener el grado académico de
maestro(a) en ciencias

PRESENTA
ROLANDO GÓMEZ MACEDO

director de tesis
Dr. Hugo Alberto Rincón Mejia

México D. F.
Octubre de 2011

Anillos Máx

Rolando Gómez Macedo
Facultad de Ciencias UNAM

Índice

Introducción

El matemático Reinhold Baer demuestra la existencia de cápsulas inyectiva[1]. De manera natural surge la pregunta ¿dado un anillo, todo módulo tiene cubierta proyectiva? En general este hecho no sucede,[2] así toma sentido el definir el concepto de anillo perfecto.[3] En Álgebra uno de los cometidos es el de clasificar y caracterizar objetos que cumplen cierta propiedad. Los esfuerzos realizados para caracterizar a los anillos perfectos, hasta antes del año de 1960, se resumen en el "Terorema de P Bass"[4] que fue presentado por vez primera en el artículo "Finitistic Dimension and a Homological Generalization of Semi-Primary Rings" por Hyman Bass, en este teorema se demuestra que si R es un anillo perfecto, entonces R no contiene subconjuntos infinitos de elementos ortogonales y todo módulo no nulo contiene un submódulo máximo. Bass conjetura en este artículo que con estas dos propiedades era posible caracterizar a los anillos perfectos. Algunos matemáticas en su afán por demostrar esta conjetura estudiaron anillos en los que todo módulo no nulo contiene un submódulo máximo. Así nace el concepto de anillos máx.[5]

Una vez introducido el concepto de anillo máx se presentarán algunos resultados que caracterizan a este tipo de anillos y se verificará la veracidad de la conjetura de Bass para anillos perfectos en anillos conmutativos.

El concepto de dimensión de Krull es ampliamente estudiado en la memorias [GR], presentadas por Gordon y Robson. En estas memorias se demuestra que todo módulo noetheriano tiene dimensión de Krull, en general el inverso del enunciado no es cierto. Así se define un anillo alto como aquel en el que todo módulo don dimensión de Krull es un módulo noetheriano. El capítulo 2 esta dedicado al estudio de este tipo de anillos y a encontrar la relación que existe entre los anillos máx y los anillos altos.

[1] Ver [BaR].
[2] Ver Teorema 1.1.6.
[3] Ver Definición 1.1.7.
[4] Ver [AF], 28.4 Theorem [Bass] pág. 315.
[5] Ver Definición 1.1.13.

Las matemáticas, son bellas, importantes
y están conectadas, tanto con la ciencia,
como con la cultura.
Hyman Bass
1959 -

***Capítulo* 1**

Anillos Máx.

A lo largo de este trabajo, los anillos que se consideran son por omisión anillos asociativos con uno, y los R-módulos serán considerados R-módulos izquierdos, salvo que se indique lo contrario. Para aligerar notación, cuando no haya lugar a confusión, al referirnos a un R-módulo izquierdo simplemente se le llamará *módulo izquierdo*, omitiendo el símbolo R que indica el anillo que actúa sobre los grupos. Para denotar que N es un R-submódulo de M se usará el símbolo $N \leqslant M$ y, si no hay confusión en el contexto, simplemente se dirá que N es un *submódulo* de M. Si $X \subseteq M$, al *submódulo izquierdo generado* por X se le denotará por $\langle X \rangle$. El *radical* de un módulo M estará indicado por $Rad(M)$ y el *zoclo* por $Soc(M)$. Además como es costumbre el *radical de Jacobson* de un anillo se denotará por $J(R)$.
Se suponen conocidos los módulos *proyectivos* e *inyectivos*, también el manejo de *anillos semisimples*, *anillos artinianos*, *anillos noetherianos* y *anillos perfectos*; así como el conocimiento de algunos resultados de *anillos regulares* en el sentido de Von Neumann y de V*-anillos*. Para dar fluidez y claridad a la exposición cuando sea usado un resultado concerniente a estos temas, éste será mencionado y se dará la referencia exacta de donde se puede encontrar una demostración.

§1.1 Teorema P de Bass y anillos máx.

Sin duda la Teoría de Grupos es una fuente de ejemplos e ideas para la Teoría de Módulos. Una muestra de ello se puede encontrar en el articulo “Abelian Groups that are direct summands of every containing abelian group”, presentado por Reinhold Baer en el año de 1940 y en el cual se generaliza a la categoría de módulos el concepto de inyectividad, concepto que ya era conocido para grupos abelianos, es decir para $\mathbb{Z}$-módulos. En este artículo se presenta el “Criterio de Baer”[1] y se muestra la existencia de cápsulas inyectivas para todo módulo en la categoría de R-módulos, dado el anillo R.
Una técnica ampliamente usada en Álgebra, es la de dualizar conceptos, ejemplo de ello se puede encontrar en los conceptos de inyectividad y proyectividad; también en los conceptos de clase generadora y clase cogeneradora, por mencionar algunos. Así que una vez demostrada la existencia de cápsulas inyectivas, era natural preguntarse sobre la existencia de cubiertas proyectivas. En particular, si R es un anillo semisimple todo módulo izquierdo es proyectivo[2] y en consecuencia todo módulo en la categoría de R-módulos, es una cubierta proyectiva de si mismo. Es decir, la clase de anillos con al propiedad de que todo módulo tiene cubierta proyectiva es no vacía. Esta situación no sucede en general, así que como primera tarea se presentará un ejemplo de una clase de anillos cuyas categorías poseen módulos que no tienen cubiertas proyectivas. Para ello se introducirán algunos conceptos.

[1] Ver [Ka] Secc. 5.7, 5.7.1 Baer´s Criterion pág. 130.
[2] Ver [Ka] 8.2.2 Corollary (e) pág. 196.

Definición 1.1.1. *Sea D es un dominio entero. Se dice que un módulo M es un* ***módulo D-divisible***, *si para todo $d \in D - \{0\}$ y todo $m \in M$ existe $n \in M$ tal que $dn = m$.*

En adelante si no existe posibilidad de confusión en la exposición, si D es un dominio entero y M es un módulo D-divisible, simplemente se dirá que M es un *módulo divisible*.

Ejemplo 1.1.2. Si D es un dominio entero con campo de cocientes Q, entonces

1) Q es un módulo D-divisible.
2) Q es un módulo Q-divisible.
3) En general, si K es un campo y D es un subanillo de K, entonces K es un módulo D-divisible.

Ejemplo 1.1.3. Para el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ y G un grupo abeliano se tiene que[3]

1) G es un p-grupo $\mathbb{Z}$-divisible de torsión si y sólo si $G \simeq \bigoplus_{dim_{\mathbb{Z}_p}(Soc(G))} \mathbb{Z}_{p^\infty}$.
2) G es un grupo divisible libre de torsión si y sólo si $G \simeq \bigoplus_{dim_{\mathbb{Q}}(G)} \mathbb{Q}$.

Si recordamos que todo grupo abeliano de torsión se puede descomponer como suma directa de sus partes p-primarias,[4] además de que la parte de torsión de un grupo divisible es divisible y aunamos el hecho de que todo subgrupo divisible de un grupo es un sumando directo del grupo,[5] entonces podemos combinar los dos incisos del ejemplo 1.1.3 para obtener que un Z-módulo G es divisible si y sólo si

$$G \simeq \left(\bigoplus_{p \in \mathfrak{P}} \left(\bigoplus_{dim_{\mathbb{Z}_p}(Soc(T_p(G)))} \mathbb{Z}_{p^\infty} \right) \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{dim_{\mathbb{Q}}(G/T(G))} \mathbb{Q} \right).$$

Donde $\mathfrak{P}$ denota al conjunto de los números primos positivos, $T(G)$ denota la parte de torsión G y $T_p(G)$ es la parte de p-primaria de la parte de torsión de G.

Los siguientes resultados se verifican directamente.

Proposición 1.1.4. *Sean D un dominio entero, M un módulo divisible y N un submódulo de M. Entonces M/N es divisible.*

Proposición 1.1.5. *Sea D es un dominio entero. Entonces D es un módulo divisible si y sólo si D es campo.*

Teorema 1.1.6. *Sea D un dominio entero y Q el campo de cocientes de D. Entonces Q no tiene cubierta proyectiva.*

Demostración. Supongamos que Q posee una cubierta proyectiva $P \xrightarrow{\varphi} Q$ con núcleo K. Dado que P es un módulo proyectivo, existe S un submódulo máximo de P,[6] y como K es un submódulo superfluo en P, se tiene que $K \subseteq S$. Ahora, como $P/K \simeq Q$, por el Teorema de Correspondencia[7] se verifica que $T = \varphi(S)$ es un submódulo máximo de Q. Y como Q es el campo de cocientes de D, entonces Q es un módulo divisible. Así es posible concluir de la Proposición 1.1.4 que Q/T es un módulo divisible, que además es simple, pues T es un submódulo máximo de Q.

[3] Ver [Fu1] Cap. IV. Divisible Groups 23. The structure of divisible groups. pág. 104 y 105.
[4] Ver [Ro] Theorem 10.7 (Primary Descomposition) pág 311.
[5] Ver [Ro] Corollary 10.24 pág 321.
[6] Ver [AF] 17.14 Proposition pág. 198.
[7] Ver Teorema 3.1.3.

Siendo Q/T un módulo simple y D un módulo libre, existe un epimorfismo $\psi : D \longrightarrow Q/T$ con núcleo E. Dado que D no es campo, de la Proposición 1.1.5 se concluye que D no es un módulo divisible, así debe ser $E \neq 0$. Por otro lado, como Q/T es un módulo divisible y $Q/T \simeq D/E$, entonces D/E es un módulo divisible. Luego, para $m \in E - \{0\}$ y $\overline{1} \in D/E$ existe $\overline{x} \in$ tal que $m\overline{x} = \overline{1}$, pero entonces

$$\overline{1} = m\overline{x} = \overline{mx} \underset{m \in E}{=} \overline{0}.$$

Lo que es contradictorio. En consecuencia debe ser que Q no posee cubierta proyectiva. ∎

El discurso que se ha presentado hasta el momento ha sido para motivar la siguiente

Definición 1.1.7. *Se dice que un anillo R es un* ***anillo perfecto izquierdo*** *si todo módulo izquierdo tiene cubierta proyectiva. El concepto de anillo perfectos derecho se define de la manera habitual y así se dice que un anillo es perfecto si es un anillo perfecto izquierdo y un anillo perfecto derecho.*

Mucho del trabajo hecho sobre anillos perfectos, hasta aproximadamente 1960, está resumido en el "Teorema P de Bass", que fue presentado por vez primera en el artículo "Finitistic Dimension and a Homological Generalization of Semi-Primary Rings" por Hyman Bass y del que se presenta la siguiente versión[8]

Teorema 1.1.8 *(Teorema P de Bass). Para un anillo R, son equivalentes:*

1) *R es un anillo perfecto izquierdo.*
2) *$R/J(R)$ es un anillo semisimple y todo R-módulo izquierdo no nulo contiene un submódulo máximo.*
3) *$R/J(R)$ es un anillo semisimple y $J(R)$ es un ideal T-nilpotente izquierdo.*
4) *Todo módulo izquierdo que es plano es un módulo proyectivo.*
5) *R satisface la condición de finitud para cadenas descendentes de ideales principales derechos.*
6) *R no contiene conjuntos ortogonales infinitos de elementos idempotentes y todo módulo derecho no nulo contiene un submódulo mínimo.*

Por la importancia que representa para el desarrollo del material subsecuente es conveniente recordar la siguiente

Definición 1.1.9. *Sea R un anillo e I un ideal izquierdo de R. Se dice que I es un* ***ideal T-nilpotente izquierdo***[9] *si para toda sucesión $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de I existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_1 r_2 \cdots r_n = 0$. El concepto de ideal T-nilpotente derecho se define en la forma habitual y así un ideal se dice T-nilpotente si es un ideal T-nilpotente izquierdo y un ideal T-nilpotente derecho.*

Ejemplo 1.1.10.

1) Si R es un anillo e I es un ideal nilpotente de R, entonces I es un ideal T-nilpotente.
2) Si R es un anillo e I es un ideal T-nilpotente de R, entonces I es un nil ideal.
3) Para un anillo noetheriano se cumple que todo nil ideal es un ideal nilpotente[10]. En consecuencia en los anillo noetherianos los conceptos de nil ideal, ideal T-nilpotente e ideal nilpotente coinciden.

[8] Ver [AF] 28.4 Theorem [Bass] pág. 315.

[9] En algunos artículos es común que a los ideales T-nilpotentes izquierdos se les llame ideales desvanecientes izquierdos (left vanishing). También es de hacer notar que algunos textos la definición de ideal T-nilpotente derecho coincide con la definición presentada aquí de ideal T-nilpotente izquierdo, nosotros trabajaremos con la definición dada en [AF] pág 314.

[10] Ver [Ka], 9.3.7 Corollary, pág. 222.

Ejemplo 1.1.11. Todo anillo semisimple es un anillo perfecto. Más aún del inciso (3) del Teorema 1.1.8, podemos concluir que todo anillo artiniano izquierdo es un anillo perfecto izquierdo pues $R/J(R)$ es semisimple[11] y $J(R)$ es nilpotente.[12]

Por el inciso (6) del Teorema 1.1.8, se verifica que si R es un anillo perfecto izquierdo, entonces R no contiene subconjuntos infinitos de elementos ortogonales idempotentes y además por el inciso (2) del mismo teorema sabemos que todo módulo izquierdo no nulo contiene un submódulo máximo. Hyman Bass pensaba que con éstas dos propiedades se podría caracterizar a los anillos perfectos, y así, en el artículo [BaH] Bass hace la siguiente

***Conjetura 1.1.12**. [H. Bass] Un anillo R es un anillo perfecto izquierdo si y sólo si R no contiene subconjuntos infinitos de elementos ortogonales idempotentes y todo módulo izquierdo no nulo contiene un submódulo máximo.*

Inspirados en esta conjetura, algunos matemáticos en su afán por demostrarla, se dieron a la tarea de estudiar anillo que tiene la propiedad de que todo módulo izquierdo no nulo contiene un submódulo máximo. Es como surge la necesidad de la siguiente

***Definición 1.1.13**. Se dice que un anillo R es un **anillo máx izquierdo**, si todo módulo izquierdo no nulo contiene un submódulo máximo. Los conceptos de anillo máx derecho y anillo máx se definen de manera habitual.*

Aunque es poco común algunos autores se refieren a los anillos máx como *Anillos de Bass*. Aún menos común pero posible, es encontrar literatura en la cual a los anillos máx se les llama *Anillos de Hamser*[13] esto último en alusión al matemático Ross M. Hamsher quien en el artículo "Commutative rings over which every module has a maximal submodule" muestra que la Conjetura 1.1.12 es parcialmente cierta, verificando que es válida para anillos conmutativos.
Ahora para terminar esta sección y por considerar interesantes las técnicas que se usan para demostrar la conjetura 1.1.12 para anillos conmutativos noetherianos se reproducirán algunas de ellas. Para comenzar esta tarea se presenta la siguiente

***Proposición 1.1.14**. Si D es un dominio entero y M un módulo inyectivo, entonces M es divisible.*

Demostración. Sea $d \in D - \{0\}$ y $m \in M$. Como D es dominio entero y $d \neq 0$, el morfismo de módulos $\varphi : dD \longrightarrow D$, dado por $\varphi(dx) = x$, es un isomorfismo de módulos. Luego entonces dD es un módulo libre y $\{d\}$ es una base de dD. Así la asignación $d \mapsto m$ se puede extender a un morfismo de módulos $\psi : dD \longrightarrow M$.
Por otro lado se tiene el morfismo inclusión $i : dD \hookrightarrow D$, y dado que M es un módulo inyectivo, existe un morfismo de módulos $\phi : D \longrightarrow M$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, hook] & dD \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\psi"'] & D \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

De donde es claro que

$$m = \psi(d) = \phi(i(d)) = \phi(d) = d\phi(1).$$

Por lo tanto M es un módulo divisible. ■

[11] Ver [He] Theorem 1.4.4 pág 34. Se debe tener en cuenta que en este texto un anillo es semisimple si $J(R) = 0$, ver definición en la página 16.

[12] Ver [He] Theorem 1.3.1 pág 20.

[13] Principalmente es común encontrar el concepto de anillo de Hamser en artículos escritos por Carl Faith.

***Proposición 1.1.15**. Si D es un dominio entero que no es campo, entonces D no es un anillo máx.*

Demostración. Supongamos que existe D dominio entero que no es campo y sin embargo D es un anillo máx.
Sea M un módulo inyectivo[14] y N un submódulo máximo de M. Como M es inyectivo, de las Proposiciones 1.1.14 y 1.1.4 se concluye que M/N es un módulo divisible y dado que N es un submódulo máximo de M, entonces M/N es un módulo divisible y simple. A partir de este paso es posible proceder como en la última parte de la demostración de la Proposición 1.1.6[15] y llegar a una contradicción. Por lo tanto D no es un anillo máx. ■

Observación 1.1.16. Recordemos que dado un anillo R y un módulo M, el conjunto de submódulos de M forman una retícula modular.[16] Donde si L y N son submódulos de M, el ínfimo y el supremo están dados respectivamente por

1) $L \wedge N := L \cap N$ y
2) $L \vee N := \langle L \cup N \rangle$.

Ahora, si I es un ideal de un anillo R y M es un R/I-módulo izquierdo, definiendo para $r \in R$ y $m \in M$

$$rm := \bar{r}m, \tag{1.1}$$

se verifica que M adquiere estructura de R-módulo izquierdo; es decir la estructura de un R/I-modulo izquierdo induce una estructura de R-módulo izquierdo en M. En adelante cuando se tenga M un R/I-módulo izquierdo y se hable de la estructura de M como R-módulo izquierdo, se debe pensar que la estructura de R-módulo izquierdo es la inducida por la operación definida en (1).

Hecha esta aclaración debe ser clara la siguiente

***Proposición 1.1.17**. Sean I un ideal de un anillo R y M un R/I-módulo izquierdo. Entonces la retícula de R/I-submódulos de M es isomorfa a la retícula de R-submódulo de M.*

***Corolario 1.1.18**. Si R es un anillo máx izquierdo e I es un ideal de R, entonces R/I es un anillo máx izquierdo.*

***Corolario 1.1.19**. Si R es un anillo máx conmutativo, entonces todo ideal primo de R es un ideal máximo de R.*

Demostración. Sea P un ideal primo de R. Por el Corolario 1.1.18 R/P es un anillo máx, que además es dominio entero, pues P es primo. Luego por la Proposición 1.1.15 debe ser que R/P es campo y en consecuencia P es un ideal máximo de R. ■

Notemos que el inciso (6) del Teorema 1.1.8 sugiere dualizar el concepto de anillo máx como sigue

***Definición 1.1.20**. Se dice que un anillo R es un **anillo semiartiniano izquierdo** si todo módulo izquierdo no nulo contiene un submódulo mínimo. Los conceptos de anillo semiartiniano derecho y anillo semiartiniano se definen de manera habitual.*

Ejemplo 1.1.21. Todo anillo perfecto derecho es un anillo semiartiniano izquierdo. En particular como todo anillo artiniano derecho es un anillo perfecto derecho, entonces todo anillo artiniano derecho es un anillo semiartiniano izquierdo.

---

[14] Ver [AF] 18.10 Theorem pág. 207.
[15] Ver página 3 primer párrafo.
[16] Ver [AF], Secc. 0.5 Posets and Lattices pág 3.

Definición 1.1.22. *Recuérdese que dado un anillo R y un módulo M el zoclo de M está dado por*

$$Soc(M) = \sum_{\substack{S \leqslant M \\ S \ simple}} S,$$

y $Soc(M) = 0$ si M no tiene submódulos simples.
Este concepto se generaliza para un módulo M y un ordinal α como sigue

1) $Soc_0(M) = \{0\}$.
2) *Si α es un ordinal, entonces se define $Soc_{\alpha+1}(M)$ como el único submódulo de M tal que*
$$Soc_{\alpha+1}(M)/Soc_\alpha(M) = Soc\left(M/Soc_\alpha(M)\right).$$
3) *Si α es un ordinal límite, entonces*
$$Soc_\alpha(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} Soc_\beta(M).$$

Observación 1.1.23. Si R es un anillo y M es un módulo, en particular M es un conjunto. Y dado que la sucesión de zoclos, es una sucesión creciente de submódulos de M, entonces existe un ordinal α tal que

$$Soc_\alpha(M) = Soc_{\alpha+1}(M).$$

Definición 1.1.24. *Si M es un módulo, al menor ordinal α tal que $Soc_\alpha(M) = Soc_{\alpha+1}(M)$ se le llama la **Longitud de Loewy** del módulo M y se denota por $L(M)$.*

Ejemplo 1.1.25. Si R es un anillo, entonces R es un anillo semisimple si y sólo si $L(M) = 1$ para todo módulo no nulo M.[17]

Proposición 1.1.26. *Sean R un anillo, M y N módulos y $\varphi \in Hom(M, N)$. Entonces*

$$f(Soc_\alpha(M)) \subseteq Soc_\alpha(N),$$

para todo ordinal α.

Demostración. La demostración se hará por inducción transfinita sobre el ordinal α.
Para $\alpha = 0$ el resultado se sigue trivialmente, dado que $\varphi(0) = (0)$.
Entonces supongamos que el resultado es válido para todo ordinal $\beta < \alpha$. Y consideremos dos casos

1) Si α es un ordinal límite por hipótesis de inducción
$$\varphi(Soc_\beta(M)) \subseteq Soc_\beta(M) \ para \ todo \ \beta < \alpha,$$
y así
$$\varphi(Soc_\alpha(M)) \underset{Def\ 1.1.22\ (3)}{=} \varphi\left(\bigcup_{\beta<\alpha} Soc_\beta(M)\right) = \bigcup_{\beta<\alpha} \varphi(Soc_\beta(M)) \underset{H.I.}{\subseteq} \bigcup_{\beta<\alpha} Soc_\beta(N) \underset{Def\ 1.1.22\ (3)}{=} Soc_\alpha(N).$$
2) Si α no es un ordinal límite, entonces $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. Por hipótesis de inducción
$$\varphi(Soc_\beta(M)) \subseteq Soc_\beta(N).$$
Si $m + Soc_\beta(M), n + Soc_\beta(M) \in M/Soc_\beta(M)$ y $m + Soc_\beta(M) = n + Soc_\beta(M)$, al aplicar la hipótesis de inducción se obtiene que
$$\varphi(m) - \varphi(n) = \varphi(m - n) \in Soc_\beta(N).$$
Es decir la asignación
$$\overline{\varphi} : M/Soc_\beta(M) \longrightarrow N/Soc_\beta(N),$$

[17] Ver [Ka] 8.2.2 Corollary pág. 196.

dada por $\overline{\varphi}(m + Soc_\beta(M)) = \varphi(m) + Soc_\beta(N)$, es un homomorfismo de módulos.
Ahora notemos que si S es un submódulo simple de $M/Soc_\beta(M)$, entonces $\overline{\varphi}(S) = \{0 + Soc_\beta(M)\}$ o $\overline{\varphi}(S)$ es un submódulo simple de $N/Soc_\beta(N)$. De donde se sigue que

$$\overline{\varphi}(Soc_\alpha(M)/Soc_\beta(M)) \underset{Def\ 1.1.22\ (2)}{=} \overline{\varphi}(Soc(M/Soc_\beta(M))) \subseteq Soc(N/Soc_\beta(N)) \underset{Def\ 1.1.22\ (2)}{=} Soc_\alpha(N)/Soc_\beta(N),$$

y así

$$\varphi(Soc_\alpha(M)) \subseteq \varphi(Soc_\alpha(M)) + Soc_\beta(N) \subseteq Soc_\alpha(N) + Soc_\beta(N) = Soc_\alpha(N). \blacksquare$$

Proposición 1.1.27. *Sean R un anillo semiartiniano y M módulo izquierdo. Entonces $L(M) \leqslant L(R)$.*

Demostración. Sean M un módulo no nulo, $m \in M$ y $\varphi_m : R \to M$ el morfismo dado por $f_m(r) = rm$. Por la Proposición 1.1.26

$$Soc_{L(R)}(R)m = \varphi_m(Soc_{L(R)}(R)) \underset{Prop\ 1.1.26}{\subseteq} Soc_{L(R)}(M). \tag{1.2}$$

Y en consecuencia

$$M = RM \underset{R\ Semiartiniano}{=} Soc_{L(R)}(R)M \underset{Ec\ 1.2}{\subseteq} Soc_{L(R)}(M).$$

Por lo tanto $M = Soc_{L(R)}(M)$ y así $L(M) \leqslant L(R)$. $\blacksquare$

El concepto de semiartinidad se puede extrapolar al caso particular de un módulo como sigue

Definición 1.1.28. *Un módulo M se dice que es un **módulo semiartiniano** si todo cociente no nulo de M contiene un submódulo mínimo.*

Esta definición tiene consecuencias inmediatas.

Proposición 1.1.29. *Sea M un módulo. Entonces M es un módulo semiartiniano si y sólo si $Soc_{L(M)} = M$.*

Proposición 1.1.30. *Si M es un módulo semiartiniano izquierdo y N es un submódulo, entonces M/N es un módulo semiartiniano izquierdo.*

Por no estar dentro de las expectativas de este trabajo el siguiente resultado se presenta sin demostración

Teorema 1.1.31. *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes*[18]

1) *R es un anillo semiartiniano izquierdo.*
2) *Todo módulo izquierdo es un módulo semiartiniano.*
3) *R es un módulo izquierdo semiartiniano.*

Definición 1.1.32. *Sean R un anillo, M un módulo y $X \subseteq M$ con $X \neq \varnothing$, se define el **anulador** de X como*

$$An(X) = \{r \in R \mid rm = 0 \ \ \forall m \in X\}.$$

El siguiente resultado es inmediato de la definición anterior.

Proposición 1.1.33. *Sean R un anillo, M un módulo y $X \subseteq M$ con $X \neq \varnothing$. Entonces $An(X)$ es un ideal izquierdo de R.*

Ejemplo 1.1.34. Si R es un anillo e I es un ideal izquierdo de R, entonces $An(R/I) = I$.

[18] Ver [Va] Proposición 1.32 pág. 18

Proposición 1.1.35. *Si R es un anillo conmutativo máx que es noetheriano, entonces R es semiartiniano.*

Demostración. Sean M un R-módulo no nulo y $m \in M - \{0\}$. Consideremos el conjunto de ideales

$$\Lambda = \{An(rm) \subseteq R \mid r \in R - \{0\}\}.$$

Como $An(m) \in \Lambda$, entonces $\Lambda \neq \emptyset$. Y siendo R un anillo noetheriano, existe $s \in R$ tal que $An(sm)$ es máximo en la familia Λ.[19] Ahora se verá que $An(sm)$ es un ideal primo de R. Para ello tomemos $ab \in An(sm)$ y supongamos que $a \notin An(sm)$, es decir $asm \neq 0$ y en consecuencia $as \neq 0$. Por otro lado, si $x \in An(sm)$, entonces

$$x(asm) \underset{R \;\; conmuta}{=} a(xsm) = a0 = 0.$$

Así $An(sm) \subseteq An(asm)$, y dado que $An(sm)$ es máximo en Λ, se concluye que $An(sm) = An(asm)$. Ahora, como $b(asm) = 0$, entonces $b \in An(sm)$. Por lo tanto $An(sm)$ es un ideal primo de R. Y al ser R un anillo conmutativo y máx, del Corolario 1.1.19 se tiene que $An(sm)$ es un ideal máximo de R.
Ahora es suficiente hacer notar que $R/An(sm) \cong Rsm \subseteq M$ y que al ser $An(sm)$ un ideal máximo de R, entonces $R/An(sm)$ es un módulo simple. Por lo tanto R es semiartiniano. ∎

Observación 1.1.36. En general todo anillo artiniano es un anillo noetheriano.[20] Sin embargo el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ es un ejemplo de un anillo noetheriano que no es artiniano. De hecho, si D es un dominio entero noetheriano que no es campo, entonces D no es un anillo artiniano. Para justificar lo anterior, nótese que en caso contrario, al suponer D artiniano, D debe ser un anillo perfecto (ver Ejemplo 1.1.11) y en consecuencia un anillo máx, contradiciendo la Proposición 1.1.15.

Proposición 1.1.37. *Si M es un módulo noetheriano y semiartiniano, entonces M es un módulo artiniano.*

Demostración. Como M es un módulo semiartiniano, la sucesión de zoclos de M es estrictamente creciente, es decir

$$Soc_1(M) \subsetneq Soc_2(M) \subsetneq Soc_3(M) \subsetneq \cdots \subsetneq Soc_n(M) \subsetneq \cdots$$

y siendo M un módulo noetheriano, entonces $L(M) \in \mathbb{N}$.
Se procede a demostrar el enunciado, por inducción sobre $L(M)$.
Si $L(M) = 0$, entonces M es el módulo trivial y así M es artiniano. Para $L(M) = 1$, se tiene que M es un módulo semisimple y noetheriano, y entonces M es un módulo artiniano.[21] Ahora supongamos que la proposición es válida para todo módulo N tal que $L(N) = k$ y sea M un módulo semiartiniano y noetheriano tal que $L(M) = M$. Nótese que $L(M/Soc_1(M)) = k$, que $M/Soc_1(M)$ es un módulo noetheriano[22] y por la Proposición 1.1.30 un módulo semiartiniano. Entonces por hipótesis de inducción $M/Soc_1(M)$ es un módulo artiniano. Por otro lado $Soc_1(M)$ es un módulo semisimple y noetheriano, y en consecuencia es un módulo artiniano.[21] Y así al considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Soc_1(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/Soc_1(M) \longrightarrow 0,$$

se cumple que M es una extensión de módulos artinianos, de donde se posible concluir que M es artiniano.[23] ∎

---

[19] Ver Teorema 3.1.7
[20] Ver [AF] 15.20 Theorem [Hopkins] pag. 172.
[21] Ver [Ka] 8.1.6 Theorem pág. 192 y 193. Como M es una suma finita de módulos simples aplicar las equivalencias (1), (4) y (5).
[22] Cociente de noetheriano es noetheriano, ver Teorema 3.1.5.
[23] Ver Teorema 3.1.8.

***Corolario 1.1.38**. Sea R es un anillo máx conmutativo. Entonces R es un anillo noetheriano si y sólo si R es artiniano.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Como R es un anillo máx y noetheriano, de la Proposición 1.1.35, se concluye que R es un anillo semiartiniano y así al aplicar la Proposición 1.1.37 se obtiene que R es un anillo artiniano.

$\Leftarrow$) Ver [AF], 15.20 Theorem [Hopkins] página. 172. ∎

***Teorema 1.1.39**. Sea R un anillo máx conmutativo y noetheriano. Son equivalentes para R*

1) R es un anillo perfecto.
2) R es un anillo máx.
3) R es un anillo artiniano.

Demostración.

1 $\Rightarrow$ **2** Se sigue de la definición de anillo máx y del Teorema 1.1.8, inciso (2).
2 $\Rightarrow$ **3** Por el Corolario 1.1.38, R es un anillo artiniano.
3 $\Rightarrow$ **1** Se justifica en el Ejemplo 1.1.11. ∎

La definición de anillo máx izquierdo se puede extrapolar al caso particular de un módulo.

***Definición 1.1.40**. Si R es un anillo y M es un módulo izquierdo, se dice que M es un **módulo máx izquierdo** si todo submódulo no nulo de M contiene un submódulo máximo.*

***Proposición 1.1.41**. Sea R un anillo. Entonces R es un anillo máx izquierdo si y sólo si todo módulo izquierdo no nulo es un módulo máx izquierdo.*

***Proposición 1.1.42**. Sea R un anillo semiartiniano izquierdo y M un modulo izquierdo tal que $L(M)$ no es un ordinal límite. Entonces M es un módulo máx izquierdo.*

Demostración. Como $L(M)$ no es un ordinal límite, entonces $L(M) = \alpha + 1$ para algún ordinal α y así $Soc_\alpha(M) \subsetneq Soc_{L(M)}(M) = M$. Así se tiene que

$$M/Soc_\alpha(M) \underset{Prop\ 1.1.30}{=} Soc_{L(M)}(M)/Soc_\alpha(M) \underset{Def\ 1.1.22\ (2)}{\simeq} Soc(M/Soc_\alpha(M)).$$

Es decir $M/Soc_\alpha(M)$ es un módulo semisimple y entonces existe $N/Soc_\alpha(M)$ submódulo máximo de $M/Soc_\alpha(M)$. Luego por el Teorema de Correspondencia[24] se obtiene que N es un submódulo máximo de M. Por lo tanto M es un módulo máx. ∎

***Corolario 1.1.43**. Sea R es un anillo semiartiniano izquierdo. Entonces R es un anillo máx izquierdo si y sólo si todo módulo izquierdo M tal que $L(M)$ es un ordinal límite, es un módulo máx izquierdo.*

Consecuencia inmediata de la Proposición 1.1.27 se tiene el siguiente

***Corolario 1.1.44**. Si R es un anillo semiartiniano izquierdo y $L(R)$ no es un ordinal finito, entonces R es un anillo máx izquierdo.*

Análogamente a como se definió la sucesión de zoclos (ver Definición 1.1.22) es posible definir la sucesión de radicales de un módulo como sigue

[24] Ver Teorema 3.1.3.

Definición 1.1.45. *Recuérdese que dado un anillo R y un módulo M, el radical de M está dado por*

$$Rad(M) = \bigcap_{\substack{S \leqslant M \\ S \text{ máximo}}} S$$

y $R(M) = M$ si M no tiene submódulos máximos.
Este concepto se generaliza para un módulo M y α un ordinal como sigue

1) $Rad_0(M) = M$.
2) *Si α es un ordinal $Rad_{\alpha+1}(M) = Rad(Rad_\alpha(M))$*
3) *Si α es un ordinal límite, entonces*

$$Rad_\alpha(M) = \bigcap_{\beta<\alpha} Rad_\beta(M).$$

Un argumento análogo al de la Observación 1.1.23 muestra que para todo R-módulo M existe un ordinal α tal que $Rad_\alpha(M) = Rad_{\alpha+1}(M)$.

Definición 1.1.46. *Si M es un módulo, al menor ordinal α tal que $Rad_\alpha(M) = Rad_{\alpha+1}(M)$ se le llama la* **Longitud Dual de Loewy** *del módulo M y se denota por $DL(M)$.*

Proposición 1.1.47. *Sean M un módulo. Entonces M es un módulo máx izquierdo si y sólo si $Rad_{LD(M)} = (0)$.*

Como ya se ha venido mencionando, del Teorema 1.1.8 es claro que todo anillo perfecto izquierdo es un anillo máx izquierdo. Pero como siempre es bueno tener una amplia gama de ejemplos, se presenta la siguiente

Definición 1.1.48. *Un anillo R se dice que es un* **V-anillo izquierdo**[25] *si todo módulo izquierdo simple es inyectivo.*

Teorema 1.1.49. *Para un anillo R, son equivalentes*[26]

1) *R es un V-anillo izquierdo.*
2) *Cada ideal izquierdo de R es intersección de ideales izquierdos máximos de R.*
3) *$Rad(M) = 0$ para todo módulo izquierdo M.*

Consecuencia inmediata del inciso (3) del teorema anterior es el siguiente

Corolario 1.1.50. *Todo V-anillo izquierdo es un anillo máx izquierdo.*

Para terminar la sección se introduce la siguiente

Definición 1.1.51. *Un anillo R se dice que es un* **anillo regular**[27] *si para todo $r \in R$ existe $s \in R$ tal que $r = rsr$.*

Consecuencia inmediata de la anterior definición es la siguiente

Proposición 1.1.52. *Si R es un anillo regular e I es un ideal de R, entonces R/I es un anillo regular.*

[25] El nombre de V-anillo se debe a que este tipo de anillos los introdujo el matemático argentino Orlando E. Villamayor.
[26] Ver [Fa] 7.32 A Definition and Proposition. pág. 356.
[27] En algunos textos se les encuentra como anillo regulares en el sentido de Von Neumann o anillos Von Neumann regular, dado que el matemático John von Neumann introdujo el estudio de esto anillos en [Ne].

Teorema 1.1.53. *Para un anillo R, son equivalentes*[28]

1) *R es un anillo regular.*
2) *Todo ideal izquierdo que es cíclico es generado por un elemento idempotente de R.*
3) *Todo módulo izquierdo es plano.*

Corolario 1.1.54. *Si R es un anillo regular, entonces todo ideal izquierdo de R que es cíclico es un sumando directo de R.*

Demostración. Si I es un ideal izquierdo y cíclico de R, entonces existe $e \in R$ un idempotente tal que $I = Re$. Nótese $R = Re \oplus R(1 - e)$. ∎

En el caso conmutativo los conceptos de V-anillo y anillo regular se combinan en al siguiente resultado

Teorema 1.1.55. *Sea R un anillo conmutativo. Entonces R es un anillo regular si y sólo si R es un V-anillo.*

Este último resultado se atribuye a Irving Kaplasky como se puede ver en el artículo “Finiteness of the inyective hull”.[29]

Corolario 1.1.56. *Si R un anillo regular y conmutativo, entonces R es un anillo máx.*

§1.2 Caracterización de anillos máx.

Para un ideal I de un anillo R, el submódulo generado por I en M está dado por

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \in M \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in I, m_i \in M \right\}.$$

Dado que $I\,(M/IM) = \{\bar{0}\}$, al definir para $[r]_{R/I} \in R/I$ y $[m]_{M/IM} \in M/IM$

$$[r]_{R/I}[m]_{M/IM} = [rm]_{M/IM},$$

se obtiene que la multiplicación no depende de la elección de los representante, y así M/IM adquiere de manera natural estructura de R/I-módulo izquierdo. Nótese que la retícula de R/I-submódulos de M/IM coincide con la retícula de R-submódulos de M/IM. De donde se obtiene la siguiente

Proposición 1.2.1. *Sea R un anillo, I un ideal de R y M un módulo. Entonces la retícula de submódulos de M/IM como R-módulo y la retícula de submódulos de M/IM como R/I-módulo son isomorfas.*

Ahora se está en condiciones de enunciar una forma recíproca del Corolario 1.1.18.

Proposición 1.2.2. *Sea R un anillo e I un ideal de R tal que R/I es un anillo máx izquierdo. Si para todo módulo $M \neq (0)$ se tiene que $IM \subsetneq M$, entonces R es un anillo máx izquierdo.*

Demostración. Sea $M \neq 0$ un R-módulo, como $IM \subsetneq M$, entonces M/IM es un R/I-módulo no nulo. Ahora, siendo R/I un anillo máx, existe N' un R/I-submódulo máximo de M/IM. De la Proposición 1.2.1 se concluye que $N' = N/IM$ es un R-submódulo máximo de M/IM. Por último del Teorema de Correspondencia[30] se concluye que N submódulo máximo de M, y por lo tanto R es un anillo máx. ∎

Corolario 1.2.3. *Sean R un anillo e $\{I_j\}_{j\in\Lambda}$ una familia de ideales de R tal que el anillo factor R/I_j es un anillos máx para todo $j \in \Lambda$. Si para todo módulo M no nulo existe $j \in \Lambda$ tal que $I_jM \subsetneq M$, entonces R es un anillo máx.*

[28] Ver [Fa] 7.32 A Definition and Proposition. pág. 434.
[29] Theorem 6 pág 380.
[30] Ver Teorema 3,1.3

Teorema 12.4. *Para un anillo R son equivalentes*

1) *R es un anillo máx izquierdo.*
2) *Todo anillo cociente de R es un anillo máx.*
3) *El anillo cociente $R/J(R)$ es un anillo máx izquierdo y $J(R)$ es T-nilpotente izquierdo.*
4) *El anillo R contiene un ideal I que es T-nilpotente izquierdo y el anillo cociente R/I es un anillo máx.*

Demostración.

1 ⇒ 2 Es el Corolario 1.1.18.

2 ⇒ 3 Por hipótesis $R/J(R)$ es un anillo máx, así que se suficiente demostrar que $J(R)$ es un ideal T-nilpotente izquierdo. Sea entonces $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $J(R)$ y considérense L un módulo libre con una base numerable $\{l_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y M el submódulo de L generado por el conjunto $\{l_i - r_i l_{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Si $\pi : L \longrightarrow L/M$ es la proyección natural, dado que $\pi(l_i) = r_i\pi(l_{i+1})$ y que $\{\pi(x_i)\}$ genera a L/M, se concluye que $J(R)(L/M) = L/M$. Por otro lado se tiene que $J(R)(L/M) \subseteq Rad(L/M)$,[31] y así

$$L/M = J(R)(L/M) \subseteq Rad(L/M) \subseteq L/M.$$

Es decir $L/M = Rad(L/M)$, y siendo R un anillo máx izquierdo, debe suceder que $L/M = 0$ y en consecuencia $L = M$.
Entonces para l_1 existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_n \in R$ tales que

$$\begin{aligned} l_1 &= \sum_{i=1}^{n} a_i(l_i - r_i l_{i+1}) \\ &= a_1(l_1 - r_1 l_2) + a_2(l_2 - r_2 l_3) + \cdots + a_n(l_n - r_n l_{n+1}) \\ &= a_1 l_1 + (a_2 - a_1 r_1)l_2 + (a_3 - a_2 r_2)l_3 + \cdots + (a_n - a_{n-1}r_{n-1})l_n - a_n r_n l_{n+1} \end{aligned}$$

Ahora, como $\{l_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de L, en particular es un conjunto independiente y así se tiene que

$a_1 = 1$.
$a_2 = a_1 r_1$, y entonces $a_2 = r_1$.
$a_3 = a_2 r_2$, y entonces $a_3 = r_1 r_2$.
$a_4 = a_3 r_3$, y entonces $a_4 = r_1 r_2 r_3$.
eventualmente se llega a que:
$a_n = a_{n-1} r_{n-1}$. Entonces $a_n = r_1 r_2 r_3 \dots r_{n-1}$. De donde se obtiene que
$0 = a_n r_n$ y así $0 = r_1 r_2 r_3 \dots r_n$.
Por tanto $J(R)$ es un ideal T-nilpotente izquierdo.

3 ⇒ 4 Por hipótesis $J(R)$ es un ideal que cumple los requerimientos buscados.

4 ⇒ 1 Sea R un anillo e I un ideal T-nilpotente izquierdo de R, tal que R/I es un anillo máx izquierdo. Se verá que si M es un módulo izquierdo no nulo, entonces $IM \subsetneq M$ y así al aplicar la Proposición 1.2.2 se obtiene el resultado.
Supongamos que por el contrario existe un módulo M no nulo que cumple $IM = M$. Y así es posible encontrar $r_1 \in I$ y $m_1 \in M - \{0\}$ tales que $r_1 m_1 \neq 0$. Como $IM = M$, entonces

$$m_1 = \sum_{i=1}^{n_2} r_{2_i} m_{2_i} \quad donde \;\; n_2 \in \mathbb{N}, \;\; r_{2_i} \in I \;\; y \;\; m_{2_i} \in M \;\; \forall i \in \{1, \dots, n_2\},$$

y así

$$r_1 m_1 = \sum_{i=1}^{n_1} r_1 r_{2_i} m_{2_i}.$$

[31] Ver [AF] 15.18 Corollary pág 171.

Como $r_1 m_1 \neq 0$, debe existir $i_0 \in \{1, \ldots, n_2\}$ tal que $r_1 r_{2_{i_0}} m_{2_{i_0}} \neq 0$. Usando una vez más el hecho de que $IM = M$, es posible escribir

$$m_{2_{i_0}} = \sum_{i=1}^{n_3} r_{3_i} m_{3_i} \quad donde \;\; n_3 \in \mathbb{N}, \;\; r_{3_i} \in I \;\; y \;\; m_{3_i} \in M \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n_3\},$$

y así construir recursivamente una sucesión $\{r_1, r_{2_{i_0}}, r_{3_{i_0}} \ldots, r_{n_{i_0}}, \ldots\}$ de elementos de I tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ sea que $r_1 r_{2_{i_0}} \cdots r_{m_{i_0}} \neq 0$. Lo que contradice el hecho de que I es un ideal T-nilpotente. Por lo tanto $IM \subsetneq M$ para todo módulo no nulo M, y en consecuencia R es un anillo máx. ■

Ejemplo 1.2.5. Las condiciones de ser anillo máx izquierdo y anillo máx derecho son mutuamente independientes. Para mostrar este hecho consideremos K un campo, V un espacio vectorial de dimensión $|\,\mathbb{N}\,|$ y $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de V. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$V_n = \bigoplus_{i=1}^{n} < v_i >$$

y denotemos por $S = End(V)$. Luego consideremos

$$N = \{\varphi \in S \mid dim(Im(\varphi)) < \infty, \ \varphi(V_{n+1}) \subseteq V_n\}.$$

Nótese que N es un ideal izquierdo de S y que $N^2 \subseteq N$.
Recordemos que si $k \in K$, la función $\varphi_k : V \to V$, dada por $\varphi_k(v) = kv$ es un K-endomorfismo de V y que $A = \{\varphi_k \in S \mid k \in K\}$ es un subanillo de S que es isomorfo a K como campo. Nótese que si W es un subespacio de V, entonces $\varphi_k(W) \subseteq W$ para todo $k \in K$. Así se tiene que para todo $k \in K$ y todo $\gamma \in N$, $\varphi_k \circ \gamma \in N$ y $\gamma \circ \varphi_k \in N$.
Ahora consideremos

$$R = A + N = \{\varphi_k + \gamma \in S \mid k \in K, \ \gamma \in N\}.$$

Dadas las observaciones hechas sobre N y A, se concluye que R es un subanillo de S y que N es un ideal bilateral de R. Dado que todo elemento de N es nilpotente, entonces $N \subseteq Rad(R)$[32]. Por otro lado

$$R/N \simeq K,$$

como R-módulo. Entonces N es un submódulo máximo de R y así $Rad(R) \subseteq N$. En consecuencia $N = Rad(R)$.
Ahora, si $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de N, como $dim(Im(\gamma_1)) = k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Im(\gamma_1) \subseteq V_n$ y así

$$(\gamma_{n+1} \circ \gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_2 \circ \gamma_1)(V) = (0),$$

es decir N es un ideal T-nilpotente derecho de R. Luego al aplicar el Teorema 1.1.8,[33] obtenemos que R es un anillo perfecto derecho y así un anillo máx derecho.
Recordemos que $V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} < v_i >$. Si denotamos $\pi_n : V \to < v_n >$ a la n-esima proyección, defínase

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{P_n} V \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i(v). \end{aligned}$$

[32]Si $\varphi \in N$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^n = 0$, entonces $1 = 1 - \varphi^n = (1 - \varphi)(1 - \varphi + \cdots + \varphi^{n-1})$, luego aplicar [Ka] 9.3.1 Lemma pág. 220.

[33]N es un ideal T-nilpotente derecho y R/N es un anillo semisimple.

Ahora consideremos la siguiente función lineal dada en la base $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\delta} V \\ v_1 &\longmapsto 0 \\ v_i &\longmapsto v_{i-1}, \quad si\ i \geqslant 2. \end{aligned}$$

Si se define $\varphi_n = \delta \circ P_n$, se tiene que $\varphi_n \in N$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sin embargo

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n)\left(\sum_{i=1}^{n+1} v_i\right) = v_1,$$

es decir N no es un ideal T-nilpotente izquierdo. Por lo tanto R no puede ser un anillo máx izquierdo.[34]

Estamos en condiciones de demostrar la Conjetura 1.1.12 para anillos conmutativos, encamino a esta tarea presentamos el siguiente

***Lema 1.2.6**. Sea R un anillo conmutativo. Entonces todo elemento de R que no es divisor de cero es una unidad en R.*

Demostración. Sea $x \in R$ un elemento que no es un divisor de cero y para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $y_i = [1]_{R/Rx^i} \in R/Rx_i$. Entonces $Ry_i = R/Rx^i$ y $An(y_i) = Rx^i$. Consideremos

$$A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ry_i \ \ y \ \ B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R(xy_{i+1} - y_i),$$

y supongamos que $B \subsetneq A$. Entonces, como R es un anillo máx, A/B contiene un submódulo máximo M. Dado que $\{\overline{y_i}\}_{i=1}^{\infty}$ es un conjunto generador de A/B y $M \subsetneq A/B$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{y_n} \notin M$ y siendo M un submódulo máximo de A/B, entonces

$$A/B = M + <\overline{y_n}> .$$

Y así existen $r \in R$ y $\overline{m} \in M$ tales que

$$\overline{y_{2n}} = r\overline{y_n} + \overline{m}. \tag{2.3}$$

Ahora, como $\overline{x} \cdot \overline{y_{i+1}} = \overline{y_i}$, por inducción se verifica que $\overline{x^k} \cdot \overline{y_{i+k}} = \overline{y_i}$ para todo $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, en particular $\overline{x^n} \cdot \overline{y_{2n}} = \overline{y_n}$ y así

$$\overline{y_n} = \overline{x^n} \cdot \overline{y_{2n}} \underset{Ecu\ 2.3}{=} \overline{x^n} \cdot (r\overline{y_n} + \overline{m}) \underset{R\ conmuta}{=} r\overline{x^n} \cdot \overline{y_n} + \overline{x^n} \cdot \overline{m} \underset{x^n \in An(y_n) = Rx^n}{=} \overline{x^n} \cdot \overline{m} \in M.$$

Que contradice la elección de y_n. Luego entonces $B = A$ y así existen $r_1, \ldots, r_k \in R$ tales que

$$y_1 = \sum_{i=1}^{k} r_i(xy_{i+1} - y_i) = -r_1 y_1 + \left\{\sum_{i=2}^{k}(r_{i-1}x - r_i)y_i\right\} + r_k x y_{k+1}.$$

Dado que $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un conjunto independiente de A, debe ser que

1) $y_1 = -ry_1$,
2) $r_n x \in An(y_{k+1})$, y
3) $(r_{i-1}x - r_i) \in An(y_i)$ para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$.

Ahora, $r_n x \in An(y_{k+1}) = Rx^{n+1}$ y entonces $r_n x = sx^{n+1}$ para algún $s \in R$ y dado que x no es un divisor de cero, entonces $r_n = sx^n$, es decir $r_n \in Rx^n = An(y_n)$. Siendo que $r_{n-1x-r_n \in An(y_n)} = Rx^n$, entonces $r_{n-1}x \in Rx^n$. Un argumento recursivo nos lleva a que $r_1 \in An(y_1)$ y así $y_1 = -r_1 y_1 = 0$. Entonces $R/Rx = Ry_1 = 0$, es decir $Rx = R$. Por lo tanto x es una unidad de R. ∎

[34] Ver Teorema 1.2.4 inciso 3).

***Proposición 1.2.7**. Sea R un anillo conmutativo. Entonces R es un anillo máx si y sólo si $J(R)$ es un ideal T-nilpotente y $R/J(R)$ es un anillo regular.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si R es un anillo máx por el Teorema 1.2.4 inciso 3), $J(R)$ es un ideal T-nilpotente. Ahora veremos que $R/J(R)$ es un anillo regular.
Sea $S = R/J(R)$ y $a \in S$. Como R es un anillo máx y conmutativo, entonces $J(R)$ coincide con el nilradical[35] y así S no tiene elementos nilpotentes no nulos. Luego, si $ta \in Sa \cap An(a)$, entonces

$$(ta)^2 \underset{R\ conmuta}{=} t(ta^2) = t \cdot 0 = 0,$$

así $ta = 0$. Es decir $Sa \cap An(a) = (0)$.
Sea $\overline{S} = S/An(a)$. Si $\overline{s} \cdot \overline{a} = \overline{0}$, entonces $sa \in Sa \cap An(a)$ y así $s \in An(a)$; es decir $\overline{s} = \overline{0}$. De donde se concluye que $\overline{a}$ no es un divisor de cero de S y como S es un anillo máx,[36] del Lema 1.2.6 se obtiene que $\overline{S} = \overline{S} = \overline{S}\overline{a}$. En resumen S se ha demostrado que para todo $a \in S$

1) $Sa \cap An(a) = (0)$, y
2) $Sa + An(a) = S$.

Por lo tanto $Sa \oplus An(a) = S$, es decir todo ideal principal de S es un sumando directo de S. Luego al aplicar el Teorema 1.1.53 inciso 2), se obtiene que R es un anillo regular.

$\Leftarrow$) Si $R/J(R)$ es un anillo regular, del Teorema 1.1.55 se tiene que $R/J(R)$ es un V-anillo y así al aplicar el Corolario 1.1.50 $R/J(R)$ es un anillo máx. Si a este último hecho le aunamos la hipótesis de que $J(R)$ es un ideal T-nilpotente, al aplicar el Teorema 1.1.8 se obtiene el resultado. ∎

***Lema 1.2.8**. Sea R un anillo conmutativo. Si R es un anillo regular que no contiene subconjuntos infinitos de elementos idempotentes ortogonales, entonces R es un anillo semiartiniano.*

Demostración. Sea I un ideal de R. Si R no es un módulo simple, existe $r \in R$ tal que $Rr \subsetneq R$ y al ser R un anillo regular, entonces Rr es un sumando directo de R y así $Rr = Re_1$.[37] Dado que e_1 es idempotente, entonces $1 - e_1$ es idempotente que cumple

1) $R = Re_1 \oplus R(1 - e_1)$,
2) $\{e_1, 1 - e_1\}$ es un subconjunto de elementos idempotentes ortogonales, y
3) Si $r \in Re_1$, entonces $r(1 - e_1) = 0$.

Nótese que Re_1 además de ser un submódulo de R, es un anillo, que por la Proposición 1.1.52 resulta ser un anillo regular. Así, si Re_1 es un submódulo simple de ya se ha terminado, en caso contrario existe $e_2 \in Re_1$ tal que $Re_2 \subsetneq Re_1$ y Re_2 es un sumando directo de Re_1 y entonces se puede construir el conjunto $\{e_2, 1 - e_2, 1 - e_1\}$ que es subconjunto de elementos idempotentes ortogonales de R. Este procesos debe concluir en algún paso, pues R no contiene subconjuntos infinitos de elementos idempotentes ortogonales. Así I contiene un submódulo mínimo y al aplicar el Teorema 1.1.31 se obtiene que R es un anillo semiartiniano. ∎

***Corolario 12.9**. Si R es un anillo conmutativo y regular que no tiene subconjuntos ortogonales infinitos de elementos idempotentes, entonces R es un anillo semisimple.*

---

[35] Ver [AM] Proposition 1.18 pág 5 y Corolario 1.1.19.
[36] Ver Corolario 1.1.18.
[37] Ver [Pa] Lemma 3.8.

Teorema 1.2.10. *Un anillo conmutativo R es perfecto si y sólo si R es un anillo máx y no contiene subconjuntos ortogonales infinitos de elementos idempotentes.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si R es un anillo perfecto por el Teorema 1.1.8 se obtiene las condiciones requeridas.

$\Leftarrow$) Como R es un anillo máx, del Teorema 1.2.4 en su inciso (3), sabemos que $J(R)$ es un ideal T-nilpotente y entonces es un nil ideal de R. Entonces subconjuntos a lo más numerable de elementos idempotentes ortogonales de $R/J(R)$ se levantan[38] a R[39]. Así $R/J(R)$ no contiene subconjuntos ortogonales infinitos de elementos idempotentes. Ahora, de la Proposición 1.1.52 se verifica que $R/J(R)$ es un anillo regular y al aplicar Corolario 1.2.9 $R/J(R)$ es un anillo semisimple. Entonces por el Teorema 1.1.8, R es un anillo perfecto. ∎

Lema 1.2.11. *Sean R un anillo y $M_{\alpha\in\Lambda}$ una familia no vacío de módulos izquierdos. Entonces los siguiente enunciados son equivalentes*

1) M_α es un módulo máx para cada $\alpha \in \Lambda$.
2) El módulo $\prod \alpha \in \Lambda M_\alpha$ es un módulo máx.
3) El módulo $\bigoplus \alpha \in \Lambda M_\alpha$ es un módulo máx.

Demostración.

1 ⇒ 2 Sean N un submódulo de $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ y p_α la proyección de $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ sobre M_α. Dado que $N \neq (0)$, entonces existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $p_\alpha(N) \neq$ y siendo M_α un módulo máx, existe K un submódulo máximo de $p_\alpha(N)$. Entonces por el Teorema de Correspondencia[40] se obtiene que $p_\alpha^{-1}(K)$ es un submódulo máximo de N y así $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es un módulo máx.

2 ⇒ 3 Dado que $\bigoplus \alpha \in \Lambda M_\alpha$ es un submódulo de $\prod \alpha \in \Lambda M_\alpha$ y éste último es un módulo máx, entonces $\bigoplus \alpha \in \Lambda M_\alpha$ es un módulo máx.

3 ⇒ 1 Si M_β un miembro de la familia y $\pi_\beta : \bigoplus \alpha \in \Lambda M_\alpha \to M_\beta$ la proyección natural el resultado se obtiene en forma automática al aplicar el Teorema de Correpondecia. ∎

Teorema 12.12. *Para un anillo R son equivalentes*

1) R es un anillo máx izquierdo.
2) Si S es un módulo simple, entonces $E(S)$[41] es un módulo máx.
3) Existe un cogenerador C de la categoría de R-módulos izquierdos que es un módulo máx.

Demostración.

1 ⇒ 2 Como R es un anillo máx, en particular las cápsulas inyectivas de los módulos simples son módulos mác.

2 ⇒ 3 Sea Ω un conjunto irredundante de representantes[42] de los módulos izquierdos simples. Entonces $\bigoplus\limits_{S\in\Omega} E(S)$ es un cogenerador de la categoría de R-módulos izquierdos[43] y luego por el Lema 1.2.11, $\bigoplus\limits_{S\in\Omega} E(S)$ es un módulo máx.

[38] Ver [Ka] 11.5.2 Definition pág 290.
[39] Ver [Ka] 11.5.3 Theorem pág 290.
[40] Ver Teorema 3.1.3.
[41] $E(S)$ representa la capsula inyectiva del módulo S.
[42] Ω es un conjuntos de representantes de los módulos simples en caso de que para todo módulo simple exista un elemento de Ω isomorfo al simple y dos elementos de Ω no son isomorfos.
[43] Ver [AF] 18.16 Corollary pág. 211.

3 ⇒ 4 Sea C un cogenerador de la categoría de R-módulos izquierdos tal que C es un módulo máx. Ahora, si M es un módulo no nulo, como C cogenera a la categoría de módulos, existe I un conjunto de indices tal que C^I [44] contiene una copia isomorfa de M. Luego del Lema 1.2.11 sabemos que C^I es un módulo máx y entonces M es un módulo máx. Por lo tanto R es un anillo máx izquierdo. ∎

[44] C^I representa el producto directo de tantas copias de C como el cardinal de I.

En matemáticas uno no entiende las cosas,
se acostumbra a ellas.
John Von Neumann
1903 - 1957

Capítulo 2
Anillos máx y anillos altos

Rentschler y Gabriel[1] definen la dimensión de Krull de un R-módulo para ordinales finitos. Este concepto es generalizado por Gordon y Robson en las memorias de la Sociedad Matemática Americana,[2] donde demuestran que todo módulo noetheriano tiene dimensión de Krull. El recíproco este teorema no es verdadero, siendo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ un ejemplo de un Z-módulo no noetheriano con dimensión de Krull. Boyley y Goodearl prueban[3] que si R es un V-anillo, entonces R tiene dimensión de Krull si y sólo si R es un anillo noetheriano. Después M. F. Yousif extiende el resultado para V-módulos;[4] es decir demuestra que un V-módulo es noetheriano si y sólo si tiene dimensión de Krull. La finalidad de este capítulo es caracterizar a los anillos con la propiedad de que los módulos con dimensión de Krull son precisamente aquellos que son noetherianos. Además se encontrará la relación que existe entre este tipo de anillos y los anillos máx.

§2.1 Dimensión de Krull.

Dada la importancia del concepto de dimensión de Krull para el desarrollo del material, a continuación se presentan algunos resultados que en lo posterior serán de utilidad.

Definición 2.1.1. *Sea R un anillo y M módulo, se define recursivamente la* ***dimensión de Krull*** *de M, que es denotada por $K\ dim(M)$, como*

1) $K\ dim(M) = -1$, si $M = (0)$.
2) Para un ordinal α, diremos que $K\ dim(M) = \alpha$, si
  I) $K\ dim(M) \nless \alpha$.
  II) Para toda cadena descendente

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

de submódulos de M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geqslant n$ se tiene que $K\ dim(M_i/M_{i+1}) < \alpha$.

---

[1] Ver [PG].
[2] Ver [GR].
[3] Ver [BG].
[4] Ver [Yo]. La definición 1.1.48 se puede extrapolar al caso particular de un módulo como sigue, un módulo M es un V-módulo si cada submódulo de M es intersección de submódulos máximos de M.

Ejemplo 2.1.2.

1) Si M es un módulo. Entonces $K\ dim(M) = 0$ si y sólo si M es módulo artiniano.
2) Para el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$, se tiene que $K\ dim(\mathbb{Z}) = 1$. De hecho, si D es un Dominio de Ideales Principales que no es artiniano, como para todo ideal I de D pasa que D/I es artiniano, se tiene entonces que $K\ dim(D) = 1$. Más aún, si D es un Dominio de Dedekind que no es artiniano, también se cumple que para todo ideal I es cociente D/I es artiniano, y así $K\ dim(D) = 1$.[5]

Observación 2.1.3. Si M es un R-módulo y existe un ordinal η tal que para toda cadena descendente

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

de submódulos de M, existe $i \in \mathbb{N}$ (que depende de la cadena) tal que para todo $j \geqslant i$

1) M_j/M_{j+1} tiene dimensión de Krull, y
2) $K\ dim(M_j/M_{j+1}) < \eta$.

Entonces M tiene dimensión de Krull y $K\ dim(M) \leqslant \eta$.

Lema 2.1.4. *Si M y N son módulos tal que $M \simeq N$ y M tiene dimensión de Krull, entonces N tiene dimensión de Krull y $K\ dim(N) = K\ dim(M)$.*

Proposición 2.1.5. *Si M es un R-módulo y N es un submódulo de M, entonces*

$$K\ dim(M) = sup\{K\ dim(N), K\ dim(M/N)\}$$

si alguno de los lados de la igualdad existe.

Demostración.

1) Supongamos que M es un módulo con dimensión de Krull y sea N un submódulo de M
   I) Si
   $$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_k \supseteq \cdots$$
   es una cadena de submódulos de N, en particular es una cadena de submódulos de M, así existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geqslant n$, $K\ dim(N_i/N_{i+1}) < K\ dim(M)$. En consecuencia $K\ dim(N) \leqslant K\ dim(M)$.
   II) Si
   $$M_1/N \supseteq M_2/N \supseteq \cdots \supseteq M_k/N \supseteq \cdots$$
   es una cadena de submódulos de M/N. Que por el Teorema de Correspondencia[6] esta induce una cadena de submódulos
   $$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_k \supseteq \cdots,$$
   en M y como M tiene dimensión de Krull, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geqslant n$ se cumple que $K\ dim(M_i/M_{i+1}) < K\ dim(M)$, y entonces por el Lema 2.1.4 se tiene que $K\ dim((M_i/N)/(M_{i+1}/N)) < K\ dim(M)$. Así que $K\ dim(M/N) \leqslant K\ dim(M)$.

   De $I)$ y $II)$ se concluye que N y M/N tienen dimensión de Krull y que $sup\{K\ dim(N), K\ dim(M/N)\} \leqslant dim(M)$.
2) Supongamos que M es un módulo, N es un submódulo de M y que N y M/N tiene dimensión de Krull y denotemos por
   $$\gamma = sup\{K\ dim(N), K\ dim(M/N)\}.$$
   Se demostrará por inducción transfinita sobre γ, que M tiene dimensión de Krull y además $K\ dim(M) \leqslant \gamma$.

[5] Ver [St], Theorem 5.4 pág 117 y Proposition 5.6 pág 121.
[6] Ver Teorema 3.1.3.

Si $\gamma = -1$, es inmediato que N y M/N son módulos triviales y así $M = \{0\}$. De donde se obtiene que M tiene dimensión de Krull y que $K\ dim(M) = -1$.
Para $\gamma = 0$, pasa que N y M/N son módulos artinianos y así M es un módulo artiniano.[7] Entonces M tiene dimensión de Krull y $K\ dim(M) \leqslant 0$.
Supongamos que el enunciado es válido para todo ordinal $\beta < \gamma$, es decir si M es un módulo y N es un submódulo tal que N y M/N tienen dimensión de Krull y $sup\{K\ dim(N), K\ dim(M/N)\} = \beta < \gamma$, entonces M tiene dimensión de Krull y $K\ dim(M) \leqslant \beta$.
Ahora tomemos M un módulo tal que contiene un submódulo N y

$$sup\{K\ dim(N), K\ dim(M/N)\} = \gamma,$$

y sea

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_k \supseteq \cdots$$

una cadena de submódulos de M. Esta cadena induce dos cadenas de submódulos
I) $M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \cdots \supseteq M_k \cap N \supseteq \cdots$, y
II) $(M_1 + N)/N \supseteq (M_2 + N)/N \supseteq \cdots \supseteq (M_k + N)/N \supseteq \cdots$.
En N y M/N respectivamente. Por hipótesis N y M/N tienen dimensión de Krull menor o igual a γ, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geqslant n$,

$$K\ dim\left(\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N}\right) < \gamma \text{ y } K\ dim\left(\frac{(M_i + N)/N}{(M_{i+1} + N)/N}\right) < \gamma.$$

Ahora notemos que

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \underset{M_{i+1} \subseteq M_i}{=} \frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap (M_i \cap N)} \underset{Teor\ 3.1.1}{\simeq} \frac{M_{i+1} + (M_i \cap N)}{M_{i+1}} \underset{Prop\ 3.1.4}{=} \frac{M_i \cap (M_{i+1} + N)}{M_{i+1}}$$

y

$$\frac{(M_i + N)/N}{(M_{i+1} + N)/N} \underset{Teor\ 3.1.2}{\simeq} \frac{M_i + N}{M_{i+1} + N} \underset{M_{i+1} \subseteq M_i}{\simeq} \frac{M_i + (M_{i+1}N)}{M_{i+1} + N} \underset{Teor\ 3.1.1}{\simeq} \frac{M_i}{M_i \cap (M_{i+1} + N)}.$$

Así

$$\beta = sup\left\{K\ dim\left(\frac{M_i \cap (M_{i+1} + N)}{M_{i+1}}\right), K\ dim\left(\frac{M_i}{M_i \cap (M_{i+1} + N)}\right)\right\} < \gamma$$

Ahora nótese que $\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right) / \left(\frac{M_i \cap (M_{i+1}+N)}{M_{i+1}}\right) \underset{Teor\ 3.1.2}{\simeq} \frac{M_i}{M_i \cap (M_{i+1}+N)}$, entonces por hipótesis de inducción $K\ dim(M_i/M_{i+1}) < \gamma$. Por lo tanto M tiene dimensión de Krull y $K\ dim(M) \leqslant \gamma$.
Así de 1) y 2) se puede concluir que las dimensiones de Krull existen si en alguno de los existe y además $K\ dim(M) = sup\{K\ dim(N), K\ dim(M/N)\}$. ∎

***Proposición 2.1.6**. Si M es un módulo noetheriano, entonces M tiene dimensión de Krull.*

Demostración. Supongamos que existe un módulo M noetheriano que no tiene dimensión de Krull y sea

$$\mathcal{F} = \{N \leqslant M \mid M/N \text{ no tiene } K\ dim\}.$$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$, pues $0 \in \mathcal{F}$. Y como M es noetheriano existe, N submódulo de M que es máximo en $\mathcal{F}$.[8] Entonces M/N no tiene dimensión de Krull, sin embargo, dada la maximalidad de N en $\mathcal{F}$, todo cociente propio de M/N tiene dimensión de Krull. Si consideremos el conjunto de los cocientes propios de M/N, es decir

$$\Delta = \{K/N \leqslant M/N \mid N \subsetneqq K \leqslant M\}.$$

[7] Ver Teorema 3.1.8.
[8] Ver Teorema 3.1.7.

Siendo Δ un conjunto, existe un ordinal α tal que

$$K\ dim(M/K) = K\ dim((M/N)/(K/N)) \leqslant \alpha \text{ para todo } K/N \in \Delta.$$

Luego al aplicar la Observación 2.1.3 se concluye que M/N debe tener dimensión de Krull, que contradice la elección de N. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es vacío y así se sigue el resultado. ∎

En general no todo módulo con dimensión de Krull es noehteriano como lo muestra el siguiente

Ejemplo 2.1.7. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo artiniano, luego entonces $K\ dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0$. Sin embargo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo noetheriano.

La siguiente sección responderá la pregunta

> ¿Cuándo en un anillo, que un módulo tenga dimensión de Krull implica que el módulo es noetheriano?

§2.2 Anillos altos.

Definición 2.2.1. *Un módulo M es un* ***módulo alto*** *si contiene un submódulo N tal que N y M/N no son noetherianos.*

Nótese que un módulo alto debe ser un módulo no noetheriano.

Ejemplo 2.2.2. Sea R un anillo y M un R-módulo libre con una base numerable $\beta = \{m_i\}_{i=0}^{\infty}$. Si $N = \bigoplus_{\substack{i=2k\\k\in\mathbb{N}}} Rm_i$, entonces $M/N \simeq \bigoplus_{\substack{i=2k+1\\k\in\mathbb{N}}} Rm_i$ y así M es un módulo alto.

Proposición 2.2.3. *Sean M un módulo y N un submódulo de M tal que N es un módulo alto. Entonces M es un módulo alto.*

Demostración. Como N es un modulo alto, entonces N contiene un submódulo K tal que K y N/K no son noetherianos. Dado que N/K no es noetheriano y este último es un submódulo de M/K, entonces M/K no es noetheriano. De donde se concluye que M es un módulo alto. ∎

Proposición 2.2.4. *Sean M un módulo y N un submódulo de M tal que M/N es un módulo alto. Entonces M es un módulo alto.*

Demostración. Como M/N es alto, existe K/N un submódulo de M/N tal que K/N y $(M/N)/(K/N) \simeq M/K$ no son noetherianos. Evidentemente K es un módulo no noetheriano y así M es un módulo alto. ∎

Definición 2.2.5. *Si M es un módulo izquierdo y $A \subseteq M$, se dice que A es un conjunto* ***irredundante*** *de M, si $B \subsetneq A$ implica $\langle B\rangle \subsetneq \langle A\rangle$. Si un conjunto no es irredundante se dice que es* ***redundante***.

Ejemplo 2.2.6.

1) Si M es un módulo libre y β es una base de M, entonces β es un conjunto irredundante.
2) Si M es un módulo, todo submódulo de M es un conjunto redundante.

Proposición 2.2.7. *Sean R un anillo y M un módulo izquierdo. Entonces*

1) *Si $A \subseteq M$ es un conjunto irredundante y $B \subseteq A$, entonces B es conjunto irredundante.*
2) *$A \subseteq M$ es un conjunto redundante si y sólo si existe $B \subseteq A$ tal que $\langle B\rangle = \langle B - \{b\}\rangle$ para algún $b \in B$.*
3) *Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos irredundantes de M tales que $A_i \subseteq A_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $A = \bigcup_{i=\mathbb{N}} A_i$ es irredundante.*

Demostración.

1) Sea A un conjunto irredundante de M y $B \subseteq A$. Si suponemos que B es un conjunto redundante, entonces existe $C \subsetneq B$ tal que $\langle C\rangle = \langle B\rangle$.Y si hacemos $D = C \cup (A - B)$, entonces $D \subsetneq B \cup (A - B) = A$, de donde

$$\langle D\rangle = \langle C \cup (A - B)\rangle = \langle C\rangle + \langle A - B\rangle = \langle B\rangle + \langle A - B\rangle = \langle B \cup (A - B)\rangle = \langle A\rangle .$$

Lo que contradice el hecho de que A es un conjunto irredundante. Por lo tanto B es un conjunto irredundante.

2) $\Rightarrow$) Supongamos que $A \subseteq M$ es un conjunto redundante, entonces existe $B \subsetneq A$ tal que $\langle B\rangle = \langle A\rangle$. Si $a \in A - B$, entonces

$$\langle A\rangle = \langle B\rangle \underset{B\subseteq A-\{a\}}{\subseteq} \langle A - \{a\}\rangle \subseteq \langle A\rangle .$$

Así $\langle A - \{a\}\rangle = \langle A\rangle$.

$\Leftarrow$) Sea $B \subseteq A$ tal que existe $b \in B$ y $\langle B\rangle = \langle B - \{b\}\rangle$. Como

$$A - \{b\} = (B - \{b\}) \cup (A - B)),$$

entonces

$$\langle A - \{b\}\rangle = \langle (B - \{b\}) \cup (A - B)\rangle = \langle B - \{b\}\rangle + \langle A - B\rangle = \langle B\rangle + \langle A - B\rangle = \langle B \cup (A - B)\rangle = \langle A\rangle .$$

De donde se concluye que A es un conjunto redundante.

3) Supongamos que A es un conjunto redundante, entonces existe $B \subsetneq A$ tal que $\langle B\rangle = \langle A\rangle$. Sea $a \in A$ tal que $a \notin B$, como $a \in A$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_m$, y como $a \in \langle A\rangle = \langle B\rangle$, entonces

$$a = \sum_{i=1}^{n} r_i a_{m_i} \text{ donde } n \in \mathbb{N},\ r_i \in R,\ a_{m_i} \in A_{m_i} \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Si $k = sup\{m, m_1, \ldots, m_n\}$, entonces $a_i \in A_k$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, puede entonces concluirse que $\langle A_k - \{a\}\rangle = \langle A_k\rangle$. Hecho que contradice que A_k es un conjunto irredundante. Como consecuencia debe ser que A es un conjunto irredundante. ∎

***Proposición 2.2.8**. Sea M un módulo que contiene un conjunto infinito irredundante. Entonces M es un módulo alto.*

Demostración. Sea $A \subseteq M$ un subconjunto irredundante e infinito, entonces existen $B, C \subseteq A$ infinitos tales que $A = B \cup C$ y $B \cap C = \varnothing$. Tomemos $N_B = \langle B\rangle$ y $N_C = \langle C\rangle$, se tiene entonces que N_B y N_C son submódulos de M no noetherianos pues no son finitamente generados.[9] Y como M/N_B contiene una copia isomorfa de N_C, debe ser que M/N_B es no noetheriano. Por lo tanto M es un módulo alto. ∎

***Definición 2.2.9**. Para un módulo M se definen los submódulos de M, $H(M)$ y $G(M)$ como*

1) Si M es un módulo noetheriano, entonces

$$H(M) = G(M) = (0).$$

2) Si M no es un módulo noetheriano, entonces

I) $H(M) = \bigcap\{N \leqslant M \mid N \text{ no es noetheriano}\}$.

II) $G(M) = \bigcap\{N \leqslant M \mid M/N \text{ es noetheriano}\}$.

[9] Ver Teorema 3.1.7.

Observación 2.2.10. Si M es un módulo no noetheriano y N es un submódulo de M tal que M/N es noetheriano, entonces N no es noetheriano[10] y en consecuencia

$$H(M) \subseteq G(M).$$

Por otro lado si N es un submódulo máximo de M, siendo que M/N es un módulo simple y por lo tanto noetheriano, entonces

$$G(M) \subseteq Rad(M).$$

En particular si R es un V-anillo de la Proposición 1.1.49 se tiene que $Rad(M) = (0)$ para todo módulo M y entonces $H(M) = G(M) = J(M) = (0)$ para todo módulo en la categoría de R-módulos izquierdos.

Proposición 2.2.11. *Si M es un módulo tal que $G(M) = 0$ y N es un submódulo de M, entonces $G(N) = 0$.*

Demostración. Sea K un submódulo de M tal que M/K es noetheriano, entonces

$$N/(N \cap K) \simeq (N+K)/K \leqslant M/K.$$

De donde se puede observar que $N/(N \cap K)$ es un módulo noetheriano.[10]
Entonces

$$G(N) \subseteq \bigcap_{\substack{K \leqslant M \\ M/K \text{ noetheriano}}} (K \cap N) \subseteq \bigcap_{\substack{K \leqslant M \\ M/K \text{ noetheriano}}} K = G(M) = 0. \qquad \blacksquare$$

Proposición 2.2.12. *Si M es un módulo, entonces $G(M/G(M)) = (0)$.*

Demostración. Sea $\overline{m} \in G(M/G(M))$, entonces

$$\overline{m} \in \bigcap \{N/G(M) \leqslant M/G(M) \mid (M/G(M))/(N/G(M)) \text{ es noetheriano}\}.$$

Dado que $(M/G(M))/(N/G(M)) \simeq M/N$, se tiene que

$$\overline{m} \subseteq \bigcap \{N \leqslant M \mid M/N \text{ es noetheriano}\} = G(M).$$

Por lo tanto $\overline{m} = \overline{0}$, es decir $G(M/G(M)) = (0)$. $\blacksquare$

Corolario 2.2.13. *Sean M un módulo y N un submódulo de M. Si K/N es un submódulo de M/N, entonces $G(K/N) = (0)$.*

Proposición 2.2.14. *Sea M un módulo tal que*

1) $M/G(M)$ es noetheriano, y
2) $H(G(M)) \subsetneq G(M)$.

Entonces M es un módulo alto.

Demostración. Como $H(G(M)) \subsetneq G(M)$, entonces $G(M) \neq (0)$ y en consecuencia M no es un módulo noetheriano. Luego, dado que $M/G(M)$ es un módulo noetheriano, debe suceder que $G(M)$ no es noetheriano, pues en caso contrario, del Teorema de Correspondencia[11] se podría concluir que M es noetheriano, contradiciendo que M es un módulo no noetheriano.
Ahora, como $G(M)$ no es noetheriano y como por hipótesis $H(G(M)) \subsetneq G(M)$, existe $P \subsetneq G(M) \subseteq M$ no noetheriano.

[10] Ver Teorema 3.1.5.
[11] Ver Teorema 3.1.5

Veamos que M/P es un módulo no noetheriano. Para ello supongamos por el contrario que M/P es un módulo noetheriano, entonces por definición de $G(M)$ se debería tener que $G(M) \subseteq P$ contradiciendo la elección de P. Por lo tanto P y M/P son módulos no noetherianos y así M es un módulo alto. ■

Corolario 2.2.15. *Sean M un módulo y N un submódulo de M tales que $H(G(M/N)) \subsetneq G(M/N)$ y $G(M/N)$ es un módulo no noetheriano. Entonces M es un módulo alto.*

Demostración. Sea $\overline{M} = (M/N)/G(M/N)$.

1) Si $\overline{M}$ no es noetheriano, como por hipótesis $G(M/N)$ no es noetheriano, entonces M/N es alto y así al aplicar la Proposición 2.2.4 es posible concluir que M es un módulo alto.
2) Si $\overline{M}$ es noetheriano. Como por hipótesis $H(G(M/N)) \subsetneq G(M/N)$, de la Proposición 2.2.14 se deduce que M/N es alto y así una vez más al aplicar la Proposición 2.2.4 se concluye que M es un módulo alto. ■

Proposición 22.16. *Sea M un módulo que no es finitamente generado, tal que $G(M/N)$ es noetheriano para todo submódulo N de M que es finitamente generado. Si $G(M) = 0$, entonces M es un módulo alto.*

Demostración. Para demostrar este resultado se construirá recursivamente, un subconjunto de M, que será irredundante e infinito.

Como $G(M) = 0$, existe $a_1 \in M - \{0\}$ y $N_1 \subseteq M$ tal que $a_1 \notin N_1$ y M/N_1 no noetheriano.

Ahora supongamos que existen $a_1, \dots, a_n \in M - \{0\}$ y $N_1, \dots, N_n \leqslant M$ tales que

1) $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ es un conjunto irredundante de M.
2) $a_i \notin N_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
3) M/N_i es un módulo noetheriano para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.
4) $a_i \in N_j$ si $i \neq j$.

Sean $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$ e $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Si suponemos $\overline{m} = \overline{n}$ en M/N, entonces $m - n \in N_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, de donde se concluye que la asignación

$$\begin{aligned} M/N &\xrightarrow{\quad\varphi\quad} \bigoplus_{i=1}^{n}(M/N_i) \\ \overline{m} &\longmapsto ([m]_{M/N_1}, \dots, [m]_{M/N_n}), \end{aligned}$$

es un morfismo de módulos. Que además cumple que para $\varphi(\overline{m}) = \{0\}$, $m \in \mathbb{N}_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, y así $m \in N$ y por lo tanto φ es un monomorfismo de módulos. Ahora, como cada M/N_i es un módulo noetheriano, del Corolario 3.1.6 y del Teorema 3.1.5 se obtiene que M/N es un módulo noetheriano y dado que $N \subseteq N + I$, se cumple que la asignación dada por

$$\begin{aligned} M/N &\xrightarrow{\ \phi\ } M/(N+I) \\ \overline{m} &\longmapsto [m]_{M/(N+I)}, \end{aligned}$$

es un epimorfismo de módulos y así por el Teorema 3.1.5 $M/(N + I)$, es un módulo noetheriano. Recordemos que $M/(N+I) \simeq (M/I)/((N+I)/I)$[12], y como M/I no es un módulo finitamente generado de los Teoremas 3.1.7 y 3.1.5 se concluye que $(N + I)/I \leqslant M/I$ es un módulo no noetheriano. Como por hipótesis $G(M/I)$ es un módulo noetheriano, entonces existe $\overline{a} \in (N + I)/I$ y $N_{n+1}/I \leqslant M/I$ tales que $\overline{a} \notin N_{n+1}/I$ y $(M/I)/(N_{n+1}/I) \simeq M/N_{i+1}$ es un módulo noetheriano. Ahora, como $\overline{a} \in (N + I)/I$,

[12] Ver Teorema 3.1.5.

$a = a_{n+1} + r$ para algún $a_{n+1} \in N$ y $r \in I$, tomemos entonces $A_{n+1} = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ y los submódulos $N_1, \ldots, N_n, N_{n+1}$ de M, y veamos que éstos conjuntos cumplen las condiciones 1) a 4) dadas anteriormente.

2) Como $\overline{a} \in (N + I)/I$, entonces $a_{n+1} \notin \mathbb{N}_{n+1}$. Así se concluye que $a_i \notin N_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n, n+1\}$.
3) Siendo que se eligió N_{n+1} tal que M/N_{n+1} es noetheriano, entonces M/N_i es noetheriano para todo $i \in \{1, \ldots, n, n+1\}$.
4) Dado de $I \subseteq N_{n+1}$, entonces $a_i \in N_{n+1}$ para $i = 1, \ldots, n$. Y siedo que $a_{n+1} \in N$, entonces $a_{n+1} \in N_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Es decir $a_i \in N_j$ siempre que $i \neq j$.
1) Supongamos que A_{n+1} es un subconjunto redundante, entonces por la Proposición 2.2.7 en su inciso (2), existe $B \subseteq A$, tal que en B existe un elemento a_{i_0} con la propiedad de que $< B - \{a_{i_0}\} >=< B >$. Y así
$$a_{i_0} = \sum_{a_j \in B - \{a_{i_0}\}} \quad \textit{donde } r_j \in R \textit{ para todo } j,$$
y dado que $a_j \in N_{i_0}$ para todo $j \neq i_0$, entonces $a_{i_0} \in N_{i_0}$, que contradice el inciso 2) del argumento que se lleva ahora a cabo. Por lo tanto A_{n+1} es un subconjunto irredundante de M.

Luego, si hacemos $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, por la Proposición 2.2.7 inciso 3), se cumple que A es una subconjunto de M infinito e irredundante, luego al aplicar la Proposición 2.2.8 se obtiene que M es un módulo alto. ∎

Definición 2.2.17*. Un anillo R, es un* **anillo alto izquierdo***, si todo módulo no noetheriano es un módulo alto. Los conceptos de anillo alto derecho y anillo alto se definen de forma habitual.*

Lema 22.18*. Si R es un anillo alto y M es un módulo artiniano, entonces M es un módulo noetheriano.*

Demostración. Supongamos por el contrario que M no es un módulo noetheriano, entonces existe $M_1 \subsetneqq M$ tal que M_1 es un módulo no noetheriano y como R es un anillo alto, existe $M_2 \subsetneqq M_1$ tal que M_2 es un módulo no noetheriano. Y así recursivamente se puede construir una sucesión descendente de submódulos de M
$$M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq M_3 \supsetneqq \cdots$$
Contradiciendo el hecho de que M es un módulo artiniano. Por lo tanto M es un módulo noetheriano. ∎

Teorema 2.2.19*. Para un anillo R, son equivalentes:*

1) R es un anillo alto.
2) Todo módulo con dimensión de Krull es noetheriano.
3) Todo módulo no noetheriano contiene un submódulo propio no noetheriano.

Demostración.

1 ⇒ 2 La demostración se hará por inducción transfinita sobre α, donde $\alpha = K\ dim(M)$ y M es un módulo.

Para $\alpha = -1$, como $M = (0)$ el resultado se obtiene trivialmente.

Si $\alpha = 0$, entonces M es un módulo artiniano y como R es un anillo alto, del Lema 2.2.18 se obtiene que M es un módulo noetheriano.

Como hipótesis de inducción supongamos que para todo ordinal $\beta < \alpha$ y M un módulo tal que $K\ dim(M) = \beta$ se tiene que M es un módulo noetheriano.

Ahora vamos a proceder por contradicción, es decir supongamos que existe un módulo M tal que $K\ dim(M) = \alpha$ y M no es noetheriano.

Como R es un anillo alto, es posible construir, como en la demostración de Lema 2.2.18, una sucesión de submódulos de M

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_k \supseteq \cdots$$

tal que M_i/M_{i+1} no es noetheriano y así, por la hipótesis de inducción, se tiene que $K\ dim(M_i/M_{i+1}) \geqslant \alpha$. Lo que contradice la hipótesis de que $K\ dim(M) = \alpha$. Por lo tanto M es noetheriano.

2 ⇒ 1 Es suficiente demostrar que si M es un módulo con la propiedad de que para todo submódulo N se tiene que N o M/N es un módulo noetheriano, entonces M es noetheriano. Supongamos entonces que M es un módulo con dicha propiedad, siendo M un conjunto y tomando en cuneta la Proposición 2.1.6, es posible encontrar ordinales

1) $\alpha = sup\{K\ dim(N) \mid N \leqslant M \text{ y } N \text{ es noetheriano}\}$,
2) $\beta = sup\{K\ dim(M/N) \mid N \leqslant M \text{ y } N/M \text{ es noetheriano}\}$, y
3) $\gamma = sup\{\alpha, \beta\}$.

Ahora tomemos

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

una cadena descendente de submódulos de M.

Si existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que M_{i_0} es noetheriano, entonces M_j es un módulo noetheriano[13] para todo $j > i_0$ y así por la Proposición 2.1.5 para todo $j \geqslant i_0$ la dimensión de Krull de N_j existe, y además pasa que la dimensión de M_j/M_{j+1} existe y

$$K\ dim(M_j/M_{j+1}) \underset{Prop.\ 2.1.5}{\leqslant} K\ dim(M_j) \underset{M_j \subseteq M_{i_0}}{\leqslant} K\ dim(M_{i_0}) \leqslant \alpha \leqslant \gamma.$$

Ahora, si M_i es un módulo no noetheriano para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}$ debe suceder que M/M_{i+1} es un módulo noetheriano. Y como $M_i/M_{i+1} \subseteq M/M_{i+1}$, de la Proposición 2.1.5 se tiene entonces que

$$K\ dim(M_{i+1}/M_i) \leqslant K\ dim(M/M_i) \leqslant \beta \leqslant \gamma.$$

Así es posible concluir de la Observación 2.1.3 que M tiene dimensión de Krull. Además se tiene que $K\ dim(M) \leqslant \gamma$, entonces como consecuencia de la hipótesis M es un módulo noetheriano.

1 ⇒ 3 Es inmediato de la definición de anillo alto (2.2.17).

3 ⇒ 1 Se debe demostrar que todo módulo no noetheriano es un módulo alto. Entonces supongamos que M es un módulo no noetheriano. Vamos a considerar varios casos

1) Si $M/G(M)$ es noetheriano, siendo que M es no noetheriano, entonces $G(M) \neq (0)$ y no noetheriano y como consecuencia de la hipótesis $H(G(M)) \subsetneq G(M)$. Luego por la Proposición 2.2.14 se concluye que M es un módulo alto.
2) Si $M/G(M)$ no es noetheriano, entonces existe $N/G(M)$ submódulo de $M/G(M)$ que no es finitamente generado. En virtud del la Proposición 2.2.3 es suficiente demostrar que $N/G(M)$ es un módulo alto para concluir que $M/G(M)$ es un módulo alto, y así al aplicar la Proposición 2.2.4 concluir que M es un módulo alto.
   I) Si $N/G(M)$ contiene un submódulo $K/G(M)$ tal que $G\left[(N/G(M))/(K/G(M))\right]$ no es noetheriano, por hipótesis

$$H(G\left[(N/G(M))/(K/G(M))\right]) \subsetneq G\left[(N/G(M))/(K/G(M))\right],$$

   y así del Corolario 2.2.15, $N/G(M)$ es un módulo alto.

[13] Ver Teorema 3.1.5

II) Si por el contrario, para todo submódulo $K/G(M)$ de $N/G(M)$ pasa que $G\left[(N/G(M))/(K/G(M))\right]$ es noetheriano, en particular pasa esto para los submódulos finitamente generados de $N/G(M)$. Además del Corolario 2.2.13 $G(N/G(M)) = (0)$, así contamos con las hipótesis de la Proposición 2.2.16 y es posible concluir que $N/G(M)$ es un módulo alto. ■

Corolario 2.2.20. *Sean R un anillo alto y M un módulo tal que todo submódulo propio de M es un módulo noetheriano. Entonces M es un módulo noetheriano.*

Demostración. Como Todo submódulo propio de M es noetheriano, entonces todo submódulo propio de M tiene dimensión de Krull. Luego por la Observación 2.1.3, M es un módulo con dimensión de Krull y al ser R un anillo alto, M es un módulo noetheriano. ■

Corolario 2.2.21. *Si R es un anillo alto y M es un módulo artiniano, entonces M es un módulo noetheriano.*

Demostración. como M es un módulo artiniano, entonces M tiene dimensión de Krull y entonces M es un módulo noetheriano. ■

Corolario 2.2.22. *Si R es un anillo máx, entonces R es un anillo alto.*

Demostración. Sea M un módulo no noetheriano, como R es un anillo máx, M tiene un submódulo máximo N que debe ser no noetheriano, pues en caso contrario, siendo que M/N simple, M/N es noetheriano y en consecuencia M sería noetheriano.[14] ■

Proposición 2.2.23. *Si R es un anillo, entonces el anillo de polinomios $R[x]$ no es un anillo alto.*

Demostración. Sean M un ideal izquierdo máximo de R, $S = R/M$ el módulo cociente simple, $\pi : R \to R/M$ la proyección natural y $u = \pi(1)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $S_i = S$ y

$$T = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i.$$

Ahora tomemos $u_i = (t_i) \in T$, donde $t_j = 0$ si $j \neq i$ y $t_j = u$ si $j = i$, se verifica que $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un subconjunto generador e independiente de T. Si definimos para $x \in R[x]$ y $\lambda \in R$

$$xu_1 = 0, \;\; xu_{i+1} = u_i \;\; y \;\; x\lambda u_i = \lambda x u_i \;\; para\ todo\ i \in \mathbb{N}.$$

Dado que $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un conjunto generador de T, queda bien definida la acción de elementos de $R[x]$ sobre elementos de T y así T es un $R[x]$-módulo, que no es finitamente generado y en consecuencia no es un módulo noetheriano. Ahora por como está definida la acción de $R[x]$ sobre T se verifica que todo submódulo propio de T es noetheriano y entonces por el Corolario 2.2.20 es posible concluir que $R[x]$ no es un anillo alto. ■

Corolario 2.2.24. *Si R es un anillo, entonces el anillo de polinomios $R[x]$ no es un anillo máx.*

†

[14]Ver Teorema 3.1.5

Apéndice

En esta sección se presentan una serie de resultados, sin demostración. Éstos son usados ampliamente en las demostraciones de trabajo que se ha presentado, se da la referencia exacta de donde se puede encontrar una demostración de cada uno de ellos.

Teorema 3.1.1. [1]*[(Segundo Teorema de Isomorfismo)] Si es M un módulo y N y K son submódulos de M, entonces $(H+K)/K \simeq H/(H \cap K)$.*

Teorema 3.1.2. [1]*[(Tercer Teorema de Isomorfismo)] Si M es un módulo y N y K son submódulos de M tal que $K \leqslant N$, entonces $M/N \simeq (M/K)/(N/K)$.*

Teorema 3.1.3. [2]*[(Teorema de Correspondencia)] Sean M y N módulos y $\varphi : M \to N$ un epimorfismo con núcleo K. Si $L(M/K)$ y $L(N)$ denotan las retículas de submódulos de M/K y N respectivamente, entonces las asignaciones*

$$\begin{aligned} L(M/K) &\xrightarrow{\widetilde{\varphi}} L(N) \\ L &\longmapsto \varphi(L) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L(N) &\xrightarrow{\widehat{\varphi}} L(M/K) \\ L &\longmapsto \varphi^{-1}(L) \end{aligned}$$

son isomorfismos de retículas. Además $\widehat{\varphi} \circ \widetilde{\varphi} = Id_{L(M/K)}$ y $\widetilde{\varphi} \circ \widehat{\varphi} = Id_{L(N)}$.

Proposición 3.1.4. [3] *Sean M un módulo y K y L submódulos de M. Si $K \subseteq L$, entonces $L \cap (K+N) = K + (L \cap N)$.*

Teorema 3.1.5. [4] *Sean M un módulo y N un submódulo de M. Entonces M es un módulo noetheriano si y sólo si N y M/N son módulos noetherianos.*

Corolario 3.1.6. [5] *Si $n \in \mathbb{N}$ y $\{N_i\}_{i=}^{n}$ es una colección de módulos noetherianos, entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ es un módulo noetheriano.*

[1]Ver [AF] 3.7 Corollary [The Isomorphism Theorems] pág. 46.
[2]Ver [AF] 3.8 Corollary pág. 46.
[3]Ver [Be] Theorem 2.1.12 pág. 75.
[4]Ver [Ka] 6.1.2 Theorem II pág. 147.
[5]Ver [Ka] 6.1.3 Corollary pág. 150.

Teorema 3.1.7. [6] *Sean R un anillo y M un módulo. Son equivalentes para M*

1) *M es un módulo noetheriano.*
2) *Toda familia no vacía de submódulos de M posee un elemento máximo.*
3) *Toda cadena ascendente de submódulos de M es finita.*
4) *Todo submódulo de M es finitamente generado.*

Teorema 3.1.8. [7] *Sean M un módulo y N un submódulo de M. Entonces M es un módulo artiniano si y sólo si N y M/N son módulos artinianos.*

[6] Ver [SaP] Capítulo Teorema 1 pág 55.
[7] Ver [Ka] 6.1.2 Theorem I pág. 147.

Tabla de notaciones

$\in$	Pertenecer.	
$\varnothing$	Conjunto vacío.	
$\subseteq$	contención.	
$\subsetneq$	Contención propia.	
$\mathfrak{P}$	conjunto de lo números primos positivos	
$\mathbb{N}$	Conjunto de lo números naturales	
$\mathbb{Z}$	Conjunto de lo números enteros	
$\mathbb{Q}$	Conjunto de lo números racionales	
Ord	La clase de los ordinales	
$N \leqslant M$	N es submódulo de M	Pág. 1
$\langle A \rangle$	Submódulo izquierdo generado por X.	Pág. 1
$Rad(M)$	Radical de Jacobson del módulo M.	Pág. 1
$Soc(M)$	Soclo de M.	Pág. 1
$J(R)$	Radical de Jacobson del anillo R.	Pág. 1
$\simeq$	M es isomorfos a N	Pág. 2
$\bigoplus$	Suma directa	Pág. 2
$\bar{r}$ o $[r]_{R/I}$	clase de r en R/I	Pág. 3
$:=$	por definición	Pág. 5
$L \wedge N := L \cap N$	Ínfimo de dos submódulos	Pág. 5
$L \vee N := \langle L \cup N \rangle$	Máximo de dos submódulos	Pág. 5
$[m]_{M/IM}$	clase de m en M/IM	Pág. 3
$L(M)$	Longitud de Loewy	Pág. 6
$An(M)$	Anulador de M.	Pág. 7
$LD(M)$	Longitud Dual de Loewy	Pág. 10
$\mid A \mid$	Cardinalidad del conjunto A	Pág. 13
$E(M)$	Capsula inyectiva del módulo M	Pág. 16
$N \lneqq M$	N es submódulo propio de M	Pág. 21

Bibliografía

[AF] Anderson F. W. and Fuller K. R., *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag New York 2nd ed. 1992.

[AM] Atiyah M. F. and Macdonald I. G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc 1969.

[BaR] Baer R., *Abelian Groups that are direct summands of every containing abelian group*, Bull. Amer. Math. Soc., No. 46, 1940, 800-806.

[BaH] Bass H., *Finitistic Dimension and a Homological Generalization of Semi-Primary Rings*, Transactions of the Amer. Math. Soc., Vol 95 No. 3, Jun. 1960, 466-488.

[Be] Beachy J. A, *Introductory lectures on rings and modules*, United Kingdom at the University Press, London Mathematical Society Student Texts 47, 1999.

[BG] Boyle A. K. and Goodearl K. R., *Rings over which certain modules are injective*, Pacific J. Math. 58 1975, 43-53. 1992.

[Fa] Faith C., *Algebra: Rings, Modules and Categories I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1973.

[Fu1] Fuchs L., *Infinite Abelian Groups Vol. 1*, Academic Press New York-San Frencisco-London 1970.

[Fu2] Fuchs L., *Infinite Abelian Groups Vol. 2*, Academic Press New York-San Frencisco-London 1970.

[GR] Gordon R. and Robson J. C., *Krull dimension*, Mem. Amer. Math. Soc., No. 133, 1973.

[Ha1] Hamser R. M., *Commutative, noetherian rings over which every module has a maximal submodule*, Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol. 17 No. 6, Dec. 1966 pp. 1471-1472.

[Ha2] Hamser R. M., *Commutative rings over which every module has a maximal submodule*, Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol. 18 1967 pp. 1133-1137.

[He] Herstein I. N., *Noncommutative rings*, The carus mathematical monographs, The mathematical association of america, 1968.

[Ka] Kasch, *Modules and Rings*, Acadecmic Press A Atranslation of Moduln und Ringe, London 1982.

[Ne] Von Neumann J., *On regular Rings*, Proc Natl Acad Sci U S A. 1936 Vol 22 707–713.

[Pa] Passman D. S., *A course in ring theory*, American Methematical Society Chelsea Publishing 1991.

[PG] R. Rentschler and P. Gabriel, *Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 265 (1967), A712-A715. MR 37 #243.

[Ro] Rotman J. J., *An introduction to the theory of groups*, Springer-Verlag Fourth Edition 1995.

[RZ] Rosenberg A. and Zelinsky D., *Finitess of the inyective hull*, Math. A. 70 (1959), 372-380.

[Sa] Sarath B., *Krull dimension and noetheriannes*, Illinois J. Math. 20 1976 329-335.

[SaP] Samuel P., *Teoría algebraica de los numeros*, Ediciones Omega S. A. Barcelona 1972.

[St] Stewart I., *Algebraic Number Theory*, Chapman and Hall London-New York, 1979.

[Tu] Tuganbaev A. A., *Rings whose nonzero modules have maximal submodule*, Journal of Mathematical Sciences, Vol 109, No. 3 2002 1589-1640.

[Va] Vazquez V. R., *Anillos semiartinianos con factores de Loewy no singulares*, Tesis, Facultad de Ciencias UNAM 2009

[Yo] Yousif, *V-módules whit Krull dimension*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 37 1988 237-240

Índice alfabético