



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

CORRELACIONES CUÁNTICAS  
DE UNO Y DOS ÁTOMOS  
INTERACTUANDO CON CAMPOS  
ELECTROMAGNÉTICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A :  
LUIS OCTAVIO CASTAÑOS CERVANTES

DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD

COMITÉ TUTORAL:  
DR. RENATO LEMUS CASILLAS  
DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA



MÉXICO, D.F. 2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico esta tesis y todo el esfuerzo realizado en ella a Diós y a mis padres, Octavio y Estrella.

# Agradecimientos

En primer lugar quiero darle las gracias a mis padres Octavio y Estrella por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida y porque siempre han hecho todo lo posible por darme lo mejor.

En segundo lugar quiero agradecer a mi tutor principal, la Dra. Rocío Jáuregui, por haber aceptado dirigir esta tesis, por haber revisado cuidadosamente el manuscrito de la misma y por el gran apoyo que me brindó a lo largo de mis estudios de posgrado.

También quiero agradecer al resto de mi comité tutorial, el Dr. Renato Lemus y el Dr. Ramón López-Peña, por todo el apoyo que me brindaron a lo largo de mis estudios de posgrado y por haber revisado cuidadosamente el manuscrito de la tesis.

Quiero agradecer a todos mis sinodales Dr. Pablo Barberis, Dr. Eduardo Gómez, Dr. Shahen Hacyan, Dr. Héctor Moya y Dr. José Récamier por haber revisado cuidadosamente la tesis y por todas las correcciones y los valiosos comentarios que hicieron y que ayudaron a enriquecer el trabajo realizado.

Por último quiero agradecer a todos mis compañeros del *gallinero* por todos los momentos inolvidables que pasamos y que hicieron de mis estudios de posgrado una experiencia fabulosa.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. El operador de densidad y sistemas abiertos</b>	<b>1</b>
1.1. El operador de densidad . . . . .	1
1.2. Sistemas abiertos . . . . .	7
<b>2. Correlaciones</b>	<b>17</b>
2.1. Notación . . . . .	18
2.2. Matriz de densidad de un qubit . . . . .	20
2.3. Matriz de densidad de dos qubits . . . . .	24
2.4. Entropías e información . . . . .	28
2.5. Enredamiento . . . . .	39
2.6. Discordia cuántica . . . . .	51
2.7. Una propuesta de correlación clásica . . . . .	55
2.8. La discordia geométrica . . . . .	63
<b>3. Un átomo ultrafrío en una cavidad</b>	<b>69</b>
3.1. El modelo . . . . .	70
3.2. Aproximación semiclásica adiabática . . . . .	74
3.3. La simulación numérica . . . . .	76
3.4. Resultados . . . . .	79
3.4.1. Resonancia fuera del régimen de resonancias de transmisión . . . . .	79
3.4.2. Desentonamiento azul fuera del régimen de resonancias de transmisión . . . . .	84
3.4.3. Desentonamiento rojo fuera del régimen de resonancias de transmisión . . . . .	86
3.4.4. Régimen de resonancias de transmisión . . . . .	88
3.5. Conclusiones . . . . .	92
<b>4. Dos átomos</b>	<b>97</b>
4.1. El sistema de estudio . . . . .	97
4.2. Dos átomos interactuando con un reservorio . . . . .	103
4.2.1. El caso del vacío . . . . .	119
4.2.2. $\rho_A(0) =  1, 1\rangle\langle 1, 1 $ . . . . .	121
4.2.3. $\rho_A(0) =  +-\rangle\langle +- $ . . . . .	123

4.2.4.	El caso de un estado térmico con número de fotones grande . . . . .	125
4.2.5.	$\rho_A(0) =  0, 0\rangle\langle 0, 0 $ . . . . .	129
4.3.	Dos átomos forzados por un láser . . . . .	130
4.4.	Dos átomos forzados e interactuando con un reservorio . . . . .	133
4.4.1.	$G(\mathbf{r}_2) = 0$ . . . . .	136
4.4.2.	$G(\mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_2)$ . . . . .	146
4.5.	Introducción del movimiento de centro de masa . . . . .	152
4.5.1.	Un operador de densidad aproximado . . . . .	152
4.5.2.	Dos átomos con movimiento de centro de masa cuantizado . . . . .	155
4.5.3.	$\rho_A(0) =  0, 0\rangle\langle 0, 0 $ . . . . .	159
4.5.4.	$\rho_A(0) =  +-\rangle\langle +- $ . . . . .	162
4.5.5.	Extensión a estados de número . . . . .	164
4.6.	Conclusiones . . . . .	168
	<b>Conclusiones generales</b>	<b>173</b>
	<b>Apéndice</b>	<b>177</b>
	<b>Artículos publicados</b>	<b>181</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>181</b>

# ABSTRACT

In this thesis we characterize and quantify quantum correlations such as entanglement and quantum discord present in systems of one and two two-level atoms interacting with electromagnetic fields.

In the first chapter we introduce the concepts of a density operator and of an open quantum system. We present some of their properties as well as a method to calculate the Born-Markov-secular master equation that approximately describes the evolution of a system coupled to a reservoir.

In the second chapter we introduce the concept of a qubit and we present some of the measures which are used to quantify quantum correlations. Special emphasis is made on two qubit systems.

In the third chapter we study the temporal evolution of the properties of a two-level atom coupled to a single-mode cavity field without dissipation and with its center-of-mass motion quantized in one dimension. It is shown that, starting with a separable state, genuine tripartite entangled states can be generated under the resonance condition. The onset of Rabi oscillations is analyzed and explicit predictions for properties like the emission probability are given for the resonance and detuned conditions. Transmission-resonance effects on entanglement and other properties are also analyzed. Comparisons with the semiclassical adiabatic approximation are also made.

In the fourth chapter we consider two two-level atoms fixed at different positions, possibly driven by a monochromatic laser field, and interacting collectively with the quantum electromagnetic field. A Born-Markov-secular master equation is used to describe the dynamics of the two atoms and its regime of validity is studied. The two atoms' steady-state is obtained analytically, and the populations of the energy levels of the free atoms, entanglement, quantum discord, and degree of mixed-ness are calculated. The behaviour and relationships between these quantities are studied.

In the final part of the fourth chapter we consider two two-level atoms interacting collectively with all the modes of the quantum electromagnetic field. The center-of-mass motion of each atom is quantized in three dimensions and each atom is placed in a harmonic oscillator potential. We describe a method that factorizes an approximate density operator of the two atoms in parts which evolve under different portions of the Hamiltonian. We apply this method to the system under consideration to study the effect of the uncertainty in the position of the atoms on the dissipation rates and on the entanglement between the internal degrees of freedom of the two atoms. We find that the uncertainty in position can give rise to smaller dissipation rates. This in turn affects the entanglement which may decay exponentially with smaller decay rates or may even decay asymptotically by a power law.

The general conclusions are given in the final chapter.

# RESUMEN

En esta tesis caracterizamos y cuantificamos las correlaciones cuánticas de enredamiento y discordia cuántica en sistemas de uno y dos átomos de dos niveles interactuando con campos electromagnéticos.

En el primer capítulo introducimos los conceptos de operador de densidad y de sistema cuántico abierto. Presentamos algunas de sus propiedades y un método para calcular la ecuación maestra de Born-Markov-secular que describe aproximadamente la evolución de un sistema acoplado a un reservorio.

En el segundo capítulo introducimos el concepto de qubit y presentamos algunas medidas utilizadas para cuantificar correlaciones cuánticas. Se hace especial énfasis en sistemas de dos qubits.

En el tercer capítulo estudiamos la evolución temporal de las propiedades de un átomo de dos niveles acoplado a un campo de una cavidad de un solo modo. No se consideran procesos disipativos y se cuantiza el movimiento de centro de masa del átomo en una dimensión. Se muestra que, empezando de un estado separable, estados con enredamiento tripartita genuino se pueden generar bajo la condición de resonancia. Se analiza el comienzo de las oscilaciones de Rabi y se hacen predicciones sobre propiedades como la probabilidad de emisión para las condiciones de resonancia y desentonamiento. También se analizan los efectos de las resonancias de transmisión sobre el enredamiento y otras propiedades. Además, se hacen comparaciones con las predicciones de la aproximación adiabática semiclásica.

En el cuarto capítulo consideramos dos átomos de dos niveles en posiciones fijas posiblemente distintas, posiblemente forzados por un campo de un láser monocromático e interactuando colectivamente con el campo electromagnético cuántico. Se usa una ecuación maestra de Born-Markov-secular para describir la dinámica de los dos átomos y se estudia su régimen de validez. El estado estacionario de los dos átomos se obtiene analíticamente y se calculan las poblaciones de los niveles de energía de los dos átomos, el enredamiento, discordia cuántica y grado de mezcla. También se estudian el comportamiento de estas cantidades y sus relaciones.

En la parte final del cuarto capítulo consideramos dos átomos de dos niveles interactuando colectivamente con todos los modos del campo electromagnético cuántico. El movimiento de centro de masa de cada átomo se cuantiza en tres dimensiones y cada átomo es colocado en un potencial de oscilador armónico. Describimos un método que factoriza un operador de densidad aproximado de los dos átomos en partes que evolucionan bajo porciones diferentes del hamiltoniano. Aplicamos este método al sistema bajo consideración para estudiar el efecto de la incertidumbre en la posición de los átomos en las tasas de disipación y en el enredamiento entre los grados de libertad internos de los dos átomos. Encontramos que una incertidumbre en la posición puede dar lugar a tasas de disipación más pequeñas. Este hecho provoca que el enredamiento decaiga exponencialmente con tasas más pequeñas o como una ley de potencias.

Las conclusiones generales son dadas en el último capítulo .

# Introducción

Una de las características más distintivas de la mecánica cuántica es el principio de superposición de estados. Éste surge como una consecuencia del siguiente postulado de la mecánica cuántica: a cualquier tiempo el estado de un sistema físico está definido por un vector (ket) que pertenece al espacio de estados del sistema. Como este último tiene estructura de espacio vectorial, el postulado implica el principio de superposición de estados: cualquier combinación lineal (también llamada *superposición coherente*) de kets es un posible estado del sistema [1]. Este principio en apariencia sencillo tiene implicaciones profundas y ha jugado un papel central en el desarrollo de la mecánica cuántica desde sus inicios. En particular, permite la aparición de efectos de interferencia como los del experimento de la doble rendija de Young y la existencia de correlaciones que no se pueden explicar clásicamente como el enredamiento [2]. Además, el principio de superposición se encuentra en la raíz de aparentes paradojas que han servido como incentivo para buscar tener un mejor entendimiento de la mecánica cuántica [2].

Una de las paradojas más famosas es la del gato de Schrödinger que surge de querer extender la aplicabilidad del principio de superposición del mundo microscópico descrito por la mecánica cuántica al mundo macroscópico [2]. Cabe mencionar que en los últimos años se han llevado a cabo un número creciente de experimentos que han demostrado la validez del principio de superposición en escalas cada vez más grandes. Entre éstos se encuentran experimentos con átomos en cavidades, iones atrapados y moléculas  $C_{60}$  y  $C_{70}$  (ver [2] y las referencias ahí citadas). Además, estos experimentos han sugerido que la imposibilidad de observar efectos asociados al principio de superposición se puede atribuir a interacciones del sistema de interés con otros sistemas llamados *ambiente*. Esto es, el sistema de interés (por ejemplo, un átomo, una molécula o un grado de libertad de éstos) no se puede aislar completamente e interacciona con un ambiente (por ejemplo, el campo electromagnético u otro grado de libertad del átomo o molécula) que inhibe la observación de los efectos coherentes en el sistema de interés. Esta destrucción de coherencia cuántica en el sistema de interés debido a la interacción con un ambiente es llamada *decoherencia*.

En las últimas dos décadas ha habido un creciente interés por cuantificar y caracterizar una de las consecuencias del principio de superposición: las correlaciones cuánticas. Este interés fue motivado inicialmente por el descubrimiento de que cierto tipo de correlaciones cuánticas conocidas como enredamiento podrían ser utilizadas como un recurso que brindaría ventajas significativas en cómputo y procesamiento de información [3]-[5]. Como se pudo haber anticipado por el párrafo anterior, el estudio de la dinámica de correlaciones cuánticas está íntimamente asociado con el estudio de sistemas abiertos, esto es, sistemas cuánticos acoplados a otros sis-

temas cuánticos llamados ambiente [6]. Esto se debe a que las interacciones con un ambiente normalmente dan lugar a la decoherencia, esto es, a la destrucción de superposiciones coherentes en el sistema de interés. Por esta razón, un tema de investigación muy activo actualmente es el de estudiar los efectos de ambientes que poseen o no memoria sobre las correlaciones de sistemas cuánticos [7]-[13]. Además, otro tema de gran interés es diseñar ambientes que propicien la generación de enredamiento o que permitan que éste decaiga lentamente. [14].

El propósito de esta tesis es el estudiar las correlaciones que pueden existir en sistemas de uno y dos átomos interactuando con campos electromagnéticos (clásicos y cuánticos) cuando se toma en cuenta ya sea la posición o el movimiento de centro de masa de cada átomo. Mencionamos que, en general, el área de interacción de radiación con materia, que abarca temas tan diversos que van desde el estudio de conceptos fundamentales como la cuantización del campo electromagnético hasta aplicaciones más prácticas como el enfriamiento y manipulación de átomos y moléculas [15], [16], se ha visto afectada grandemente por el interés de estudiar correlaciones. Esto se debe a que sistemas de átomos interactuando con campos electromagnéticos son actualmente piedras angulares en muchos experimentos para generar estados enredados y para diseñar protocolos de información cuántica.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el primer capítulo vamos a introducir el concepto de operador de densidad. Este objeto generaliza el concepto de ket como estado de un sistema y contiene toda la información medible de éste. Además, permite determinar el estado de subsistemas de sistemas más grandes y puede describir adecuadamente ciertos tipos de ensamblajes en mecánica cuántica. Como consecuencia de estas propiedades, el operador de densidad permite estudiar las correlaciones entre varios subsistemas y todas las medidas de correlaciones que veremos giran en torno a él. Posteriormente, vamos a introducir el concepto de sistema abierto. Nuevamente, el concepto de operador de densidad va a jugar un papel fundamental, pues se quiere describir un subsistema de un sistema más grande. Presentaremos un método para deducir la ecuación maestra de Born-Markov-secular, esto es, un método que permite obtener una ecuación que va a describir adecuadamente la evolución del operador de densidad del subsistema de interés cuando ciertas condiciones son válidas. Este método es bastante poderoso y será utilizado particularmente en el Capítulo 4 para establecer las ecuaciones que gobiernan la dinámica del estado del sistema que estudiaremos.

En el segundo capítulo vamos a introducir los conceptos de correlación y de qubit. Definiremos lo que es el enredamiento, presentaremos algunas medidas para cuantificar estas correlaciones e introduciremos la discordia cuántica. Haremos especial énfasis en la interpretación que tienen estas medidas y las aplicaremos al caso de dos qubits. Las cantidades que se van a introducir en este capítulo resultan ser imprescindibles, pues los resultados de los siguientes capítulos se basan en caracterizar las correlaciones entre varios subsistemas usando las medidas introducidas en este capítulo.

En el tercer capítulo vamos a entrar al área de interacción de radiación con materia conocida como electrodinámica cuántica en cavidades (CQED). Ésta consiste en el estudio de las propiedades de átomos interactuando con fotones en cavidades. Un sistema experimental muy utilizado en CQED es el micromáser, pues ha permitido verificar algunas predicciones de la mecánica cuántica como las oscilaciones de Rabi [17], la existencia de estados de Fock del campo electromagnético y la decoherencia [19, 20, 21, 24, 25]. En el esquema más básico los

experimentos con el micromáser están constituidos por una fuente de átomos de Rydberg y una cavidad electromagnética de gran calidad que puede albergar un campo eléctrico de un solo modo [21]. Los átomos salen de la fuente a velocidades del orden de 400 m/s en un estado excitado, atraviesan uno por uno la cavidad y finalmente salen. Mientras los átomos están en la cavidad interactúan con el campo eléctrico contenido allí y pueden emitir o no un fotón dependiendo del desintonamiento que existe entre la frecuencia del campo de la cavidad y la frecuencia privilegiada de la transición atómica. Usando este aparato experimental se han logrado generar diversos estados enredados entre los átomos y el campo de la cavidad [19, 21, 25]. El trabajo de este capítulo surgió de querer responder la siguiente pregunta: ¿Qué sucedería si el mismo experimento se llevara a cabo con átomos fríos que se mueven a velocidades del orden de centímetros por segundo? En este capítulo analizaremos las propiedades de este sistema y veremos que la probabilidad de emisión y el enredamiento del sistema cambian drásticamente.

En el cuarto capítulo pasaremos a estudiar un sistema compuesto por dos átomos. Primero consideraremos que los átomos están en posiciones fijas interactuando con todos los modos del campo electromagnético considerado como reservorio. Determinaremos la ecuación maestra Born-Markov-secular que describe la evolución del operador de densidad del sistema de dos átomos y la resolveremos analíticamente. Investigaremos la posibilidad de que los átomos se puedan enredar cuando interactúan entre sí a través del reservorio y veremos que el mecanismo que permite este enredamiento es el intercambio de fotones emitidos espontáneamente. Después consideraremos que los átomos están, además, forzados por el campo eléctrico de un láser monocromático. Calcularemos analíticamente la solución estacionaria del sistema para dos configuraciones de los átomos e investigaremos diversas correlaciones que existen entre ellos además de los mecanismos responsables de su generación. Finalmente, introduciremos el movimiento de centro de masa de cada átomo cuando éstos interactúan sólo con el reservorio. Para esto presentaremos un método que permite la incorporación de estos grados de libertad de forma aproximada y tratando a los átomos como partículas distinguibles. Cerramos el capítulo viendo los efectos de la dispersión en la posición de los átomos sobre las tasas de disipación y de decaimiento del enredamiento. Las conclusiones generales aparecen al final.

# Capítulo 1

## El operador de densidad y sistemas abiertos

En la primera sección de este capítulo vamos a introducir el operador de densidad junto con algunas de sus propiedades más importantes. Este operador surge del deseo de aprovechar al máximo la información incompleta que uno puede tener sobre un sistema y, como veremos abajo, contiene toda la información medible. Esto es, el operador de densidad nos permite calcular todas las propiedades físicas del sistema. Veremos que el operador de densidad generaliza el concepto de estado cuántico, pues nos permite describir el estado en que se encuentra un subsistema de un sistema más grande. Por esta razón su introducción resulta imprescindible tanto en el estudio de correlaciones (como, por ejemplo, el enredamiento) en sistemas cuánticos como en ciertos tratamientos de sistemas abiertos. Éstos serán introducidos en la segunda sección junto con un método para obtener la ecuación maestra de Born-Markov-secular que permite describir de forma aproximada la evolución de un sistema de interés acoplado a un reservorio cuando se cumplen ciertas condiciones sobre las que elaboraremos más abajo.

Todos los resultados presentados en este capítulo serán usados extensivamente en los demás y resultan fundamentales para su entendimiento. Es meritorio mencionar que aquí presentaremos las propiedades de los operadores reducidos y de la traza parcial necesarias para hacer cálculos con seguridad y rapidez, ya que, éstas no aparecen normalmente en libros de mecánica cuántica.

### 1.1. El operador de densidad

En la práctica generalmente ocurre que no conocemos exactamente el estado en que se encuentra un sistema. Esto es, sabemos que el sistema fue preparado en alguno de los estados  $|\psi_1\rangle$ ,  $|\psi_2\rangle$ , ..., pero simplemente no sabemos en cuál. Entonces se le puede asignar a cada  $|\psi_i\rangle$  una probabilidad  $p_i$  de que el sistema se encuentre en este estado y decimos que el operador de densidad del sistema es

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| . \quad (1.1)$$

Cabe mencionar que los estados  $|\psi_i\rangle$  pueden no ser ortogonales, pero siempre los podemos



escoger normalizados. Además, el conjunto de probabilidades  $\{p_i\}$  debe satisfacer las condiciones

$$\sum_i p_i = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

para poder ser interpretadas como probabilidades.

En una situación como la descrita arriba decimos que estamos trabajando con una *mezcla estadística propia* de los estados  $|\psi_i\rangle$  con probabilidades  $p_i$ . Se debe tener cuidado en no confundir una mezcla estadística de estados con una superposición de estados, puesto que son situaciones radicalmente distintas. En general, en la última situación se pueden observar efectos de interferencia, mientras que esto jamás puede ocurrir en la primera. De hecho, es imposible describir un sistema que se encuentra en una mezcla estadística de estados mediante una superposición de estados.

El operador de densidad en (1.1) satisface una serie de propiedades muy especiales que vamos a considerar para poder definir un operador de densidad general.

Sea  $\mathcal{A}$  un sistema con espacio de estados  $\mathcal{H}_A$ . Un operador de densidad  $\rho$  de  $\mathcal{A}$  es un operador lineal que actúa en  $\mathcal{H}_A$  y que tiene las siguientes propiedades:

1.  $\rho$  es un operador hermitiano que tiene una base ortonormal de eigenvectores para  $\mathcal{H}_A$ .
2.  $\rho$  es positivo semi-definido, es decir,

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } |\psi\rangle \in \mathcal{H}_A.$$

3.  $\rho$  tiene traza 1, es decir,  $\text{Tr}(\rho) = 1$ .

Como consecuencia de estas propiedades, siempre podemos expresar a  $\rho$  en la forma

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.2)$$

donde  $|\psi_i\rangle$  es un eigenvector de  $\rho$  con eigenvalor  $\lambda_i$ ,  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  para todo  $i$  y  $\sum_i \lambda_i = 1$ . La expresión (1.2) es llamada la *descomposición espectral* de  $\rho$ .

Arriba mencionamos que el operador de densidad contiene toda la información medible de un sistema. Esto se debe a que nos permite calcular todos los valores esperados y las probabilidades de mediciones en  $\mathcal{A}$ .

Supongamos que  $O$  es un observable,  $b_n$  es un eigenvalor de  $O$  y  $P_n$  es el proyector ortogonal sobre el eigenspacio asociado a  $b_n$ . Entonces el valor esperado de  $O$  y la probabilidad de obtener  $b_n$  en una medición de  $\rho$  se pueden calcular respectivamente como sigue:

$$\begin{aligned} (1) \quad \langle O \rangle &= \text{Tr}(\rho O), \\ (2) \quad P(b_n) &= \text{Tr}(P_n \rho) = \text{Tr}(P_n \rho P_n). \end{aligned}$$

Más aún, el operador de densidad del sistema justo después de una medición de  $O$  en la que se obtuvo  $b_n$  como resultado es

$$\rho' = \frac{1}{P(b_n)} P_n \rho P_n. \quad (1.3)$$

Mencionamos que una medición de este tipo se llama *medición selectiva*. La razón de este nombre es la siguiente. Supongamos que tenemos  $N \gg 1$  copias del sistema  $\mathcal{A}$ . Estas  $N$  copias constituyen un ensamble de sistemas cuánticos que se describen mediante el operador de densidad  $\rho$ . Ahora medimos  $O$  y para  $N \cdot P(b_n)$  copias se obtendrá el resultado  $b_n$ . Entonces nos quedamos con estas  $N \cdot P(b_n)$  copias y desechemos el resto, esto es, seleccionamos las  $N \cdot P(b_n)$  copias del sistema  $\mathcal{A}$  para las cuales se obtuvo el resultado  $b_n$  y este es el nuevo ensamble de sistemas cuánticos con el que se trabaja. De ahí el nombre de medición selectiva. Por el contrario, una *medición no selectiva* es aquélla en la que no se desechan las copias asociadas con otros resultados de la medición, sino que, todas se preservan. En este caso el estado del sistema justo después de la medición es

$$\rho' = \sum_n P_n \rho P_n, \quad (1.4)$$

donde la suma se lleva a cabo sobre todos los eigenvalores distintos de  $O$ , es decir, sobre todos los resultados posibles de la medición.

Ahora vamos a dividir el conjunto de todos los operadores de densidad en dos clases muy especiales. Sea  $\rho$  un operador de densidad de  $\mathcal{A}$ . Entonces

1.  $\rho$  representa un estado puro (o, más brevemente,  $\rho$  es puro) si se puede expresar de la forma

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \text{para algún } |\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \text{ tal que } \langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

2.  $\rho$  representa un estado mixto (o, más brevemente,  $\rho$  es mixto) si no representa un estado puro.

Con base en la definición anterior vemos que en (1.2) sólo va a aparecer un sumando cuando se tenga un estado puro, mientras que en un estado mixto van a aparecer varios sumandos con coeficientes todos no-negativos y menores a uno. Además, vemos que en un estado puro conocemos con precisión en qué estado se encuentra el sistema.

Cuando  $\mathcal{A}$  es de dimensión finita igual a  $N$ , vamos a decir que  $\rho$  está mezclado al máximo si  $\lambda_i = 1/N$  para cada  $i$  en (1.2). Este caso representa una situación de *máxima ignorancia*, puesto que es igualmente probable que el sistema se encuentre en un estado o en otro.

Aquí es preciso hacer un comentario sobre la interpretación del operador de densidad. Si se nos da el operador de densidad de  $\mathcal{A}$  en la forma

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha |\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\alpha|, \quad (1.5)$$

con  $q_\alpha$  números no negativos que suman 1 y no tenemos información sobre cómo se preparó el sistema, entonces no podemos inferir que el sistema se preparó en alguno de los estados  $|\chi_\alpha\rangle$ . La razón de esto es que todo operador de densidad mixto se puede expresar de un número infinito de maneras que tengan la misma estructura que en (1.5). Para ver esto se puede usar el siguiente argumento. Sea  $\mathbb{U} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  una matriz unitaria de  $N \times N$  y  $|\xi_\alpha\rangle = \sum_{j=1}^N \mathbb{U}_{\alpha j} \sqrt{q_j} |\chi_j\rangle$  para  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ . Entonces tenemos que

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^N |\xi_\alpha\rangle\langle\xi_\alpha| = \sum_{\alpha=1}^N r_\alpha |\bar{\xi}_\alpha\rangle\langle\bar{\xi}_\alpha|, \quad (1.6)$$

donde  $r_\alpha = \langle \xi_\alpha | \xi_\alpha \rangle \geq 0$ ,  $|\bar{\xi}_\alpha\rangle = (1/\sqrt{r_\alpha})|\xi_\alpha\rangle$  si  $r_\alpha \neq 0$  y  $|\bar{\xi}_\alpha\rangle = |\xi_\alpha\rangle$  si  $r_\alpha = 0$ . Por lo tanto, hay al menos tantas representaciones de  $\rho$  en la forma (1.5) como matrices unitarias en  $\mathbb{C}^{N \times N}$ . Notamos que todas son distintas porque  $\rho$  es mixto.

Más aún, supongamos que  $\dim \mathcal{H}_A = M$  y que  $\rho$  es un operador de densidad de  $\mathcal{A}$  tal que

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{N_1} q_\alpha |\chi_\alpha\rangle \langle \chi_\alpha| = \sum_{\alpha=1}^{N_2} r_\alpha |\xi_\alpha\rangle \langle \xi_\alpha|, \quad (1.7)$$

donde  $q_\alpha$  ( $r_\alpha$ ) son números no negativos que suman 1. La pregunta natural aquí es ¿qué relación hay entre  $|\chi_\alpha\rangle$  y  $|\xi_\alpha\rangle$ ? Resulta que están conectados mediante una matriz unitaria como explicamos a continuación. Sean  $N = \max\{N_1, N_2, M\}$ ,  $|\chi_\alpha\rangle = 0$  para  $\alpha = N_1 + 1, \dots, N$  y  $|\xi_\alpha\rangle = 0$  para  $\alpha = N_2 + 1, \dots, N$ . Entonces se puede mostrar que existe una matriz unitaria  $U \in \mathbb{C}^{N \times N}$  tal que

$$\sqrt{q_\alpha} |\chi_\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{N_1} U_{\alpha j} \sqrt{r_j} |\xi_j\rangle \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N_2). \quad (1.8)$$

Con estos dos últimos resultados queda claro que todas las representaciones distintas de  $\rho$  como en (1.5) están conectadas mediante transformaciones unitarias.

Usando las propiedades de  $\rho$  se puede probar el siguiente resultado que nos da un criterio para distinguir entre estados puros y estados mixtos:

$$\begin{aligned} \rho \text{ representa un estado puro} &\Leftrightarrow \rho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad \text{para algún } |\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \text{ con } \langle \psi | \psi \rangle = 1, \\ &\Leftrightarrow \rho^2 = \rho, \\ &\Leftrightarrow \text{Tr}(\rho^2) = 1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Además, todo operador de densidad satisface

$$0 < \text{Tr}(\rho^2) \leq 1.$$

En particular, los estados mixtos cumplen con  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$  y  $\rho^2 \neq \rho$ .

Podemos ir todavía más lejos y definir funciones que midan el *grado de mezcla* de un operador de densidad. Nosotros vamos a introducir la *pureza*, la *entropía lineal* y la *entropía de von Neumann*. Las primeras dos están basadas en el resultado (1.9), mientras que la tercera se puede ver como una generalización de la entropía de Shannon (ver el capítulo de *Correlaciones*) al caso de mecánica cuántica.

La *pureza* de un operador de densidad se define como

$$\varsigma \equiv \text{Tr}(\rho^2).$$

Vemos que  $\varsigma = 1$  si  $\rho$  representa un estado puro, mientras que  $\varsigma = 1/M$  si  $\rho$  está *mezclado al máximo* y  $\mathcal{H}_A$  tiene dimensión finita igual a  $M$ . En general, un operador de densidad va a tener pureza entre  $1/M$  y 1.

La *entropía lineal* de un operador de densidad se define como

$$S_L(\rho) \equiv 1 - \text{Tr}(\rho^2). \quad (1.10)$$

Vemos que  $S_L(\rho) = 0$  si  $\rho$  representa un estado puro, mientras que  $S_L(\rho) = 1 - 1/M$  si  $\rho$  está mezclado al máximo y  $\mathcal{H}_A$  tiene dimensión finita igual a  $M$ . En general, un operador de densidad va a tener entropía lineal entre 0 y  $1 - 1/M$ .

La *entropía de von Neumann* se define como

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_2(\rho)] . \quad (1.11)$$

Para un estado puro tenemos que  $S(\rho) = 0$ , mientras que  $S(\rho) = \log_2(M)$  para un operador de densidad mezclado al máximo y  $\dim \mathcal{H}_A = M$ . En general, un operador de densidad va a tener entropía entre 0 y  $\log_2(M)$ . Sin embargo, la entropía de von Neumann tiene una interpretación y un uso mucho más profundo que simplemente medir el grado de mezcla de un operador de densidad como veremos en el Capítulo 2.

Hasta el momento hemos considerado el operador de densidad en un instante de tiempo fijo, esto es, en todas las ecuaciones anteriores aparece  $\rho = \rho(t)$  con  $t$  fijo. Ahora vamos a ver la ecuación que describe la evolución temporal de  $\rho$ .

Supongamos que  $H(t)$  es el hamiltoniano de  $\mathcal{A}$  al tiempo  $t$ . Entonces la evolución del operador de densidad  $\rho(t)$  de  $\mathcal{A}$  está descrita por la ecuación de von Neumann:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H(t), \rho(t)] , \quad (1.12)$$

donde  $\rho(t)$  y  $H(t)$  están en el esquema de Schrödinger. En particular, si  $U(t, t_0)$  es el operador de evolución de  $\mathcal{A}$  y  $\rho(t_0)$  es el operador de densidad de  $\mathcal{A}$  al tiempo  $t_0$ , entonces es fácil ver que

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) . \quad (1.13)$$

Ahora supongamos que tenemos dos sistemas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  que están interactuando y que, por algún motivo, sólo tenemos acceso a  $\mathcal{A}$  (puede ocurrir que no tenemos acceso al sistema  $\mathcal{B}$  o que el sistema  $\mathcal{B}$  es muy grande y complicado y no puede ser medido directamente, etc.). Esto es, sólo podemos hacer mediciones al sistema  $\mathcal{A}$ . Entonces, toda la información que podemos obtener tanto de  $\mathcal{A}$  como del sistema compuesto  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  va a ser a través de mediciones que hagamos en  $\mathcal{A}$ . Ahora nos preguntamos qué operador contiene toda la información de  $\mathcal{A}$ . Éste resulta ser el operador de densidad reducido. Para poder introducirlo necesitamos presentar antes algunos conceptos como la traza parcial.

Sean  $\mathcal{H}_A$ ,  $\mathcal{H}_B$  y  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  los espacios de estados de los sistemas  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ , respectivamente, y tomemos

$$\{|\psi_i^A\rangle : i \in I_A\} \quad \text{y} \quad \{|\phi_i^B\rangle : i \in I_B\} \quad (1.14)$$

bases ortonormales para  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente. Entonces

$$\{|\psi_i^A, \phi_j^B\rangle \equiv |\psi_i^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle : i \in I_A, j \in I_B\}$$

es una base ortonormal para  $\mathcal{H}_{AB}$ .

Supongamos que  $C$  es un operador lineal de  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  y que  $|\phi^B\rangle, |\psi^B\rangle \in \mathcal{H}_B$ . Entonces podemos definir un operador lineal que actúa  $\mathcal{H}_A$  de la siguiente manera:

$$\langle \phi^B | C | \psi^B \rangle \equiv \sum_{i,j \in I_A} |\psi_i^A\rangle \langle \psi_i^A, \phi^B | C | \psi_j^A, \psi^B \rangle \langle \psi_j^A | . \quad (1.15)$$

Usando la definición (1.15) es fácil ver que el operador reducido  $\langle \phi^B | C | \psi^B \rangle$  satisface las siguientes propiedades:

1. La definición (1.15) de  $\langle \phi^B | C | \psi^B \rangle$  es independiente de la elección de la base (1.14) usada para  $\mathcal{H}_A$ . Notamos que esta propiedad es esencial para que  $\langle \phi^B | C | \psi^B \rangle$  esté bien definido.
2.  $\langle \phi^B | C | \psi^B \rangle^\dagger = \langle \psi^B | C^\dagger | \phi^B \rangle$  .
3.  $\langle \chi_A | ( \langle \phi^B | C | \psi^B \rangle ) | \xi_A \rangle = \langle \chi_A, \phi^B | C | \xi_A, \psi^B \rangle$  si  $|\chi_A\rangle, |\xi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ .
4.  $\langle \phi^B | (aC + D) | \psi^B \rangle = a \langle \phi^B | C | \psi^B \rangle + \langle \phi^B | D | \psi^B \rangle$  si  $a \in \mathbb{C}$  y  $D$  es un operador lineal en  $\mathcal{H}_{AB}$  .
5.  $\langle \phi^B | C_A C | \psi^B \rangle = C_A \langle \phi^B | C | \psi^B \rangle$  y  $\langle \phi^B | C C_A | \psi^B \rangle = \langle \phi^B | C | \psi^B \rangle C_A$  si  $C_A$  es un operador lineal en  $\mathcal{H}_A$  .
6.  $\sum_{k \in I_B} \langle \phi^B | C | \phi_k^B \rangle \langle \phi_k^B | D | \psi^B \rangle = \langle \phi^B | C D | \psi^B \rangle$  si  $D$  es un operador lineal en  $\mathcal{H}_{AB}$  .
7.  $(|\phi^B\rangle \langle \phi^B|) C (|\psi^B\rangle \langle \psi^B|) = \langle \phi^B | C | \psi^B \rangle \otimes |\phi^B\rangle \langle \psi^B|$  .
8.  $\langle \phi^B | (|\xi^B\rangle \langle \xi^B|) C | \psi^B \rangle = \langle \phi^B | \xi^B \rangle \langle \xi^B | C | \psi^B \rangle$  y  
 $\langle \phi^B | C (|\xi^B\rangle \langle \xi^B|) | \psi^B \rangle = \langle \phi^B | C | \xi^B \rangle \langle \xi^B | \psi^B \rangle$  si  $|\xi^B\rangle \in \mathcal{H}_B$ .
9.  $\langle \phi^B | [C C_A (|\xi^B\rangle \langle \xi^B|) D] | \psi^B \rangle = \langle \phi^B | C | \xi^B \rangle C_A \langle \xi^B | D | \psi^B \rangle$  si  $C_A$  es un operador lineal en  $\mathcal{H}_A$ ,  $D$  es un operador lineal en  $\mathcal{H}_{AB}$  y  $|\xi^B\rangle \in \mathcal{H}_B$ .
10.  $\langle \phi^B | C_B | \psi^B \rangle$  es el elemento de matriz de  $C_B$  si  $C_B$  es un operador lineal en  $\mathcal{H}_B$ .

Mencionamos que las propiedades presentadas arriba resultan ser imprescindibles para operar rápidamente y con seguridad a la hora de trabajar con subsistemas de sistemas cuánticos más grandes.

Ahora definimos el operador lineal  $\text{Tr}_B(C)$  en  $\mathcal{H}_A$  como sigue:

$$\text{Tr}_B(C) \equiv \sum_{k \in I_B} \langle \phi_k^B | C | \phi_k^B \rangle , \quad (1.16)$$

y decimos que  $\text{Tr}_B(C)$  se obtiene de  $C$  tomando la traza parcial sobre  $\mathcal{B}$ . Además, se puede interpretar que  $\text{Tr}_B(C)$  se obtiene de  $C$  promediando sobre los grados de libertad de  $\mathcal{B}$ .

Usando las propiedades presentadas arriba se obtienen propiedades correspondientes para las trazas parciales. Sean  $C_1, C_2$  operadores lineales en  $\mathcal{H}_{AB}$ ,  $C_A$  y  $C_B$  operadores lineales en  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente, y  $\alpha$  un número complejo. Entonces tenemos que

1. La definición de  $\text{Tr}_B(C_1)$  es independiente de la base (1.14) de  $\mathcal{H}_B$  usada. Observamos que esta propiedad garantiza que la traza parcial esté bien definida.
2. La traza parcial es lineal:  $\text{Tr}_B(\alpha C_1 + C_2) = \alpha \text{Tr}_B(C_1) + \text{Tr}_B(C_2)$ .
3.  $\text{Tr}_B(C_A C_1) = C_A \text{Tr}_B(C_1)$  y  $\text{Tr}_B(C_1 C_A) = \text{Tr}_B(C_1) C_A$ .

4.  $[\text{Tr}_B(C_1)]^\dagger = \text{Tr}_B(C_1^\dagger)$  .
5.  $\text{Tr}_B(C_B C_1) = \text{Tr}_B(C_1 C_B)$  .
6.  $\text{Tr}_B(C_B)$  es la traza usual de  $C_B$  en  $\mathcal{H}_B$ .
7.  $\text{Tr}(C_1) = \text{Tr}_A[\text{Tr}_B(C_1)]$ , en donde  $\text{Tr}$  denota la traza en  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  y  $\text{Tr}_A$  denota la traza usual en  $\mathcal{A}$ .
8.  $\text{Tr}_B[C_1|\xi^B\rangle\langle\xi^B|] = \langle\xi^B|C_1|\xi^B\rangle$  si  $|\xi^B\rangle \in \mathcal{H}_B$ .

Ahora vamos a usar la traza parcial para definir un operador de densidad en  $\mathcal{A}$  a partir del operador de densidad en  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ .

Sea  $\rho_{AB}$  el operador de densidad del sistema  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ . Definimos el operador de densidad reducido  $\rho_A$  de  $\mathcal{A}$  por

$$\rho_A \equiv \text{Tr}_B(\rho_{AB}) .$$

A partir de las propiedades de la traza parcial presentadas arriba se puede mostrar que  $\rho_A$  satisface todas las propiedades de un operador de densidad de  $\mathcal{A}$ . Ahora veremos qué usos puede tener  $\rho_A$ .

Sean  $C_A$  un operador de  $\mathcal{A}$ ,  $c_n$  un eigenvalor de  $C_A$ ,  $P_n$  el proyector ortogonal sobre el eigenspacio asociado a  $c_n$  y  $\tilde{C}_A$  y  $\tilde{P}_n$  las extensiones de  $C_A$  y  $P_n$  a  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ , respectivamente. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} (1) \quad \langle\tilde{C}_A\rangle &= \text{Tr}[\rho_{AB}\tilde{C}_A] = \text{Tr}_A[\rho_A C_A] , \\ (2) \quad P(c_n) &= \text{Tr}[\rho_{AB}\tilde{P}_n] = \text{Tr}_A[\rho_A P_n] , \end{aligned} \tag{1.17}$$

donde  $\langle\tilde{C}_A\rangle$  denota el valor esperado de  $C_A$  y  $P(c_n)$  es la probabilidad de obtener  $c_n$  en una medición de  $C_A$ .

De esta manera vemos que el operador de densidad reducido  $\rho_A$  nos permite calcular todos los valores esperados de operadores de  $\mathcal{A}$  como si  $\mathcal{A}$  estuviera aislado y tuviera a  $\rho_A$  como operador de densidad. Además,  $\rho_A$  también nos permite obtener las probabilidades de todos los resultados de mediciones de operadores de  $\mathcal{A}$ . Es en este sentido que decimos que el operador de densidad reducido de  $\mathcal{A}$  contiene toda la información medible de  $\mathcal{A}$ .

## 1.2. Sistemas abiertos

En general, un sistema abierto es un sistema cuántico  $\mathcal{S}$  que está acoplado a otro sistema cuántico  $\mathcal{B}$  llamado ambiente. Si  $\mathcal{B}$  tiene un número infinito de grados de libertad, entonces llamamos a  $\mathcal{B}$  un *reservorio*. Si además  $\mathcal{B}$  está en equilibrio térmico, entonces decimos que  $\mathcal{B}$  es un *baño térmico*. En lo que sigue vamos a considerar que  $\mathcal{B}$  es un reservorio. El sistema completo  $\mathcal{S} + \mathcal{B}$  se supone que sigue una dinámica hamiltoniana, esto es, se le puede asignar un hamiltoniano y la evolución del operador de densidad que describe el estado del sistema completo está dada por la ecuación de von Neumann. Por otra parte, el estado del subsistema  $\mathcal{S}$  va a cambiar como consecuencia de su dinámica interna y de la interacción con el ambiente de

tal manera que en general  $\mathcal{S}$  no sigue una dinámica hamiltoniana. La dinámica del subsistema  $\mathcal{S}$  inducida por la evolución hamiltoniana del sistema completo se conoce como *dinámica del sistema reducido*.

En la sección anterior vimos que toda la información medible del subsistema  $\mathcal{S}$  está contenida en el operador de densidad reducido de  $\mathcal{S}$ . Entonces vamos a describir la dinámica del sistema abierto mediante una ecuación de movimiento para su operador de densidad reducido llamada ecuación maestra (cuántica). El método de la ecuación maestra está motivado por dos hechos:

1. No estamos interesados en la dinámica del reservorio o del sistema completo, sólo nos interesa la influencia del reservorio sobre nuestro sistema de interés.
2. Es difícil determinar la evolución temporal del operador de densidad del sistema completo.

El objetivo es obtener una ecuación que describa la evolución temporal del operador de densidad  $\rho_{\mathcal{S}}(t)$  del sistema de interés que sea de la forma

$$\frac{d}{dt}\rho_{\mathcal{S}}(t) = -\frac{i}{\hbar} [ H_{\mathcal{S}}, \rho_{\mathcal{S}}(t) ] + \mathcal{D} [ \rho_{\mathcal{S}}(t) ] , \quad (1.18)$$

donde  $H_{\mathcal{S}}$  es el hamiltoniano de  $\mathcal{S}$  modificado por  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{D} [ \rho_{\mathcal{S}}(t) ]$  representa decoherencia y disipación inducida por  $\mathcal{B}$ . Así,  $\mathcal{D} [ \rho_{\mathcal{S}}(t) ]$  va a ser responsable de la evolución no unitaria de  $\rho_{\mathcal{S}}(t)$  y del surgimiento de una dinámica irreversible (notar que si el segundo sumando en (1.18) es cero obtenemos la ecuación de von Neumann). Además, notamos que (1.18) tiene las ventajas de ser una ecuación diferencial local y de primer orden en el tiempo, es decir, no depende de  $\rho_{\mathcal{S}}(t')$  para  $t' < t$  ni de derivadas de  $\rho_{\mathcal{S}}$  de orden mayor que uno. Ahora procedemos a deducir la ecuación maestra de Born-Markov-secular que va a estar dada en la forma (1.18).

Consideramos

1. Un sistema de interés  $\mathcal{S}$  con hamiltoniano  $H'_{\mathcal{S}}$  independiente del tiempo,
2. Un reservorio  $\mathcal{B}$  con hamiltoniano  $H_B$  independiente del tiempo,
3. Un hamiltoniano de interacción  $V'$  entre  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{B}$  de la forma

$$V' = \sum_{\alpha} A_{\alpha} B'_{\alpha} , \quad (1.19)$$

donde  $A_{\alpha}$  y  $B'_{\alpha}$  son operadores hermitianos independientes del tiempo de  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{B}$ , respectivamente.

4. El hamiltoniano del sistema completo  $\mathcal{S} + \mathcal{B}$  es

$$H = H'_{\mathcal{S}} + H_B + V' . \quad (1.20)$$

5. El operador de densidad del reservorio  $\rho_B(t_0) \equiv \rho_B$  al tiempo  $t_0$  es una mezcla estadística de estados estacionarios de  $H_B$ .

Además,  $\rho_{SB}(t)$  denotará el operador de densidad del sistema completo  $\mathcal{S} + \mathcal{B}$ ,  $\rho_S(t) = \text{Tr}_B[\rho_{SB}(t)]$  el operador de densidad de  $\mathcal{S}$  y  $\rho_B(t) = \text{Tr}_S[\rho_{SB}(t)]$  el operador de densidad de  $\mathcal{B}$ .

Con el propósito de simplificar la forma final de la ecuación maestra vamos a cambiar los operadores  $B'_\alpha$  en  $V'$  por unos cuyo valor esperado al tiempo  $t = t_0$  sea cero. Para esto hacemos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \langle B'_\alpha \rangle(t_0) &\equiv \text{Tr}_B [ \rho_B(t_0) B'_\alpha ] , \\ B_\alpha &\equiv B'_\alpha - \langle B'_\alpha \rangle(t_0) , \\ H_S &\equiv H'_S + \sum_\alpha A_\alpha \langle B'_\alpha \rangle(t_0) , \\ V &\equiv \sum_\alpha A_\alpha B_\alpha . \end{aligned} \tag{1.21}$$

Notamos que  $B_\alpha$ ,  $H_S$  y  $V$  son operadores hermitianos y que podemos reescribir  $H$  como sigue:

$$H = H_S + H_B + V . \tag{1.22}$$

Una vez reexpresado el hamiltoniano en la forma dada por (1.22), el primer paso es pasar al esquema de interacción (IP) definido por la transformación unitaria

$$U_0(t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} (H_S + H_B)(t - t_0) \right\} . \tag{1.23}$$

Entonces, para todo operador lineal  $C(t)$  en el esquema de Schrödinger en el espacio de estados de  $\mathcal{S} + \mathcal{B}$ , el correspondiente operador  $C_I(t)$  en IP es

$$C_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0) C(t) U_0(t, t_0) . \tag{1.24}$$

La ecuación de von Neumann describe la evolución de  $\rho_{SB}(t)$ . En IP esta ecuación toma la forma

$$i\hbar \frac{d}{dt} (\rho_{SB})_I(t) = [ V_I(t), (\rho_{SB})_I(t) ] . \tag{1.25}$$

Ahora vamos a proceder de forma muy similar a como se obtiene la serie de Born para la expansión perturbativa del operador de evolución de un sistema. Primero integramos la ecuación (1.25) de  $t_0$  a  $t$  e iteramos para obtener

$$\begin{aligned} (\rho_{SB})_I(t) &= (\rho_{SB})_I(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 [ V_I(t_1), (\rho_{SB})_I(t_0) ] \\ &\quad + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [ V_I(t_1), [ V_I(t_2), (\rho_{SB})_I(t_2) ] ] . \end{aligned} \tag{1.26}$$



Ahora derivamos esta expresión y trazamos sobre los grados de libertad de  $\mathcal{B}$  para obtener

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) \\ = & -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_B [ V_I(t), (\rho_{SB})_I(t_0) ] \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_B [ V_I(t), [ V_I(t_1), (\rho_S)_I(t_1) \otimes \rho_B(t_0) ] ] \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_B [ V_I(t), [ V_I(t_1), (\rho_{SB})_I(t_1) - (\rho_S)_I(t_1) \otimes \rho_B(t_0) ] ] . \end{aligned} \quad (1.27)$$

En este punto vamos a hacer la primera aproximación.

**Aproximación I: (Aproximación de Born o de acoplamiento débil)**

Inicialmente  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{B}$  se encuentran en un estado producto de la forma

$$\rho_{SB}(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B(t_0) . \quad (1.28)$$

La interacción entre  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{B}$  es lo suficientemente débil y  $\mathcal{B}$  es lo suficientemente grande con respecto a  $\mathcal{S}$  de tal manera que  $\mathcal{S} + \mathcal{B}$  está aproximadamente en un estado producto todo el tiempo

$$(\rho_{SB})_I(t) \cong (\rho_S)_I(t) \otimes (\rho_B)_I(t) \quad (t \geq t_0), \quad (1.29)$$

y el estado de  $\mathcal{B}$  no cambia significativamente como consecuencia de la interacción con  $\mathcal{S}$

$$(\rho_B)_I(t) \cong (\rho_B)_I(t_0) = \rho_B \quad (t \geq t_0). \quad (1.30)$$

Por lo tanto,

$$(\rho_{SB})_I(t) \cong (\rho_S)_I(t) \otimes \rho_B \quad (t \geq t_0), \quad (1.31)$$

y

$$-\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_B [ V_I(t), [ V_I(t_1), (\rho_{SB})_I(t_1) - (\rho_S)_I(t_1) \otimes \rho_B(t_0) ] ] \cong 0 . \quad (1.32)$$

Usando la Aproximación I vemos que la ecuación (1.27) toma la forma

$$\frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_B [ V_I(t), [ V_I(t_1), (\rho_S)_I(t_1) \otimes \rho_B ] ] . \quad (1.33)$$

La ecuación maestra en (1.33) es llamada la *ecuación maestra Redfield* y notamos que depende de los valores de  $(\rho_S)_I(t')$  para  $t' < t$ , esto es, preserva memoria sobre la historia del sistema  $\mathcal{S}$ . Además, observamos que con la Aproximación I estamos despreciando el efecto de  $\mathcal{S}$  sobre  $\mathcal{B}$ , de tal manera que la evolución de  $\rho_B(t)$  está determinada por  $H_B$ . Como  $\rho_B(t_0)$  es una mezcla estadística de estados estacionarios de  $H_B$ , entonces se sigue que  $\rho_B(t) = \rho_B(t_0)$  para todo  $t \geq t_0$ .

Ahora vamos substituir  $V$  definido en (1.21) en el lado derecho de la ecuación en (1.33) y vamos a hacer el cambio de variable  $t_1 = t - \tau$  en la integral

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t dt_1 \operatorname{Tr}_B [ V_I(t), [ V_I(t_1), (\rho_S)_I(t_1) \otimes \rho_B ] ] \\
= & \int_0^{t-t_0} d\tau \sum_{\alpha, \alpha'} \left\{ c_{\alpha\alpha'}(\tau) (A_\alpha)_I(t) (A_{\alpha'})_I(t-\tau) (\rho_S)_I(t-\tau) \right. \\
& - c_{\alpha\alpha'}(\tau)^* (A_\alpha)_I(t) (\rho_S)_I(t-\tau) (A_{\alpha'})_I(t-\tau) \\
& - c_{\alpha\alpha'}(\tau) (A_{\alpha'})_I(t-\tau) (\rho_S)_I(t-\tau) (A_\alpha)_I(t) \\
& \left. + c_{\alpha\alpha'}(\tau)^* (\rho_S)_I(t-\tau) (A_{\alpha'})_I(t-\tau) (A_\alpha)_I(t) \right\}, \tag{1.34}
\end{aligned}$$

en donde han aparecido de forma natural las *funciones de auto-correlación del reservorio*

$$c_{\alpha\alpha'}(\tau) \equiv \operatorname{Tr}_B [ \rho_B (B_\alpha)_I(\tau + t_0) (B_{\alpha'})_I(t_0) ], \tag{1.35}$$

y notamos que

$$c_{\alpha\alpha'}(\tau)^* = c_{\alpha'\alpha}(-\tau). \tag{1.36}$$

La expresión (1.34) nos lleva a la siguiente aproximación.

### ***Aproximación II: (Aproximación de Markov)***

Las funciones de auto-correlación del reservorio  $c_{\alpha\alpha'}(\tau)$  decaen a 0 en una escala de tiempo  $\tau_B$

$$|c_{\alpha\alpha'}(\tau)| \cong 0 \quad \text{si } |\tau| \gg \tau_B. \tag{1.37}$$

La escala de tiempo en la cual  $(\rho_S)_I(t)$  varía apreciablemente es  $\tau_\rho$ :

$$(\rho_S)_I(t-\tau) \cong (\rho_S)_I(t) \quad \text{si } |\tau| \ll \tau_\rho. \tag{1.38}$$

Si  $\tau_B \ll \tau_\rho$ , entonces para  $t > t_0 + \tau_B$  podemos hacer la aproximación

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t dt_1 \operatorname{Tr}_B [ V_I(t), [ V_I(t_1), (\rho_S)_I(t_1) \otimes \rho_B ] ] \\
= & \int_0^{t-t_0} d\tau \sum_{\alpha, \alpha'} \left\{ c_{\alpha\alpha'}(\tau) (A_\alpha)_I(t) (A_{\alpha'})_I(t-\tau) (\rho_S)_I(t-\tau) \right. \\
& - c_{\alpha\alpha'}(\tau)^* (A_\alpha)_I(t) (\rho_S)_I(t-\tau) (A_{\alpha'})_I(t-\tau) \\
& - c_{\alpha\alpha'}(\tau) (A_{\alpha'})_I(t-\tau) (\rho_S)_I(t-\tau) (A_\alpha)_I(t) \\
& \left. + c_{\alpha\alpha'}(\tau)^* (\rho_S)_I(t-\tau) (A_{\alpha'})_I(t-\tau) (A_\alpha)_I(t) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c_{\alpha\alpha'}(\tau)^*(\rho_S)_I(t-\tau)(A_{\alpha'})_I(t-\tau)(A_\alpha)_I(t) \Big\} , \\
\cong & \int_0^{+\infty} d\tau \sum_{\alpha,\alpha'} \Big\{ c_{\alpha\alpha'}(\tau)(A_\alpha)_I(t)(A_{\alpha'})_I(t-\tau)(\rho_S)_I(t) \\
& - c_{\alpha\alpha'}(\tau)^*(A_\alpha)_I(t)(\rho_S)_I(t)(A_{\alpha'})_I(t-\tau) \\
& - c_{\alpha\alpha'}(\tau)(A_{\alpha'})_I(t-\tau)(\rho_S)_I(t)(A_\alpha)_I(t) \\
& + c_{\alpha\alpha'}(\tau)^*(\rho_S)_I(t)(A_{\alpha'})_I(t-\tau)(A_\alpha)_I(t) \Big\} , \\
= & \int_0^{+\infty} d\tau \operatorname{Tr}_B [ V_I(t), [ V_I(t-\tau), (\rho_S)_I(t) \otimes \rho_B ] ] . \tag{1.39}
\end{aligned}$$

Observamos que la Aproximación de Markov está sujeta a la existencia de dos escalas de tiempo muy distintas: una para el decaimiento de las funciones de auto-correlación del reservorio y otra para la evolución de  $(\rho_S)_I(t)$ .

A partir de la ecuación (1.34) podemos usar la Aproximación II en la ecuación (1.33) para obtener que

$$\frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} d\tau \operatorname{Tr}_B [ V_I(t), [ V_I(t-\tau), (\rho_S)_I(t) \otimes \rho_B ] ] . \tag{1.40}$$

La ecuación maestra en (1.40) es llamada la *ecuación maestra de Born-Markov*. Notamos que ésta sólo depende de los valores de  $(\rho_S)_I(t')$  al tiempo  $t' = t$  (es local en el tiempo) y, por lo tanto, no preserva memoria sobre la historia del sistema  $\mathcal{S}$ . Es importante mencionar que esta ecuación maestra tiene un grave defecto: el operador  $(\rho_S)_I(t)$  que evoluciona de acuerdo a la ecuación (1.40) puede no ser positivo semi-definido. Para *arreglar* este problema se debe hacer otra aproximación que garantice una evolución positiva, lo cual es indispensable para tener operadores de densidad.

Para continuar tenemos que hacer las siguientes definiciones:

1.  $\mathcal{E}_S \equiv \{ E_\sigma : \sigma \in I \}$  es el espectro de  $H_S$ ,
2. El conjunto de frecuencias de Bohr de  $H_S$  es

$$\mathcal{F}_{\text{Bohr}} \equiv \left\{ \omega : \omega = \frac{E_\sigma - E_{\sigma'}}{\hbar} \text{ con } \sigma, \sigma' \in I \right\} ,$$

3.  $J(\omega) \equiv \{ (\sigma, \sigma') \in I \times I : E_\sigma - E_{\sigma'} = \hbar\omega \}$ ,
4.  $\Pi(E_\sigma)$  es el proyector ortogonal sobre el eigenspacio asociado a  $E_\sigma$ ,

5.  $\sum_{E_\sigma - E_{\sigma'} = \hbar\omega} \equiv \sum_{(\sigma, \sigma') \in J(\omega)}$  ,
6.  $A_\alpha(\omega) \equiv \sum_{E_\sigma - E_{\sigma'} = \hbar\omega} \Pi(E_{\sigma'}) A_\alpha \Pi(E_\sigma)$  para cada  $\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}$  ,
7. El tensor de correlaciones espectrales es

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) \equiv \frac{1}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} c_{\alpha\alpha'}(\tau) . \quad (1.41)$$

Entonces es fácil probar que

1.  $A_\alpha^\dagger(\omega) = A_\alpha(-\omega)$  ,
2.  $[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\hbar\omega A_\alpha(\omega)$  ,
3.  $[H_S, A_\alpha^\dagger(\omega)] = \hbar\omega A_\alpha^\dagger(\omega)$  ,
4.  $[A_\alpha(\omega)]_I(t) = e^{-i\omega(t-t_0)} A_\alpha(\omega)$  ,
5.  $[H_S, A_\alpha^\dagger(\omega) A_{\alpha'}(\omega)] = 0$  ,
6.  $A_\alpha = \sum_{\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}} A_\alpha(\omega)$  ,
7.  $V = \sum_\alpha \sum_{\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}} A_\alpha(\omega) B_\alpha$  .
8.  $\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}} \Leftrightarrow -\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}$ .

Debido a las propiedades (2) y (3) de arriba, los operadores  $A_\alpha(\omega)$  y  $A_\alpha^\dagger(\omega)$  son llamados *eigenoperadores de  $H_S$  correspondientes a las frecuencias  $-\omega$  y  $\omega$* , respectivamente.

Usando estas propiedades junto con (1.39) podemos reescribir la ecuación maestra de Born-Markov (1.40) como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) = & - \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{\omega, \omega' \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}} e^{-i(\omega + \omega')(t-t_0)} \left\{ \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega') A_\alpha(\omega) A_{\alpha'}(\omega') (\rho_S)_I(t) \right. \\ & + \Gamma_{\alpha\alpha'}(-\omega')^* (\rho_S)_I(t) A_{\alpha'}(\omega') A_\alpha(\omega) \\ & - \Gamma_{\alpha\alpha'}(-\omega')^* A_\alpha(\omega) (\rho_S)_I(t) A_{\alpha'}(\omega') \\ & \left. - \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega') A_{\alpha'}(\omega') (\rho_S)_I(t) A_\alpha(\omega) \right\} . \end{aligned} \quad (1.42)$$

En vista de la ecuación (1.42) vamos a hacer una tercera aproximación que va a consistir en despreciar términos no resonantes y que en el área de óptica cuántica recibe comúnmente el nombre de aproximación de onda rotante.

***Aproximación III: (Aproximación secular o de onda rotante)***

La escala de tiempo típica de la evolución intrínseca del sistema  $\mathcal{S}$  es

$$\tau_S \equiv \max \left\{ \frac{1}{|\omega + \omega'|} : \omega, \omega' \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}} \text{ y } \omega' \neq -\omega \right\}. \quad (1.43)$$

Si  $\tau_S \ll \tau_\rho$ , entonces podemos despreciar términos no-seculares en la ecuación para  $\frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t)$ , esto es, se desprecian términos con  $\omega' \neq -\omega$  en la ecuación (1.42).

Notamos además que la Aproximación de onda rotante implícitamente depende de la Aproximación I, esto es, para que sea válida es necesario que el acoplamiento entre  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{B}$  sea débil.

Usando la Aproximación III en la ecuación (1.42) llegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\rho_S)_I(t) \\ = & - \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}} \left\{ \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) \left[ A_\alpha^\dagger(\omega) A_{\alpha'}(\omega) (\rho_S)_I(t) - A_{\alpha'}(\omega) (\rho_S)_I(t) A_\alpha^\dagger(\omega) \right] \right. \\ & \left. + \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega)^* \left[ (\rho_S)_I(t) A_{\alpha'}^\dagger(\omega) A_\alpha(\omega) - A_\alpha(\omega) (\rho_S)_I(t) A_{\alpha'}^\dagger(\omega) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Esta ecuación maestra es llamada la *ecuación maestra de Born-Markov-secular en el esquema de interacción* y garantiza que todo operador que evolucione bajo esta ecuación va a ser siempre operador de densidad si inicialmente es operador de densidad [6], [26]-[28].

Ahora vamos a regresar al esquema de Schödinger. Para esto definimos primero las cantidades

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) &= \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) + \Gamma_{\alpha'\alpha}(\omega)^*, \\ S_{\alpha\alpha'}(\omega) &= \frac{1}{2i} [ \Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) - \Gamma_{\alpha'\alpha}(\omega)^* ], \end{aligned} \quad (1.45)$$

de tal manera que

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) + i S_{\alpha\alpha'}(\omega). \quad (1.46)$$

Usando (1.46) vemos que la ecuación maestra (1.44) toma la siguiente forma en el esquema de Schödinger

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [ H_S + H_{LS}, \rho_S(t) ] + \mathcal{D}[\rho_S(t)], \quad (1.47)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{LS} &= \hbar \sum_{\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}} \sum_{\alpha, \alpha'} S_{\alpha, \alpha'}(\omega) A_\alpha^\dagger(\omega) A_{\alpha'}(\omega), \\ \mathcal{D}[\rho_S(t)] &= \sum_{\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}} \sum_{\alpha, \alpha'} \gamma_{\alpha\alpha'}(\omega) \left[ A_{\alpha'}(\omega) \rho_S(t) A_\alpha^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ A_\alpha^\dagger(\omega) A_{\alpha'}(\omega), \rho_S(t) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (1.48)$$

En (1.48)  $H_{LS}$  es llamado el *hamiltoniano de corrimiento Lamb* porque da lugar a corrimientos de las energías de  $H_S$ , aunque también puede dar lugar a interacciones coherentes de  $\mathcal{S}$  como

veremos en el Capítulo 4. Además, se puede ver fácilmente que  $H_{LS}$  conmuta con  $H_S$ . El superoperador  $\mathcal{D}$  es llamado el *disipador* (recordamos que un superoperador es simplemente un operador que actúa sobre operadores y devuelve operadores) y la ecuación maestra en (1.47) es llamada la *ecuación maestra de Born-Markov-secular en la primera forma estándar*.

En muchas ocasiones se busca que las cantidades en (1.48) no dependan de las dos sumas  $\sum_{\alpha, \alpha'}$ , sino que, sólo de una. Para lograr esto se procede como sigue.

Para cada  $\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}$  consideremos la matriz posiblemente infinita  $\mathbb{G}(\omega)$  cuyos elementos de matriz son  $\mathbb{G}_{ij}(\omega) = \gamma_{ij}(\omega)$ . A partir de la definición de  $\gamma_{ij}(\omega)$  es fácil ver que estas matrices son hermitianas. Entonces son diagonalizables mediante una matriz compleja unitaria  $\mathbb{U}(\omega)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta} \mathbb{U}_{\alpha i}(\omega)^* \gamma_{\alpha \beta}(\omega) \mathbb{U}_{\beta j}(\omega) &= g_i(\omega) \delta_{ij} , \\ \sum_k \mathbb{U}_{ki}(\omega)^* \mathbb{U}_{kj}(\omega) &= \delta_{ij} , \\ \sum_k \mathbb{U}_{ik}(\omega) \mathbb{U}_{jk}(\omega)^* &= \delta_{ij} . \end{aligned} \quad (1.49)$$

Usando la matriz  $\mathbb{U}(\omega)$  podemos definir los llamados *operadores de Lindblad*

$$\mathbb{A}_j(\omega) = \sum_{\alpha} \mathbb{U}_{\alpha j}(\omega)^* A_{\alpha}(\omega) . \quad (1.50)$$

Usando estos operadores podemos reexpresar el disipador en (1.48) de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}[\rho_S(t)] = \sum_{\omega \in \mathcal{F}_{\text{Bohr}}} \sum_{\alpha} g_{\alpha}(\omega) \left[ \mathbb{A}_{\alpha}(\omega) \rho_S(t) \mathbb{A}_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{A}_{\alpha}^{\dagger}(\omega) \mathbb{A}_{\alpha}(\omega), \rho_S(t) \right\} \right] . \quad (1.51)$$

La ecuación maestra en (1.47) con el disipador expresado como en (1.51) y el hamiltoniano de corrimiento Lamb expresado como en (1.48) es llamada la *ecuación maestra de Born-Markov-secular en la forma de Lindblad*.

En general, la ecuación maestra en la primera forma estándar o en la forma de Lindblad recibe el nombre genérico de *ecuación maestra de Born-Markov-secular*. Mencionamos que cualquiera de las dos se puede usar como ecuación de evolución del operador de densidad de  $\mathcal{S}$ , pues son equivalentes.

Terminamos esta sección mencionando que la ecuación maestra de Born-Markov-secular describirá aproximadamente la evolución del operador de densidad de  $\mathcal{S}$  siempre y cuando las Aproximaciones I, II y III sean válidas. Más aún, aquí hemos considerado sólo el caso en que el reservorio se encuentra en una mezcla estadística de estados estacionarios de  $H_B$ . Sin embargo, es posible considerar otros estados para el reservorio como estados térmicos comprimidos [6].



## Capítulo 2

# Correlaciones

Empezamos este capítulo con la siguiente pregunta: ¿qué es una correlación? En términos generales una correlación entre dos cantidades se refiere a cualquier dependencia o relación que existe entre ellas. Esto es, dos cantidades no están correlacionadas si y sólo si son independientes. Una vez que se definió qué es una correlación entre dos cantidades, la siguiente pregunta es: ¿para qué sirven? En general, se miden y se determinan con el propósito de hacer una predicción sobre una de las cantidades basándose en lo que se sabe de la otra. Ahora vamos a aplicar estas nociones generales al caso de mecánica cuántica.

Consideremos dos sistemas cuánticos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Como vimos en el primer capítulo, el estado del sistema compuesto  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  se puede describir mediante un operador de densidad  $\rho_{AB}$  que contiene toda la información medible de  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ . Entonces,  $\rho$  contiene todas las correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , esto es,  $\rho_{AB}$  contiene todas las dependencias y relaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Estas correlaciones se van a manifestar a la hora de hacer mediciones y de calcular probabilidades y valores esperados. Por ejemplo, consideremos observables  $A$  y  $B$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , respectivamente. El valor esperado de  $A \otimes B$  es

$$\langle A \otimes B \rangle = \text{Tr} [ \rho_{AB} (A \otimes B) ] . \quad (2.1)$$

Si  $\rho_{AB}$  es tal que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  están correlacionados, entonces se tendrá que

$$\langle A \otimes B \rangle \neq \langle A \rangle \langle B \rangle , \quad (2.2)$$

donde

$$\langle A \rangle = \text{Tr} [ \rho_{AB} A ] \quad \text{y} \quad \langle B \rangle = \text{Tr} [ \rho_{AB} B ] . \quad (2.3)$$

Sin embargo, si  $\rho_{AB}$  es tal que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  no están correlacionados (es decir, son independientes), entonces se tendrá que la igualdad sí se va a verificar en (2.2), pues lo que se mida en  $\mathcal{A}$  no tiene nada que ver con lo que se mide en  $\mathcal{B}$  y viceversa.

En este capítulo vamos a ver algunas cantidades usadas para medir las correlaciones en  $\rho_{AB}$ . Como veremos muchas de éstas han surgido como respuestas a preguntas sobre la cantidad de recursos físicos necesarios para resolver algún problema de procesamiento de información o, más recientemente, han surgido por el intento de distinguir qué correlaciones son clásicas y cuáles son intrínsecamente cuánticas. En la presentación haremos especial énfasis en el caso de dos qubits. Recordamos que un qubit es la palabra usada en información y computación cuántica



para referirse a un sistema de dos niveles. Las cantidades presentadas en este capítulo serán utilizadas en todos los restantes. Además, mencionamos que algunas de las medidas de correlaciones que presentaremos aquí sólo pueden encontrarse hasta el momento en artículos. Entonces este capítulo se puede usar como una referencia mucho más amigable en la que presentaremos explícitamente cómo se calculan estas diversas medidas.

## 2.1. Notación

Vamos a introducir la notación, las bases y algunos operadores que serán usados en todo lo que sigue. Además, esta sección tiene el propósito de servir de referencia para poder aclarar cualquier duda sobre la notación que se estará usando.

Primero vamos a considerar un sistema físico  $A$  cuyo espacio de estados  $\mathcal{H}_A$  es de dimensión dos. Esto es,  $A$  es un sistema de dos niveles o, en el lenguaje de información cuántica, un qubit.

Designaremos al operador identidad en  $\mathcal{H}_A$  por  $\mathbb{I}_A$ , mientras que la matriz identidad de  $2 \times 2$  será representada por  $\mathbb{I}_2$ . Una base ortonormal para  $\mathcal{H}_A$  es

$$\mathbf{B}_A = \{ |+\rangle, |-\rangle \}, \quad (2.4)$$

esto es,

$$|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = \mathbb{I}_A, \quad \langle+|+\rangle = \langle-|-\rangle = 1, \quad \langle+|-\rangle = 0. \quad (2.5)$$

Dados un operador lineal  $\chi$  que actúa en  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathbf{B}$  una base ortonormal para  $\mathcal{H}_A$ , la representación matricial de  $\chi$  con respecto a la base  $\mathbf{B}$  se designará por  $[\chi]_{\mathbf{B}}$ . Por ejemplo, en todo lo que sigue haremos uso frecuente de los operadores de Pauli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  que actúan en  $\mathcal{H}_A$  y cuyas representaciones matriciales con respecto a la base  $\mathbf{B}_A$  definida en (2.4) son :

$$[\sigma_x]_{\mathbf{B}_A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\sigma_y]_{\mathbf{B}_A} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad [\sigma_z]_{\mathbf{B}_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

En ocasiones también escribiremos  $\sigma_1 = \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = \sigma_y$  y  $\sigma_3 = \sigma_z$ . Además, haremos uso del vector de Pauli  $\bar{\sigma}$  definido por  $\bar{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ .

Para simplificar la notación y hacerla lo más sencilla posible vamos a hacer la siguiente convención:

*Si alguno de los operadores de Pauli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ó  $\sigma_z$  aparece sin corchetes en una expresión en donde hay sólo operadores, entonces se le considerará como operador. Por otra parte, si alguno de los operadores de Pauli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ó  $\sigma_z$  aparece sin corchetes en una expresión en donde sólo hay matrices, entonces se le considerará como la representación matricial definida en (2.6). Si aparecen explícitamente los corchetes  $[\cdot]_{\mathbf{B}}$ , entonces la notación indica que es la representación matricial del correspondiente operador de Pauli con respecto a la base  $\mathbf{B}$ .*

Por ejemplo, consideremos las siguientes igualdades:

$$\rho = \frac{1}{2} [ \mathbb{I}_A + \mathbf{a} \cdot \bar{\sigma} ],$$

$$\begin{aligned}
[\rho]_{\mathbb{B}_A} &= \frac{1}{2} [ \mathbb{I}_2 + \mathbf{a} \cdot \bar{\sigma} ] , \\
[\rho]_{\mathbb{B}} &= \frac{1}{2} \{ \mathbb{I}_2 + \mathbf{a} \cdot [\bar{\sigma}]_{\mathbb{B}} \} .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

De acuerdo a nuestra convención,  $\bar{\sigma}$  denota en la primera igualdad al vector de operadores de Pauli, mientras que en la segunda igualdad denota al vector de las representaciones matriciales de los operadores de Pauli definidas en (2.6). Por último, en la tercera igualdad  $[\bar{\sigma}]_{\mathbb{B}}$  denota el vector cuyas componentes son las representaciones matriciales de los operadores de Pauli con respecto a la base  $\mathbb{B}$  de  $\mathcal{H}_A$ .

Ahora consideremos un sistema de dos qubits  $A + B$  donde  $A$  denota al primer qubit y  $B$  denota al segundo qubit (esto es, tenemos dos sistemas de dos niveles o, equivalentemente, un sistema de 4 niveles). El espacio de estados de  $A$  ( $B$ ) se designará por  $\mathcal{H}_A$  ( $\mathcal{H}_B$ ). Claramente  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  son isomorfos. Entonces  $\mathbb{B}_A$  definida en (2.4) es una base ortonormal tanto para  $\mathcal{H}_A$  como para  $\mathcal{H}_B$ .

Como el espacio de estados de  $A + B$  es el producto tensorial  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , podemos construir una base ortonormal para  $\mathcal{H}_{AB}$  tomando el producto tensorial de la base  $\mathbb{B}_A$  en (2.4) consigo misma. Entonces, una base ortonormal para  $\mathcal{H}_{AB}$  es

$$\mathbb{B}' = \{ |++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle \} , \tag{2.8}$$

donde

$$\begin{aligned}
|++\rangle &\equiv |1: +\rangle \otimes |2: +\rangle , & |+-\rangle &\equiv |1: +\rangle \otimes |2: -\rangle , \\
|-+\rangle &\equiv |1: -\rangle \otimes |2: +\rangle , & |--\rangle &\equiv |1: -\rangle \otimes |2: -\rangle .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Las etiquetas 1 y 2 en (2.9) se usan como distinguir los kets asociados a  $A$  y  $B$ , respectivamente.

Dado un operador lineal  $G$  que actúa en  $\mathcal{H}_{AB}$  y una base ortonormal  $\mathbb{B}$  de  $\mathcal{H}_{AB}$ , escribiremos la representación matricial de  $G$  con respecto a la base  $\mathbb{B}$  como  $[G]_{\mathbb{B}}$ .

Representaremos el operador identidad en  $\mathcal{H}_{AB}$  por  $\mathbb{I}_{AB}$ , mientras que  $\mathbb{I}_4$  será la matriz identidad de  $4 \times 4$ . Además, haremos uso frecuente del producto tensorial  $\sigma_i \otimes \sigma_j$  de los operadores de Pauli  $\sigma_i$  de  $A$  y  $\sigma_j$  de  $B$  y de las extensiones a  $\mathcal{H}_{AB}$  de los operadores de Pauli que actúan en  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ . Estas extensiones están definidas como sigue:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_A &\equiv (\sigma_x \otimes \mathbb{I}_B, \sigma_y \otimes \mathbb{I}_B, \sigma_z \otimes \mathbb{I}_B) , \\
\bar{\sigma}_B &= (\mathbb{I}_A \otimes \sigma_x, \mathbb{I}_A \otimes \sigma_y, \mathbb{I}_A \otimes \sigma_z) .
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Las representaciones matriciales de estos operadores con respecto a la base  $\mathbb{B}'$  definida en (2.8) son

$$\begin{aligned}
[\sigma_i \otimes \sigma_j]_{\mathbb{B}'} &= [\sigma_i]_{\mathbb{B}_A} \otimes [\sigma_j]_{\mathbb{B}_A} , \\
[\sigma_j \otimes \mathbb{I}_B]_{\mathbb{B}'} &= [\sigma_j]_{\mathbb{B}_A} \otimes \mathbb{I}_2 ,
\end{aligned}$$

$$[\mathbb{I}_A \otimes \sigma_j]_{\mathcal{B}'} = \mathbb{I}_2 \otimes [\sigma_j]_{\mathcal{B}_A}, \quad (2.11)$$

donde  $[\sigma_j]_{\mathcal{B}_A}$  están definidas en (2.6) y  $\otimes$  representa el producto tensorial usual de matrices [29].

Siguiendo la misma línea que para el caso de un qubit, para simplificar la notación y hacerla lo más sencilla posible hacemos la siguiente convención:

*Si alguno de los operadores de Pauli extendidos o un producto tensorial de operadores de Pauli aparece sin corchetes en una expresión en donde hay sólo operadores, entonces se le considerará como operador. Por otra parte, si alguno de los operadores de Pauli extendidos o un producto tensorial de operadores de Pauli aparece sin corchetes en una expresión en donde sólo hay matrices, entonces se le considerará como la representación matricial definida en (2.11). Si aparecen explícitamente los corchetes  $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ , entonces la notación indica que es la representación matricial del correspondiente operador con respecto a la base  $\mathcal{B}$ .*

Por ejemplo, consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{4} \left\{ a_0 \mathbb{I}_{AB} + \mathbf{a} \cdot \bar{\sigma}_A + \mathbf{b} \cdot \bar{\sigma}_B + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right\}, \\ [\chi]_{\mathcal{B}'} &= \frac{1}{4} \left\{ a_0 \mathbb{I}_4 + \mathbf{a} \cdot \bar{\sigma}_A + \mathbf{b} \cdot \bar{\sigma}_B + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right\}, \\ [\chi]_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{4} \left\{ a_0 \mathbb{I}_4 + \mathbf{a} \cdot [\bar{\sigma}_A]_{\mathcal{B}} + \mathbf{b} \cdot [\bar{\sigma}_B]_{\mathcal{B}} + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} [\sigma_i \otimes \sigma_j]_{\mathcal{B}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En la primera igualdad  $\bar{\sigma}_A$  y  $\bar{\sigma}_B$  son las extensiones de los operadores de Pauli definidos en (2.10), mientras que  $\sigma_i \otimes \sigma_j$  es un producto tensorial de operadores de Pauli. En la segunda ecuación  $\bar{\sigma}_A$ ,  $\bar{\sigma}_B$  y  $\sigma_i \otimes \sigma_j$  son las representaciones matriciales definidas en (2.11). Por último, en la tercera ecuación  $[\bar{\sigma}_A]_{\mathcal{B}}$ ,  $[\bar{\sigma}_B]_{\mathcal{B}}$  y  $[\sigma_i \otimes \sigma_j]_{\mathcal{B}}$  son representaciones matriciales con respecto a la base  $\mathcal{B}$  de los operadores que aparecen entre corchetes.

Por último mencionamos que designaremos las trazas en  $A + B$ ,  $A$  y  $B$  respectivamente por  $\text{Tr}$ ,  $\text{Tr}_A$  y  $\text{Tr}_B$ .

## 2.2. Matriz de densidad de un qubit

El propósito de esta sección es introducir el vector de Bloch de un qubit, determinar sus propiedades y finalmente presentar qué forma tiene la matriz de densidad de un qubit. En particular, estamos interesados en determinar en qué intervalos pueden variar los elementos de matriz de un operador de densidad de un qubit. Estos resultados tal vez se podrán considerar bien conocidos y, por lo tanto, su presentación podrá parecer innecesaria. Sin embargo, su introducción es imprescindible, pues sólo teniendo en mente los resultados de esta sección se entenderán adecuadamente todos los que siguen. En particular, sólo así se podrán seguir las deducciones de las discordias cuántica y geométrica, pues se tendrá que llevar a cabo un proceso

de minimización en el cual resulta esencial saber en qué intervalos pueden variar los elementos de matriz de un operador de densidad.

Consideremos un sistema  $A$  de un qubit. En la sección *Notación* se introdujo una base ortonormal  $\mathbf{B}_A$  para el espacio de estados  $\mathcal{H}_A$  de  $A$ , así como, los operadores de Pauli que actúan en  $\mathcal{H}_A$ .

Sean  $\rho$  un operador de densidad  $A$ . La representación matricial  $[\rho]_{\mathbf{B}_A}$  de  $\rho$  en la base  $\mathbf{B}_A$  es una matriz compleja de  $2 \times 2$ , hermitiana, positiva semi-definida y de traza 1 con la siguiente estructura:

$$[\rho]_{\mathbf{B}_A} = \begin{pmatrix} \langle +|\rho|+ \rangle & \langle +|\rho|- \rangle \\ \langle -|\rho|+ \rangle & \langle -|\rho|- \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Es claro que una base para el espacio  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  de matrices complejas de  $2 \times 2$  es

$$\mathbf{B}_{\mathbb{C}^2} = \{\mathbb{I}_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\},$$

donde  $\mathbb{I}_2$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$  y  $\sigma_x, \sigma_y$  y  $\sigma_z$  son las matrices de Pauli. Entonces podemos expresar  $[\rho]_{\mathbf{B}_A}$  como combinación lineal de los elementos de esta base:

$$[\rho]_{\mathbf{B}_A} = a_0 \mathbb{I}_2 + \mathbf{a} \cdot \bar{\sigma}, \quad (2.14)$$

con  $a_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$  y  $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  el vector de matrices de Pauli. La ecuación (2.14) depende de la base  $\mathbf{B}_A$ . Como las representaciones matriciales de dos operadores lineales son iguales si y sólo si los operadores lineales son iguales, podemos reescribir (2.14) como una ecuación de operadores en la que no se hace referencia a alguna base:

$$\rho = a_0 \mathbb{I}_A + \mathbf{a} \cdot \bar{\sigma}. \quad (2.15)$$

Recordamos que en esta última ecuación  $\bar{\sigma}$  se debe interpretar como el vector de operadores de Pauli (ver la sección *Notación*).

Multiplicando (2.15) sucesivamente por el operador identidad y por los operadores de Pauli y tomando la traza se llega a que

$$a_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{a} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho \bar{\sigma}). \quad (2.16)$$

Esto es,  $\mathbf{a}$  es la mitad del valor esperado  $\langle \bar{\sigma} \rangle$  de  $\bar{\sigma}$  en el estado  $\rho$ . De esta manera concluimos que

$$\rho = \frac{1}{2} [ \mathbb{I}_A + \langle \bar{\sigma} \rangle \cdot \bar{\sigma} ], \quad (2.17)$$

con

$$\langle \bar{\sigma} \rangle = \text{Tr}(\rho \bar{\sigma}) \in \mathbb{R}^3. \quad (2.18)$$

El vector en (2.18) es llamado el *vector de Bloch* o el polarizador de  $\rho$ .

Ahora vamos a ver qué propiedades satisface el vector de Bloch. La primera observación que hacemos es que los eigenvalores  $E_{\pm}$  de  $\rho$  se pueden expresar de forma muy sencilla usando  $\langle \bar{\sigma} \rangle$ :

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} [ 1 \pm |\langle \bar{\sigma} \rangle| ]. \quad (2.19)$$

Ahora estamos interesados en determinar cómo es el vector de Bloch de un estado puro y un estado mixto. Para esto usamos (2.17) y las propiedades de las matrices de Pauli para calcular  $[\rho]_{\mathbb{B}_A}^2$ :

$$\begin{aligned} [\rho]_{\mathbb{B}_A}^2 &= \frac{1}{4} \{ \mathbb{I}_2 + 2\langle \bar{\sigma} \rangle \cdot \bar{\sigma} + \langle \bar{\sigma} \rangle \cdot \langle \bar{\sigma} \rangle \mathbb{I}_2 + i\bar{\sigma} \cdot [ \langle \bar{\sigma} \rangle \times \langle \bar{\sigma} \rangle ] \} , \\ &= \frac{1}{4} \{ [ 1 + \langle \bar{\sigma} \rangle^2 ] \mathbb{I}_2 + 2\langle \bar{\sigma} \rangle \cdot \bar{\sigma} \} . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tomando la traza de (2.20) y recordando que  $\rho$  es un estado puro si y sólo si  $\text{Tr}([\rho]_{\mathbb{B}_A}^2) = 1$ , concluimos que

$$\begin{aligned} \rho \text{ es un estado puro} &\iff \langle \bar{\sigma} \rangle^2 = 1 , \\ \rho \text{ es un estado mixto} &\iff \langle \bar{\sigma} \rangle^2 < 1 . \end{aligned} \quad (2.21)$$

A partir de las ecuaciones (2.17) y (2.21) vemos que a cada operador de densidad  $\rho$  del qubit le podemos asignar un punto en la esfera de radio 1 en el espacio de tres dimensiones, a saber, el punto  $\langle \bar{\sigma} \rangle = \text{Tr}(\rho \bar{\sigma})$ . Este punto quedará sobre la superficie de la esfera cuando  $\rho$  represente un estado puro, mientras que el punto quedará en el interior de la esfera cuando  $\rho$  represente un estado mixto. En vista de estos resultados cabe preguntarse si hay una relación uno a uno entre las matrices de densidad de un qubit y los puntos de la esfera de radio 1. Ahora pasaremos a ocuparnos de esta cuestión.

Consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{ \rho : \rho \text{ es un operador de densidad de } A \} , \\ \bar{\mathcal{B}}(0,1) &= \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| \leq 1 \} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Esto es,  $\mathcal{S}$  es el conjunto de todos los operadores de densidad posibles de un qubit, mientras que  $\bar{\mathcal{B}}(0,1)$  es la esfera de radio 1 en el espacio de tres dimensiones.

Definimos la función

$$\mathbf{f} : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}(0,1) \quad \text{por} \quad \mathbf{f}(\rho) = \langle \bar{\sigma} \rangle = \text{Tr}(\rho \bar{\sigma}) \quad (\rho \in \mathcal{S}). \quad (2.23)$$

Usando la expresión de  $\langle \bar{\sigma} \rangle$  en términos de los elementos de matriz (2.13) de  $\rho$  y las propiedades de las matrices de Pauli se puede probar que  $f$  es una función lineal biyectiva. De esta manera, hay una relación 1 a 1 entre los operadores de densidad de un qubit y los puntos de la esfera de radio 1 en el espacio de tres dimensiones. Además, el que  $f$  sea lineal permite calcular el vector de Bloch de una combinación convexa de operadores de densidad de  $A$  de forma muy sencilla y obtener una imagen visual de esta operación. Mostramos esto a continuación.

Sean  $\rho_1$  y  $\rho_2$  dos operadores de densidad de  $A$  y  $\lambda \in [0,1]$ . Estos dos operadores se pueden representar mediante puntos  $\mathbf{f}(\rho_1)$  y  $\mathbf{f}(\rho_2)$  en la esfera de radio 1. Ahora consideramos la combinación convexa

$$\rho_3 = \lambda \rho_2 + (1 - \lambda) \rho_1 . \quad (2.24)$$

Claramente  $\rho_3$  es un operador de densidad de  $A$  y, por lo tanto, tiene asociado un punto  $\mathbf{f}(\rho_3)$  en la esfera de radio 1. Usando la linealidad de  $\mathbf{f}$  y (2.24) vemos que

$$\mathbf{f}(\rho_3) = \lambda \mathbf{f}(\rho_2) + (1 - \lambda) \mathbf{f}(\rho_1) = \mathbf{f}(\rho_1) + (1 - \lambda) [ \mathbf{f}(\rho_2) - \mathbf{f}(\rho_1) ] . \quad (2.25)$$

Luego el vector de Bloch de  $\rho_3$  es la misma combinación convexa con los vectores de Bloch de  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . A partir de (2.25) vemos que  $\mathbf{f}(\rho_3)$  es un punto sobre el segmento de recta que une  $\mathbf{f}(\rho_1)$  y  $\mathbf{f}(\rho_2)$ . Usando esta imagen visual podemos concluir, por ejemplo, que ninguna combinación convexa no trivial (i.e., con  $\lambda \in (0, 1)$ ) de operadores de densidad de un qubit puede dar lugar a un estado puro, pues ningún segmento de recta contenido en la esfera de radio 1 puede tener puntos distintos de los extremos sobre la superficie de ésta.

Por los resultados anteriores observamos que hay una relación 1 a 1 entre los puntos en el interior de la esfera de radio 1 y los operadores de densidad mixtos de  $A$  y una relación 1 a 1 entre los puntos en la superficie de dicha esfera y los operadores de densidad puros de  $A$ . Ya hecha esta identificación resulta interesante ver qué operadores de densidad corresponden los polos de la esfera. Usando la ecuación (2.17) es fácil ver que el polo norte (i.e., el punto  $(0, 0, 1)$  en la esfera) corresponde al operador de densidad  $|+\rangle\langle+|$ , mientras que el polo sur (i.e., el punto  $(0, 0, -1)$  en la esfera) corresponde a  $|-\rangle\langle-|$ .

Ahora pasaremos a responder la siguiente pregunta: dada una matriz compleja  $\chi$  de  $2 \times 2$ , ¿cómo saber si  $\chi$  es una matriz de densidad de un qubit? Contestar esta pregunta nos llevará a caracterizar las matrices de densidad de un qubit y a obtener en qué intervalos pueden variar sus componentes.

Sea

$$\chi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \quad (2.26)$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  una matriz compleja de  $2 \times 2$ . Usando la definición de un operador de densidad es fácil ver que

$$\begin{aligned} \chi \text{ es una matriz de densidad} &\iff \chi^\dagger = \chi, \quad \text{Tr}(\chi) = 1, \quad \chi \text{ es positivo semi-definida} , \\ \iff a \in [0, 1], \quad d = 1 - a, \quad c = b^*, \quad 1 &\geq (1 - 2a)^2 + 4|b|^2 . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Usando (2.26) y (2.27) concluimos que  $\chi$  se puede expresar en la forma

$$\chi = \begin{pmatrix} a & be^{i\theta} \\ be^{-i\theta} & 1 - a \end{pmatrix} , \quad (2.28)$$

con

$$a \in [0, 1], \quad b \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (1 - 2a)^2 + 4b^2 \leq 1 , \quad (2.29)$$

si  $\chi$  es una matriz de densidad. Notamos que  $\chi$  es la representación matricial de un operador de densidad de  $A$  en alguna base para  $\mathcal{H}_A$ .

De (2.29) vemos que una matriz de densidad de un qubit depende de tres parámetros reales, a saber,  $a$ ,  $b$  y  $\theta$ . De éstos, dos están relacionados por una restricción (la tercera condición en (2.29)).

Vamos a cerrar esta sección viendo de cuántos parámetros depende un ket normalizado de un qubit. Sea  $|\psi\rangle$  un ket normalizado en  $\mathcal{H}_A$ . Usando la base  $\mathbf{B}_A$  podemos considerar el vector de coordenadas  $[|\psi\rangle]_{\mathbf{B}_A}$  de  $|\psi\rangle$ :

$$[|\psi\rangle]_{\mathbf{B}_A} = (\alpha, \beta)^T, \quad (2.30)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Escribiendo  $\alpha$  y  $\beta$  en forma de Euler y usando la condición de normalización de  $|\psi\rangle$  podemos reexpresar  $[|\psi\rangle]_{\mathbf{B}_A}$  como sigue:

$$[|\psi\rangle]_{\mathbf{B}_A} = e^{i\phi_A} \left( |\alpha|, e^{i\phi_B} \sqrt{1 - |\alpha|^2} \right)^T, \quad (2.31)$$

donde  $|\alpha| \in [0, 1]$  y  $\phi_A, \phi_B \in \mathbb{R}$ . Aquí  $\phi_A$  es un argumento de  $\alpha$ , mientras que  $\phi_B + \phi_A$  es un argumento de  $\beta$ . Entonces observamos que  $|\psi\rangle$  depende de tres parámetros reales independientes, a saber,  $|\alpha|$ ,  $\phi_A$  y  $\phi_B$ .

### 2.3. Matriz de densidad de dos qubits

En la sección anterior se analizó la matriz de densidad de un qubit. Ahora vamos a hacer una labor similar, pero para el caso de dos qubits. Así como en la sección anterior, pondremos especial énfasis en determinar cómo pueden variar las componentes de una matriz de densidad de dos qubits.

Empezaremos con un breve repaso del espacio de matrices complejas de  $n \times n$  y de un producto interior que se puede definir en éste. La motivación de esto es que el conjunto de operadores lineales de dos qubits es isomorfo al espacio de matrices complejas de  $4 \times 4$ . Hacemos la observación de que todos los vectores serán considerados como vectores columna.

Sea  $\mathbb{C}^{n \times n}$  el conjunto de todas las matrices complejas de  $n \times n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es bien conocido que  $\mathbb{C}^{n \times n}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un escalar de matrices.

Definimos en  $\mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times n}$  la función

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{por} \quad (\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \text{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B}) \quad (\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}). \quad (2.32)$$

Es fácil probar que (2.32) define un producto interior en  $\mathbb{C}^{n \times n}$  conocido en mecánica cuántica como producto interior de Hilbert-Schmidt y en álgebra lineal como producto interior de Frobenius. Este producto interior define una norma  $\|\cdot\|_F$  en  $\mathbb{C}^{n \times n}$  conocida como norma de Hilbert-Schmidt en mecánica cuántica o norma de Frobenius en álgebra lineal:

$$\|\mathbb{A}\|_F = \sqrt{(\mathbb{A}, \mathbb{A})} = \sqrt{\text{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{A})} \quad (\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}). \quad (2.33)$$

Dadas dos matrices  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es fácil ver que

$$\|\mathbb{A}\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |\mathbb{A}_{ij}|^2 \quad \text{y} \quad (\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{A}_{ji}^* \mathbb{B}_{ji}, \quad (2.34)$$

donde  $\mathbb{A}_{ij}$  y  $\mathbb{B}_{ij}$  son las componentes  $i, j$  de  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{B}$ , respectivamente. Observamos que la norma de Frobenius de  $\mathbb{A}$  es igual a la norma euclidiana del vector que se obtiene al acomodar todas las componentes de  $\mathbb{A}$  en una columna.

En lo que sigue nos vamos a restringir al caso  $n = 4$ . Consideramos las 16 matrices

$$\mathbf{B}_{\mathbb{C}^{4 \times 4}} = \{ \mathbb{I}_4, \sigma_i \otimes \mathbb{I}_4, \mathbb{I}_4 \otimes \sigma_i, \sigma_i \otimes \sigma_j : i, j = x, y, z \} . \quad (2.35)$$

Recordamos que  $\mathbb{I}_4$  es la matriz identidad de  $4 \times 4$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  son las matrices de Pauli y  $\otimes$  indica el producto tensorial (o producto directo) usual de matrices. Usando el producto interior definido arriba es fácil mostrar que  $\mathbf{B}_{\mathbb{C}^{4 \times 4}}$  es un conjunto ortogonal en  $\mathbb{C}^{4 \times 4}$  compuesto por matrices hermitianas cuya norma de Frobenius es 2. Luego  $\mathbf{B}_{\mathbb{C}^{4 \times 4}}$  es una base ortogonal para  $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ . Si se quisiera una base ortonormal, entonces se tendría que dividir cada elemento de  $\mathbf{B}_{\mathbb{C}^{4 \times 4}}$  por 2.

Sea  $\chi \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ . Usando las observaciones del párrafo anterior vemos que podemos expresar  $\chi$  como una combinación lineal de los elementos de  $\mathbf{B}_{\mathbb{C}^{4 \times 4}}$  como sigue:

$$\chi = \frac{1}{4} \left\{ a_0 \mathbb{I}_4 + \mathbf{a} \cdot \bar{\sigma}_A + \mathbf{b} \cdot \bar{\sigma}_B + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right\} , \quad (2.36)$$

donde  $a_0, T_{ij} \in \mathbb{C}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) y  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^3$ . Recordamos que  $\bar{\sigma}_A$  y  $\bar{\sigma}_B$  son las extensiones a  $\mathcal{H}_{AB}$  de los vectores de Pauli de  $A$  y  $B$  (ver la sección de *Notación*). Tomando el producto interior de Frobenius de  $\chi$  con cada uno de los elementos de  $\mathbf{B}_{\mathbb{C}^{4 \times 4}}$  y usando la ortogonalidad de estos últimos se sigue que

$$\begin{aligned} a_0 &= (\mathbb{I}_4, \chi) = \text{Tr}(\chi) , \\ a_j &= (\sigma_j \otimes \mathbb{I}_2, \chi) = \text{Tr} [ (\sigma_j \otimes \mathbb{I}_2) \chi ] \quad (j = 1, 2, 3), \\ b_j &= (\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_j, \chi) = \text{Tr} [ (\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_j) \chi ] \quad (j = 1, 2, 3), \\ T_{ij} &= (\sigma_i \otimes \sigma_j, \chi) = \text{Tr} [ (\sigma_i \otimes \sigma_j) \chi ] \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Notamos que podemos tomar a  $T_{ij}$  como la componente  $i, j$  de una matriz  $\mathbb{T} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ . Usando (2.34), (2.36) y el Teorema de Pitágoras podemos calcular fácilmente la norma de Frobenius de  $\chi$ :

$$\|\chi\|_F^2 = \frac{1}{4} \{ |a_0|^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \|\mathbb{T}\|_F^2 \} . \quad (2.38)$$

Ahora aplicaremos estos resultados a un sistema compuesto por dos qubits  $A$  y  $B$ . Recordamos que una base ortonormal para los respectivos espacios de estados  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  de  $A$  y  $B$  es  $\mathbf{B}_A$  definida en (2.4), mientras que una base ortonormal para el espacio de estados  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  de  $A + B$  es  $\mathbf{B}'$  definida en (2.8). Observamos que  $\mathcal{H}_{AB}$  es isomorfo a  $\mathbb{C}^4$  y, por lo tanto, que los operadores lineales que actúan en  $\mathcal{H}_{AB}$  tienen representaciones matriciales en  $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ .



Sea  $\rho$  un operador de densidad de  $A+B$ . Usando (2.36) y (2.37) vemos que la representación matricial  $[\rho]_{\mathbf{B}'}$  de  $\rho$  en la base  $\mathbf{B}'$  se puede expresar como combinación lineal de los elementos de  $\mathbb{B}_{\mathbb{C}^{4 \times 4}}$ . Si usamos que las representaciones matriciales de dos operadores lineales son iguales si y sólo si los operadores son iguales, se sigue que

$$\rho = \frac{1}{4} \left\{ \mathbb{I}_{AB} + \mathbf{a} \cdot \bar{\sigma}_A + \mathbf{b} \cdot \bar{\sigma}_B + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right\}, \quad (2.39)$$

con

$$\begin{aligned} a_j &= \text{Tr} [ (\sigma_j \otimes \mathbb{I}_B) \rho ] & (j = 1, 2, 3), \\ b_j &= \text{Tr} [ (\mathbb{I}_A \otimes \sigma_j) \rho ] & (j = 1, 2, 3), \\ T_{ij} &= \text{Tr} [ (\sigma_i \otimes \sigma_j) \rho ] & (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde se ha usado que  $\text{Tr}(\rho) = 1$  y las ecuaciones en (2.37). Recordamos que en (2.39) y (2.40)  $\bar{\sigma}_A$ ,  $\bar{\sigma}_B$  y  $\sigma_i \otimes \sigma_j$  son operadores en  $\mathcal{H}_{AB}$  (ver la sección *Notación*).

Los operadores de densidad  $\rho_A$  y  $\rho_B$  de  $A$  y  $B$  se pueden obtener tomando las trazas parciales de  $\rho$  con respecto a  $B$  y  $A$ , respectivamente. Esto es,

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) \quad \text{y} \quad \rho_B = \text{Tr}_A(\rho). \quad (2.41)$$

Usando las propiedades de la traza parcial vemos que los coeficientes en (2.40) se pueden reexpresar como sigue:

$$\begin{aligned} a_j &= \text{Tr}_A [ \sigma_j \rho_A ] & (j = 1, 2, 3), \\ b_j &= \text{Tr}_B [ \sigma_j \rho_B ] & (j = 1, 2, 3), \\ T_{ij} &= \text{Tr} [ (\sigma_i \otimes \sigma_j) \rho ] & (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Comparando las ecuaciones (2.18) y (2.42) vemos que  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de Bloch de  $\rho_A$ , mientras que  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de Bloch de  $\rho_B$  y, por lo tanto, se cumple que

$$|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}| \leq 1. \quad (2.43)$$

Como  $\|\rho\|_F^2 = \text{Tr}(\rho^2) \leq 1$ , usando (2.38) y (2.39) observamos que

$$1 \geq \|\rho\|_F^2 = \frac{1}{4} ( 1 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \|\mathbb{T}\|_F^2 ). \quad (2.44)$$

La ecuación (2.44) se puede usar para obtener una cota para la norma de Frobenius de  $\mathbb{T}$  definida en (2.42):

$$\|\mathbb{T}\|_F^2 \leq 3. \quad (2.45)$$

Lamentablemente esta cota es bastante mala y no nos será de utilidad. La cota que se necesita y que va resultar esencial en el cálculo de la discordia geométrica es la siguiente:

$$\|\mathbb{T}\|_2 \leq 1, \quad (2.46)$$

donde  $\|\cdot\|_2$  es la norma dos matricial [29] definida como sigue:

$$\|\mathbb{T}\|_2 \equiv \max_{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{e}|=1} |\mathbb{T}\mathbf{e}|. \quad (2.47)$$

Como la obtención de esta cota no es trivial, vamos a cerrar esta sección con su deducción.

Sean  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $|\mathbf{e}| = 1$  y

$$\rho = \sum_{j=1}^4 q_j |\xi_j\rangle \langle \xi_j|, \quad (2.48)$$

la descomposición espectral de  $\rho$ . Recordamos que  $q_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^4 q_j = 1$ ,  $|\xi_j\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$  y  $\langle \xi_i | \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ .

De (2.42) se sigue que

$$(\mathbb{T}\mathbf{e})_i = \sum_{j=1}^4 q_j \langle \xi_j | \sigma_i \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle. \quad (2.49)$$

Entonces

$$\mathbb{T}\mathbf{e} = \sum_{j=1}^4 q_j ( \langle \xi_j | \sigma_x \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle, \langle \xi_j | \sigma_y \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle, \langle \xi_j | \sigma_z \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle )^T. \quad (2.50)$$

Usando la desigualdad del triángulo se sigue que

$$|\mathbb{T}\mathbf{e}| \leq \sum_{j=1}^4 q_j \left| ( \langle \xi_j | \sigma_x \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle, \langle \xi_j | \sigma_y \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle, \langle \xi_j | \sigma_z \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle )^T \right|. \quad (2.51)$$

Para obtener la cota deseada necesitamos ver qué valores pueden tomar los sumandos en el lado derecho de (2.51). Para esto procedemos de la siguiente manera.

Primero observamos que  $\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}$  es un operador hermitiano que actúa en  $\mathcal{H}_B$  y que sus eigenvalores son  $\pm 1$ . Podemos tomar una base ortonormal para  $\mathcal{H}_B$  compuesta por eigenvectores de  $\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}$ :

$$\mathbf{B}_2 = \{ |+\rangle_2, |-\rangle_2 \}. \quad (2.52)$$

La representación matricial  $[\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}]_{\mathbf{B}_2}$  de  $\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}$  con respecto a la base  $\mathbf{B}_2$  es

$$[\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Tomando el producto tensorial de las bases  $\mathbf{B}_A$  y  $\mathbf{B}_2$  definidas respectivamente en (2.4) y (2.52) podemos construir una base ortonormal  $\mathbf{B}_{AB}$  para  $\mathcal{H}_{AB}$ :

$$\mathbf{B}_{AB} = \{ |+\rangle \otimes |+\rangle_2, |+\rangle \otimes |-\rangle_2, |-\rangle \otimes |+\rangle_2, |-\rangle \otimes |-\rangle_2 \} . \quad (2.54)$$

Usando la base  $\mathbf{B}_{AB}$  vemos que

$$\langle \xi_j | \sigma_j \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle = [ | \xi_j \rangle ]_{\mathbf{B}_{AB}}^\dagger \sigma_j \otimes [\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}]_{\mathbf{B}_2} [ | \xi_j \rangle ]_{\mathbf{B}_{AB}} , \quad (2.55)$$

donde

$$[ | \xi_j \rangle ]_{\mathbf{B}_{AB}} = (a, b, c, d)^T \in \mathbb{C}^4 \quad (2.56)$$

es el vector de coordenadas de  $| \xi_j \rangle$  en la base  $\mathbf{B}_{AB}$ .

Usando (2.53), (2.55) y (2.56), haciendo los productos y simplificando se llega a que

$$\left| \left( \langle \xi_j | \sigma_x \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle, \langle \xi_j | \sigma_y \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle, \langle \xi_j | \sigma_z \otimes (\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}) | \xi_j \rangle \right)^T \right|^2 = 1 - 4|ab^* + d^*c|^2 , \quad (2.57)$$

$$\leq 1 .$$

A partir de (2.51), usando (2.57) y recordando que los  $q_j$  son números no negativos que suman 1, se sigue que

$$|\mathbb{T}\mathbf{e}| \leq \sum_{j=1}^4 q_j = 1 . \quad (2.58)$$

Como  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  con  $|\mathbf{e}| = 1$  es arbitrario, concluimos que la desigualdad (2.46) es válida.

Por último mencionamos que a partir de la expresión en (2.39) vemos que  $\rho$  depende de 15 parámetros reales  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbb{T}$  sujetos a las constricciones (2.43) y (2.44). Sin embargo, se debe enfatizar que no hemos establecido las constricciones que imponen el que  $\rho$  sea positivo semi-definido.

## 2.4. Entropías e información

En esta sección vamos a introducir las entropías de Shannon y de von Neumann y algunas cantidades asociadas como la información mutua. Haremos especial énfasis en sus propiedades e interpretaciones, pues éstas van a resultar ser fundamentales para poder entender qué cuantifican las medidas de enredamiento y la discordia cuántica que presentaremos más adelante. Mencionamos que en general no mostraremos por qué reciben las interpretaciones que enunciaremos. Para esto se pueden consultar los libros de información cuántica [3]-[5].

Primero vamos a introducir la entropía de Shannon, la medida de información clásica por excelencia. Para esto primero presentaremos breve e informalmente lo que es una variable aleatoria, pues esto va a ser más que suficiente para nuestros propósitos. Además, nos restringiremos al caso de variables aleatorias discretas. Si se quiere definir rigurosamente lo que es una variable aleatoria, entonces se necesita el aparato matemático conocido como *teoría de la medida* y se puede consultar brevemente en [6] o profundamente en [30].

Consideremos un experimento cuyo resultado no es predecible con absoluta certeza. Sin embargo vamos a suponer que conocemos todos los posibles resultados del experimento. El conjunto de todos los posibles resultados del experimento es llamado el *espacio muestral* del experimento. Una función  $X$  con valores reales definida en el espacio muestral es llamada una *variable aleatoria*. Cuando  $X$  toma un número contable (finito o infinito) de valores  $x_1, x_2, \dots$ , entonces decimos que  $X$  es una *variable aleatoria discreta* y se puede determinar la probabilidad  $P(X = x_i)$  de que  $X$  tome el valor de  $x_i$ . En este caso la función  $p(x_i) = P(X = x_i)$  definida sobre los posibles valores que puede tomar  $X$  es llamada la *función de masa de probabilidad* (pmf) de  $X$ . La pmf es una función no negativa tal que  $\sum_i p(x_i) = 1$ . Cuando la variable aleatoria  $X$  toma un continuo de posibles valores, entonces decimos que  $X$  es una *variable aleatoria continua* y en ocasiones también se puede definir una *función de densidad de probabilidad* que es el análogo de una pmf en el caso continuo [30].

Ahora consideraremos un ejemplo sencillo para ilustrar estos conceptos. El experimento puede consistir en lanzar una moneda. A pesar de que no sabemos cómo va a caer la moneda, sabemos que el conjunto de posibles resultados del experimento es

$$E_m = \{ A, S \}, \quad (2.59)$$

donde  $A$  ( $S$ ) indica si la cara que aparece es águila (sol). Entonces,  $E_m$  es el espacio muestral del experimento. Una posible variable aleatoria es

$$X = 1 \text{ si aparece águila, } 0 \text{ si aparece sol.} \quad (2.60)$$

En este caso sabemos que  $X$  sólo puede tomar dos valores 0 ó 1 (es una variable aleatoria discreta). Contando casos favorables y dividiendo entre los 2 casos totales vemos que

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}. \quad (2.61)$$

Entonces la pmf de  $X$  es la función  $p$  definida por  $p(x) = P(X = x)$  para  $x \in \{0, 1\}$ .

Con estas nociones elementales ya estamos en posición de definir la entropía de Shannon. Sean  $X$  una variable aleatoria discreta cuyos posibles valores son  $x_1, x_2, \dots$  y  $p$  su pmf. Entonces, la entropía de Shannon de  $X$  se define como sigue:

$$H(X) \equiv - \sum_i p(x_i) \cdot \log_2[ p(x_i) ] = - \sum_i P(X = x_i) \cdot \log_2[ P(X = x_i) ]. \quad (2.62)$$

Observamos que la entropía de Shannon depende sólo de la pmf de  $X$  y no de los valores que puede tomar  $X$  ni del experimento al cual está asociado  $X$ . Luego dos variables aleatorias con pmf que tomen los mismos valores tendrán la misma entropía de Shannon.

La entropía de Shannon de  $X$  se interpreta de la siguiente manera:

1. Mide qué tanta información ganamos en promedio cuando aprendemos (o conocemos) el valor de  $X$ ,
2. Mide la incertidumbre que tenemos sobre el valor de  $X$  antes de que aprendamos su valor,

3. Cuantifica la cantidad mínima de recursos necesarios para guardar información.

De la definición (2.62) es claro que  $H(X) \geq 0$ . Además, se puede probar que

$$H(X) \leq \log_2(d), \quad (2.63)$$

si  $X$  es una variable aleatoria con sólo  $d$  resultados posibles. Además, la igualdad se verifica si y sólo si  $P(X = x_i) = 1/d$  para cada  $i = 1, 2, \dots, d$ .

Como ejemplo determinaremos la entropía de Shannon de la variable aleatoria  $X$  del ejemplo de arriba. Tenemos que

$$H(X) = -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \quad (2.64)$$

Notamos que  $H(X)$  toma su valor máximo, por lo que ganamos la máxima cantidad de información posible si aprendemos el valor de  $X$ . De hecho, se dice que se han adquirido  $H(X)$  bits de información de  $X$  cuando aprendemos el valor de  $X$ . De forma equivalente, vemos que tenemos la máxima incertidumbre sobre el valor de  $X$  antes de que aprendamos su valor, pues antes de saber si cayó águila o sol sólo sabemos que una u otra aparecen con la misma probabilidad.

Ahora supongamos que la moneda es *defectuosa* y se tiene que

$$P(X = 1) = \frac{3}{4}, \quad P(X = 0) = \frac{1}{4}. \quad (2.65)$$

Esto es, es más probable que aparezca águila que sol. Entonces la entropía de Shannon de  $X$  con esta nueva pmf es

$$H(X) = -\frac{3}{4}\log_2\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0.81. \quad (2.66)$$

Notamos que la entropía de Shannon es menor que antes. Esto es, ganamos menos información cuando aprendemos el valor de  $X$ . Equivalentemente, tenemos menos incertidumbre sobre el valor de  $X$  antes de saber el valor que toma. Esto es razonable, pues ya sabíamos que aparece águila con mayor probabilidad y, por lo tanto, teníamos menos incertidumbre sobre el valor que toma  $X$ .

Ahora consideremos dos variables aleatorias discretas  $X$  y  $Y$  cuyos posibles valores son  $x_1, x_2, \dots$  y  $y_1, y_2, \dots$ . Podemos calcular la probabilidad  $P\{X = x_i, Y = y_j\}$  de que  $X$  tome el valor de  $x_i$  y  $Y$  tome el valor de  $y_j$ . La *función de masa de probabilidad conjunta*  $p(x_i, y_j)$  de  $X$  y  $Y$  es  $p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ . La pmf conjunta  $p(x_i, y_j)$  es una función no-negativa tal que  $\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1$ .

A partir de  $p(x_i, y_j)$  podemos calcular tanto la pmf de  $X$  como la pmf de  $Y$ :

$$\begin{aligned} p_X(x_i) &= P\{X = x_i\} = \sum_j p(x_i, y_j), \\ p_Y(y_j) &= P\{Y = y_j\} = \sum_i p(x_i, y_j). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Las cantidades en (2.67) son llamadas comúnmente las *funciones de masa de probabilidad marginales*.

Para lo que sigue es muy importante introducir el concepto de independencia. Las variables aleatorias discretas  $X$  y  $Y$  son *independientes* si y sólo si  $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ . Entonces, vemos que  $X$  y  $Y$  son independientes si conociendo el valor de una no cambia la distribución de la otra. Esto es,  $X$  y  $Y$  no están correlacionadas si son independientes. Cuando  $X$  y  $Y$  no son independientes, entonces decimos que son *dependientes*.

Para ilustrar estos conceptos vamos a dar un ejemplo sencillo. Supongamos que ahora el experimento consiste en lanzar dos monedas. Entonces el espacio muestral del experimento es

$$E_m = \{ (A, A), (A, S), (S, A), (S, S) \} , \quad (2.68)$$

donde la primera componente del vector es la cara que aparece en la primera moneda, mientras que la segunda componente es la cara que aparece en la segunda moneda. Nuevamente  $A$  ( $S$ ) denota águila (sol).

Ahora consideramos dos variables aleatorias:

$X = 1$  si aparece águila en la primera moneda,  $0$  si aparece sol en la primera moneda,  
 $Y = 1$  si aparece águila en la segunda moneda,  $0$  si aparece sol en la segunda moneda.

Si las dos monedas no son defectuosas, entonces es claro que los resultados de una moneda son independientes de los de la otra. Luego se tiene que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes y la pmf conjunta  $p(x, y)$  está dada por

$$p(x, y) = P\{X = x, Y = y\} = P(X = x)P(Y = y) = \frac{1}{4}, \quad x, y \in \{0, 1\} . \quad (2.69)$$

A partir de (2.69) vemos que las pmf marginales son

$$\begin{aligned} p_X(0) &= \sum_{y=0,1} p(0, y) = \frac{1}{2}, & p_X(1) &= \sum_{y=0,1} p(1, y) = \frac{1}{2}, \\ p_Y(0) &= \sum_{x=0,1} p(x, 0) = \frac{1}{2}, & p_Y(1) &= \sum_{x=0,1} p(x, 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Ahora supongamos que las monedas son defectuosas y que la pmf conjunta está dada por

$$p(1, 1) = \frac{4}{10}, \quad p(1, 0) = \frac{1}{10}, \quad p(0, 1) = 0, \quad p(0, 0) = \frac{1}{2}. \quad (2.71)$$

Notamos que es mucho más probable que aparezca la misma cara en las dos monedas que caras distintas. Por lo tanto, esperamos que  $X$  y  $Y$  sean variables aleatorias dependientes.

A partir de (2.71) vemos que las pmf marginales son

$$\begin{aligned} p_X(0) &= \sum_{y=0,1} p(0, y) = \frac{1}{2}, & p_X(1) &= \sum_{y=0,1} p(1, y) = \frac{1}{2}, \\ p_Y(0) &= \sum_{x=0,1} p(x, 0) = \frac{6}{10}, & p_Y(1) &= \sum_{x=0,1} p(x, 1) = \frac{4}{10}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

De (2.71) y (2.72) es claro que  $p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y)$ . Por lo tanto,  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias dependientes.

Una vez que hemos introducido la pmf conjunta, podemos definir otras cantidades que miden distintas relaciones entre dos variables aleatorias discretas  $X$  y  $Y$ . Tenemos que

1. La *entropía de Shannon conjunta* de  $X$  y  $Y$  se define como

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 [ p(x_i, y_j) ] , \\ &= - \sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \log_2 [ P(X = x_i, Y = y_j) ] , \end{aligned} \quad (2.73)$$

y mide nuestra incertidumbre total sobre el valor que puede tomar la pareja  $X, Y$ . También se puede interpretar como la cantidad de información que se gana cuando aprendemos el valor de  $X$  y  $Y$ .

Se puede probar que

- a)  $H(X, Y) = H(Y, X)$  ,
- b)  $H(X) \leq H(X, Y)$ . La igualdad se cumple si y sólo si  $Y = f(X)$ , esto es, si y sólo si  $Y$  es una función de  $X$ .
- c)  $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ . La igualdad se cumple si y sólo si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes.

2. La *entropía condicional* de  $X$  dado  $Y$  se define como

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) , \quad (2.74)$$

y mide qué tan inciertos estamos en promedio sobre el valor de  $X$  dado que sabemos el valor de  $Y$ . También se puede interpretar como la cantidad de información que se gana en promedio cuando aprendemos el valor de  $X$  dado que sabíamos el valor de  $Y$ .

Supongamos que sabemos el valor de  $Y$ . Entonces hemos adquirido  $H(Y)$  bits de información sobre la pareja  $X, Y$ . La incertidumbre que queda sobre la pareja  $X, Y$  está asociada con lo que queda de nuestra falta de conocimiento sobre  $X$  a pesar de que conocemos  $Y$ .

Se puede probar que

- a)  $H(X|Y) \leq H(X)$ . La igualdad se cumple si y sólo si  $X, Y$  son independientes. Esta propiedad nos dice que condicionando reduce el valor de la entropía de Shannon (nuestro grado de incertidumbre).
- b)  $0 \leq H(X|Y)$ . La igualdad se cumple si y sólo si  $Y = f(X)$ .

Para entender la entropía condicional muchas veces es de gran ayuda usar la probabilidad condicional  $P(X = x|Y = y)$ . La *probabilidad de que  $X$  tome el valor de  $x$  dado que  $Y$  tomó el valor de  $y$*  es

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} ,$$

siempre y cuando  $P(Y = y) \neq 0$ .

3. La *información mutua* de  $X$  y  $Y$  se define como

$$H(X : Y) \equiv H(X) + H(Y) - H(X, Y) = H(X) - H(X|Y), \quad (2.75)$$

y mide qué tanta información tienen en común  $X$  y  $Y$ .

Se pueden probar las siguientes propiedades

- a)  $H(Y : X) = H(X : Y)$
- b)  $H(X : Y) \leq H(Y)$ . La igualdad se cumple si y sólo si  $Y = f(X)$ .
- c)  $0 \leq H(X : Y)$ . La igualdad se cumple si y sólo si  $X, Y$  son independientes.

Recordamos que estas cantidades se interpretan de la manera indicada porque responden ciertas preguntas sobre recursos. En general, las medidas de información surgen como respuestas a preguntas sobre la cantidad de recursos necesarios para resolver algún problema de procesamiento de información.

Ahora ilustraremos estos conceptos con el ejemplo sobre las dos monedas introducido arriba. Primero vamos a considerar el caso en que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes (2.69) y (2.70). Primero observamos que la entropía de Shannon conjunta de  $X$  y  $Y$  es

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j=0,1} p(i, j) \log_2 [ p(i, j) ] = - \sum_{i,j=0,1} \frac{1}{4} \log_2 \left[ \frac{1}{4} \right] = 2. \quad (2.76)$$

A partir de (2.63) vemos que  $H(X, Y)$  toma su valor máximo posible. Entonces ganamos en promedio la máxima información posible cuando aprendemos los valores de  $X$  y  $Y$ . De forma equivalente, antes de conocer los valores de  $X$  y  $Y$  tenemos la máxima incertidumbre posible sobre los valores de  $X$  y  $Y$ . Notamos que estas interpretaciones son razonables, pues antes de ver qué caras de las monedas aparecen sólo sabemos que puede aparecer águila con probabilidad  $1/2$  y sol con probabilidad  $1/2$  en cada una de ellas y que el resultado de una no afecta el de la otra.

Ahora calculamos la entropía de Shannon de  $X$  y  $Y$  por separado. Tenemos que

$$H(X) = \sum_{i=0,1} p_X(i) = 1, \quad H(Y) = \sum_{i=0,1} p_Y(i) = 1. \quad (2.77)$$

A partir de (2.63) vemos que  $H(X)$  y  $H(Y)$  toman sus valores máximos posibles. Luego se gana en promedio la máxima información posible de  $X$  ( $Y$ ) cuando aprendemos el valor de  $X$  ( $Y$ ). Además, a partir de (2.76) y (2.77) vemos que

$$H(X, Y) = 2 = H(X) + H(Y).$$

Recordamos que esta igualdad se satisface porque  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes.

A partir de (2.76) y (2.77) podemos calcular la entropía condicional de  $X$  sobre  $Y$  y la entropía condicional de  $Y$  sobre  $X$ :

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) = H(X) = 1,$$



$$H(Y|X) = H(X, Y) - H(X) = H(Y) = 1 . \quad (2.78)$$

Entonces vemos que ganamos en promedio la misma cantidad de información cuando aprendemos el valor de  $X$  dado que sabíamos el de  $Y$  que cuando aprendemos el valor de  $Y$  dado que sabíamos el de  $X$ . Además, notamos que  $H(X|Y) \leq H(X, Y)$ . Al conocer el valor de  $Y$  obtenemos  $H(Y) = 1$  bit de información sobre la pareja  $X, Y$ . La cantidad  $H(X|Y) = H(X)$  es la información que ganamos al conocer el valor de  $X$  dado que ya sabíamos el valor de  $Y$ . La cantidad  $H(Y|X) = H(Y)$  recibe una interpretación similar.

Calculemos ahora la información mutua de  $X$  y  $Y$ . Tenemos de (2.76) y (2.77) que

$$H(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = 0 . \quad (2.79)$$

Este resultado era esperado: como  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes, no hay relación entre los resultados de  $X$  y  $Y$ .

Ahora pasaremos a considerar el caso en que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias dependientes (2.71) y (2.72). Observamos que la entropía de Shannon conjunta de  $X$  y  $Y$  es

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{i,j=0,1} p(i, j) \log_2 [ p(i, j) ] , \\ &= - \frac{4}{10} \log_2 \left[ \frac{4}{10} \right] - \frac{1}{10} \log_2 \left[ \frac{1}{10} \right] - \frac{1}{2} \log_2 \left[ \frac{1}{2} \right] - 0 \cdot \log_2(0) , \\ &= 1.36 . \end{aligned} \quad (2.80)$$

Notamos que tenemos que interpretar el último sumando en la segunda igualdad de arriba mediante un límite. A partir de (2.76) vemos que  $H(X, Y)$  ahora toma un valor menor, esto es, ganamos en promedio menos información cuando aprendemos los valores de  $X$  y  $Y$ . De forma equivalente, antes de conocer los valores de  $X$  y  $Y$  tenemos menos incertidumbre sobre los valores de  $X$  y  $Y$ . Estas interpretaciones son razonables, pues antes de ver qué caras de las monedas aparecen sabemos que es más probable que aparezca la misma cara en las dos monedas, ver (2.71). De esta manera, tenemos más información que antes y por esto  $H(X, Y)$  toma un valor menor.

Ahora calculamos la entropía de Shannon de  $X$  y  $Y$  por separado. A partir de (2.72) tenemos que

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{i=0,1} p_X(i) = 1 , \\ H(Y) &= \sum_{i=0,1} p_Y(i) = 0.97 . \end{aligned} \quad (2.81)$$

A partir de (2.63) vemos que  $H(X)$  toma su valor máximo, pero  $H(Y)$  no. Luego se gana en promedio la máxima información posible de  $X$  cuando aprendemos el valor de  $X$ . De forma equivalente, tenemos la máxima incertidumbre sobre el valor de  $X$  antes de que aprendamos su valor. Por otra parte, ganamos menos información sobre  $Y$  cuando aprendemos su valor. De forma equivalente, tenemos menos incertidumbre sobre el valor de  $Y$  antes de que aprendamos

su valor. La razón de esto es debida a que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias dependientes. Además, a partir de (2.80) y (2.81) vemos que

$$H(X, Y) = 1.36 < 1.97 = H(X) + H(Y) .$$

Aquí se verifica la desigualdad porque  $X$  y  $Y$  son dependientes.

A partir de (2.80) y (2.81) podemos calcular la entropía condicional de  $X$  sobre  $Y$  y la entropía condicional de  $Y$  sobre  $X$ :

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= H(X, Y) - H(Y) = 0.39 , \\ H(Y|X) &= H(X, Y) - H(X) = 0.36 . \end{aligned} \quad (2.82)$$

Comparando (2.78) y (2.82) vemos que ahora ganamos en promedio menos información cuando aprendemos el valor de  $X$  ( $Y$ ) dado que sabíamos el valor de  $Y$  ( $X$ ). Este resultado es debido a que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias dependientes. Para entender mejor este resultado se puede usar el concepto de probabilidad condicional:

$$\begin{aligned} p\{Y = 0|X = 0\} &= \frac{p(0, 0)}{p_X(0)} = 1 , & p\{Y = 0|X = 1\} &= \frac{p(1, 0)}{p_X(1)} = \frac{2}{10} , \\ p\{Y = 1|X = 0\} &= \frac{p(0, 1)}{p_X(0)} = 0 , & p\{Y = 1|X = 1\} &= \frac{p(1, 1)}{p_X(1)} = \frac{8}{10} . \end{aligned} \quad (2.83)$$

Notamos que una vez que se conoce el valor de  $X$  estamos casi seguros sobre el valor que va a tener  $Y$ . Por esta razón, nuestra incertidumbre es pequeña y, por consiguiente,  $H(Y|X)$  es pequeña. De forma equivalente, como estamos casi seguros sobre el valor que va a tomar  $Y$  una vez que sabemos sobre el valor que tomó  $X$ , ganamos poca información al conocer el valor de  $Y$ .

De forma similar, tenemos que

$$\begin{aligned} p\{X = 0|Y = 0\} &= \frac{p(0, 0)}{p_Y(0)} = \frac{10}{12} , & p\{X = 0|Y = 1\} &= \frac{p(0, 1)}{p_Y(1)} = 0 , \\ p\{X = 1|Y = 0\} &= \frac{p(1, 0)}{p_Y(0)} = \frac{2}{12} , & p\{X = 1|Y = 1\} &= \frac{p(1, 1)}{p_Y(1)} = 1 . \end{aligned} \quad (2.84)$$

Nuevamente vemos que, una vez que sabemos el valor que tomó  $Y$ , estamos casi seguros sobre el valor que va a tomar  $X$ . Esto es, nuestra incertidumbre sobre el valor de  $X$  es muy pequeña y, por consiguiente,  $H(X|Y)$  es pequeña. De forma equivalente, ganamos en promedio poca información sobre  $X$  una vez que sabemos el valor de  $Y$ , pues estamos casi seguros sobre el valor que va a tomar  $Y$ .

Calculemos ahora la información mutua de  $X$  y  $Y$ . Tenemos de (2.80) y (2.81)

$$H(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = 0.61 . \quad (2.85)$$

Vemos que ésta es la cantidad de información que tienen en común  $X$  y  $Y$ .

Ahora vamos a introducir la entropía de von Neumann. Consideremos un sistema cuántico  $\mathcal{C}$  cuyo estado está determinado por el operador de densidad  $\rho$ . La *entropía de von Neumann* de  $\rho$  está definida como sigue:

$$S(\rho) = -\text{Tr} [ \rho \log_2(\rho) ] . \quad (2.86)$$

Consideremos la descomposición espectral de  $\rho$

$$\rho = \sum_{j \in I} p_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|, \quad (2.87)$$

donde  $p_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j \in I} p_j = 1$ ,  $\sum_{j \in I} |\phi_j\rangle\langle\phi_j| = \mathbb{I}$ ,  $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$ . Entonces podemos reescribir (2.86) como sigue:

$$S(\rho) = - \sum_{j \in I} p_j \log_2(p_j). \quad (2.88)$$

Aquí tomamos  $0 \cdot \log_2(0) = 0$ . Usando (2.88) podemos establecer inmediatamente una relación entre la entropía de von Neumann y la entropía de Shannon.

Consideramos el siguiente espacio muestral:

$$E_m = \{ |\phi_i\rangle : i \in I \}. \quad (2.89)$$

Definimos la variable aleatoria  $X_\rho$  en  $E_m$

$$X_\rho(|\phi_i\rangle) = i \quad (i \in I), \quad (2.90)$$

con pmf  $q$  definida por

$$q(i) = P(X_\rho = i) = p_i. \quad (2.91)$$

Entonces es claro que

$$S(\rho) = H(X_\rho). \quad (2.92)$$

Usando esta relación podemos hacer uso de las interpretaciones de la entropía de Shannon.

Supongamos que preparamos a  $\mathcal{C}$  en el estado  $|\phi_i\rangle$  con probabilidad  $p_i$  para cada  $i \in I$ . Entonces el estado de  $\mathcal{C}$  está descrito por el operador de densidad  $\rho$ . A partir de (2.92) vemos que  $S(\rho)$  es una medida de qué tanta información ganamos en promedio cuando determinamos el estado de  $\mathcal{C}$ , esto es, cuando determinamos en cuál de los estados  $|\phi_i\rangle$  se encuentra el sistema. Alternativamente, también se puede interpretar como una medida de la incertidumbre que tenemos sobre el estado de  $\mathcal{C}$ , esto es, una medida de la incertidumbre que tenemos sobre cuál de los estados  $|\phi_i\rangle$  se va a realizar en la mezcla.

A continuación enunciamos algunas de las propiedades de la entropía de von Neumann:

1.  $S(\rho) \geq 0$ . La igualdad se realiza si y sólo si  $\rho$  es un estado puro.
2. Si el espacio de Hilbert de  $\mathcal{C}$  tiene dimensión  $d < +\infty$ , entonces  $S(\rho) \leq \log_2(d)$ . La igualdad se realiza si y sólo si  $\rho = (1/d)\mathbb{I}$  es un estado máximamente mezclado.
3. La entropía de von Neumann es invariante bajo transformaciones unitarias :  $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$  si  $U$  es una transformación unitaria en el espacio de Hilbert de  $\mathcal{C}$ . De esta manera, vemos que para sistemas cerrados con evolución unitaria la entropía de von Neumann del operador de densidad del sistema completo es constante en el tiempo.

4. La entropía de von Neumann es una función cóncava estricta:

$$S\left(\sum_j \lambda_j \rho_j\right) \geq \sum_j \lambda_j S(\rho_j),$$

si  $\lambda_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_j \lambda_j = 1$  y  $\rho_j$  es un operador de densidad de  $\mathcal{C}$ . Además, la igualdad se verifica si y sólo si todas las  $\rho_j$  con  $\lambda_j \neq 0$  son iguales.

Ahora supongamos que  $\mathcal{C}$  es un sistema bipartita, esto es, tenemos dos sistemas cuánticos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  es el sistema completo. Si  $\rho$  es el operador de densidad de  $\mathcal{C}$  y  $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$  y  $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho)$  son los operadores de densidad de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , respectivamente, entonces se pueden probar las siguientes propiedades:

1. La entropía de von Neumann es subaditiva:

$$S(\rho) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B) = S(\rho_A \otimes \rho_B).$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si  $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ .

2.  $S(\rho_A) = S(\rho_B)$  si  $\rho$  es un estado puro.

Como veremos en la siguiente sección, estas propiedades permiten interpretar a la entropía de von Neumann como una medida de enredamiento. Además, mencionamos que hay algunas propiedades de la entropía de Shannon que no se cumplen para la entropía de von Neumann. Esto lo veremos explícitamente abajo en un ejemplo.

Ahora vamos a definir la entropía cuántica condicional y la información cuántica mutua. En vista de (2.92), simplemente vamos a tomar las cantidades ya definidas para la entropía de Shannon y vamos a cambiar ésta por la entropía de von Neumann.

Definimos

1.  $S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv S(\rho)$ ,  $S(\mathcal{A}) \equiv S(\rho_A)$  y  $S(\mathcal{B}) \equiv S(\rho_B)$ .

2. *Entropía cuántica condicional de  $\mathcal{A}$  dado  $\mathcal{B}$* :  $S(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \equiv S_\rho(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \equiv S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) - S(\mathcal{B})$ .

Usando (2.92) vemos que  $S(\mathcal{A}|\mathcal{B})$  es la información que ganaríamos (en promedio) si determináramos el estado de  $\mathcal{A}$  dado que sabíamos el estado de  $\mathcal{B}$ . De forma equivalente, mide la incertidumbre que tenemos sobre el estado de  $\mathcal{A}$  dado que sabemos el estado de  $\mathcal{B}$ . Sin embargo, hay que tener cuidado con estas dos interpretaciones, pues es natural pensar que toda medida de información debe ser no negativa y  $S(\mathcal{A}|\mathcal{B})$  puede ser negativa. En la siguiente sección veremos que esto es un indicio de que  $\rho$  es un estado enredado.

3. *Información cuántica mutua de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$* :

$$\begin{aligned} I(\mathcal{A} : \mathcal{B}) &= I(\rho), \\ &= S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) - S(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \\ &= S(\mathcal{A}) - S(\mathcal{A}|\mathcal{B}), \\ &= S(\mathcal{B}) - S(\mathcal{B}|\mathcal{A}). \end{aligned} \tag{2.93}$$

En vista de (2.92) vemos que  $I(\mathcal{A} : \mathcal{B})$  mide qué tanta información en común tienen  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dado que el estado de  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  es  $\rho$ . Esto es,  $I(\mathcal{A} : \mathcal{B})$  es una medida de todas las correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  contenidas en  $\rho$ .

Recientemente se han encontrado otras interpretaciones a  $I(\mathcal{A} : \mathcal{B})$ . Se ha probado que la máxima cantidad de información que Alice puede enviar secretamente a Bob usando  $\rho$  es igual a  $I(\mathcal{A} : \mathcal{B})$  [31]. También se ha mostrado que  $I(\mathcal{A} : \mathcal{B})$  es la cantidad mínima asintótica de ruido local que se tiene que agregar para convertir a  $\rho$  en un estado producto [32], esto es, en un estado de la forma  $\chi_A \otimes \chi_B$  con  $\chi_A$  y  $\chi_B$  operadores de densidad de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , respectivamente.

Ahora vamos a dar algunos ejemplos en donde vamos a ilustrar las propiedades de la entropía de von Neumann y su interpretación.

Supongamos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son dos qubits y que  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  es el sistema compuesto. Consideremos los siguientes operadores de densidad de  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+- \rangle + |-+ \rangle) (\langle +- | + \langle -+ |) \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \chi &= \frac{1}{2} |+- \rangle \langle +- | + \frac{1}{2} |-+ \rangle \langle -+ |.\end{aligned}\tag{2.94}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_A &= \rho_B = \frac{1}{2} |+\rangle \langle +| + \frac{1}{2} |-\rangle \langle -|, \\ \chi_A &= \chi_B = \frac{1}{2} |+\rangle \langle +| + \frac{1}{2} |-\rangle \langle -|.\end{aligned}\tag{2.95}$$

Además, en (2.94) ya tenemos las descomposiciones espectrales de estos dos operadores de densidad. Entonces es claro que

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad S(\rho_A) &= S(\rho_B) = 1, & \text{(ii)} \quad S(\rho) &= 0, \\ \text{(iii)} \quad S(\chi_A) &= S(\chi_B) = 1, & \text{(iv)} \quad S(\chi) &= 1.\end{aligned}\tag{2.96}$$

Ahora vamos a interpretar estas cantidades. Primero notamos que  $\rho$  es un estado puro. Si el estado de  $\mathcal{C}$  es  $\rho$ , entonces sabemos exactamente en qué estado se encuentra  $\mathcal{C}$ . Luego no tenemos incertidumbre sobre el estado de  $\mathcal{C}$  y no ganamos información si determinamos el estado de  $\mathcal{C}$ . Por lo tanto, se tiene que  $S(\rho) = 0$ , como se obtuvo arriba. Ahora pasamos al caso de  $\chi$ . Si el estado de  $\mathcal{C}$  es  $\chi$ , entonces no sabemos con certidumbre en qué estado se encuentra  $\mathcal{C}$ . Sólo sabemos que se encuentra en el estado  $|+- \rangle$  con probabilidad  $1/2$  o en el estado  $|-+ \rangle$  con probabilidad  $1/2$ . Como consecuencia de esto tenemos que  $S(\chi) = 1$ , que es una medida de la incertidumbre que tenemos sobre el estado de  $\mathcal{C}$ . Por último pasamos a ver los estados reducidos. Si el estado de  $\mathcal{C}$  es  $\rho$  o  $\chi$ , entonces tenemos que el estado de  $\mathcal{A}$  está máximamente mezclado y, como tal, tenemos máxima incertidumbre sobre el estado de  $\mathcal{A}$ . De forma equivalente, si determinamos el estado en que se encuentra  $\mathcal{A}$ , entonces vamos a ganar la máxima información posible. Como consecuencia de esto vemos que  $S(\rho_A)$  y  $S(\chi_A)$  toman su valor máximo posible de 1, pues el espacio de Hilbert de  $\mathcal{A}$  es de dimensión 2. Un análisis similar se aplica al estado de  $\mathcal{B}$ .

También notamos que

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad S(\rho) &< S(\rho_A) + S(\rho_B) = S(\rho_A \otimes \rho_B) = 2, \\ \text{(vi)} \quad S(\chi) &< S(\chi_A) + S(\chi_B) = S(\rho_A \otimes \rho_B) = 2. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Estas desigualdades reflejan el hecho de que tenemos menos incertidumbre sobre el estado  $\rho$  ( $\chi$ ) de  $\mathcal{C}$  que sobre el estado producto  $\rho_A \otimes \rho_B$  ( $\chi_A \otimes \chi_B$ ). Cuando trazamos sobre  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{A}$ ) perdemos información sobre las correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  contenidas en  $\rho$  ( $\chi$ ) y, como consecuencia, la entropía crece.

Usando (2.96) y (2.97) vemos que

$$\begin{aligned} I(\rho) &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho) = 2, \\ S_\rho(\mathcal{A}|\mathcal{B}) &= S(\rho) - S(\rho_B) = -1, \\ I(\chi) &= S(\chi_A) + S(\chi_B) - S(\chi) = 1, \\ S_\rho(\mathcal{A}|\mathcal{B}) &= S(\chi) - S(\chi_B) = 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

A partir de (2.98) vemos que la cantidad de correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  contenidas en  $\rho$  es igual a 2, mientras que las contenidas en  $\chi$  es igual a 1. Además, observamos aquí una diferencia entre la entropía condicional clásica y la entropía condicional cuántica. Mientras que la primera siempre es no negativa, la segunda puede ser negativa. De hecho, en la siguiente sección vamos a ver que para estados puros esto es un indicador de que el operador de densidad está enredado.

## 2.5. Enredamiento

El enredamiento es una propiedad de las correlaciones entre dos o más sistemas cuánticos. Estas correlaciones están asociadas con propiedades intrínsecamente cuánticas y no se pueden describir clásicamente, pues se puede mostrar que los estados con enredamiento tienen propiedades no locales y violan las desigualdades de Bell [5]. No es fácil dar una definición de enredamiento más que es una propiedad de estados enredados. Además, es más fácil definir los estados que no están enredados y a partir de ellos definir a los que están enredados. Vamos a empezar la discusión de enredamiento considerando estados puros. Introduciremos las medidas básicas de enredamiento para estados puros y después extenderemos la discusión a estados mixtos.

Consideremos un sistema cuántico bipartita  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  con espacio de estados  $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  donde  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  son los espacios de estados de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , respectivamente.

Primero vamos a suponer que  $\rho$  es un operador de densidad puro de  $\mathcal{C}$ . Por (1.9) vemos que

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.99)$$

para algún  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_C$  tal que  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ .

Sea  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_C$  tal que  $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ . Decimos que  $|\phi\rangle$  es un estado producto si y sólo si  $|\phi\rangle$  se puede escribir en la forma

$$|\phi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.100)$$

donde  $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$  y  $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$  son kets tales que  $\langle\psi_A|\psi_A\rangle = \langle\psi_B|\psi_B\rangle = 1$ .

Una vez que hemos introducido lo que es un estado producto (puro), podemos pasar a definir lo que es un estado puro enredado. Notamos que para esto vamos a definir primero lo que es un estado no enredado.

Decimos que  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  es un *estado separable* o *no enredado* si y sólo si  $|\psi\rangle$  es un estado producto. Entonces,  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  es un estado enredado si y sólo si  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  no es un estado separable, esto es, si y sólo si  $|\psi\rangle$  no es un estado producto.

Observamos que la no posibilidad de expresar un ket como un estado producto puede ser bastante complicada. Entonces es mucho más conveniente tener un criterio para determinar si un estado puro está enredado o no. Para esto usaremos la entropía lineal introducida en el Capítulo 1 y la entropía de von Neumann introducida en la sección anterior.

Supongamos que  $\rho$  es un operador de densidad puro de  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ . Los operadores de densidad reducidos de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  se designarán respectivamente por  $\rho_A$  y  $\rho_B$ . Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1.  $S(\rho_A) = S(\rho_B)$  y  $\text{Tr}[\rho_A^2] = \text{Tr}[\rho_B^2]$ .

Para probar esta propiedad se hace uso de la descomposición de Schmidt [5]:

Sea  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Entonces existen bases ortonormales (discretas)  $\{|\lambda_{Aj}\rangle : j \in \mathcal{I}_A\}$  y  $\{|\lambda_{Bj}\rangle : j \in \mathcal{I}_B\}$  de  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente, tales que

$$|\phi\rangle = \sum_{j \in \mathcal{I}} d_j |\lambda_{Aj}\rangle \otimes |\lambda_{Bj}\rangle, \quad (2.101)$$

donde  $\mathcal{I}$  es el conjunto de índices con menor cardinalidad de  $\mathcal{I}_A$  e  $\mathcal{I}_B$  y  $d_j$  son números no-negativos tales que  $\sum_{j \in \mathcal{I}} d_j^2 = 1$ .

Como  $\rho$  es un estado puro, por (2.99) tenemos que  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  con  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_C$  tal que  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ .

Ahora consideramos la descomposición de Schmidt (2.101) de  $|\psi\rangle$ :

$$|\psi\rangle = \sum_{j \in \mathcal{I}} d_j |\lambda_{Aj}\rangle \otimes |\lambda_{Bj}\rangle, \quad (2.102)$$

para algunas bases ortonormales (discretas)  $\{|\lambda_{Aj}\rangle : j \in \mathcal{I}_A\}$  y  $\{|\lambda_{Bj}\rangle : j \in \mathcal{I}_B\}$  de  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente. Además,  $\mathcal{I}$  es el conjunto de índices con menor cardinalidad de  $\mathcal{I}_A$  e  $\mathcal{I}_B$  y  $d_j$  son números no-negativos tales que  $\sum_{j \in \mathcal{I}} d_j^2 = 1$ .

A partir de de (2.102) vemos que

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{j,k \in \mathcal{I}} d_j d_k^* (|\lambda_{Aj}\rangle \otimes |\lambda_{Bj}\rangle) (\langle\lambda_{Ak}| \otimes \langle\lambda_{Bk}|), \\ &= \sum_{j,k \in \mathcal{I}} d_j d_k^* |\lambda_{Aj}\rangle \langle\lambda_{Ak}| \otimes |\lambda_{Bj}\rangle \langle\lambda_{Bk}|. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Tomando las trazas parciales con respecto a  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  y usando que  $\{|\lambda_{Aj}\rangle : j \in \mathcal{I}_A\}$  y  $\{|\lambda_{Bj}\rangle : j \in \mathcal{I}_B\}$  son conjuntos ortonormales, se sigue que

$$\rho_A = \sum_{j \in \mathcal{I}} |d_j|^2 |\lambda_{Aj}\rangle \langle\lambda_{Aj}|,$$

$$\rho_B = \sum_{j \in \mathcal{I}} |d_j|^2 |\lambda_{Bj}\rangle \langle \lambda_{Bj}|. \quad (2.104)$$

Luego es claro que  $S(\rho_A) = S(\rho_B)$  y  $\text{Tr}_A[\rho_A^2] = \text{Tr}[\rho_B^2]$ , que es lo que se quería.

2.  $\rho$  es un estado no enredado  $\implies \text{Tr}_A[\rho_A^2] = \text{Tr}_B[\rho_B^2] = 1$  y  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0$ .

Para probar este resultado simplemente tenemos que usar las definiciones de estado puro no enredado y estado producto (puro):

$\rho$  es un estado puro no enredado

$$\Leftrightarrow \rho = |\psi\rangle \langle \psi| \text{ para algún } |\psi\rangle \in \mathcal{H}_C \text{ tal que } \langle \psi|\psi\rangle = 1 \text{ y } \rho \text{ no está enredado,}$$

$$\Leftrightarrow \rho = |\psi\rangle \langle \psi| \text{ para algún } |\psi\rangle \in \mathcal{H}_C \text{ tal que } \langle \psi|\psi\rangle = 1 \text{ y } |\psi\rangle \text{ es un estado producto,}$$

$$\Leftrightarrow \rho = |\psi\rangle \langle \psi| \text{ con } |\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A \text{ y } |\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B \\ \text{tales que } \langle \psi_A|\psi_A\rangle = \langle \psi_B|\psi_B\rangle = 1,$$

$$\Leftrightarrow \rho = |\psi_A\rangle \langle \psi_A| \otimes |\psi_B\rangle \langle \psi_B| \text{ con } |\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A \text{ y } |\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B \\ \text{tales que } \langle \psi_A|\psi_A\rangle = \langle \psi_B|\psi_B\rangle = 1,$$

$$\Rightarrow \rho_A = |\psi_A\rangle \langle \psi_A| \text{ y } \rho_B = |\psi_B\rangle \langle \psi_B| \text{ con } |\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A \text{ y } |\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B \\ \text{tales que } \langle \psi_A|\psi_A\rangle = \langle \psi_B|\psi_B\rangle = 1,$$

$$\Rightarrow \text{Tr}_A[\rho_A^2] = \text{Tr}_B[\rho_B^2] = 1 \text{ y } S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0. \quad (2.105)$$

3.  $\rho$  es un estado enredado  $\iff S(\rho_A) = S(\rho_B) > 0$ .

Como  $\rho$  es un estado puro, por el inciso 1 tenemos que  $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ .

Supongamos primero que  $S(\rho_A) = S(\rho_B) > 0$ . Tomando el recíproco de la proposición en el inciso 2 concluimos que  $\rho$  es un estado enredado.

Ahora vamos a probar que  $\rho$  es un estado enredado implica  $S(\rho_A) = S(\rho_B) > 0$ . Para esto es más fácil probar el recíproco:  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0$  implica  $\rho$  es un estado no enredado.

Supongamos que  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0$ . Usando las propiedades de la entropía de von Neumann se sigue que  $\rho_A$  y  $\rho_B$  son estados puros de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , respectivamente. Entonces

$$\rho_A = |\psi_A\rangle \langle \psi_A|, \quad \rho_B = |\psi_B\rangle \langle \psi_B|, \quad (2.106)$$

para algunos  $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$  y  $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$  tales que  $\langle \psi_A|\psi_A\rangle = \langle \psi_B|\psi_B\rangle = 1$ .

Además, tenemos que

$$S(\rho) = 0 = S(\rho_A) + S(\rho_B), \quad (2.107)$$



puesto que  $\rho$  es un estado puro. Usando las propiedades de la entropía de von Neumann se sigue de (2.106) y (2.107) que

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_A \otimes \rho_B = |\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B|, \\ &= (|\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B|) .\end{aligned}\tag{2.108}$$

Luego  $\rho$  es un estado no enredado, que es lo que se quería.

4.  $\rho$  es un estado enredado  $\iff \text{Tr}_A(\rho_A^2) = \text{Tr}_B(\rho_B^2) < 1$ .

Como  $\rho$  es un estado puro, por el inciso 1 tenemos que  $\text{Tr}(\rho_A^2) = \text{Tr}(\rho_B^2)$ .

Supongamos primero que  $\text{Tr}(\rho_A^2) = \text{Tr}(\rho_B^2) < 1$ . Tomando el recíproco de la proposición en el inciso 2 concluimos que  $\rho$  es un estado enredado.

Ahora vamos a probar que  $\rho$  es un estado enredado implica  $\text{Tr}(\rho_A^2) = \text{Tr}(\rho_B^2) < 1$ . Para esto es más fácil probar el recíproco:  $\text{Tr}(\rho_A^2) = \text{Tr}(\rho_B^2) = 1$  implica  $\rho$  es un estado no enredado.

Supongamos que  $\text{Tr}(\rho_A^2) = \text{Tr}(\rho_B^2) = 1$ . Entonces tenemos que  $\rho_A$  y  $\rho_B$  son estados puros. Usando las propiedades de la entropía de von Neumann se sigue que  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0$ . Aplicando el resultado del inciso anterior vemos que  $\rho$  es un estado no enredado, que es lo que se quería.

5.  $\rho$  es un estado enredado  $\iff S_L(\rho_A) = S_L(\rho_B) > 0$ .

Este resultado es simplemente reescribir el resultado del inciso anterior en términos de la entropía lineal (1.10) y usar el inciso 1.

6.  $\rho$  es un estado enredado  $\iff S(\mathcal{B}|\mathcal{A}) < 0$ .

Primero vamos a probar que  $S(\mathcal{B}|\mathcal{A}) < 0$  implica que  $\rho$  está enredado. Supongamos que  $S(\mathcal{B}|\mathcal{A}) < 0$ . Como  $\rho$  es puro, tenemos que  $S(\rho) = 0$ . Entonces se sigue que

$$0 > S(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = S(\rho) - S(\rho_A) = -S(\rho_A) .$$

Usando el resultado del inciso 3 concluimos que  $\rho$  es un estado enredado.

Ahora vamos a probar que  $\rho$  está enredado implica  $S(\mathcal{B}|\mathcal{A}) < 0$ . Para esto, lo más sencillo es probar el recíproco:  $S(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \geq 0$  implica  $\rho$  no está enredado.

Supongamos que  $S(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \geq 0$ . Como  $\rho$  es puro, tenemos que  $S(\rho) = 0$  y  $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ . Entonces se tiene que

$$0 \leq S(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = S(\rho) - S(\rho_A) = -S(\rho_A) .$$

Como la entropía de von Neumann es no negativa, se sigue que  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0$ . Aplicando el resultado del inciso 3 concluimos que  $\rho$  no está enredado, que es lo que se quería.

Ahora vamos a definir lo que es un estado máximamente enredado en espacios de dimensión finita. Supongamos que  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  son espacios de dimensión finita  $d_A$  y  $d_B$ , respectivamente, y sea  $d = \min\{d_A, d_B\}$ .

Por propiedades de la entropía lineal (ver (1.10), el párrafo que le sigue y el inciso 1 antes de la ecuación (2.101)) y de la entropía de von Neumann (ver (1.11), el párrafo que le sigue y el inciso 1 antes de la ecuación (2.101)) tenemos que  $S_L(\rho_A) = S_L(\rho_B) \leq 1 - 1/d$  y  $S(\rho_A) = S(\rho_B) \leq \log_2(d)$ . Entonces decimos que un estado puro  $\rho$  está *máximamente enredado* si  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = \log_2(d)$ . Usando las propiedades de la entropía de von Neumann enunciadas en la Sección 2.4 vemos que  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = \log_2(d)$  si y sólo si  $S_L(\rho_A) = S_L(\rho_B) = 1 - 1/d$ . Entonces un estado puro  $\rho$  está *máximamente enredado* si  $S_L(\rho_A) = S_L(\rho_B) = 1 - 1/d$ .

Una vez que hemos llegado a este punto queda por preguntarse si los estados máximamente enredados satisfacen alguna propiedad distintiva. Resulta que, *cuando  $d_A = d_B$ , cualquier estado puro o mixto de  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  se puede preparar a partir de estados máximamente enredados usando sólo operaciones locales (mediciones generalizadas en  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{B}$ ) y comunicación clásica (por ejemplo, uso del teléfono para coordinar mediciones generalizadas en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  cuando  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  están en distintos laboratorios) [5, 33].*

Las propiedades expuestas arriba junto con la invariancia ante transformaciones unitarias permiten utilizar a las entropías lineal  $S_L$  y de von Neumann  $S$  como medidas de enredamiento (bipartitas) para estados puros. A continuación vamos a dar algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos.

Consideremos dos qubits  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  y el sistema compuesto  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ . Observamos que los espacios de estados  $\mathcal{H}_A$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{H}_B$  de  $\mathcal{B}$  tienen dimensión 2. Entonces un operador de densidad puro  $\rho$  de  $\mathcal{C}$  va a estar máximamente entrelazado si  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = \log_2(2) = 1$  o, equivalentemente,  $S_L(\rho_A) = S_L(\rho_B) = 1 - 1/2 = 1/2$ .

Los estados enredados por excelencia son los cuatro *estados de Bell*

$$\begin{aligned} |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} ( |+-\rangle \pm |-+\rangle ) , \\ |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} ( |++\rangle \pm |--\rangle ) . \end{aligned} \quad (2.109)$$

Estos estados están máximamente entrelazados y han sido realizados experimentalmente en diversos sistemas físicos [5].

Consideremos el ket normalizado

$$|\psi\rangle = \alpha|+-\rangle + \beta|-+\rangle , \quad (2.110)$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tales que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  y el operador de densidad puro

$$\chi = |\psi\rangle\langle\psi| . \quad (2.111)$$

Vamos a usar tanto la entropía lineal como la entropía de von Neumann para determinar qué tan enredado está  $\chi$ .

Los operadores de densidad reducidos asociados a  $\chi$  son

$$\chi_A = |\alpha|^2|+\rangle\langle+| + |\beta|^2|-\rangle\langle-| = |\alpha|^2|+\rangle\langle+| + (1 - |\alpha|^2)|-\rangle\langle-| ,$$

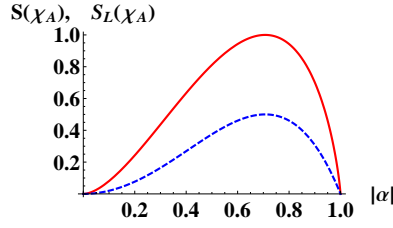


Figura 2.1: La figura muestra la entropía de von Neumann  $S(\chi_A)$  (línea roja sólida) y la entropía lineal  $S_L(\chi_A)$  (línea azul segmentada) del estado reducido  $\chi_A$  del operador de densidad  $\chi$  definido en (2.111) como función del parámetro  $|\alpha|$ , ver (2.112).

$$\chi_B = |\beta|^2|+\rangle\langle+| + |\alpha|^2|-\rangle\langle-| = (1 - |\alpha|^2)|+\rangle\langle+| + |\alpha|^2|-\rangle\langle-|. \quad (2.112)$$

Como las igualdades en (2.112) ya dan directamente la descomposición espectral de  $\chi_A$  y  $\chi_B$ , es claro que

$$\begin{aligned} S(\chi_A) &= S(\chi_B) = -|\alpha|^2 \log_2(|\alpha|^2) - (1 - |\alpha|^2) \log_2(1 - |\alpha|^2), \\ S_L(\chi_A) &= S_L(\chi_B) = 1 - |\alpha|^4 - (1 - |\alpha|^2)^2. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Entonces vemos que  $\chi$  va a ser un estado enredado siempre y cuando  $|\alpha| \neq 0, 1$ . El grado de enredamiento de  $\chi$  como función de  $|\alpha|$  aparece en la figura (2.1). Notamos que tanto  $S(\chi_A)$  como  $S_L(\chi_A)$  alcanzan en  $|\alpha| = 1/\sqrt{2}$  sus respectivos valores máximos de 1 y  $1/2$ . Esto es,  $\chi$  es un estado máximamente entrelazado cuando  $\chi$  es alguno de los estados de Bell  $|\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm|$ .

Ahora pasaremos a considerar el caso general en que el estado puede ser mixto. Supongamos que  $\rho$  es un operador de densidad de  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ . Queremos una definición de estado no enredado que incluya a la anterior como caso particular cuando  $\rho$  es un estado puro. Para esto haremos la extensión natural de la definición que habíamos dado antes para estados no enredados.

Decimos que  $\rho$  es un *estado separable o no enredado* si se puede expresar en la forma

$$\rho = \sum_{j,k} p_{jk} |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \otimes |\phi_k\rangle\langle\phi_k|, \quad (2.114)$$

donde  $p_{jk}$  son números no negativos tales que  $\sum_{j,k} p_{jk} = 1$ ,  $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}_A$ ,  $|\phi_k\rangle \in \mathcal{H}_B$  y  $\langle\psi_j|\psi_j\rangle = \langle\phi_k|\phi_k\rangle = 1$ . Entonces decimos que  $\rho$  es un estado enredado si no se puede expresar en la forma dada por (2.114).

Observamos que simplemente hemos tomado la definición de estado separable para estados puros y hemos considerado mezclas estadísticas. Un estado de la forma (2.114) puede tener correlaciones, pero no las asociadas con el enredamiento. Una de las razones de esto es que estados del tipo (2.114) se pueden preparar con comunicación clásica como mostraremos a continuación. Supongamos que Alice tiene en su posesión al sistema  $\mathcal{A}$ , mientras que Bob tiene en su posesión al sistema  $\mathcal{B}$ . Entonces Alice prepara  $p_{jk}N$  ( $N \gg 1$ ) copias de su sistema en el estado  $|\psi_j\rangle$  y le llama a Bob para que prepare  $p_{jk}N$  copias de su sistema en el estado  $|\phi_j\rangle$ . Esto lo hacen para cada  $j$  y  $k$ . Entonces el operador de densidad que describe el ensamble de Alice y Bob es (2.114).

Notamos que un estado separable  $\rho$  normalmente se define como uno que se puede escribir en la forma

$$\rho = \sum_{j,k} p_{jk} \rho_{Aj} \otimes \rho_{Bk} , \quad (2.115)$$

donde  $p_{jk}$  son números no negativos tales que  $\sum_{j,k} p_{jk} = 1$ ,  $\rho_{Aj}$  es un operador de densidad de  $\mathcal{A}$  y  $\rho_{Bk}$  es un operador de densidad de  $\mathcal{B}$ . Resulta que las dos definiciones (2.114) y (2.115) son equivalentes. Esto lo mostraremos a continuación.

Si  $\rho$  se puede expresar en la forma (2.114), entonces tomando  $\rho_{Aj} = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$  y  $\rho_{Bj} = |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$  se puede escribir en la forma (2.115).

Ahora supongamos que  $\rho$  se puede expresar en la forma (2.115). Queremos ver que  $\rho$  se puede expresar en la forma (2.114). Para esto consideramos las descomposiciones espectrales de cada  $\rho_{Aj}$  y  $\rho_{Bk}$ :

$$\rho_{Aj} = \sum_l q_{jl} |\xi_{jl}\rangle\langle\xi_{jl}| , \quad \rho_{Bk} = \sum_l q'_{kl} |\zeta_{kl}\rangle\langle\zeta_{kl}| , \quad (2.116)$$

donde  $q_{jl}$  y  $q'_{kl}$  son números no negativos tales que  $\sum_l q_{jl} = \sum_l q'_{kl} = 1$  y  $|\xi_{jl}\rangle \in \mathcal{H}_A$  y  $|\zeta_{kl}\rangle \in \mathcal{H}_B$  son estados tales que  $\langle\xi_{jl}|\xi_{jl}\rangle = \langle\zeta_{kl}|\zeta_{kl}\rangle = 1$ .

Substituyendo (2.116) en (2.114) vemos que

$$\rho = \sum_{j,k} \sum_{l,m} p_{jk} q_{jl} q'_{km} |\xi_{jl}\rangle\langle\xi_{jl}| \otimes |\zeta_{km}\rangle\langle\zeta_{km}| , \quad (2.117)$$

donde

$$\sum_{j,k} \sum_{l,m} p_{jk} q_{jl} q'_{km} = 1 . \quad (2.118)$$

Por lo tanto,  $\rho$  se puede escribir en la forma dada por (2.114) y concluimos que las dos definiciones son equivalentes.

Para el caso de estados mixtos las entropías lineal y de von Neumann ya no se pueden usar como medidas de enredamiento. Una razón de esto es que no pueden distinguir estados separables de estados enredados. Mostraremos esto explícitamente mediante un ejemplo.

Consideremos dos qubits  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  y el sistema compuesto  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ . Un operador de densidad mixto de  $\mathcal{C}$  es

$$\chi = \frac{1}{2} |+\rangle\langle+| \otimes |+\rangle\langle+| + \frac{1}{2} |-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-| . \quad (2.119)$$

A partir de (2.114) vemos que  $\chi$  es un estado separable. Además, tenemos que los operadores de densidad de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son

$$\chi_A = \chi_B = \frac{1}{2} |+\rangle\langle+| + \frac{1}{2} |-\rangle\langle-| . \quad (2.120)$$

Entonces tenemos que  $S(\chi_A) = S(\chi_B) = 1 > 0$  y  $\text{Tr}(\chi_A^2) = \text{Tr}(\chi_B^2) = 1/2 > 0$ . Usando el criterio desarrollado arriba para estados puros concluiríamos que  $\chi$  es un estado enredado. Sin

embargo, ya vimos que  $\chi$  es un estado separable. Por lo tanto, vemos que las entropías lineal y de von Neumann no pueden distinguir entre estados mixtos separables y estados mixtos enredados.

Existen varias medidas de enredamiento para estados mixtos [5, 33]. Nosotros sólo vamos a introducir el llamado *enredamiento de formación* y haremos uso de él en los siguientes capítulos.

Sea  $\rho$  un operador de densidad de  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ . El *enredamiento de formación* de  $\rho$  está definido como sigue [5, 33]:

$$E_F(\rho) \equiv \inf \left\{ \sum_j p_j S(\rho_{A_j}) : \rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \rho_{A_j} = \text{Tr}_B ( |\psi_j\rangle\langle\psi_j| ) \right\}. \quad (2.121)$$

Hacemos algunas observaciones sobre la definición (2.121):

1. Dada la descomposición  $\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$  como mezcla de estados puros,  $S(\rho_{A_j})$  con  $\rho_{A_j} = \text{Tr}_B ( |\psi_j\rangle\langle\psi_j| )$  mide el enredamiento de  $|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ .
2.  $\sum_j p_j S(\rho_{A_j})$  es el enredamiento promedio de la descomposición  $\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$  de  $\rho$  como mezcla de estados puros.
3.  $E_F(\rho)$  es el enredamiento promedio más pequeño sobre todas las posibles descomposiciones de  $\rho$  como mezclas de estados puros.

En el Capítulo 1 vimos que hay un número infinito de formas para descomponer  $\rho$  como mezcla de estados puros. Por esta razón  $E_F(\rho)$  normalmente se tiene que calcular numéricamente. Sin embargo, se ha encontrado una forma muy sencilla para calcular el enredamiento de formación para el caso en que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son dos qubits [34]. A continuación vamos a presentar cómo se calcula el enredamiento de formación para este caso.

Supongamos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son dos qubits y que  $\rho$  es un operador de densidad del sistema compuesto  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ . Consideremos la base ortonormal  $\mathbf{B}'$  para el espacio de estados de  $\mathcal{C}$  introducida en la sección de *Notación* y la representación matricial  $[\rho]_{\mathbf{B}'}$  de  $\rho$  con respecto a esta base.

Definimos la matriz

$$\mathbb{M} = [\rho]_{\mathbf{B}'} (\sigma_y \otimes \sigma_y) [\rho]_{\mathbf{B}'}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (2.122)$$

donde  $\sigma_y \otimes \sigma_y$  es el producto tensorial de las matrices de Pauli (ver la sección *Notación*) y  $[\rho]_{\mathbf{B}'}^*$  es el conjugado de la matriz  $[\rho]_{\mathbf{B}'}$ . Observamos que  $[\rho]_{\mathbf{B}'}$  es una matriz compleja hermitiana de  $4 \times 4$  y que se podría usar cualquier representación matricial  $[\rho]_{\mathbf{B}''}$  de  $\rho$  relacionada con  $[\rho]_{\mathbf{B}'}$  mediante una matriz ortogonal.

Ahora calculamos los eigenvalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$  de  $\mathbb{M}$ . Con estas cantidades calculamos la *conurrencia* de  $\rho$ :

$$C(\rho) = \text{máx} \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}. \quad (2.123)$$

Entonces el enredamiento de formación de  $\rho$  está dado por la siguiente expresión:

$$E_F(\rho) = f \left( \frac{1 + \sqrt{1 - C(\rho)^2}}{2} \right), \quad (2.124)$$

con

$$f(x) = -x \log_2(x) - (1-x) \log_2(1-x) . \quad (2.125)$$

Hacemos las siguientes observaciones sobre (2.123) y (2.125):

1. La concurrencia  $C(\rho)$  toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ . El valor de 1 corresponde a un estado máximamente enredado, mientras que el valor de 0 corresponde a un estado separable.
2. El enredamiento de formación  $E_F(\rho)$  toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ . El valor de 1 corresponde a un estado máximamente enredado, mientras que el valor de 0 corresponde a un estado separable.
3. Hay una relación 1 a 1 entre  $E_F(\rho)$  y  $C(\rho)$ . Por esta razón es común usar la concurrencia para caracterizar el enredamiento entre dos qubits.
4. Se puede probar que  $E_F(\rho) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$  para estados puros  $\rho$ . Con este resultado vemos que el enredamiento de formación se reduce a la entropía de von Neumann cuando se tienen estados puros.

Ahora daremos algunos ejemplos sobre el uso tanto de la concurrencia como del enredamiento de formación. Primero consideremos el estado de Bell

$$\rho = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| , \quad (2.126)$$

donde  $|\Psi^+\rangle$  está definido en (2.109). Tenemos que  $\rho$  es un estado puro y que  $E_F(\rho) = C(\rho) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1$ . Como se esperaba, obtenemos que  $\rho$  es un estado puro máximamente enredado. Además, en lugar de usar el enredamiento de formación pudimos haber usado la entropía de von Neumann, pues vimos arriba que estas dos cantidades son iguales para estados puros.

Ahora consideremos el *estado mixto de Werner*

$$\rho = \frac{p}{4} \mathbb{I} + (1-p) |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| , \quad (2.127)$$

donde  $p \in [0, 1]$  y  $\mathbb{I}$  es el operador identidad en  $\mathcal{C}$ . Notamos que  $\rho$  es un estado mixto si  $p > 0$ . Entonces no podemos usar la entropía de von Neumann ni la entropía lineal como medidas de enredamiento. Sólo podemos usar la concurrencia y el enredamiento de formación. Es fácil ver que  $C(\rho) = \max\{0, 1 - 3p/2\}$ . Luego  $\rho$  va a ser un estado enredado si y sólo si  $0 \leq p < 2/3$ . La figura (2.2) muestra tanto la concurrencia como el enredamiento de formación como función de  $p$ .

Arriba hemos presentado algunas medidas de enredamiento para sistemas bipartitas. Sin embargo, el enredamiento no está restringido a parejas de sistemas cuánticos y el estudio de enredamiento multipartita (es decir, entre varios sistemas) es un área de investigación muy activa actualmente [35]. Conforme el número de sistemas crece la variedad de posibles estados enredados aumenta rápidamente y su estudio se vuelve mucho más complicado. En lo que sigue

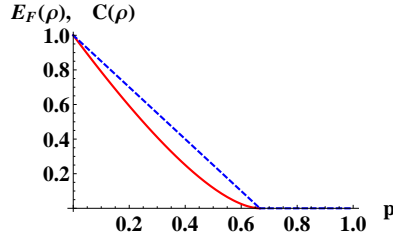


Figura 2.2: La figura muestra la concurrencia  $C(\rho)$  (línea azul-segmentada) y el enredamiento de formación  $E_F(\rho)$  (línea roja-sólida) del estado mixto de Werner (2.127) como función del parámetro  $p$ .

daremos ejemplos de estados enredados para sistemas compuestos por tres subsistemas con el propósito de ilustrar el tipo de estados enredados que se pueden tener e introduciremos los conceptos que usaremos más adelante. Estos ejemplos y conceptos serán especialmente útiles en el Capítulo 3 donde analizaremos el enredamiento en un sistema tripartita (es decir, en un sistema compuesto por tres subsistemas). Algunas referencias que discuten enredamiento multipartita son [33] y [35].

En los que sigue vamos a considerar un sistema  $\mathcal{C}$  compuesto por tres qubits a los que nos referiremos como los qubits 1, 2 y 3. Si  $\rho$  es un operador de densidad de  $\mathcal{C}$ , entonces vamos a decir que los qubits  $i$  y  $j$  están enredados si el operador de densidad reducido de los qubits  $i$  y  $j$  está enredado. Además, diremos que los qubits  $i$  y  $j$  están enredados con el qubit  $k$  si el operador de densidad del qubit  $k$  está enredado. De esta manera, analizaremos el enredamiento considerando los posibles sistemas bipartitas que se pueden formar con los tres qubits y usaremos las medidas de enredamiento introducidas arriba.

Consideremos primero el ket normalizado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} ( |+-+\rangle - |-++\rangle + |--\rangle - |-+-\rangle ) . \quad (2.128)$$

¿Qué tipos de enredamiento podrá tener  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ?

Primero observamos que  $|\psi\rangle$  se puede reescribir usando los estados de Bell:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2} [ ( |+-\rangle - |-+\rangle ) \otimes |+\rangle + ( |+-\rangle - |-+\rangle ) \otimes |-\rangle ] , \\ &= |\Psi^-\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} ( |+\rangle + |-\rangle ) . \end{aligned} \quad (2.129)$$

Notamos que el estado de los qubits 1 y 2 es  $|\Psi^-\rangle$ , mientras que el qubit 3 está en el estado  $(1/\sqrt{2})( |+\rangle + |-\rangle )$ . Entonces, los qubits 1 y 2 están máximamente enredados, mientras que los qubits 1 y 2 no están enredados con el tercero.

Ahora vamos a considerar el *estado GHZ* (Greenberger-Horne-Zeilinger)

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( |+++ \rangle + |--\rangle ) . \quad (2.130)$$

El operador de densidad del sistema de tres qubits es  $\rho = |GHZ\rangle\langle GHZ|$ .

Primero vamos a estudiar si hay enredamiento de uno de los qubits con los otros dos. Como el estado  $|GHZ\rangle$  es puro, podemos usar la entropía de von Neumann o la entropía lineal como medidas de enredamiento. Trazando sobre los grados libertad del tercer qubit vemos que el operador de densidad  $\rho_{12}$  de los qubits 1 y 2 es

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} \{ |++\rangle\langle ++| + |--\rangle\langle --| \} . \quad (2.131)$$

El operador de densidad  $\rho_{13}$  de los qubits 1 y 3 y el operador de densidad  $\rho_{23}$  de los qubits 2 y 3 tienen exactamente la misma forma que  $\rho_{12}$ .

Notamos que (2.131) ya da la descomposición espectral de  $\rho_{12}$ . Entonces vemos que

$$\begin{aligned} S(\rho_{12}) &= S(\rho_{13}) = S(\rho_{23}) = -2 \left( \frac{1}{2} \right) \log_2 \left( \frac{1}{2} \right) = 1 , \\ S_L(\rho_{12}) &= S_L(\rho_{13}) = S_L(\rho_{23}) = \frac{1}{2} . \end{aligned} \quad (2.132)$$

Como el espacio de estados de un qubit es de dimensión 2, vemos que los valores máximos de las entropías lineal y de von Neumann son respectivamente  $1 - 1/2 = 1/2$  y  $\log_2(2) = 1$ . Entonces se sigue de (2.132) que los qubits  $i$  y  $j$  están máximamente enredados con el qubit  $k$  donde  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$  y  $k \in \{1, 2, 3\} - \{i, j\}$ .

Ahora vamos a estudiar si hay enredamiento de uno de los qubits con otro. Esto es, vamos a ver si los qubits  $i$  y  $j$  están enredados con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  y  $j \neq i$ . Para esto usamos el operador de densidad  $\rho_{ij}$  de los qubits  $i$  y  $j$  en (2.131). Como  $\rho_{ij}$  es un estado mixto, no podemos usar las entropías lineal y de von Neumann como medidas de enredamiento. Tenemos que usar la concurrencia o el enredamiento de formación.

La matriz cuyos eigenvalores determinan la concurrencia es

$$\mathbb{M} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (2.133)$$

por lo que la concurrencia y el enredamiento de formación de  $\rho_{ij}$  son iguales a 0. Luego, los qubits  $i$  y  $j$  no están enredados.

Dado que el estado GHZ es un estado puro tal que  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{13}$  y  $\rho_{23}$  son mezclas de estados puros no enredados, se dice que el estado GHZ es un estado tripartita con enredamiento tripartita genuino. A continuación definimos este concepto en general para sistemas tripartitas.

Consideremos tres sistemas cuánticos  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  y el sistema compuesto  $\mathcal{D} = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$ . Un operador de densidad puro  $\rho$  de  $\mathcal{C}$  tiene *enredamiento tripartita genuino* si los operadores de densidad reducidos  $\rho_{AB} = \text{Tr}_C(\rho)$ ,  $\rho_{AC} = \text{Tr}_B(\rho)$  y  $\rho_{BC} = \text{Tr}_A(\rho)$  son mezclas de estados puros  $|\xi_j\rangle\langle\xi_j|$  tales que  $|\xi_j\rangle\langle\xi_j|$  no es un estado enredado [35].

Por último vamos a considerar el *estado de Werner para 3 qubits*:

$$|W\rangle = \alpha|++-\rangle + \beta|+-+\rangle + \gamma|-++\rangle , \quad (2.134)$$



donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son números complejos tales que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ .

Primero vamos a formar los operadores de densidad  $\rho_{12}$  de los qubits 1 y 2,  $\rho_{13}$  de los qubits 1 y 3 y  $\rho_{23}$  de los qubits 2 y 3. Usando la base  $\mathbf{B}'$  para el espacio de estado de dos qubits (ver la sección *Notación*) vemos que las representaciones matriciales de estos operadores con respecto a  $\mathbf{B}'$  son

$$\begin{aligned} [\rho_{12}]_{\mathbf{B}'} &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 & \beta\gamma^* & 0 \\ 0 & \beta^*\gamma & |\gamma|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [\rho_{13}]_{\mathbf{B}'} &= \begin{pmatrix} |\beta|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 & \alpha\gamma^* & 0 \\ 0 & \alpha^*\gamma & |\gamma|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [\rho_{23}]_{\mathbf{B}'} &= \begin{pmatrix} |\gamma|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & 0 \\ 0 & \alpha^*\beta & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Los estados en (2.135) nos permiten determinar si los qubits  $i$  y  $j$  con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  y  $j \neq i$  están enredados o no. Para esto tenemos que usar la concurrencia o el enredamiento de formación, pues los estados en (2.135) son mixtos. Usaremos la concurrencia.

Como  $|\alpha|$ ,  $|\beta|$  y  $|\gamma|$  son cantidades no negativas tales que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ , podemos usar coordenadas esféricas para parametrizarlas:

$$|\alpha| = \sin(\theta)\cos(\phi), \quad |\beta| = \sin(\theta)\sin(\phi), \quad |\gamma| = \cos(\theta), \quad (2.136)$$

donde  $\theta \in [0, \pi/2]$  es el ángulo polar y  $\phi \in [0, \pi/2]$  es el ángulo acimutal.

Usando (2.136) se puede calcular la concurrencia con mayor facilidad para obtener

$$C(\rho_{12}) = 2|\beta\gamma|, \quad C(\rho_{13}) = 2|\alpha\gamma|, \quad C(\rho_{23}) = 2|\alpha\beta|. \quad (2.137)$$

A partir de (2.137) vemos que los qubits  $i$  y  $j$  con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  y  $j \neq i$  están enredados, puesto que  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ . Notamos que este ejemplo contrasta con el estado GHZ, pues vimos que en ese caso los qubits  $i$  y  $j$  no estaban enredados. Las gráficas de la concurrencia aparecen en la figura (2.3).

Ahora veremos si los qubits  $i$  y  $j$  están enredados con el qubit  $k$  donde  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j \neq i$  y  $k \in \{1, 2, 3\} - \{i, j\}$ . Para esto sí podemos usar la entropía lineal o la entropía de von Neumann. Usaremos la segunda.

En lugar de calcular la entropía de von Neumann de (2.135) conviene primero trazar sobre uno de los grados de libertad restantes. Entonces los operadores de densidad  $\rho_1$  del primer qubit,  $\rho_2$  del segundo qubit y  $\rho_3$  del tercer qubit están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (1 - |\gamma|^2)|+\rangle\langle+| + |\gamma|^2|-\rangle\langle-|, \\ \rho_2 &= (1 - |\beta|^2)|+\rangle\langle+| + |\beta|^2|-\rangle\langle-|, \end{aligned}$$

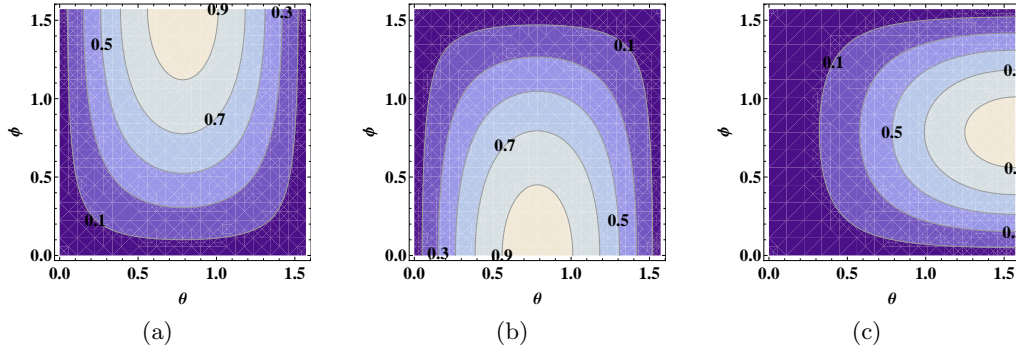


Figura 2.3: Las figuras (2.3a), (2.3b) y (2.3a) muestran curvas de nivel de la concurrencia de los estados  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{13}$  y  $\rho_{23}$ , respectivamente, como función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , ver (2.136).

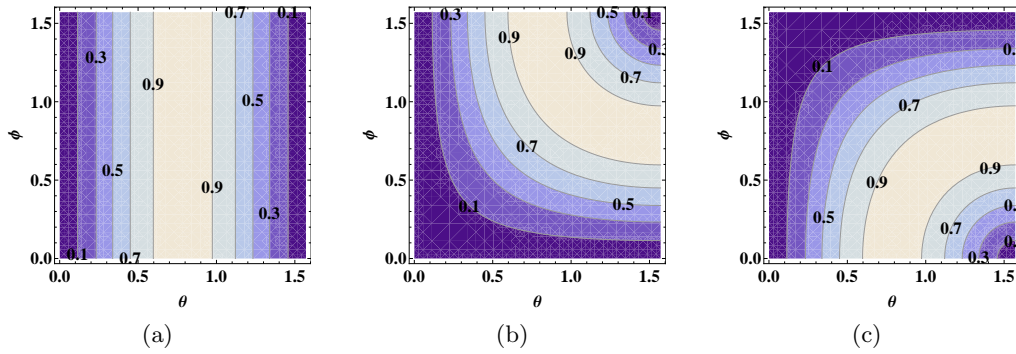


Figura 2.4: Las figuras (2.4a), (2.4b) y (2.4c) muestran curvas de nivel de la entropía de von Neumann de los estados  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$ , respectivamente, como función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , ver (2.136).

$$\rho_3 = (1 - |\alpha|^2)|+\rangle\langle+| + |\alpha|^2|-\rangle\langle-|. \quad (2.138)$$

Las expresiones en (2.138) ya dan directamente las descomposiciones espectrales de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$ . Entonces se sigue que

$$\begin{aligned} S(\rho_1) &= -(1 - |\gamma|^2)\log_2(1 - |\gamma|^2) - |\gamma|^2\log_2(|\gamma|^2), \\ S(\rho_2) &= -(1 - |\beta|^2)\log_2(1 - |\beta|^2) - |\beta|^2\log_2(|\beta|^2), \\ S(\rho_3) &= -(1 - |\alpha|^2)\log_2(1 - |\alpha|^2) - |\alpha|^2\log_2(|\alpha|^2). \end{aligned} \quad (2.139)$$

Como  $\alpha\beta\gamma \neq 0$  y  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ , tenemos que  $S(\rho_j) > 0$  para toda  $j$ . Entonces los qubits  $i$  y  $j$  están enredados con el qubit  $k$  donde  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j \neq i$  y  $k \in \{1, 2, 3\} - \{i, j\}$ . Las gráficas de  $S(\rho_j)$  aparecen en la figura (2.4) y mencionamos que la estructura de  $S_L(\rho_j)$  es exactamente igual a la de  $S(\rho_j)$ .

Concluimos que en el estado Werner de 3 qubits todos los subsistemas están enredados con todos los demás.

## 2.6. Discordia cuántica

En la sección anterior vimos que los estados cuánticos se pueden dividir en separables o enredados. Hasta hace poco se pensaba que todas las correlaciones cuánticas estaban incluidas en el enredamiento y que los estados separables eran puramente clásicos. Sin embargo, se ha encontrado que hay correlaciones cuánticas distintas del enredamiento y que éstas pueden dar lugar a ventajas en cómputo y procesamiento de información [36]-[40]. En esta sección vamos a introducir una medida de correlaciones cuánticas distintas del enredamiento llamada *discordia cuántica* e introducida originalmente en [38]. Mencionamos que recientemente se han dado otras definiciones de la discordia cuántica con el propósito de querer tener una visión unificada de todas las correlaciones [36]. Nosotros presentaremos la discordia cuántica original [38].

Consideremos un sistema bipartita  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  cuyo estado está descrito por el operador de densidad  $\rho$  y supongamos que tenemos una base ortonormal

$$\mathbb{B}_C = \{ |\phi_j\rangle : j \in \mathcal{I} \} , \quad (2.140)$$

para el espacio de estados de  $\mathcal{B}$ . La base en (2.140) es llamada muchas veces un *conjunto completo de proyectores unidimensionales de  $\mathcal{B}$* .

Los elementos de  $\mathbb{B}_C$  se pueden pensar como los eigenvectores de un observable  $\mathbb{O}_B$  de  $\mathcal{B}$  con espectro no degenerado. Entonces podemos preguntarnos sobre el estado  $\rho_j$  de  $\mathcal{C}$  justo después de una medición de  $\mathbb{O}_B$  en la que se obtuvo el resultado asociado a  $|\phi_j\rangle$ :

$$\rho_j = \frac{1}{p_j} |\phi_j\rangle \langle \phi_j | \rho | \phi_j\rangle \langle \phi_j | , \quad (2.141)$$

donde

$$p_j = \text{Tr} ( |\phi_j\rangle \langle \phi_j | \rho | \phi_j\rangle \langle \phi_j | ) . \quad (2.142)$$

Dado que  $\mathbb{O}_B$  es un operador de  $\mathcal{B}$ , tenemos que la medición se llevó a cabo sobre  $\mathcal{B}$ . Esto es, el subsistema  $\mathcal{A}$  no estuvo involucrado en la medición. Además, con la medición se obtuvo información sobre el sistema completo  $\mathcal{C}$ . Entonces podemos hacer la siguiente pregunta: ¿cuánta información sobre  $\mathcal{A}$  contenida en  $\rho$  se obtuvo en la medición sobre  $\mathcal{B}$ ? Para responder esta pregunta haremos uso de la interpretación de la entropía de von Neumann dada en la sección *Entropías e información*:

1.  $S(\rho_A)$  con  $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho]$  es la información que se ganaría (en promedio) en una medición del estado de  $\mathcal{A}$ .
2.  $S(\rho_{A_j})$  con  $\rho_{A_j} = \text{Tr}_B[\rho_j]$  es la información que se ganaría (en promedio) en una medición del estado de  $\mathcal{A}$  después de la medición sobre  $\mathcal{B}$ .
3. Como consecuencia de los dos incisos anteriores vemos que

$$S(\rho_A) - S(\rho_{A_j}) , \quad (2.143)$$

es la información que se ganó (en promedio) sobre  $\mathcal{A}$  después de la medición sobre  $\mathcal{B}$ .

La cantidad en (2.143) depende de que se haya obtenido el resultado asociado a  $|\phi_j\rangle$  en la medición sobre  $\mathcal{B}$ , pero se pueden obtener resultados asociados a otros  $|\phi_{j'}\rangle$ . Entonces vamos a promediar  $S(\rho_{Aj})$  sobre todos los posibles resultados de la medición:

$$\sum_j p_j S(\rho_{Aj}) , \quad (2.144)$$

es la información promedio que se ganaría (en promedio) al determinar el estado de  $\mathcal{A}$  después de la medición sobre  $\mathcal{B}$ .

Se sigue que

$$S(\rho_A) - \sum_j p_j S(\rho_{Aj}) , \quad (2.145)$$

es la información promedio que se ganó (en promedio) sobre  $\mathcal{A}$  después de la medición sobre  $\mathcal{B}$ . Luego la máxima información promedio que se puede ganar (en promedio) sobre  $\mathcal{A}$  después de cualquier medición sobre  $\mathcal{B}$  asociada a proyectores ortogonales unidimensionales es

$$\begin{aligned} C_B^{cl}(\rho) &\equiv \max_{\mathcal{B}_c} \left[ S(\rho_A) - \sum_j p_j S(\rho_{Aj}) \right] , \\ &= S(\rho_A) - \min_{\mathcal{B}_c} \sum_j p_j S(\rho_{Aj}) , \end{aligned} \quad (2.146)$$

donde el proceso de optimización se lleva a cabo sobre todas las posibles bases ortonormales para el espacio de estados de  $\mathcal{B}$ .

Ahora vamos a guardar el resultado (2.146) por un momento para responder otra pregunta: ¿cuál es la cantidad máxima de información sobre  $\mathcal{A}$  que idealmente se podría obtener mediante una medición sobre  $\mathcal{B}$  asociada a proyectores unidimensionales? Recordamos que  $I(\rho)$  es la cantidad de información que tienen en común  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  en  $\rho$ . Entonces es intuitivamente claro que  $I(\rho)$  es la cantidad máxima de información sobre  $\mathcal{A}$  que idealmente se podría obtener mediante una medición sobre  $\mathcal{B}$ . Restando (2.146) a  $I(\mathcal{A} : \mathcal{B})$  vemos que

$$D_B^Q(\rho) \equiv I(\rho) - C_B^{cl}(\rho) , \quad (2.147)$$

es la información sobre  $\mathcal{A}$  que existe en las correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  en  $\rho$  que no puede ser obtenida mediante una medición sobre  $\mathcal{B}$  asociada a proyectores unidimensionales. La cantidad en (2.147) es llamada la *discordia cuántica derecha*. El término *derecha* viene de que se hacen mediciones sobre el subsistema derecho en  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ .

A continuación volvemos a enunciar la interpretación de  $D_B^Q(\rho)$  expuesta arriba y damos algunas interpretaciones que se derivan naturalmente:

1.  $D_B^Q(\rho)$  es la información sobre  $\mathcal{A}$  que existe en las correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  en  $\rho$  que no puede ser obtenida mediante una medición sobre  $\mathcal{B}$  asociada a proyectores unidimensionales.

2. Si  $D_{\mathcal{B}}^Q(\rho)$  es grande, entonces mucha información de  $\mathcal{A}$  que existe en las correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  contenidas en  $\rho$  es inaccesible mediante mediciones sólo sobre  $\mathcal{B}$ .
3. Si  $D_{\mathcal{B}}^Q(\rho)$  es pequeña, entonces casi toda la información de  $\mathcal{A}$  que existe en las correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  contenidas en  $\rho$  se puede acceder mediante mediciones sólo sobre  $\mathcal{B}$ .

En todo lo expuesto arriba hemos considerado únicamente mediciones sobre  $\mathcal{B}$ . Sin embargo, podríamos haber considerado únicamente mediciones sobre  $\mathcal{A}$ . Entonces siguiendo el mismo tratamiento que arriba, pero con mediciones sobre  $\mathcal{A}$  asociadas a proyectores unidimensionales, se llega a la *discordia cuántica izquierda*:

$$D_{\mathcal{A}}^Q(\rho) \equiv I(\rho) - C_{\mathcal{A}}^{cl}(\rho), \quad (2.148)$$

con

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{A}}^{cl}(\rho) &\equiv \max_{\mathbf{B}_c} \left[ S(\rho_{\mathcal{B}}) - \sum_j p_j S(\rho_{\mathcal{B}j}) \right], \\ &= S(\rho_{\mathcal{B}}) - \min_{\mathbf{B}_c} \sum_j p_j S(\rho_{\mathcal{B}j}). \end{aligned} \quad (2.149)$$

En (2.149) se lleva a cabo el proceso de optimización sobre todas las bases ortonormales para el espacio de estado de  $\mathcal{A}$ . Mencionamos que es importante distinguir entre las discordias cuánticas izquierda y derecha, pues en general son cantidades distintas. Esto era de esperarse, pues el estado de un sistema cuántico cambia de forma (generalmente) distinta según el subsistema que se mida.

Observamos que  $C_{\mathcal{A}}^{cl}(\rho)$  es la máxima información promedio que se puede ganar (en promedio) sobre  $\mathcal{B}$  después de cualquier medición sobre  $\mathcal{A}$  asociada a proyectores ortogonales unidimensionales. Luego  $D_{\mathcal{A}}^Q(\rho)$  es la información sobre  $\mathcal{B}$  que existe en las correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  en  $\rho$  que no puede ser obtenida mediante una medición sobre  $\mathcal{A}$  asociada a proyectores unidimensionales.

Ahora vamos a enunciar algunas propiedades de la discordia [37, 38]:

1.  $D_{\mathcal{A}}^Q(\rho), D_{\mathcal{B}}^Q(\rho) \geq 0$ .
2.  $D_{\mathcal{A}}^Q(\rho) = 0$  si y sólo si

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \otimes \rho_k, \quad (2.150)$$

donde  $\{|\psi_k\rangle\}$  es una base ortonormal para el espacio de estados de  $\mathcal{A}$ ,  $\rho_k$  son operadores de densidad de  $\mathcal{B}$  y  $p_k$  son números no negativos tales que  $\sum_k p_k = 1$

3.  $D_{\mathcal{B}}^Q(\rho) = 0$  si y sólo si

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k \otimes |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad (2.151)$$

donde  $\{|\psi_k\rangle\}$  es una base ortonormal para el espacio de estados de  $\mathcal{B}$ ,  $\rho_k$  son operadores de densidad de  $\mathcal{A}$  y  $p_k$  son números no negativos tales que  $\sum_k p_k = 1$ .

4. En general,  $D_{\mathcal{A}}^Q(\rho) \neq D_{\mathcal{B}}^Q(\rho)$ .

5. Para estados puros  $\rho$  se tiene que

$$D_{\mathcal{B}}^Q(\rho) = C_{\mathcal{B}}^{cl}(\rho) = C_{\mathcal{A}}^{cl}(\rho) = D_{\mathcal{A}}^Q(\rho) = \frac{1}{2}I(\rho) = E_F(\rho), \quad (2.152)$$

donde  $E_F(\rho)$  es el enredamiento de formación de  $\rho$ .

Las propiedades en los incisos dos y tres arriba nos permiten tener más intuición sobre lo que representan tanto la discordia cuántica como las cantidades  $C_{\mathcal{A}}^{cl}(\rho)$  y  $C_{\mathcal{B}}^{cl}(\rho)$ . Supongamos que  $\rho$  es un estado de  $\mathcal{C}$  con discordia cuántica derecha cero. Entonces  $I(\rho) = C_{\mathcal{B}}^{cl}(\rho)$  y toda la información sobre  $\mathcal{A}$  que existe en las correlaciones entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  en  $\rho$  se puede acceder mediante mediciones sobre  $\mathcal{B}$  asociadas con proyectores unidimensionales. Además, por el inciso tres de arriba tenemos que

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k \otimes |\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \quad (2.153)$$

donde  $\{|\psi_k\rangle\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{B}$ ,  $\rho_k$  son operadores de densidad de  $\mathcal{A}$  y  $p_k$  son números no negativos tales que  $\sum_k p_k = 1$ . Si se lleva a cabo una medición no selectiva (ver el Capítulo 1) usando los proyectores definidos por cada uno de los elementos de la base  $\{|\psi_k\rangle\}$ , vemos que el estado de  $\mathcal{C}$  después de la medición es nuevamente  $\rho$ . Esto es, el estado del sistema no es perturbado por la medición no selectiva. Si entendemos *información clásica* como correlaciones que se pueden obtener sin perturbar el estado del sistema, entonces vemos que  $C_{\mathcal{B}}^{cl}(\rho)$  es una medida de correlaciones clásicas en  $\rho$  y que  $\rho$  es un estado que tiene sólo correlaciones clásicas. Un análisis similar se aplica al caso de la discordia izquierda.

A continuación vamos a dar un ejemplo. Supongamos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son dos qubits y que el operador de densidad puro

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) (\langle+-| + \langle-+|) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.154)$$

es el estado de  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ . En la sección *Entropías e información* vimos que  $I(\rho) = 2$  y  $S(\rho_A) = 1$ .

Consideremos la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  para el espacio de estados de  $\mathcal{B}$ . El estado de  $\mathcal{C}$  después de una medición sobre  $\mathcal{B}$  en la que se obtuvo el resultado asociado a  $|+\rangle$  es

$$\rho_+ = |-+\rangle\langle-+|, \quad (2.155)$$

mientras que el estado de  $\mathcal{C}$  después de una medición sobre  $\mathcal{B}$  en la que se obtuvo el resultado asociado a  $|-\rangle$  es

$$\rho_- = |+-\rangle\langle+-|. \quad (2.156)$$

Se sigue que  $S(\rho_{\pm}) = 0$ , puesto que  $\rho_{\pm}$  son estados puros. Luego es claro que

$$C_{\mathcal{B}}^{cl}(\rho) = S(\rho_A) = 1, \quad (2.157)$$

de donde la discordia cuántica derecha es

$$D_B^Q(\rho) = 1. \quad (2.158)$$

Con esto verificamos explícitamente la propiedad (2.152).

Hacemos la observación de que la discordia cuántica y el enredamiento miden en general correlaciones cuánticas distintas, pues hay estados separables mixtos que tienen discordia cuántica distinta de cero [39, 40]. Esto se verá explícitamente en los resultados del Capítulo 4. Por último mencionamos que el cálculo de la discordia cuántica involucra un proceso de optimización nada sencillo que normalmente se tiene que hacer numéricamente. En la siguiente sección veremos cómo se calcula para el caso de dos qubits.

## 2.7. Una propuesta de correlación clásica

En esta sección vamos a presentar una cantidad que se ha propuesto como medida de las correlaciones clásicas de un sistema bipartita y que fue introducida originalmente en [37]. Primero vamos a dar la definición general y después vamos a considerar el caso de dos qubits.

Consideremos un sistema bipartita  $A + B$  con espacio de estados  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  donde  $\mathcal{H}_A$  ( $\mathcal{H}_B$ ) es el espacio de estados de  $A$  ( $B$ ). El operador de densidad de  $A + B$  es  $\rho$ .

Un tema de gran interés actualmente es caracterizar y cuantificar las correlaciones clásicas entre  $A$  y  $B$  contenidas en  $\rho$ . Así como hay varias medidas de enredamiento, se han propuesto diversas medidas de correlaciones clásicas recientemente y todavía no queda claro cuál es más conveniente para cuantificarlas [32, 36, 37]. Más aún, todavía no queda claro qué se entiende por correlaciones clásicas en un estado cuántico. Sin embargo, se han propuesto diversos axiomas que toda medida  $C^{cl}(\rho)$  de correlaciones clásicas debería satisfacer [37]. A continuación las enunciamos:

1.  $C^{cl}(\rho) = 0$  si  $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ . Aquí  $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho]$  ( $\rho_B = \text{Tr}_A[\rho]$ ) es el operador de densidad de  $A$  ( $B$ ). Notamos que esta propiedad es razonable, pues los estados producto no tienen correlaciones.
2.  $C^{cl}(\rho)$  debe ser invariante bajo transformaciones locales unitarias. Un requisito indispensable es que el valor de las correlaciones sea independiente de las bases que se usen para  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ . Si se quiere que esto suceda, entonces se debe tener la invariancia bajo transformaciones locales unitarias.
3.  $C^{cl}(\rho)$  no se incrementa bajo operaciones locales. Esta propiedad se pide porque si  $A$  y  $B$  evolucionan independientemente, entonces las correlaciones entre los dos no deben aumentar.
4.  $C^{cl}(\rho) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$  si  $\rho$  es un estado puro.

Además, sería razonable que  $C^{cl}(\rho)$  fuera simétrica ante el intercambio de  $A$  y  $B$ , pues sólo así mediría una propiedad del sistema completo  $A + B$  y no de alguna de las partes.

Tomando estas propiedades como punto de partida se propusieron dos medidas de las correlaciones clásicas en  $\rho$  [37]:

$$\begin{aligned} C_B^{cl}(\rho) &= S(\rho_A) - \min_{\{|\psi_j\rangle : j \in \mathcal{I}\}} \sum_{j \in \mathcal{I}} p_j S(\rho_{A_j}) , \\ C_A^{cl}(\rho) &= S(\rho_B) - \min_{\{|\phi_j\rangle : j \in \mathcal{J}\}} \sum_{j \in \mathcal{J}} q_j S(\rho_{B_j}) , \end{aligned} \quad (2.159)$$

donde  $S$  es la entropía de von Neumann,  $\{|\psi_j\rangle : j \in \mathcal{I}\}$  y  $\{|\phi_j\rangle : j \in \mathcal{J}\}$  son bases ortonormales para  $\mathcal{H}_B$  y  $\mathcal{H}_A$ , respectivamente,  $p_j$  ( $q_j$ ) es la probabilidad de obtener el resultado asociado a  $|\psi_j\rangle$  ( $|\phi_j\rangle$ ) en una medición de  $B$  ( $A$ ) y  $\rho_{A_j}$  ( $\rho_{B_j}$ ) es el operador de densidad de  $A$  ( $B$ ) justo después de una medición sobre  $B$  ( $A$ ) en la que se obtuvo el resultado asociado a  $|\psi_j\rangle$  ( $|\phi_j\rangle$ ). Esto es,

$$\begin{aligned} p_j &= \text{Tr} [ (\mathbb{I}_A \otimes |\psi_j\rangle\langle\psi_j|) \rho (\mathbb{I}_A \otimes |\psi_j\rangle\langle\psi_j|) ] , \\ \rho_{A_j} &= \frac{1}{p_j} \text{Tr}_B [ (\mathbb{I}_A \otimes |\psi_j\rangle\langle\psi_j|) \rho (\mathbb{I}_A \otimes |\psi_j\rangle\langle\psi_j|) ] , \\ q_j &= \text{Tr} [ (|\phi_j\rangle\langle\phi_j| \otimes \mathbb{I}_B) \rho (|\phi_j\rangle\langle\phi_j| \otimes \mathbb{I}_B) ] , \\ \rho_{B_j} &= \frac{1}{q_j} \text{Tr}_A [ (|\phi_j\rangle\langle\phi_j| \otimes \mathbb{I}_B) \rho (|\phi_j\rangle\langle\phi_j| \otimes \mathbb{I}_B) ] . \end{aligned} \quad (2.160)$$

Cabe mencionar que normalmente se escribe

$$\begin{aligned} S(\rho | \{|\psi_j\rangle : j \in \mathcal{I}\}) &\equiv \sum_{j \in \mathcal{I}} p_j S(\rho_{A_j}) , \\ S(\rho | \{|\phi_j\rangle : j \in \mathcal{J}\}) &\equiv \sum_{j \in \mathcal{J}} q_j S(\rho_{B_j}) , \end{aligned} \quad (2.161)$$

y las cantidades  $C_B^{cl}(\rho)$  y  $C_A^{cl}(\rho)$  son llamadas *las correlaciones clásicas izquierda y derecha*, respectivamente, por el orden del producto tensorial  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .

En el artículo [37] se muestra que las correlaciones en (2.159) satisfacen las propiedades mencionadas arriba, pero en general no son simétricas ante el intercambio de  $A$  y  $B$ . Esta asimetría ante el intercambio de  $A$  y  $B$  es uno de los puntos que puede poner en duda la interpretación de  $C_B^{cl}(\rho)$  y  $C_A^{cl}(\rho)$  como correlaciones clásicas, pues son dependientes sobre qué subsistema  $A$  o  $B$  se está midiendo y se piensa que las correlaciones clásicas deberían ser independientes de esto. Además, se mostró que

$$C_A^{cl}(\rho) = C_B^{cl}(\rho) = \frac{1}{2} I(\rho) = E(\rho) \quad \text{para estados puros,} \quad (2.162)$$

donde  $I$  es la información cuántica mutua y  $E$  es la entropía relativa de enredamiento o el enredamiento de formación. Por último mencionamos que las correlaciones en (2.159) se definieron originalmente para mediciones generalizadas [37], pero aquí nos hemos restringido al caso de mediciones proyectivas.



Observamos que  $C_A^{cl}(\rho)$  y  $C_B^{cl}(\rho)$  son exactamente las cantidades (2.146) y (2.149) involucradas en la definición de la discordia cuántica (2.147) y (2.148). Por lo tanto,  $C_A^{cl}(\rho)$  ( $C_B^{cl}(\rho)$ ) representa la máxima cantidad de información contenida en  $\rho$  que se gana de  $B$  ( $A$ ) como resultado de una medición proyectiva sobre  $A$  ( $B$ ). Entonces surge naturalmente la pregunta de por qué se identifican estas cantidades como correlaciones clásicas. Aparte de satisfacer los axiomas presentados arriba, [37] no da indicio alguno de por qué le dieron esta interpretación. A juicio del autor de esta tesis, [37] identificaron  $C_A^{cl}(\rho)$  y  $C_B^{cl}(\rho)$  como correlaciones clásicas porque querían descomponer la información cuántica mutua  $I(\rho)$  como una suma de enredamiento y correlaciones clásicas. Esta opinión está reforzada por el hecho de que  $I(\rho) = C_A(\rho) + E(\rho) = C_B(\rho) + E(\rho)$  para estados puros (ver la ecuación (2.162)). Sin embargo, como se vio en la sección anterior, hay correlaciones cuánticas distintas del enredamiento. Además, puede que no se pueda separar la información cuántica mutua como una simple suma de correlaciones netamente clásicas y netamente cuánticas.

De ahora en adelante consideraremos el caso en que  $A$  y  $B$  son dos qubits y veremos cómo se pueden calcular las correlaciones clásicas (2.159) para este sistema. Usando (2.39) podemos expresar el operador de densidad  $\rho$  de  $A + B$  como sigue:

$$\rho = \frac{1}{4} \left\{ \mathbb{I}_{AB} + \mathbf{x} \cdot \bar{\sigma}_A + \mathbf{y} \cdot \bar{\sigma}_B + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right\}, \quad (2.163)$$

con

$$\begin{aligned} x_j &= \text{Tr} [ (\sigma_j \otimes \mathbb{I}_B) \rho ] & (j = 1, 2, 3), \\ y_j &= \text{Tr} [ (\mathbb{I}_A \otimes \sigma_j) \rho ] & (j = 1, 2, 3), \\ T_{ij} &= \text{Tr} [ (\sigma_i \otimes \sigma_j) \rho ] & (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.164)$$

Ahora vamos a considerar que se hacen mediciones proyectivas unidimensionales sobre  $B$ , esto es, vamos a mostrar cómo se calcula  $C_B^{cl}(\rho)$ . El caso en que se hacen mediciones sobre  $A$  se considerará después. Sea  $\{ |\psi\rangle, |\phi\rangle \}$  un conjunto completo de proyectores unidimensionales para  $\mathcal{H}_B$ . Esto es,  $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_B$  son tales que

$$|\psi\rangle\langle\psi| + |\phi\rangle\langle\phi| = \mathbb{I}_B, \quad \langle\psi|\phi\rangle = 0, \quad \langle\psi|\psi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle = 1. \quad (2.165)$$

Usando la base ortonormal  $B_A$  en (2.4) para  $\mathcal{H}_B$  vemos que podemos expresar  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$  como sigue

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle, \\ |\phi\rangle &= e^{i\theta} [ \beta^*|+\rangle - \alpha^*|-\rangle ], \end{aligned} \quad (2.166)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  y  $\theta \in \mathbb{R}$ .

A partir de (2.166) vemos que las respectivas representaciones matriciales  $[|\psi\rangle\langle\psi|]_{\mathbb{B}_A}$  y  $[|\phi\rangle\langle\phi|]_{\mathbb{B}_A}$  de  $|\psi\rangle\langle\psi|$  y  $|\phi\rangle\langle\phi|$  en la base  $\mathbb{B}_A$  son

$$\begin{aligned} [|\psi\rangle\langle\psi|]_{\mathbb{B}_A} &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & |\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}e^{-i\Phi} \\ |\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}e^{i\Phi} & 1-|\alpha|^2 \end{pmatrix}, \\ [|\phi\rangle\langle\phi|]_{\mathbb{B}_A} &= \begin{pmatrix} 1-|\alpha|^2 & -|\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}e^{-i\Phi} \\ -|\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}e^{i\Phi} & |\alpha|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.167)$$

donde  $\Phi = \text{Arg}(\beta) - \text{Arg}(\alpha)$  y  $\text{Arg}(z)$  denota el argumento del número complejo  $z$  en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . A partir de (2.167) notamos que todo conjunto completo de proyectores unidimensionales  $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$  está determinado por dos parámetros reales:  $|\alpha| \in [0, 1]$ ,  $\Phi \in [0, 2\pi)$ .

Las dos matrices en (2.167) tienen la forma genérica

$$[P_0]_{\mathbb{B}_A} = \begin{pmatrix} a & be^{-i\phi} \\ be^{i\phi} & 1-a \end{pmatrix}, \quad (2.168)$$

donde  $P_0$  es el operador lineal que actúa en  $\mathcal{H}_B$  y que tiene la representación matricial  $[P_0]_{\mathbb{B}_A}$ ,  $a \in [0, 1]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  y  $b = \sqrt{a(1-a)}$ .

A continuación vamos a calcular las cantidades en (2.159) y (2.160) usando  $P_0$  en lugar de  $|\psi\rangle\langle\psi|$  y  $|\phi\rangle\langle\phi|$ . Después simplemente traduciremos los resultados haciendo las identificaciones apropiadas entre (2.167) y (2.168).

Primero observamos que

$$\begin{aligned} P_0\sigma_x P_0 &= 2b\cos(\phi)P_0, \\ P_0\sigma_y P_0 &= 2b\sin(\phi)P_0, \\ P_0\sigma_z P_0 &= (2a-1)P_0, \end{aligned} \quad (2.169)$$

y definimos

$$\bar{\gamma} \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \equiv (2b\cos(\phi), 2b\sin(\phi), 2a-1). \quad (2.170)$$

Entonces, haciendo uso de (2.163), (2.169) y (2.170) podemos calcular cómo se transforma  $\rho$  cuando se le aplica  $\mathbb{I}_A \otimes P_0$  por la derecha y la izquierda:

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}_A \otimes P_0)\rho(\mathbb{I}_A \otimes P_0) &= \frac{1}{4} \left\{ (1 + \mathbf{y} \cdot \bar{\gamma})\mathbb{I}_A + \sum_{i=1}^3 \left( x_i + \sum_{j=1}^3 T_{ij}\gamma_j \right) \sigma_i \right\} \otimes P_0, \\ p_0 &\equiv \text{Tr} [ (\mathbb{I}_A \otimes P_0)\rho(\mathbb{I}_A \otimes P_0) ] = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{y} \cdot \bar{\gamma}). \end{aligned} \quad (2.171)$$

Aquí es importante notar la estructura de  $(\mathbb{I}_A \otimes P_0)\rho(\mathbb{I}_A \otimes P_0)$ :

$$\frac{1}{p_0}(\mathbb{I}_A \otimes P_0)\rho(\mathbb{I}_A \otimes P_0) = \rho_{AP_0} \otimes P_0, \quad (2.172)$$

donde  $\rho_{AP_0}$  es un operador de densidad de  $A$ . Luego se tiene que

$$\text{Tr}_B \left\{ \frac{1}{p_0}(\mathbb{I}_A \otimes P_0)\rho(\mathbb{I}_A \otimes P_0) \right\} = \rho_{AP_0},$$

$$S \left\{ \frac{1}{p_0} (\mathbb{I}_A \otimes P_0) \rho (\mathbb{I}_A \otimes P_0) \right\} = S(\rho_{AP_0}), \quad (2.173)$$

puesto que  $P_0$  es un proyector ortogonal de  $B$ .

Para calcular las correlaciones clásicas derechas necesitamos determinar la entropía de von Neumann de  $\rho_{AP_0}$ , esto es, de  $1/p_0$  por el operador entre llaves en el lado derecho de la primera ecuación en (2.171):

$$\frac{1}{p_0} [ \mu \pm |\bar{\nu}| ] , \quad (2.174)$$

en donde hemos introducido las siguientes cantidades:

$$\mu \equiv 1 + \mathbf{y} \cdot \bar{\gamma}, \quad \nu_i \equiv x_i + \sum_{j=1}^3 T_{ij} \gamma_j, \quad \bar{\nu} \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3) . \quad (2.175)$$

Usando (2.171)-(2.175) podemos calcular fácilmente la entropía deseada:

$$\begin{aligned} S \left\{ \frac{1}{p_0} (\mathbb{I}_A \otimes P_0) \rho (\mathbb{I}_A \otimes P_0) \right\} &= S \left\{ \frac{1}{p_0} \left( \frac{1}{4} \right) \left[ (1 + \mathbf{y} \cdot \bar{\gamma}) \mathbb{I}_A + \sum_{i=1}^3 \left( x_i + \sum_{j=1}^3 T_{ij} \gamma_j \right) \sigma_i \right] \right\} , \\ &= -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{|\bar{\nu}|}{\mu} \right) \log_2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{|\bar{\nu}|}{\mu} \right) \right] \\ &\quad -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{|\bar{\nu}|}{\mu} \right) \log_2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{|\bar{\nu}|}{\mu} \right) \right] . \end{aligned} \quad (2.176)$$

Con el resultado (2.176) podemos calcular la entropía condicional  $S(\rho | \{ |\psi\rangle, |\phi\rangle \})$  definida en (2.161). De (2.167) y (2.168) vemos que simplemente tenemos que tomar  $a = |\alpha|^2$  y  $\phi = \Phi$  en las expresiones de  $P_0$  para obtener los resultados asociados a  $|\psi\rangle\langle\psi|$ . Para obtener los resultados asociados a  $|\phi\rangle\langle\phi|$  tomamos  $a = 1 - |\alpha|^2$  y  $\phi = \Phi + \pi$ .

Supongamos que se hace una medición sobre  $B$ . La probabilidad de obtener el resultado asociado a  $|\psi\rangle$  es

$$p_\psi = \text{Tr} [ (\mathbb{I}_A \otimes |\psi\rangle\langle\psi|) \rho (\mathbb{I}_A \otimes |\psi\rangle\langle\psi|) ] , \quad (2.177)$$

mientras que el estado de  $A + B$  justo después de una medición sobre  $B$  en donde se obtuvo el resultado asociado a  $|\psi\rangle$  es

$$\rho_\psi = \frac{1}{p_\psi} (\mathbb{I}_A \otimes |\psi\rangle\langle\psi|) \rho (\mathbb{I}_A \otimes |\psi\rangle\langle\psi|) . \quad (2.178)$$

De forma similar,

$$p_\phi = \text{Tr} [ (\mathbb{I}_A \otimes |\phi\rangle\langle\phi|) \rho (\mathbb{I}_A \otimes |\phi\rangle\langle\phi|) ] ,$$

$$\rho_\phi = \frac{1}{p_\phi} (\mathbb{I}_A \otimes |\phi\rangle\langle\phi|) \rho (\mathbb{I}_A \otimes |\phi\rangle\langle\phi|) . \quad (2.179)$$

son respectivamente la probabilidad de obtener el resultado asociado a  $|\phi\rangle$  en una medición de  $B$  y el estado de  $A + B$  justo después de una medición sobre  $B$  en donde se obtuvo el resultado asociado a  $|\phi\rangle$ .

A partir de (2.161) y (2.170)-(2.179) concluimos que

$$\begin{aligned} S(\rho | \{ |\psi\rangle, |\phi\rangle \}) &= p_\psi S(\rho_\psi) + p_\phi S(\rho_\phi) , \\ &= -\frac{\mu_+}{4} \left( 1 + \frac{|\bar{\nu}_+|}{\mu_+} \right) \log_2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{|\bar{\nu}_+|}{\mu_+} \right) \right] - \frac{\mu_+}{4} \left( 1 - \frac{|\bar{\nu}_+|}{\mu_+} \right) \log_2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{|\bar{\nu}_+|}{\mu_+} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\mu_-}{4} \left( 1 + \frac{|\bar{\nu}_-|}{\mu_-} \right) \log_2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{|\bar{\nu}_-|}{\mu_-} \right) \right] - \frac{\mu_-}{4} \left( 1 - \frac{|\bar{\nu}_-|}{\mu_-} \right) \log_2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{|\bar{\nu}_-|}{\mu_-} \right) \right] , \end{aligned} \quad (2.180)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_\psi &= (\gamma_{\psi 1}, \gamma_{\psi 2}, \gamma_{\psi 3}) , & \bar{\nu}_\pm &= (\nu_{\pm 1}, \nu_{\pm 2}, \nu_{\pm 3}) , \\ \gamma_{\psi 1} &= 2\cos(\Phi)|\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2} , & \nu_{\pm i} &= x_i \pm \mathbb{T}_{(i)} \cdot \bar{\gamma}_\psi , \\ \gamma_{\psi 2} &= 2\sen(\Phi)|\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2} , & \mu_\pm &= 1 \pm \mathbf{y} \cdot \bar{\gamma}_\psi , \\ \gamma_{\psi 3} &= 2|\alpha|^2 - 1 . \end{aligned} \quad (2.181)$$

Aquí,  $\mathbb{T}_{(i)}$  es el  $i$ -ésimo renglón de  $\mathbb{T}$ .

Para calcular la correlación clásica  $C_B^{cl}(\rho)$  tenemos que minimizar la entropía condicional (2.180) sobre todos los conjuntos completos de proyectores unidimensionales  $\{ |\psi\rangle, |\phi\rangle \}$ , ver la ecuación (2.159). A partir de (2.167) notamos que todo conjunto completo de proyectores unidimensionales  $\{ |\psi\rangle, |\phi\rangle \}$  está determinado por dos parámetros reales:  $|\alpha| \in [0, 1]$ ,  $\Phi \in [0, 2\pi)$ . Entonces las correlaciones clásicas en  $\rho$  cuando las mediciones se llevan a cabo sobre el qubit  $B$  se pueden calcular de la siguiente manera:

$$C_B^{cl}(\rho) = S(\rho_A) - \min_{|\alpha| \in [0, 1], \Phi \in [0, 2\pi]} S(\rho | \{ |\psi\rangle, |\phi\rangle \}) , \quad (2.182)$$

donde  $S(\rho | \{ |\psi\rangle, |\phi\rangle \})$  está definida por (2.180). Notamos que el proceso de minimización se lleva a cabo sobre un conjunto compacto y, por lo tanto, el mínimo siempre existe. Además, mencionamos que se extendió el intervalo en donde  $\Phi$  toma valores para incluir el punto  $2\pi$  con el propósito de llevar a cabo el proceso de minimización sobre un conjunto compacto. Esto no tiene consecuencias, puesto que el valor de (2.180) en  $2\pi$  y en  $0$  es el mismo.

Arriba vimos cómo calcular la correlación clásica cuando se llevan a cabo las mediciones sobre  $B$ . Ahora vamos a considerar el caso en que las mediciones se llevan a cabo sobre  $A$ . Para esto podríamos hacer cálculos análogos a los presentados arriba para obtener una expresión similar a (2.182). En lugar de hacer eso, vamos a proceder de una forma mucho más sencilla.

En la sección *Notación* introducimos la base  $\mathbf{B}'$  para  $\mathcal{H}_{AB}$ . Entonces podemos considerar la representación matricial  $[\rho]_{\mathbf{B}'}$  de  $\rho$  con respecto a esta base

$$[\rho]_{\mathbf{B}'} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.183)$$

Esta representación matricial se puede usar para calcular  $C_B^{cl}(\rho)$  mediante (2.182). Para calcular  $C_A^{cl}(\rho)$  simplemente tenemos que usar (2.182) con la representación matricial  $[\rho]_{\mathbf{B}''}$  de  $\rho$  en la base  $\mathbf{B}''$  definida como sigue:

$$\mathbf{B}'' = \{ |++\rangle_2, |+-\rangle_2, |-+\rangle_2, |--\rangle_2 \}, \quad (2.184)$$

con

$$\begin{aligned} |++\rangle_2 &\equiv |2:+\rangle \otimes |1:+\rangle, & |+-\rangle_2 &\equiv |2:+\rangle \otimes |1:-\rangle, \\ |-+\rangle_2 &\equiv |2:-\rangle \otimes |1:+\rangle, & |--\rangle_2 &\equiv |2:-\rangle \otimes |1:-\rangle. \end{aligned} \quad (2.185)$$

Es fácil ver que

$$[\rho]_{\mathbf{B}''} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} & \rho_{12} & \rho_{14} \\ \rho_{31} & \rho_{33} & \rho_{32} & \rho_{34} \\ \rho_{21} & \rho_{23} & \rho_{22} & \rho_{24} \\ \rho_{41} & \rho_{43} & \rho_{42} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.186)$$

Esto es,  $[\rho]_{\mathbf{B}''}$  se obtiene de  $[\rho]_{\mathbf{B}'}$  intercambiando las columnas 2 y 3 y después los renglones 2 y 3.

Notamos que en  $[\rho]_{\mathbf{B}''}$  se han intercambiado los lugares de  $A$  y  $B$  en el producto tensorial  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . De esta manera, al usar la ecuación (2.182) se estarán haciendo mediciones sobre el segundo qubit, es decir, sobre  $A$ . Esta es la razón de por qué usando (2.182) con  $[\rho]_{\mathbf{B}''}$  se puede calcular  $C_A^{cl}(\rho)$ .

Arriba hemos establecido una forma en que se pueden calcular las correlaciones clásicas izquierda y derecha. Para esto es necesario obtener el mínimo absoluto de la función en (2.180). Como esta función es bastante complicada, en general  $C_A^{cl}(\rho)$  y  $C_B^{cl}(\rho)$  sólo se pueden calcular numéricamente. Luego la discordia cuántica en general sólo se puede calcular numéricamente, pues depende de estas cantidades. A continuación vamos a dar un ejemplo en que se usan los resultados de esta sección para calcular numéricamente la información cuántica mutua, las correlaciones clásicas izquierda y derecha y las discordias cuánticas izquierda y derecha de un operador de densidad de un qubit.

Consideremos un operador de densidad cuya representación matricial  $[\rho]_{\mathbf{B}'}$  en la base  $\mathbf{B}'$  es de la siguiente forma:

$$[\rho]_{\mathbf{B}'} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0.03i \\ 0 & 0.35 & 0.38i & 0 \\ 0 & -0.38i & 0.45 & 0 \\ -0.03i & 0 & 0 & 0.15 \end{pmatrix}. \quad (2.187)$$

Una matriz de densidad como en (2.187) es llamada un *estado*  $X$  por la apariencia visual que tiene. Para ver algunas propiedades interesantes sobre este tipo de estados y, en particular, para la expresión analítica de la información cuántica mutua para este tipo de estados recomendamos [39] y las referencias ahí citadas. En particular, [39] presenta un algoritmo muy sencillo para calcular la discordia cuántica analíticamente para un estado  $X$ . Sin embargo, advertimos al lector que este algoritmo no funciona cuando alguna de las componentes 2, 3 o 1, 4 de la matriz de densidad en la base  $B'$  es cero [41].

La información cuántica mutua  $I(\rho)$  se puede calcular a partir de la ecuación (2.93):  $I(\rho) = 0.984$ . Recordamos que esta cantidad es independiente de las mediciones que se hagan.

Ahora vamos a calcular la correlación clásica derecha  $C_B^{cl}(\rho)$ . Usando (2.180) y (2.181) podemos calcular  $S(\rho | \{|\psi\rangle, |\phi\rangle\})$  cuando las mediciones se hacen sobre  $B$ . La gráfica de esta cantidad aparece en la figura (2.5a) y el mínimo absoluto es igual a 0.395. Entonces la correlación clásica derecha es igual a  $C_B^{cl}(\rho) = 0.576$ .

A partir de la información cuántica mutua y la correlación clásica derecha podemos calcular la discordia cuántica derecha:  $D_B^Q(\rho) = I(\rho) - C_B^{cl}(\rho) = 0.408$ .

Ahora vamos a calcular la correlación clásica izquierda  $C_A^{cl}(\rho)$ . Recordamos que para esto hacemos uso de las ecuaciones (2.183)-(2.186). Usando (2.180) y (2.181) podemos calcular  $S(\rho | \{|\psi\rangle, |\phi\rangle\})$  cuando las mediciones se hacen sobre  $A$ . La gráfica de esta cantidad aparece en la figura (2.5b) y el mínimo absoluto es igual a 0.436. Entonces la correlación clásica izquierda es igual a  $C_A^{cl}(\rho) = 0.564$ .

A partir de la información cuántica mutua y la correlación clásica izquierda podemos calcular la discordia cuántica izquierda:  $D_A^Q(\rho) = I(\rho) - C_A^{cl}(\rho) = 0.42$ .

Notamos que  $C_A^{cl}(\rho) < C_B^{cl}(\rho)$  y  $D_A^Q(\rho) > D_B^Q(\rho)$ . Aquí observamos explícitamente que las correlaciones clásicas y las discordias cuánticas izquierda y derecha no son cantidades simétricas. Ahora vamos a usar las interpretaciones de estas cantidades introducidas en la sección anterior. Como  $C_A^{cl}(\rho) < C_B^{cl}(\rho)$ , vemos que se puede ganar más información sobre  $A$  cuando se hace una medición sobre  $B$  cuando se compara con la información que se puede ganar sobre  $B$  cuando se hace una medición sobre  $A$ . Como  $D_A^Q(\rho) > D_B^Q(\rho)$ , vemos que se pierde y se destruye más información sobre  $B$  cuando se hacen mediciones sobre  $A$  cuando se le compara con la información que se pierde de  $A$  cuando se hacen mediciones sobre  $B$ . Además, vemos que  $D_A^Q(\rho)$  y  $D_B^Q(\rho)$  no son cantidades cercanas a 0. Entonces vemos que se pierde mucha información contenida en  $\rho$  sobre una de las partes de  $A + B$  cuando se hacen mediciones sólo sobre la otra parte.

## 2.8. La discordia geométrica

Esta sección tiene el propósito de introducir la discordia geométrica, un estimador de la discordia cuántica introducido originalmente en [42] con el propósito de facilitar el cálculo de la discordia cuántica, que, como vimos en la sección anterior, requiere de un proceso de minimización que puede ser muy complicado y que normalmente se tiene que hacer numéricamente. Notamos que [42] introduce la discordia geométrica izquierda, esto es, la discordia geométrica cuando se llevan a cabo las mediciones sobre el sistema izquierdo de un producto tensorial.

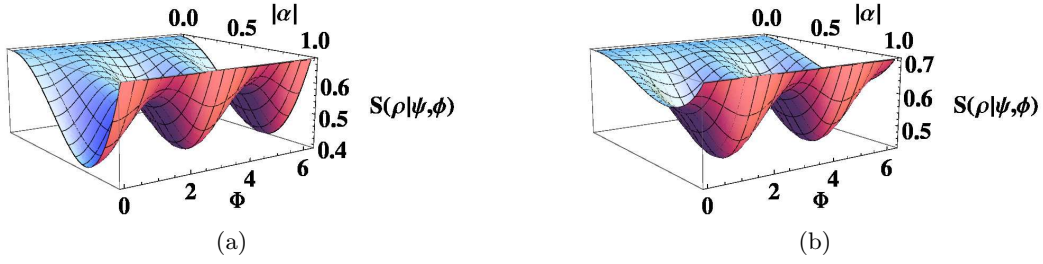


Figura 2.5: Las figuras (2.5a) y (2.5b) muestran la gráfica de la entropía condicional  $S(\rho | \{ |\psi\rangle, |\phi\rangle \})$  como función de los parámetros  $|\alpha|$  y  $\Phi$  en el conjunto compacto sobre el cual se debe minimizar esta función para los casos en que las mediciones se hacen sobre  $B$  y  $A$ , respectivamente.

Como en la sección anterior se calculó la discordia cuántica derecha primero, aquí calcularemos la discordia geométrica derecha primero. Además, notamos que la deducción de la discordia geométrica para el caso de dos qubits que se presenta aquí es mucho más sencilla y clara que la presentada en la referencia original [42] (se invita al lector incrédulo a leer el artículo mencionado para que compare).

Consideremos un sistema bipartita  $A + B$ . Sean  $\rho$  el operador de densidad de  $A + B$  y  $\Omega_0$  el conjunto de todos los operadores de densidad posibles de  $A + B$  con discordia cuántica derecha cero. Usando los resultados de la Sección 2.6 vemos que

$$\Omega_0 = \left\{ \sum_{k \in \mathcal{I}} p_k \rho_k \otimes |\psi_k\rangle\langle\psi_k| : p_k \in [0, 1], \sum_{k \in \mathcal{I}} p_k = 1, \rho_k \text{ es un operador de densidad de } A, \right. \\ \left. \{|\psi_k\rangle : k \in \mathcal{I}\} \text{ es una base ortonormal de } B \right\}. \quad (2.188)$$

Entonces la discordia geométrica derecha  $D_B^{(2)}(\rho)$  de  $\rho$  se define como

$$D_B^{(2)}(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_0} \|\rho - \chi\|_F^2. \quad (2.189)$$

Esto es, la discordia geométrica derecha de  $\rho$  es la distancia (medida con la norma de Frobenius) de  $\rho$  al conjunto  $\Omega_0$ .

A primera vista parece que con la discordia geométrica (2.189) sólo hemos cambiado un problema de minimización complicado por otro igualmente complicado. Sin embargo, veremos que para el caso de dos qubits  $D_B^{(2)}(\rho)$  se puede calcular de forma muy sencilla de tal manera que en ocasiones se pueden tener resultados analíticos.

En lo que sigue vamos a suponer que  $A$  y  $B$  son dos qubits. Como en secciones anteriores, vamos a designar el espacio de estados de  $A$  ( $B$ ) por  $\mathcal{H}_A$  ( $\mathcal{H}_B$ ). El espacio de estados del sistema completo  $A + B$  es  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .

Sea  $\rho$  un operador de densidad de  $A + B$ . Por (2.39) y (2.42) tenemos que

$$\rho = \frac{1}{4} \left\{ \mathbb{I}_{AB} + \mathbf{a} \cdot \bar{\sigma}_A + \mathbf{b} \cdot \bar{\sigma}_B + \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{T}_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right\}, \quad (2.190)$$

donde  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$  son los vectores de Bloch de los operadores de densidad  $\rho_A$  y  $\rho_B$  de  $A$  y  $B$ , respectivamente, y  $\mathbb{T}_{ij} \in \mathbb{R}$  es el valor esperado de  $\sigma_i \otimes \sigma_j$  en el estado  $\rho$ , esto es,

$$a_i = \text{Tr}_A [\rho_A \sigma_i] , \quad b_i = \text{Tr}_B [\rho_B \sigma_i] , \quad \mathbb{T}_{ij} = \text{Tr}_{AB} [\rho(\sigma_i \otimes \sigma_j)] \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.191)$$

A partir de (2.43) y (2.46) notamos que

$$|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|, \|\mathbb{T}\|_2 \leq 1 . \quad (2.192)$$

Como veremos más adelante, estas cotas van a resultar ser muy importantes para el proceso de minimización que define a la discordia geométrica. Además, vamos a considerar a  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  como vectores columna y, como antes,  $\mathbb{T}$  será la matriz cuya componente  $i, j$  es  $\mathbb{T}_{ij}$ .

Ahora vamos a considerar un operador de densidad  $\chi \in \Omega_0$ , esto es,  $\chi$  va a ser un operador de densidad de  $A + B$  con cero discordia cuántica cuando se hacen mediciones sobre  $B$ . A partir de (2.188) vemos que  $\chi$  tiene la siguiente forma:

$$\chi = p_1 \rho_1 \otimes |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1 - p_1) \rho_2 \otimes |\psi_2\rangle\langle\psi_2| , \quad (2.193)$$

donde  $p_1 \in [0, 1]$ ,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son operadores de densidad de  $A$  y  $\{ |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \}$  es una base ortonormal para  $\mathcal{H}_B$ .

A continuación vamos a ver de qué parámetros depende  $\chi$ :

1.  $p_1$ : un parámetro real que toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ .
2.  $\rho_1, \rho_2$ : dos operadores de densidad de  $A$ . Por la ecuación (2.28) en la sección *Matriz de densidad de un qubit* vemos que la representación matricial  $[\rho_k]_{\mathbf{B}_A}$  de  $\rho_k$  en la base  $\mathbf{B}_A$  (ver la ecuación (2.4)) se puede expresar de la siguiente manera:

$$[\rho_k]_{\mathbf{B}_A} = \begin{pmatrix} a_k & b_k e^{i\theta_k} \\ b_k e^{-i\theta_k} & 1 - a_k \end{pmatrix} , \quad (2.194)$$

donde

$$a_k \in [0, 1], \quad b_k \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \theta_k \in \mathbb{R}, \quad (1 - 2a_k)^2 + 4b_k^2 \leq 1 . \quad (2.195)$$

Luego  $\rho_1$  y  $\rho_2$  introducen los 6 parámetros reales con dos constricciones que aparecen en (2.195).

3.  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ : una base ortonormal para  $\mathcal{H}_B$ . Por la ecuación (2.193) vemos que  $\chi$  depende de estos kets sólo a través de los proyectores  $|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$  ( $k = 1, 2$ ). Por la ecuación (2.167) en la sección *Una propuesta de correlación clásica* vemos que

$$[|\psi_1\rangle\langle\psi_1|]_{\mathbf{B}_A} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & |\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}e^{-i\Phi} \\ |\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}e^{i\Phi} & 1-|\alpha|^2 \end{pmatrix} ,$$



$$[|\psi_2\rangle\langle\psi_2|]_{\mathbb{B}_A} = \begin{pmatrix} 1 - |\alpha|^2 & -|\alpha|\sqrt{1 - |\alpha|^2}e^{-i\Phi} \\ -|\alpha|\sqrt{1 - |\alpha|^2}e^{i\Phi} & |\alpha|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.196)$$

donde  $|\alpha| \in [0, 1]$  y  $\Phi \in [0, 2\pi)$ . Luego  $|\psi_1\rangle$ ,  $|\psi_2\rangle$  introducen dos parámetros reales independientes:  $|\alpha| \in [0, 1]$ ,  $\Phi \in [0, 2\pi)$ .

Después del análisis hecho arriba vemos que  $\chi$  depende de 9 parámetros reales

$$p_1 \in [0, 1], \quad a_1, a_2 \in [0, 1], \quad b_1, b_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \quad |\alpha| \in [0, 1], \quad \Phi \in [0, 2\pi), \quad (2.197)$$

con dos constricciones

$$(1 - 2a_1)^2 + 4b_1^2 \leq 1, \quad (1 - 2a_2)^2 + 4b_2^2 \leq 1. \quad (2.198)$$

En principio la cantidad  $\|\rho - \chi\|_F^2$  se debería minimizar como función de las cantidades en (2.197) sujetas a (2.198).

En lugar de trabajar directamente con (2.193) es conveniente reexpresar a  $\chi$  en una forma más amigable que facilite tanto el cálculo de  $\|\rho - \chi\|_F^2$  como el proceso de minimización. Para esto usamos (2.39) y la definición (2.193)

$$\chi = \frac{1}{4} \left\{ \mathbb{I}_{AB} + \mathbf{x} \cdot \bar{\sigma}_A + \mathbf{y} \cdot \bar{\sigma}_B + \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{T}'_{ij}(\sigma_i \otimes \sigma_j) \right\}, \quad (2.199)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= \text{Tr}[\chi(\sigma_i \otimes \mathbb{I}_B)] = \text{Tr}_A\{[p_1\rho_1 + (1 - p_1)\rho_2]\sigma_i\}, \\ \mathbf{y}_i &= \text{Tr}[\chi(\mathbb{I}_A \otimes \sigma_i)] = (2p_1 - 1)\langle\psi_1|\sigma_i|\psi_1\rangle, \\ \mathbb{T}'_{ij} &= \text{Tr}[\chi(\sigma_i \otimes \sigma_j)] = \langle\psi_1|\sigma_j|\psi_1\rangle\text{Tr}_A\{[p_1\rho_1 - (1 - p_1)\rho_2]\sigma_i\}. \end{aligned} \quad (2.200)$$

Por (2.43) vemos que

$$|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|, \|\mathbb{T}\|_2 \leq 1. \quad (2.201)$$

La expresión (2.199) es más manejable, pero no hemos aprovechado todavía la estructura original (2.193) de  $\chi$ . Para esto hacemos las siguientes definiciones

$$\mathbf{s}_\pm \equiv \text{Tr}_A\{[p_1\rho_1 \pm (1 - p_1)\rho_2]\bar{\sigma}_A\}, \quad \mathbf{e} \equiv \langle\psi_1|\bar{\sigma}_B|\psi_1\rangle, \quad t \equiv 2p_1 - 1, \quad (2.202)$$

y observamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{s}_+, \quad \mathbf{y} = t\mathbf{e}, \quad \mathbb{T}'_{ij} = e_j s_{-i} = (\mathbf{s}_- \mathbf{e}^T)_{ij}, \\ |\mathbf{s}_+| &\leq 1, \quad |\mathbf{s}_-| \leq 1, \quad |\mathbf{e}| = 1, \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (2.203)$$

Entonces (2.199) queda reexpresada como sigue:

$$\chi = \frac{1}{4} \left\{ \mathbb{I}_{AB} + \mathbf{s}_+ \cdot \bar{\sigma}_A + t\mathbf{e} \cdot \bar{\sigma}_B + \sum_{i,j=1}^3 e_j s_{-i} (\sigma_i \otimes \sigma_j) \right\}, \quad (2.204)$$

Una vez que se reexpresa  $\chi$  en la forma dada por (2.204) y se utiliza (2.203) vemos que  $\chi$  depende de los 10 parámetros

$$\mathbf{s}_+ \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{s}_- \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.205)$$

que toman valores tales que

$$|\mathbf{s}_+| \leq 1, \quad |\mathbf{s}_-| \leq 1, \quad |\mathbf{e}| = 1, \quad t \in [-1, 1]. \quad (2.206)$$

De esta manera, la cantidad  $\|\rho - \chi\|_F^2$  ahora se debe minimizar como función de las cantidades en (2.205) sujetas a (2.206). Vemos que (2.199) introduce un parámetro adicional  $\mathbf{e}$  y, como consecuencia, la restricción  $|\mathbf{e}| = 1$ . Además, notamos que el proceso de minimización se lleva a cabo en un conjunto compacto. Luego el mínimo siempre va a existir.

A partir de (2.190) y (2.204) podemos calcular la norma de Hilbert-Schmidt de  $\rho - \chi$  de forma sencilla

$$\begin{aligned} \|\rho - \chi\|_F^2 &= \frac{1}{4} \{ |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + \|\mathbb{T}\|_F^2 \} - \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}^T \mathbf{s}_+ + t \mathbf{b}^T \mathbf{e} + \mathbf{s}_-^T \mathbb{T} \mathbf{e} \} \\ &\quad + \frac{1}{4} \{ t^2 + \mathbf{s}_+^T \mathbf{s}_+ + \mathbf{s}_-^T \mathbf{s}_- \}. \end{aligned} \quad (2.207)$$

Completando cuadrados en (2.207) se sigue que

$$\begin{aligned} \|\rho - \chi\|_F^2 &= \frac{1}{4} \{ (\mathbf{a} - \mathbf{s}_+)^2 + (\mathbf{s}_- - \mathbb{T} \mathbf{e})^2 + (t - \mathbf{b}^T \mathbf{e})^2 + |\mathbf{b}|^2 + \|\mathbb{T}\|_F^2 \} \\ &\quad - \frac{1}{4} \mathbf{e}^T (\mathbf{b} \mathbf{b}^T + \mathbb{T}^T \mathbb{T}) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (2.208)$$

De (2.208) es claro que  $\|\rho - \chi\|_F^2$  se minimiza como función de  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{s}_\pm \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  en el conjunto (2.206) si

1.  $\mathbf{s}_+ = \mathbf{a}$ ,
2.  $\mathbf{s}_- = \mathbb{T} \mathbf{e}$ ,
3.  $t = \mathbf{b}^T \mathbf{e}$ ,
4.  $g(\mathbf{e}) \equiv \mathbf{e}^T (\mathbf{b} \mathbf{b}^T + \mathbb{T}^T \mathbb{T}) \mathbf{e}$  sujeto a la restricción  $\mathbf{e}^T \mathbf{e} = 1$  es máximo.

A partir de (2.192) notamos que estos valores caen dentro del conjunto (2.206) sobre el cual se está minimizando (2.208).

Ahora vamos a calcular el máximo absoluto de  $g(\mathbf{e})$  en  $\mathcal{S} = \{ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 : g_0(\mathbf{e}) \equiv \mathbf{e}^T \mathbf{e} - 1 = 0 \}$ . Primero observamos que  $g(\mathbf{e})$  es una función continua en  $\mathbb{R}^3$  y que  $\mathcal{S}$  es un conjunto compacto en

$\mathbb{R}^3$ . Entonces  $g(\mathbf{e})$  alcanza un máximo absoluto en  $\mathcal{S}$ . Sea  $\mathbf{e}_0 \in \mathcal{S}$  un punto donde  $g(\mathbf{e})$  alcanza el máximo absoluto. Para determinar la forma explícita de  $\mathbf{e}_0$  podemos aplicar el método de multiplicadores de Lagrange [43].

Sea  $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{S}$  un punto donde  $g(\mathbf{e})$  alcanza un extremo local en  $\mathcal{S}$ . Como  $g(\mathbf{e})$  y  $g_0(\mathbf{e})$  son funciones infinitamente diferenciables en  $\mathbb{R}^3$  y  $\nabla g_0(\mathbf{e}) = 2\mathbf{e}^T \neq 0$  para todo  $\mathbf{e} \in \mathcal{S}$ , se tiene que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla g(\mathbf{e}_1) + \lambda \nabla g_0(\mathbf{e}_1) = 0. \quad (2.209)$$

Usando las definiciones de  $g(\mathbf{e})$  y  $g_0(\mathbf{e})$  es fácil ver que la ecuación (2.209) se satisface si y sólo si

$$(\mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbb{T}^T\mathbb{T})\mathbf{e}_1 = -\lambda\mathbf{e}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_1 = 1. \quad (2.210)$$

Esto es, la ecuación (2.209) se satisface si y sólo si  $-\lambda$  es un eigenvalor de la matriz  $\mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbb{T}^T\mathbb{T}$  y  $\mathbf{e}_1$  es un eigenvector real correspondiente de longitud 1. Luego, los candidatos a  $\mathbf{e}_0$  son todos los eigenvectores reales normalizados de  $(\mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbb{T}^T\mathbb{T})$ . Además, si  $\mathbf{e}_1$  es un eigenvector real normalizado de esta matriz con eigenvalor  $-\lambda$ , entonces

$$g(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1^T (\mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbb{T}^T\mathbb{T}) \mathbf{e}_1 = -\lambda. \quad (2.211)$$

Luego es claro que  $\mathbf{e}_0$  es un eigenvector real normalizado de  $(\mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbb{T}^T\mathbb{T})$  correspondiente al eigenvalor más grande de esta matriz.

Concluimos que

$$D_B^{(2)}(\rho) = \frac{1}{4} \{ |\mathbf{b}|^2 + \|\mathbb{T}\|_F^2 - \lambda_{\max} \}. \quad (2.212)$$

donde  $\lambda_{\max}$  es el eigenvalor más grande de la matriz  $\mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbb{T}^T\mathbb{T}$ .

Para calcular la discordia geométrica izquierda  $D_A^{(2)}(\rho)$  simplemente tenemos que usar primero las ecuaciones (2.183)-(2.186) para obtener la representación matricial  $[\rho]_{\mathbf{B}'}$  y con ésta usamos (2.208).

A continuación vamos a dar un ejemplo de las discordias geométricas izquierda y derecha. Consideremos la misma matriz (2.187) de la sección anterior. Para calcular la discordia geométrica derecha  $D_B^{(2)}(\rho)$  tenemos que hacer uso de las ecuaciones (2.191) y (2.212).

Para la matriz (2.187) tenemos que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ -0.82 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 \end{pmatrix}. \quad (2.213)$$

Además,

$$\mathbf{y}\mathbf{y}^T + \mathbb{T}^T\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0.6724 & 0 & 0 \\ 0 & 0.49 & 0 \\ 0 & 0 & 0.36 \end{pmatrix}. \quad (2.214)$$

Entonces concluimos que  $D_B^{(2)}(\rho) = 0.2125$ , mientras que en la sección anterior se obtuvo que la discordia cuántica derecha era igual a  $D_B^Q(\rho) = 0.408$ . Observamos que la discordia geométrica es menor que la discordia cuántica. Éste es un resultado general [42].

Ahora vamos a calcular la discordia geométrica izquierda  $D_A^{(2)}(\rho)$ . Primero se usan las ecuaciones (2.183)-(2.186) para obtener la representación matricial en la base  $\mathbf{B}''$  y, una vez que se tenga ésta, usamos (2.208). En este caso tenemos que

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & -0.82 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 \end{pmatrix}. \quad (2.215)$$

Además,

$$\mathbf{y}\mathbf{y}^T + \mathbb{T}^T\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6724 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}. \quad (2.216)$$

Entonces concluimos que  $D_A^{(2)}(\rho) = 0.2225$ , mientras que en la sección anterior se obtuvo que la discordia cuántica izquierda era igual a  $D_A^Q(\rho) = 0.42$ . Observamos que  $D_A^{(2)}(\rho) \neq D_B^{(2)}(\rho)$  (un resultado válido en general) y que  $D_A^Q(\rho) > D_A^{(2)}(\rho)$ , como se esperaba.



## Capítulo 3

# Un átomo ultrafrío en una cavidad

El desarrollo de técnicas de enfriamiento de átomos y de experimentos en electrodinámica cuántica en cavidades (CQED) ha dado lugar a un creciente interés por explorar la dinámica de átomos fríos interactuando con campos cuantizados [44]-[57]. Un modelo paradigmático usado para estudiar este tipo de sistemas consiste de un átomo de dos niveles con su movimiento de centro de masa (CM) cuantizado en una dimensión (normalmente tomada como la dirección  $z$ ) interactuando con un campo eléctrico de un solo modo. En los experimentos con átomos individuales que se pueden llevar a cabo actualmente no se necesita cuantizar el movimiento de CM [50]. Sin embargo, usando este modelo se ha reconocido teóricamente que el acoplamiento entre el átomo y el campo eléctrico abre la posibilidad a efectos inusuales [44]-[49]: átomos suficientemente fríos pueden ser reflejados por el campo y el proceso de emisión inducida está íntimamente asociado con el movimiento de CM. Para distinguir este proceso de la emisión estimulada usual, se acuñó el término *microwave amplification via z-motion-induced emission of radiation* o, más brevemente, *mazer* [46]. Más aún, se ha considerado una cavidad con espejos imperfectos bombeada por átomos fríos y se dedujo una ecuación maestra de Born-Markov-secular para el operador de densidad del campo eléctrico de la cavidad [47]. Usando ésta se encontró que la distribución del número de fotones es completamente distinta cuando se le compara con una cavidad bombeada por átomos térmicos. Además, se mostró que las propiedades del mazer dependen grandemente del perfil del modo de la cavidad. Se mostraron resultados para los modos mesa (la función  $\theta(L-x)\theta(x)$  con  $L$  la longitud de la cavidad y  $\theta$  la función de Heaviside),  $\text{sech}^2$  y sinusoidales [48]. Más recientemente, se consideraron estados estacionarios de una interacción no resonante y el modo mesa para mostrar que el campo de la cavidad puede acelerar o frenar a los átomos y bloquear el proceso de emisión de acuerdo con el signo del desentonamiento entre la frecuencia del campo y la frecuencia de transición del átomo [51]. Posteriormente se han estudiado los efectos de la gravedad en el mazer vertical para interacciones resonantes y no resonantes usando estados estacionarios [52, 53].

Otra forma de estudiar el movimiento de un átomo frío acoplado al campo de una cavidad consiste en tratar clásicamente el movimiento de centro de masa del átomo y utilizar los estados vestidos (eigenvectores del hamiltoniano de Jaynes-Cummings) [17] para definir potenciales bajo los cuales se mueve el átomo. Esto fue introducido originalmente en la referencia [58] donde se mostró que, para desentonamiento grande, los grados de libertad internos de un átomo suficien-

temente lento siguen adiabáticamente los niveles de energía de los estados vestidos, los cuales actúan como potenciales que aceleran o frenan al átomo. Después, usando un esquema similar y cuantizando el movimiento de CM, se mostró que el campo de la cavidad actúa como un medio con índice de refracción para el átomo y viceversa [20, 59]. Se ha desarrollado un criterio analítico para medir la validez esta aproximación y se ha utilizado para mostrar que es adecuada para ciertos intervalos de los parámetros de los modos Gaussiano y sinusoidal [61].

Nosotros vamos a considerar un átomo de dos niveles con su movimiento de centro de masa cuantizado en una dimensión (1D) acoplado a un solo modo del campo eléctrico de una cavidad perfecta (no hay disipación). El sistema en cuestión es tripartita y está constituido por los grados de libertad espaciales o de CM, los grados de libertad internos del átomo y los grados de libertad del campo. De éstos, dos son discretos (los dos niveles del átomo y el número de fotones del campo de la cavidad) y el tercero es continuo (el grado de libertad espacial en 1D). Tenemos como meta analizar en detalle la evolución temporal de varias de las propiedades del sistema conforme un átomo con momento promedio inicial distinto de cero entra a la región de la cavidad, la cruza y finalmente sale de ella. En particular, se busca caracterizar el tipo de enredamiento y el grado de mezcla que exhiben varias de las componentes del sistema. Los estudios previos han estado dedicados al enredamiento bipartita (grados de libertad internos con campo ó grados de libertad externos con internos y campo) en los regímenes semiclásico (sólo se considera el valor esperado de la posición y del momento de CM) [62], dispersivo (sólo se consideran desentonamientos grandes) [63] o con énfasis en el régimen de resonancias de transmisión (sí se cuantiza el movimiento de CM) [64]. Aquí vamos a estudiar la evolución temporal del enredamiento entre las distintas partes del modelo totalmente cuantizado en varios regímenes. Además, estamos interesados en describir cómo la probabilidad de emisión evoluciona conforme el átomo transita la región de la cavidad.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la primera sección vamos a presentar el hamiltoniano que modela al sistema de estudio, así como, las ecuaciones básicas usadas para describir la evolución temporal del sistema. En la sección 3.2 introducimos la aproximación adiabática semiclásica, puesto que servirá para comparar y analizar cualitativamente los resultados cuando el movimiento de CM se cuantiza. En la sección 3.3 vamos a describir el método numérico y los parámetros usados para resolver las ecuaciones que establecimos en la sección 3.1. Posteriormente, los resultados serán presentados y discutidos en la sección 3.4. En particular, vamos a considerar los regímenes de átomos fríos, intermedio y de resonancias de transmisión. Los primeros dos nombres fueron acuñados originalmente en la referencia [47] y se usan para describir las situaciones en que la energía cinética promedio inicial del átomo es mucho menor o del orden de la energía de interacción entre el átomo y el campo, respectivamente. Además, consideraremos los casos en que hay una interacción resonante o con desentonamiento azul o rojo entre el campo de la cavidad y el átomo. Finalmente, los resultados principales serán resumidos en la sección 3.5.

### 3.1. El modelo

Consideramos un átomo de dos niveles con frecuencia de transición  $\omega_A$  y con movimiento de CM cuantizado acoplado a un campo de un solo modo con frecuencia  $\omega_L$  de una cavidad.

El hamiltoniano del sistema átomo-campo en la aproximación de longitud de onda larga, en la aproximación de onda rotante y en la representación del dipolo eléctrico toma la forma

$$H = \frac{1}{2M}\mathbf{P}^2 + \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_3 + \hbar\omega_L \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar g_0 u(\mathbf{R})(a^\dagger \sigma + \sigma^\dagger a) . \quad (3.1)$$

Aquí  $|e\rangle$  denota el estado excitado del átomo, mientras que  $|g\rangle$  denota el estado base. Además,  $g_0 > 0$  es la intensidad del acoplamiento entre el átomo y el campo,  $u$  es una función (con valores reales) que da la estructura espacial del modo de la cavidad,  $\sigma = |g\rangle\langle e|$  es un operador de transición atómica,  $\sigma_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$  es el operador de inversión atómica,  $a(a^\dagger)$  es el operador de aniquilación (creación) de un fotón en el modo del campo,  $M$  es la masa del átomo y  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P}$  son los operadores de posición y de momento del CM, respectivamente.

Una constante de movimiento para este hamiltoniano es  $N_c = a^\dagger a + (1/2)\sigma_3 + (1/2)$  (aquí el  $1/2$  se introdujo por conveniencia), que cuenta el número de excitación (i.e., el número de fotones en el campo y si el átomo está en el estado excitado). Esto es,  $N_c$  cuenta el número de fotones en el campo y si el átomo está en el estado excitado o en el estado base. Usando  $N_c$  podemos pasar a un esquema de interacción (IP) en el cual el hamiltoniano toma la forma

$$H_I = \frac{1}{2M}\mathbf{P}^2 - \frac{\hbar\delta_L}{2}\sigma_3 + \hbar g_0 u(\mathbf{R})(a^\dagger \sigma + \sigma^\dagger a) , \quad (3.2)$$

donde  $\delta_L = \omega_L - \omega_A$  es el desentonamiento entre la frecuencia del campo eléctrico y la frecuencia de transición atómica. La ecuación de Schrödinger en el IP es

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_I |\psi(t)\rangle , \quad (3.3)$$

donde  $|\psi(t)\rangle$  es el estado del sistema completo en el IP.

Los eigenvalores de la constante de movimiento  $N_c$  son  $0, 1, 2, \dots$  y los correspondientes eigenspacios están generados respectivamente por las bases ortonormales

$$\beta_{-1} = \{ |\mathbf{r}\rangle |g\rangle |0\rangle : \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \} ,$$

y

$$\beta_n = \{ |\mathbf{r}\rangle |\pm, n\rangle : \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) . \quad (3.4)$$

Aquí  $|\mathbf{r}\rangle$  es el eigenvector de  $\mathbf{R}$ ,  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) es un estado de número del campo eléctrico y hemos introducido los kets

$$|\pm, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( |e\rangle |n\rangle \pm |g\rangle |n+1\rangle ) \quad (n = 0, 1, \dots) , \quad (3.5)$$

que junto con  $|g\rangle |0\rangle$  generan el espacio de estados del campo y los dos niveles del átomo. En el resto del capítulo nos vamos a restringir al subespacio generado por un  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Los vectores en (3.5) nos permiten expresar un ket arbitrario  $|\psi\rangle$  en el subespacio generado por  $\beta_n$  de la siguiente forma:

$$|\psi\rangle = |\psi_{+n}\rangle |+, n\rangle + |\psi_{-n}\rangle |-, n\rangle , \quad (3.6)$$



donde  $|\psi_{\pm n}\rangle$  son kets en el espacio de estados del CM. De hecho, se tiene que

$$\langle \mathbf{r} | \psi_{\pm n} \rangle = \langle \mathbf{r}, \pm, n | \psi \rangle \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{r}, \pm, n\rangle \equiv |\mathbf{r}\rangle |\pm, n\rangle). \quad (3.7)$$

Nótese que  $|\psi_{\pm n}\rangle$  no están normalizados y que  $\langle \psi_{\pm n} | \psi_{\pm n} \rangle$  es la probabilidad de encontrar al sistema átomo-campo en el estado  $|\pm, n\rangle$ .

Usando la descomposición (3.6) es fácil ver que (3.3) es equivalente al siguiente conjunto de ecuaciones acopladas

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_{\pm n}(t)\rangle = \left[ \frac{1}{2M} \mathbf{P}^2 \pm V_n(\mathbf{R}) \right] |\psi_{\pm n}(t)\rangle - \frac{\hbar\delta_L}{2} |\psi_{\mp n}(t)\rangle, \quad (3.8)$$

donde

$$V_n(\mathbf{R}) = \hbar g_0 \sqrt{n+1} u(\mathbf{R}). \quad (3.9)$$

Las ecuaciones (3.8) son la base de todos los cálculos que haremos y están acopladas por el término que multiplica  $\delta_L$ .

Un caso especial muy importante ocurre cuando el sistema está en resonancia  $\delta_L = 0$ . En este caso vemos que las ecuaciones en (3.8) se desacoplan y, por lo tanto,  $\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{+n}(t) \rangle$  y  $\langle \psi_{-n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle$  son constantes (en el tiempo) y el conjunto de ecuaciones (3.8) es equivalente a dos partículas independientes sin estructura interna, una moviéndose en el potencial  $V_n(\mathbf{R})$  con estado no normalizado  $|\psi_{+n}(t)\rangle$  y la otra moviéndose en el potencial  $-V_n(\mathbf{R})$  con estado no normalizado  $|\psi_{-n}(t)\rangle$ . Usando esta equivalencia vemos que podemos identificar tres situaciones dependiendo de cómo se comparan la energía cinética promedio inicial  $K_0$  del átomo con la altura  $\hbar g_0 \sqrt{n+1}$  del potencial (suponemos que el valor máximo de  $u(\mathbf{r})$  es 1 como en el caso de la función que consideraremos). Siguiendo a las referencias [47, 51], nos referiremos a estas situaciones como *el régimen de átomos fríos o régimen del mazer* cuando  $K_0 \ll \hbar g_0 \sqrt{n+1}$ , *el régimen intermedio* cuando  $K_0 \sim \hbar g_0 \sqrt{n+1}$  y *el régimen de átomos calientes o régimen de Rabi* cuando  $K_0 \gg \hbar g_0 \sqrt{n+1}$ .

Ahora vamos a dar expresiones para varias propiedades del sistema que facilitarán la interpretación de los resultados en la sección 3.4. Estas expresiones son generales en el sentido de que son válidas siempre y cuando uno se restrinja al subespacio generado por  $\beta_n$  para algún  $n = 0, 1, \dots$  y en una, dos o tres dimensiones.

Dado que el estado inicial del sistema es puro y pertenece al subespacio generado por  $\beta_n$ , usando (3.6) se tiene que el operador de densidad  $\rho(t)$  del sistema se puede expresar de la siguiente forma

$$\rho(t) = [ |\psi_{+n}(t)\rangle |+, n\rangle + |\psi_{-n}(t)\rangle |-, n\rangle ] \cdot [ \langle \psi_{+n}(t) | \langle +, n | + \langle \psi_{-n}(t) | \langle -, n | ] . \quad (3.10)$$

El correspondiente operador de densidad  $\rho_{CM}(t)$  de CM se obtiene trazando  $\rho(t)$  tanto sobre los grados de libertad internos del átomo como los del campo. Los operadores de densidad de los grados de libertad internos del átomo  $\rho_{int}(t)$  y del campo  $\rho_F(t)$  se pueden obtener de forma similar.

Usando (3.10) es fácil mostrar que la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado  $|e\rangle$  al tiempo  $t$  está dada por la siguiente expresión:

$$P_e(t) = \frac{1}{2} + Re \langle \psi_{+n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle, \quad (3.11)$$

donde  $Re$  denota la parte real. Además, se puede mostrar fácilmente que el valor esperado  $\langle \sigma_3 \rangle(t)$  de la inversión atómica y el valor esperado  $\langle a^\dagger a \rangle(t)$  del número de fotones del campo depende de  $P_e(t)$  de la siguiente manera

$$\langle \sigma_3 \rangle(t) = 2P_e(t) - 1, \quad \langle a^\dagger a \rangle(t) = n + 1 - P_e(t). \quad (3.12)$$

En particular, notamos que cuando  $n = 0$  el valor esperado el número de fotones  $\langle a^\dagger a \rangle(t)$  es igual a la probabilidad de emisión  $P_{em}(t)$ .

Desde que se encontró que el enredamiento presente en sistemas cuánticos podía ser utilizado como un recurso para transmitir información, ha habido un gran interés por caracterizarlo y manipularlo en muchos sistemas cuánticos como, por ejemplo, el micromáser [19]. Una de nuestras metas es determinar el tipo de enredamiento presente en el sistema bajo consideración, además de cuantificar el grado de mezcla de sus partes. Para esto último usaremos las entropías lineales siguientes:

$$\begin{aligned} S_L^{CM}(t) &= 1 - Tr_{CM} \rho_{CM}^2(t), \\ &= 1 - \langle \psi_{+n}(t) | \psi_{+n}(t) \rangle^2 - \langle \psi_{-n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle^2 - 2|\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

que mide el grado de mezcla de  $\rho_{CM}(t)$  así como el grado de mezcla del operador de densidad de los grados de libertad internos del átomo y del campo y

$$\begin{aligned} S_L^F(t) &= 1 - Tr_F \rho_F^2(t), \\ &= 2P_e(t) [1 - P_e(t)], \end{aligned} \quad (3.14)$$

que mide el grado de mezcla de  $\rho_F(t)$  así como el grado de mezcla del operador de densidad de los grados de libertad internos y de CM del átomo. La entropía lineal  $S_L^{int}(t)$  de  $\rho_{int}(t)$  da una expresión exactamente igual a (3.14) y mide el grado de mezcla de  $\rho_{int}(t)$  así como el grado de mezcla del operador de densidad de los grados de libertad de CM y del campo.

Como el estado del sistema completo es puro, podemos usar las entropías lineales como medidas de enredamiento de un grado de libertad del sistema con los otros dos (ver el Capítulo 2). De esta manera, los grados de libertad del campo están enredados con los grados de libertad internos y de CM si  $S_L^F(t) > 0$ . Como  $S_L^{int}(t) = S_L^F(t)$ , también tenemos que los grados de libertad de CM y de campo están enredados con los internos si  $S_L^F(t) > 0$ . Además, los grados de libertad internos y de campo están enredados con los de CM si  $S_L^{CM}(t) > 0$ .

Para cuantificar el grado de enredamiento entre los grados de libertad internos del átomo y los del campo vamos a usar el enredamiento de formación (ver el Capítulo 2). Como la dinámica del sistema está restringida al subespacio generado por  $\beta_n$ , tenemos que el campo de la cavidad puede tener sólo  $n$  ó  $n+1$  fotones. Por lo tanto, el campo de la cavidad es formalmente equivalente a un sistema de dos niveles y podemos usar la concurrencia para determinar el enredamiento de formación entre el átomo y el campo. Usando los resultados del Capítulo 2 es fácil ver que la concurrencia  $C(t)$  toma la forma

$$C(t) = \sqrt{\frac{1}{2}A + \lambda\sqrt{P_e(t)[1 - P_e(t)]}} - \sqrt{\frac{1}{2}A - \lambda\sqrt{P_e(t)[1 - P_e(t)]}}, \quad (3.15)$$

donde

$$\lambda = \sqrt{[\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{+n}(t) \rangle - \langle \psi_{-n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle]^2 + 4[Im\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle]^2} , \quad (3.16)$$

y

$$A = \langle \psi_{+n}(t) | \psi_{+n}(t) \rangle^2 + \langle \psi_{-n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle^2 - 2Re[\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle^2] . \quad (3.17)$$

Aquí  $Im$  denota la parte imaginaria.

### 3.2. Aproximación semiclásica adiabática

La aproximación adiabática semiclásica (SCAA) da una imagen física muy sencilla que permite entender cualitativamente cómo se debe mover un átomo y cómo se debe comportar el sistema que estamos considerando cuando varias condiciones que explicaremos abajo se satisfacen. En esta aproximación las ecuaciones que se deben resolver son mucho más sencillas, pues son ecuaciones diferenciales ordinarias. La SCAA se presenta además con el propósito de determinar qué tan bien se comparan sus predicciones con los resultados exactos basados en el tratamiento cuántico completo y para entender cualitativamente por qué el sistema se comporta de cierta manera para ciertos valores particulares de los parámetros.

Cuando la extensión espacial del paquete de ondas que describe el movimiento de CM y la longitud de onda de de Broglie de un átomo son mucho más pequeñas en comparación con el resto de las longitudes del sistema (como, por ejemplo, la longitud de onda  $2\pi c/\omega_L$  del campo de la cavidad), el movimiento de CM del átomo se puede describir a muy buena aproximación mediante una trayectoria  $\mathbf{r}(t)$  [58]. Esta trayectoria define un Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$H_{AD}(t) = \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_3 + \hbar\omega_L\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \hbar g_0 u[\mathbf{r}(t)](a^\dagger \sigma + \sigma^\dagger a) , \quad (3.18)$$

que determina la evolución de los grados de libertad internos del átomo y del campo. Este hamiltoniano [17] tiene eigenvalores instantáneos  $\hbar\delta_L/2$ ,

$$E_{\pm n}[\mathbf{r}(t)] = \hbar\omega_L(n+1) \pm \frac{\hbar}{2}\Omega_n[\delta_L, \mathbf{r}(t)] , \quad (3.19)$$

y correspondientes eigenvectores instantáneos  $|g, 0\rangle$ ,

$$\begin{aligned} |1, n, t\rangle &= \cos\left[\frac{\theta_n(t)}{2}\right] |e, n\rangle + \sin\left[\frac{\theta_n(t)}{2}\right] |g, n+1\rangle , \\ |2, n, t\rangle &= -\sin\left[\frac{\theta_n(t)}{2}\right] |e, n\rangle + \cos\left[\frac{\theta_n(t)}{2}\right] |g, n+1\rangle , \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde por facilidad se ha supuesto que  $u(\mathbf{r}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{r}$  y se ha tomado

$$\begin{aligned} \Omega_n[\delta_L, \mathbf{r}(t)] &= \sqrt{\delta_L^2 + 4(n+1)g_0^2 u[\mathbf{r}(t)]^2} , \\ \tan\theta_n(t) &= -2\frac{g_0}{\delta_L} u[\mathbf{r}(t)]\sqrt{n+1} \quad (0 \leq \theta_n(t) < \pi) . \end{aligned} \quad (3.21)$$

En particular, es fácil ver que para desentonamiento cero

$$|j, n, t\rangle = \begin{cases} |+, n\rangle & \text{si } j = 1, \\ |-, n\rangle & \text{si } j = 2. \end{cases} \quad (3.22)$$

Ahora invocamos la aproximación adiabática: si el sistema reducido que describe sólo los grados de libertad internos del átomo y del campo es inicialmente preparado en el eigenvector  $|j, n, t_0\rangle$  de  $H_{AD}(t_0)$ , entonces va a evolucionar aproximadamente a  $|j, n, t\rangle$  y las propiedades de este sistema reducido se pueden determinar usando  $|j, n, t\rangle$ .

Dado lo expuesto arriba, queda la pregunta de cómo determinar la trayectoria  $\mathbf{r}(t)$  que seguirá el CM del átomo. Para esto veamos de qué está compuesta la energía total  $E$  del sistema átomo-campo:

1. La energía cinética de movimiento del átomo:

$$\frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}(t)^2.$$

2. La energía interna  $E_{\pm n}[\mathbf{r}(t)]$  del átomo y del campo dada en (3.19). Dependiendo del estado inicial  $|j, n, t_0\rangle$  de los grados de libertad internos y del campo, se toma + para  $j = 1$  y - para  $j = 2$ .

Entonces vemos que

$$E = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}(t)^2 + E_{\pm n}[\mathbf{r}(t)]. \quad (3.23)$$

Además, notamos que  $E$  se debe conservar (es decir, debe ser independiente del tiempo), pues tenemos un sistema cerrado sin disipación ni forzamientos.

A partir de la ecuación (3.23) vemos que  $E_{\pm n}[\mathbf{r}(t)]$  se comporta como un potencial bajo el cual se mueve el átomo. Entonces la ecuación semiclásica para la evolución de  $\mathbf{r}(t)$  es

$$M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla E_{\pm n}[\mathbf{r}(t)], \quad (3.24)$$

donde se toma + para la condición inicial  $|1, n, t_0\rangle$  y - para la condición inicial  $|2, n, t_0\rangle$ .

Ahora supongamos que  $u(\mathbf{r}) \rightarrow 0$  si  $|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty$  (esto sucede, por ejemplo, en el caso que consideraremos más adelante). Entonces es fácil mostrar que

$$\begin{aligned} |1, n, t\rangle &\rightarrow \begin{cases} |e, n\rangle & \text{si } \delta_L < 0, \\ |g, n+1\rangle & \text{si } \delta_L > 0. \end{cases} \\ |2, n, t\rangle &\rightarrow \begin{cases} -|e, n\rangle & \text{si } \delta_L > 0, \\ |g, n+1\rangle & \text{si } \delta_L < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25)$$

si  $|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty$ . Supongamos además que el sistema reducido que describe sólo a los grados de libertad internos del átomo y del campo es preparado inicialmente en el estado  $|e, n\rangle$  en una región donde  $u(\mathbf{r})$  es despreciable. Entonces, el sistema reducido se encontrará aproximadamente

en el eigenestado  $|j, n, t_0 = 0\rangle$  de  $H_{AD}$  de acuerdo con (3.25) si  $\delta_L \neq 0$  y seguirá adiabáticamente el estado  $|j, n, t\rangle$  conforme el átomo se mueve bajo el potencial correspondiente  $E_{\pm n}(\mathbf{r})$ . Observamos que este modelo no se puede aplicar cuando  $\delta_L = 0$ , puesto que de (3.5) y (3.22) vemos que  $|e, n\rangle$  nunca es aproximadamente un eigenestado de (3.18). Finalizamos esta sección con unas palabras de precaución. La SCAA no se debe confundir con la aproximación adiabática cuántica (QAA) de las referencias [59], [61]. La primera describe el movimiento de CM clásicamente mediante la ecuación (3.24) y el estado interno del átomo y del campo por (3.20). Por otra parte, en la QAA sí se cuantiza el movimiento de CM y se describe el estado del sistema por

$$\phi_1(\mathbf{r}, t)|1, n, \mathbf{r}\rangle + \phi_2(\mathbf{r}, t)|2, n, \mathbf{r}\rangle \quad (3.26)$$

con

$$\begin{aligned} |1, n, \mathbf{r}\rangle &= \cos\left[\frac{\theta_n(\mathbf{r})}{2}\right]|e, n\rangle + \sin\left[\frac{\theta_n(\mathbf{r})}{2}\right]|g, n+1\rangle, \\ |2, n, \mathbf{r}\rangle &= -\sin\left[\frac{\theta_n(\mathbf{r})}{2}\right]|e, n\rangle + \cos\left[\frac{\theta_n(\mathbf{r})}{2}\right]|g, n+1\rangle, \\ \tan\theta_n(\mathbf{r}) &= -2\frac{g_0}{\delta_L}u(\mathbf{r})\sqrt{n+1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Además, consiste en evolucionar los paquetes de onda  $\phi_1(\mathbf{r}, t)$  y  $\phi_2(\mathbf{r}, t)$  (distintos de  $\langle \mathbf{r} | \psi_{\pm n}(t) \rangle$ ) en la ecuación (3.8) bajo ecuaciones de Schrödinger independientes de la forma

$$i\hbar\frac{d}{dt}\phi_j(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_j(\mathbf{r})\right]\phi_j(\mathbf{r}, t), \quad j = 1, 2, \quad (3.28)$$

con potenciales  $V_j(\mathbf{r})$  de la forma (3.19) con  $\mathbf{r}$  reemplazando a  $\mathbf{r}(t)$ . Esta aproximación tiene la ventaja de que tiene como punto de partida ecuaciones desacopladas cuando el desentonamiento es distinto de cero. El intervalo de su validez fue estudiado en detalle en la referencia [61]. Aquí no haremos uso de esta aproximación.

### 3.3. La simulación numérica

Para la simulación numérica nos vamos a restringir a una dimensión que será tomada como la dirección  $z$ . Más aún, nos vamos a restringir al subespacio generado por  $\beta_0$ , esto es, el campo de la cavidad podrá tener sólo 1 ó 0 fotones. Pasando a la representación de coordenadas vemos que las ecuaciones (3.8) toman la forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\pm 0}(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \pm V_0(z)\right]\psi_{\pm 0}(z, t) - \frac{\hbar\delta_L}{2}\psi_{\mp 0}(z, t), \quad (3.29)$$

donde  $V_0(z) = \hbar g_0 u(z)$ .

Resolvimos las ecuaciones (3.29) numéricamente por el método de líneas (MOL) [65, 66, 67] con una malla adaptativa. Además, las funciones de onda en la representación de momentos se reconstruyeron usando la transformada rápida de Fourier y el Teorema de Muestreo de Shannon [68].

Ahora vamos a establecer los parámetros utilizados para la simulación numérica. Se tomaron  $\lambda_A = 2\pi c/\omega_A = 780 \times 10^{-9}$  m como la longitud de onda asociada a la transición atómica,  $g_0 = 2\pi \times 16 \times 10^6$  s<sup>-1</sup> y  $M = 1.4 \times 10^{-25}$  Kg. Además, consideramos un modo gaussiano para el campo de la cavidad

$$u(z) = e^{-z^2/w_0^2}, \quad (3.30)$$

cuya desviación estándar es  $w_0/\sqrt{2}$ . Este modo es considerado una buena aproximación para describir el campo de una cavidad abierta y fue estudiado numéricamente en el contexto de CQED para estados estacionarios y desintonamiento cero [69]. Después se usó para estudiar los efectos de transmisión debidos a la dinámica de paquetes de onda bajo las condiciones de resonancia y desintonamiento rojo [64]. La cintura  $w_0$  del modo se va a tomar como  $10^{-6}$  m, con la excepción de la sección del análisis de las resonancias de transmisión donde se va a variar. Notamos que los valores de los parámetros corresponden a los experimentos con rubidio 85 descritos en la referencia [70] con excepción de  $w_0$ . Este último tiene un valor de  $w_0 = 29 \times 10^{-6}$  m en los experimentos descritos en [70], pero mostraremos en las siguientes secciones que muchos de nuestros resultados son independientes del valor de  $w_0$  cuando se está fuera del régimen de resonancias de transmisión. Por último mencionamos que la función modo de los experimentos descritos en [70] tiene la forma

$$\cos\left(\frac{\omega L}{c}x\right) e^{-y^2/w_0^2} e^{-z^2/w_0^2}. \quad (3.31)$$

Como sólo estamos cuantizando el movimiento en la dirección  $\mathbf{z}$ , implícitamente hemos supuesto que el átomo tiene en las direcciones  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  valores esperados de la posición iguales a cero y dispersiones en posición despreciables (es decir, mucho menores que las demás longitudes involucradas en el sistema). De esta manera, el átomo se mueve sólo a lo largo del eje  $z$  y podemos tomar  $x = y = 0$  en (3.31) para obtener (3.30).

Como estado inicial del sistema se tomó al átomo en el estado excitado y al campo de la cavidad con cero fotones. Además, se describió inicialmente el movimiento de CM del átomo con paquetes de onda gaussianos de mínima incertidumbre. Esto es, tomamos el estado inicial del sistema como el siguiente estado puro producto:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{CM}\rangle|e\rangle|0\rangle, \quad (3.32)$$

donde

$$\psi_{CM}(z) = \langle z|\psi_{CM}\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\Delta^2}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{z-\mu}{\Delta}\right)^2 + ikz\right]. \quad (3.33)$$

Aquí  $\mu$  y  $\hbar k$  son los valores esperados al tiempo  $t = 0$  de la posición y del momento del CM del átomo, respectivamente. Además,  $\Delta$  es la desviación estándar de la posición del CM del átomo al tiempo  $t = 0$ . Tomamos éstos como  $\mu = -4w_0/\sqrt{2}$ ,  $\Delta = \lambda_{DB}/4$  con  $\lambda_{DB}$  la longitud de onda promedio de de Broglie del átomo (al tiempo  $t = 0$ ) y  $\lambda_{DB} = 2\pi/k = 2\pi\hbar/(Mv_0)$  con  $v_0 = \hbar k/M = \alpha\sqrt{2\hbar g_0/M}$  la velocidad inicial promedio del átomo.

Aquí es pertinente hacer algunos comentarios. Primero observamos que para los parámetros

escogidos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{w_0} &= \frac{1}{\alpha w_0} \sqrt{\frac{\pi^2 \hbar}{8Mg_0}} \simeq \frac{3}{\alpha} 10^{-3} \simeq \begin{cases} 3 \times 10^{-2} & \text{si } \alpha = 1/10, \\ 4.2 \times 10^{-3} & \text{si } \alpha = 1/\sqrt{2}, \\ 2.7 \times 10^{-3} & \text{si } \alpha = \sqrt{5/4}. \end{cases} \\ \frac{\Delta}{\lambda_L} &= \frac{\omega_L}{2\pi c \alpha} \sqrt{\frac{\pi^2 \hbar}{8Mg_0}} \simeq \frac{3.8}{\alpha} 10^{-3} \simeq \begin{cases} 3.8 \times 10^{-2} & \text{si } \alpha = 1/10, \\ 5.4 \times 10^{-3} & \text{si } \alpha = 1/\sqrt{2}, \\ 3.4 \times 10^{-3} & \text{si } \alpha = \sqrt{5/4}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Entonces, para los valores de  $\alpha$  que se muestran se tiene que  $\Delta$  es mucho menor que la cintura  $w_0$  del modo y que la longitud de onda  $\lambda_L$  del campo. De esta manera, el átomo está inicialmente muy bien localizado con respecto al potencial  $V_0(z) = \hbar g_0 u(z)$ . Más adelante comentaremos más sobre esto, pues la relación entre estas cantidades es importante para determinar si se está o no en el régimen de resonancias de transmisión.

Ahora haremos algunas observaciones sobre la expresión que define a  $v_0$  y sobre el parámetro positivo  $\alpha$ . Si estimamos la energía cinética promedio inicial del átomo por  $Mv_0^2/2$  y la dividimos entre la energía de acoplamiento átomo-campo  $\hbar g_0$  (que es igual a la altura del potencial  $V_0(z)$  en (3.29) cuando  $\delta_L = 0$ ), entonces obtenemos

$$\alpha^2 = \frac{\frac{1}{2} M v_0^2}{\hbar g_0}. \quad (3.35)$$

Despejando  $v_0$  obtenemos la expresión dada  $v_0 = \alpha \sqrt{2\hbar g_0/M}$  y vemos que  $\alpha^2$  estima cómo se compara la energía cinética promedio inicial del átomo con la energía de acoplamiento átomo-campo. De esta manera,  $\alpha = 1/10$  implica que  $Mv_0^2/2$  es 100 veces más pequeño que  $\hbar g_0$ ;  $\alpha = 1/\sqrt{2}$  implica que  $Mv_0^2/2$  es la mitad de  $\hbar g_0$ ;  $\alpha = \sqrt{5/4}$  implica que  $Mv_0^2/2 = (5/4)\hbar g_0$ .

Usando la ecuación (3.5) vemos que  $|\psi(0)\rangle$  se puede reexpresar en la forma dada por la ecuación (3.6) como sigue:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_{CM}\rangle|+, n=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_{CM}\rangle|-, n=0\rangle. \quad (3.36)$$

Vamos a presentar simulaciones numéricas para tres distintos valores de  $\alpha = 1/10$ ,  $1/\sqrt{2}$  y  $\sqrt{5/4}$ . Notamos que la energía cinética promedio inicial asociada a la primera  $\alpha$  es mucho más pequeña que la energía de acoplamiento átomo-campo  $\hbar g_0$  (régimen de átomo frío), mientras que para los casos dos y tres es del orden de  $\hbar g_0$  (régimen intermedio). Estos valores de  $\alpha$  corresponden a velocidades iniciales promedio de 3.9, 27 y 43 cm/s, respectivamente.

Notamos que al tiempo  $t = 0$  tenemos  $\Delta/\mu = 10^{-3}/\sqrt{\alpha}$  y  $\Delta_p/(\hbar k) = 1/\pi$ , donde  $\Delta_p = \hbar/(2\Delta)$  es la desviación estándar del momento al tiempo  $t = 0$ . Por lo tanto, los valores escogidos corresponden a un átomo inicialmente muy bien localizado en posición (pero no en momento) que está avanzando lentamente de una región en donde la interacción átomo-campo es despreciable hacia una región en donde la interacción es más fuerte.

Para cada uno de los valores de  $\alpha$  mencionados se hicieron simulaciones numéricas para tres valores distintos del desentonamiento:  $\delta_L = 0$ ,  $\pm g_0/16$ . Notamos que los valores distintos de cero de  $\delta_L$  corresponden a  $1/3$  del valor de la tasa de emisión espontánea en los experimentos descritos en la referencia [70].

### 3.4. Resultados

Ahora presentaremos los resultados de las simulaciones numéricas. En lo que sigue la frase *probabilidad de ser transmitido a través del campo de la cavidad* va a significar la probabilidad de encontrar al átomo en el intervalo  $(4w_0/\sqrt{2}, +\infty)$  una vez que ha dejado la *región de interacción*, esto es, la región donde el acoplamiento átomo-campo tiene valores no despreciables. Vamos a tomar a ésta como la región centrada en cero entre  $-4$  y  $+4$  desviaciones estándar del modo gaussiano en la ecuación (3.30), esto es,  $-4w_0/\sqrt{2} \leq z \leq 4w_0/\sqrt{2}$ . De forma similar, la frase *probabilidad de ser reflejado por el campo de la cavidad* va a significar la probabilidad de encontrar al átomo en el intervalo  $(-\infty, -4w_0/\sqrt{2})$  una vez que ha dejado la región de interacción. Notamos que *dejar la región de interacción* está medido por el valor esperado del operador de posición  $Z$  cuando hay desintonamiento distinto de cero y por las cantidades

$$\frac{\langle \psi_{\pm 0}(t) | Z | \psi_{\pm 0}(t) \rangle}{\langle \psi_{\pm 0}(t) | \psi_{\pm 0}(t) \rangle}, \quad (3.37)$$

cuando el sistema está en resonancia. Recordamos que éstos últimos pueden ser interpretados como el valor esperado de la posición de la partícula que se mueve bajo el potencial repulsivo (atractivo) cuando el signo más (menos) se utiliza.

Para valores pequeños de  $Mv_0^2/2$  y ciertos valores de la longitud  $L$  de la región de interacción, las propiedades asintóticas del sistema, como la probabilidad de emisión y la probabilidad de transmisión a través del campo de la cavidad, exhiben gran sensibilidad a los parámetros. Estos efectos están asociados en la literatura a las resonancias de transmisión [48, 64, 69]. Muchos de los resultados contrastan grandemente dependiendo si el sistema se encuentra o no en el régimen donde éstas se presentan. En las siguientes tres subsecciones vamos a describir la evolución del sistema fuera de este régimen y agruparemos los resultados de acuerdo con el signo del desintonamiento  $\delta_L = \omega_L - \omega_A$ . El régimen de resonancias de transmisión será tratado en la cuarta subsección.

#### 3.4.1. Resonancia fuera del régimen de resonancias de transmisión

Como era esperado, la probabilidad de que el átomo sea transmitido a través del campo de la cavidad se incrementa conforme la velocidad promedio inicial aumenta. Las simulaciones muestran que para las velocidades iniciales  $v_0 = 3.9, 27$  y  $43$  cm/s el átomo tiene probabilidades respectivas de transmisión de 50%, 51.4%, y 84%.

En el régimen de átomos fríos la estructura de los paquetes de onda  $\psi_{\pm 0}(z, t)$  es aproximadamente gaussiana para tiempos suficientemente largos, ver la figura (3.1c). Además, la función de densidad de probabilidad de la posición (PPDF) tiene la estructura de dos funciones cuasi-gaussianas, ver la figura (3.1f). Por otra parte, los resultados numéricos muestran que cuando el átomo deja la región de interacción la incertidumbre en momento recupera aproximadamente su valor inicial tanto para  $\psi_{+0}(z, t)$  como para  $\psi_{-0}(z, t)$ , mientras que la incertidumbre en posición crece linealmente con el tiempo. Sin embargo, esta incertidumbre es más pequeña que para un paquete evolucionando libremente (la gráfica de la incertidumbre es similar a la de un paquete evolucionando libremente, pero trasladada hacia abajo).



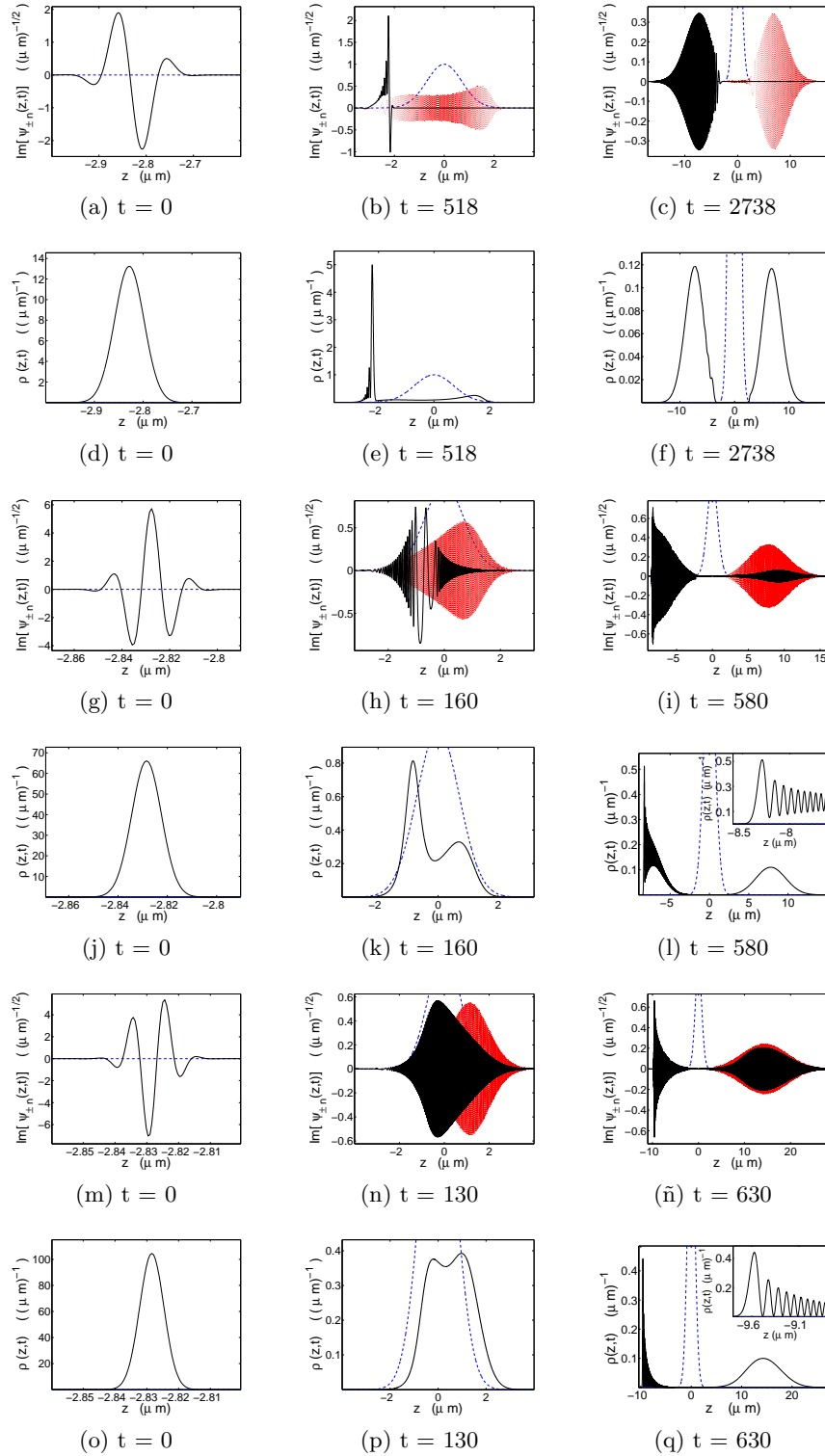


Figura 3.1: Evolución de  $Im[\psi_{+0}(z,t)]$  (línea negra sólida) y  $Im[\psi_{-0}(z,t)]$  (línea negra punteada) y la PDF  $\rho(z,t)$  para  $\delta_L = 0$ . Las líneas 1 y 2 tienen  $v_0 = 3.9$  cm/s; 3 y 4,  $v_0 = 27$  cm/s; 5 y 6,  $v_0 = 43$  cm/s. Las subfiguras en (3.1l) y (3.1q) muestran acercamientos de la PDF. El tiempo aparece en unidades de  $2\pi/g_0$  y la función del modo  $u(z)$  también se muestra (línea azul segmentada).

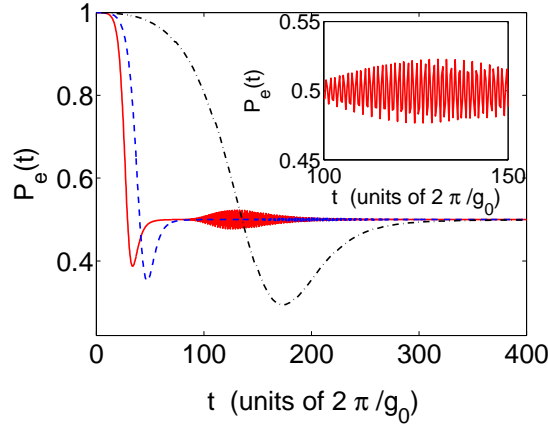


Figura 3.2: Probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado al tiempo  $t$  para las velocidades iniciales  $v_0 = 3.9$  (línea negra punteada-segmentada), 27 (línea azul segmentada) y 43 (línea roja sólida) cm/s para  $\delta_L = 0$ . Oscilaciones tipo Rabi son observables sólo para la velocidad más alta como se muestra en la figura interna. El tiempo aparece en unidades de  $2\pi/g_0$ .

En el régimen intermedio para las velocidades  $v_0 = 27$  y  $43$  cm/s las incertidumbres en momento son asintóticamente constantes tanto para  $\psi_{+0}(z, t)$  como para  $\psi_{-0}(z, t)$ , aunque más grandes que su valor inicial. Además, los paquetes transmitidos asintóticos son cuasi-gaussianos, ver las figuras (3.1i) y (3.1ñ). La parte de la función de onda asociada a la partícula que se mueve bajo el potencial atractivo  $\psi_{-0}(z, t)$  es transmitida en una estructura gaussiana simple, mientras que la asociada a la partícula que se mueve bajo el potencial repulsivo tiene una estructura más elaborada. Como se ilustra en las figuras (3.1i) y (3.1ñ) para las velocidades iniciales  $v_0 = 27$  y  $43$  cm/s,  $\psi_{+0}(z, t)$  se divide en paquetes transmitidos y reflejados.

Notamos que el máximo de la parte transmitida de  $\psi_{+0}(z, t)$  para  $v_0 = 27$  cm/s, ver la figura (3.1i), está localizado en una posición más lejana que el máximo de  $\psi_{-0}(z, t)$ , aunque tiene menor amplitud. Ésta es la esencia de los llamados precusores estudiados en el contexto de óptica [71].

La PPDF para el régimen intermedio consiste de una parte transmitida que esencialmente tiene una estructura gaussiana y una parte reflejada que asemeja un tren de paquetes pseudo-gaussianos, esto es, tienen una estructura tipo eco, ver las figuras (3.1l) y (3.1q). Observando la evolución temporal detallada de la PPDF [72], se encuentra que la estructura tipo-gaussiana de la PPDF se preserva hasta que el valor esperado de la posición del átomo está aproximadamente en el centro de la región de interacción y después se rompe en una parte que continúa atravesando la cavidad y otra que se refleja finalmente, ver las figuras (3.1k) y (3.1p). Notamos que la estructura de eco surge de la interferencia entre una parte del paquete  $\psi_{+0}(z, t)$  que todavía sigue avanzando hacia el centro de la región de interacción y otra parte de él que se mueve en dirección opuesta. Más aún, la estructura de eco se preserva lejos de la región de interacción en el régimen intermedio.

Ahora vamos a discutir el resto de las propiedades evaluadas. Como se puede ver en la figura

(3.2), la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado  $P_e(t)$  contrasta grandemente con la que se obtiene cuando el movimiento de CM no se cuantiza. En resonancia esta última presenta las bien conocidas oscilaciones de Rabi que han sido ingeniosamente utilizadas en la preparación de estados cuánticos de los grados de libertad internos del átomo y del campo [19]. Por otra parte, cuando el movimiento de CM requiere de una descripción cuantizada, las oscilaciones de Rabi tienden a desaparecer. Para la velocidad inicial más baja desaparecen completamente y la probabilidad de emisión (igual a  $1 - P_e(t)$ ) siempre es menor a uno, ver la figura (3.2). Este comportamiento se puede explicar fácilmente usando la ecuación (3.11) y viendo la figura (3.1b). Como  $|\psi_{+0}(t)\rangle$  evoluciona bajo el potencial repulsivo y  $|\psi_{-0}(t)\rangle$  evoluciona bajo el potencial atractivo, el primero es rápidamente reflejado (ver los tiempos en las figuras (3.1a), (3.1b) y (3.1c)), mientras que el segundo es transmitido a través del campo de la cavidad. Por lo tanto, el traslape entre  $|\psi_{+0}(t)\rangle$  y  $|\psi_{-0}(t)\rangle$  rápidamente se hace cero y no hay posibilidad de oscilaciones, pues la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado alcanza rápidamente el valor estacionario de  $1/2$ . Este fenómeno también es observado para las velocidades iniciales más altas, pero pequeñas oscilaciones empiezan a aparecer conforme  $|\psi_{+0}(t)\rangle$  penetra más la barrera y es predominantemente transmitido como ocurre para la velocidad inicial más alta con la que se hizo la simulación, ver la figura (3.1). Esto también hace que el traslape  $\langle\psi_{+0}(t)|\psi_{-0}(t)\rangle$  persista más tiempo, pero el retraso entre  $|\psi_{+0}(t)\rangle$  y  $|\psi_{-0}(t)\rangle$  eventualmente lo decrece a valores despreciables. Notamos que este retraso se puede medir por la diferencia entre los valores esperados de la posición para  $|\psi_{+0}(t)\rangle$  y  $|\psi_{-0}(t)\rangle$ , ver la ecuación (3.37). La pequeñas oscilaciones exhibidas para la velocidad inicial más alta parecen ser el comienzo de las oscilaciones de Rabi mencionadas arriba.

Los valores esperados de la inversión atómica y el número de fotones, así como, la entropía lineal entre los grados de libertad internos y de CM se pueden obtener directamente de  $P_e(t)$ , ver las ecuaciones (3.12) y (3.14).

Por otra parte, el enredamiento entre los grados de libertad internos del átomo y del campo también es afectado grandemente por la cuantización del movimiento de CM. Como se ilustra en la figura (3.3a), tan pronto el átomo entra en la región de interacción el enredamiento de formación entre los grados de libertad internos del átomo y el campo de la cavidad crece a un valor grande y después decrece rápidamente hasta hacerse cero (ver los tiempos en las figuras (3.1) y (3.3a)). Por otra parte, si el movimiento de CM se trata clásicamente y hay cero desentonamiento [19], el enredamiento de formación presenta muchas oscilaciones entre cero y uno que corresponden a los casos en que el átomo está en el estado base o excitado y cuando el átomo y el campo están en los estados  $|\pm, 0\rangle$ , respectivamente. Esta diferencia se puede entender fácilmente si nos referimos a las ecuaciones (3.15) y (3.16). Para el estado inicial escogido y la condición de resonancia tenemos para cualquier tiempo  $t$  que

$$\langle\psi_{+0}(t)|\psi_{+0}(t)\rangle = \langle\psi_{-0}(t)|\psi_{-0}(t)\rangle = \frac{1}{2}. \quad (3.38)$$

Entonces, usando las ecuaciones (3.15) y (3.16) se puede mostrar que la concurrencia  $C(t)$  tiende a cero tan pronto el traslape entre  $|\psi_{+0}(t)\rangle$  y  $|\psi_{-0}(t)\rangle$  se hace despreciable. Por lo tanto, el enredamiento de formación toma el valor de cero y no hay enredamiento entre los grados de libertad internos del átomo y el campo de la cavidad.

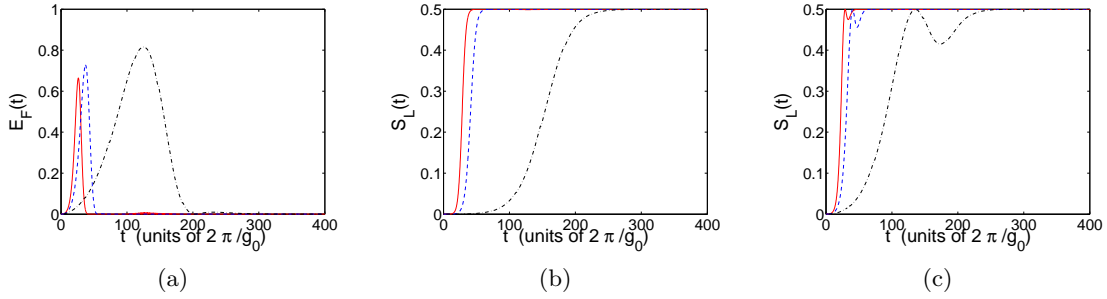


Figura 3.3: La figura (3.3a) muestra el enredamiento de formación entre los grados de libertad internos del átomo y el campo de la cavidad. La figura (3.3b) muestra la entropía lineal para los grados de libertad internos del átomo y el campo de la cavidad. La figura (3.3c) muestra la entropía lineal para los grados de libertad internos y de CM del átomo. Se muestran resultados para  $\delta_L = 0$  y velocidades iniciales de  $v_0 = 3.9$  (línea negra punteada-segmentada), 27 (línea azul segmentada) y 43 (línea roja sólida) cm/s. El tiempo aparece en unidades de  $2\pi/g_0$ .

Como se ilustra en la figura (3.3), los operadores de densidad reducidos  $\rho_{CM}(t)$  y  $\rho_F(t)$  rápidamente adquieren la estructura de estados mixtos máximamente mezclados (ver los tiempos en las figuras (3.1) y (3.3)). Esto se puede explicar haciendo referencia a las ecuaciones (3.13) y (3.14). Usando la ecuación (3.38) se sigue que  $S_L^{CM}(t)$  y  $S_L^F(t)$  toman sus valores máximos tan pronto el traslape entre  $|\psi_{+0}(t)\rangle$  y  $|\psi_{-0}(t)\rangle$  es despreciable. Como los operadores de densidad de todas las reducciones bipartitas del sistema tienen entropía lineal mayor a cero, concluimos que todas las reducciones bipartitas del sistema están enredadas. Esto es, los grados de libertad internos y del campo están enredados con los de CM porque  $S_L^{CM}(t) > 0$ . Además, los grados de libertad internos y de CM están enredados con los del campo y los grados de libertad del campo y de CM están enredados con los internos porque  $S_L^F(t) = S_L^{int}(t) > 0$ .

A continuación vamos a mostrar que, como consecuencia del cero enredamiento de formación asintótico y las entropías lineales distintas de cero, el sistema exhibe no sólo enredamiento tripartita, sino que, enredamiento tripartita genuino [35]. Recordamos que esto quiere decir que, dado un estado puro, todas sus reducciones bipartitas dan lugar a mezclas de estados puros separables. El ejemplo más conocido de esto es el estado GHZ que se vio en el Capítulo 2.

Consideremos un estado inicial de la forma

$$|\psi_0\rangle = |\psi_{CM}\rangle (c_1|e, n\rangle + c_2|g, n+1\rangle) , \quad (3.39)$$

con  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ ,  $c_1 c_2 = 0$  y  $\langle\psi_{CM}|\psi_{CM}\rangle = 1$  (observamos que el estado (3.36) es de esta forma). Entonces (3.39) evoluciona a un ket de la forma (3.6) y se puede ver fácilmente que  $\langle\psi_{+n}(t)|\psi_{-n}(t)\rangle = 0$  implica que los operadores de densidad reducidos para los grados de libertad internos y del campo ( $int + F$ ), CM e internos ( $CM + int$ ) y CM y campo ( $CM + F$ ) son respectivamente iguales a

$$\rho_{int+F}(t) = \frac{1}{2}|e\rangle\langle e| \otimes |n\rangle\langle n| + \frac{1}{2}|g\rangle\langle g| \otimes |n+1\rangle\langle n+1| , \quad (3.40)$$

$$\rho_{CM+int}(t) = \frac{1}{2}P_+(t) \otimes |e\rangle\langle e| + \frac{1}{2}P_-(t) \otimes |g\rangle\langle g| , \quad (3.41)$$

$$\rho_{CM+F}(t) = \frac{1}{2}P_+(t) \otimes |n\rangle\langle n| + \frac{1}{2}P_-(t) \otimes |n+1\rangle\langle n+1|, \quad (3.42)$$

donde  $P_{\pm}(t)$  son operadores de densidad definidos por

$$P_{\pm}(t) = [ |\psi_{+n}(t)\rangle \pm |\psi_{-n}(t)\rangle ] \cdot [ \langle\psi_{+n}(t)| \pm \langle\psi_{-n}(t)| ]. \quad (3.43)$$

Notamos que (3.40)-(3.42) son estados mixtos separables, pues  $P_{\pm}(t)$  representan estados puros ortogonales. Por lo tanto, el sistema exhibe enredamiento tripartita genuino. Notamos que este caso es el que tenemos con  $n = 0$ .

Es importante notar que la desaparición de las oscilaciones de Rabi y la existencia de enredamiento tripartita genuino, dependen de dos cosas: un estado inicial de la forma (3.39) y  $\langle\psi_{+n}(t)|\psi_{-n}(t)\rangle = 0$  para el intervalo de tiempo de interés. Por lo tanto, son fenómenos que serían observados para funciones modo positivas  $u(\mathbf{r})$  y en una, dos o tres dimensiones siempre y cuando las dos condiciones mencionadas se satisfagan.

### 3.4.2. Desentonamiento azul fuera del régimen de resonancias de transmisión

La dinámica de paquetes de onda en el caso de desentonamiento azul exhibe un comportamiento interesante que puede no ser visto en otros tratamientos, ver la figura (3.4). Para todos las velocidades iniciales  $\psi_{+0}(z, t)$  decrece su amplitud y casi desaparece dentro de la región de interacción mientras que  $\psi_{-0}(z, t)$  crece correspondientemente. Después, conforme los paquetes de onda salen de la región de interacción,  $\psi_{+0}(z, t)$  reaparece de tal manera que asintóticamente  $\psi_{+0}(z, t) = \psi_{-0}(z, t)$ . Esta igualdad se obtuvo numéricamente y es esperada por las consideraciones analíticas dadas más abajo. En todas las simulaciones hechas, tanto los paquetes de onda como la función de densidad de probabilidad de posición eventualmente tienen una estructura tipo gaussiana, ver la figura (3.4), y los valores esperados del momento y su incertidumbre se acercan asintóticamente a sus valores iniciales.

Para desentonamiento azul, si uno usa la aproximación adiabática semi-clásica (SCAA) presentada en la sección 3.2, entonces uno espera que el átomo sea transmitido a través del campo de la cavidad para cualquier momento inicial. La razón de esto es que el átomo se mueve bajo el potencial atractivo  $E_{-0}(z)$  con una energía  $E = (1/2)Mv_0^2 + E_{-0}(\mu)$  más alta que la máxima altura de  $E_{-0}(z)$ , ver las ecuaciones (3.19)-(3.25) y la definición de  $\mu$  y  $v_0$  en la sección 3.3. Esto también ocurre en el tratamiento cuántico exacto fuera del régimen de las resonancias de transmisión, puesto que la probabilidad de transmisión es igual al 100 % para desentonamientos tales que  $\delta_L = g_0/16$ . Sin embargo, la SCAA no es estrictamente válida porque al evolucionar la extensión de los paquetes de onda aumenta y se hace comparable al tamaño de la región de interacción, ver la figura (3.4), y la SCAA no toma en cuenta esta dispersión en la posición. Como consecuencia de esto, el rompimiento de la SCAA se revela en la función de densidad de probabilidad de la posición y en las predicciones cuantitativas de la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado  $P_e(t)$ , ver las figuras (3.4) y (3.5). Sin embargo, es notable que la SCAA sí reproduce tanto la estructura de  $P_e(t)$  como su valor asintótico, ve la figura (3.5). Además, vemos que la SCAA sí reproduce adecuadamente el comportamiento del valor esperado de la posición del CM, ver la figura (3.6). Para comparar con el caso en que no se cuantiza el movimiento de CM, estas figuras muestran los resultados cuando el movimiento de centro de masa se describe de forma clásica como  $z = v_0t + \mu$ .

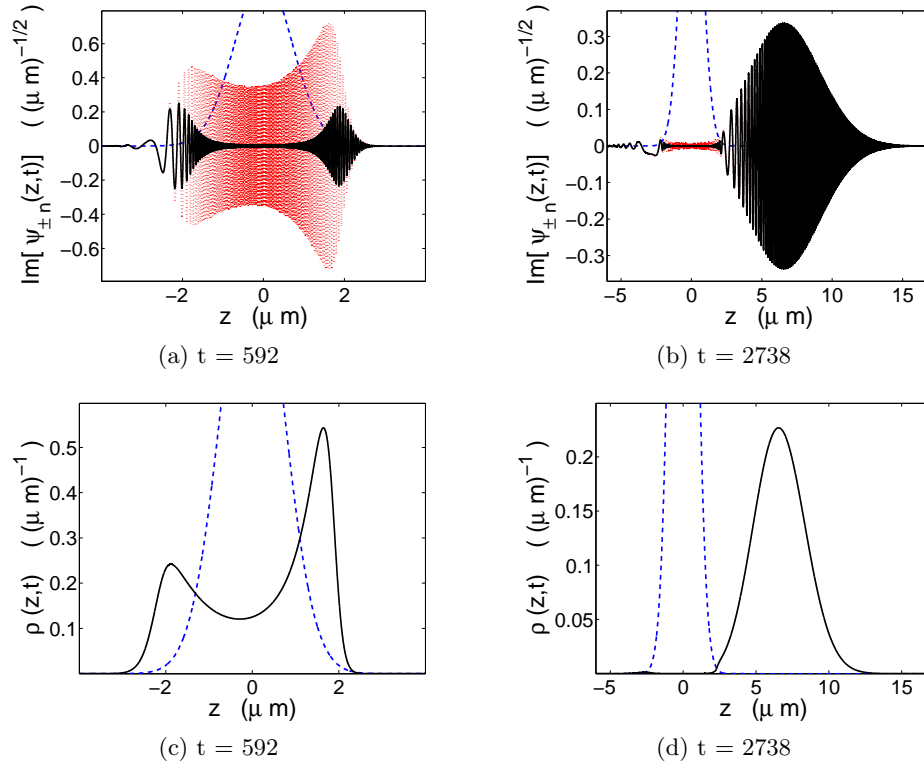


Figura 3.4: El primer renglón muestra la evolución de las partes imaginarias  $\text{Im}[\psi_{+0}(z, t)]$  (línea negra sólida) y  $\text{Im}[\psi_{-0}(z, t)]$  (línea roja punteada) de los paquetes de onda  $\psi_{\pm 0}(z, t)$  para desentonamiento azul  $\delta_L = g_0/16$ . La velocidad inicial es  $v_0 = 3.9$  cm/s y el estado inicial es el mismo que en la figura (3.1a). Las partes reales se comportan de forma similar. La segunda fila muestra la evolución de la PPDF para la misma velocidad inicial y estado usado en la figura (3.1d). El tiempo aparece en unidades de  $2\pi/g_0$  y la función modo  $u(z)$  (línea azul segmentada) aparece en todas las figuras.

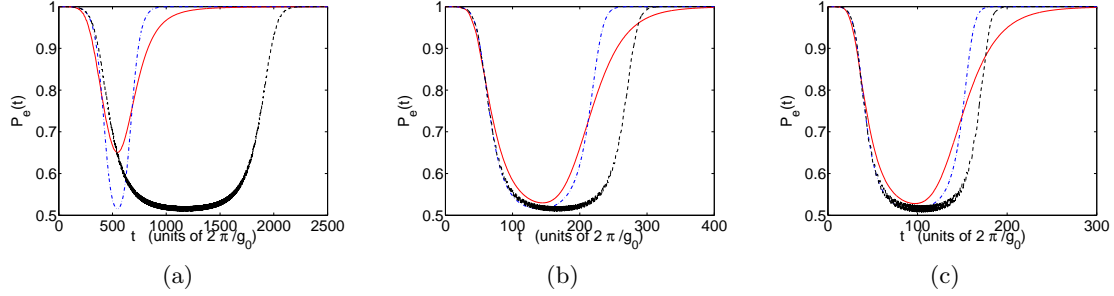


Figura 3.5: Probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado para  $\delta_L = g_0/16$ . Cada subfigura muestra el resultado cuando el movimiento de CM se cuantiza (línea roja sólida), se trata con la aproximación adiabática semiclásica (línea azul punteada-segmentada) o sigue la trayectoria clásica  $z = v_0 t + \mu$  donde  $v_0$  es la velocidad inicial y  $\mu$  la posición inicial (línea negra segmentada). Se muestran los resultados para las velocidades iniciales (3.5a)  $v_0 = 3.9$ , (3.5b) 27 y (3.5c) 43 cm/s. El tiempo está en unidades de  $2\pi/g_0$ .

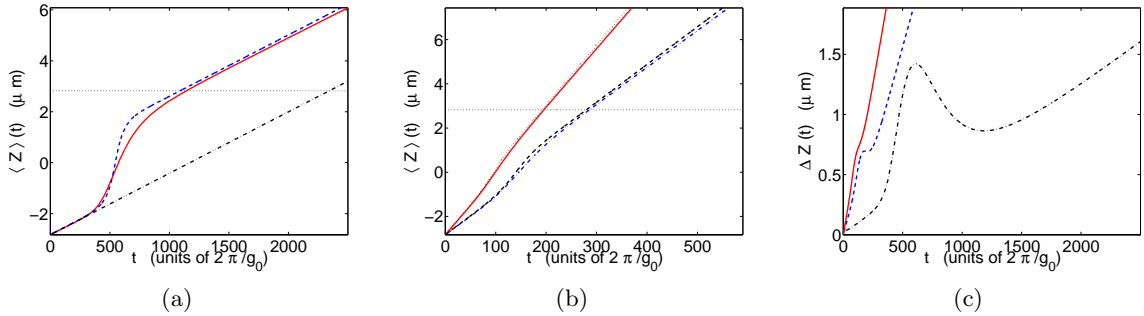


Figura 3.6: Para  $\delta_L = g_0/16$ , (3.6a) muestra el valor esperado de la posición del átomo cuando el movimiento de CM se cuantiza con velocidad inicial promedio  $v_0 = 3.9$  cm/s (línea roja sólida). También se muestran los resultados para la aproximación adiabática semiclásica (SCAA) (línea azul segmentada) y el movimiento clásico  $z = v_0 t + \mu$  (línea negra punteada-segmentada). (3.6b) muestra los valores esperados de la posición del átomo con velocidad inicial  $v_0 = 27$  cm/s cuando el movimiento de CM se cuantiza (línea azul punteada-segmentada) y cuando se usa la SCAA (línea negra segmentada). También muestra  $\langle Z \rangle$  para la velocidad inicial  $v_0 = 43$  cm/s cuando el movimiento de CM se cuantiza (línea roja sólida) y se trata con la SCAA (línea negra punteada). Las líneas horizontales punteadas indican los límites de la región de interacción. (3.6c) muestra la desviación estándar de la posición del átomo cuando el movimiento de CM se cuantiza y se tienen las velocidades iniciales  $v_0 = 3.9$  cm/s (línea negra punteada-segmentada), 27 cm/s (línea azul segmentada) y 43 cm/s (línea roja sólida). En todas las figuras el tiempo está en unidades de  $2\pi/g_0$ .

En el tratamiento cuántico el comportamiento asintótico de las entropías lineales y el enredamiento de formación, ver la figura (3.7), se entiende fácilmente usando el siguiente argumento. Consideremos un operador de densidad de la forma (3.10). Si la probabilidad  $P_e(t)$  de encontrar al átomo en el estado excitado es uno y

$$\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{+n}(t) \rangle = \langle \psi_{-n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle = \frac{1}{2}, \quad (3.44)$$

entonces, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, necesariamente se tiene que  $|\psi_{+n}(t)\rangle = |\psi_{-n}(t)\rangle$ . A partir de esto es fácil concluir que todo el sistema está en el siguiente estado producto:

$$\rho(t) = 2|\psi_{+n}(t)\rangle\langle\psi_{+n}(t)| \otimes |e\rangle\langle e| \otimes |n\rangle\langle n|. \quad (3.45)$$

Observamos que éste es precisamente el caso que tenemos, pues  $P_e(t) = 1$  y la ecuación (3.44) se satisface, ver la figura (3.7c). Entonces el estado del sistema cuando el átomo ya está fuera de la región de interacción no tiene correlaciones, pues es un estado producto puro.

Dentro de la región de interacción, la estructura de la entropía lineal entre los grados de libertad internos del átomo y del campo se entiende usando la ecuación (3.13) y observando la figura (3.7c). Para las otras velocidades las gráficas son similares.

Si se usa la aproximación semiclásica adiabática (SCAA), uno espera que el átomo asintóticamente se encuentre en el estado excitado y el campo con cero fotones. Esto es debido a que el sistema sigue adiabáticamente el estado correspondiente, ver las ecuaciones (3.20) y (3.25). Luego, se espera que el sistema se encuentre asintóticamente en un estado puro producto. Observamos que esto sucede precisamente en el tratamiento cuántico del movimiento de CM fuera del régimen de resonancias de transmisión, ver la figura (3.7). Sin embargo, notamos que la SCAA no puede describir cuantitativamente lo que sucede dentro de la región de interacción y esto se debe a que la SCAA no es estrictamente válida como se analizó en párrafos anteriores.

### 3.4.3. Desentonamiento rojo fuera del régimen de resonancias de transmisión

Los paquetes de onda para desentonamiento rojo  $\psi_{\pm 0}(z, t)$  muestran una dinámica similar al caso  $\psi_{+0}(z, t)$  con resonancia, especialmente en el régimen de átomos fríos. De hecho, en ese régimen y para tiempos suficientemente largos, la estructura de todos los paquetes de onda es similar al mostrado para la parte imaginaria de  $\psi_{+0}(z, t)$  en la figura (3.1c). Además, la correspondiente PPDF es esencialmente gaussiana. En el régimen intermedio  $\psi_{\pm 0}(z, t)$  se dividen en una parte transmitida y una reflejada para las velocidades iniciales  $v_0 = 27$  y  $43$  cm/s de forma muy similar a  $\psi_{+0}(z, t)$  en las figuras (3.1i) y (3.1ñ). Las partes reflejadas de los dos paquetes de ondas y las correspondientes PPDF parecen un tren de paquetes tipo gaussianos. En este sentido, tienen una estructura de eco muy similar a la mostrada en las figuras mencionadas.

Usando la aproximación adiabática semiclásica (SCAA) encontramos que el átomo se mueve bajo el potencial repulsivo  $E_{+0}(z)$  con una energía  $E = (1/2)Mv_0^2 + E_{+0}(\mu)$ , ver las ecuaciones (3.19)-(3.25) y la definición de  $\mu$  y  $v_0$  en la sección 3.3. Por lo tanto, se esperaría que el átomo siempre fuera reflejado si  $E$  es más pequeño que la altura máxima  $(\hbar/2) \left( \sqrt{\delta_L^2 + 4g_0^2} - |\delta_L| \right)$  de  $E_{+0}(z)$ . Por otra parte, el átomo siempre debería ser transmitido si  $E$  es más grande que esta altura. Para  $\delta_L = -g_0/16$  la altura máxima  $E_{+0}(z)$  es igual a  $0.97\hbar g_0$ . Entonces, la SCAA



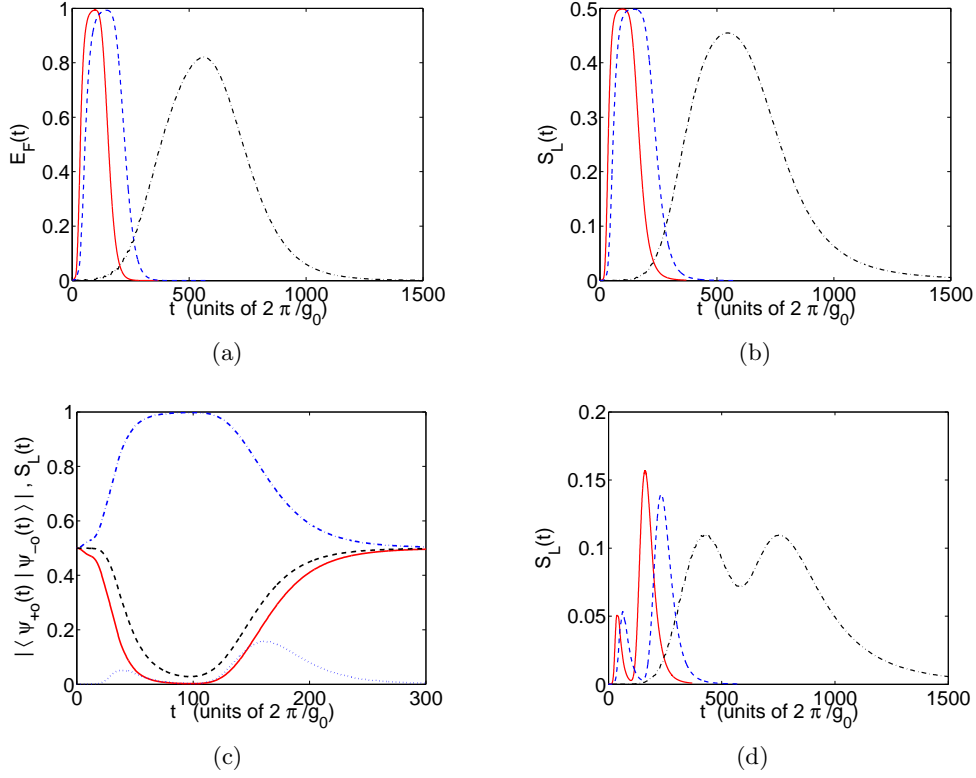


Figura 3.7: Para  $\delta_L = g_0/16$ , las figuras (3.7a) y (3.7d) muestran la evolución del enredamiento de formación y la entropía lineal entre los grados de libertad internos del átomo y los grados de libertad del campo, respectivamente. La figura (3.7b) muestra la evolución de la entropía lineal entre los grados de libertad de CM e internos del átomo y es igual a la de los grados de libertad de CM y el campo. En las figuras (3.7a), (3.7b) y (3.7d) se muestran los resultados para las velocidades iniciales  $v_0 = 3.9$  cm/s (línea negra punteada-segmentada), 27 cm/s (línea azul segmentada) y 43 cm/s (línea roja sólida). La figura (3.7c) muestra la evolución del cuadrado de la norma de las funciones de onda  $\psi_{+0}(z, t)$  (línea roja sólida) y  $\psi_{-0}(z, t)$  (línea azul segmentada), el módulo del traslape  $|\langle \psi_{+0}(z, t) | \psi_{-0}(z, t) \rangle|$  (línea negra segmentada) y la entropía lineal entre los grados de libertad internos del átomo y el campo (línea azul punteada) para la velocidad inicial  $v_0 = 43$  cm/s. El tiempo aparece en unidades de  $2\pi/g_0$ .

predice que el átomo va a ser reflejado para las velocidades iniciales  $v_0 = 3.9, 27$  cm/s y que el átomo va a ser transmitido para la velocidad inicial  $v_0 = 43$  cm/s (ver la sección 3.4 para las correspondiente energías cinéticas promedio en términos de  $\hbar g_0$ ). Las simulaciones numéricas muestran considerables diferencias con este comportamiento en el régimen intermedio debido al tratamiento cuantizado del movimiento de CM. Para  $\delta_L = -g_0/16$  y velocidades  $v_0 = 3.9, 27$  y  $43$  cm/s, el átomo tiene probabilidades respectivas de 100 %, 96.4 % y 30 % de ser reflejado por el campo de la cavidad. El resultado para la velocidad más grande es especialmente diferente a lo predicho por la SCAA. La diferencia con esta última se debe a la gran dispersión en posición y momento que resulta cuando el movimiento de CM se cuantiza.

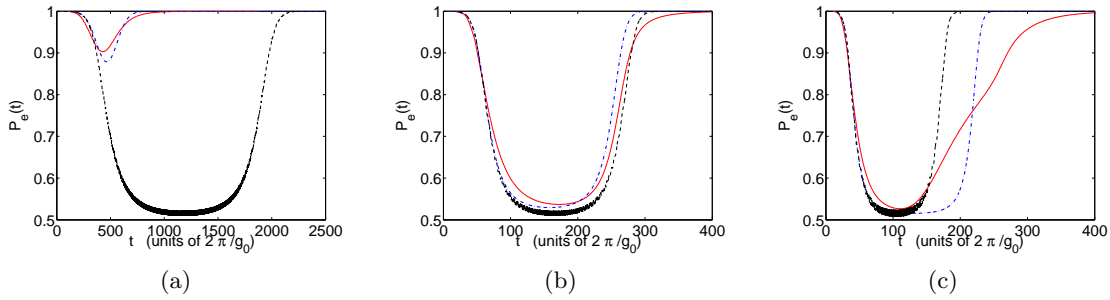


Figura 3.8: Probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado para  $\delta_L = -g_0/16$ . Cada subfigura ilustra el resultado obtenido cuando el movimiento de centro de masa está cuantizado (línea roja sólida), tratado con la aproximación semiclásica adiabática (línea azul punteada-segmentada) o cuando sigue la trayectoria clásica  $z = v_0 t + \mu$  donde  $v_0$  es la velocidad inicial y  $\mu$  es la posición inicial (línea negra segmentada).  $\mu$  es igual al valor esperado de la posición al tiempo inicial en el tratamiento cuántico. Se muestran los resultados para las velocidades iniciales (3.8a)  $v_0 = 3.9$  cm/s, (3.8b)  $27$  cm/s y (3.8c)  $43$  cm/s. El tiempo está en unidades de  $2\pi/g_0$ .

Asintóticamente la SCAA da el valor correcto para la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado fuera del régimen de resonancias de transmisión, ver la figura (3.8). Cuando el átomo está en la región de interacción, la SCAA también da una buena aproximación cualitativa al resultado exacto para las velocidades más pequeñas estudiadas. Como era de esperarse, éste no es el caso del tratamiento clásico del movimiento de centro de masa  $z = v_0 t + \mu$ . Sin embargo, notamos que hay una diferencia considerable entre la SCAA y el tratamiento cuántico en la estructura de la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado para el caso de la velocidad más alta, puesto que la reflexión debida al ancho en posición y en momento del paquete de ondas es más relevante en este caso. Además, notamos que hay diferencias considerables en el valor esperado del CM entre el tratamiento cuántico y la SCAA, ver la figura (3.9). Esto es debido a la gran dispersión en posición (la SCAA no es estrictamente válida).

En el tratamiento cuántico exacto el comportamiento asintótico de las entropías lineales y el enredamiento de formación se entiende fácilmente usando el mismo argumento que en el caso de desintonamiento azul. Además, la estructura de  $S_L^{CM}(t)$  cuando el átomo está en la región de interacción se puede entender observando la figura (3.10c).

Como en el caso de desintonamiento azul, si uno usa la SCAA, entonces uno espera que el

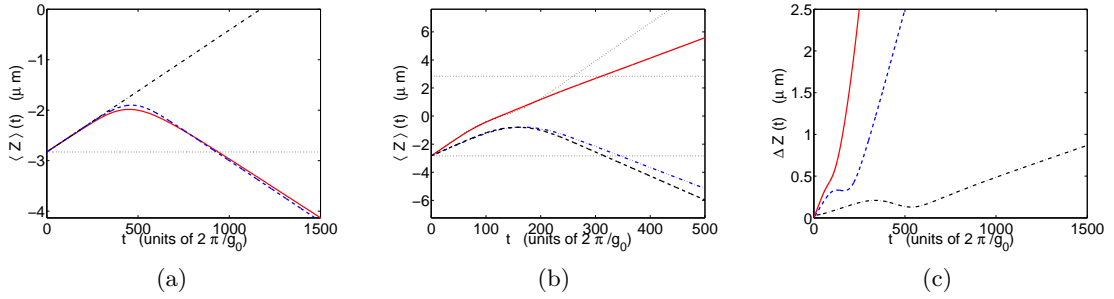


Figura 3.9: Para  $\delta_L = -g_0/16$ , (3.9a) muestra el valor esperado de la posición del átomo cuando la velocidad inicial es  $v_0 = 3.9$  cm/s para el tratamiento cuántico (línea sólida), para la SCAA (línea azul segmentada) y para la descripción  $z = v_0 t + \mu$  del movimiento de CM (línea negra punteada-segmentada) ( $\mu$  es el valor esperado de la posición del átomo al tiempo inicial en el tratamiento cuántico); (3.9b) muestra los valores esperados de la posición del átomo con velocidad inicial  $v_0 = 27$  cm/s para el tratamiento cuántico (línea azul punteada-segmentada) y para la SCAA (línea negra segmentada). También muestra  $\langle Z \rangle$  para la velocidad inicial  $v_0 = 43$  cm/s que resulta del tratamiento cuántico (línea roja sólida) y de la SCAA (línea negra punteada). Las líneas horizontales indican los límites de la región de interacción; (3.9c) muestra la desviación estándar de la posición del átomo cuando el movimiento de CM se cuantiza con las velocidades iniciales  $v_0 = 3.9$  cm/s (línea negra punteada-segmentada),  $27$  cm/s (línea azul segmentada) y  $43$  cm/s (línea roja sólida). En todas las figuras el tiempo está en unidades de  $2\pi/g_0$ .

sistema tenga asintóticamente al átomo en el estado excitado y a la cavidad con cero fotones. Por lo tanto, el sistema se encuentra asintóticamente en un estado puro separable. Observamos que esto sí sucede asintóticamente en el tratamiento cuántico, aunque notamos que la SCAA no es estrictamente válida (por el mismo argumento presentado en el caso de desintonamiento azul) y no puede describir cuantitativamente lo que sucede en la región de interacción, ver la figura (3.10).

#### 3.4.4. Régimen de resonancias de transmisión

Para  $\delta_L \equiv \omega_L - \omega_A = 0$ , los estados estacionarios del hamiltoniano modelo (3.1) con energía muy baja con respecto a la energía de acoplamiento átomo-campo  $\hbar g_0$  exhiben resonancias en algunas propiedades para ciertos valores de la longitud  $L$  de la región de interacción átomo-campo [48, 64, 69]. Las condiciones precisas para la ocurrencia de estas resonancias dependen grandemente de la función modo  $u(z)$  considerada. Se han encontrado expresiones analíticas exactas para las condiciones necesarias para tener estas resonancias en la probabilidad de emisión para las funciones mesa  $u(z) = \theta(z)\theta(L-z)$  ( $\theta$  es la función de Heaviside) y  $u(z) = \text{sech}^2(z/L)$  [48]. Estas condiciones relacionan la longitud de onda de de Broglie del estado estacionario con  $L$ . El modo gaussiano ha sido tratado numéricamente y las resonancias para la probabilidad de emisión fueron estudiadas para el valor particular de la energía  $E = \hbar g_0/100$  como función de la cintura  $w_0$  del modo gaussiano en la referencia [69]. En los casos que hemos estudiado en secciones anteriores no hemos observado las resonancias mencionadas ni sus efectos a pesar

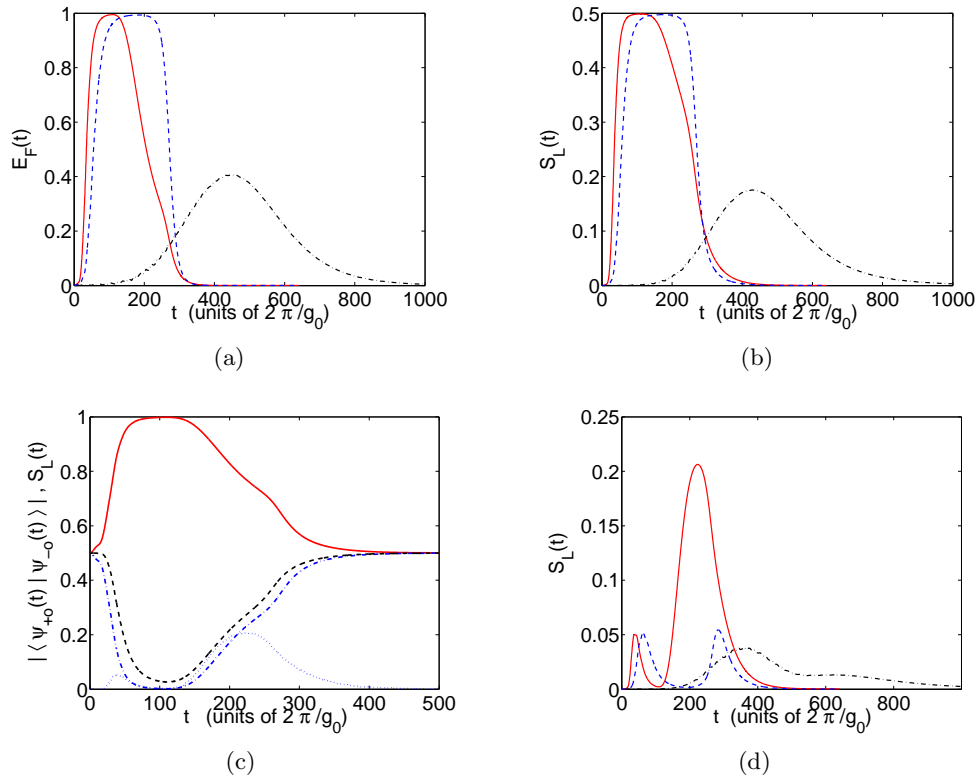


Figura 3.10: Para  $\delta_L = -g_0/16$ , las figuras (3.10a) y (3.10d) muestran la evolución del enredamiento de formación y la entropía lineal entre los grados de libertad internos del átomo y del campo, respectivamente; (3.10b) muestra la evolución de la entropía lineal entre los grados de libertad de CM e internos del átomo. Las figuras (3.10a), (3.10b) y (3.10d) muestran los resultados para las velocidades iniciales  $v_0 = 3.9$  cm/s (línea negra punteada-segmentada), 27 cm/s (línea azul segmentada) y 43 cm/s (línea roja sólida). La figura (3.10c) muestra la evolución del cuadrado de la norma de las funciones de onda  $\psi_{+0}(z, t)$  (línea roja sólida) y  $\psi_{-0}(z, t)$  (línea azul punteada-segmentada), el módulo del traslape  $|\langle \psi_{+0}(z, t) | \psi_{-0}(z, t) \rangle|$  (línea negra segmentada) y la entropía lineal entre los grados de libertad internos del átomo y el campo (línea azul punteada) para  $v_0 = 43$  cm/s. El tiempo aparece en unidades de  $2\pi/g_0$ .

de que consideramos el caso en que  $Mv_0^2/2 = \hbar g_0/100$ . La razón de esto es que tomamos una desviación estándar del modo gaussiano igual a  $w_0/\sqrt{2} = 10^{-6}/\sqrt{2}$  m y se necesitan valores mucho más pequeños de esta cantidad para observarlos a esta energía [69].

En esta sección vamos a estudiar las propiedades del sistema en el régimen de resonancias de transmisión. Para esto vamos a tomar  $w_0$  variable, fijaremos  $Mv_0^2/2 = \hbar g_0/100$ , tomaremos  $\Delta = 10^{-8}$ m como desviación estándar de la posición y fijaremos el resto de los parámetros como antes. Hemos tomado estos valores para comparar y aumentar el conocimiento con los resultados de las referencias [64] y [69]. Sin embargo, es importante mencionar que valores más pequeños de  $v_0$  y valores más grandes de  $\Delta$  también pueden dar lugar a resonancias de transmisión. El punto principal es que las resonancias son observadas para  $w_0$  más pequeño que  $\Delta$ , como fue observado en la referencia [64] trabajando con paquetes de onda gaussianos.

Es importante elaborar un poco más sobre los parámetros usados en las simulaciones numéricas para entender algunos de los resultados. Como tomamos  $Mv_0^2/2 = p_0^2/(2M) = \hbar g_0/100$ , el valor esperado del momento del átomo al tiempo inicial es  $p_0 = 10\sqrt{2M\hbar g_0}$  con  $M = 1.4(10^{-25})$  Kg la masa del átomo. Por lo tanto, la desviación estándar relativa del momento inicialmente es

$$\frac{\Delta_P}{p_0} = \frac{5}{\Delta} \sqrt{\frac{\hbar}{2Mg_0}} = 0.94 , \quad (3.46)$$

puesto que la desviación estándar en posición al tiempo  $t = 0$  fue tomada como  $\Delta = 10^{-8}$ m y estamos tratando con paquetes de onda de mínima incertidumbre, ver las ecuaciones (3.33) y (3.36). Más aún, la desviación estándar relativa en la posición fue tomada como

$$0.05 \leq \frac{\Delta}{|\mu|} \leq 3.5 , \quad (3.47)$$

debido a que el valor esperado de la posición al tiempo  $t = 0$  fue tomada como  $\mu = -4w_0/\sqrt{2}$  y la cintura  $w_0$  del modo gaussiano fue variada de  $10^{-9}$ m a  $7(10^{-8})$ m. Como consecuencia, los paquetes de onda al tiempo  $t = 0$  no están bien localizados en momento y pasan de no estar bien localizados en posición a estar bien localizados conforme  $w_0$  se incrementa. Como discutiremos más abajo, una desviación estándar relativa grande en momento puede dar lugar a una atenuación de las resonancias.

La figura (3.11a) muestra la probabilidad  $T(w_0)$  de que el átomo sea transmitido a través del campo de la cavidad como función de la cintura  $w_0$  del modo gaussiano para los tres valores del desintonamiento considerados arriba. La simulación numérica se detuvo después de un tiempo  $t_f = 21w_0\sqrt{2}/v_0$  que corresponde a tres veces el tiempo de tránsito del intervalo  $(-7w_0/\sqrt{2}, 7w_0/\sqrt{2})$  por una partícula clásica libre con energía cinética  $Mv_0^2/2$ . En esa figura se puede observar que  $T(w_0)$  difiere dramáticamente de los resultados de secciones anteriores. Cuando hay cero desintonamiento ( $\delta_L = 0$ )  $T(w_0)$  siempre es más pequeño que 0.5 y oscila con amplitudes decrecientes conforme  $w_0$  se incrementa de tal manera que hay valores particulares de  $w_0$  en los cuales  $T(w_0)$  muestra máximos. Éstas son las resonancias de transmisión mencionadas en los párrafos de arriba. Las diferencias con las secciones anteriores se deben a que los potenciales repulsivo  $V_n(\mathbf{R})$  asociado con  $|\psi_{+n}(t)\rangle$  y atractivo  $-V_n(\mathbf{R})$  asociado con  $|\psi_{-n}(t)\rangle$  son muy estrechos (medidos por  $w_0$ ) en comparación con el ancho  $\Delta$  de los paquetes de onda.

Como consecuencia de esto, hay gran tuneo por parte de  $|\psi_{+n}(t)\rangle$  y reflexión por parte de  $|\psi_{-n}(t)\rangle$ . Por otra parte, en secciones previas la cintura  $w_0$  del potencial era mucho más grande que  $\Delta$  y, como consecuencia, el tuneo y la reflexión eran despreciables. Observando la figura (3.11a) uno puede ver que las resonancias empiezan a desaparecer y  $T(w_0)$  tiende lentamente al valor de  $1/2$  reportado en secciones anteriores conforme  $w_0$  se vuelve más grande que  $\Delta$ .

Cuando hay desintonamiento azul ( $\delta_L = g_0/16 > 0$ ) el átomo es reflejado con mayor probabilidad cuando  $w_0 \lesssim 2\Delta$ , excepto para los valores de  $w_0$  donde las resonancias ocurren. Notamos que éstas están ligeramente desplazadas y son más pronunciadas en comparación con el caso de desintonamiento cero. Además,  $T(w_0)$  tiende lentamente al valor de 1 de secciones anteriores. El caso de desintonamiento rojo ( $\delta_L = -g_0/16 < 0$ ) muestra que el átomo tiene considerable probabilidad de ser transmitido a través del campo de la cavidad, especialmente en las resonancias. Vemos que éstas están presentes, pero son menos pronunciadas y tienden a desaparecer rápidamente. Observamos que  $T(w_0)$  tiende rápidamente al valor 0 de las secciones anteriores conforme  $w_0$  se hace más grande que  $\Delta$ . El comportamiento de  $T(w_0)$  indica que la SCAA es inaplicable en estos casos, pues predice que el átomo siempre va a ser transmitido para desintonamiento azul y siempre va a ser reflejado para desintonamiento rojo.

Los resultados para la probabilidad  $T(w_0)$  de que el átomo sea transmitido a través del campo de la cavidad como función de la cintura  $w_0$  en los casos de desintonamiento cero y rojo se pueden comparar con los de la referencia [64]. Nuestros resultados concuerdan con la estructura de  $T(w_0)$  presentada en esa referencia, pero difieren cuantitativamente en el caso de desintonamiento cero. Esto se debe a que esa referencia presenta (en el caso  $\delta_L = 0$ ) resonancias que llegan al valor de  $1/2$  y  $T(w_0)$  alcanza un valor estacionario de  $1/2$  mucho más rápido. La razón de esto será explicada a continuación.

La figura (3.11b) muestra la probabilidad de encontrar al átomo dentro de la región de interacción  $(-4w_0/\sqrt{2}, 4w_0/\sqrt{2})$  al tiempo  $t_f = 21w_0\sqrt{2}/v_0$ . La probabilidad de atrapamiento no es despreciable para tiempos tan largos como  $t_f$ , aunque tiende a cero conforme  $w_0$  se incrementa. Este efecto explica parcialmente el que  $T(w_0)$  no alcance el valor de  $1/2$  en las resonancias de transmisión. El otro factor relacionado con esto último y con esta probabilidad no despreciable de atrapamiento se debe a las diferentes condiciones iniciales usadas en la referencia [64]. De particular importancia es la dispersión relativa en momento, pues nuestros paquetes de onda no están bien localizados en momento (ver la ecuación (3.47)) mientras que los de la referencia [64] tienen  $\Delta_p/p_0 = 1/3$  con  $\Delta_p$  la desviación estándar en momento y  $p_0$  el momento promedio, ambos al tiempo  $t = 0$ . Por lo tanto, una desviación estándar relativa grande en momento puede dar lugar a una atenuación de las resonancias de transmisión. Un efecto similar fue encontrado en la referencia [64], donde se notó que una desviación estándar más grande en momento tiende a atenuar y suavizar las resonancias de  $T(w_0)$  en las funciones modo mesa y  $\text{sech}^2$  para desintonamiento cero.

La figura (3.11c) muestra la probabilidad de emisión  $P_{em}(w_0) = 1 - P_e(w_0)$ . Notamos que las resonancias están claramente marcadas para el caso de desintonamiento cero ( $\delta_L = 0$ ) y que también están presentes, aunque no tan pronunciadas, para desintonamiento azul ( $\delta_L = g_0/16 > 0$ ). El caso de desintonamiento rojo ( $\delta_L = -g_0/16 < 0$ ) tiene resonancias marcadas cuando  $w_0$  es más pequeño que  $\Delta$ , pero desaparecen rápidamente conforme  $\Delta$  se hace más grande que  $w_0$ . Las diferencias con los resultados de las secciones anteriores se pueden entender por medio

de la ecuación (3.11). En el régimen que estamos discutiendo ahora, la parte real del traslape  $\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle$  es apreciable, pues  $|\psi_{-n}(t)\rangle$  y  $|\psi_{+n}(t)\rangle$  son respectivamente reflejada y transmitida considerablemente. Finalmente notamos que, para todos los valores del desentonamiento estudiados,  $P_e(w_0)$  tiende lentamente a los valores correspondientes de secciones anteriores conforme  $w_0$  se hace más grande que  $\Delta$ .

Nuestros resultados pueden ser comparados con los de la referencia [69] donde se usan estados estacionarios con energía bien definida para describir al sistema. En esa referencia se calculó la probabilidad de emisión para una función modo gaussiana como la nuestra, para estados estacionarios con energía  $Mv_0^2/2$  y para valores de  $w_0$  que corresponden a la región entre 0 y 43 [nm] en nuestros resultados. Para estos estados estacionarios las resonancias en la probabilidad de emisión siempre alcanzan un valor máximo de  $1/2$ , decrecen en amplitud conforme  $w_0$  crece y prácticamente adquieren el valor estacionario de  $1/2$  cuando  $w_0 = 43$  [nm]. Nuestros resultados muestran que para paquetes gaussianos como los nuestros la probabilidad de emisión siempre es menor a  $1/2$  y tiende al valor estacionario de  $1/2$  lentamente. De forma similar a  $T(w_0)$ , esta diferencia puede ser debida a la dispersión en posición y momento del paquete de ondas inicial, ver las ecuaciones (3.46) y (3.47), pues los paquetes se pueden expresar como superposición de estados estacionarios que en general no todos son resonantes para el mismo  $w_0$ . Notamos que el efecto de esta dispersión en posición y momento en la probabilidad de emisión aparece por medio del traslape  $\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle$ , ver la ecuación (3.11).

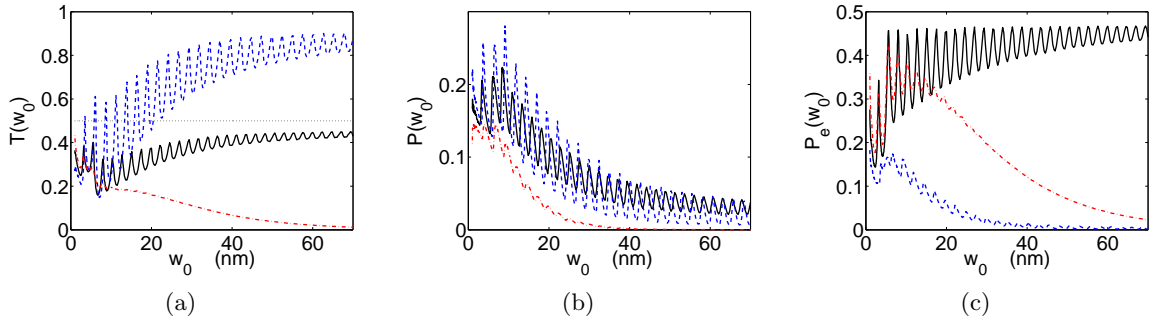


Figura 3.11: La figura (3.11a) muestra la probabilidad  $T(w_0)$  de que el átomo sea transmitido a través del campo de la cavidad. La figura (3.11b) ilustra la probabilidad de encontrar al átomo en la región de interacción  $(-4w_0/\sqrt{2}, 4w_0/\sqrt{2})$ . La figura (3.11c) muestra la probabilidad de emisión  $P_e(w_0)$  (igual a 1 menos la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado). En todas las figuras la cantidad en cuestión aparece como función de la cintura  $w_0$  del modo gaussiano al tiempo  $t_f = 21w_0\sqrt{2}/v_0$  para  $Mv_0^2/2 = \hbar g_0/100$ . La líneas azules segmentadas corresponden al desentonamiento  $\delta_L = g_0/16 > 0$ , las líneas negras sólidas corresponden a desentonamiento cero y las líneas rojas punteadas-segmentadas corresponden al desentonamiento  $\delta_L = -g_0/16 < 0$ . La cintura  $w_0$  aparece en nanómetros.

Las figuras (3.12a) y (3.12b) muestran respectivamente las entropías lineales de los operadores de densidad de los grados de libertad de CM y del campo como función de  $w_0$ . Recordamos que la entropía lineal del operador de densidad de los grados de libertad internos del átomo es igual a la del campo. Como estas cantidades dependen del traslape  $\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle$

y de la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado (ver las ecuaciones (3.13) y (3.14)), pueden ser afectadas enormemente. Cuando hay desintonamiento cero ( $\delta_L = 0$ ) los efectos resonantes están claramente marcados y el estado reducido tiende a un estado máximamente mezclado conforme  $w_0$  crece. Cuando hay desintonamiento rojo ( $\delta_L = -g_0/16 < 0$ ) el comportamiento oscilatorio de las entropías es menos pronunciado y desaparece conforme  $w_0$  crece. En este caso el estado reducido primero tiende a un estado máximamente mezclado y finalmente se acerca asintóticamente a un estado puro conforme  $w_0$  crece. El caso de desintonamiento azul ( $\delta_L = g_0/16 > 0$ ) exhibe un comportamiento oscilatorio de menor amplitud que persiste para valores más grandes de  $w_0$ . Notamos que este último resultado concuerda con el comportamiento exhibido por  $P_{em}(w_0)$  en la figura (3.11c). Finalmente, observamos que los resultados de secciones anteriores se recuperan para los tres valores del desintonamiento presentados conforme  $w_0$  se hace más grande que  $\Delta$ .

La figura (3.12c) muestra el enredamiento de formación  $E_F$  entre los grados de libertad internos del átomo y el campo como función de  $w_0$ . Esta cantidad también está determinada por  $P_e(w_0)$  y el traslape  $\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle$ , ver las ecuaciones (3.15)-(3.17). Se puede ver que  $E_F$  tiene una estructura complicada en la que es cero sólo para un número discreto de  $w_0$ . Por lo tanto, los grados de libertad internos del átomo y del campo están enredados para los tres valores del desintonamiento presentados. Esta situación contrasta con los resultados de las secciones anteriores, pues se encontró que estos grados de libertad no estaban enredados asintóticamente. Otras consecuencias de estos resultados en este régimen de resonancias de transmisión es que el sistema no exhibe enredamiento tripartita genuino para desintonamiento cero y el sistema no está en un estado producto cuando el desintonamiento es distinto de cero. Sin embargo, notamos que los resultados de secciones anteriores se recuperan conforme  $w_0$  se hace más grande que  $\Delta$ .

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la evolución temporal de un átomo de dos niveles con su centro de masa cuantizado en una dimensión e interactuando con un campo eléctrico cuantizado de un solo modo con perfil gaussiano. Se tomó como estado inicial del sistema aquél en que el campo se encuentra en el estado de vacío, el átomo está en el estado excitado y el estado del movimiento de centro de masa de éste está descrito por un paquete de ondas gaussiano de mínima incertidumbre. Como consecuencia, la base utilizada describe al sistema como una superposición de dos funciones de onda  $\psi_{\pm n}(z, t)$ .

En la primera parte, el movimiento de CM del átomo tenía una desviación estándar inicial de la posición mucho más pequeña que la cintura del campo de la cavidad. Por lo tanto, el sistema estaba fuera del régimen de resonancias de transmisión. El análisis se hizo para varios valores del desintonamiento entre la frecuencia de transición atómica y el campo y para varios valores de la velocidad inicial promedio del átomo. Las funciones de onda  $\psi_{\pm n}(z, t)$  y funciones de densidad de probabilidad de la posición correspondientes evolucionan de tal manera que asintóticamente pueden preservar estructuras gaussianas o pueden presentar estructuras tipo eco. Se mostró explícitamente que en los regímenes intermedio y de átomos fríos la probabilidad de emisión y el enredamiento del sistema difieren grandemente del caso en que el movimiento de centro de masa se describe clásicamente como  $z = v_0 t + \mu$ .



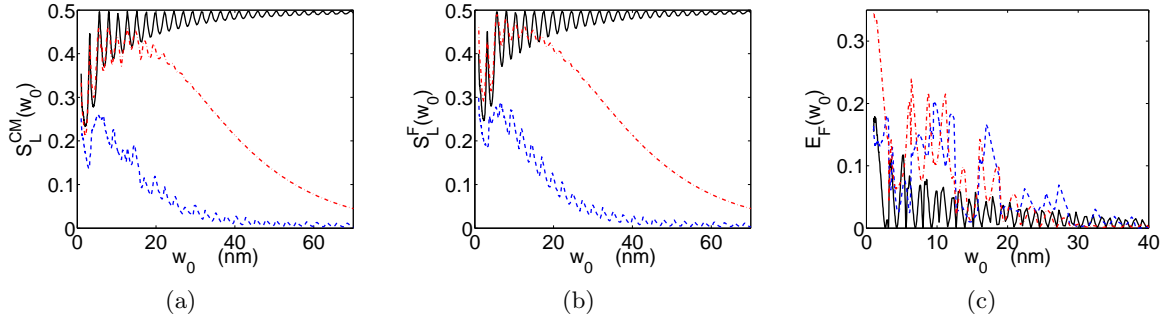


Figura 3.12: Las figuras (3.12a), (3.12b) y (3.12c) muestran respectivamente las entropías lineales de los operadores de densidad de los grados de libertad de CM y del campo y el enredamiento de formación entre los grados de libertad internos del átomo y el campo como función de la cintura  $w_0$  del modo gaussiano al tiempo  $t_f = 21w_0\sqrt{2}/v_0$  para  $Mv_0^2/2 = \hbar g_0/100$ . La entropía lineal de los grados de libertad internos es igual a la de la figura (3.12b) (ver la ecuación (3.14) y el párrafo que le sigue). En el intervalo que va de 40 a 70 nanómetros el enredamiento de formación para todos los valores del desintonamiento decrece a cero (no se muestra con el propósito de ilustrar mejor la región presentada). Las líneas azules segmentadas corresponden al desintonamiento  $\delta_L = g_0/16$ , las líneas negras sólidas corresponden al caso de desintonamiento cero y las líneas rojas punteadas-segmentadas corresponden al desintonamiento  $\delta_L = -g_0/16$ . La cintura  $w_0$  está en nanómetros

En el caso de desintonamiento cero y fuera del régimen de resonancias de transmisión, observamos que en el régimen de átomos fríos la probabilidad de emisión no exhibe las bien conocidas oscilaciones de Rabi, es siempre menor que uno y toma el valor final de  $1/2$  una vez que el átomo deja la región de interacción. Además, se observó lo que parece ser el inicio de las oscilaciones de Rabi para la velocidad promedio inicial más alta que se consideró. Se mostró explícitamente que en los regímenes intermedio y de átomos fríos el sistema completo presenta enredamiento tripartita genuino, un comportamiento totalmente diferente al caso en que se describe el movimiento de centro de masa clásicamente, puesto que los grados de libertad internos del átomo y el campo están en un estado mixto separable.

En los casos con desintonamiento distinto de cero considerados y afuera del régimen de resonancias de transmisión, observamos que para desintonamiento azul el átomo siempre es transmitido a través del campo de la cavidad, mientras que en el caso de desintonamiento rojo el átomo todavía puede ser reflejado considerablemente para energías cinéticas promedio iniciales ligeramente mayores que la energía de acoplamiento átomo-campo. En ambos casos el átomo deja la cavidad en el estado excitado y todo el sistema se encuentra en un estado producto tal que  $|\psi_{+n}(t)\rangle = |\psi_{-n}(t)\rangle$ . Notamos que en los casos de desintonamiento considerados y fuera del régimen de resonancias de transmisión la aproximación adiabática semiclásica describe cualitativamente bien las propiedades del sistema, excepto en el caso de probabilidades de transmisión para desintonamiento rojo y energía cinética promedio del átomo ligeramente mayor que la energía de acoplamiento átomo-cavidad.

En la segunda parte estudiamos las propiedades del sistema en el régimen de resonancias de transmisión. Para el estado inicial considerado con energía cinética promedio suficientemente

pequeña, observamos que la relación entre dos parámetros determinan si se está en este régimen o no: la cintura  $w_0$  del modo gaussiano y el desviación estándar en posición  $\Delta$  de los paquetes de onda gaussianos iniciales. Si  $w_0$  es más pequeña o comparable a  $\Delta$ , entonces el sistema está en el régimen mencionado y muchas propiedades toman valores que difieren enormemente de los obtenidos fuera del régimen de resonancias de transmisión. Los resultados muestran que estas propiedades recuperan los valores correspondientes de la primera parte conforme  $w_0$  crece y se vuelve más grande que  $\Delta$ . El origen de estas diferencias yace en el traslape  $\langle \psi_{+n}(t) | \psi_{-n}(t) \rangle$ , puesto que la mayoría de las propiedades del sistema dependen de esa cantidad y su valor depende de cómo se compara  $w_0$  con  $\Delta$ . Este traslape es cero cuando  $w_0$  es mucho más grande que  $\Delta$ , pero toma valores no despreciables cuando  $w_0 \lesssim \Delta$ . En este caso el tuneo y la reflexión respectivamente por los potenciales repulsivos y atractivos que experimenta el átomo se vuelven dominantes. Es meritorio mencionar que para tiempos largos hay una probabilidad no despreciable de encontrar al átomo en la región de interacción, un hecho que desaparece conforme  $w_0$  crece y se hace más grande que  $\Delta$ . Además, es importante notar que una desviación estándar relativa grande en el momento puede dar lugar a una atenuación considerable de las resonancias para la probabilidad de transmisión a través del campo para todos los valores del desentonamiento.

También se encontró que muchas propiedades son afectadas por el desentonamiento  $\delta_L$  entre la frecuencia del campo y la frecuencia de transición atómica. Cuando  $\delta_L \neq 0$ , las oscilaciones tienden a ser menos pronunciadas y desaparecen más rápido cuando se les compara con el caso resonante. Esto sucede especialmente en el caso  $\delta_L < 0$ . Este comportamiento se encontró para todas las propiedades del sistema, excepto la probabilidad de ser transmitido a través del campo para el caso  $\delta_L > 0$  y para el enredamiento de formación para el caso  $\delta_L \neq 0$ . Además, los resultados de la referencia [64] concuerdan con los nuestros.

En el régimen de resonancias de transmisión el enredamiento y grado de mezcla se ven afectados considerablemente para todos los valores del desentonamiento. Aquí no hay enredamiento tripartita genuino para  $\delta_L = 0$ , excepto para ciertos valores discretos de  $w_0$ . Además, el sistema no está asintóticamente en un estado producto si  $\delta_L \neq 0$ . Esto se debe al hecho de que los grados de libertad internos del átomo y el campo están enredados para todos los valores del desentonamiento. Además, todas las reducciones bipartitas del sistema son estados mixtos con algún grado de enredamiento. Es importante mencionar que el enredamiento tripartita genuino para  $\delta_L = 0$  y los estados producto para  $\delta_L \neq 0$  se recuperan conforme  $w_0$  crece y se hace más grande que  $\Delta$ .

Esperamos que los resultados encontrados sean cualitativamente válidos para otras funciones modo parecidas a la gaussiana que aquí se tomó, como por ejemplo el perfil  $\text{sech}^2$ . Este no es el caso de otros perfiles con discontinuidades como la función mesa, pues ya se ha observado que las discontinuidades dan lugar a una dinámica con propiedades distintas [64].

Vamos a cerrar este capítulo discutiendo qué tan factible es observar experimentalmente los resultados aquí presentados utilizando las cavidades que se tienen actualmente (año 2010). El primer (y probablemente más importante) efecto que no hemos considerado y que puede afectar considerablemente la dinámica del sistema es la disipación. Esto es, los espejos de una cavidad electromagnética no son perfectos y hay pérdida de fotones a través de ellos. Además, el átomo puede emitir espontáneamente fotones en modos *fuera* de la cavidad, puesto que, en general, las cavidades son abiertas. Para ver qué tan importante pueden ser estos efectos vamos a considerar

los parámetros experimentales de dos cavidades, una para transiciones atómicas en el rango óptico y otra para transiciones atómicas en el rango de microondas.

Primero consideremos la cavidad electromagnética de [70] y que corresponde a transiciones atómicas en el rango óptico. En esos experimentos se tiene una tasa de emisión espontánea  $\gamma = 2\pi \times 3 \times 10^6$  Hz, una tasa de pérdida de fotones a través de los espejos de la cavidad igual a  $\kappa = 2\pi \times 1.5 \times 10^6$  Hz, una intensidad de acoplamiento átomo-campo  $g_0 = 2\pi \times 16 \times 10^6$  Hz y la cintura del campo de la cavidad es  $w_0 = 29 \times 10^{-6}$  m. Los experimentos se llevan a cabo con rubidio 85 que tiene una masa igual a  $1.4 \times 10^{-25}$  Kg y se utiliza una frecuencia de transición atómica  $\omega_A = 2 \times \pi \times 3.8 \times 10^{14}$  s. Entonces tenemos que la escala de tiempo para que el átomo emita espontáneamente un fotón es  $\tau_{ES} = 1/\gamma = 5 \times 10^{-8}$  s, mientras que la escala de tiempo para que se pierda un fotón a través de los espejos es  $\tau_{PF} = 1/\kappa = 11 \times 10^{-8}$  s.

Ahora estimamos la velocidad que debe tener el átomo para que inicialmente tenga una energía cinética igual a la mitad de la energía de acoplamiento átomo-campo:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{\hbar g_0}{2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\hbar g_0}{M}} \simeq 27 \times 10^{-2} \text{ m/s} . \quad (3.48)$$

Se sigue que la temperatura del átomo es de

$$T = \frac{\frac{1}{2}Mv_0^2}{k_B} = 3.6 \times 10^{-4} [K] , \quad (3.49)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Además, estimamos la distancia que tiene que recorrer el átomo como la longitud de la región en donde el campo toma valores apreciables (recordar que el campo tiene un perfil gaussiano)

$$d = 8 \frac{w_0}{\sqrt{2}} = 1.6 \times 10^{-4} \text{ m} . \quad (3.50)$$

Entonces podemos estimar el tiempo que le toma al átomo cruzar la región en donde el campo toma valores apreciables como sigue:

$$t_d \sim \frac{d}{v_0} = 6 \times 10^{-4} \text{ s} . \quad (3.51)$$

Luego el número  $N_{ES}$  de veces que el átomo emite espontáneamente un fotón durante su trayecto es

$$N_{ES} \sim \frac{t_d}{\tau_{ES}} \sim 10^4 , \quad (3.52)$$

mientras que el número de fotones  $N_{PE}$  que se pierden a través de los espejos durante el trayecto del átomo es

$$N_{PE} \sim \frac{t_d}{\tau_{PE}} \sim 10^3 . \quad (3.53)$$

De esta manera, vemos que los efectos disipativos son muy importantes con los esquemas experimentales que se tienen actualmente y alterarían considerablemente la dinámica presentada en este trabajo.

Ahora consideremos la cavidad electromagnética de [20] y que corresponde a transiciones atómicas en el rango de microondas. En esos experimentos se tiene una tasa de emisión espontánea despreciable, la escala de tiempo en la cual se pierde un fotón a través de los espejos es  $\tau_{PE} \sim 10^{-3}$  s, la intensidad de acoplamiento átomo-campo es  $g_0 = 2\pi \times 50 \times 10^3$  Hz y la cintura del campo de la cavidad es  $w_0 = 6 \times 10^{-3}$  m. Los experimentos también se llevan a cabo con rubidio 85, pero usando una frecuencia de transición atómica  $\omega_A = 2 \times \pi \times 51.1 \times 10^9$  s.

Ahora estimamos la velocidad que debe tener el átomo para que inicialmente tenga una energía cinética igual a la mitad de la energía de acoplamiento átomo-campo:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{\hbar g_0}{2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\hbar g_0}{M}} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ m/s} . \quad (3.54)$$

Se sigue que la temperatura del átomo es de

$$T = \frac{\frac{1}{2}Mv_0^2}{k_B} = 1.1 \times 10^{-6} \text{ [K]} . \quad (3.55)$$

Además, estimamos la distancia que tiene que recorrer el átomo como la longitud de la región en donde el campo toma valores apreciables (recordar que el campo tiene un perfil gaussiano)

$$d = 8 \frac{w_0}{\sqrt{2}} = 3.4 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (3.56)$$

Entonces podemos estimar el tiempo que le toma al átomo cruzar la región en donde el campo toma valores apreciables como sigue:

$$t_d \sim \frac{d}{v_0} = 2.3 \text{ s} . \quad (3.57)$$

Luego el número de fotones  $N_{PE}$  que se pierden a través de los espejos durante el trayecto del átomo es

$$N_{PE} \sim \frac{t_d}{\tau_{PE}} \sim 10^3 . \quad (3.58)$$

De esta manera, vemos que, a pesar de que el tiempo de vida de un fotón es mucho mayor en este caso, los efectos disipativos son muy importantes. Además de los efectos disipativos mencionados arriba, también se necesita considerar el efecto de la gravedad, pues puede acelerar al átomo.

Como el acoplamiento átomo-campo  $g_0$  es proporcional a  $1/\sqrt{V}$  con  $V$  el volumen de la cavidad, por lo expuesto arriba se podría pensar que disminuyendo el tamaño de la cavidad se podrían ver experimentalmente estos resultados, pues el acoplamiento átomo-campo sería más grande y, por lo tanto, el átomo podría tener una velocidad inicial  $v_0$  mayor, la gravedad tendría menos efecto y el átomo tendría que recorrer menos distancia ( $w_0$  sería más pequeño). Sin embargo, a la hora de disminuir el volumen de la cavidad también disminuye el tiempo de vida de un fotón dentro de la cavidad y, por lo tanto, las tasas de disipación aumentan. De hecho, para la realización experimental se ha pensado utilizar cavidades con otras geometrías que posiblemente permitan observar los efectos predichos en un futuro cercano [21].



# Capítulo 4

## Dos átomos

En este capítulo primero consideraremos dos átomos en posiciones fijas que interactúan colectivamente con todos los modos del campo electromagnético y que están forzados por el campo eléctrico de un láser. Inicialmente nos enfocamos en el caso en que no hay campo del láser. Plantearemos la ecuación maestra que describe la evolución temporal del operador de densidad de los dos átomos y obtendremos la solución analítica para los casos en que el campo se encuentra en el estado de vacío o en un estado térmico con temperatura muy alta. Después usaremos estas soluciones para estudiar las propiedades del sistema de dos átomos para ciertas condiciones iniciales. En particular, se tiene el objetivo de investigar cómo se pueden enredar los dos átomos si empiezan en un estado separable y si interactúan sólo a través del campo electromagnético. Además, se quiere ver qué tan robusto puede ser este enredamiento. Posteriormente añadiremos un láser que estará forzando al sistema de dos átomos y determinaremos analíticamente la solución estacionaria de la ecuación maestra correspondiente. Utilizaremos esta solución para estudiar diversas propiedades del sistema, entre las cuales destaca nuevamente el enredamiento. Finalmente cerraremos el capítulo cuantizando el movimiento de centro de masa de los dos átomos y determinando los efectos de esto en las tasas de disipación y de decaimiento del enredamiento. Para esto introduciremos un método que nos permite describir aproximadamente la evolución del operador de densidad de un sistema cuando la evolución de algunos grados de libertad está determinada por ciertas partes del hamiltoniano. Al final presentaremos las conclusiones.

### 4.1. El sistema de estudio

Consideramos un sistema compuesto por las siguientes partes:

1. Dos átomos idénticos de dos niveles:

Tenemos dos átomos idénticos de dos niveles con frecuencia de transición  $\omega_A$  fijos en posiciones posiblemente distintas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ . Una situación experimental que puede corresponder a esto consiste en tener a los dos átomos confinados en dichas posiciones mediante una trampa dipolar óptica y/o magnética [16, 73] de tal manera que las funciones de onda que describen los grados de libertad externos de los átomos toman valores apreciables en

regiones de longitud mucho menor que el resto de las longitudes del sistema como, por ejemplo, la longitud de onda  $\lambda_A$  asociada a la transición atómica (esto es para poder considerar que los átomos están fijos en  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ ). Nótese que la transición atómica asociada a la trampa debe ser distinta a la transición atómica de los dos niveles que estamos considerando. Esta situación experimental se puede combinar con esquemas de electrodinámica cuántica en cavidades [18, 60]. Esto es para garantizar que hay una transición atómica privilegiada (los dos niveles de los átomos). Además, se puede considerar el límite de *mala cavidad* [18, 60] cuando se quiera eliminar adiabáticamente el modo de la cavidad (de ahí el término *mala cavidad*).

Aquí es pertinente hacer un comentario sobre qué significa que los átomos estén fijos en posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ . Esto a su vez nos lleva a discutir la distinguibilidad de los átomos. Supongamos primero que  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ . Consideramos que los grados de libertad externos de un átomo están descritos al tiempo  $t$  por  $|\psi_1(t)\rangle$ , mientras que los del otro átomo están descritos por  $|\psi_2(t)\rangle$ . Además, suponemos que  $\psi_j(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{r} | \psi_j(t) \rangle$  ( $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ) son funciones de onda altamente concentradas en  $\mathbf{r}_j$  que no se traslapan ( $j = 1, 2$ ), esto es, para todo  $t$  tenemos que

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{si } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| > \epsilon \quad (j = 1, 2), \quad (4.1)$$

donde  $0 < \epsilon \ll |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Nótese que  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  serían los valores esperados de la posición de centro de masa de cada átomo. Entonces podemos pensar que los átomos están fijos en  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , es innecesario el uso del postulado de simetrización y podemos tratar a los átomos como partículas distinguibles cuando  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ . Por esta razón nos referiremos al átomo  $j$  como aquél que está fijo en la posición  $\mathbf{r}_j$ . Para el caso en que los dos átomos están fijos en la misma posición estas etiquetas son arbitrarias y el estado que describe a los dos átomos deberá tener la simetría correcta dependiendo si son bosones o fermiones.

Una base ortonormal para el espacio de estados del átomo  $j$  es

$$\mathbf{B}_j = \{ |j : +\rangle, |j : -\rangle \}, \quad (4.2)$$

donde  $|j : +\rangle$  y  $|j : -\rangle$  denotan los estados excitado y base del átomo  $j$ , respectivamente.

Como los dos átomos tienen dos niveles, son equivalentes a dos partículas de espín  $1/2$  [1]. Por consiguiente, una base ortonormal para el espacio de estados de los dos átomos es la base desacoplada de momento angular, misma que se obtiene tomando el producto tensorial de las bases en (4.2):

$$\mathbf{B}' = \{ |++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle \}, \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} |++\rangle &\equiv |1 : +\rangle \otimes |2 : +\rangle, & |+-\rangle &\equiv |1 : +\rangle \otimes |2 : -\rangle, \\ |-+\rangle &\equiv |1 : -\rangle \otimes |2 : +\rangle, & |--\rangle &\equiv |1 : -\rangle \otimes |2 : -\rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

En lugar de considerar la base desacoplada, también podemos hacer uso de la base acoplada de momento angular compuesta por el triplete y el singulete:

$$\mathbf{B} = \{ |1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle, |0, 0\rangle \}, \quad (4.5)$$

donde

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &\equiv |++\rangle, & |1, 0\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \\ |1, -1\rangle &\equiv |--\rangle, & |0, 0\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle). \end{aligned} \quad (4.6)$$

En particular,  $\mathbf{B}$  es la base que se debe usar para tratar el caso en que los dos átomos se encuentran en la misma posición, pues cuenta ya con kets totalmente simétricos y anti-simétricos. Además, veremos que en la mayoría de los casos la base del triplete y el singlete permite interpretar los resultados fácilmente y expresarlos de forma más compacta.

El hamiltoniano libre de los dos átomos es

$$H_A = \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_3, \quad (4.7)$$

donde  $\sigma_3$  está definido por

$$\sigma_3 = \sigma_{31} + \sigma_{32}, \quad (4.8)$$

y  $\sigma_{3j}$  son los operadores de inversión atómica individuales

$$\sigma_{3j} = |j: +\rangle\langle j: +| - |j: -\rangle\langle j: -|. \quad (4.9)$$

El átomo  $j$  tiene asociado un operador de momento dipolar eléctrico  $\mathbf{d}_j$ . Como cada átomo tiene dos niveles, éstos se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{d}_{01}\sigma_{+j} + \mathbf{d}_{01}^*\sigma_{-j}, \quad (4.10)$$

donde los operadores de transición atómica  $\sigma_{\pm j}$  de cada átomo están dados por

$$\sigma_{\pm j} = |j: \pm\rangle\langle j: \mp|, \quad (4.11)$$

y hemos tomado

$$\mathbf{d}_{01} = \langle 1: +|\mathbf{d}_1|1: -\rangle = \langle 2: +|\mathbf{d}_2|2: -\rangle. \quad (4.12)$$

Nótese que (4.12) es consecuencia de que los átomos sean idénticos y tengan dos niveles.

Dado que un sistema de dos niveles es equivalente a una partícula de espín 1/2, es natural preguntarse qué relación guardan los operadores definidos arriba con los operadores de momento angular. Si  $S_{1j}$ ,  $S_{2j}$  y  $S_{3j}$  son las componentes del momento angular asociado al átomo  $j$ ,  $S_{\pm j}$  son los correspondientes operadores de ascenso y descenso del átomo  $j$  y se identifica la base (4.2) con la base de eigenvectores de  $S_{3j}$ , entonces es fácil concluir que

$$S_{3j} = \frac{\hbar}{2}\sigma_{3j}, \quad S_{\pm j} = \hbar\sigma_{\pm j}. \quad (4.13)$$



## 2. Los modos del campo electromagnético cuántico:

Vamos a suponer que los átomos se encuentran en el espacio libre o en una cavidad electromagnética abierta tal que el ángulo sólido subtendido por ésta es muy pequeño (La cavidad es introducida para poder modificar la densidad de modos en el ángulo sólido subtendido por ésta. Esto puede facilitar la realización de átomos de dos niveles. El ángulo sólido pequeño es para que los modos a los lados de la cavidad sean aproximadamente los mismos que en el caso de espacio libre.). Vamos a describir la interacción átomos-campo electromagnético cuántico en la aproximación de longitud de onda larga. Entonces los átomos interactúan con todos los modos del campo electromagnético cuántico con frecuencia  $\omega$  menor o igual que una frecuencia de corte  $\omega_c$  o, equivalentemente, con longitud de onda mayor o igual que una longitud de onda de corte  $\lambda_c$ . Aquí  $\omega_c$  y  $\lambda_c$  deben satisfacer la condición  $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c \gg r_a$  donde  $r_a$  es el diámetro promedio de cada átomo. Por ejemplo, se puede tener  $r_a \sim 2a_0$  y  $\lambda_c = 200a_0 \sim 10^{-8}$  metros con  $a_0$  el radio de Bohr, lo que implica que el átomo puede interactuar con radiación en la región del ultravioleta, visible, infrarrojo, microondas y radio.

El campo electromagnético cuántico va a ser responsable de la aparición del proceso de emisión espontánea. De ahora en adelante nos referiremos al campo electromagnético cuántico como el reservorio.

Vamos a encerrar al sistema de dos átomos en una caja cúbica *grande* de volumen  $V$  y de longitud de lado  $L$ . Una caja *grande* quiere decir que  $L$  es mucho más grande que todas las demás longitudes del sistema. El propósito de encerrar al sistema en esta caja consiste en poder pasar de un continuo a una cantidad discreta de modos del campo electromagnético. El caso del continuo se obtiene al hacer tender  $L$  a infinito.

Una base ortonormal para el espacio de estados del reservorio es la base de Fock:

$$\mathbf{B}_R = \{ |n_1, n_2, \dots\rangle : n_1, n_2, \dots = 0, 1, 2, \dots \} . \quad (4.14)$$

Aquí,  $n_j$  indica el número de fotones en el modo  $j$ .

El hamiltoniano libre del reservorio es

$$H_B = \sum_j \hbar\omega_j \left( a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) , \quad (4.15)$$

mientras que el campo eléctrico del reservorio está dado por un desarrollo en términos de ondas planas

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i \sum_j \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon_0 V}} a_j e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_j + h.c. . \quad (4.16)$$

Aquí  $a_j$  es el operador de aniquilación de un fotón en el modo  $j$ ,  $\mathbf{k}_j$  y  $\mathbf{e}_j$  son los vectores de onda y de polarización asociados al modo  $j$ , respectivamente, y  $\omega_j = c|\mathbf{k}_j|$  es la frecuencia angular del modo  $j$ . Además,  $\sum_j$  es una suma sobre todos los modos del reservorio y  $V$  es

el volumen de cuantización. El volumen de cuantización debe ser lo suficientemente grande de tal manera que permita la aproximación a un continuo de modos:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} (\cdot) \longleftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k \leq k_c} d^3 k (\cdot) \simeq \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k (\cdot) \quad \text{si } L \rightarrow +\infty, \quad (4.17)$$

Aquí  $k \leq k_c$  indica que la integral se lleva a cabo sobre el conjunto  $\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{k}^2 \leq k_c^2\}$  con  $k_c = \omega_c/c$  y  $\omega_c$  la frecuencia de corte. El símbolo  $\simeq$  en la extrema derecha de (4.17) indica que, cuando la integral sobre  $\mathbb{R}^3$  es no divergente,  $\omega_c$  es lo suficientemente grande de tal manera se puede extender la integración a todo  $\mathbb{R}^3$  sin alterar apreciablemente el valor de la integral.

Recordamos que un modo  $j$  está definido por un vector de onda  $\mathbf{k}$  y un vector de polarización asociado  $\mathbf{e}_j$ . Entonces la suma sobre todos los modos  $\sum_j$  se puede separar en una suma sobre todos los vectores de onda  $\sum_{\mathbf{k}}$  y una suma sobre todos los vectores de polarización correspondientes  $\sum_{\mathbf{e}(\mathbf{k})}$ , esto es,  $\sum_j (\cdot) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{e}(\mathbf{k})} (\cdot)$ .

Vamos a suponer que el estado inicial del reservorio es de la forma

$$\rho_B(0) = \sum_j \sum_{n_j=0}^{+\infty} p(n_1, n_2, \dots) |n_1, n_2, \dots\rangle \langle n_1, n_2, \dots|, \quad (4.18)$$

donde  $p(n_1, n_2, \dots) \in [0, 1]$  y  $\sum_j \sum_{n_j=0}^{+\infty} p(n_1, n_2, \dots) = 1$ . Esto es, vamos a suponer que el estado inicial del reservorio es una mezcla de estados estacionarios de  $H_B$ .

Además, vamos a suponer que el valor esperado  $N_j = \text{Tr}[\rho_B(0) a_j^\dagger a_j]$  de fotones en el modo  $j$  depende sólo de la frecuencia angular  $\omega_j$  y no de la dirección del vector de onda  $\mathbf{k}_j$  ni del vector de polarización  $\mathbf{e}_j$ :  $N_j = N(\omega_j)$ . En particular,  $N(\omega_A)$  es el valor esperado del número de fotones en cualquier modo con frecuencia angular  $\omega_A$ . Notamos que esta situación corresponde a tener radiación isotrópica y es consistente con tener a los átomos en el espacio libre.

Algunos ejemplos de operadores de densidad que satisfacen las condiciones mencionadas arriba son el vacío

$$\rho_B(0) = |0, 0, \dots\rangle \langle 0, 0, \dots|, \quad (4.19)$$

y los estados térmicos

$$\rho_B(0) = \frac{e^{-\beta H_B}}{\text{Tr}_B(e^{-\beta H_B})} = \sum_j \sum_{n_j=0}^{+\infty} p(n_1, n_2, \dots) |n_1, n_2, \dots\rangle \langle n_1, n_2, \dots|, \quad (4.20)$$

con  $\beta = 1/(k_B T)$ ,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura de equilibrio del reservorio y

$$p(n_1, n_2, \dots) = \prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}). \quad (4.21)$$

## 3. Un campo eléctrico clásico monocromático:

Vamos a suponer que los dos átomos están forzados por un láser monocromático y que el campo eléctrico asociado a éste se puede expresar en la forma

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}) \left[ \bar{\mathcal{E}}_L e^{-i\omega_L t} + \bar{\mathcal{E}}_L^* e^{i\omega_L t} \right], \quad (4.22)$$

donde  $\bar{\mathcal{E}}_L$  es un vector que contiene la polarización del campo,  $g(\mathbf{r})$  es una función real que determina la estructura del campo y  $\omega_L$  es la frecuencia del láser. Por ejemplo,  $\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t)$  podría describir una onda estacionaria si se toma  $g(\mathbf{r}) = \cos(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r})$ . En la situación experimental de electrodinámica cuántica en cavidades el campo del láser podría corresponder al modo privilegiado de la cavidad.

Además, vamos a suponer que

$$g_1 \equiv \mathbf{d}_{01} \cdot \bar{\mathcal{E}}_L \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

En todo lo que sigue designaremos por  $\delta_L$  el desentonamiento entre la frecuencia del láser  $\omega_L$  y la frecuencia de transición atómica  $\omega_A$ , esto es,

$$\delta_L = \omega_L - \omega_A. \quad (4.24)$$

El hamiltoniano que describe al sistema con las componentes descritas arriba en la aproximación de longitud de onda larga y en la representación del dipolo eléctrico es

$$H(t) = H_A + H_B + V_{AB} + V_{AL}(t), \quad (4.25)$$

donde  $V_{AB}$  es la interacción dipolar eléctrica entre los dos átomos y el reservorio

$$V_{AB} = -\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_2), \quad (4.26)$$

mientras que  $V_{AL}(t)$  es la interacción dipolar eléctrica entre los dos átomos y el láser

$$V_{AL}(t) = -\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{r}_1, t) - \mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{r}_2, t). \quad (4.27)$$

Recordamos que  $H(t)$  es el hamiltoniano en la aproximación de longitud de onda larga y en la representación del dipolo eléctrico del siguiente sistema: dos átomos de dos niveles en posiciones fijas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  interactuando con todos los modos del campo electromagnético cuántico (consistentes con la aproximación de longitud de onda larga) y con un campo de un láser monocromático. El campo electromagnético cuántico se trata como un reservorio que se encuentra en una mezcla de estados de Fock (por ejemplo, el vacío o un estado térmico). Además, recordamos que este modelo puede describir dos situaciones experimentales. La primera consiste en tener a dos átomos (de dos niveles) confinados mediante una trampa dipolar óptica y/o magnética (la transición atómica asociada a la trampa debe ser distinta a la de los dos niveles) interactuando con el campo de un láser en el espacio libre. La segunda consiste en tener a dos átomos confinados mediante una trampa dipolar óptica y/o magnética (la transición atómica asociada a la trampa debe ser

distinta a la de los dos niveles) en una cavidad electromagnética de ángulo sólido pequeño e interactuando con el campo de un láser que coincide con el modo privilegiado de la cavidad.

En todo lo que sigue vamos a representar el operador de densidad del sistema completo por  $\rho(t)$ , mientras que  $\rho_A(t)$  y  $\rho_B(t)$  denotarán los operadores de densidad de los dos átomos y del reservorio, respectivamente. Estos últimos se obtienen de trazar  $\rho(t)$  sobre los grados de libertad del reservorio y sobre los grados de libertad de los dos átomos, respectivamente.

Vamos a suponer que el estado inicial del sistema es de la forma

$$\rho(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0) . \quad (4.28)$$

Esto es, el sistema inicialmente se encuentra en un estado separable. Recordamos que esta condición es necesaria para poder aplicar el formalismo de la ecuación maestra de Born-Markov-secular.

Para estudiar el sistema descrito arriba primero vamos a considerar el caso en que no hay un láser que está forzando a los átomos. Esto nos permitirá identificar los cambios cuando el láser sea introducido.

## 4.2. Dos átomos interactuando con un reservorio

En esta sección vamos a suponer que no hay un láser que esté forzando a los dos átomos. Entonces el hamiltoniano que describe al sistema compuesto por los dos átomos y el reservorio se obtiene de tomar  $V_{AL}(t) = 0$  en (4.25):

$$H_{AB} = H_A + H_B + V_{AB} . \quad (4.29)$$

No nos interesa describir el sistema de dos átomos y reservorio, sólo nos interesa describir el subsistema de dos átomos. Entonces tenemos un sistema abierto (los dos átomos) interactuando con un ambiente con un quasi-continuo de grados de libertad (el reservorio). Aplicando los resultados generales del Capítulo 1 (*El operador de densidad y sistemas abiertos*) al sistema de dos átomos más reservorio se pueden calcular los eigenoperadores de  $H_A$

$$\mathbf{d}_{01\sigma+1} , \mathbf{d}_{01\sigma+2} , \mathbf{d}_{01\sigma-1}^* , \mathbf{d}_{01\sigma-2}^* , \quad (4.30)$$

correspondientes respectivamente a las frecuencias de Bohr  $-\omega_A$ ,  $-\omega_A$ ,  $\omega_A$  y  $\omega_A$  (los eigenoperadores asociados a las frecuencias de Bohr  $\pm 2\omega_A$  y 0 son cero) y las funciones de autocorrelación del reservorio

$$\langle [E_{j_1}(\mathbf{r})]_I(t_1) [E_{j_2}(\mathbf{r}')]_I(t_2) \rangle = \delta_{j_1 j_2} \left[ c_{j_1}^{(vac)}(t_1 - t_2, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + c_{j_1}^{(th)}(t_1 - t_2, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right] , \quad (4.31)$$

donde

$$c_{j_1}^{(th)}(t_1 - t_2, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \left( \frac{\omega}{c} \right)^3 N(\omega) \cos[\omega(t_1 - t_2)] g_{j_1}(\omega, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) ,$$

$$\begin{aligned}
c_{j_1}^{(vac)}(t_1 - t_2, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) &= \frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 e^{-i\omega(t_1-t_2)} g_{j_1}(\omega, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \\
g_{j_1}(\omega, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) &= (1 - \delta_{j_1 3}) \frac{\text{sen}(x)}{x} + (1 - 3\delta_{j_1 3}) \frac{\cos(x) - \frac{\text{sen}(x)}{x}}{x^2}, \\
x &= \frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Aquí  $E_j(\mathbf{r})$  es la componente  $j$  del campo eléctrico,  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ ,  $I$  indica el esquema de interacción definido mediante la transformación unitaria  $\exp[-(i/\hbar)(H_A + H_B)t]$  y  $N(\omega)$  es el valor esperado del número de fotones en un modo con frecuencia  $\omega$  (recordamos que estamos suponiendo que el valor esperado del número de fotones en un modo con vector de onda  $\mathbf{k}_j$  y vector de polarización  $\mathbf{e}_j$  sólo depende de la magnitud de  $\mathbf{k}_j$ ). Además, notamos que hemos expresado las funciones de autocorrelación como la suma de una parte correspondiente al vacío  $c_{j_1}^{(vac)}$  más otra parte debida a la presencia de fotones  $c_{j_1}^{(th)}$ . Esta distinción es importante porque cada una decae en una escala de tiempo distinta.

Una vez hecho esto se pueden determinar el tensor de correlaciones espectrales, el disipador, el hamiltoniano de corrimiento Lamb y la ecuación maestra de Born-Markov-secular para el operador de densidad de los dos átomos usando nuevamente los resultados generales del Capítulo 1. Sólo falta verificar que se satisfacen las aproximaciones de Born, Markov y onda rotante. Esto lo haremos al final de esta sección y en este momento sólo mencionamos que sí son válidas. De esta manera, la evolución del operador de densidad  $\rho_A(t)$  de los dos átomos sí se puede describir aproximadamente mediante la ecuación maestra de Born-Markov-secular (en la primera forma estándar)

$$\frac{d}{dt}\rho_A(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_3 + H_{LS}, \rho_A(t) \right] + \mathcal{D}[\rho_A(t)]. \tag{4.33}$$

El disipador  $\mathcal{D}$  está dado por

$$\mathcal{D}(\rho) = \mathcal{D}_1(\rho) + \mathcal{D}_2(\rho) + \mathcal{D}_3(\rho), \tag{4.34}$$

donde  $\mathcal{D}_j$  describe la interacción del átomo  $j$  con el reservorio (está asociada con las funciones de autocorrelación del reservorio (4.32) en el mismo punto, esto es,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ )

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_j(\rho) &= \gamma_1 [N(\omega_A) + 1] \left( \sigma_{-j}\rho\sigma_{+j} - \frac{1}{2} \{ \sigma_{+j}\sigma_{-j}, \rho \} \right) \\
&\quad + \gamma_1 N(\omega_A) \left( \sigma_{+j}\rho\sigma_{-j} - \frac{1}{2} \{ \sigma_{-j}\sigma_{+j}, \rho \} \right) \quad (j = 1, 2), \tag{4.35}
\end{aligned}$$

y  $\mathcal{D}_3$  describe una interacción disipativa átomo-átomo a través del reservorio (está asociada con las funciones de autocorrelación del reservorio (4.32) en dos puntos distintos, esto es,  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ )

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_3(\rho) \\
&= \frac{3}{2}\gamma_1 [N(\omega_A) + 1] F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \left( \sigma_{-1}\rho\sigma_{+2} - \frac{1}{2} \{ \sigma_{+2}\sigma_{-1}, \rho \} + \sigma_{-2}\rho\sigma_{+1} - \frac{1}{2} \{ \sigma_{+1}\sigma_{-2}, \rho \} \right) \\
&\quad + \frac{3}{2}\gamma_1 N(\omega_A) F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \left( \sigma_{+1}\rho\sigma_{-2} - \frac{1}{2} \{ \sigma_{-2}\sigma_{+1}, \rho \} + \sigma_{+2}\rho\sigma_{-1} - \frac{1}{2} \{ \sigma_{-1}\sigma_{+2}, \rho \} \right).
\end{aligned}$$

(4.36)

Aquí  $\{\cdot, \cdot\}$  es el anti-conmutador,  $\gamma_1$  es exactamente igual a la tasa de emisión espontánea de un átomo que interactúa con el reservorio

$$\gamma_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4|\mathbf{d}_{01}|^2\omega_A^3}{3\hbar c^3}, \quad (4.37)$$

y la función  $F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  está definida por

$$F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \equiv \frac{d_\perp^2}{|\mathbf{d}_{01}|^2} \cdot \frac{\sin(x)}{x} + \left(3 \frac{d_\perp^2}{|\mathbf{d}_{01}|^2} - 2\right) \frac{\cos(x) - \frac{\sin(x)}{x}}{x^2}, \quad (4.38)$$

con

$$x = \frac{\omega_A}{c} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

Aquí  $d_\perp$  es la norma de la proyección de  $\mathbf{d}_{01}$  sobre el plano perpendicular a la línea que une a los dos átomos. En lo que sigue representaremos en ocasiones la función  $F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  por  $F_{12}$  y su gráfica se puede ver en la figura (4.1).

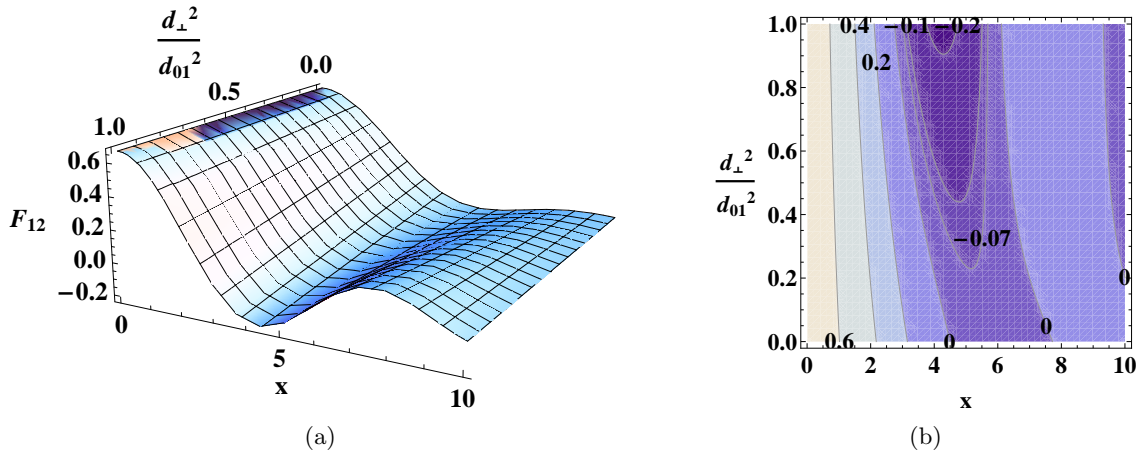


Figura 4.1: Gráficas de  $F_{12}$  como función de las cantidades adimensionales  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  y  $d_\perp^2/d_{01}^2$ . La figura (4.1a) muestra la grafica en tres dimensiones, mientras que la figura (4.1b) muestra los contornos 0.6, 0.4, 0.2, 0, -0.07, -0.1, -0.2 de  $F_{12}$ .

Notamos que  $F_{12}$  tiene una singularidad removible en  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  y que  $F_{12} \rightarrow 0$  si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow +\infty$ . Más aún, los valores máximo y mínimo absolutos de  $F_{12}$  son  $2/3$  y  $-0.2237$ . Éstos ocurren sólo en los puntos  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  (independientemente del valor de  $d_\perp$ ) y  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 4.233$  con  $d_\perp = |\mathbf{d}_{01}|$ , respectivamente, ver la figura (4.1).

El hamiltoniano de corrimiento Lamb  $H_{LS}$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$H_{LS} = \hbar\Delta_{+1}|1, 1\rangle\langle 1, 1| + \hbar\Delta_{+}|1, 0\rangle\langle 1, 0| + \hbar\Delta_{-1}|1, -1\rangle\langle 1, -1| + \hbar\Delta_{-}|0, 0\rangle\langle 0, 0|, \quad (4.39)$$

donde

$$\begin{aligned}
\Delta_{\pm 1} &= 2|\mathbf{d}_{01}|^2 S(\pm\omega_A), \\
S(\omega') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3\pi\hbar c^3} \text{P.V.} \int_0^{+\infty} d\omega \omega^3 \left[ \frac{N(\omega)}{\omega + \omega'} - \frac{N(\omega) + 1}{\omega - \omega'} \right], \\
\Delta_{\pm} &= -\frac{\gamma_1}{2\pi\omega_A^3} \text{P.V.} \int_0^{+\infty} d\omega \omega^3 \left( \frac{1}{\omega - \omega_A} + \frac{1}{\omega + \omega_A} \right) \cdot \left\{ 1 \pm \frac{3}{2} \cdot F(\omega, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Aquí  $F(\omega, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  se obtiene de (4.38) reemplazando  $\omega_A$  por  $\omega$ .

Dada la forma en que se ha expresado  $H_{LS}$  en la ecuación (4.39), podemos interpretar a  $H_{LS}$  como un hamiltoniano que introduce distintos corrimientos de energía a los eigenvalores del hamiltoniano libre  $H_A$  de los dos átomos (recordar que la base acoplada (4.5) está compuesta por eigenvectores de  $H_A$ ). Sin embargo, es conveniente reexpresar  $H_{LS}$  como la suma de un múltiplo de  $H_A$  más un término adicional para ver cómo la interacción con el reservorio induce una modificación de la frecuencia de transición de cada átomo y para determinar qué dinámica introducen los términos adicionales. Para hacer esto se procede de la siguiente manera:

1. Se reexpresan los sumandos de  $H_{LS}$  en términos de la base desacoplada (4.3):

$$\begin{aligned}
H_{LS} &= +\hbar\Delta_{+1}|+\rangle\langle+| \otimes |+\rangle\langle+| + \hbar\frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2} [ |+\rangle\langle+| \otimes |-\rangle\langle-| + |-\rangle\langle-| \otimes |+\rangle\langle+| ] \\
&+ \hbar\Delta_{-1}|-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-| + \hbar\frac{\Delta_+ - \Delta_-}{2} [ |+\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle+| \otimes |+\rangle\langle-| ].
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Notamos que aquí se omitió el índice  $j$  en  $|\pm\rangle$ . Para identificar qué operadores corresponden al átomo  $j$  se recuerda que el lado izquierdo de un producto tensorial corresponde al átomo 1, mientras que el lado derecho corresponde al átomo 2.

2. En el lado derecho de la ecuación (4.41) se reexpresa el cuarto sumando en términos de los operadores de transición de cada átomo (4.11) y se suma y se resta el término

$$\hbar\Delta_{+1}|+\rangle\langle+| \otimes |-\rangle\langle-| + \hbar\Delta_{-1}|-\rangle\langle-| \otimes |+\rangle\langle+|,$$

para obtener

$$\begin{aligned}
H_{LS} &= +\hbar\Delta_{+1}|1: +\rangle\langle 1: +| - \hbar\left(\Delta_{+1} - \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2}\right) |+\rangle\langle+| \otimes |-\rangle\langle-| \\
&+ \hbar\Delta_{-1}|1: -\rangle\langle 1: -| - \hbar\left(\Delta_{-1} - \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2}\right) |-\rangle\langle-| \otimes |+\rangle\langle+| \\
&+ \hbar\frac{\Delta_+ - \Delta_-}{2} (\sigma_{+1}\sigma_{-2} + \sigma_{-1}\sigma_{+2}).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

3. Se identifica que

$$\begin{aligned} \Delta_{+1} - \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2} &= \frac{\gamma_1}{2\pi\omega_A^3} \text{P.V.} \int_0^{+\infty} d\omega \cdot \omega^3 [2N(\omega) + 1] \cdot \left[ \frac{1}{\omega + \omega_A} - \frac{1}{\omega - \omega_A} \right], \\ &= - \left[ \Delta_{-1} - \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2} \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

y que

$$\frac{1}{2}\sigma_3 = |+\rangle\langle+| \otimes |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-|,$$

para reexpresar los sumandos que involucran a (4.43) en el lado derecho de (4.42)

$$\begin{aligned} H_{LS} &= + \hbar\Delta_{+1}|1: +\rangle\langle 1: +| + \hbar \left( \Delta_{+1} - \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2} \right) \left( \frac{1}{2}\sigma_3 - \sigma_{31} \right) \\ &\quad + \hbar\Delta_{-1}|1: -\rangle\langle 1: -| + \hbar \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{2} (\sigma_{+1}\sigma_{-2} + \sigma_{-1}\sigma_{+2}). \end{aligned} \quad (4.44)$$

4. Se identifica que

$$\frac{1}{2}(\Delta_{+1} - \Delta_{-1}) = \Delta_{+1} - \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2}, \quad (4.45)$$

y se usa para ver que

$$\begin{aligned} \hbar\Delta_{+1}|1: +\rangle\langle 1: +| + \hbar\Delta_{-1}|1: -\rangle\langle 1: -| - \hbar \left( \Delta_{+1} - \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2} \right) \sigma_{31} \\ = \frac{\hbar}{2}(\Delta_{+1} + \Delta_{-1})\mathbb{I}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

con  $\mathbb{I}$  el operador identidad en el espacio de estados de los dos átomos.

5. Se usan (4.45) y (4.46) en (4.44) para obtener la expresión final de  $H_{LS}$ :

$$\begin{aligned} H_{LS} &= \frac{\hbar}{2}(\Delta_{+1} + \Delta_{-1})\mathbb{I} + \frac{\hbar}{2} \left( \Delta_{+1} - \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2} \right) \sigma_3 \\ &\quad + \frac{\hbar}{2}(\Delta_+ - \Delta_-)(\sigma_{+1}\sigma_{-2} + \sigma_{-1}\sigma_{+2}). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ahora vamos a dar algunas definiciones que utilizarán los resultados de arriba y que servirán tanto para simplificar la expresión de  $H_{LS}$  como para separar sus partes en términos que explicaremos más adelante.

Definimos

$$\begin{aligned} \Omega(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) &\equiv \frac{1}{2}(\Delta_+ - \Delta_-), \\ &= -\frac{\gamma_1}{2\pi\omega_A^3} \text{P.V.} \int_0^{+\infty} d\omega \left( \frac{1}{\omega - \omega_A} + \frac{1}{\omega + \omega_A} \right) \omega^3 \cdot \frac{3}{2}F(\omega, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4}\gamma_1 \left[ -\frac{d_\perp^2}{|\mathbf{d}_{01}|^2} \frac{\cos(x)}{x} + \left( 3\frac{d_\perp^2}{|\mathbf{d}_{01}|^2} - 2 \right) \left( \frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{\cos(x)}{x^3} \right) \right], \\
\Delta_A &\equiv \Delta_{+1} - \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2} = \Delta_{LS} + \Delta_{SS}, \\
\Delta_{LS} &= \frac{\gamma_1}{2\pi\omega_A^3} \text{P.V.} \int_0^{+\infty} d\omega \cdot \omega^3 \left( \frac{1}{\omega + \omega_A} - \frac{1}{\omega - \omega_A} \right), \\
\Delta_{SS} &= 2\frac{\gamma_1}{2\pi\omega_A^3} \text{P.V.} \int_0^{+\infty} d\omega \omega^3 N(\omega) \left( \frac{1}{\omega + \omega_A} - \frac{1}{\omega - \omega_A} \right), \\
H_{dd} &\equiv \hbar\Omega(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) (\sigma_{+1}\sigma_{-2} + \sigma_{-1}\sigma_{+2}). \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Arriba  $x = \omega_A|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$ . La interacción con el reservorio provoca un corrimiento  $\hbar\delta_+$  de la energía del estado  $|j : +\rangle$  de cada átomo y un corrimiento  $\delta_-$  de la energía del estado  $|j : -\rangle$  de cada átomo. La diferencia de estos dos corrimientos es  $\Delta_A$ :  $\Delta_A = \delta_+ - \delta_-$ . Notamos que  $\Delta_A$  tiene una parte  $\Delta_{LS}$  independiente de  $N(\omega)$  y otra  $\Delta_{SS}$  que depende de esta cantidad. La contribución  $\Delta_{LS}$  es debida al estado del vacío del reservorio y está asociada al corrimiento Lamb, mientras que la parte  $\Delta_{SS}$  es provocada por la presencia de fotones en el reservorio y está asociada al corrimiento Stark. Cabe mencionar que el método de la ecuación maestra de Born-Markov-secular no da toda la contribución no-relativista el corrimiento Lamb [18]. Por otra parte, la gráfica de la función  $\Omega(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)/\gamma_1$  se muestra en la figura (4.2). Nótese que diverge conforme  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+$  para la mayoría de los valores de  $d_\perp$ , pero que existen curvas en donde  $\Omega_{12}$  es cero.

Con estas definiciones podemos reexpresar (4.47) como sigue

$$H_{LS} = \frac{\hbar}{2}(\Delta_{+1} + \Delta_{-1})\mathbb{I} + \frac{\hbar}{2}\Delta_A\sigma_3 + H_{dd}. \tag{4.49}$$

Usando (4.49) reescribimos la ecuación maestra en (4.33) en su forma final

$$\frac{d}{dt}\rho_A(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar}{2}(\omega_A + \Delta_A)\sigma_3 + H_{dd}, \rho_A(t) \right] + \mathcal{D}[\rho_A(t)]. \tag{4.50}$$

Dado que ya tenemos la ecuación maestra que describe dos átomos idénticos de dos niveles que interactúan colectivamente con el campo electromagnético cuántico, uno debe preguntarse cuáles son los efectos de la interacción colectiva. A partir de (4.34)-(4.36), (4.48) y (4.50) hacemos las siguientes observaciones:

1. La interacción con el reservorio produce un corrimiento de las energías de  $H_A$  que se puede ver como una modificación de la frecuencia de transición de cada átomo en la que ésta pasa de  $\omega_A$  a  $\omega_A + \Delta_A$ .

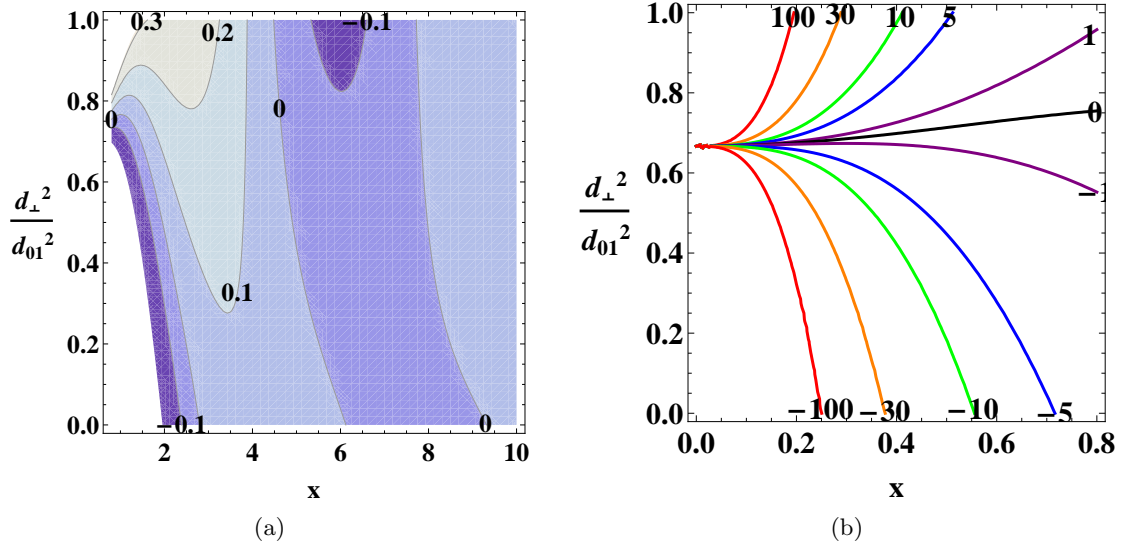


Figura 4.2: Gráficas de los contornos de  $\Omega(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)/\gamma_1$  como función de las cantidades adimensionales  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  y  $d_{\perp}^2/d_{01}^2$ . La figura (4.2a) muestra los contornos 0.3, 0.2, 0.1, 0, -0.1, mientras que la figura (4.2b) muestra los contornos 100, 30, 10, 5, 1, 0, -1, -5, -10, -30, -100.

2. La interacción con el reservorio produce dos interacciones efectivas átomo-átomo: una interacción coherente  $H_{dd}$  que corresponde a una interacción dipolo-dipolo y una interacción disipativa contenida en  $\mathcal{D}_3(\rho)$ .
3. Interpretamos la interacción coherente  $H_{dd}$  como un continuo intercambio de fotones entre los dos átomos. Esto es, se tiene la siguiente situación: el átomo 1 absorbe un fotón y después lo emite. Este fotón lo absorbe el átomo 2 y posteriormente también lo emite. Entonces el átomo 1 vuelve a absorber el fotón y después lo vuelve a emitir y así continúa el proceso.
4. Interpretamos la interacción disipativa contenida en  $\mathcal{D}_3(\rho)$  como un intercambio de fotones que finalmente se pierden. Esto es, se tiene el siguiente proceso: el átomo 1 absorbe un fotón y después lo emite. Este fotón lo absorbe el átomo 2 y posteriormente también lo emite. Sin embargo, el átomo 1 ya no absorbe el fotón y éste se pierde (se queda en el reservorio).
5. Si los átomos están muy separados ( $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow +\infty$ ), entonces

$$H_{dd} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_3(\rho) \rightarrow 0 ,$$

y se obtiene la ecuación maestra que describe a dos átomos interactuando con reservorios independientes [18].

A continuación vamos a discutir la validez de las aproximaciones de Born, Markov y onda rotante utilizadas en la deducción de la ecuación maestra (4.33). Además de justificar las aproximaciones mencionadas, esta discusión nos permitirá tener una idea sobre el orden de magnitud tanto de las diversas escalas de tiempo como de los diversos parámetros como la tasa de emisión espontánea.

### 1. Aproximación de Born:

Para determinar si esta aproximación es válida necesitamos analizar cómo es el acoplamiento entre los dos átomos y el reservorio. Usando las expresiones para  $\mathbf{d}_j$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  y  $V_{AB}$  dadas en (4.10), (4.16) y (4.26) vemos que la interacción entre el átomo  $j$  y el reservorio se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} -\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_j) &= -(\mathbf{d}_{01}\sigma_{+j} + \mathbf{d}_{01}^*\sigma_{-j}) \cdot \left( i \sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V}} a_l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}_j} \mathbf{e}_l + h.c. \right) \\ &= \sum_l \left( -i\mathbf{d}_{01} \cdot \mathbf{e}_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V}} e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}_j} \right) a_l \sigma_{+j} \\ &\quad + \sum_l \left( -i\mathbf{d}_{01}^* \cdot \mathbf{e}_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V}} e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}_j} \right) a_l \sigma_{-j} + h.c. . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Entonces la energía de acoplamiento de cada átomo con cada modo de  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  está determinada por las cantidades

$$-i\mathbf{d}_{01} \cdot \mathbf{e}_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V}} e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}_j} , \quad -i\mathbf{d}_{01}^* \cdot \mathbf{e}_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V}} e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}_j} , \quad (4.52)$$

y sus correspondientes complejos conjugados. Los módulos de las cantidades en (4.52) y sus complejos conjugados son menores o iguales a

$$g_c \equiv |\mathbf{d}_{01}| \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\epsilon_0 V}} , \quad (4.53)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia de corte. Recordamos que la suma  $\sum_j$  involucrada en la definición de  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  en (4.16) involucra todos los modos del campo eléctrico cuántico consistentes con la aproximación de longitud de onda larga. Esto es, involucra todos los modos con frecuencia  $\omega_l \leq \omega_c$  donde la longitud de onda de corte  $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c$  asociada a  $\omega_c$  es tal que  $\lambda_c$  es mucho mayor que el diámetro promedio del átomo que se está considerando. Como el volumen de cuantización  $V$  es mucho más grande que todas las longitudes del sistema, tenemos que las cantidades en (4.53) son mucho menores que la energía  $\hbar\omega_A$  asociada a la transición atómica. Luego la energía de acoplamiento de cada átomo con cada modo es mucho menor que  $\hbar\omega_A$ . Se sigue que cada átomo está acoplado débilmente con cada modo del reservorio y, por lo tanto, la aproximación de Born es válida (ver el Capítulo 1).

A continuación vamos a dar un ejemplo para ilustrar los hechos mencionados en el párrafo anterior. En todo lo que sigue vamos a usar unidades de Joules [J], metro [m], Coulomb [C], segundo [s], Hertz [Hz], electrón volt [eV], Newton [N] y Kelvin [K].

Supongamos que tenemos dos átomos de hidrógeno y que los dos niveles son

$$|j : +\rangle = |n = 2, l = 1, m = 1\rangle \quad \text{y} \quad |j : -\rangle = |n = 1, l = 0, m = 0\rangle . \quad (4.54)$$

Entonces la energía asociada a la transición atómica es

$$\hbar\omega_A = -\frac{E_I}{2^2} + E_I = 1.6 \times 10^{-18} \text{ [J]} , \quad (4.55)$$

(consultar [1] para ver las energías de un átomo de hidrógeno y la energía de ionización  $E_I = 13.6$  [eV] de éste), mientras que

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}_{01}| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r \, q\mathbf{r} \langle n = 2, l = 1, m = 1 | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | n = 1, l = 0, m = 0 \rangle \right| , \\ &= 6 \times 10^{-30} \text{ [C m]} , \end{aligned} \quad (4.56)$$

con  $q$  el valor absoluto de la carga de un electrón (consultar [1] para ver las expresiones de las funciones de onda  $\langle \mathbf{r} | n, l, m \rangle$ ). Usando el valor  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  [C<sup>2</sup>/(Nm<sup>2</sup>)], tomando una longitud de onda de corte  $\lambda_c = 20a_0$  ( $a_0$  es el radio de Bohr) y considerando que el volumen de cuantización es 1 [m<sup>3</sup>] se sigue de (4.53) y (4.56) que

$$g_c = 2 \times 10^{-32} \text{ [J]} . \quad (4.57)$$

A partir de (4.55) y (4.57) observamos que  $g_c \ll \hbar\omega_A$ . Por lo tanto, el acoplamiento es débil.

## 2. Aproximación de Markov:

De todas las aproximaciones ésta es probablemente la más difícil de verificar porque tenemos que determinar y comparar varias escalas de tiempo. Primero vamos a determinar la escala de tiempo  $\tau_A$  en la cual  $(\rho_A)_I(t)$  varía. Recordamos que  $I$  se refiere al esquema de interacción definido mediante la transformación unitaria  $\exp[-(i/\hbar)(H_A + H_B)t]$ .

A partir de la ecuación maestra (4.50) y las expresiones para  $H_{dd}$  y el disipador en (4.34)-(4.36) y (4.48) vemos que los elementos de matriz de  $(\rho_A)_I(t)$  van a variar en una escala de tiempo determinada por las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{|\Delta_A|}, \quad \frac{1}{|\Omega_{12}|}, \quad \frac{1}{\gamma_1[N(\omega_A) + 1]}, \quad \frac{1}{\gamma_1 N(\omega_A)}, \\ &\left| \frac{1}{\frac{3}{2}\gamma_1[N(\omega_A) + 1]F_{12}} \right|, \quad \left| \frac{1}{\frac{3}{2}\gamma_1 N(\omega_A)F_{12}} \right|. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Nótese que no aparece  $1/\omega_A$  porque  $H_A$  desaparece en el esquema de interacción considerado. Tenemos que  $\tau_A$  está dada por el mínimo de estas cantidades. Arriba observamos que  $|F_{12}| \leq 2/3$ , ver figura (4.1). Entonces se sigue que

$$\tau_A \sim \min \left\{ \frac{2}{|\Delta_A|}, \quad \frac{1}{|\Omega_{12}|}, \quad \frac{1}{\gamma_1[N(\omega_A) + 1]} \right\} . \quad (4.59)$$

Aquí es preciso hacer varias observaciones. Para la mayoría de los valores de  $d_{\perp}$  se tiene que

$$\lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+} |\Omega_{12}| = +\infty, \quad (4.60)$$

ver la figura (4.2). Esto implica que  $\tau_A$  puede tomar valores muy pequeños si los átomos están muy cerca. Además, la tercera cantidad en el lado derecho de (4.59) puede ser muy pequeña si  $N(\omega_A)$  toma valores muy grandes. Entonces esperamos que la aproximación de Markov no sea válida si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  es muy pequeño o  $N(\omega_A)$  es muy grande.

Ahora vamos a determinar la escala de tiempo  $\tau_B^{(vac)}$  en la cual  $c_j^{(vac)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  decae a cero, ver (4.32). La primera observación que hacemos es que  $c_j^{(vac)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  diverge, esto es, la integral no existe. Aquí es donde debemos recordar que la integral no llegaba a  $+\infty$ , sino que, la integral iba de 0 a la frecuencia de corte  $\omega_c$ , ver (4.17) y el párrafo que le sigue. De esta manera, vemos que reemplazando  $+\infty$  por  $\omega_c$  y haciendo el cambio de variable  $x = \omega/\omega_c$  en (4.32) obtenemos que

$$c_j^{(vac)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{c}\right)^3 \omega_c \int_0^1 dx x^3 e^{-i(\omega_c\tau)x} g_j(\omega_c x, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (4.61)$$

Como  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ , tenemos que  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$  ó  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Si  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$ , entonces  $g_j(\omega, 0) = 2/3$ . Por otra parte,  $g_j(\omega, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  es una función oscilatoria de  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  que decae a cero conforme esta cantidad crece. Luego  $c_j^{(vac)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rightarrow 0$  conforme la distancia  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  entre los átomos aumenta. En vista de estas observaciones, a partir de (4.61) podemos estimar  $c_j^{(vac)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_j^{(vac)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) &\simeq c_j^{(vac)}(\tau, 0), \\ &= \frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{c}\right)^3 \frac{2\omega_c}{3} \int_0^1 dx x^3 e^{-i(\omega_c\tau)x}, \\ &= \frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{c}\right)^3 \frac{2\omega_c}{3} \left[ \frac{6 - 6e^{-i\omega_c\tau}}{(\omega_c\tau)^4} - \frac{i6e^{-i\omega_c\tau}}{(\omega_c\tau)^3} + \frac{3e^{-i\omega_c\tau}}{(\omega_c\tau)^2} + \frac{ie^{-i\omega_c\tau}}{\omega_c\tau} \right]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Aquí observamos que el comportamiento de  $|c_j^{(vac)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)|$  está gobernado por  $1/(\omega_c\tau)^4$  en la región en  $0 < \omega_c\tau < 1$  y por  $1/(\omega_c\tau)$  en la región en  $1 \leq \omega_c\tau$ . Entonces, para determinar la escala de tiempo en la cual  $c_j^{(vac)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  decae a cero tenemos que analizar la función  $1/(\omega_c\tau)$  y considerar tiempos  $\tau \geq 1/\omega_c$ . Tenemos que

$$\frac{1}{\omega_c\tau} \leq 10^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad \tau \geq \frac{10^2}{\omega_c}. \quad (4.63)$$

Luego  $c_j^{(vac)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  decae a cero en una escala de tiempo

$$\tau_B^{(vac)} \sim \frac{10^2}{\omega_c}. \quad (4.64)$$

Para determinar la escala de tiempo  $\tau_B^{(th)}$  en el cual  $c_j^{(th)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  decae a cero es necesario tener la forma funcional de  $N(\omega)$ , ver (4.32). Vamos a considerar dos casos: el reservorio en el estado de vacío y el reservorio en un estado térmico, ver (4.19) y (4.20).

Primero vamos a considerar el caso en que el reservorio está en el estado de vacío. Entonces  $N(\omega) = 0$  para toda  $\omega$  y, por lo tanto,  $c_j^{(th)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = 0$ . Luego la aproximación de Markov va a ser válida siempre y cuando  $\tau_A \gg \tau_B^{(vac)}$ .

A partir de (4.59) y (4.64) vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_A}{\tau_B^{(vac)}} &\sim \min \left\{ \frac{1}{\gamma_1 [N(\omega_A) + 1]}, \frac{2}{|\Delta_A|}, \frac{1}{|\Omega_{12}|} \right\}, \\ &\sim \min \left\{ \frac{\omega_c}{10^2 \gamma_1}, \frac{\omega_c}{10^2 |\Delta_A|}, \frac{\omega_c}{10^2 |\Omega_{12}|} \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

En general se tiene que las primeras dos cantidades son mucho mayores a 1 (mayores que  $10^2$ ). Entonces, en el caso en que el reservorio se encuentra en el estado de vacío, la aproximación de Markov va a ser válida si y sólo si

$$\frac{\tau_A}{\tau_B^{(vac)}} \sim \frac{1}{|\Omega_{12}|} \sim \frac{\omega_c}{10^2 |\Omega_{12}|} \gg 1. \quad (4.66)$$

Notamos que la condición en (4.66) va a ser válida dependiendo de los valores que tomen  $\mathbf{d}_\perp$  y  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ , ver la figura (4.2). Por ejemplo, si se escoge  $\mathbf{d}_\perp$  tal que  $\Omega_{12} \simeq 0$ , entonces la aproximación de Markov siempre va a ser válida.

Para ilustrar (4.65) y (4.66) vamos a dar valores específicos a los parámetros. Suponemos que la transición atómica asociada a los dos niveles está en la región del óptico, esto es,  $\omega_A \sim 10^{15}$  [Hz]. Para este tipo transiciones la tasa de emisión espontánea  $\gamma_1$  es del orden de  $10^7 - 10^9$  [Hz], ver (4.37). Por ejemplo, usando los datos (4.55) y (4.56) para las transiciones del hidrógeno consideradas arriba obtenemos que  $\omega_A = 1.6 \times 10^{16}$  [Hz] y  $\gamma_1 = 7 \times 10^8$  [Hz] (aunque aquí la transición es en la región del ultravioleta). Por último, vamos a tomar una frecuencia de corte  $\omega_c$  del orden de  $10^{17}$  [Hz]. Este valor surge de estimar el diámetro medio  $d$  de cada átomo como dos veces el radio de Bohr y de considerar una longitud de onda de corte  $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c$  cien veces más grande que  $d$  (ver (4.17) y el párrafo que le sigue), esto es,  $d \sim 10^{-10}$  [m] y  $\lambda_c \sim 10^{-8}$  [m].

Resumiendo, vamos a considerar transiciones en el óptico:

$$\omega_A \sim 10^{15} \text{ [Hz]}, \quad \gamma_1 \sim 10^8 \text{ [Hz]}, \quad \omega_c \sim 10^{17} \text{ [Hz]}. \quad (4.67)$$

Con estos valores podemos evaluar del corrimiento  $\Delta_A$ , ver (4.48). Recordando que estamos considerando el caso en que el reservorio está en el estado de vacío, introduciendo la frecuencia de corte  $\omega_c$  (ver (4.17) y el párrafo que le sigue), haciendo el cambio de variable  $x = \omega/\omega_A$  y evaluando la integral numéricamente obtenemos que

$$\Delta_A = \Delta_{LS} = -\frac{\gamma_1}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\omega_c/\omega_A} dx \frac{x^3}{x^2 - 1} = -1.6 \times 10^{11} \text{ [Hz]}. \quad (4.68)$$

Nótese que el valor de (4.68) es altamente dependiente de la frecuencia de corte. El valor obtenido es una estimación no muy lejana de los valores experimentales y sirve para ilustrar que  $|\Delta_A| \ll \omega_A$ . Sin embargo, un cálculo teórico mejor fundamentado utilizaría las técnicas de renormalización establecidas a mediados del siglo XX.

A partir de (4.65), (4.67) y (4.68) vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_A}{\tau_B^{(vac)}} &\sim \min \left\{ \frac{\omega_A}{\gamma_1}, \frac{\omega_A}{|\Delta_A|}, \frac{\omega_A}{|\Omega_{12}|} \right\}, \\ &\sim \min \left\{ 10^7, 10^4, \frac{1}{\tau_B^{(vac)} |\Omega_{12}|} \right\}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Como se había anticipado arriba, la validez de la aproximación de Markov depende de la tercera condición en (4.69). En particular, para cualquier valor de  $d_{\perp}$

$$\frac{\tau_A}{\tau_B^{(vac)}} \sim \frac{1}{\tau_B^{(vac)} |\Omega_{12}|} \gtrsim 10^2 \quad \text{si } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \geq 10^{-8} \text{ [m]}. \quad (4.70)$$

Por lo tanto, para los parámetros considerados (4.67) la aproximación de Markov siempre es válida si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \geq 10^{-8} \text{ [m]}$ . Mencionamos que en los experimentos con átomos individuales que se pueden hacer actualmente (2010), la distancia entre átomos es del orden de una longitud de onda  $\lambda_A$  asociada a la transición atómica [23]. Para los parámetros dados arriba esto correspondería a una distancia entre átomos  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \sim 10^{-6} \text{ [m]}$ .

Ahora vamos a considerar el caso en que el reservorio está en un estado térmico a temperatura  $T$ , ver (4.20) y (4.21). Entonces

$$N(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad \left( \beta = \frac{1}{k_B T} \right). \quad (4.71)$$

Aquí  $k_B$  es la constante de Boltzmann.

Substituyendo (4.71) en (4.32) y haciendo el cambio de variable  $x = \beta\hbar\omega$  obtenemos que

$$\begin{aligned} c_j^{(th)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) &= \frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{\pi c^3 (\tau_B^{(th)})^4} \int_0^{+\infty} dx \frac{x^3 \cos\left(x \frac{\tau}{\tau_B^{(th)}}\right)}{e^x - 1} \times \\ &\times \left[ (1 - \delta_{j3}) \frac{\sin(y)}{y} + (1 - 3\delta_{j3}) \frac{\cos(y) - \frac{\text{sen}(y)}{y}}{y^2} \right], \end{aligned} \quad (4.72)$$

con  $y = x|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/(\tau_B^{(th)} c)$ . Hemos introducido la escala de tiempo

$$\tau_B^{(th)} \equiv \frac{\hbar}{k_B T} = \frac{7.6 \times 10^{-12}}{T} \text{ [s]}, \quad (4.73)$$

con  $T$  la temperatura en Kelvin [K].

A continuación vamos a ver que  $c_j^{(th)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  decae a cero en una escala de tiempo del orden de  $\tau_B^{(th)}$ . Recordamos que  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ .

El comportamiento de  $c_j^{(th)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  aparece en la figura (4.3). Ahí observamos que  $c_j^{(th)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  varía en una escala de tiempo del orden de  $\tau_B^{(th)}$  (es el tiempo en que  $c_j^{(th)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  reduce su valor máximo/mínimo a la mitad). Además, se ve que  $c_j^{(th)}/\xi$  como función de la cantidad adimensional  $\tau/\tau_B^{(th)}$  con  $\xi = 2\hbar / \left( 4\pi^2 \epsilon_0 c^3 \left[ \tau_B^{(th)} \right]^4 \right)$  se hace menor a 0.01 para cualquier valor de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  cuando  $\tau \gtrsim 10\tau_B^{(th)}$ . Luego podemos tomar como escala de tiempo en la cual  $c_j^{(th)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  decae a cero a  $\tau_B^{(th)}$ . Es importante mencionar que para temperaturas muy bajas ( $T \ll 1$  [K]) esperamos que la aproximación de Markov no sea válida, pues de (4.73) vemos que  $\tau_B^{(th)}$  puede llegar a ser muy grande.

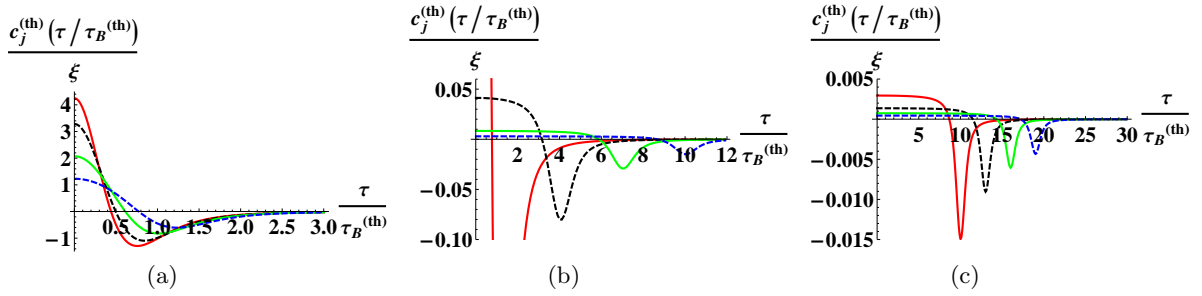


Figura 4.3: Gráficas de  $c_j^{(th)}(\tau, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/\xi$  como función de la cantidad adimensional  $\tau/\tau_B^{(th)}$  con  $\xi = 2\hbar / \left( 4\pi^2 \epsilon_0 c^3 \left[ \tau_B^{(th)} \right]^4 \right)$  y  $j = 1$ . La figura (4.3a) muestra los casos en que la cantidad adimensional  $\eta = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / \left[ \tau_B^{(th)} c \right]$  toma los valores  $\eta = 0.1$  (línea roja), 0.4 (línea negra segmentada), 0.7 (línea verde) y 1 (línea azul segmentada). La figura (4.3b) ilustra los casos  $\eta = 1$  (línea roja), 4 (línea negra segmentada), 7 (línea verde) y 10 (línea azul segmentada). La figura (4.3c) muestra los casos  $\eta = 10$  (línea roja), 13 (línea negra segmentada), 16 (línea verde) y 19 (línea azul segmentada).

Ya tenemos todos los elementos necesarios para determinar la validez de la aproximación de Markov. Ésta va a ser válida si y sólo si

$$\tau_B^{(th)}, \tau_B^{(vac)} \ll \tau_A, \quad (4.74)$$

digamos

$$100 \leq \frac{\tau_A}{\tau_B^{(th)}}, \frac{\tau_A}{\tau_B^{(vac)}}, \quad (4.75)$$



Para determinar si se satisfacen (4.75) vamos a usar los parámetros en (4.67). Con estos valores es fácil ver que

$$\frac{1}{\gamma_1 [N(\omega_A) + 1]} \geq 100\tau_B^{(th)} \quad \Leftrightarrow \quad T \gtrsim 0.1 \text{ [K]}. \quad (4.76)$$

Como habíamos anticipado, la ecuación maestra no es válida para temperaturas muy bajas porque  $\tau_B^{(th)}$  se comporta como  $1/T$ , ver (4.73).

La comparación de  $1/|\Omega_{12}|$  con  $\tau_B^{(th)}$  es mucho más complicada, pues depende de la separación  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  entre los dos átomos y del valor de  $d_\perp \in [0, |\mathbf{d}_{01}|]$ . A partir de la gráfica de  $\gamma_1/|\Omega_{12}|$  se puede observar que para cualquier elección de  $d_\perp$  y para  $T \geq 0.1$  [K] se tiene que

$$\frac{1}{|\Omega_{12}|} \gtrsim 100\tau_B^{(th)} \quad \text{si} \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \geq 1.3 \times \frac{\lambda_A}{2\pi} \sim 10^{-7} \text{ [m]}. \quad (4.77)$$

Aquí  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada a la transición atómica. Para distancias menores a  $1.3 \times \lambda_A/(2\pi)$  la dependencia en  $d_\perp$  es mucho más marcada, como se puede ver en la figura (4.4). A partir de la figura (4.4b) vemos que existen distancias y valores de  $d_\perp$  para las cuales  $1/|\Omega_{12}|$  no impone límites a la temperatura. Estos valores de  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  y  $d_\perp$  corresponden a aquellas cantidades que hacen que  $\Omega_{12} \simeq 0$ , ver la figura (4.2).

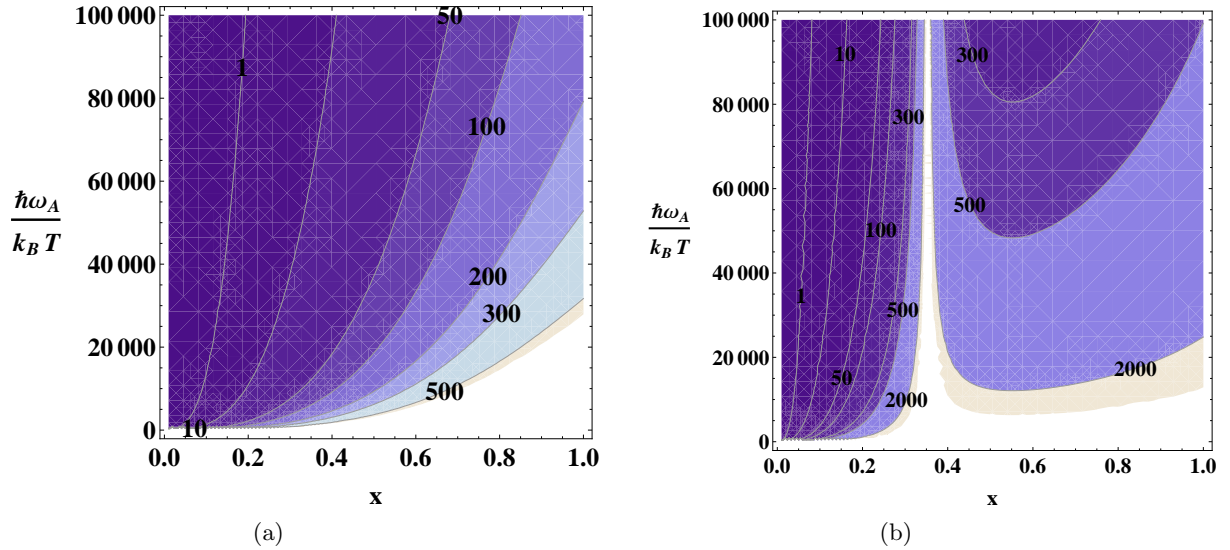


Figura 4.4: Gráficas de contornos de  $(1/|\Omega_{12}|)/\tau_B^{(th)}$  como función de las cantidades adimensionales  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  y  $\hbar\omega_A/(k_B T)$ . Las figuras (4.4a) y (4.4b) ilustran los casos  $d_\perp/|\mathbf{d}_{01}| = 1$  y  $0.692$ , respectivamente. La aproximación de Markov va a ser válida siempre y cuando se esté en una región donde  $(1/|\Omega_{12}|)/\tau_B^{(th)} \geq 100$  ó  $50$ .

Ahora vemos cómo se compara  $2/|\Delta_A|$  con  $\tau_B^{(th)}$ . Para temperaturas no muy bajas se tiene que  $\Delta_{LS} \geq \Delta_{SS}$ . Por ejemplo, para  $T = 100$  [K] se tiene que  $\Delta_{SS} \sim 1$  [Hz] si se evalúa la integral que define a  $\Delta_{SS}$  numéricamente (no es necesario introducir la frecuencia de corte  $\omega_c$ ), ver (4.48). Recordando que ya tenemos el límite (4.76) para la temperatura y usando (4.68) vemos que

$$\frac{2}{|\Delta_A|} \geq 100\tau_B^{(th)} \quad \Leftrightarrow \quad T \gtrsim 100 \text{ [K]}. \quad (4.78)$$

A partir de (4.59), (4.76) y (4.78) vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_A}{\tau_B^{(th)}} &\sim \frac{1}{\tau_B^{(th)}} \min \left\{ \frac{2}{|\Delta_A|}, \frac{1}{|\Omega_{12}|}, \frac{1}{\gamma_1[N(\omega_A) + 1]} \right\}, \\ &\gtrsim \min \left\{ 100, \frac{1}{|\Omega_{12}|} \right\} \quad \text{si } T \gtrsim 100 \text{ [K]}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Aquí notamos que la validez de la aproximación de Markov depende nuevamente de la distancia entre los átomos y del valor de  $d_\perp$ . En particular, se sigue de (4.77) y (4.79) que

$$\frac{\tau_A}{\tau_B^{(th)}} \gtrsim 100 \quad \text{si } T \gtrsim 100 \text{ [K]} \quad \text{y} \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gtrsim 10^{-7} \text{ [m]}. \quad (4.80)$$

Aquí es preciso hacer un comentario. Muchas veces se desprecia  $\Delta_A$  en la ecuación maestra o se absorbe en la frecuencia de transición  $\omega_A$  (recordar que  $|\Delta_A| \ll \omega_A$ ). En estos casos no se necesita comparar  $2/|\Delta_A|$  con  $\tau_B^{(th)}$ . Entonces vemos de (4.76) y (4.79) que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_A}{\tau_B^{(th)}} &\sim \frac{1}{\tau_B^{(th)}} \min \left\{ \frac{1}{|\Omega_{12}|}, \frac{1}{\gamma_1[N(\omega_A) + 1]} \right\}, \\ &\gtrsim \min \left\{ 100, \frac{1}{|\Omega_{12}|\tau_B^{(th)}} \right\} \quad \text{si } T \gtrsim 0.1 \text{ [K]} \quad \text{y se desprecia } \Delta_A. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Luego de (4.77) y (4.81) se sigue que

$$\frac{\tau_A}{\tau_B^{(th)}} \gtrsim 100 \quad \text{si } T \gtrsim 0.1 \text{ [K]}, \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gtrsim 10^{-7} \text{ [m]} \quad \text{y se desprecia } \Delta_A. \quad (4.82)$$

Aquí nos hemos referido a *despreciar*  $\Delta_A$  o *incorporar*  $\Delta_A$  a  $\omega_A$  como *despreciar*  $\Delta_A$ . Abajo seguimos con este uso.

Para terminar sólo falta ver qué sucede con  $\tau_B^{(vac)}$ . Primero notamos que (4.69) y (4.70) siguen siendo válidas, excepto por la cantidad  $\omega_A/\gamma_1 \sim 10^7$  en (4.69). Ésta se debe reemplazar por la siguiente:

$$\frac{1}{\gamma_1[N(\omega_A)+1]\tau_B^{(vac)}} = \frac{\omega_A}{\gamma_1[N(\omega_A) + 1]} \sim \left(1 - e^{-10^4/T}\right) 10^7, \quad (4.83)$$

Luego

$$\frac{1}{\frac{\gamma_1 [N(\omega_A)+1]}{\tau_B^{(vac)}}} \geq 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad T \lesssim 10^9 \text{ [K]} . \quad (4.84)$$

De esta manera, aparece un límite superior a la temperatura. Éste ya se había anticipado cuando mencionamos que  $N(\omega_A)$  no podía tomar valores muy grandes. Observamos que este límite superior a la temperatura impone una cota inalcanzable para experimentos con átomos fríos [16]. Por lo tanto, no vamos a considerar el requisito  $T \lesssim 10^9 \text{ [K]}$  de ahora en adelante. De (4.64), (4.69) y (4.84) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_A}{\tau_B^{(vac)}} &\sim \min \left\{ \frac{\omega_A}{\gamma_1 [N(\omega_A) + 1]}, \frac{\omega_A}{|\Delta_A|}, \frac{\omega_A}{|\Omega_{12}|} \right\}, \\ &\sim \min \left\{ 10^2, 10^4, \frac{1}{\frac{|\Omega_{12}|}{\tau_B^{(vac)}}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

A partir de (4.81) y (4.85) concluimos que, en el caso en que el reservorio se encuentra en un estado térmico a temperatura  $T$  y se usan los parámetros (4.67), la aproximación de Markov es válida si y sólo si

$$\frac{1}{|\Omega_{12}|} \gtrsim 100\tau_B^{(th, vac)} \quad \text{y} \quad 0.1 \text{ [K]} \lesssim T \quad \text{y} \quad \text{se desprecia } \Delta_A . \quad (4.86)$$

De (4.70) y (4.82) vemos que (4.86) se cumple si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gtrsim 10^{-7} \text{ [m]}$  (independientemente del valor de  $d_\perp$ ). Por otra parte, si se escoge  $d_\perp$  para cada  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  de tal manera que  $\Omega_{12} \simeq 0$ , entonces la aproximación de Markov siempre va a ser válida para el rango de temperaturas dado y para cualquier distancia entre los átomos.

### 3. Aproximación secular o de onda rotante:

Usando los resultados generales del Capítulo 1 tenemos que la escala de tiempo típica de la evolución intrínseca de los dos átomos es

$$\begin{aligned} \tau_S &= \max \left\{ \frac{1}{|\omega + \omega'|} : \omega, \omega' \in \{ 0, \pm\omega_A, \pm 2\omega_A \}, \omega' \neq -\omega \right\}, \\ &= \frac{1}{\omega_A}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

La cantidad en (4.87) generalmente es mucho menor que la escala de tiempo de evolución  $\tau_A$  de  $(\rho_A)_I(t)$ . Usando los datos (4.67) presentados arriba en la aproximación de Markov junto con (4.64) vemos que

$$\tau_S = \tau_B^{(vac)}. \quad (4.88)$$

Luego la aproximación de onda rotante es válida si la aproximación de Markov es válida.

De esta manera, concluimos que la ecuación maestra de Born-Markov-secular presentada arriba sí describe la dinámica del operador de densidad de los dos átomos cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Se consideran transiciones atómicas en el óptico.
2. Los átomos no están *demasiado cerca*, recordando que esta restricción desaparece cuando se escoge  $d_{\perp}$  para cada distancia  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  entre los átomos de tal manera que  $\Omega_{12} \simeq 0$ .
3. El reservorio está en el estado de vacío o en un estado térmico a temperatura  $0.1 \text{ [K]} \lesssim T$ .

Mencionamos que existen otros rangos de parámetros en donde puede ser válida la ecuación maestra. Estos ámbitos pueden deducirse a partir de las definiciones de  $\tau_A$ ,  $\tau_B^{(vac)}$  y  $\tau_B^{(th)}$  dadas arriba.

En lo que sigue vamos a hacer lo siguiente:

1. Incorporamos el corrimiento  $\Delta_A$  a  $\omega_A$ :  $\omega_A + \Delta_A \rightarrow \omega_A$ .
2. Despreciamos la interacción dipolo-dipolo  $H_{dd}$ . Como consecuencia de esto tenemos que la ecuación de Born-Markov-secular que usaremos (sin el término  $H_{dd}$ ) es válida para cualquier distancia entre los átomos (ver la discusión de arriba).
3. A pesar de despreciar  $H_{dd}$  nuestros resultados sí van a ser físicos para ciertas elecciones de  $d_{\perp}$  cuando  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c \leq 2.5$ . Esto se debe a que, dada  $x \leq 2.5$ , siempre se puede escoger  $d_{\perp} \in [0, |\mathbf{d}_{01}^2|]$  tal que  $H_{dd} = 0$ , ver (4.48) y la figura (4.2). Además, el despreciar  $H_{dd}$  nos va a permitir identificar qué efectos son debidos únicamente a la interacción disipativa entre los dos átomos.

Ahora pasamos al esquema de interacción (IP) definido por la transformación unitaria

$$U_0(t, 0) = \exp\{-i\omega_A \sigma_3 t/2\} . \quad (4.89)$$

En este IP la ecuación maestra en (4.33) toma la forma

$$\frac{d}{dt} \rho_A(t) = \mathcal{D}[\rho_A(t)] , \quad (4.90)$$

donde  $\rho_A(t)$  es el operador de densidad de los dos átomos en el IP. Recordamos que se ha despreciado la interacción dipolo-dipolo entre los dos átomos y que  $H_{dd} = 0$  para ciertas elecciones de  $d_{\perp}$  con  $x \leq 2.5$ .

Ahora vamos a resolver la ecuación maestra (4.90) para dos casos particulares. La ecuación maestra primero se reescribió como un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x}$  para los 16 elementos de matriz de  $\rho_A(t)$ . Aquí  $\mathbf{x}$  es un vector con los 16 elementos de matriz de  $\rho_A(t)$  y  $\mathbb{A}$  es una matriz compleja de coeficientes de  $16 \times 16$ , ver el Apéndice. El sistema de ecuaciones diferenciales se resolvió calculando los eigenvalores y eigenvectores de  $\mathbb{A}$  [77]. Este procedimiento se utilizó en el resto de las secciones para calcular las soluciones de otras ecuaciones maestras.

### 4.2.1. El caso del vacío

En esta sección vamos a suponer que el reservorio se encuentra en el estado de vacío, esto es,  $\rho_B(0) = |0, 0, \dots\rangle\langle 0, 0, \dots|$ . Entonces se tiene que  $N(\omega_A) = 0$ . Alternativamente, se puede suponer que el reservorio se encuentra en un estado térmico a una temperatura  $T$  tal que  $\hbar\omega_A/(k_B T) \geq 10$ , ver (4.20) y (4.21), pues en este caso se tendrá

$$N(\omega_A) = \frac{1}{e^{\hbar\omega_A/(k_B T)} - 1} < 10^{-3} .$$

Luego  $N(\omega_A) \simeq 0$  en estos casos. Por ejemplo, si  $\omega_A \sim 10^{15}$  [Hz] corresponde a una transición en el óptico y  $T \sim 300$  [K] (temperatura ambiente), entonces  $N(\omega_A) \sim 10^{-13}$  y es claro que  $N(\omega_A)$  se puede tomar como cero.

En este caso la ecuación maestra (4.90) es analíticamente soluble. La solución general para el caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$  es:

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle &= \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle e^{-2\gamma_1 t} , \\
\langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle &= \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle e^{-\tau_3 \gamma_1 t} , \\
\langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle &= \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle e^{-\gamma_1 t} , \\
\langle 0, 0 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle &= \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle e^{-\tau_1 \gamma_1 t} , \\
\langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle &= \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle e^{-2\tau_4 \gamma_1 t} \\
&\quad + \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle \frac{1 + \frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{1 - \frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} (e^{-2\tau_4 \gamma_1 t} - e^{-2\gamma_1 t}) , \\
\langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle &= \left\{ \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle + \left[ 1 + \frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right] \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle \right\} e^{-\tau_4 \gamma_1 t} \\
&\quad - \left[ 1 + \frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right] \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle e^{-\tau_3 \gamma_1 t} , \\
\langle 0, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle &= \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle e^{-\gamma_1 t} , \\
\langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, -1 \rangle &= 1 - \langle 1, 1 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle - \langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle - \langle 0, 0 | \rho_A(t) | 0, 0 \rangle , \\
\langle 0, 0 | \rho_A(t) | 1, -1 \rangle &= \left\{ \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle - \left[ 1 - \frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right] \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle \right\} e^{-\tau_2 \gamma_1 t} \\
&\quad + \left[ 1 - \frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right] \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle e^{-\tau_1 \gamma_1 t} , \\
\langle 0, 0 | \rho_A(t) | 0, 0 \rangle &= \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle e^{-2\tau_2 \gamma_1 t} \\
&\quad + \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle \frac{1 - \frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{1 + \frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} (e^{-2\tau_2 \gamma_1 t} - e^{-2\gamma_1 t}) , \tag{4.91}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right], & \tau_2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3}{2} F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right], \\ \tau_3 &= \frac{3}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right], & \tau_4 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2} F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right].\end{aligned}\quad (4.92)$$

El resto de los elementos de matriz de  $\rho_A(t)$  se pueden obtener usando la hermiticidad de  $\rho_A(t)$ .

A partir de (4.91) notamos que, para la base del triplete y el singulete, las tasas de decoherencia son

$$\gamma_1, \tau_1\gamma_1, \tau_2\gamma_1, \tau_3\gamma_1, \tau_4\gamma_1, \quad (4.93)$$

mientras que las tasas de disipación (o tasas de decaimiento de poblaciones) son

$$2\gamma_1, 2\tau_2\gamma_1, 2\tau_4\gamma_1. \quad (4.94)$$

Observamos que los tiempos de decoherencia (iguales a 1 sobre las tasas de decoherencia), pueden ser el doble de largos que los tiempos de disipación (iguales a 1 sobre las tasas de disipación).

La solución (4.91) es válida cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$ . El caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  no es físico, pero es de interés teórico ver que sucede en esa situación. Para obtener la solución en el caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  se debe tomar el límite lateral derecho  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+$  de (4.91) y reemplazar la ecuación para  $\langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle$  por la siguiente:

$$\langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle = [ \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle + 2\gamma_1 t \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle ] e^{-2\gamma_1 t}. \quad (4.95)$$

De (4.91) notamos que la solución estacionaria (i.e., la solución cuando  $t \rightarrow +\infty$ ) cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$  es

$$\rho_A^{ST} = |1, -1\rangle \langle 1, -1|. \quad (4.96)$$

Esto es, el reservorio finalmente deja a cada átomo en su respectivo estado base. Sin embargo, de (4.95) observamos que la solución estacionaria cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  es

$$[\rho_A^{ST}]_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - P_{00} & \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle \\ 0 & 0 & \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle & P_{00} \end{pmatrix}, \quad (4.97)$$

con  $P_{00} = \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle$ . Recordamos que  $[\rho_A^{ST}]_{\mathbf{B}}$  es la representación matricial de  $\rho_A^{ST}$  en la base del triplete y singulete  $\mathbf{B}$ .

De (4.97) observamos que, a diferencia del caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$ , hay coherencias presentes en (4.97) si el elemento de matriz  $\langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle$  es distinto de cero. Entonces, un subespacio coherente (i.e., un subespacio invulnerable a la disipación) del sistema de dos átomos está generado por  $\{ |1, -1\rangle, |0, 0\rangle \}$  en el caso en que  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ . Más aún, la concurrencia  $C^{ST}$  de (4.97) se puede calcular fácilmente

$$C^{ST} = |P_{00}|. \quad (4.98)$$

Por lo tanto, el estado estacionario del sistema está enredado y el grado de enredamiento medido por la concurrencia es igual a la población inicial del estado  $|0, 0\rangle$  cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ . Este

resultado se entiende fácilmente, pues las transiciones del estado antisimétrico  $|0,0\rangle$  a cualquier estado simétrico están prohibidas cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ .

Ahora vamos a mostrar mediante dos ejemplos cómo la posición de los átomos afecta las propiedades del sistema.

#### 4.2.2. $\rho_A(0) = |1,1\rangle\langle 1,1|$

Usando las ecuaciones (4.91) y (4.92) uno puede determinar la matriz de densidad  $[\rho_A(t)]_{\mathbb{B}}$  en la base del triplete y el singulete:

$$[\rho_A(t)]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} e^{-2\gamma_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)}{1-\frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)}(e^{-2\tau_4\gamma_1 t} - e^{-2\gamma_1 t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)}{1+\frac{3}{2}F(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)}(e^{-2\tau_2\gamma_1 t} - e^{-2\gamma_1 t}) \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

con

$$\rho_{33} = 1 - \langle 1,1|\rho_A(t)|1,1\rangle - \langle 1,0|\rho_A(t)|1,0\rangle - \langle 0,0|\rho_A(t)|0,0\rangle, \quad (4.100)$$

si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$ . Si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ , entonces

$$[\rho_A(t)]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} e^{-2\gamma_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma_1 t e^{-2\gamma_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - (1 + 2\gamma_1 t)e^{-2\gamma_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.101)$$

Observamos que para todos los valores de la distancia  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  entre los dos átomos la matriz de densidad en la base del triplete y el singulete es diagonal y el estado estacionario es  $|1,-1\rangle\langle 1,-1|$ . Por lo tanto, no hay decoherencia en esta base y sólo hay decaimiento de poblaciones. Notamos que la población del estado anti-simétrico  $|0,0\rangle$  es siempre cero cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ , pues las transiciones a este estado a partir de un estado simétrico están prohibidas.

A partir de (4.99) y (4.101) vemos que la población del estado  $|1,1\rangle$  decae exponencialmente con una tasa de  $2\gamma_1$  para todas las distancias entre los átomos. Simultáneamente las poblaciones de los estados  $|1,0\rangle$  y  $|0,0\rangle$  crecen para finalmente decaer exponencialmente con tasas distintas  $2\tau_4\gamma_1$  y  $2\tau_2\gamma_1$ , respectivamente, si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > 0$ . Notamos que, para la mayor parte de las distancias entre los átomos,  $2\tau_4\gamma_1 > 2\tau_2\gamma_1$ , por lo que la población del estado  $|1,0\rangle$  decae en general más rápido que la población del estado  $|0,0\rangle$ .

La figura (4.5) muestra la población  $P_{10}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t)$  del estado  $|1,0\rangle$  como función de la distancia entre los dos átomos y del tiempo. Observamos que la interacción disipativa entre los dos átomos es capaz de modificar considerablemente el valor de  $P_{10}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t)$  cuando  $\omega_A|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c \lesssim 10$  o, equivalentemente, cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \lesssim (3/2)\lambda_A$ . Además,  $P_{10}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t)$  presenta oscilaciones más marcadas cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ . Este comportamiento se debe a que  $F_{12}$  es una función de  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  que tiene oscilaciones de mayor amplitud cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ . Por último observamos que, para todas las distancias entre los dos átomos,  $P_{10}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t)$  primero

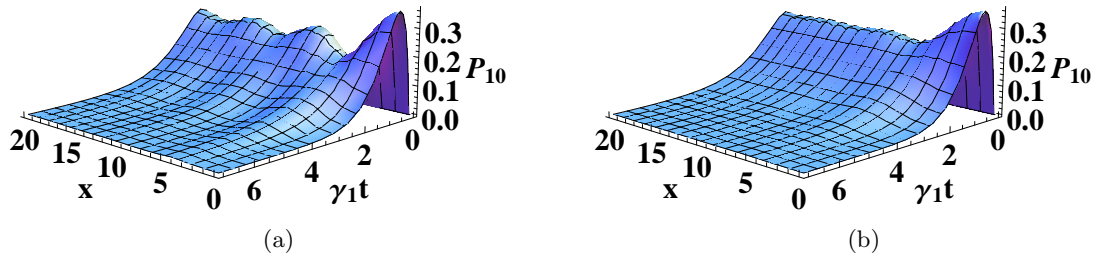


Figura 4.5: La población del estado  $|1,0\rangle$  cuando el estado inicial es  $|1,1\rangle$ . Las figuras (4.5a) y (4.5b) muestran la población del estado  $|1,0\rangle$  como una función de las cantidades adimensionales  $\gamma_1 t$  y  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  cuando  $d_{\perp} = |\mathbf{d}_{01}|$  y  $d_{\perp} = 0$ , respectivamente.

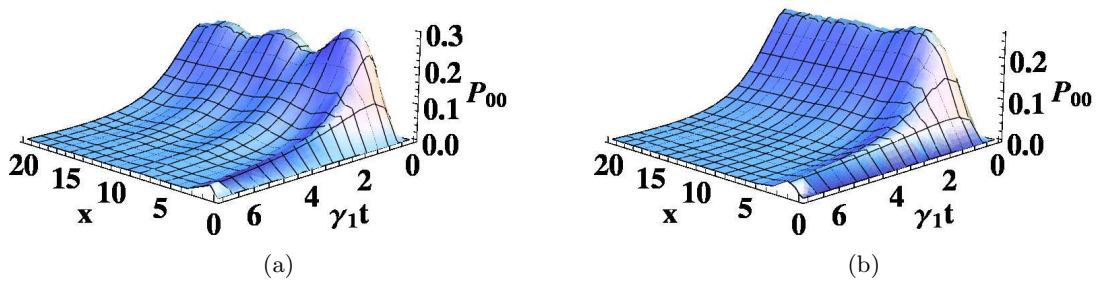


Figura 4.6: La población del estado  $|0,0\rangle$  cuando el estado inicial es  $|1,1\rangle$ . Las figuras (4.6a) y (4.6b) muestran la población del estado  $|0,0\rangle$  como función de las cantidades adimensionales  $\gamma_1 t$  y  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  cuando  $d_{\perp} = |\mathbf{d}_{01}|$  y  $d_{\perp} = 0$ , respectivamente.



se incrementa abruptamente y después decae exponencialmente a una tasa de  $2\tau_4\gamma_1$  cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$ .

La figura (4.6) muestra la población  $P_{00}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t)$  del estado  $|0, 0\rangle$  como función de la distancia entre los dos átomos y del tiempo. De manera similar al caso de anterior, observamos que la interacción disipativa entre los dos átomos es capaz de modificar considerablemente el valor de  $P_{00}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t)$  cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \lesssim (3/2)\lambda_A$ . Como era de esperarse,  $P_{00}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t)$  también presenta oscilaciones más marcadas cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ . Por último observamos que  $P_{00}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t)$  decae exponencialmente a una tasa de  $2\tau_2\gamma_1$  cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$ , mientras que siempre toma el valor de 0 cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ . Este último hecho se debe a que la ecuación maestra preserva la simetría del estado inicial cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ . Por lo tanto, en este caso las transiciones al estado antisimétrico  $|0, 0\rangle$  están prohibidas cuando el estado inicial es  $|1, 1\rangle$ .

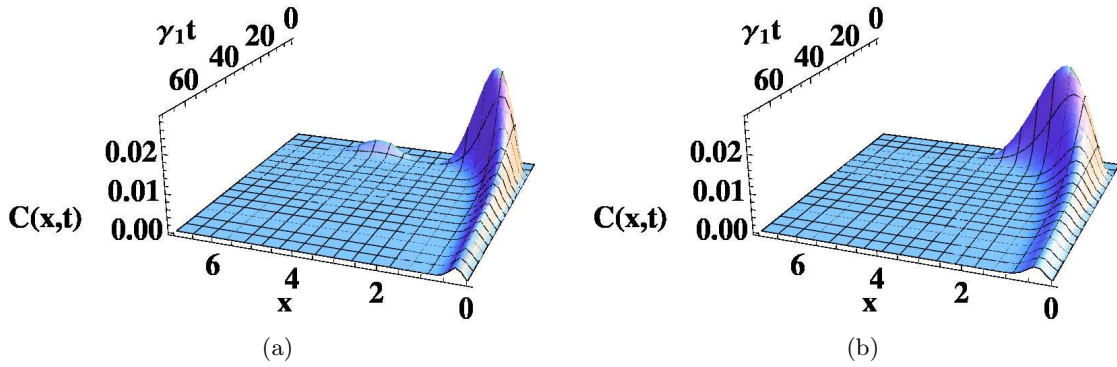


Figura 4.7: Concurrencia cuando el estado inicial es  $|1, 1\rangle$ . La figuras (4.7a) y (4.7b) muestran la concurrencia de los dos átomos como función de las cantidades adimensionales  $\gamma_1 t$  y  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  cuando  $d_{\perp} = |\mathbf{d}_{01}|$  y  $d_{\perp} = 0$ , respectivamente.

La concurrencia es fácilmente calculable y tiene una expresión muy sencilla:

$$C(t) = \max \left\{ 0, P_{00}(t) - P_{10}(t) - 2\sqrt{P_{11}(t)P_{1-1}(t)}, P_{10}(t) - P_{00}(t) - 2\sqrt{P_{11}(t)P_{1-1}(t)} \right\}, \quad (4.102)$$

donde  $P_{ij}(t)$  es la población del estado  $|i, j\rangle$  al tiempo  $t$ . Notamos que la expresión (4.102) es válida para cualquier valor de  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  y su gráfica como función de la distancia entre los átomos y del tiempo aparece en la figura (4.7). Observamos que hay una diferencia notable conforme la distancia entre los átomos se incrementa. Si  $x \lesssim 3$  o, equivalentemente, si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \lesssim \lambda_A/2$ , entonces la interacción disipativa entre los dos átomos es capaz de enredarlos. Esto refleja el hecho de que los átomos pueden intercambiar fotones sólo si se encuentran cerca uno del otro. Sin embargo, notamos que el enredamiento (medido por la concurrencia) es pequeño. Por otra parte, vemos que la concurrencia aparece abruptamente como función del tiempo y presenta oscilaciones como función de la distancia entre los átomos. Estas últimas son más pronunciadas cuando  $d_{\perp} = |\mathbf{d}_{01}|$  que cuando  $d_{\perp} = 0$ . Además, notamos que la concurrencia decae más lentamente como función de la distancia entre los átomos cuando  $d_{\perp} = 0$ , es decir, cuando el elemento

de matriz de los dipolos de los átomos es paralelo a la línea que los une. Notamos que este comportamiento es debido a la función  $F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ .

Es importante mencionar que el sistema se enreda cuando los estados  $|1, 0\rangle$  y  $|0, 0\rangle$  decaen a tasas considerablemente distintas, pues es el exceso de la población de uno de ellos lo que hace que el enredamiento sea mayor a cero, ver (4.102). Cuando estos estados decaen aproximadamente a la misma tasa, el enredamiento es despreciable. Por ejemplo, cuando los átomos se encuentran muy separados se tiene que  $|1, 0\rangle$  y  $|0, 0\rangle$  decaen aproximadamente a la misma tasa y, por consiguiente, el enredamiento del sistema es despreciable, ver (4.102) y la figura (4.7).

El comportamiento de la entropía lineal como función de la distancia entre los átomos y del tiempo aparece en la figura (4.8). Observamos que la interacción disipativa entre los átomos reduce el grado de mezcla del estado del sistema, pero que este efecto es apreciable sólo cuando los átomos están muy cerca ( $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c \lesssim 2$  o, equivalentemente,  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \lesssim \lambda_A/\pi$ ). Conforme los átomos se van alejando, existen tiempos en los que el sistema tiende a estar en un estado máximamente mezclado.

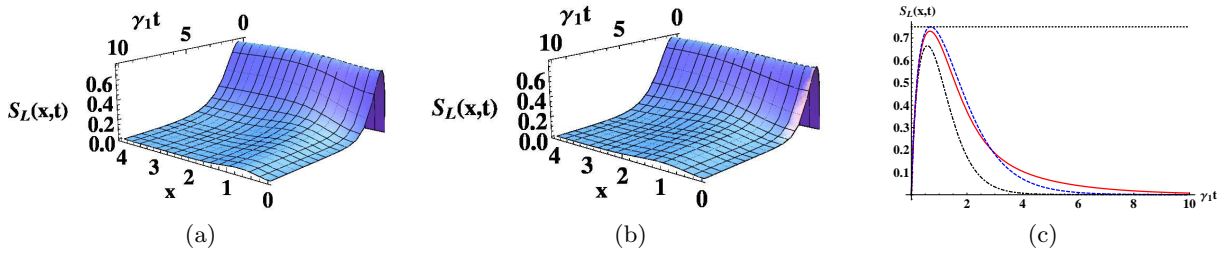


Figura 4.8: Entropía lineal cuando el estado inicial es  $|1, 1\rangle$ . Las figuras (4.8a) y (4.8b) muestran la entropía lineal como función de las cantidades adimensionales  $\gamma_1 t$  y  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  cuando  $d_\perp = |\mathbf{d}_{01}|$  y  $d_\perp = 0$ , respectivamente. La figura (4.8c) muestra la entropía lineal como función de  $\gamma_1 t$  cuando  $d_\perp = |\mathbf{d}_{01}|$  para los valores  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c = 2\pi/100$  (línea negra segmentada-punteada),  $2\pi/4$  (línea roja sólida) y  $2\pi$  (línea azul segmentada). Además, aparece la recta horizontal  $3/4$  que indica el valor máximo posible de la entropía lineal.

#### 4.2.3. $\rho_A(0) = |+-\rangle\langle+-|$

A partir de la ecuación (4.91) uno obtiene la matriz de densidad  $[\rho_A(t)]_B$  de los dos átomos en la base del triplete y del singulete cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$ :

$$[\rho_A(t)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-2\tau_4\gamma_1 t} & 0 & \frac{1}{2}e^{-\gamma_1 t} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{2}e^{-2\tau_4\gamma_1 t} - \frac{1}{2}e^{-2\tau_2\gamma_1 t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-\gamma_1 t} & 0 & \frac{1}{2}e^{-2\tau_2\gamma_1 t} \end{pmatrix}. \quad (4.103)$$

El caso en que  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  se puede obtener tomando el límite  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+$ . Para átomos idénticos que están en la misma posición es necesario usar un estado completamente simétrico o

antisimétrico, lo cual no se está haciendo en esta descripción. Sin embargo, es de interés teórico saber qué sucedería en nuestro marco de trabajo cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+$ .

Observamos que para todos los valores de la distancia  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  entre los átomos, la matriz de densidad es no diagonal y la tasa de decoherencia es  $\gamma_1$ . Por otra parte, las tasas de disipación son  $2\tau_4\gamma_1$  y  $2\tau_2\gamma_1$  si la distancia entre los dos átomos es distinta de cero, mientras que los correspondientes valores límites son  $2\gamma_1$  y 0 si los átomos están en la misma posición.

A partir de la ecuación (4.103) vemos que la población del estado  $|1, 1\rangle$  es siempre 0, mientras que las de los estados  $|1, 0\rangle$  y  $|0, 0\rangle$  decaen exponencialmente con tasas  $2\tau_4\gamma_1$  y  $2\tau_2\gamma_1$ , respectivamente, si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > 0$ . Nuevamente observamos que  $2\tau_4\gamma_1 > 2\tau_2\gamma_1$  para la mayor parte de las distancias, por lo que la población del singulete decae en general más lento que la población del estado  $|1, 0\rangle$ . Cuando los átomos se encuentran en exactamente la misma posición la población del singulete permanece constante e igual a  $1/2$ . Este hecho se debe a que las transiciones de un estado anti-simétrico a un estado simétrico están prohibidas cuando los átomos se encuentran en la misma posición. Como veremos más abajo, esto tiene como consecuencia que el enredamiento del sistema decaiga lentamente cuando los átomos están cerca.

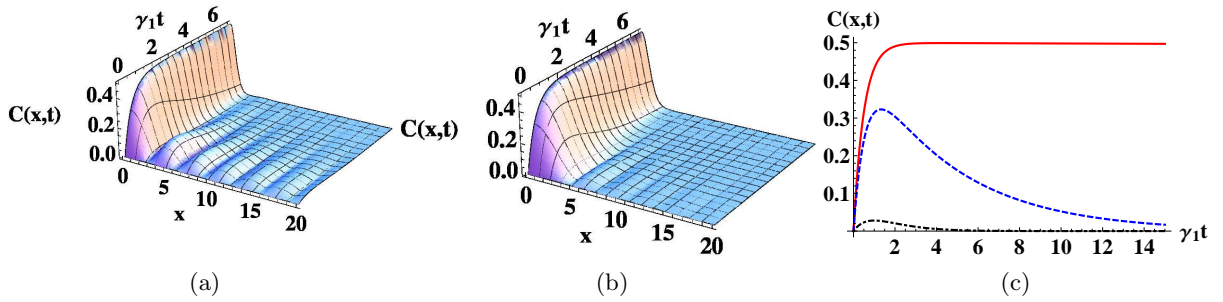


Figura 4.9: Concurrencia cuando el estado inicial es  $|+-\rangle$ . Las figuras (4.9a) y (4.9b) muestran la concurrencia de los dos átomos como función de las cantidades adimensionales  $\gamma_1 t$  y  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  cuando  $d_\perp = |\mathbf{d}_{01}|$  y  $d_\perp = 0$ , respectivamente. La figura (4.9c) muestra la concurrencia como función de  $\gamma_1 t$  cuando  $d_\perp = 0$  para los valores  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c = 2\pi/100$  (línea roja sólida),  $2\pi/4$  (línea azul segmentada), and  $2\pi$  (línea negra punteada).

Nuevamente la concurrencia es fácilmente calculable y tiene una expresión sencilla:

$$\begin{aligned}
 C(t) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ P_{00}(t)^2 + P_{10}(t)^2 - 2C_{10,00}(t)^2 \right. \\
 & \left. + |P_{00}(t) - P_{10}(t)| \sqrt{[P_{00}(t) + P_{10}(t)]^2 - 4C_{10,00}(t)^2} \right\}^{1/2} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ P_{00}(t)^2 + P_{10}(t)^2 - 2C_{10,00}(t)^2 \right. \\
 & \left. - |P_{00}(t) - P_{10}(t)| \sqrt{[P_{00}(t) + P_{10}(t)]^2 - 4C_{10,00}(t)^2} \right\}^{1/2}, \quad (4.104)
 \end{aligned}$$

donde  $P_{ij}(t)$  es la población del estado  $|i, j\rangle$  y  $C_{10,00}(t) = \langle 1, 0 | \rho_A(t) | 0, 0 \rangle$ . Nuevamente observamos que el sistema se enreda cuando los estados  $|1, 0\rangle$  y  $|0, 0\rangle$  decaen a tasas considerablemente

distintas, pues es el exceso de la población de uno de ellos lo que hace que el enredamiento sea mayor a cero, ver (4.104).

El comportamiento de la concurrencia como función de la distancia entre los átomos y del tiempo aparece en la figura (4.9). Observamos que hay una diferencia notable conforme la distancia entre los átomos se incrementa. Si  $x \lesssim 6$  o, equivalentemente, si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \lesssim \lambda_A$ , entonces la interacción disipativa entre los dos átomos es capaz de enredarlos. Esto refleja el hecho de que los átomos pueden intercambiar fotones sólo si se encuentran cerca uno del otro. Además, notamos que el enredamiento generado (medido por la concurrencia) es considerablemente mayor al del caso en que el estado inicial es  $|1, 1\rangle$ . Nuevamente enfatizamos que el sistema se enreda cuando los estados  $|1, 0\rangle$  y  $|0, 0\rangle$  decaen a tasas considerablemente distintas, pues es el exceso de la población de uno de ellos lo que hace que el enredamiento sea mayor a cero. Cuando estos estados decaen aproximadamente a la misma tasa, el enredamiento es despreciable. Por ejemplo, cuando los átomos se encuentran muy separados se tiene que  $|1, 0\rangle$  y  $|0, 0\rangle$  decaen aproximadamente a la misma tasa y, por consiguiente, el enredamiento del sistema es despreciable. Cuando los átomos se encuentran muy cerca la tasa de decaimiento de  $|0, 0\rangle$  es cercana a cero, mientras que la de  $|1, 0\rangle$  es cercana a  $-2\gamma_1$ . Por consiguiente, en este caso el enredamiento decae muy lentamente, ver (4.104) y la figura (4.9).

Por otra parte, vemos que la concurrencia aparece abruptamente como función del tiempo y presenta oscilaciones como función de la distancia entre los átomos. Estas últimas son más pronunciadas cuando  $d_\perp = |\mathbf{d}_{01}|$  que cuando  $d_\perp = 0$ . Nuevamente, este comportamiento se debe a la función  $F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ .

El comportamiento de la entropía lineal como función de la distancia entre los átomos y del tiempo aparece en la figura (4.10). Observamos que el sistema nunca está en un estado máximamente mezclado (la entropía lineal nunca vale  $3/4$ ) y que la entropía lineal decae más lentamente cuando  $d_\perp = 0$ . Además, la entropía lineal aumenta abruptamente hasta alcanzar un valor máximo de  $1/2$  y finalmente tiende a cero cuando la distancia entre los dos átomos es mayor a cero. Conforme los átomos se acercan, la entropía lineal decae más lentamente y finalmente toma el valor constante de  $1/2$  cuando los átomos están en la misma posición. Este último hecho es consecuencia de que la población del singulete es constante e igual a  $1/2$  cuando los átomos están en la misma posición.

#### 4.2.4. El caso de un estado térmico con número de fotones grande

El caso de la sección anterior tiene la belleza de que todo se puede calcular analíticamente. Por ejemplo, se pueden dar expresiones sencillas tanto para las tasas de decoherencia y de disipación como para las poblaciones de la base del triplete y el singulete. Tristemente, esto no ocurre cuando el estado inicial del reservorio es un estado térmico. Sin embargo, el caso en que el número de fotones es muy grande se puede resolver analíticamente y lo abordaremos en esta sección.

Supongamos que el campo electromagnético inicialmente se encuentra en un estado térmico. Entonces

$$p(n_1, n_2, \dots) = \prod_{j=1}^{+\infty} e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}), \quad (4.105)$$

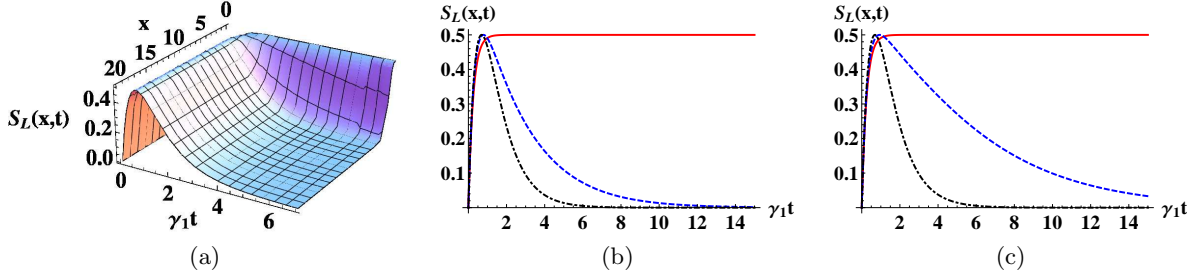


Figura 4.10: Entropía lineal cuando el estado inicial es  $|+-\rangle$ . La figura (4.10a) muestra la entropía lineal del estado de los dos átomos como función de las cantidades adimensionales  $\gamma_1 t$  y  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  cuando  $d_\perp = 0$ . Las figuras (4.10b) y (4.10c) muestran la entropía lineal como función de  $\gamma_1 t$  para  $d_\perp = |\mathbf{d}_{01}|$  y  $d_\perp = 0$ , respectivamente, y para los valores  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c = 2\pi/100$  (línea roja sólida),  $2\pi/4$  (línea azul segmentada) y  $2\pi$  (línea negra punteada).

y  $N(\omega_A) = (e^{\beta\hbar\omega_A} - 1)^{-1}$  con  $\beta = 1/(k_B T)$ . Como mencionamos arriba, la ecuación maestra (4.90) no es exactamente soluble en este caso. En toda esta sección vamos a suponer que el valor esperado del número de fotones en los modos asociados a la frecuencia angular  $\omega_A$  es muy grande. Esto es, vamos a suponer que la temperatura  $T$  es lo suficientemente grande de tal manera que  $N(\omega_A) \gg 1$ . Más aún, vamos a despreciar todos los términos de orden  $1/N(\omega_A)$  o más pequeños. Por ejemplo, para transiciones en la región de microondas  $\omega_A \sim 10^{10}$  [Hz], temperaturas  $T \gtrsim 100$  [K] garantizan que  $N(\omega_A) \geq 100$ . Por otra parte, para transiciones en el óptico  $\omega_A \sim 10^{15}$  [Hz] se tiene que  $N(\omega_A) \geq 100$  si y sólo si  $T \gtrsim 10^6$  [K]. Estas temperaturas son de poco interés e inalcanzables en experimentos de electrodinámica cuántica en cavidades [60].

En este caso la ecuación maestra (4.90) es analíticamente soluble y la solución general para el caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$  es

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle &= \frac{1}{4} + \alpha_1 e^{-\tau_{D_1} t} + \alpha_2 e^{-\tau_{D_2} t} \\
&\quad + \frac{1}{2} [ \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle - \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle ] e^{-2N(\omega_A)\gamma_1 t}, \\
\langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle &= \frac{1}{2} [ \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle - \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle ] e^{-\tau_{C_1} t} \\
&\quad + \frac{1}{2} [ \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle + \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle ] e^{-N(\omega_A)\gamma_1 t}, \\
\langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle &= \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle e^{-2N(\omega_A)\gamma_1 t}, \\
\langle 0, 0 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle &= \frac{1}{2} [ \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle - \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle ] e^{-N(\omega_A)\gamma_1 t} \\
&\quad + \frac{1}{2} [ \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle + \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle ] e^{-\tau_{C_2} t}, \\
\langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle &= \frac{1}{4} + \alpha_3 e^{-\tau_{D_2} t} + \alpha_4 e^{-\tau_{D_1} t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle &= \frac{1}{2} [ \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle - \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle ] e^{-\tau_{C_1} t} \\
&\quad + \frac{1}{2} [ \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle + \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle ] e^{-N(\omega_A)\gamma_1 t}, \\
\langle 0, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle &= \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle e^{-2N(\omega_A)\gamma_1 t}, \\
\langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, -1 \rangle &= \frac{1}{4} + \alpha_1 e^{-\tau_{D_1} t} + \alpha_2 e^{-\tau_{D_2} t} \\
&\quad - \frac{1}{2} [ \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle - \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle ] e^{-2N(\omega_A)\gamma_1 t}, \\
\langle 0, 0 | \rho_A(t) | 1, -1 \rangle &= \frac{1}{2} [ \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle - \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle ] e^{-N(\omega_A)\gamma_1 t} \\
&\quad + \frac{1}{2} [ \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle + \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle ] e^{-\tau_{C_2} t}, \\
\langle 0, 0 | \rho_A(t) | 0, 0 \rangle &= \frac{1}{4} + \alpha_5 e^{-\tau_{D_2} t} + \alpha_6 e^{-\tau_{D_1} t}, \tag{4.106}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tau_{D_1} &= [3 - f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)] \gamma_1 N(\omega_A), & \tau_{C_1} &= 3 [1 + F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)] \gamma_1 N(\omega_A), \\
\tau_{D_2} &= [3 + f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)] \gamma_1 N(\omega_A), & \tau_{C_2} &= 3 [1 - F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)] \gamma_1 N(\omega_A), \tag{4.107}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) &= \sqrt{1 + 18F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)^2}, \\
\alpha_1 &= \frac{1}{8f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} \left\{ -1 + f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right. \\
&\quad \left. -2 [ -1 + 3F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) ] \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. + 2 [ 1 + 3F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) - f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) ] \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle \right\}, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{8f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} \left\{ 1 + f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right. \\
&\quad \left. -2 [ 1 - 3F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) ] \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. -2 [ 1 + 3F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) ] \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle \right\}, \\
\alpha_3 &= \frac{1}{8f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} \left\{ -1 - f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right. \\
&\quad \left. + 4 \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle + 4f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. + 6F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) [ -1 + \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle + 3 \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle ] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= \frac{1}{8f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} \left\{ 1 - f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right. \\
&\quad -4\langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle + 4f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle \\
&\quad \left. -6F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) [ -1 + \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle + 3\langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle ] \right\} , \\
\alpha_5 &= \frac{1}{8f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} \left\{ -1 - f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right. \\
&\quad +4\langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle + 4f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle \\
&\quad \left. -6F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) [ -1 + 3\langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle + \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle ] \right\} , \\
\alpha_6 &= \frac{1}{8f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} \left\{ 1 - f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right. \\
&\quad + 4f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle - 4\langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle \\
&\quad \left. +6F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) [ -1 + 3\langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle + \langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle ] \right\} .
\end{aligned} \tag{4.108}$$

El resto de los elementos de matriz se puede obtener usando la hermiticidad de  $\rho_A(t)$ .

La solución para el caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  se obtiene de (4.106) reemplazando las ecuaciones para los elementos diagonales de  $\rho_A(t)$  por las siguientes:

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle &= \frac{1}{3} [ 1 - \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle ] \\
&\quad + \frac{1}{2} [ \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle - \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle ] e^{-2N(\omega_A)\gamma_1 t} , \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[ \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle - 2\langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle \right. \\
&\quad \quad \left. + \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle \right] e^{-6N(\omega_A)\gamma_1 t} , \\
\langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle &= \frac{1}{3} [ 1 - \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle ] \\
&\quad - \frac{1}{3} \left[ \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle - 2\langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle \right. \\
&\quad \quad \left. + \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle \right] e^{-6N(\omega_A)\gamma_1 t} , \\
\langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, -1 \rangle &= \frac{1}{3} [ 1 - \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle ] \\
&\quad - \frac{1}{2} [ \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle - \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle ] e^{-2N(\omega_A)\gamma_1 t} , \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[ \langle 1, 1 | \rho_A(0) | 1, 1 \rangle - 2\langle 1, 0 | \rho_A(0) | 1, 0 \rangle \right. \\
&\quad \quad \left. + \langle 1, -1 | \rho_A(0) | 1, -1 \rangle \right] e^{-6N(\omega_A)\gamma_1 t} ,
\end{aligned}$$

$$\langle 0, 0 | \rho_A(t) | 0, 0 \rangle = \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle, \quad (4.109)$$

y tomando el límite  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+$  en el resto de las ecuaciones en (4.106).

De (4.106) notamos que la solución estacionaria cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$  es un estado separable máximamente mezclado

$$\begin{aligned} \rho_A^{ST} &= \frac{1}{4} [ |1, 1\rangle\langle 1, 1| + |1, 0\rangle\langle 1, 0| + |1, -1\rangle\langle 1, -1| + |0, 0\rangle\langle 0, 0| ], \\ &= \frac{1}{4} \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (4.110)$$

donde  $\mathbb{I}$  es el operador identidad en el espacio de estados de los dos átomos. De (4.109) observamos que la solución estacionaria cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  es

$$\begin{aligned} \rho_A^{ST} &= \frac{1}{3} [ 1 - \langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle ] \cdot [ |1, 1\rangle\langle 1, 1| + |1, 0\rangle\langle 1, 0| + |1, -1\rangle\langle 1, -1| ] \\ &\quad + |0, 0\rangle\langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle \langle 0, 0|. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Notamos que la concurrencia de (4.111) es  $C^{ST} = 2\langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle - 1$ . Entonces (4.111) va a estar enredado si  $\langle 0, 0 | \rho_A(0) | 0, 0 \rangle > 1/2$ .

Observamos que para el caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$  las tasas de decoherencia son

$$N(\omega_A)\gamma_1, \quad 2N(\omega_A)\gamma_1, \quad \tau_{c_1}, \quad \tau_{c_2}, \quad (4.112)$$

mientras que las tasas de disipación son

$$2N(\omega_A)\gamma_1, \quad \tau_{D_1}, \quad \tau_{D_2}. \quad (4.113)$$

Las tasas correspondientes para el caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  se pueden obtener tomando el límite  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+$  en (4.112) y (4.113). Comparando las ecuaciones (4.93), (4.94), (4.112) y (4.113), observamos que todas las tasas son mucho más grandes que en el caso en que el reservorio está en el vacío. Por lo tanto, el sistema alcanza el estado estacionario mucho más rápido. Dado que este último es un estado separable, se tiene que el enredamiento desaparece mucho más rápido que en el caso del reservorio en el vacío.

Notamos que estos hechos son resultado de que se está tomando el caso  $N(\omega_A) \gg 1$ , pues esperamos que las propiedades del sistema, excepto el enredamiento, varíen continuamente como función de  $N(\omega_A)$ . Ahora queda por responder la pregunta de por qué esperamos que el enredamiento no varíe continuamente como función de  $N(\omega_A)$ . La razón es que, como veremos a continuación en un caso particular, esta cantidad presenta en general una muerte súbita, esto es, el enredamiento desaparece en un tiempo finito y no decae exponencialmente a cero como en el caso del reservorio en el vacío. Este cambio en el comportamiento no se puede obtener variando continuamente algún parámetro. Además, se ha mostrado que el enredamiento entre dos átomos siempre presenta muerte súbita cuando éstos inicialmente están en un estado  $X$  (ver (2.187) y el párrafo que le sigue), se encuentran muy separados ( $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow +\infty$ ) y el reservorio está en un estado térmico a temperatura  $0 < T < +\infty$  [74]-[76].



#### 4.2.5. $\rho_A(0) = |0, 0\rangle\langle 0, 0|$

A partir de (4.106) podemos obtener la matriz de densidad  $[\rho_A(t)]_{\mathbb{B}}$  de los dos átomos en la base del triplete y del singulete cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \neq 0$  y el estado inicial es  $\rho_A(0) = |0, 0\rangle\langle 0, 0|$ :

$$[\rho_A(t)]_{\mathbb{B}} = \text{diag} \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{4} + \alpha_1 e^{-\tau_{D_1} t} + \alpha_2 e^{-\tau_{D_2} t}, & \frac{1}{4} + \alpha_3 e^{-\tau_{D_2} t} + \alpha_4 e^{-\tau_{D_1} t}, \\ \frac{1}{4} + \alpha_1 e^{-\tau_{D_1} t} + \alpha_2 e^{-\tau_{D_2} t}, & \frac{1}{4} + \alpha_5 e^{-\tau_{D_2} t} + \alpha_6 e^{-\tau_{D_1} t} \end{array} \right), \quad (4.114)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  y  $\alpha_6$  están dados por (4.108) y *diag* indica que es una matriz diagonal. Cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  vemos de (4.109) que el operador de densidad de los dos átomos es  $|0, 0\rangle\langle 0, 0|$ . Esto es, los dos átomos permanecen en el estado  $|0, 0\rangle\langle 0, 0|$ . Este comportamiento se debe a que las transiciones del singulete a cualquier estado del triplete están prohibidas.

Notamos que la matriz de densidad en la base del triplete y del singulete es diagonal para todos los valores de la distancia entre los dos átomos. Por lo tanto, no hay decoherencia en esta base cuando el estado inicial es  $|0, 0\rangle$ . Además, la matriz de densidad de los dos átomos toma asintóticamente la forma de un estado máximamente mezclado cuando la distancia entre los dos átomos es mayor a cero.

La concurrencia es fácilmente calculable en este caso:

$$\begin{aligned} C(t) &= \text{máx} \{ 0, P_{00}(t) - P_{10}(t) - 2P_{11}(t) \}, \\ &= \text{máx} \left\{ 0, h(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t) \right\}, \end{aligned} \quad (4.115)$$

donde

$$\begin{aligned} h(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t) &= \left[ \frac{3}{4} - \frac{1 + 12F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{4f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} \right] e^{-\tau_{D_2} t} \\ &\quad + \left[ \frac{3}{4} + \frac{1 + 12F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{4f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)} \right] e^{-\tau_{D_1} t} - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.116)$$

y  $P_{ij}(t)$  es la población del estado  $|i, j\rangle$ . La figura (4.11) muestra la concurrencia como función de la distancia entre los dos átomos y del tiempo. Observamos que para distancias mayores a cero la concurrencia empieza con un valor máximo de 1 y decae hasta desaparecer abruptamente con una tasa que depende de la distancia entre los átomos. De hecho, el tiempo en que el enredamiento muere se puede calcular al resolver numéricamente para  $t$  la ecuación  $h(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, t) = 0$ . En el caso extremo en que los dos átomos se encuentran en la misma posición la concurrencia es constante e igual a 1, pues, como se observó arriba, las transiciones del singulete a cualquier estado del triplete están prohibidas. Por último, notamos que la concurrencia, como función de la distancia entre los dos átomos, presenta oscilaciones apreciables cuando  $d_{\perp} = |\mathbf{d}_{01}|$ . Nuevamente, este comportamiento es debido a la función  $F_{12}$ .

### 4.3. Dos átomos forzados por un láser

En esta sección vamos a despreciar la interacción  $V_{AB}$  con el reservorio y sí vamos a considerar que los átomos están forzados por un láser monocromático. Entonces, el hamiltoniano

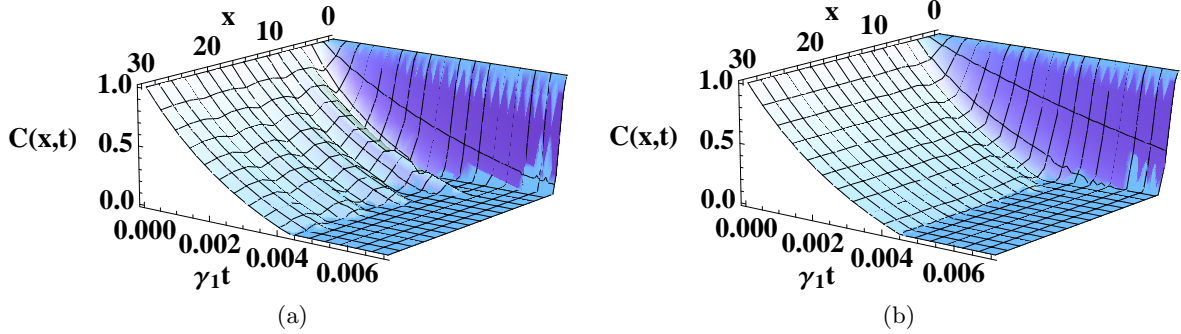


Figura 4.11: Concurrencia cuando el estado inicial es  $|0, 0\rangle$  y  $N(\omega_A) = 100$ . Las figuras (4.11a) y (4.11b) muestran la concurrencia como función de las cantidades adimensionales  $\gamma_1 t$  y  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  cuando  $d_\perp = |\mathbf{d}_{01}|$  y  $d_\perp = 0$ , respectivamente.

que describe al sistema de dos átomos se obtiene de (4.25) tomando  $H_B = V_{AB} = 0$ . Esto es, el hamiltoniano que describe al sistema de dos átomos es

$$H_{AL}(t) = H_A + V_{AL}(t) , \quad (4.117)$$

donde  $H_A$  y  $V_{AL}(t)$  están dados por las ecuaciones (4.7) y (4.27).

En este caso tenemos un sistema cerrado y, por lo tanto, la evolución del operador de densidad  $\rho_A(t)$  de los dos átomos está descrita por la ecuación de von Neumann

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_A(t) = [ H_{AL}(t), \rho_A(t) ] . \quad (4.118)$$

Pasemos al esquema de interacción (IP) definido por la transformación unitaria definida en (4.89). Entonces (4.118) queda de la siguiente forma

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_A(t) = [ V_{AL}^I(t), \rho_A(t) ] , \quad (4.119)$$

donde  $\rho_A(t)$  ahora denota el operador de densidad en el IP y  $V_{AL}^I(t)$  es el operador  $V_{AL}(t)$  en el IP. Usando que

$$U_0^\dagger(t, 0) \sigma_{\pm j} U_0(t, 0) = \sigma_{\pm j} e^{\pm i\omega_A t} \quad (j = 1, 2) , \quad (4.120)$$

se sigue que

$$V_{AL}^I(t) = - \sum_{j=1,2} g(\mathbf{r}_j) \left[ g_1 \left( \sigma_{+j} e^{-i\delta_L t} + \sigma_{-j} e^{i\delta_L t} \right) + g_2 \sigma_{+j} e^{i(\omega_A + \omega_L)t} + g_2^* \sigma_{-j} e^{-i(\omega_A + \omega_L)t} \right] , \quad (4.121)$$

donde  $g_1$  es una cantidad real que se definió en (4.23), mientras que  $g_2$  es una cantidad compleja definida por

$$g_2 = \mathbf{d}_{01} \cdot \bar{\mathcal{E}}_L^* . \quad (4.122)$$

Ahora vamos a aplicar la aproximación de onda rotante (RWA) a  $V_{AL}^I(t)$ , esto es, vamos a despreciar términos que oscilan rápidamente en (4.121) y nos quedaremos sólo con los términos que oscilan lentamente:

$$V_{AL}^I(t) \cong - \sum_{j=1,2} \hbar G(\mathbf{r}_j) \left( \sigma_{+j} e^{-i\delta_L t} + \sigma_{-j} e^{i\delta_L t} \right), \quad (4.123)$$

donde

$$G(\mathbf{r}_j) = \frac{g_1}{\hbar} g(\mathbf{r}_j) \quad (j = 1, 2). \quad (4.124)$$

En lo que sigue escribiremos en ocasiones  $G_j$  en lugar de  $G(\mathbf{r}_j)$ . Notamos que la RWA es aplicable si

$$|\delta_L|, |G(\mathbf{r}_1)|, |G(\mathbf{r}_2)| \ll \omega_A. \quad (4.125)$$

En todo lo que sigue vamos a suponer que las condiciones (4.125) se satisfacen.

A partir de (4.118)-(4.124) vemos que la ecuación de evolución para  $\rho_A(t)$  en la RWA es

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_A(t) = \left[ - \sum_{j=1,2} \hbar G(\mathbf{r}_j) \left( \sigma_{+j} e^{-i\delta_L t} + \sigma_{-j} e^{i\delta_L t} \right), \rho_A(t) \right]. \quad (4.126)$$

En el resto de esta sección vamos a suponer que se cumple la condición de resonancia, esto es,  $\delta_L = 0$ . En este caso  $\rho_A(t)$  está dado por

$$\rho_A(t) = U_I(t, 0) \rho_A(0) U_I^\dagger(t, 0), \quad (4.127)$$

donde  $U_I(t, 0)$  es el operador de evolución asociado a  $V_{AL}^I(t)$  con la RWA (ver la ecuación (4.123))

$$U_I(t, 0) = e^{iG(\mathbf{r}_1)(\sigma_{+1} + \sigma_{-1})t} \otimes e^{iG(\mathbf{r}_2)(\sigma_{+2} + \sigma_{-2})t}. \quad (4.128)$$

Es fácil calcular las representaciones matriciales de las componentes del producto tensorial que define a  $U_I(t, 0)$  en la ecuación (4.128) en la base  $\mathbf{B}_j$  (ver la ecuación (4.2))

$$\left[ e^{iG(\mathbf{r}_j)(\sigma_{+j} + \sigma_{-j})t} \right]_{\mathbf{B}_j} = \begin{pmatrix} \cos(G_j t) & i \operatorname{sen}(G_j t) \\ i \operatorname{sen}(G_j t) & \cos(G_j t) \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2). \quad (4.129)$$

A partir de (4.127)-(4.129) vemos que, en general, el enredamiento en  $\rho_A(t)$  va a ser constante e igual al enredamiento de  $\rho_A(0)$ , pues  $\rho_A(t)$  se obtiene de  $\rho_A(0)$  haciendo transformaciones locales unitarias y el enredamiento es invariante bajo este tipo de transformaciones [5, 33]. A continuación vamos a ver esto explícitamente para algunos ejemplos.

Supongamos que el estado inicial de los dos átomos es un estado producto de la forma

$$\rho_A(0) = \rho_{A1}(0) \otimes \rho_{A2}(0), \quad (4.130)$$

donde  $\rho_{Aj}(t)$  es el operador de densidad del átomo  $j$ . Usando (4.127)-(4.129) es claro que

$$\rho_A(t) = \rho_{A1}(t) \otimes \rho_{A2}(t), \quad (4.131)$$

donde la representación matricial  $[\rho_{Aj}(t)]_{\mathbf{B}_j}$  de  $\rho_{Aj}(t)$  en la base  $\mathbf{B}_j$  está dada por

$$[\rho_{Aj}(t)]_{\mathbf{B}_j} = \left[ e^{iG(\mathbf{r}_j)(\sigma_{+j} + \sigma_{-j})t} \right]_{\mathbf{B}_j} [\rho_{Aj}(0)]_{\mathbf{B}_j} \left[ e^{iG(\mathbf{r}_j)(\sigma_{+j} + \sigma_{-j})t} \right]_{\mathbf{B}_j}^\dagger. \quad (4.132)$$

A partir de (4.131) observamos que el sistema se encuentra en un estado separable para todo  $t \geq 0$ . Este resultado era esperado, pues para poder enredarse los átomos deben poder interactuar entre sí a través del campo eléctrico del láser y esto no es posible porque los átomos no son capaces de modificar dicho campo. Notamos que es precisamente por este hecho por el que se modela el campo del láser como un campo externo no modificable por los átomos.

Ahora supongamos que el estado inicial de los dos átomos no es un estado producto, sino que, es un estado puro máximamente enredado (un estado de Bell) de la forma

$$\rho_A(0) = |1, 0\rangle\langle 1, 0|. \quad (4.133)$$

Usando (4.127)-(4.129) es fácil ver que la representación matricial de  $\rho_A(t)$  en la base  $\mathbf{B}$  del triplete y el singlete está dada por

$$[\rho_A(t)]_{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2[(G_1 + G_2)t] & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin[2(G_1 + G_2)t] & \sin^2[(G_1 + G_2)t] & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin[2(G_1 + G_2)t] & 2\cos^2[(G_1 + G_2)t] & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin[2(G_1 + G_2)t] & 0 \\ \sin^2[(G_1 + G_2)t] & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin[2(G_1 + G_2)t] & \sin^2[(G_1 + G_2)t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.134)$$

Utilizando (4.134) se puede ver que  $\rho_A(t)$  siempre es un estado puro máximamente enredado. Nuevamente, este resultado es esperado, pues de las ecuaciones (4.127) y (4.128) vemos que  $\rho_A(t)$  se obtiene de (4.133) haciendo transformaciones locales unitarias y el enredamiento es invariante bajo este tipo de transformaciones.

Dado que el campo del láser no puede modificar el enredamiento entre los dos átomos cuando no se considera el reservorio, queda la pregunta de qué motiva su introducción. En la sección anterior vimos que la interacción disipativa entre los dos átomos a través del reservorio es capaz de enredar a los dos átomos por cierto tiempo. Sin embargo, la interacción con el reservorio finalmente deja a los dos átomos en sus respectivos estados base (si la distancia entre los átomos es mayor a cero). Para combatir este proceso disipativo y tener la posibilidad de que el enredamiento subsista, consideramos un láser que esté proporcionando energía al sistema excitando a los dos átomos. Esto va a ser estudiado en la siguiente sección.

#### 4.4. Dos átomos forzados e interactuando con un reservorio

Ahora vamos a considerar el sistema completo planteado en la sección *El sistema de estudio*. Esto es, vamos a considerar dos átomos de dos niveles forzados por un láser monocromático e interactuando con todos los modos del campo electromagnético. Como en secciones anteriores representaremos el operador de densidad de los dos átomos por  $\rho_A(t)$ .

Vamos a empezar por recopilar las ecuaciones de evolución de  $\rho_A(t)$  que se obtuvieron en las secciones anteriores para los distintos casos que se han tratado. Primero observamos que si

despreciamos tanto el reservorio como el láser ( $H_B = V_{AB} = V_{AL}(t) = 0$  en (4.25)), entonces  $\rho_A(t)$  está determinada por la ecuación de von Neumann

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_A(t) = [H_A, \rho_A(t)] . \quad (4.135)$$

A partir de (4.135) vemos que la variación temporal de  $\rho_A(t)$  debida a su evolución libre está dada por

$$-\frac{i}{\hbar} [H_A, \rho_A(t)] . \quad (4.136)$$

En la sección *Dos átomos interactuando con un reservorio* vimos que si despreciamos el láser, entonces se puede describir la evolución de  $\rho_A(t)$  mediante una ecuación maestra de Born-Markov-secular, Ec. (4.50). A partir de esta ecuación observamos que la variación de  $\rho_A(t)$  debida a su interacción con el reservorio es

$$-\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar\Delta_A}{2} \sigma_3 + H_{dd}, \rho_A(t) \right] + \mathcal{D}[\rho_A(t)] , \quad (4.137)$$

donde el hamiltoniano  $H_{dd}$  que describe la interacción dipolo-dipolo está definido en (4.48), mientras que el disipador  $\mathcal{D}$  está definido en (4.34). Además,  $\hbar\Delta_A\sigma_3/2$  es el hamiltoniano de corrimiento Lamb, ver (4.48).

En la sección *Dos átomos forzados por un láser* vimos que si despreciamos el reservorio, entonces se puede describir la evolución de  $\rho_A(t)$  mediante una ecuación de von Neumann, ver (4.118). Luego, cambiándose a un esquema de interacción y aplicando la aproximación de onda rotante (RWA), se vio que la evolución de  $\rho_A(t)$  estaba descrita aproximadamente por la ecuación (4.126) siempre y cuando las condiciones en (4.125) se cumplan. Recordando que el esquema de interacción estaba definido por la transformación unitaria definida en la ecuación (4.89), podemos transformar la ecuación (4.126) al esquema de Schrödinger nuevamente:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_A(t) = \left[ H_A - \sum_{j=1,2} \hbar G(\mathbf{r}_j) ( \sigma_{+j} e^{-i\omega_L t} + \sigma_{-j} e^{i\omega_L t} ), \rho_A(t) \right] , \quad (4.138)$$

donde

$$G_j = G(\mathbf{r}_j) = \frac{g_1}{\hbar} g(\mathbf{r}_j) \quad (j = 1, 2). \quad (4.139)$$

Además, recordamos que la ecuación (4.138) describe aproximadamente la evolución de  $\rho_A(t)$  si

$$|\delta_L|, |G(\mathbf{r}_1)|, |G(\mathbf{r}_2)| \ll \omega_A . \quad (4.140)$$

En todo lo que sigue vamos a suponer que las condiciones (4.140) se satisfacen de tal manera que la RWA y la ecuación (4.138) son válidas. A partir de la ecuación (4.138) vemos que la variación de  $\rho_A(t)$  debida a su interacción con el láser es

$$-\frac{i}{\hbar} \left[ - \sum_{j=1,2} \hbar G(\mathbf{r}_j) ( \sigma_{+j} e^{-i\omega_L t} + \sigma_{-j} e^{i\omega_L t} ), \rho_A(t) \right] . \quad (4.141)$$

Para describir la evolución de  $\rho_A(t)$  cuando los átomos interactúan con el reservorio y el láser vamos a aplicar la *aproximación de las tasas de variación independientes* [17]. De acuerdo a ésta la variación temporal de  $\rho_A(t)$  está dada por la suma de las variaciones provocadas por su evolución libre (4.136), su interacción con el reservorio (4.137) y su interacción con el campo del láser (4.141) como si cada una actuara por separado:

$$\frac{d}{dt}\rho_A(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[ H_A + \frac{\hbar\Delta_A}{2}\sigma_3 + H_{dd} - \sum_{j=1,2} \hbar G(\mathbf{r}_j) (\sigma_{+j}e^{-i\omega_L t} + \sigma_{-j}e^{i\omega_L t}), \rho_A(t) \right] + \mathcal{D}[\rho_A(t)]. \quad (4.142)$$

Recordamos que la ecuación (4.142) se dedujo trabajando en la representación del dipolo eléctrico y con la aproximación de longitud de onda larga, las aproximaciones de Born-Markov-RWA y la aproximación de tasas de variación independientes.

En lo que sigue vamos a **suponer que el reservorio se encuentra en el estado de vacío (o en un estado térmico a temperatura  $T$  tal que  $\mathbf{N}(\omega_A) \simeq 0$ ), vamos a incorporar el corrimiento  $\Delta_A$  a  $\omega_A$  y vamos a despreciar la interacción coherente dipolo-dipolo  $H_{dd}$  que surge de la interacción colectiva con el reservorio. Recordamos que  $H_{dd}$  es cero si para cada distancia  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  entre los átomos se escoge  $\mathbf{d}_\perp$  adecuadamente, ver la sección *Dos átomos interactuando con un reservorio*. Por lo tanto, todos los resultados analíticos que presentaremos son físicos cuando se toma  $\mathbf{d}_\perp$  de esta manera. El despreciar  $H_{dd}$  nos permitirá identificar los efectos debidos únicamente a la interacción disipativa entre los dos átomos contenida en el disipador  $\mathcal{D}$ . Además, esto nos permitirá identificar qué efectos introduce la interacción dipolo-dipolo en un trabajo futuro. Por lo tanto, la ecuación maestra con la que trabajaremos de ahora en adelante es**

$$\frac{d}{dt}\rho_A(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_3 - \sum_{j=1,2} \hbar G(\mathbf{r}_j) (\sigma_{+j}e^{-i\omega_L t} + \sigma_{-j}e^{i\omega_L t}), \rho_A(t) \right] + \mathcal{D}[\rho_A(t)]. \quad (4.143)$$

Como en secciones anteriores ahora pasamos al esquema de interacción (IP) definido por la transformación unitaria en la ecuación (4.89). La ecuación (4.143) toma la forma

$$\frac{d}{dt}\rho_A(t) = i \left[ \sum_{j=1,2} G(\mathbf{r}_j) (\sigma_{+j}e^{-i\delta_L t} + \sigma_{-j}e^{i\delta_L t}), \rho_A(t) \right] + \mathcal{D}[\rho_A(t)], \quad (4.144)$$

donde  $\rho_A(t)$  ahora es el operador de densidad de los dos átomos en el IP.

Para estudiar la dinámica del sistema de dos átomos vamos a calcular la solución estacionaria  $\rho_A^{ST}$  de (4.144) para dos configuraciones especiales que se analizarán a continuación. Recordamos que  $\rho_A^{ST}$  es una solución estacionaria de (4.144) si  $\rho_A^{ST}$  no depende explícitamente del tiempo y

$$-\frac{i}{\hbar} [V_{AL}^I(t), \rho_A^{ST}] + \mathcal{D}[\rho_A^{ST}] = 0, \quad (4.145)$$

donde

$$V_{AL}^I(t) = - \sum_{j=1,2} \hbar G(\mathbf{r}_j) \left( \sigma_{+j} e^{-i\delta_L t} + \sigma_{-j} e^{i\delta_L t} \right). \quad (4.146)$$

Notamos que en general la ecuación (4.144) no tiene soluciones estacionarias si  $\delta_L \neq 0$ , puesto que los operadores de densidad que satisfacen la ecuación (4.145) tienen elementos no diagonales que dependen del tiempo si  $\delta_L \neq 0$ . Esto se va a ver explícitamente en las siguientes secciones. Mencionamos que se tienen otras soluciones estacionarias en otros esquemas de interacción. Por ejemplo, se podría considerar un esquema de interacción definido por la misma transformación unitaria que hemos usado, pero con  $\omega_L$  reemplazando a  $\omega_A$ .

#### 4.4.1. $G(\mathbf{r}_2) = 0$

En esta parte vamos a suponer que uno de los átomos está fijo en una posición donde el campo eléctrico del láser (4.22) es cero, mientras que el otro átomo está fijo en una posición donde dicho campo no es cero. Por lo tanto, vamos a tomar  $G_2 = G(\mathbf{r}_2) = 0$  y  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > 0$ . Notamos que si la intensidad del campo del láser aumenta o disminuye, entonces  $|G_1| = |G(\mathbf{r}_1)|$  aumenta o disminuye correspondientemente de acuerdo a las ecuaciones (4.22) y (4.139). Luego, se puede hacer que  $G_1$  varíe y tome cualquier valor incrementando o disminuyendo la intensidad del campo del láser. Además, la distancia  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  entre los átomos se puede variar independientemente de  $G_1$ . Por ejemplo, uno de los átomos se puede colocar en el nodo de una onda estacionaria para tener  $G_2 = 0$ , el otro átomo se puede colocar en cualquier otra parte excepto en una donde  $G_1 = 0$  y la intensidad del campo se puede variar de tal manera que  $|G_1| = |G(\mathbf{r}_1)|$  tome cualquier valor.

Las poblaciones de la solución  $\rho_A^{ST}$  de la ecuación (4.145) en la base del triplete y el singulete están dadas por

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 | \rho_A^{ST} | 1, 1 \rangle &= \frac{18}{\kappa} [ 16F_{12}^2 \bar{G}_1^6 + 9(4 - F_{12}^2) F_{12}^2 \bar{G}_1^4 ] , \\ \langle 1, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 0 \rangle &= \frac{1}{\kappa} [ \mu_- \bar{G}_1^6 + \nu_- \bar{G}_1^4 + \eta_- \bar{G}_1^2 ] , \\ \langle 1, -1 | \rho_A^{ST} | 1, -1 \rangle &= 1 - \langle 1, 1 | \rho_A^{ST} | 1, 1 \rangle - \langle 1, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 0 \rangle - \langle 0, 0 | \rho_A^{ST} | 0, 0 \rangle , \\ \langle 0, 0 | \rho_A^{ST} | 0, 0 \rangle &= \frac{1}{\kappa} [ \mu_+ \bar{G}_1^6 + \nu_+ \bar{G}_1^4 + \eta_+ \bar{G}_1^2 ] , \end{aligned} \quad (4.147)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 &= G_1 / \gamma_1 , \\ \kappa &= \bar{G}_1^6 (2048 + 1152F_{12}^2) + \bar{G}_1^4 (2560 + 5184F_{12}^2 - 1296F_{12}^4) + \bar{G}_1^2 (864 + 144F_{12}^2 + 486F_{12}^4) \\ &\quad + \frac{9}{8} (2 + 3F_{12})^2 (2 - 3F_{12})^2 (4 - F_{12}^2) , \\ \mu_{\pm} &= 32(16 \pm 12F_{12} + 9F_{12}^2) , \\ \nu_{\pm} &= 18(32 \pm 48F_{12} + 68F_{12}^2 - 9F_{12}^4) , \\ \eta_{\pm} &= 9(2 \pm 3F_{12})^2 (4 - F_{12}^2) . \end{aligned} \quad (4.148)$$

Por otra parte, las coherencias de  $\rho_A^{ST}$  están dadas por

$$\langle 0, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 1 \rangle = i e^{i\delta_L t} \frac{9\sqrt{2}}{\kappa} \bar{G}_1^3 F_{12} [ 3(2 + 3F_{12})(4 - F_{12}^2) + 8(4 + 2F_{12} - 3F_{12}^2) \bar{G}_1^2 ] ,$$

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1 | \rho_A^{ST} | 0, 0 \rangle &= \langle 0, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 1 \rangle^* , \\
\langle 1, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 1 \rangle &= ie^{i\delta_L t} \frac{9\sqrt{2}}{G_1^3} \bar{G}_1^3 F_{12} \left[ 3(2 - 3F_{12})(4 - F_{12}^2) + 8(4 - 2F_{12} - 3F_{12}^2)\bar{G}_1^2 \right] , \\
\langle 1, 1 | \rho_A^{ST} | 1, 0 \rangle &= \langle 1, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 1 \rangle^* , \\
\langle 1, -1 | \rho_A^{ST} | 1, 0 \rangle &= -ie^{i\delta_L t} \frac{\sqrt{2}}{4\kappa} \bar{G}_1 \left[ 32(32 - 12F_{12} - 18F_{12}^2 + 27F_{12}^3)\bar{G}_1^4 \right. \\
&\quad \left. + 36(32 - 24F_{12} - 4F_{12}^2 + 54F_{12}^3 - 9F_{12}^4)\bar{G}_1^2 \right. \\
&\quad \left. + 9(2 - 3F_{12})^2(2 + 3F_{12})(4 - F_{12}^2) \right] , \\
\langle 1, 0 | \rho_A^{ST} | 1, -1 \rangle &= \langle 1, -1 | \rho_A^{ST} | 1, 0 \rangle^* , \\
\langle 1, -1 | \rho_A^{ST} | 0, 0 \rangle &= -ie^{i\delta_L t} \frac{\sqrt{2}}{4\kappa} \bar{G}_1 \left[ 32(32 + 12F_{12} - 18F_{12}^2 - 27F_{12}^3)\bar{G}_1^4 \right. \\
&\quad \left. + 36(32 + 24F_{12} - 4F_{12}^2 - 54F_{12}^3 + 9F_{12}^4)\bar{G}_1^2 \right. \\
&\quad \left. + 9(2 + 3F_{12})^2(2 - 3F_{12})(4 - F_{12}^2) \right] , \\
\langle 0, 0 | \rho_A^{ST} | 1, -1 \rangle &= \langle 1, -1 | \rho_A^{ST} | 0, 0 \rangle^* , \\
\langle 1, -1 | \rho_A^{ST} | 1, 1 \rangle &= \frac{3}{2\kappa} e^{i2\delta_L t} F_{12} \bar{G}_1^2 \left[ -256\bar{G}_1^4 - 9(64)F_{12}^2 \bar{G}_1^2 + 9(16 - 40F_{12}^2 + 9F_{12}^4) \right] , \\
\langle 1, 1 | \rho_A^{ST} | 1, -1 \rangle &= \langle 1, -1 | \rho_A^{ST} | 1, 1 \rangle^* , \\
\langle 0, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 0 \rangle &= \frac{\bar{G}_1^2}{\kappa} \left[ 512\bar{G}_1^4 + 36(16 + 16F_{12}^2 - 9F_{12}^4)\bar{G}_1^2 + 9(16 - 40F_{12}^2 + 9F_{12}^4) \right] , \\
\langle 1, 0 | \rho_A^{ST} | 0, 0 \rangle &= \langle 0, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 0 \rangle^* .
\end{aligned} \tag{4.149}$$

La primera observación que hacemos es que algunas coherencias de  $\rho_A^{ST}$  dependen explícitamente del tiempo. Entonces, en el IP que estamos trabajando no existe una solución estacionaria a menos que el sistema esté en resonancia, esto es,  $\delta_L = 0$ . Notamos que la solución en (4.147) y (4.149) sería aproximadamente válida si el desentonamiento  $\delta_L$  es suficientemente pequeño. Por ejemplo, si  $|\delta_L t| \ll 1$ , entonces la solución sería aproximadamente válida. En lo que sigue nos vamos a restringir al caso en que la solución estacionaria sí existe, esto es, nos restringimos al caso resonante  $\delta_L = 0$ .

La segunda observación es que para cualquier condición inicial el operador de densidad de los dos átomos  $\rho_A(t)$  tiende al estado  $\rho_A^{ST}$  definido en las ecuaciones (4.147) y (4.149) si  $\delta_L = 0$  (notamos que en esta configuración  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > 0$ , pues  $G_2 = 0$  y  $G_1 \neq 0$ ). Ahora vamos a mostrar que esta afirmación es cierta. Tomamos  $G_2 = 0$  y  $\delta_L = 0$  y escogemos la base del triplete y el singulete para el espacio de estados de los dos átomos. La ecuación (4.144) con la condición inicial  $\rho_A(0)$  se puede reexpresar como un problema de valores iniciales (IVP) de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbb{A}\mathbf{x}(t) , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \tag{4.150}$$

Aquí  $\mathbf{x}(t)$  es un vector columna con 16 componentes complejas asociado a  $\rho_A(t)$ ,  $\mathbb{A}$  es una matriz constante compleja de  $16 \times 16$  y  $\mathbf{x}_0$  es un vector columna con 16 componentes complejas definido por  $\rho_A(0)$ . El IVP en (4.150) tiene una única solución de la forma [77]

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} \mathbf{v}_1(t) + \dots + c_{16} e^{-\lambda_{16} t} \mathbf{v}_{16}(t) , \tag{4.151}$$



donde  $-\lambda_j$  son los eigenvalores complejos de  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbf{v}_j(t)$  son vectores cuyas componentes son polinomios de grado menor o igual a la multiplicidad algebraica del eigenvalor correspondiente  $-\lambda_j$  y  $c_j$  son constantes complejas determinadas por  $\mathbf{x}_0$ . Cuando un eigenvalor  $-\lambda_j$  tiene una multiplicidad algebraica igual a su multiplicidad geométrica, entonces los vectores correspondientes  $\mathbf{v}_j$  se reducen a eigenvectores linealmente independientes asociados con  $-\lambda_j$ .

Se puede mostrar que cero es un eigenvalor de  $\mathbb{A}$  con multiplicidad algebraica igual a 1 y que el resto de los eigenvalores tienen parte real negativa (esto es,  $\text{Re}(\lambda_j) > 0$ ). Entonces, si es necesario renumerando los eigenvalores, podemos tomar  $\lambda_1 = 0$  y  $\mathbf{v}_1$  es un eigenvector de  $\mathbb{A}$  asociado con  $\lambda_1 = 0$ . Se sigue que

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow c_1 e^{-\lambda_1 t} \mathbf{v}_1(t) = c_1 \mathbf{v}_1 \quad \text{si } t \rightarrow +\infty. \quad (4.152)$$

donde  $c_1 \mathbf{v}_1$  está asociado con  $\rho_A^{ST}$ . Por lo tanto,  $\rho_A(t)$  tiende a  $\rho_A^{ST}$  para cualquier condición inicial si  $t \rightarrow +\infty$ .

Hay varios casos límite de interés. Primero, si  $\bar{G}_1 \rightarrow 0$ , entonces se sigue de (4.147) y (4.149) que  $\rho_{12}^{ST} \rightarrow |1, -1\rangle\langle 1, -1|$ . Este resultado es esperado, pues los átomos están localizados en posiciones distintas y, al no estar forzados por el láser, el reservorio los deja finalmente en sus respectivos estados base.

Otro caso límite de mayor interés ocurre cuando el campo eléctrico del láser es muy intenso ( $|\bar{G}_1| \rightarrow +\infty$ ). A partir de (4.147)-(4.149) vemos que la representación matricial de  $\rho_A^{ST}$  en la base del producto tensorial  $\mathbf{B}'$  toma la forma de un estado  $X$  (ver (2.187) y el párrafo que le sigue):

$$[\rho_A^{ST}]_{\mathbf{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{9}{4}F_{12}^2}{16+9F_{12}^2} & 0 & 0 & -\frac{3F_{12}}{16+9F_{12}^2} \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\frac{9}{4}F_{12}^2}{16+9F_{12}^2} & -\frac{3F_{12}}{16+9F_{12}^2} & 0 \\ 0 & -\frac{3F_{12}}{16+9F_{12}^2} & \frac{\frac{9}{4}F_{12}^2}{16+9F_{12}^2} & 0 \\ -\frac{3F_{12}}{16+9F_{12}^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\frac{9}{4}F_{12}^2}{16+9F_{12}^2} \end{pmatrix}. \quad (4.153)$$

En este caso, las poblaciones de los estados de la base del triplete y el singulete  $\mathbf{B}$  toman la forma

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 | \rho_A^{ST} | 1, 1 \rangle &= \frac{\frac{9}{4}F_{12}^2}{16 + 9F_{12}^2}, \\ \langle 1, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 0 \rangle &= \frac{1}{4} - \frac{3F_{12}}{16 + 9F_{12}^2}, \\ \langle 1, -1 | \rho_A^{ST} | 1, -1 \rangle &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{9}{4}F_{12}^2}{16 + 9F_{12}^2}, \\ \langle 0, 0 | \rho_A^{ST} | 0, 0 \rangle &= \frac{1}{4} + \frac{3F_{12}}{16 + 9F_{12}^2}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Recordamos que  $F_{12}$  toma su valor máximo absoluto de  $2/3$  cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  (independientemente del valor de  $d_{\perp}^2$ ) y su valor mínimo absoluto de  $-0.2237$  cuando  $\omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c = 4.233$  y  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ . Entonces podemos establecer cotas a las poblaciones en (4.154). Notamos que las

poblaciones de los estados  $|1, 1\rangle$  and  $|0, 0\rangle$  no pueden crecer más de  $1/20$  y  $1/4 + 1/10$ , respectivamente. Además, estos valores máximos se alcanzan cuando los átomos están muy cerca y el campo eléctrico es muy intenso. Al mismo tiempo, las poblaciones de los estados  $|1, -1\rangle$  y  $|1, 0\rangle$  toman sus valores mínimos de  $1/2 - 1/20$  y  $1/4 - 1/10$ . Notamos que la interacción disipativa entre los átomos a través del reservorio es la responsable de la población distinta de cero del estado  $|1, 1\rangle$ . Sin embargo, esta interacción no es muy efectiva, pues la población de dicho estado puede alcanzar sólo el valor pequeño de  $1/20$  para intensidades del láser muy altas. Por otra parte, intuitivamente uno pensaría que entre más intenso fuera el campo del láser la población del estado  $|1, 1\rangle$  sería más alta. Sin embargo, esto no ocurre, pues la población de este estado se maximiza para intensidades pequeñas.

Ahora vamos a tomar el límite de dos átomos muy separados ( $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow +\infty$ ). De (4.147) y (4.149) obtenemos la siguiente matriz de densidad en la base producto tensorial  $\mathbf{B}'$ :

$$[\rho_A^{ST}]_{\mathbf{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\bar{G}_1^2}{1+8\bar{G}_1^2} & 0 & i\frac{2\bar{G}_1}{1+8\bar{G}_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{2\bar{G}_1}{1+8\bar{G}_1^2} & 0 & \frac{1+4\bar{G}_1^2}{1+8\bar{G}_1^2} \end{pmatrix}. \quad (4.155)$$

Notamos que en este caso el sistema se comporta como si los dos átomos estuvieran interactuando con reservorios independientes. Entonces los átomos no interactúan entre sí. Por consiguiente, la población del estado  $|1, 1\rangle = |+, +\rangle$  es cero, pues sólo un átomo está siendo forzado por el campo del láser.

Un último caso límite de gran interés ocurre cuando la intensidad del láser es muy pequeña cuando se le compara con la tasa de emisión espontánea de un sólo átomo ( $|\bar{G}_1| \ll 1$ ). A partir de las ecuaciones (4.147)-(4.149) encontramos que a segundo orden en  $\bar{G}_1$  la matriz de densidad estacionaria en la base del triplete y el singulete  $\mathbf{B}$  toma la forma

$$[\rho_A^{ST}]_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3F_{12}\bar{G}_1^2}{1-(\frac{3}{2}F_{12})^2} & 0 \\ 0 & \frac{2\bar{G}_1^2}{(1+\frac{3}{2}F_{12})^2} & i\frac{\sqrt{2}\bar{G}_1}{1+\frac{3}{2}F_{12}} & \frac{2\bar{G}_1^2}{1-(\frac{3}{2}F_{12})^2} \\ \frac{3F_{12}\bar{G}_1^2}{1-(\frac{3}{2}F_{12})^2} & -i\frac{\sqrt{2}\bar{G}_1}{1+\frac{3}{2}F_{12}} & 1 - \frac{2\bar{G}_1^2}{(1+\frac{3}{2}F_{12})^2} - \frac{2\bar{G}_1^2}{(1-\frac{3}{2}F_{12})^2} & -i\frac{\sqrt{2}\bar{G}_1}{1-\frac{3}{2}F_{12}} \\ 0 & \frac{2\bar{G}_1^2}{1-(\frac{3}{2}F_{12})^2} & i\frac{\sqrt{2}\bar{G}_1}{1-\frac{3}{2}F_{12}} & \frac{2\bar{G}_1^2}{(1-\frac{3}{2}F_{12})^2} \end{pmatrix}. \quad (4.156)$$

Notamos que  $\bar{G}_1^2$  debe ser lo suficientemente pequeño de tal manera que (4.156) tenga sentido, pues la población del singulete  $|0, 0\rangle$  en (4.156) diverge si la distancia entre los dos átomos tiende a cero. De hecho, debe ocurrir que

$$\bar{G}_1^2 \leq \frac{1}{4} \frac{(1 - \frac{3}{2}F_{12})^2 (1 + \frac{3}{2}F_{12})^2}{1 + (\frac{3}{2}F_{12})^2}, \quad (4.157)$$

para tener  $\langle 1, 0 | \rho_A^{ST} | 1, 0 \rangle + \langle 0, 0 | \rho_A^{ST} | 0, 0 \rangle \leq 1$ . Si uno usa la cota en (4.157), entonces se sigue

de (4.156) que

$$\begin{aligned}\langle 1,0|\rho_A^{ST}|1,0\rangle &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}F_{12}}{1 + (\frac{3}{2}F_{12})^2} \rightarrow 0 && \text{cuando } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+ \\ \langle 0,0|\rho_A^{ST}|0,0\rangle &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}F_{12}}{1 + (\frac{3}{2}F_{12})^2} \rightarrow 1 && \text{cuando } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+.\end{aligned}\quad (4.158)$$

Luego, el estado  $|0,0\rangle$  está mucho más poblado que el estado  $|1,0\rangle$  si tanto la intensidad del láser como la distancia entre los átomos es pequeña.

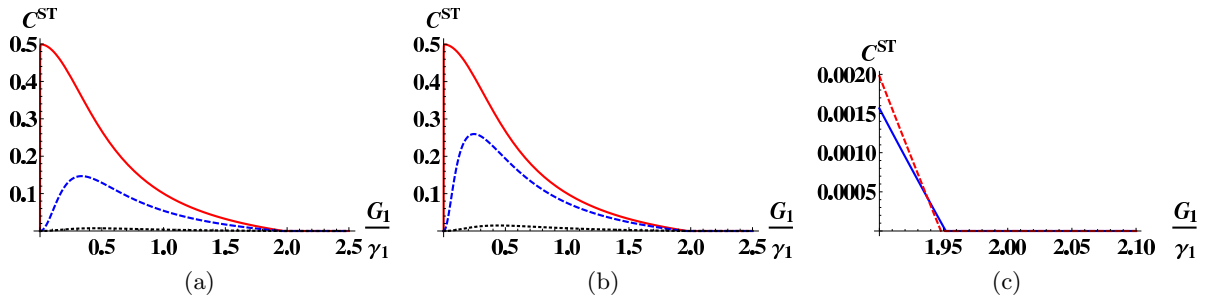


Figura 4.12: Caso  $G_2 = 0$ : Las figuras (4.12a) y (4.12b) muestran la concurrencia estacionaria  $C^{ST}$  de los dos átomos como función de  $\bar{G}_1 = G_1/\gamma_1$  cuando  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_\perp = 0$ , respectivamente. Se muestran los resultados cuando la distancia entre los dos átomos es  $\lambda_A/100$  (línea roja sólida),  $\lambda_A/4$  (línea azul segmentada) y  $\lambda_A$  (línea negra punteada) con  $\lambda_A$  la longitud de onda asociada con la transición atómica. La figura (4.12c) muestra un acercamiento de la muerte súbita del enredamiento cuando la distancia entre los dos átomos es  $\lambda_A/4$ . Esto se muestra para los casos  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  (línea azul sólida) y  $d_\perp = 0$  (línea roja segmentada).

Ahora vamos a discutir el grado de enredamiento de  $\rho_A^{ST}$  medido por la concurrencia  $C^{ST}$ , Fig. (4.12). Observamos que conforme la intensidad del campo del láser se incrementa ( $\bar{G}_1$  crece), la concurrencia  $C^{ST}$  crece, toma un valor máximo y después decrece para desaparecer abruptamente, Fig. (4.12). Esta muerte súbita del enredamiento como función de la intensidad del láser se encuentra para la mayoría de los valores de la distancia entre los dos átomos. Notamos que  $C^{ST}$  toma valores grandes sólo cuando la distancia entre los átomos es menor que la longitud de onda asociada con la transición atómica y la intensidad del láser es tal que  $\bar{G}_1 = G_1/\gamma_1 \leq 1$ . Esto refleja el hecho de que los átomos se pueden enredar intercambiando fotones emitidos espontáneamente sólo cuando están suficientemente cerca.

A continuación vamos a explicar el comportamiento de  $C^{ST}$ . Para esto vamos a considerar el caso de un láser con intensidad baja. La concurrencia del operador de densidad en (4.156) se puede calcular fácilmente:

$$C^{ST} = \frac{3}{2}|F_{12}| \left( \langle 0,0|\rho_A^{ST}|0,0\rangle + \langle 1,0|\rho_A^{ST}|1,0\rangle \right), \quad (4.159)$$

a segundo orden en  $\bar{G}_1$ . Luego, observamos que la concurrencia estacionaria está determinada por las poblaciones de los estados  $|0,0\rangle$  and  $|1,0\rangle$  cuando la intensidad del láser es baja. Si, además,

los átomos están cerca, a partir de (4.158) notamos que la población del singulete  $|0,0\rangle$  es mucho mayor que la del estado  $|1,0\rangle$ . Por lo tanto, la población del estado  $|0,0\rangle$  junto con la función  $F_{12}$  determinan el comportamiento de la concurrencia estacionaria. Esto se puede comprobar en la figura (4.13) donde además se observa que la población del singulete  $|0,0\rangle$  es responsable en gran medida del comportamiento de la concurrencia no sólo para intensidades bajas del láser. A partir de esa figura también notamos que, cuando la distancia entre los átomos es menor a una longitud de onda asociada a la transición atómica, la concurrencia crece con la población del singulete  $|0,0\rangle$  y se maximiza cuando ésta se maximiza. Conforme dicha población decrece a su valor asintótico (esto es, cuando  $\bar{G}_1 \rightarrow +\infty$ ), la concurrencia decrece a cero. Es importante notar que este comportamiento no aparece cuando los dos átomos están separados por más de una longitud de onda asociada a la transición atómica, Fig. (4.13c). Esto se explica usando las ecuaciones (4.158) y (4.159) para intensidades bajas del láser. Cuando los átomos están más separados  $F_{12}$  tiende a 0 y a partir de la ecuación (4.158) encontramos que las poblaciones de los niveles  $|0,0\rangle$  y  $|1,0\rangle$  tienden a ser iguales. Por lo tanto, a partir de la ecuación (4.159) observamos que la concurrencia estacionaria está determinada por las poblaciones de estos dos estados y no por una sola de ellas como en el caso en que los átomos están cerca.

Ahora pasamos a explicar por qué la concurrencia estacionaria desaparece cuando la intensidad del láser es muy alta. A partir de la ecuación (4.153) vemos que la matriz de densidad en la base desacoplada adquiere la forma asintótica de estado  $X$ . Entonces notamos que la intensidad del láser es tan alta que muchas coherencias se han hecho cero y las transiciones atómicas se han saturado, esto es, las poblaciones han alcanzado sus valores asintóticos. Más aún, la concurrencia del estado  $X$  en (4.153) se puede calcular fácilmente y vale cero.

También notamos que el decaimiento de  $C^{ST}$  con la distancia entre los dos átomos es más lento cuando  $d_{\perp}^2 = 0$ , esto es, cuando el elemento de matriz  $\mathbf{d}_{01}$  de los momentos dipolares de los dos átomos es paralelo a la línea que los une. Además,  $C^{ST}$  exhibe un comportamiento oscilatorio como función de esta distancia que es más notorio cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ , Figs. (4.12) y (4.14). Este comportamiento se puede explicar fácilmente en el caso de un láser de baja intensidad ( $\bar{G}_1$  es pequeño). A partir de la ecuación (4.159) observamos que  $C^{ST}$  depende de  $|F_{12}|$  y ésta es una función que oscila como función de la distancia entre los dos átomos (ver la ecuación (4.38)). Estas oscilaciones son de mayor amplitud cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y se suavizan cuando  $d_{\perp}^2 = 0$ . Es por esto que  $C^{ST}$  tiene mayores oscilaciones cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  que cuando  $d_{\perp}^2 = 0$ .

En los párrafos anteriores hemos establecido que para cualquier distancia entre los dos átomos el enredamiento presente en el sistema desaparece si la intensidad del láser es lo suficientemente alta, esto es,  $\bar{G}_1$  ha alcanzado un valor suficientemente alto. Entonces es natural preguntar si todas las correlaciones cuánticas han desaparecido. En vista de que las discordias cuántica y geométrica se pueden usar como medidas para cuantificar correlaciones cuánticas distintas del enredamiento, procedemos a investigar estas cantidades cuando las mediciones se llevan a cabo sobre uno u otro átomo. Empezamos estudiando el caso límite  $\bar{G}_1 \rightarrow +\infty$  plasmado en la ecuación (4.153). Como la matriz de densidad en la base desacoplada tiene la estructura de un estado  $X$  en este caso, podemos calcular analíticamente algunas de las correlaciones.

Consideramos primero el caso en que las mediciones se hacen sobre el átomo en la posición

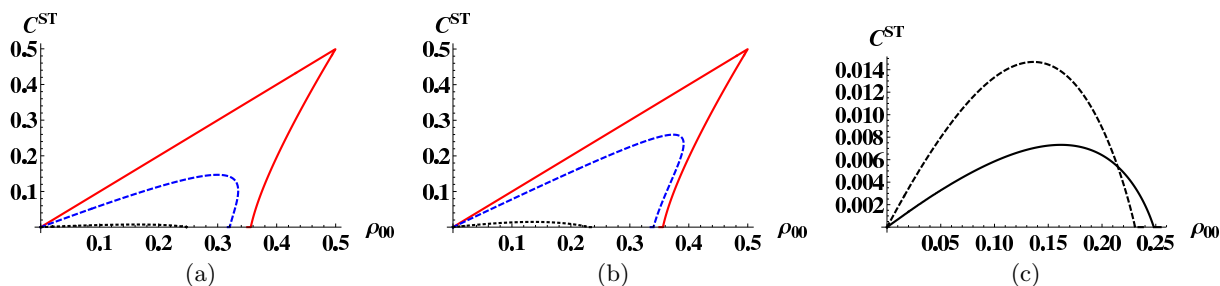


Figura 4.13: Caso  $G_2 = 0$ : Las figuras (4.13a) y (4.13b) muestran la concurrencia estacionaria  $C^{ST}$  de los dos átomos como función de la población  $\rho_{00}$  del singlete  $|0, 0\rangle$  cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_{\perp}^2 = 0$ , respectivamente. Se muestran resultados cuando la distancia entre los dos átomos es  $\lambda_A/100$  (línea roja sólida),  $\lambda_A/4$  (línea azul segmentada) y  $\lambda_A$  (línea negra punteada) con  $\lambda_A$  la longitud de onda asociada con la transición atómica. La figura (4.13c) muestra un acercamiento cuando la distancia entre los dos átomos es  $\lambda_A$ . Esto se muestra para los casos  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  (línea negra sólida) y  $d_{\perp}^2 = 0$  (línea negra segmentada).

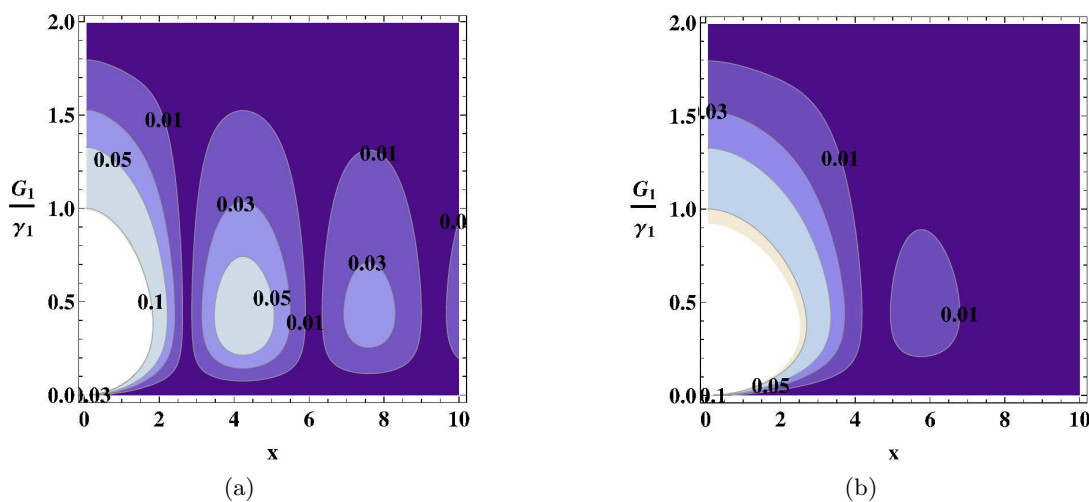


Figura 4.14: Caso  $G_2 = 0$ : Las figuras (4.14a) y (4.14b) muestran contornos de la concurrencia estacionaria  $C^{ST}$  como función de  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| / c$  (eje horizontal) y  $\bar{G}_1$  (eje vertical) para los casos  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_{\perp}^2 = 0$ , respectivamente. Se muestran los contornos para  $C^{ST} = 0.1, 0.05, 0.03, 0.01$ .

$\mathbf{r}_2$ . La información cuántica mutua estacionaria  $I(\rho_A^{ST})$  está dada por:

$$I(\rho_A^{ST}) = \frac{-4 + \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \log_2(-4 + \sqrt{y}) - \frac{\frac{9}{2}F_{12}^2}{y} \log_2\left(\frac{9}{2}F_{12}^2\right) + \frac{1}{2} \log_2(y) \\ + \frac{4 + \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \log_2(4 + \sqrt{y}) - \frac{16 + \frac{9}{2}F_{12}^2}{y} \log_2\left(16 + \frac{9}{2}F_{12}^2\right) - 1, \quad (4.160)$$

donde  $y = 16 + 9F_{12}^2$ . Calculamos numéricamente la discordia cuántica y las correlaciones clásicas usando el método introducido en el Capítulo 2.

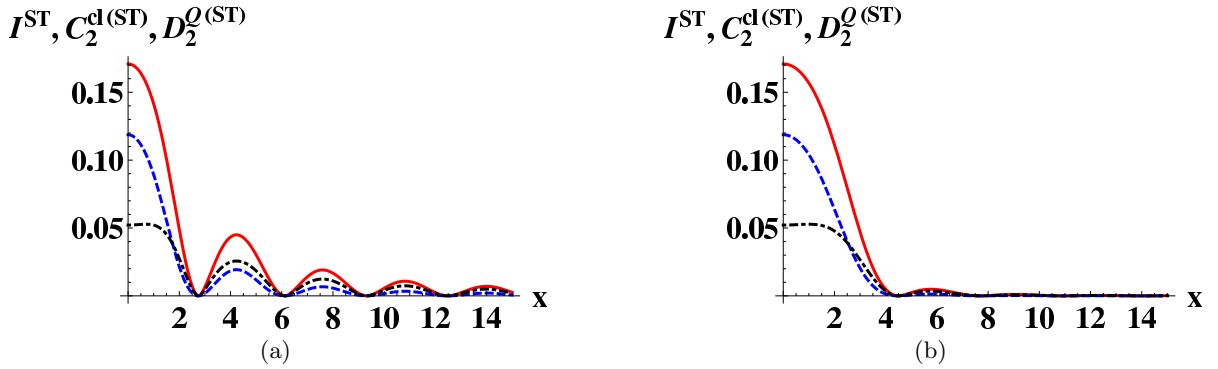


Figura 4.15: Caso  $G_2 = 0$ : Las figuras (4.15a) y (4.15b) muestran la información cuántica mutua estacionaria  $I^{ST}$  (línea roja sólida), las correlaciones clásicas  $C_2^{cl(ST)}$  (línea azul punteada) y discordia cuántica  $D_2^Q(ST)$  (línea negra punteada-segmentada) como función de  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  en el límite  $|\bar{G}_1| \rightarrow +\infty$ . Aquí las mediciones se hacen sobre el átomo en la posición  $\mathbf{r}_2$ . (4.15a) muestra el caso  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ , mientras que (4.15b) muestra el caso  $d_\perp^2 = 0$ .

La figura (4.15) muestra estas tres correlaciones como función de  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$ . La primera observación es que  $\rho_A^{ST}$  tiene tanto correlaciones cuánticas como correlaciones clásicas aún cuando el enredamiento desapareció (de la figura (4.12) vemos que se anula alrededor de  $\bar{G}_1 = 2$ ). En particular, las correlaciones cuánticas son más grandes que las clásicas excepto para  $x \leq 2$ . Más aún, notamos que las tres correlaciones oscilan como función de la distancia entre los átomos y que este comportamiento oscilatorio es mucho más pronunciado cuando  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ . Además, la discordia cuántica es exactamente igual a cero para ciertas distancias. El comportamiento oscilatorio y la localización exacta de los ceros discretos de  $D_2^Q(\rho_A^{ST})$  están determinados por  $F_{12}$  (ver más abajo para una justificación analítica de esto). Finalmente, notamos que  $D_2^Q(\rho_A^{ST}) = I(\rho_A^{ST}) = C_2^{cl}(\rho_A^{ST}) = 0$  cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow +\infty$ . Entonces,  $\rho_A^{ST}$  no tiene correlaciones cuando los átomos están muy separados. Esto es esperado, pues los átomos no interactúan entre sí en ese caso.

Dado que la discordia cuántica se puede calcular fácilmente para estados  $X$ , es de gran interés compararla con la discordia geométrica para ver qué tan bien estima la segunda a la primera.

Para el estado  $X$  en cuestión, la discordia geométrica  $D_2^{(2)}(\rho_A^{ST})$  se puede calcular fácilmente como sigue:

$$D_2^{(2)}(\rho_{12}^{ST}) = \frac{36F_{12}^2}{(16 + 9F_{12}^2)^2}. \quad (4.161)$$

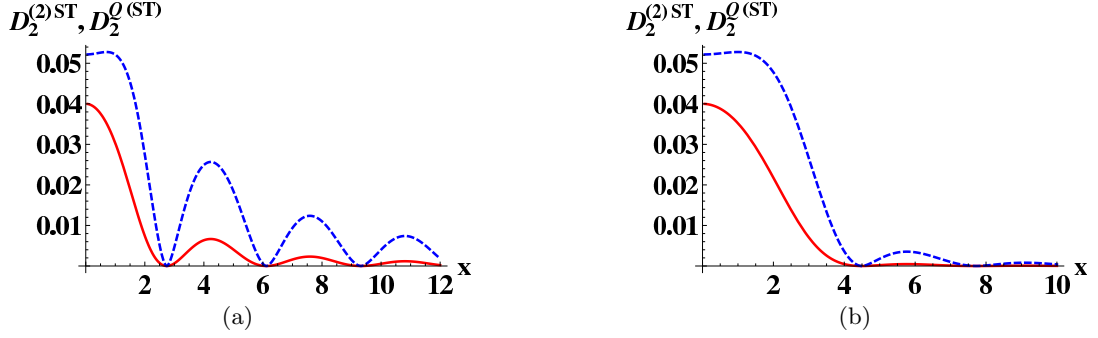


Figura 4.16: Caso  $G_2 = 0$ : Las figuras (4.16a) y (4.16b) muestran la discordia cuántica estacionaria  $D_2^Q(\rho_A^{ST})$  (línea azul punteada) y la discordia geométrica  $D_2^{(2)}(\rho_A^{ST})$  (línea roja sólida) como función de  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  en el límite  $\bar{G}_1 \rightarrow +\infty$ . Las mediciones se hacen sobre el átomo en la posición  $\mathbf{r}_2$ . La figura (4.16a) muestra el caso  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ , mientras que la figura (4.16b) muestra el caso  $d_\perp^2 = 0$ .

De la figura (4.16) observamos que  $D_2^{(2)}(\rho_{12}^{ST})$  reproduce cualitativamente muy bien el comportamiento de  $D_2^Q(\rho_A^{ST})$ . En particular, tienen los mismos ceros. Además, de (4.161) vemos que tanto el comportamiento oscilatorio como la localización de los ceros de  $D_2^{(2)}(\rho_A^{ST})$  están determinados por  $F_{12}$ . Luego, se sigue que los ceros de  $D_2^Q(\rho_A^{ST})$  son exactamente los ceros de  $F_{12}$ , ver (4.38) para la definición de  $F_{12}$ . Notamos que las oscilaciones de  $D_2^Q(\rho_A^{ST})$  decrecen en amplitud cuando  $d_\perp^2 = 0$  y que esto se debe a que las oscilaciones de  $F_{12}$  se suavizan cuando  $d_\perp^2 = 0$ . Sin embargo, observamos que la discordia cuántica es considerablemente más grande que la discordia geométrica en (4.161), por lo que  $D_2^{(2)}(\rho_A^{ST})$  no describe cuantitativamente muy bien a  $D_2^Q(\rho_{12}^{ST})$  (excepto en determinar los ceros de  $D_2^Q(\rho_A^{ST})$ ).

La discordia geométrica nos permite calcular fácilmente un estimador de la discordia cuántica en el caso general (4.147)-(4.149). La figura (4.17) muestra que para una distancia fija entre los átomos la discordia geométrica rápidamente alcanza el valor dado en la ecuación (4.161). Notamos que el decaimiento de la discordia geométrica como función de la distancia entre los átomos es más lento cuando  $d_\perp^2 = 0$ . Este hecho se puede ver más fácilmente en la figura (4.18). En éstas se observa que, como función de la distancia entre los átomos, la discordia geométrica tiene oscilaciones de mayor magnitud cuando  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ . Vimos arriba que éstas son debidas a la función  $F_{12}$ .

Ahora consideramos el caso en que las mediciones se hacen sobre el átomo en la posición  $\mathbf{r}_1$ . En el caso límite  $|\bar{G}_1| \rightarrow +\infty$ ,  $\rho_A^{ST}$  toma la forma de un estado  $X$ , ver (4.153). La información cuántica mutua es igual que antes (su valor es independiente de cuál átomo se mide). Usando

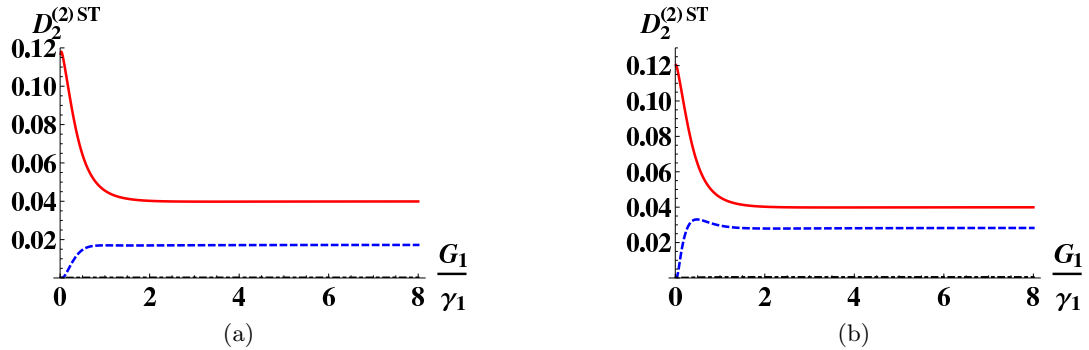


Figura 4.17: Caso  $G_2 = 0$ : Las figuras (4.17a) y (4.17b) muestran la discordia geométrica estacionaria  $D_2^{(2)ST}$  como función de  $\bar{G}_1 = G_1/\gamma_1$  para distancias entre los átomos iguales a  $\lambda_A/100$  (línea roja sólida),  $\lambda_A/4$  (línea azul segmentada) y  $\lambda_A$  (línea negra punteada) donde  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada con la transición atómica. La figura (4.17a) muestra el caso  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ , mientras que la figura (4.17b) muestra el caso  $d_\perp^2 = 0$ .

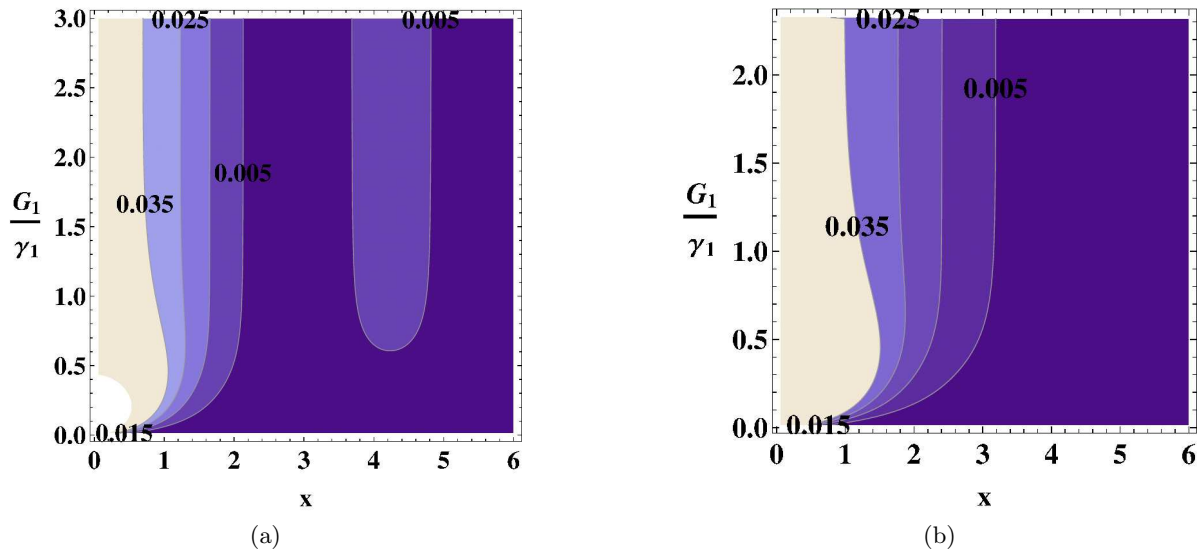


Figura 4.18: Caso  $G_2 = 0$ : Las figuras (4.18a) y (4.18b) muestran contornos de la discordia geométrica estacionaria  $D_2^{(2)}(\rho_A^{ST})$  como función de  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  (eje horizontal) y  $\bar{G}_1$  (eje vertical) para los casos  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_\perp^2 = 0$ , respectivamente. Se dibujan los contornos  $D_2^{(2)}(\rho_A^{ST}) = 0.035, 0.025, 0.015, 0.005$ .



el método del Capítulo 2 podemos calcular numéricamente tanto las correlaciones clásicas como la discordia cuántica izquierda. Obtuvimos que  $D_1^Q(\rho_A^{ST})$  es cero, mientras que las correlaciones clásicas  $C_1^{cl}(\rho_A^{ST})$  son iguales a  $I(\rho_A^{ST})$ . Por lo tanto, toda la información del átomo en la posición  $\mathbf{r}_2$  que está contenida en las correlaciones de  $\rho_A^{ST}$  se puede extraer determinando el estado del átomo en la posición  $\mathbf{r}_1$  [38]. Esto contrasta grandemente con el caso en que las mediciones se hacen sobre el átomo en  $\mathbf{r}_2$ , pues encontramos en ese caso que  $\rho_A^{ST}$  presenta discordia cuántica no despreciable. Entonces, cuando se hacen mediciones sólo sobre el átomo en la posición  $\mathbf{r}_2$ , hay información sobre el átomo en  $\mathbf{r}_1$  contenida en las correlaciones de  $\rho_A^{ST}$  que no se puede extraer. Además, aquí tenemos otro ejemplo en que tanto las correlaciones clásicas como la discordia cuántica no son simétricas:  $D_1^Q(\rho_A^{ST}) \neq D_2^Q(\rho_A^{ST})$  y  $C_1^{cl}(\rho_A^{ST}) \neq C_2^{cl}(\rho_A^{ST})$ .

Nuevamente, el uso de la discordia geométrica nos permite estimar la discordia cuántica en el caso general (4.147)-(4.149). A partir de la figura (4.19) notamos que la discordia geométrica como función de  $\bar{G}_1$  es una función suave por partes, puesto que presenta esquinas. Además, tiende a cero conforme  $\bar{G}_1$  se incrementa, un resultado que concuerda con el obtenido arriba  $D_1^Q(\rho_A^{ST}) = 0$  en el límite  $\bar{G}_1 \rightarrow 0$ . En la figura (4.20) se muestran gráficas de contorno de  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$ . Notamos que  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$  decae más lentamente como función de la distancia entre los átomos para  $d_{\perp}^2 = 0$  cuando se le compara a  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ . Además, comparando las figuras (4.18) y (4.20) vemos que  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$  es drásticamente diferente a  $D_2^{(2)}(\rho_A^{ST})$ .

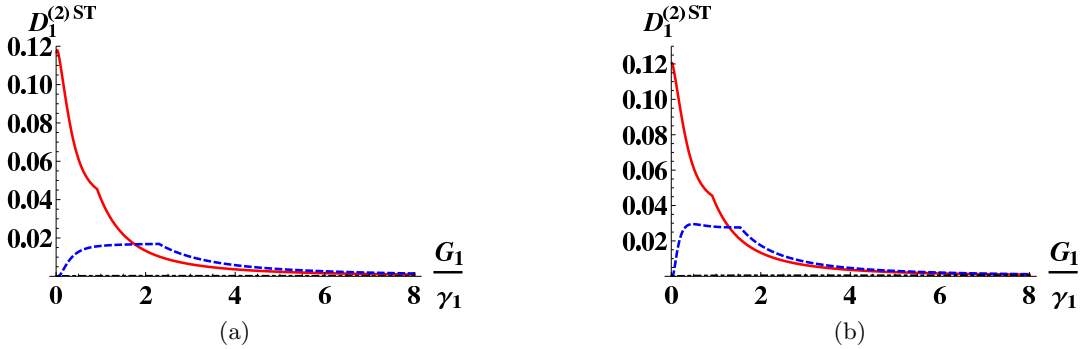


Figura 4.19: Caso  $G_2 = 0$ : las figuras (4.19a) y (4.19b) muestran la discordia geométrica estacionaria  $D_1^{(2)ST}$  como función de  $\bar{G}_1 = G_1/\gamma_1$  cuando la distancia entre los átomos es  $\lambda_A/100$  (línea roja sólida),  $\lambda_A/4$  (línea azul segmentada) y  $\lambda_A$  (línea negra punteada) donde  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada con la transición atómica. La figura (4.19a) muestra el caso  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ , mientras que la figura (4.19b) muestra el caso  $d_{\perp}^2 = 0$ .

Ahora vamos a discutir el grado de mezcla de  $\rho_A^{ST}$ , Fig. (4.21). Conforme la intensidad del láser aumenta ( $\bar{G}_1$  crece), la entropía lineal  $S_L^{ST}$  crece hasta alcanzar el valor asintótico

$$S_L^{ST} = \frac{3}{4} - \frac{4}{16 + 9F_{12}^2}. \quad (4.162)$$

Este valor se calcula fácilmente a partir de la ecuación (4.153). Notamos que el sistema de dos átomos nunca está en un estado máximamente mezclado y que el valor máximo de la entropía

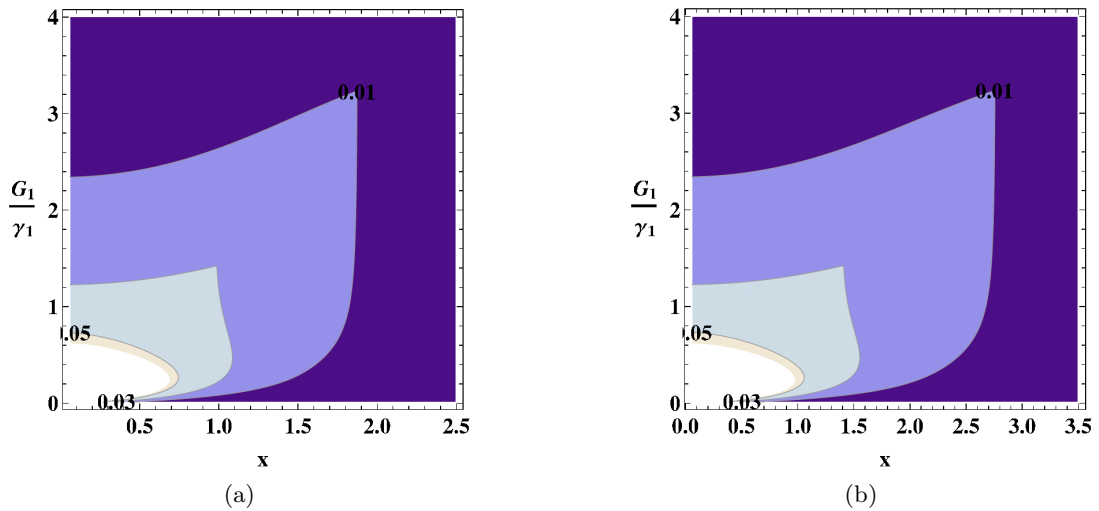


Figura 4.20: Caso  $G_2 = 0$ : Las figuras (4.20a) y (4.20b) muestran contornos de la discordia geométrica  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$  como función de  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  (eje horizontal) y  $\bar{G}_1 = G_1/\gamma_1$  (eje vertical) para los casos  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_\perp^2 = 0$ , respectivamente. Se dibujan los contornos  $D_1^{(2)}(\rho_{12}^{ST}) = 0.05, 0.03, 0.01$ .

lineal es  $11/20$  y ocurre cuando los átomos están muy cerca. Además, la entropía lineal toma el valor asintótico de  $1/2$  cuando los átomos están muy separados. Este comportamiento es entendible, pues la interacción disipativa entre los átomos a través del reservorio es más grande cuando los átomos están cerca y decrece a cero cuando éstos empiezan a alejarse. Más aún, recordamos que cuando se tiene un sólo átomo en una posición fija forzado por el campo de un láser de alta intensidad e interactuando con el reservorio en el vacío hay 50 % de probabilidad de encontrarlo en el estado base y 50 % de probabilidad de encontrarlo en el estado excitado [17]. Notamos que cuando los átomos están muy separados se recupera este comportamiento, pues el átomo en la posición  $\mathbf{r}_2$  no es afectado ni por el láser ni por el otro átomo. Finalmente, notamos que las variaciones de  $S_L^{ST}$  se suavizan cuando  $d_{\perp}^2 = 0$ , Fig. (4.21).

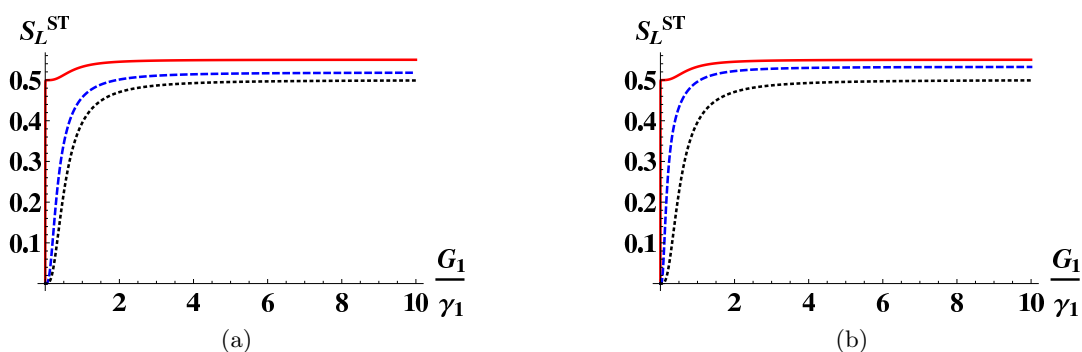


Figura 4.21: Caso  $G_2 = 0$ : Las figuras (4.21a) y (4.21b) muestran la entropía lineal estacionaria  $S_L^{ST}$  como función de  $\bar{G}_1 = G_1/\gamma_1$  para  $d_{\perp}^2 = |d_{01}|^2$  y  $d_{\perp}^2 = 0$ , respectivamente. Se muestran resultados para distancias entre los átomos iguales a  $\lambda_A/100$  (línea roja sólida),  $\lambda_A/4$  (línea azul segmentada) y  $\lambda_A$  (línea negra punteada) donde  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada a la transición atómica.

Para terminar esta sección vamos a discutir la relación que existe entre el enredamiento estacionario entre los dos átomos (medido por la concurrencia  $C^{ST}$ ) y el grado de mezcla estacionario (medido por la entropía lineal  $S_L^{ST}$ ). Conforme el estado se vuelve más mixto, el enredamiento se incrementa hasta que la entropía lineal alcanza un valor a partir del cual el enredamiento decae a cero, ver la figura (4.22a). Este comportamiento corresponde al hecho de que, conforme la intensidad del láser se incrementa, el estado de los dos átomos se enreda y mezcla debido al intercambio de fotones emitidos espontáneamente. Sin embargo, una vez que la intensidad del campo eléctrico es lo suficientemente fuerte como para acercar a las poblaciones de los estados de la base del triplete y el singulete a sus valores asintóticos, el enredamiento empieza a decrecer mientras el estado de los dos átomos continúa aumentando su grado de mezcla. Observamos que el comportamiento exhibido en la figura (4.22a) también demuestra el hecho conocido que un estado mixto de dos qubits no puede contener una cantidad arbitraria de enredamiento: mientras más mezclado esté un estado, menos enredamiento puede tener [78].



no es cero. Si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ , entonces la solución es

$$\rho_A^{ST} = (1 - P_{00})\rho_{A,1}^{ST} + P_{00}|0,0\rangle\langle 0,0|, \quad (4.165)$$

donde  $P_{00}$  es la población del estado  $|0,0\rangle$  en el estado inicial y  $\rho_{A,1}^{ST}$  se obtiene de (4.163) reemplazando  $\kappa_2$  y  $\langle 0,0|\rho_A^{ST}|0,0\rangle$  por

$$\kappa_3 = 12\bar{G}_1^4 + 4\bar{G}_1^2 + 1, \quad (4.166)$$

y 0, respectivamente, y tomando el límite  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0^+$  en la expresión resultante.

Observamos que algunas coherencias dependen explícitamente del tiempo. Entonces, en el esquema de interacción en que estamos trabajando, una solución estacionaria existe sólo en el caso resonante  $\delta_L = 0$ . Las soluciones en (4.163) y (4.165) también serían aproximadamente válidas si el desentonamiento es lo suficientemente pequeño. Por ejemplo, si  $|\delta_L t| \ll 1$ , entonces (4.163) y (4.165) serían aproximadamente soluciones estacionarias si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > 0$  o  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ , respectivamente. En lo que sigue nos vamos a restringir al caso en que la solución estacionaria existe, esto es, vamos a tomar  $\delta_L = 0$ . Además, vamos a considerar sólo el caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > 0$ , aunque haremos algunos comentarios sobre el caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ .

De forma análoga al caso  $\bar{G}_2 = 0$ , se puede mostrar que el operador de densidad  $\rho_A(t)$  de los dos átomos tiende al estado (4.163) para cualquier condición inicial si la distancia entre los dos átomos no es cero y  $\delta_L = 0$ .

El caso  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  y  $\delta_L = 0$  utiliza un argumento un poco distinto. La ecuación maestra (4.144) con la condición inicial  $\rho_A(0)$  se puede reexpresar como un problema de valores iniciales (IVP) de la forma dada en (4.150). Este IVP tiene una única solución de la forma dada en (4.151). Sin embargo, ahora cero es un eigenvalor de  $\mathbb{A}$  con multiplicidades algebraica y geométrica iguales a 2. El resto de los eigenvalores de  $\mathbb{A}$  tienen parte real negativa. Si es necesario reenumerando los eigenvalores, se tiene que

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \tilde{c}_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{c}_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 \quad \text{si } t \rightarrow +\infty. \quad (4.167)$$

Se puede mostrar que  $\mathbf{e}_{16}$  (el vector con un 1 en la componente 16 y 0 en las demás) y el vector asociado con  $\rho_{A,1}^{ST}$  en (4.165) son elementos del espacio nulo de  $\mathbb{A}$  y que  $\mathbf{e}_{16}$  es ortogonal al resto de los eigenvectores de  $\mathbb{A}$ . Entonces  $\tilde{\mathbf{v}}_1$  y  $\tilde{\mathbf{v}}_2$  se pueden escoger como esos dos vectores y, como consecuencia,  $\tilde{c}_1$  y  $\tilde{c}_2$  deben ser iguales respectivamente a  $P_{00}$  y  $1 - P_{00}$  donde  $P_{00}$  es la población del singulete  $|0,0\rangle$  en el estado inicial  $\rho_A(0)$ . Por lo tanto,  $\rho_A(t)$  tiende a (4.165) dado cualquier estado inicial  $\rho_A(0)$  si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$  y  $\delta_L = 0$ .

De la ecuación (4.163) observamos inmediatamente que el efecto de la interacción colectiva con el reservorio es mucho más pequeño en este caso que en el caso  $G_2 = 0$  estudiado arriba. Esto es debido a que el término  $F_{12}$  aparece en combinaciones en las cuales rápidamente se vuelve despreciable cuando  $\bar{G}_1$  crece (ver las ecuaciones (4.163) y (4.164) y los elementos de matriz ahí). Además, notamos que la interacción disipativa entre los átomos a través del reservorio tiene un efecto opuesto en las poblaciones de la base del triplete y singulete cuando se le compara con el caso  $\bar{G}_2 = 0$ . En este último el efecto es incrementar las poblaciones de los estados  $|1,1\rangle$  y  $|0,0\rangle$  y disminuir las de los estados  $|1,0\rangle$  y  $|1,-1\rangle$  cuando los átomos están cerca. Esto se

puede ver fácilmente en las ecuaciones (4.154) donde la intensidad del láser es muy grande. Para  $\bar{G}_1 = \bar{G}_2$  el efecto es disminuir todas las poblaciones de los estados de la base del triplete y singlete, excepto la del estado  $|1, -1\rangle$ . Sin embargo, el efecto es pequeño, pues los términos en  $\bar{G}_1$  rápidamente dominan sobre aquéllos que incluyen a  $F_{12}$  cuando se incrementa la intensidad del láser ( $\bar{G}_1 = \bar{G}_2$  crece).

Aquí también hay varios casos límites de interés. Primero, si  $\bar{G}_1 = \bar{G}_2 \rightarrow 0$ , entonces se ve de la ecuación (4.163) que  $\rho_A^{ST} \rightarrow |1, -1\rangle\langle 1, -1|$ . Este resultado era esperado, pues los átomos están en posiciones diferentes y, sin el láser que esté introduciendo energía al sistema, el reservorio finalmente deja a los dos átomos en sus respectivos estados base. Notamos que este resultado no se hubiera obtenido si los átomos estuvieran en exactamente la misma posición, puesto que el singlete  $|0, 0\rangle$  es invulnerable a la disipación cuando  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0$ .

Cuando la intensidad del láser es baja ( $|\bar{G}_1| = |\bar{G}_2| \ll 1$ ), a partir de la ecuación (4.163) vemos que la representación matricial de  $\rho_A^{ST}$  en la base  $\mathbf{B}$  del triplete y el singlete toma la forma

$$[\rho_A^{ST}]_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{8\bar{G}_1^2}{2+3F_{12}} & 0 \\ 0 & \frac{32\bar{G}_1^2}{(2+3F_{12})^2} & i\frac{4\sqrt{2}\bar{G}_1}{2+3F_{12}} & 0 \\ -\frac{8\bar{G}_1^2}{2+3F_{12}} & -i\frac{4\sqrt{2}\bar{G}_1}{2+3F_{12}} & 1 - \frac{32\bar{G}_1^2}{(2+3F_{12})^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.168)$$

a segundo orden en  $\bar{G}_1$ . Notamos que  $\bar{G}_1$  debe ser lo suficientemente pequeño para que (4.168) sea válido. De hecho, debe ocurrir que

$$\bar{G}_1^2 \leq \frac{(2+3F_{12})^2}{32}, \quad (4.169)$$

para que la población del estado  $|1, 0\rangle$  sea menor o igual a 1. A partir de la ecuación (4.168) vemos que el estado  $|1, 0\rangle$  está mucho más poblado que el singlete  $|0, 0\rangle$  cuando la intensidad del láser es baja ( $\bar{G}_1 = \bar{G}_2$  es pequeño). Si comparamos con las ecuaciones (4.158), notamos que esto contrasta grandemente con el caso  $G_2 = 0$ . De (4.168) también observamos que la interacción disipativa átomo-átomo tiende a disminuir la población del estado  $|1, 0\rangle$  y a incrementar la del estado  $|1, -1\rangle$  cuando los átomos están cerca.

Otro caso límite de interés ocurre cuando el campo del láser es muy intenso ( $|\bar{G}_1| = |\bar{G}_2| \rightarrow +\infty$ ). A partir de (4.163) observamos que  $\rho_{12}^{ST} = (1/4)\mathbb{I}$  con  $\mathbb{I}$  el operador identidad. Este hecho se debe a que, para intensidades altas del campo del láser, la interacción átomo-láser abruma la interacción disipativa átomo-átomo y cada átomo interactúa aproximadamente de forma independiente con el láser. Además, notamos que en este límite de intensidades altas, las poblaciones de los estados  $|1, 1\rangle$  y  $|0, 0\rangle$  alcanzan su valor máximo absoluto de  $1/4$ , mientras que la del estado  $|1, -1\rangle$  toma su valor mínimo absoluto de  $1/4$ .

Ahora vamos a discutir el grado de enredamiento de  $\rho_A^{ST}$  medido por la concurrencia  $C^{ST}$ , ver la figura (4.23). Observamos que, conforme la intensidad de láser se incrementa ( $\bar{G}_1 = \bar{G}_2$  crece),  $C^{ST}$  también se incrementa, toma un valor máximo y después decrece y desaparece abruptamente, ver las figuras (4.23) y (4.25). Esta muerte súbita de enredamiento como función de la intensidad del láser aparece para todos los valores de la distancia entre los átomos. Además,

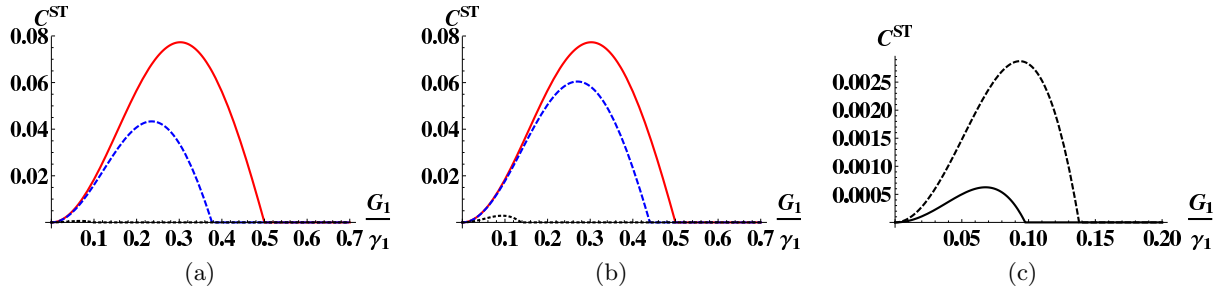


Figura 4.23: Caso  $G_1 = G_2$ : Las figuras (4.23a) y (4.23b) muestran la concurrencia estacionaria  $C^{ST}$  como función de  $\bar{G}_1 = G_1/\gamma_1$  para los casos  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_{\perp}^2 = 0$ , respectivamente. Se muestran los resultados para las distancias entre los dos átomos iguales a  $\lambda_A/100$  (línea roja sólida),  $\lambda_A/4$  (línea azul segmentada) y  $\lambda_A$  (línea negra punteada) donde  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada a la transición atómica. La figura (4.23c) muestra un acercamiento de los casos  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  (línea negra sólida) y  $d_{\perp}^2 = 0$  (línea negra segmentada) cuando la distancia entre los dos átomos es  $\lambda_A$ .

notamos que  $C^{ST}$  alcanza sus valores más grandes cuando la distancia entre los átomos es menor que la longitud de onda asociada a la transición atómica y cuando la intensidad del láser es pequeña. Sin embargo, los valores más grandes de  $C^{ST}$  son considerablemente menores que los del caso  $G_2 = 0$ , ver las figuras (4.12) y (4.23). De esta manera, parece que no se puede generar considerable enredamiento entre los dos átomos si interactúan sólo a través del reservorio y si  $G_1 = G_2$ . Este resultado es físicamente entendible, pues cada átomo interactúa aproximadamente de forma independiente con el láser cuando éste tiene una intensidad alta. Esto último se debe a que la interacción átomo-láser abruma a la interacción disipativa átomo-átomo a través del reservorio. Además, esto se confirma por la dependencia débil de  $\rho_A^{ST}$  en  $F_{12}$  en las ecuaciones (4.163).

En el otro extremo, cuando la intensidad del láser es pequeña, a partir de la ecuación (4.168) encontramos que a segundo orden en  $\bar{G}_1 = \bar{G}_2$  la concurrencia de  $\rho_A^{ST}$  toma la forma

$$C^{ST} = \max \left\{ 0, -\frac{3}{2} F_{12} \langle 1, 0 | \rho_{12}^{ST} | 1, 0 \rangle \right\}. \quad (4.170)$$

Recordamos que  $F_{12}$  es una función oscilatoria acotada por arriba por  $2/3$  y por abajo por  $-0.2237$  y que tiende a 0 si la distancia entre los átomos se incrementa. Entonces, a segundo orden en  $\bar{G}_1$  la concurrencia será distinta de cero sólo en ciertas regiones de distancia entre los dos átomos. Dada la ecuación en (4.170), uno podría pensar que el comportamiento de la concurrencia está determinado primordialmente por la población del estado  $|1, 0\rangle$ . Sin embargo, de la figura (4.24) notamos que éste no es el caso, pues la población de este estado todavía se incrementa considerablemente después de que la concurrencia ha desaparecido.

Además, notamos que  $C^{ST}$  decrece su valor cuando la distancia entre los átomos aumenta y que este decaimiento como función de la distancia entre los átomos es más lento cuando  $d_{\perp}^2 = 0$ , ver las figuras (4.23) y (4.25). Finalmente observamos que  $C^{ST}$  exhibe un comportamiento oscilatorio como función de la distancia entre átomos más pronunciado cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ .

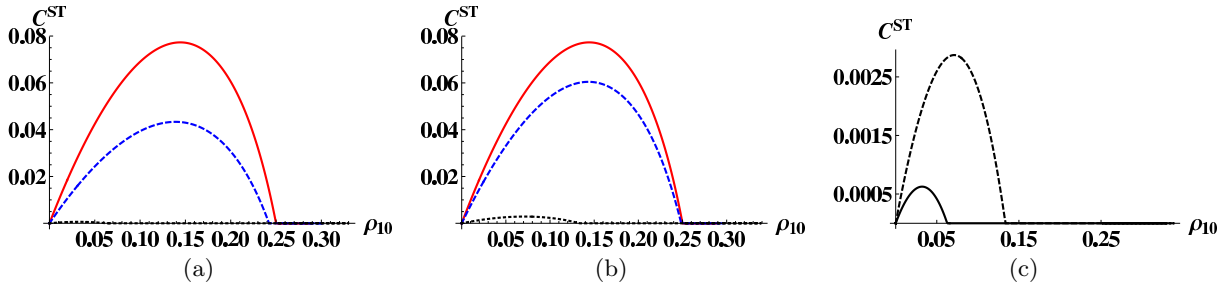


Figura 4.24: Caso  $G_1 = G_2$ : Las figuras (4.24a) y (4.24b) muestran la concurrencia estacionaria  $C^{ST}$  como función de la población  $\rho_{10}$  del estado  $|1, 0\rangle$  para los casos  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_{\perp}^2 = 0$ , respectivamente. Los resultados se muestran para las distancias entre los átomos iguales a  $\lambda_A/100$  (línea roja sólida),  $\lambda_A/4$  (línea azul segmentada) y  $\lambda_A$  (línea negra punteada) donde  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada a la transición atómica. La figura (4.24c) muestra un acercamiento de los casos  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  (línea negra sólida) y  $d_{\perp}^2 = 0$  (línea negra segmentada) cuando la distancia entre los átomos es  $\lambda_A$ .

Nuevamente, estos hechos se deben a la función  $F_{12}$  que tiene oscilaciones de mayor amplitud cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ .

Como antes, ahora vamos a estudiar el comportamiento de la discordia cuántica de  $\rho_A^{ST}$  como función de la distancia entre los átomos y de  $\bar{G}_1$ . Primero observamos que  $D_1^Q(\rho_A^{ST}) = D_2^Q(\rho_A^{ST})$  en este caso, pues los dos átomos están en posiciones equivalentes. Esto es, los dos átomos están en posiciones donde  $\bar{G}_1 = \bar{G}_2$ . Notamos que esto contrasta con el caso considerado en la sección anterior en donde los átomos estaban en posiciones no equivalentes y, como consecuencia,  $D_1^Q(\rho_A^{ST}) \neq D_2^Q(\rho_A^{ST})$ .

Arriba observamos que  $\rho_A^{ST} = (1/4)\mathbb{I}$  en el límite  $|\bar{G}_1| \rightarrow +\infty$ . Entonces se sigue  $\rho_A^{ST}$  no tiene correlaciones en este límite, esto es,  $C^{ST} = I(\rho_A^{ST}) = C_j^{cl}(\rho_A^{ST}) = D_j^Q(\rho_A^{ST}) = 0$  ( $j = 1, 2$ ). Esto se explica intuitivamente por el hecho de que en el límite  $|\bar{G}_1| \rightarrow +\infty$  cada átomo interactúa aproximadamente de forma independiente con el láser.

Ahora vamos a discutir la discordia geométrica en el caso general dado por las ecuaciones en (4.163). A partir de la figura (4.26) observamos que  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$  tiende a cero conforme  $\bar{G}_1$  se incrementa. Este es un resultado esperado, pues vimos arriba que  $D_1^Q(\rho_A^{ST}) = 0$  en el límite  $|\bar{G}_1| \rightarrow +\infty$ . Más aún, notamos que  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$  decrece más lentamente conforme se incrementa la distancia entre los átomos cuando  $d_{\perp}^2 = 0$ . Esto se ve claramente en la figura (4.27) donde además se observa que  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$  tiene oscilaciones de mayor amplitud cuando  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$ . Como antes, este comportamiento oscilatorio de  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$  se debe a  $F_{12}$ . Observamos que esto último se sabe por la expresión analítica, pero no manejable que se obtiene al calcular la discordia geométrica.

De estos resultados parece que forzar a los dos átomos con el láser es ineficiente para la creación de correlaciones cuánticas, pues tanto el enredamiento como la discordia cuántica son considerablemente menores cuando se les compara con el caso en que sólo un átomo es forzado



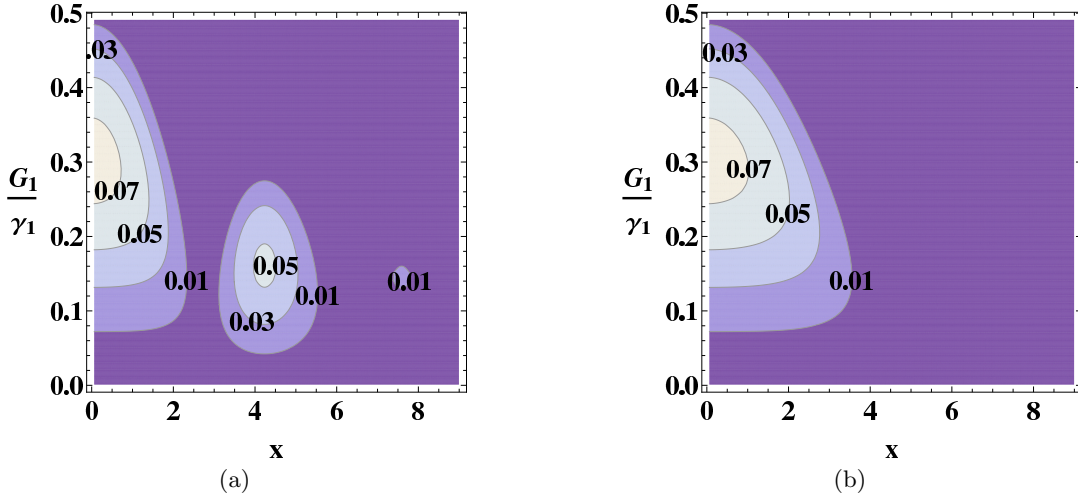


Figura 4.25: Caso  $G_1 = G_2$ : Las figuras (4.25a) y (4.25b) muestran contornos de la concurrencia estacionaria  $C^{ST}$  como función de  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  (eje horizontal) y  $\bar{G}_1$  (eje vertical) para los casos  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_{\perp}^2 = 0$ , respectivamente. Se muestran los contornos  $C^{ST} = 0.07, 0.05, 0.03, 0.01$ .

por el láser. Esta disminución en las correlaciones es todavía más dramática en el límite de intensidades altas del láser ( $|\bar{G}_1| \rightarrow +\infty$ ), pues se mostró arriba que todas las correlaciones desaparecen en este caso.

Ahora discutiremos el grado de mezcla de  $\rho_{12}^{ST}$ , ver la figura (4.28). Conforme la intensidad del láser se incrementa ( $\bar{G}_1$  crece),  $S_L^{ST}$  aumenta hasta adquirir el valor asintótico de  $3/4$ . De hecho, arriba observamos que  $\rho_A^{ST} = (1/4)\mathbb{I}$  cuando  $|\bar{G}_1| \rightarrow +\infty$ . Entonces  $\rho_A^{ST}$  tiende a un estado máximamente mezclado cuando la intensidad del láser aumenta. Nuevamente, este comportamiento se debe a que cada átomo interactúa con el láser aproximadamente por separado cuando la intensidad de éste es alta. Finalmente notamos que  $S_L^{ST}$  depende débilmente de la distancia entre los dos átomos y del valor de  $d_{\perp}^2$ , ver la figura (4.28). Esto era de esperarse, pues se observó arriba que  $\rho_A^{ST}$  depende débilmente de  $F_{12}$ .

Para terminar esta sección discutimos la relación entre el enredamiento estacionario (medido por la concurrencia) y el grado de mezcla (medido por la entropía lineal) en  $\rho_A^{ST}$ . Observamos que, conforme  $S_L^{ST}$  aumenta, el grado de enredamiento alcanza un valor máximo, después del cual la concurrencia decrece a cero, ver la figura (4.22b). Este comportamiento corresponde al hecho de que, conforme la intensidad del láser aumenta, el estado de los dos átomos se enreda y se mezcla debido al intercambio de fotones emitidos espontáneamente. Sin embargo, una vez que la intensidad del láser es lo suficientemente alta de tal manera que la interacción átomo-láser domina sobre la interacción disipativa átomo-átomo, el enredamiento decrece mientras que el estado de los dos átomos todavía aumenta su grado de mezcla. La figura (4.22b) también muestra el hecho conocido de que un estado mezclado de dos qubits no puede tener una cantidad arbitraria de enredamiento, pues entre más mezclado sea el estado, menos enredamiento puede tener [78].

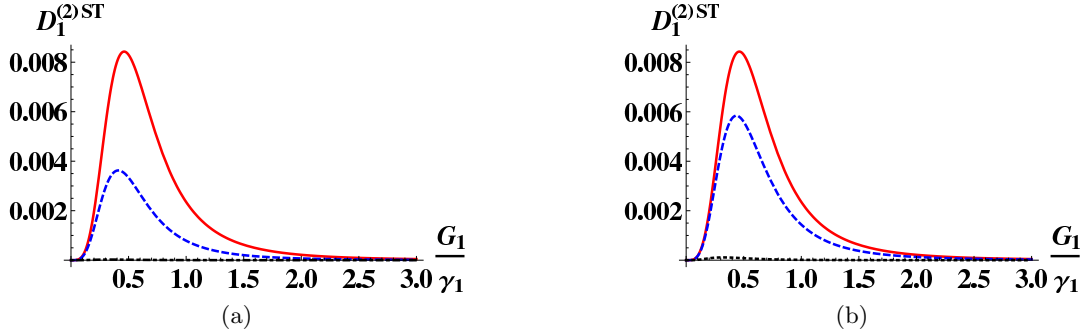


Figura 4.26: Caso  $G_1 = G_2$ : Las figuras (4.26a) y (4.26b) muestran la discordia geométrica estacionaria  $D_1^{(2)ST}$  como función de  $\bar{G}_1 = G_1/\gamma_1$  para los casos  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_\perp^2 = 0$ , respectivamente. Los resultados se muestran para las distancias entre los átomos iguales a  $\lambda_A/100$  (línea roja sólida),  $\lambda_A/4$  (línea azul segmentada) y  $\lambda_A$  (línea negra punteada) donde  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada con la transición atómica.

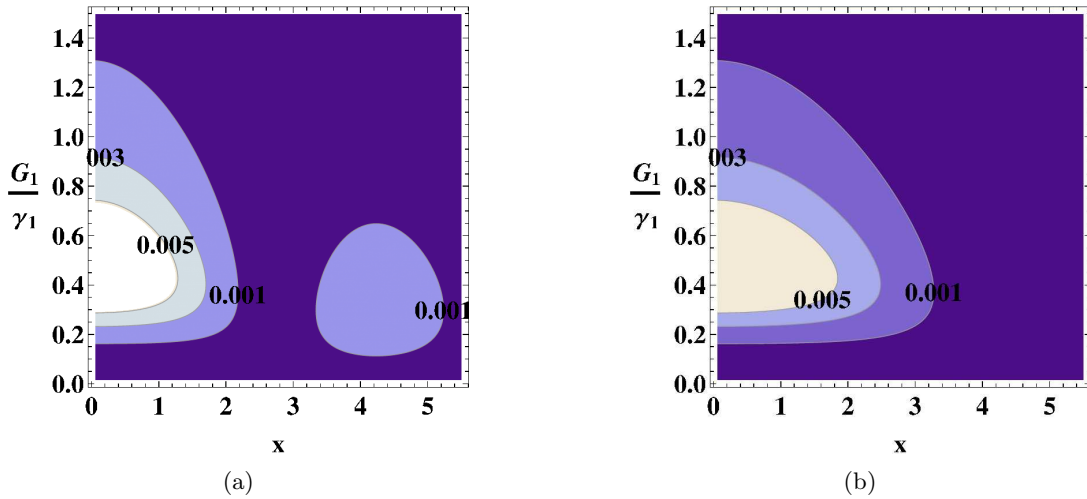


Figura 4.27: Caso  $G_1 = G_2$ : Las figuras (4.27a) y (4.27b) muestran contornos de la discordia geométrica estacionaria  $D_1^{(2)ST}$  de  $\rho_A^{ST}$  como función de  $x = \omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c$  (eje horizontal) y  $\bar{G}_1$  (eje vertical) para los casos  $d_\perp^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_\perp^2 = 0$ , respectivamente. Se muestran los contornos  $D_1^{(2)ST} = 0.005, 0.003, 0.001$ .

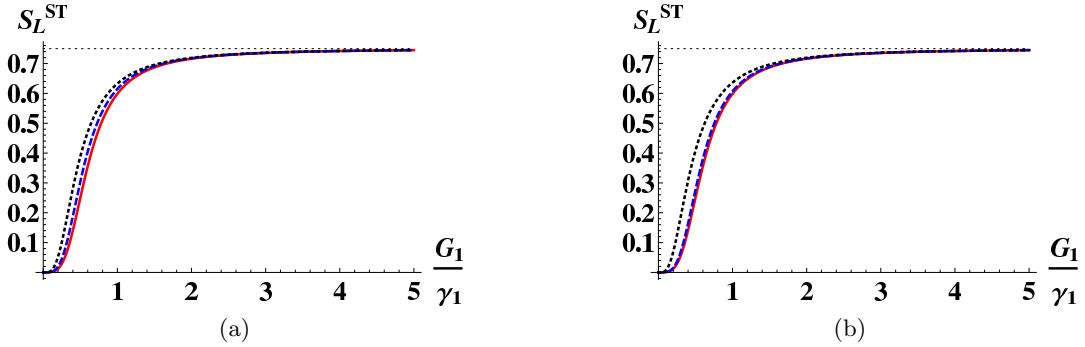


Figura 4.28: Caso  $G_1 = G_2$ : Las figuras (4.28a) y (4.28b) muestran la entropía lineal estacionaria  $S_L^{ST}$  como función de  $\bar{G}_1 = G_1/\gamma_1$  para los casos  $d_{\perp}^2 = |\mathbf{d}_{01}|^2$  y  $d_{\perp}^2 = 0$ , respectivamente. Se muestran los resultados para las distancias entre los átomos iguales a  $\lambda_A/100$  (línea roja sólida),  $\lambda_A/4$  (línea azul segmentada) y  $\lambda_A$  (línea negra punteada) donde  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada con la transición atómica.

## 4.5. Introducción del movimiento de centro de masa

El propósito de esta sección es estudiar qué pasa con las tasas de decaimiento de poblaciones y del enredamiento cuando el movimiento de centro de masa de los átomos se toma en cuenta, tratando a los átomos como partículas distinguibles. En particular estamos interesados en determinar qué sucede cuando los valores esperados de las posiciones de los átomos son iguales, pero hay dispersión en la posición. Para esto vamos a colocar a los átomos en potenciales de oscilador armónico centrados en posiciones posiblemente distintas y presentaremos un método que nos permite utilizar la ecuación maestra (4.50). Vamos a mostrar que introduciendo incertidumbre en la posición de los átomos puede dar lugar a un decaimiento de las poblaciones y el enredamiento como ley de potencias. Una relajación similar por leyes de potencia ha sido reportada recientemente para un solo qubit en una posición fija cuando interactúa con un reservorio que está descrito por una función de densidad espectral especial que se encuentra en ciertos materiales [14]. En ese artículo se encontró que la población del estado excitado y las coherencias del qubit decaen asintóticamente como  $t^{-3}$  y  $t^{-3/2}$ , respectivamente. Nosotros encontramos tasas similares.

### 4.5.1. Un operador de densidad aproximado

Consideremos un sistema bipartita  $G + C$  con espacio de estados  $\mathcal{E}_G \otimes \mathcal{E}_C$  donde  $\mathcal{E}_G$  ( $\mathcal{E}_C$ ) es el espacio de estados de  $G$  ( $C$ ). Vamos a suponer que el hamiltoniano  $H_{GC}$  de  $G + C$  se puede escribir de la siguiente forma:

$$H_{GC} = H_G + H_C + V_{GC} , \quad (4.171)$$

donde  $H_G$  y  $H_C$  son los hamiltonianos libres de  $G$  y  $C$ , respectivamente, y  $V_{GC}$  es el hamiltoniano de interacción entre  $G$  y  $C$ .

El operador de densidad que describe el estado de  $G + C$  se representará por  $\rho(t)$ , mientras que los de  $G$  y  $C$  se designarán respectivamente por  $\rho_G(t)$  y  $\rho_C(t)$ . Recordamos que estos dos últimos se definen tomando las trazas parciales de  $\rho(t)$  con respecto a  $C$  y  $G$ , respectivamente. La evolución de  $\rho(t)$  está determinada por la ecuación de von Neumann

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H_{GC}, \rho(t)] . \quad (4.172)$$

A continuación vamos a hacer los siguientes supuestos:

1. Existe una base ortonormal  $\{ |\psi_j^G\rangle : j \in \mathcal{I} \}$  para  $\mathcal{E}_G$  tal que

$$\langle \psi_j^G | V_{GC} | \psi_k^G \rangle = \delta_{jk} V_j \quad (j, k \in \mathcal{I}) , \quad (4.173)$$

donde  $V_j$  es un operador hermitiano de  $C$  que depende del parámetro  $j$ , esto es, depende de cuál ket de la base se toma.

2. El estado inicial del sistema es de la siguiente forma:

$$\rho(0) = |\chi(0)\rangle \langle \chi(0)| \otimes \rho_C(0) , \quad (4.174)$$

donde  $|\chi(0)\rangle$  es un ket normalizado en  $\mathcal{E}_G$  y  $\rho_C(0)$  es un operador de densidad de  $C$ .

El operador de densidad  $\rho(t)$  contiene tanto los grados de libertad de  $G$  como los de  $C$ . Vamos a considerar la siguiente situación: la evolución de los grados de libertad de  $G$  está determinada esencialmente por  $H_G$ , mientras que la de los grados de libertad de  $C$  está determinada esencialmente por  $H_C + V_{GC}$ . Entonces parece natural describir aproximadamente el estado de  $C$  por el operador de densidad

$$\rho_C(t) = \sum_{j \in \mathcal{I}} |\langle \psi_j^G | \chi(t) \rangle|^2 \rho_{2j}(t) . \quad (4.175)$$

Aquí  $|\chi(t)\rangle = e^{-iH_G t/\hbar} |\chi(0)\rangle$  es el estado de  $G$  y evoluciona sólo bajo  $H_G$ , mientras que  $\rho_{2j}(t)$  es un operador de densidad de  $C$  y se obtiene resolviendo la siguiente ecuación:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{2j}(t) = [H_C + V_j, \rho_{2j}(t)] . \quad (4.176)$$

Notamos que la ecuación (4.175) es un promedio de  $\rho_{2j}(t)$  sobre el estado de  $G$ .

Ahora vamos a presentar un método para encontrar una aproximación razonable a  $\rho(t)$  y para justificar la ecuación (4.175). Como queremos aprovechar el conocimiento de que ciertos grados de libertad están determinados aproximadamente por ciertas partes del hamiltoniano en (4.171), nos gustaría aproximar el operador de densidad exacto  $\rho(t)$  de  $G + C$  por otro operador de densidad  $\rho_{12}(t)$  que se pueda factorizar en partes que evolucionan bajo  $H_G$  y  $H_C + V_{GC}$  por separado. Entonces proponemos una aproximación  $\rho_{12}(t)$  de  $\rho(t)$  que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\rho_{12}(t) = \rho_1(t) \rho_2(t) \rho_1(t) \quad (t \geq 0) , \quad (4.177)$$

donde

1.  $\rho_1(t)$  es un operador de densidad de  $G$  definido por el problema de valores iniciales

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_1(t) = [H_G, \rho_1(t)] , \quad \rho_1(0) = |\chi(0)\rangle\langle\chi(0)| \quad (t \geq 0). \quad (4.178)$$

2.  $\rho_{2j}(t)$  es un operador de densidad de  $C$  definido por el problema de valores iniciales

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{2j}(t) = [H_C + V_j, \rho_{2j}(t)] , \quad \rho_{2j}(0) = \rho_C(0) \quad (t \geq 0). \quad (4.179)$$

Notamos que  $V_j$  es el operador hermitiano de  $C$  definido en la ecuación (4.173).

3.  $\rho_2(t)$  es un operador lineal de  $G + C$  definido por

$$\rho_2(t) = \sum_{j \in \mathcal{I}} |\psi_j^G\rangle\langle\psi_j^G| \otimes \rho_{2j}(t) \quad (t \geq 0) . \quad (4.180)$$

A partir de las ecuaciones (4.178)-(4.180) observamos que  $\rho_1(t)$  es un estado puro y  $\rho_2(t)$  es hermitiano y positivo semi-definido. Sin embargo,  $\rho_2(t)$  no es un operador de densidad de  $G + C$ , puesto que en general se tiene que  $\text{Tr}_{GC}[\rho_2(t)] \neq 1$ . Además, de la propuesta (4.177) y las definiciones de  $\rho_1(t)$  y  $\rho_2(t)$  es claro que  $\rho_{12}(t)$  es un operador de densidad válido, esto es,  $\rho_{12}(t)$  es hermitiano, positivo semidefinido y  $\text{Tr}_{GC}[\rho_{12}(t)] = 1$ .

De las ecuaciones (4.177)-(4.180) se sigue que  $\rho_G(t) = |\chi(t)\rangle\langle\chi(t)|$  y que

$$\rho_{12}(t) = |\chi(t)\rangle\langle\chi(t)| \otimes \sum_{j \in \mathcal{I}} |\langle\psi_j^G|\chi(t)\rangle|^2 \rho_{2j}(t) , \quad (4.181)$$

donde

$$|\chi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_G t} |\chi(0)\rangle . \quad (4.182)$$

Además, hacemos las siguientes observaciones:

1.  $\rho_{12}(t)$  describe un estado producto.
2. El operador de densidad  $\rho_G(t) = \rho_1(t)$  de  $G$  no se ve afectado por la interacción  $V_{GC}$ .
3. El operador de densidad  $\rho_C(t) = \sum_{j \in \mathcal{I}} |\langle\psi_j^G|\chi(t)\rangle|^2 \rho_{2j}(t)$  de  $C$  incorpora los efectos de  $H_G$  y  $V_{GC}$  promediando sobre el estado de  $G$ .
4. El operador de densidad  $\rho_C$  de  $C$  está dado por (4.175).

El operador de densidad propuesto  $\rho_{12}(t)$  puede parecer arbitrario, pero motiva el uso de la ecuación (4.175) y, aún más importante, va a aproximar el estado exacto  $\rho(t)$  si satisface aproximadamente la ecuación (4.172). A partir de las ecuaciones (4.177)-(4.180) se sigue que  $\rho_{12}(t)$  satisface la ecuación (4.172) si y sólo si para todo  $t \geq 0$

$$\rho_1(t)\rho_2(t) [V_{GC}, \rho_1(t)] + [V_{GC}, \rho_1(t)] \rho_2(t)\rho_1(t) + \rho_1(t) [H_G, \rho_2(t)] \rho_1(t) = 0 . \quad (4.183)$$

Luego,  $\rho_{12}(t)$  satisface la ecuación (4.172) aproximadamente si

$$[V_{GC}, \rho_1(t)] \cong 0 \quad \text{y} \quad [H_G, \rho_2(t)] \cong 0 \quad (t \geq 0). \quad (4.184)$$

Por lo tanto, concluimos que  $\rho_{12}(t)$  va a aproximar a  $\rho(t)$  si las condiciones en (4.184) se satisfacen. Es importante observar que estas condiciones reflejan la situación considerada: la evolución de los grados de libertad de  $G$  está determinada esencialmente por  $H_G$ , mientras que la de los grados de libertad de  $C$  está determinada esencialmente por  $H_C + V_{GC}$ . Más aún, la propuesta (4.177) logra la factorización deseada de  $\rho_{12}(t)$  en partes que están determinadas por  $H_G$  y  $H_C + V_{GC}$  de forma separada.

Ahora vamos a mostrar que el caso en que  $\rho(0) = \rho_G(0) \otimes \rho_C(0)$  con  $\rho_G(0)$  un estado mixto también se puede tratar. Tomemos la descomposición espectral de  $\rho_G(0)$ :

$$\rho_G(0) = \sum_{k \in \mathcal{J}} d_k |\phi_{Gk}\rangle \langle \phi_{Gk}|, \quad (4.185)$$

donde  $0 \leq d_k \leq 1$  y  $\sum_{k \in \mathcal{J}} d_k = 1$ . Ahora aplicamos el método descrito arriba con  $|\phi_{Gk}\rangle$  reemplazando a  $|\chi(0)\rangle$  para obtener  $\rho_{12}^k(t)$ . Entonces, la aproximación  $\rho_{12}(t)$  a  $\rho(t)$  está dada por

$$\rho_{12}(t) = \sum_{k \in \mathcal{J}} d_k \rho_{12}^k(t). \quad (4.186)$$

A continuación haremos uso de estos resultados para analizar los efectos del movimiento de centro de masa en las tasas de decaimiento de poblaciones y enredamiento en un modelo en particular.

#### 4.5.2. Dos átomos con movimiento de centro de masa cuantizado

Consideramos exactamente el mismo sistema que se presentó en la sección *El sistema de estudio* con las diferencias de que no vamos a considerar un láser que esté forzando a los dos átomos y éstos ya no van a estar fijos en posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ . En lugar de esto, vamos a cuantizar en tres dimensiones el movimiento de centro de masa de cada átomo y los colocaremos en potenciales de oscilador armónico. En otras palabras, vamos a considerar dos átomos de dos niveles con sus respectivos movimientos de centro de masa cuantizados en tres dimensiones, moviéndose en potenciales de oscilador armónico e interactuando con el reservorio (en el estado de vacío o en un estado térmico a temperatura  $T$  tal que  $N(\omega_A) = 0$ ). Como antes, este último va a introducir disipación al sistema de dos átomos. Además, mencionamos que el método de la subsección anterior nos permitirá usar la ecuación maestra que se dedujo para el caso en que los átomos estaban en posiciones fijas.

Nuevamente, una situación experimental que puede corresponder al sistema descrito consiste en tener a los dos átomos confinados mediante una trampa dipolar óptica y/o magnética [16] de tal manera que las funciones de onda que describen los grados de libertad externos de los átomos tomen valores apreciables en regiones de longitud mucho menor que el resto de las longitudes del sistema como, por ejemplo, la longitud de onda  $\lambda_A$  de la transición atómica. Nótese que la transición atómica asociada a la trampa debe ser distinta de la transición atómica de los dos

niveles que se están considerando. Esta situación experimental se puede combinar con esquemas de electrodinámica cuántica en cavidades en el límite de mala cavidad para garantizar que hay una transición atómica privilegiada entre los dos niveles y para poder eliminar adiabáticamente el modo de la cavidad [60]. Obsérvese que esta situación experimental es igual a la presentada en la sección *El sistema de estudio*. Entonces vamos a estudiar las primeras correcciones que se tienen cuando se incorpora el movimiento de centro de masa al modelo.

Siguiendo la notación de las secciones anteriores, denotaremos los grados de libertad de centro de masa y los grados de libertad internos de los dos átomos respectivamente por  $G$  y  $A$ , mientras que  $B$  denotará los grados de libertad del reservorio. Además,  $C$  denotará tanto los grados de libertad internos de los dos átomos como los del reservorio.

Los dos átomos tienen la misma masa  $M$  y frecuencia de transición  $\omega_A$  y serán tratados como partículas distinguibles (en las conclusiones comentaremos sobre cuándo es posible esto). Como en la sección *El sistema de estudio*, vamos a enumerar a los dos átomos arbitrariamente por 1 y 2 y éstas etiquetas se van a usar para distinguir a los kets asociados con uno u otro. Vamos a suponer que los potenciales de oscilador armónico determinan el estado del movimiento de centro de masa de cada átomo. Notamos que esto corresponde tanto a la situación física considerada en la sección anterior como a la imposición que se hizo a las funciones de onda que describen los grados de libertad externos de los átomos en la situación experimental mencionada arriba.

El hamiltoniano del sistema en la aproximación de la longitud de onda larga y en la representación del dipolo eléctrico es

$$H = H_G + H_C + V_{GC} , \quad (4.187)$$

con

$$H_C = H_A + H_B . \quad (4.188)$$

Aquí  $H_A$  y  $H_B$  están dados por las ecuaciones (4.7) y (4.15), mientras que  $H_G$  es el hamiltoniano libre del movimiento de centro de masa de cada átomo

$$H_G = \frac{1}{2M} \mathbf{P}_1^2 + \frac{1}{2} M \omega_1^2 (\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_{10})^2 + \frac{1}{2M} \mathbf{P}_2^2 + \frac{1}{2} M \omega_1^2 (\mathbf{R}_2 - \mathbf{r}_{20})^2 . \quad (4.189)$$

Aquí  $M$  es la masa de cada átomo,  $\mathbf{R}_j$  y  $\mathbf{P}_j$  son los operadores de posición y momento del átomo  $j$  ( $j = 1, 2$ ) y  $\omega_1$  es la frecuencia asociada con cada potencial de oscilador armónico. Observamos que los potenciales de oscilador armónico están centrados en posiciones posiblemente distintas  $\mathbf{r}_{j0}$  ( $j = 1, 2$ ).

Finalmente,  $V_{GC}$  es la interacción de dipolar eléctrica entre los dos átomos y el reservorio

$$V_{GC} = -\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_1) - \mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_2) . \quad (4.190)$$

El campo eléctrico cuántico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  en la posición  $\mathbf{r}$  y los operadores dipolares eléctricos  $\mathbf{d}_j$  están dados por las ecuaciones (4.16) y (4.10), respectivamente.

Vamos a suponer que el estado inicial del sistema es de la forma

$$\rho(0) = |\phi_G\rangle\langle\phi_G| \otimes \rho_C(0) , \quad (4.191)$$

donde

$$|\phi_G\rangle = U_0|\bar{\alpha}\rangle \quad \text{con} \quad U_0 = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{r}_{10}\cdot\mathbf{P}_1}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{r}_{20}\cdot\mathbf{P}_2}, \quad (4.192)$$

y

$$\rho_C(0) = \rho_A(0) \otimes |\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|. \quad (4.193)$$

Aquí  $|\mathbf{0}\rangle$  es el estado de vacío del reservorio y  $\rho_A(0)$  es el estado inicial de los grados de libertad internos de los dos átomos. Notamos que, en lugar del vacío, se puede tomar como estado inicial del reservorio un estado térmico a temperatura  $T$ , ver (4.20), tal que el valor esperado  $N(\omega_A)$  del número de fotones en un modo con frecuencia  $\omega_A$  sea aproximadamente cero. Por ejemplo, si se toma  $\omega_A \sim 10^{15}$  [Hz] una frecuencia en el óptico y  $T \sim 300$  [K], entonces  $N(\omega_A) \sim 10^{-13}$  y claramente podemos aproximar  $N(\omega_A) = 0$ .

Además,

$$|\bar{\alpha}\rangle = |1 : \bar{\alpha}_1\rangle \otimes |2 : \bar{\alpha}_2\rangle, \quad (4.194)$$

donde  $|j : \bar{\alpha}_j\rangle$  es un estado coherente en tres dimensiones

$$|j : \bar{\alpha}_j\rangle = |\alpha_{j1}\rangle \otimes |\alpha_{j2}\rangle \otimes |\alpha_{j3}\rangle \quad (j = 1, 2), \quad (4.195)$$

construido a partir de estados coherentes unidimensionales  $|\alpha_{ji}\rangle$ . Recordamos que la función de onda asociada con un estado coherente unidimensional  $|\alpha\rangle$  en la representación de coordenadas está dada como sigue [1]:

$$\langle x|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha^{*2})} e^{\sqrt{\frac{M\omega_1}{2\hbar}}(\alpha - \alpha^*)x} \phi_0 \left[ x - \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_1}}(\alpha + \alpha^*) \right], \quad (4.196)$$

donde  $\phi_0(x)$  es la función de onda en la representación de coordenadas del estado base de un oscilador armónico unidimensional:

$$\phi_0(x) = \left( \frac{M\omega_1}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{M\omega_1}{\hbar}} x \right)^2}. \quad (4.197)$$

Una base ortonormal  $\mathbf{B}_G$  para el espacio de estados de los grados de libertad de movimiento de los dos átomos es

$$\mathbf{B}_G = \{ |\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\rangle \equiv |1 : \mathbf{r}_1\rangle \otimes |2 : \mathbf{r}_2\rangle : \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3 \}. \quad (4.198)$$

El elemento de matriz de  $V_{GC}$  entre dos elementos de  $\mathbf{B}_G$  es de la forma

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | V_{GC} | \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2), \quad (4.199)$$

donde

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_2). \quad (4.200)$$



Notamos que  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  es exactamente igual a  $V_{AB}$  en la ecuación (4.26).

A partir de las ecuaciones (4.191), (4.199) y (4.200) observamos que los supuestos (4.173) y (4.174) de la sección anterior se satisfacen. Aplicando el método presentado allí se sigue de las ecuaciones (4.179), (4.181) y (4.182) (con los cambios apropiados de una base discreta a una base continua) que un operador de densidad aproximado para el sistema completo es

$$\rho_{12}(t) = |\chi(t)\rangle\langle\chi(t)| \otimes \int d^3r_1 d^3r_2 |\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|\chi(t)\rangle|^2 \rho_2(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (4.201)$$

donde

$$|\chi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_G t}|\phi_G\rangle, \quad (4.202)$$

y  $\rho_2(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  está determinado por el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_2(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= [H_A + H_B + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \rho_2(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \quad (t \geq 0), \\ \rho_2(0; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \rho_C(0). \end{aligned} \quad (4.203)$$

Los parámetros  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  en  $\rho_2(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  juegan el papel de  $j$  en  $\rho_{2j}(t)$  en la ecuación (4.181). Además, observamos que la ecuación (4.203) es idéntica a la ecuación de von Neumann del operador de densidad del sistema de dos átomos en posiciones fijas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  interactuando con un reservorio.

Se puede ver fácilmente que

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|\chi(t)\rangle) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{20}|\bar{\alpha}e^{-i\omega_1 t}\rangle). \quad (4.204)$$

Usando las ecuaciones (4.196), (4.197) y (4.204) en (4.201), trazando sobre los grados de libertad de centro de masa y haciendo un cambio de variables se sigue que el operador de densidad de  $C$  es

$$\rho_C(t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3} \int d^3r_1 d^3r_2 e^{-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{2\sigma^2}} \rho_2(t; \mathbf{r}_1 + \bar{\mu}_1(t), \mathbf{r}_2 + \bar{\mu}_2(t)), \quad (4.205)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_k(t) &= (\mu_{k1}(t), \mu_{k2}(t), \mu_{k3}(t))^T \quad (k = 1, 2), \\ \mu_{kj}(t) &= (\mathbf{r}_{k0})_j + \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega_1}} |\alpha_{kj}| \cdot \cos(\omega_1 t - \theta_{kj}) \quad (k = 1, 2; j = 1, 2, 3), \\ \alpha_{kj} &= |\alpha_{kj}| e^{i\theta_{kj}} \quad (k = 1, 2; j = 1, 2, 3), \\ \sigma &= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_1}}. \end{aligned} \quad (4.206)$$

Aquí notamos que  $\bar{\mu}_k(t)$  es el valor esperado de la posición del átomo  $k$ .

Recordamos que sólo estamos interesados en obtener el operador de densidad  $\rho_A(t)$  de los grados de libertad internos de los dos átomos. Éste se obtiene de la ecuación (4.205) trazando sobre los grados de libertad del reservorio

$$\rho_A(t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3} \int d^3r_1 d^3r_2 e^{-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{2\sigma^2}} \rho_A(t; \mathbf{r}_1 + \bar{\mu}_1(t), \mathbf{r}_2 + \bar{\mu}_2(t)), \quad (4.207)$$

donde

$$\rho_A(t; \mathbf{r}_1 + \bar{\mu}_1(t), \mathbf{r}_2 + \bar{\mu}_2(t)) = \text{Tr}_B [ \rho_2(t; \mathbf{r}_1 + \bar{\mu}_1(t), \mathbf{r}_2 + \bar{\mu}_2(t)) ] . \quad (4.208)$$

Para poder determinar  $\rho_A(t)$  completamente debemos especificar  $\rho_A(t; \mathbf{r}_1 + \bar{\mu}_1(t), \mathbf{r}_2 + \bar{\mu}_2(t))$ . Este último se obtiene resolviendo la ecuación (4.203) y trazando el resultado sobre los grados de libertad  $B$  del reservorio. Como la ecuación (4.203) es la ecuación de von Neumann del operador de densidad  $\rho_2(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  del sistema presentado en la sección *Dos átomos interactuando con un reservorio*, podemos usar la ecuación maestra en (4.50) para describir la dinámica de  $\rho_A(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Vamos a hacer esto para dos casos de interés que se analizarán a continuación. Además, vamos a suponer que el corrimiento  $\Delta_A$  se ha incorporado a  $\omega_A$ .

Dado que usamos la ecuación (4.203), observamos que el operador de densidad aproximado  $\rho_A(t)$  es similar al que se obtendría haciendo la aproximación Raman-Nath [79] en el hamiltoniano (4.187) y promediando sobre el estado de los grados de libertad de movimiento de centro de masa de los dos átomos.

### 4.5.3. $\rho_A(0) = |0, 0\rangle\langle 0, 0|$

Consideramos la condición inicial  $\rho_A(0) = |0, 0\rangle\langle 0, 0|$ . Se puede mostrar que la matriz de densidad en la base  $B$  del triplete y singulete es [11]

$$[\rho_A(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-(1-\frac{3}{2}F_{12})\gamma_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-(1-\frac{3}{2}F_{12})\gamma_1 t} \end{pmatrix} . \quad (4.209)$$

Substituyendo (4.209) en (4.207) obtenemos que

$$\rho_A(t) = e^{-\gamma_1 t} \xi_+[\bar{\mu}(t)] |0, 0\rangle\langle 0, 0| + (1 - e^{-\gamma_1 t} \xi_+[\bar{\mu}(t)]) |1, -1\rangle\langle 1, -1| , \quad (4.210)$$

donde

$$\xi_{\pm}[\bar{\mu}(t)] = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3} \int d^3r_1 d^3r_2 e^{-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{2\sigma^2}} e^{\pm \frac{3}{2}F(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|)\gamma_1 t} . \quad (4.211)$$

Aquí hemos tomado  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  y  $\bar{\mu}(t) = \bar{\mu}_1(t) - \bar{\mu}_2(t)$ .

A continuación vamos a evaluar  $\xi_+[\bar{\mu}(t)]$  aproximadamente y vamos a establecer una cota inferior a la población del estado antisimétrico  $|0, 0\rangle$ . Primero expresamos  $F(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|)$  como la suma de su polinomio de Taylor de orden dos más un término de error [43]

$$F(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|) = F(|\bar{\mu}(t)|) + \frac{F'(|\bar{\mu}(t)|)}{|\bar{\mu}(t)|} \bar{\mu}(t) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbb{H}(0) \mathbf{r} + \mathcal{E}_{err}(\mathbf{r}) . \quad (4.212)$$

Aquí  $\mathbf{r}$  es tratado como vector columna,  $F'$  denota la primera derivada con respecto a  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  de la función  $F$  en la ecuación (4.38),  $\mathbb{H}(\mathbf{r})$  es la matriz Hessiana de la función  $f(\mathbf{r}) = F(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|)$  y  $\mathcal{E}_{err}(\mathbf{r})$  es el término de error dado por

$$\mathcal{E}_{err}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T [ \mathbb{H}(c\mathbf{r}) - \mathbb{H}(0) ] \mathbf{r} . \quad (4.213)$$

Observamos que aquí  $0 \leq c \leq 1$  es un número que depende de  $\mathbf{r}$ .

Se puede mostrar que la matriz Hessiana  $\mathbb{H}(\mathbf{r})$  evaluada en un punto  $\mathbf{r}$  está dada por

$$\mathbb{H}(\mathbf{r}) = \frac{F'(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|)}{|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|} \mathbb{I}_3 + \left[ F''(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|) - \frac{F'(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|)}{|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|} \right] \frac{\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}}{|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|} \frac{[\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}]^T}{|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|}, \quad (4.214)$$

donde  $\mathbb{I}_3$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$  y  $F'$  y  $F''$  denotan la primera y segunda derivada con respecto a  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  de la función  $F$  en la ecuación (4.38).

Usando la ecuación (4.214) encontramos que para cada vector unitario  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  se cumple que

$$|\mathbb{H}(\mathbf{r})\mathbf{w}|^2 = [F''(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|)]^2 + \left\{ \left[ \frac{F'(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|)}{|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|} \right]^2 - [F''(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|)]^2 \right\} \sin^2(\theta_w), \quad (4.215)$$

donde  $\theta_w$  es el ángulo entre  $\mathbf{w}$  y  $[\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}]$ . Si se establecen cotas de las funciones involucradas en (4.215) y se usa la definición [29] de la norma 2 matricial  $\|\cdot\|_2$ , se puede obtener que

$$\|\mathbb{H}(\mathbf{r})\|_2 = \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{w}|=1} |\mathbb{H}(\mathbf{r})\mathbf{w}| < 0.341 \left( \frac{\omega_A}{c} \right)^2 \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3). \quad (4.216)$$

Usando la cota en (4.216) y las propiedades de una norma [29] se sigue que

$$|\mathcal{E}_{err}(\mathbf{r})| \leq \frac{1}{2} \mathbf{r}^2 \|\mathbb{H}(c\mathbf{r}) - \mathbb{H}(0)\|_2 \leq 0.341 \left( \frac{\omega_A}{c} \right)^2 \mathbf{r}^2 \quad (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3). \quad (4.217)$$

Substituyendo (4.212) en (4.211) y usando la cota en (4.217) obtenemos para  $t \geq 0$  que

$$\xi_+[\bar{\mu}(t)] \geq \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3} \int d^3r_1 d^3r_2 \exp\left\{ -\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{2\sigma^2} + \frac{3}{2} \gamma_1 t \left[ F(|\bar{\mu}(t)|) + \frac{F'(|\bar{\mu}(t)|)}{|\bar{\mu}(t)|} \bar{\mu}(t) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbb{H}(0) \mathbf{r} - 0.341 \left( \frac{\omega_A}{c} \right)^2 \mathbf{r}^2 \right] \right\}. \quad (4.218)$$

Notamos que la integral en (4.218) es de tipo gaussiano y puede ser evaluada fácilmente para obtener una cota inferior de  $\xi_+[\bar{\mu}(t)]$ . Luego, una cota inferior para la población  $P_{00}(t)$  del estado antisimétrico  $|0,0\rangle$  para  $t \geq 0$  es

$$P_{00}(t) \geq \exp\left\{ -\gamma_1 t \left[ 1 - \frac{3}{2} F(|\bar{\mu}(t)|) - \frac{9F'(|\bar{\mu}(t)|)^2 \sigma^2 \gamma_1 t}{4g_-(|\bar{\mu}(t)|, t)} \right] \right\} \times \frac{1}{h_-(|\bar{\mu}(t)|, t)} \frac{1}{\sqrt{g_-(|\bar{\mu}(t)|, t)}}, \quad (4.219)$$

donde

$$g_{\pm}(|\bar{\mu}(t)|, t) = 1 + 3\sigma^2 \gamma_1 t \left[ 0.682 \left( \frac{\omega_A}{c} \right)^2 \pm F''(|\bar{\mu}(t)|) \right],$$

$$h_{\pm}(|\bar{\mu}(t)|, t) = 1 + 3\sigma^2\gamma_1 t \left[ 0.682 \left( \frac{\omega_A}{c} \right)^2 \pm \frac{F'(|\bar{\mu}(t)|)}{|\bar{\mu}(t)|} \right]. \quad (4.220)$$

Observamos que  $g_{\pm}(|\bar{\mu}(t)|, t)$  y  $h_{\pm}(|\bar{\mu}(t)|, t)$  son cantidades positivas siempre y cuando  $\omega_A \geq c$ . Además, el argumento de la exponencial siempre es negativo si  $t \geq 0$  y  $\omega_A \geq c$ .

Podemos comparar (4.209) y (4.219) si tomamos  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \bar{\mu}(t)$  en la primera ecuación, esto es, si tomamos  $\mathbf{r}_j$  como el valor esperado  $\bar{\mu}_j(t)$  de la posición del átomo  $j$  en la ecuación (4.209). Observamos que el argumento de la exponencial en (4.219) es estrictamente más pequeño en valor absoluto que el argumento de la exponencial en (4.209) cuando  $\bar{\mu}(t) \neq 0$  y  $t \geq 0$ . Por lo tanto, la tasa de disipación es más pequeña cuando hay incertidumbre en la posición de los átomos,  $\bar{\mu}(t) \neq 0$  y  $t \geq 0$ . Esto eventualmetne conduce a tener una población mayor en el estado  $|0, 0\rangle$  cuando hay dispersión en la posición de los átomos,  $\bar{\mu}(t) \neq 0$  y  $t \geq 0$ , ver la figura (4.29).

Un caso de gran interés ocurre cuando  $|\bar{\mu}(t)| \rightarrow 0$ , esto es, los dos átomos están sujetos al mismo potencial de oscilador armónico  $\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_{20}$  y el estado del movimiento de centro de masa de cada átomo es el estado base del oscilador armónico  $\alpha_{ji} = 0$  ( $j = 1, 2; i = 1, 2, 3$ ). En este caso es fácil ver que la desigualdad en (4.219) se reduce a lo siguiente:

$$P_{00}(t) \geq \left\{ \frac{1}{1 + 3\sigma^2\gamma_1 t \left( \frac{\omega_A}{c} \right)^2 \left[ 0.682 + \frac{2}{15} \left( 1 + \frac{d_+^2}{|\mathbf{d}_{01}|^2} \right) \right]} \right\}^{\frac{3}{2}}. \quad (4.221)$$

De la ecuación (4.209) observamos que el estado de los dos átomos siempre es  $|0, 0\rangle$  cuando el movimiento de centro de masa no está cuantizado y los átomos están colocados en exactamente la misma posición. Por el contrario, cuando los átomos están sujetos al mismo potencial de oscilador armónico ( $\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_{20}$ ) y el movimiento de centro de masa de cada átomo está descrito por el estado base del oscilador armónico, la población del singulete  $|0, 0\rangle$  está acotada por debajo por la función en (4.221) que se comporta asintóticamente como una ley de potencias  $[\gamma_1 t (\sigma\omega_A/c)^2]^{-3/2}$ . Es importante enfatizar que el decaimiento como ley de potencias se obtiene cuando los dos átomos se encuentran sujetos al mismo potencial de oscilador armónico y su movimiento de centro de masa está descrito por el estado base del oscilador armónico. Si los átomos se empiezan a mover (esto es,  $\bar{\mu}(t)$  depende explícitamente del tiempo), entonces el decaimiento exponencial se enciende.

Ahora vamos a medir el enredamiento en  $\rho_A(t)$  por medio de la concurrencia  $C(t)$ . Dado el operador de densidad en (4.210), es fácil ver que la concurrencia de  $\rho_A(t)$  es igual a la población  $P_{00}(t)$  del estado antisimétrico  $|0, 0\rangle$ :

$$C(t) = P_{00}(t). \quad (4.222)$$

Tal y como se hizo arriba, usando (4.219) se sigue que  $C(t)$  tiene una tasa de decaimiento exponencial más pequeña cuando hay incertidumbre en la posición de los átomos que cuando se le compara con el caso en que los átomos están fijos en posiciones dadas  $\bar{\mu}_j(t)$ ,  $\bar{\mu}(t) \neq 0$  y  $t \geq 0$ . Cuando hay incertidumbre en la posición y  $|\bar{\mu}(t)| \rightarrow 0$  encontramos que la concurrencia decae asintóticamente como una ley de potencias  $[\gamma_1 t (\sigma\omega_A/c)^2]^{-3/2}$  (ver (4.221) y (4.222)).

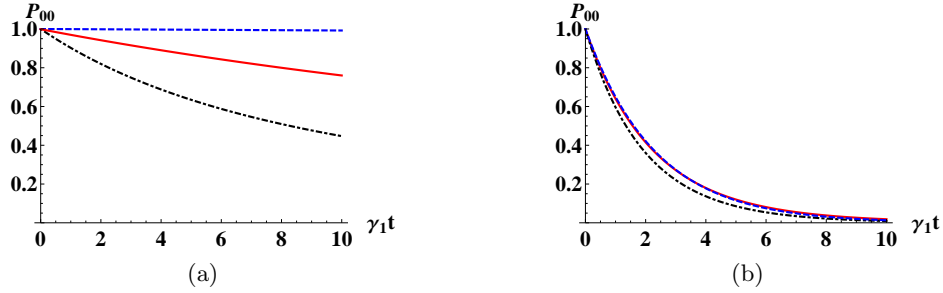


Figura 4.29: Las figuras (4.29a) y (4.29b) muestran la población  $P_{00}$  del estado antisimétrico  $|0,0\rangle$  como función de  $\gamma_1 t$  cuando la integral en (4.210) se calcula numéricamente (línea roja sólida), cuando se usa la cota inferior en (4.219) (línea negra punteada) y cuando los átomos se encuentran fijos en las posiciones  $\mathbf{r}_j = \bar{\mu}_j(t)$  (4.209) (línea azul segmentada). La figura (4.29a) muestra el caso  $|\bar{\mu}(t)| = \lambda_A/100$ , mientras que la figura (4.29b) ilustra el caso  $|\bar{\mu}(t)| = \lambda_A/4$ . Notamos que para tiempos más largos la línea roja eventualmente corta y queda por arriba de la línea azul en la figura (4.29a). Aquí  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada con la transición atómica,  $\lambda_A/(2\sigma) = 20$  y  $\bar{\mu}(t) = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}$ . Esto es, el estado del movimiento de centro de masa de cada átomo es el estado base del oscilador armónico.

Nuevamente observamos que el decaimiento exponencial de la concurrencia se enciende tan pronto  $|\bar{\mu}(t)| \neq 0$  (el estado del movimiento de centro de masa de cada átomo deja de ser el estado base del oscilador armónico).

#### 4.5.4. $\rho_A(0) = |+-\rangle\langle+-|$

Para la condición inicial  $\rho_A(0) = |+-\rangle\langle+-|$ , se puede mostrar que en la base del triplete y singulete B [11]:

$$[\rho_A(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(1+\frac{3}{2}F_{12})\gamma_1 t} & 0 & e^{-(\gamma_1+i2\Omega_{12})t} \\ 0 & 0 & 2 - e^{-(1+\frac{3}{2}F_{12})\gamma_1 t} - e^{-(1-\frac{3}{2}F_{12})\gamma_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-(\gamma_1-i2\Omega_{12})t} & 0 & e^{-(1-\frac{3}{2}F_{12})\gamma_1 t} \end{pmatrix}. \quad (4.223)$$

Aquí es importante observar que la población del estado  $|0,0\rangle$  es constante e igual a  $1/2$  cuando los dos átomos están exactamente en la misma posición.

Substituyendo (4.223) en la ecuación (4.207) obtenemos el operador de densidad de los grados de libertad internos de los dos átomos:

$$[\rho_A(t)]_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_1 t} \xi_-[\bar{\mu}(t)] & 0 & e^{-\gamma_1 t} \theta \\ 0 & 0 & 2 - e^{-\gamma_1 t} \xi_-[\bar{\mu}(t)] - e^{-\gamma_1 t} \xi_+[\bar{\mu}(t)] & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_1 t} \theta^* & 0 & e^{-\gamma_1 t} \xi_+[\bar{\mu}(t)] \end{pmatrix}, \quad (4.224)$$

donde  $\xi_{\pm}[\bar{\mu}(t)]$  está dado en la ecuación (4.211) y

$$\theta = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3} \int d^3r_1 d^3r_2 e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2\sigma^2}} e^{-i2\Omega_{12}t} . \quad (4.225)$$

Notamos que el módulo del integrando en el lado derecho de (4.225) está acotado por la gaussiana  $e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2\sigma^2}}$ . Por lo tanto, la integral converge y está acotada por arriba por 1.

Comparando las ecuaciones (4.210) y (4.224) encontramos que la población  $P_{00}(t)$  del singulete  $|0,0\rangle$  está acotada por abajo por  $1/2$  del lado derecho de la desigualdad en (4.219). Luego, el mismo análisis hecho antes para  $P_{00}(t)$  se aplica aquí.

El mismo procedimiento que se empleó para obtener (4.219) se puede usar aquí para obtener una cota inferior para la población  $P_{10}(t)$  del estado  $|1,0\rangle$ :

$$P_{10}(t) \geq \frac{1}{2} \exp \left\{ -\gamma_1 t \left[ 1 + \frac{3}{2} F(|\bar{\mu}(t)|) - \frac{9F'(|\bar{\mu}(t)|)^2 \sigma^2 \gamma_1 t}{4g_+(|\bar{\mu}(t)|, t)} \right] \right\} \times \\ \times \frac{1}{h_+(|\bar{\mu}(t)|, t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_+(|\bar{\mu}(t)|, t)}} , \quad (4.226)$$

donde  $g_+(|\bar{\mu}(t)|, t)$  y  $h_+(|\bar{\mu}(t)|, t)$  están dados por (4.220).

Podemos comparar (4.223) y (4.226) si tomamos  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \bar{\mu}(t)$  en la primera ecuación, esto es, si tomamos  $\mathbf{r}_j$  como el valor esperado de la posición  $\bar{\mu}_j(t)$  del átomo  $j$  en la ecuación (4.223). Primero observamos que el argumento de la exponencial en la ecuación (4.226) es estrictamente más pequeño en valor absoluto que el argumento de la exponencial correspondiente (la entrada 2, 2) en (4.223) cuando  $\bar{\mu}(t) \neq 0$  y  $t \geq 0$ . Entonces, la tasa de disipación es más pequeña cuando hay incertidumbre en la posición de los átomos,  $\bar{\mu}(t) \neq 0$  y  $t \geq 0$ . Esto eventualmente conduce a una población más grande del estado  $|1,0\rangle$  cuando hay dispersión en la posición de los átomos,  $\bar{\mu}(t) \neq 0$  y  $t \geq 0$ , ver la figura (4.30a).

Un caso muy interesante ocurre cuando  $|\bar{\mu}(t)| \rightarrow 0$ , esto es, los dos átomos están sujetos al mismo potencial de oscilador armónico  $\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_{20}$  y el estado del movimiento de centro de masa de cada uno está descrito por el estado base del oscilador armónico  $\alpha_{ji} = 0$  ( $j = 1, 2; i = 1, 2, 3$ ). En este caso es fácil ver que la desigualdad en (4.226) toma la siguiente forma:

$$P_{10}(t) \geq \frac{1}{2} \frac{e^{-2\gamma_1 t}}{\left\{ 1 + 3\sigma^2 \gamma_1 t \left( \frac{\omega_A}{c} \right)^2 \left[ 0.682 - \frac{2}{15} \left( 1 + \frac{d_1^2}{|d_{01}|^2} \right) \right] \right\}^{3/2}} , \quad (4.227)$$

mientras que la población del estado  $|0,0\rangle$  está acotada por abajo por  $1/2$  del lado derecho de (4.221). A partir de la ecuación (4.223) observamos que la población del singulete  $|0,0\rangle$  es constante e igual a  $1/2$  cuando no se cuantiza el movimiento de centro de masa de cada átomo y éstos se colocan en exactamente la misma posición. Además, la población del estado  $|1,0\rangle$  es  $e^{-2\gamma_1 t}/2$ . Por otra parte, cuando los dos átomos están sujetos al mismo potencial de oscilador armónico ( $\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_{20}$ ) y el movimiento de centro de masa de cada átomo está descrito por el estado base del oscilador armónico, la población del singulete  $|0,0\rangle$  está acotada por abajo por  $1/2$  del lado derecho de (4.221). Luego esta población decae asintóticamente como una ley de

potencias  $[\gamma_1 t (\sigma \omega_A / c)^2]^{-3/2}$ . Sin embargo, la cota de la población del estado simétrico  $|1, 0\rangle$  decae más rápido debido a la presencia del denominador de la exponencial en la ecuación (4.227). Nuevamente observamos que el decaimiento exponencial de  $P_{00}(t)$  se enciende tan pronto el estado del movimiento de centro de masa de cada átomo deja de ser el estado base del oscilador armónico.

Ahora vamos a discutir el grado de enredamiento de  $\rho_A(t)$  medido por la concurrencia  $C(t)$ . Dada la estructura de  $\rho_A(t)$  es fácil ver que

$$C(t) = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_+(t)} - \sqrt{\lambda_-(t)} \right\}, \quad (4.228)$$

donde

$$\begin{aligned} & \lambda_{\pm}(t) \\ = & \frac{1}{2} \left\{ P_{00}(t)^2 + P_{10}(t)^2 - \frac{1}{2} e^{-2\gamma_1 t} \text{Re}[\theta^2] \right\} \\ & \pm \frac{1}{2} \sqrt{[(P_{00}(t) + P_{10}(t))^2 - e^{-2\gamma_1 t} \text{Re}(\theta)^2] \cdot [(P_{00}(t) - P_{10}(t))^2 + e^{-2\gamma_1 t} \text{Im}(\theta)^2]}, \end{aligned} \quad (4.229)$$

y Re e Im denotan respectivamente las partes real e imaginaria de un número complejo. Las figuras (4.30b) y (4.30c) muestran la evolución temporal de la concurrencia. Notamos que eventualmente la concurrencia es más grande cuando hay dispersión en la posición de los átomos. Este comportamiento confirma la observación de arriba de que las tasas de disipación son más pequeñas cuando hay incertidumbre en la posición de los átomos y  $\bar{\mu}(t) \neq 0$ .

Nuevamente, el caso  $|\bar{\mu}(t)| \rightarrow 0$  es muy interesante. A partir de (4.224) podemos obtener las expresiones de las poblaciones  $P_{00}(t)$  y  $P_{10}(t)$ , mientras que de (4.221) y (4.227) tenemos cotas inferiores para estas poblaciones. Si usamos las cotas para estimar las poblaciones, despreciamos términos en (4.229) que decaen exponencialmente y recordamos que  $|\theta| \leq 1$ , se sigue de la ecuación (4.229) que  $C(t)$  está acotada asintóticamente por debajo por  $1/2$  de la cota dada en (4.221). Por lo tanto, la concurrencia decae asintóticamente siguiendo una ley de potencias. Notamos que el decaimiento exponencial de la concurrencia se enciende tan pronto el estado del movimiento de centro de masa de cada átomo es distinto del estado base del oscilador armónico.

Por último mencionamos que el decaimiento como ley de potencias de la concurrencia va a estar presente para cualquier condición inicial  $\rho_A(0)$  siempre y cuando  $|\bar{\mu}(t)| = 0$  y  $P_{00}(0) > 0$ .

#### 4.5.5. Extensión a estados de número

En las dos últimas subsecciones vimos que si los dos átomos están sujetos al mismo potencial de oscilador armónico y sus respectivos movimientos de centro de masa están descritos por el estado base del oscilador armónico, entonces para ciertos estados iniciales de los grados de libertad internos de los dos átomos el enredamiento entre ellos decae asintóticamente como una ley de potencias  $t^{-3/2}$ . En esta sección vamos a mostrar que este decaimiento como ley de potencias también está presente para otros estados del movimiento de centro de masa.

Suponemos ahora que el estado inicial del sistema es de la forma (4.191) con

$$|\phi_G\rangle = U_0 |\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\rangle = U_0 |\mathbf{m}_1\rangle \otimes |\mathbf{m}_2\rangle, \quad (4.230)$$

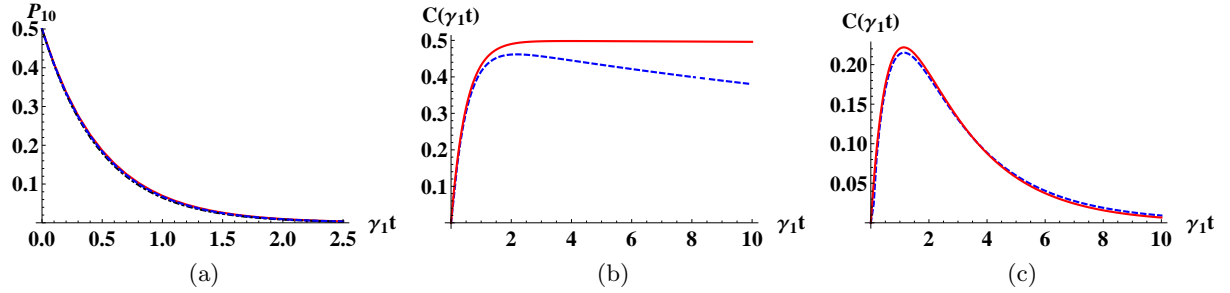


Figura 4.30: En todas las figuras  $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada con la transición atómica,  $\lambda_A/(2\sigma) = 20$  y  $\bar{\mu}(t) = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}$ , esto es, el estado de movimiento del centro de masa de cada átomo es el estado base del oscilador armónico. La figura (4.30a) muestra la población  $P_{10}$  del estado  $|1, 0\rangle$  como función de  $\gamma_1 t$  cuando las integrales en (4.224) se evalúan numéricamente (línea roja sólida), cuando se usa la cota inferior en (4.226) (línea negra punteada) y cuando los átomos están fijos en las posiciones  $\mathbf{r}_j = \bar{\mu}_j(t)$  (4.223) (línea azul segmentada). Aquí  $|\bar{\mu}(t)| = \lambda_A/100$ . Las figuras (4.30b) y (4.30c) muestran la concurrencia como función de  $\gamma_1 t$  cuando las integrales en (4.228) se evalúan numéricamente (línea azul segmentada) y cuando los átomos están fijos en las posiciones  $\mathbf{r}_j = \bar{\mu}_j(t)$  (4.223) (línea roja sólida). La figura (4.30b) muestra el caso  $|\bar{\mu}(t)| = \lambda_A/100$ , mientras que la figura (4.30c) muestra el caso  $|\bar{\mu}(t)| = \lambda_A/4$ . Aquí  $\theta$  se tomó igual a 1 (esto se deshace de las oscilaciones y da la envolvente de la concurrencia).

donde  $U_0$  está definido en (4.192),  $\rho_C(0)$  está dado por (4.193) y

$$|\mathbf{m}_j\rangle = |m_{j1}\rangle \otimes |m_{j2}\rangle \otimes |m_{j3}\rangle \quad (j = 1, 2). \quad (4.231)$$

Aquí  $|m_{ji}\rangle$  son estados de número de un oscilador armónico unidimensional. Recordamos que la función de onda asociada con un estado de número  $|m\rangle$  de un oscilador armónico unidimensional en la representación de coordenadas es [1]

$$\langle x|m\rangle = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} H_m(\beta x), \quad (4.232)$$

donde  $H_m$  es el  $m$ -ésimo polinomio de Hermite y  $\beta = \sqrt{M\omega_1/\hbar}$ .

Notamos que el único cambio con respecto a las subsecciones anteriores es que  $|\phi_G\rangle$  ahora está dado por (4.230). Entonces, los supuestos de la subsección *Un operador de densidad aproximado* siguen siendo válidos y un operador de densidad aproximado del sistema completo está dado por las ecuaciones (4.201)-(4.203). En el caso que ahora estamos considerando tenemos que

$$\begin{aligned} |(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|\chi(t))| &= |(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{20}|\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)|, \\ &= \left| \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left[ 2^{\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^3 m_{lj}} \prod_{l=1}^2 \prod_{j=1}^3 m_{lj}! \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10})^2} e^{-\frac{1}{2}\beta^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{20})^2} \times \right. \end{aligned}$$



$$\times \left. \prod_{l=1}^2 \prod_{j=1}^3 H_{m_{lj}} [ \beta(r_{lj} - r_{l0j}) ] \right| , \quad (4.233)$$

donde  $r_{lj} = (\mathbf{r}_l)_j$  ,  $r_{l0j} = (\mathbf{r}_{l0})_j$  y se ha hecho uso de las ecuaciones (4.202) y (4.232). Substituyendo (4.233) en la ecuación (4.201), trazando sobre los grados de libertad de centro de masa y del reservorio y haciendo un cambio de variables se sigue que

$$\rho_A(t) = \Gamma \int d^3 r_1 d^3 r_2 e^{-\beta^2 \mathbf{r}_1^2} e^{-\beta^2 \mathbf{r}_2^2} \rho_A(t; \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{20}) \prod_{l=1}^2 \prod_{j=1}^3 H_{m_{lj}} (\beta r_{lj})^2 , \quad (4.234)$$

donde

$$\Gamma = \left( \frac{\beta^2}{\pi} \right)^3 \left[ 2^{\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^3 m_{lj}} \prod_{l=1}^2 \prod_{j=1}^3 m_{lj}! \right]^{-1} > 0 . \quad (4.235)$$

Para determinar  $\rho_A(t)$  completamente debemos especificar  $\rho_A(t; \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{20})$ . Como antes, podemos usar la ecuación maestra (4.50) para describir la dinámica de  $\rho_A(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  (incorporando el corrimiento  $\Delta_A$  a  $\omega_A$ ). Vamos a hacer esto para el caso

$$\rho_A(0) = |0, 0\rangle \langle 0, 0| . \quad (4.236)$$

Para esta condición inicial tenemos que

$$\rho_A(t) = P_{00}(t) |0, 0\rangle \langle 0, 0| + [1 - P_{00}(t)] |1, -1\rangle \langle 1, -1| , \quad (4.237)$$

donde

$$P_{00}(t) = \Gamma \int d^3 r_1 d^3 r_2 \mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-[1 - \frac{3}{2} F(|\bar{\mu}(t) + \mathbf{r}|)] \gamma_1 t} , \quad (4.238)$$

y se ha hecho uso de las ecuaciones (4.209) y (4.234). Además, hemos tomado

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{-\beta^2(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2)} \left[ \prod_{l=1}^2 \prod_{j=1}^3 H_{m_{lj}} (\beta r_{lj})^2 \right] , \quad (4.239)$$

con  $\bar{\mu}(t) = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}$  y  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  para seguir con la misma notación de subsecciones anteriores.

Ahora vamos a determinar una cota inferior de la población  $P_{00}(t)$  del singulete  $|0, 0\rangle$ . Para esto procedemos de forma similar a subsecciones anteriores. Usando las ecuaciones (4.212) y (4.217), se sigue de (4.238) que para  $t \geq 0$

$$P_{00}(t) \geq \Gamma e^{-\gamma_1 t} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp \left\{ \frac{3}{2} \gamma_1 t \left[ F(|\bar{\mu}(t)|) + \frac{F'(|\bar{\mu}(t)|)}{|\bar{\mu}(t)|} \bar{\mu}(t) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbb{H}(0) \mathbf{r} - 0.341 \left( \frac{\omega_A}{c} \right)^2 \mathbf{r}^2 \right] \right\} .$$

(4.240)

El siguiente paso es evaluar la integral en el lado derecho de (4.240). Para esto introducimos variables reales positivas  $a_{lj}$  y notamos que

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{P}(\nabla_1, \nabla_2) \exp \left\{ - \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{lj} \beta^2 \mathbf{r}_{lj}^2 \right\} \Big|_{a_{lj}=1}, \quad (4.241)$$

donde el operador diferencial  $\mathcal{P}(\nabla_1, \nabla_2)$  está dado por

$$\mathcal{P}(\nabla_1, \nabla_2) = \prod_{l=1}^2 \prod_{j=1}^3 H_{m_{lj}}(z) \Big|_{z^2 = -\partial/\partial a_{lj}}. \quad (4.242)$$

Observamos que  $H_{m_{lj}}(z)^2$  es un polinomio en  $z^2$ . Para calcular  $\mathcal{P}(\nabla_1, \nabla_2)$  se reemplaza  $z^2$  por la derivada parcial  $-\partial/\partial a_{lj}$  en cada factor en (4.242). Después de calcular las derivadas en (4.241), los  $a_{lj}$  se evalúan en 1.

Usando (4.241) y haciendo el cambio de variables  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ , la desigualdad en (4.240) se puede reescribir como sigue:

$$P_{00}(t) \geq \Gamma e^{-[1 - \frac{3}{2}F(|\bar{\mu}(t)|)]\gamma_1 t} \mathcal{P}(\nabla_1, \nabla_2) \int \frac{d^3 r d^3 r'}{8} \times \\ \times \exp \left\{ -(\mathbf{r}^T, \mathbf{r}'^T) \mathbb{A}(t) \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} + \mathbf{J}(t)^T \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} \right\} \Big|_{a_{ij}=1}, \quad (4.243)$$

donde  $\mathbb{A}(t)$  una matriz real y simétrica de  $6 \times 6$  y  $\mathbf{J}(t)$  es un vector real de  $6 \times 1$ . Éstos están dados por

$$\mathbb{A}(t) = \frac{\beta^2}{4} \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + 3 \frac{\kappa_0 \gamma_1 t}{\beta^2} \mathbb{I}_3 - 3 \frac{\gamma_1 t}{\beta^2} \mathbb{H}(\mathbf{0}) & \mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2 \\ \mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2 & \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{J}(t) = \frac{3 F'(|\bar{\mu}(t)|)}{2 |\bar{\mu}(t)|} \gamma_1 t (\mathbf{r}_{10}^T - \mathbf{r}_{20}^T, \mathbf{0}^T)^T. \quad (4.244)$$

Aquí  $\mathbb{H}(\mathbf{0})$  se puede calcular a partir de (4.214),  $\kappa_0 = 0.682(\omega_A/c)^2$  y  $\mathbb{A}_1$  y  $\mathbb{A}_2$  son matrices reales diagonales y positivas definidas de  $3 \times 3$  dadas por

$$\mathbb{A}_l = \begin{pmatrix} a_{l1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{l2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{l3} \end{pmatrix}. \quad (4.245)$$

Si  $\mathbb{A}(t)$  es positiva definida, entonces la integral en (4.243) se puede evaluar fácilmente [80] para obtener:

$$P_{00}(t) \geq \pi^3 \Gamma e^{-[1 - \frac{3}{2}F(|\bar{\mu}(t)|)]\gamma_1 t} \mathcal{P}(\nabla_1, \nabla_2) \frac{\exp \left[ \frac{1}{4} \mathbf{J}(t)^T \mathbb{A}^{-1}(t) \mathbf{J}(t) \right]}{\sqrt{\det[2\mathbb{A}(t)]}} \Big|_{a_{ij}=1}. \quad (4.246)$$

A partir del lado derecho de la desigualdad en (4.246) notamos que  $P_{00}(t)$  está acotado por debajo por una cantidad que decae exponencialmente a cero si  $\bar{\mu}(t) = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20} \neq 0$  (recordar que  $F(0) = 2/3$  y  $F(x) < 2/3$  si  $x \neq 0$ ). Por lo tanto, el caso de mayor interés ocurre cuando  $\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_{20}$ , es decir, cuando los dos átomos están sujetos al mismo potencial de oscilador armónico. En el resto de esta sección vamos a tomar  $\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_{20}$ .

Usando la ecuación (4.244) vemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(t) &= \frac{\beta^2}{4} \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \Delta \mathbb{I}_3 & \mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2 \\ \mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2 & \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{J}(t) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.247)$$

donde

$$\Delta = 3 \frac{\gamma_1 t}{\beta^2} \left( \frac{\omega_A}{c} \right)^2 \left[ 0.682 + \frac{2}{15} \left( 1 + \frac{d_{\perp}^2}{|\mathbf{d}_{01}|^2} \right) \right] > 0. \quad (4.248)$$

Recordamos que sólo consideramos tiempos  $t > 0$ . En este caso se puede ver fácilmente que  $\mathbb{A}(t)$  es positiva definida (todos sus eigenvalores son positivos) y su determinante está dado por

$$\begin{aligned} \det[2\mathbb{A}(t)] &= \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^6 [4a_{11}a_{21} + \Delta(a_{11} + a_{21})] \cdot [4a_{12}a_{22} + \Delta(a_{12} + a_{22})] \times \\ &\times [4a_{13}a_{23} + \Delta(a_{13} + a_{23})]. \end{aligned} \quad (4.249)$$

Por lo tanto, la desigualdad en (4.246) es válida y toma la forma

$$P_{00}(t) \geq \pi^3 \Gamma \mathcal{P}(\nabla_1, \nabla_2) \frac{1}{\sqrt{\det[2\mathbb{A}(t)]}} \Bigg|_{a_{ij}=1}, \quad (4.250)$$

con  $\det[2\mathbb{A}(t)]$  dado por (4.249).

A partir de las ecuaciones (4.249) y (4.250) vemos que la población del singulete  $|0,0\rangle$  está acotada por abajo por una cantidad que se comporta asintóticamente como una ley de potencias. Notamos que esto siempre es válido para el caso en la ecuación (4.230).

Consideramos a continuación un ejemplo en particular. Vamos a tomar  $|\mathbf{m}_1\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$  y  $|\mathbf{m}_2\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$ . Entonces (4.250) toma la forma

$$P_{00}(t) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(4 + \Delta)^3}{(2 + \Delta)^{9/2}}, \quad (4.251)$$

donde  $\Delta$  está dado por la ecuación (4.248). A partir de la ecuación (4.251) vemos explícitamente que  $P_{00}(t)$  está acotada por abajo por una función que decae asintóticamente como  $(\gamma_1 t)^{-3/2}$ .

De la ecuación (4.222) vemos que la concurrencia es  $C(t) = P_{00}(t)$ . Luego, el enredamiento entre los dos átomos decae de acuerdo a (4.250) cuando  $\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_{20}$ . Por lo tanto, el enredamiento decae asintóticamente como una ley de potencias cuando los dos átomos están sujetos al mismo potencial de oscilador armónico y sus respectivos movimientos de centro de masa están descritos por productos tensoriales de estados de número. Esta ley de potencias toma la forma de  $(\gamma_1 t)^{-3/2}$  en el caso particular considerado arriba. Finalmente, notamos que este tipo de decaimiento como ley de potencias también estará presente para estados iniciales  $\rho_A(0)$  de los grados de libertad internos tales que  $P_{00}(0) = \langle 0,0 | \rho_A(0) | 0,0 \rangle > 0$ .

## 4.6. Conclusiones

En las primeras tres secciones de este capítulo consideramos dos átomos de dos niveles (qubits) fijos en posiciones posiblemente diferentes  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , posiblemente interactuando colectivamente con todos los modos del campo electromagnético cuántico y posiblemente forzados por un láser monocromático. El campo electromagnético cuántico se trató como un reservorio que se encontraba en una mezcla de estados de Fock. Un esquema experimental que puede corresponder a estos modelos consiste en tener a los átomos atrapados en una trampa dipolar óptica y/o magnética [16] de tal manera que las funciones de onda de los grados de libertad de movimiento de los átomos tomen valores apreciables en regiones de longitud mucho menor que el resto de las longitudes del sistema como, por ejemplo, las longitudes de onda asociadas a la transición atómica y al láser monocromático. Esta última condición es necesaria para poder suponer que los átomos están fijos en posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ . Además, la transición atómica asociada a la trampa debe ser distinta a la transición atómica asociada a los dos niveles. Este esquema experimental posiblemente se pueda combinar con uno de electrodinámica cuántica en cavidades para garantizar que los átomos se puedan tratar como sistemas de dos niveles. Notamos que el ángulo subtendido por la cavidad debe ser pequeño para garantizar que sea una buena aproximación el considerar que el átomo interactúa con los mismos modos del reservorio en el caso de espacio libre. Además, posiblemente se tendría que considerar el límite de *mala cavidad* para poder eliminar adiabáticamente el campo de la cavidad cuando no hay campo del láser [18].

Primero se consideró el caso en que los átomos no están forzados por un láser, pero sí interactúan con el reservorio. Se dedujo la ecuación maestra de Born-Markov-secular que determina la evolución del operador de densidad de los dos átomos. Se encontró que, para transiciones atómicas en la región del óptico y el reservorio en un estado térmico a temperatura  $T$ , esta ecuación es válida cuando  $0.1 \text{ [K]} \leq T$  y los átomos no están *demasiado cerca* (varía con el el valor de  $d_\perp$  (ver más abajo), pero  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gtrsim 10^{-7} \text{ [m]}$  siempre funciona). Además, se encontró que, para transiciones atómicas en la región del óptico y el reservorio en el estado de vacío, la ecuación maestra es válida cuando los átomos no están *demasiado cerca* (varía nuevamente con el valor de  $d_\perp$ , pero  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gtrsim 10^{-8} \text{ [m]}$  siempre funciona).

En lo que sigue se despreció la interacción dipolo-dipolo entre los dos átomos. A pesar de esto, *los resultados sí son físicos cuando no se hace referencia a un valor específico de  $d_\perp$*  (la norma de la proyección ortogonal de  $\mathbf{d}_{01}$  sobre el plano perpendicular a la línea que une a los dos átomos, donde  $\mathbf{d}_{01}$  es el elemento de matriz del operador de momento dipolar de cada átomo entre el estado excitado y el estado base del mismo). Esto se debe a que siempre se puede escoger  $d_\perp$  para cada distancia  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \leq \lambda_A/\pi$  ( $\lambda_A$  es la longitud de onda asociada a la transición atómica de los dos niveles) de tal manera que la interacción dipolo-dipolo es cero. Además, despreciar la interacción dipolo-dipolo permitió identificar los efectos debidos únicamente a la interacción disipativa entre los dos átomos.

En el caso en que los átomos no están forzados por un láser y el reservorio se encuentra en el estado de vacío se encontró que este modelo es exactamente soluble y que, empezando en un estado separable, los átomos se enredan durante algún tiempo (varía de acuerdo a la distancia entre los átomos) y este enredamiento puede ser considerable si los átomos no están muy separados. El mecanismo físico que da lugar al enredamiento entre los átomos es el proceso

de emisión espontánea: un átomo emite espontáneamente un fotón que es absorbido por el otro átomo. Este último después emite espontáneamente el fotón absorbido que finalmente se pierde. Además, el enredamiento depende de que los estados  $|0,0\rangle$  y  $|1,0\rangle$  decaigan a tasas distintas, pues es el exceso de población en uno de estos estados lo que da lugar al enredamiento entre los átomos. Posteriormente se consideró el caso en que el reservorio está en un estado térmico a temperatura alta ( $T \gtrsim 100$  [K] para transiciones atómicas en microondas, las transiciones en el óptico dan lugar a temperaturas muy altas que no son de interés en experimentos de átomos fríos). Se encontró que este modelo también es exactamente soluble y que las tasas de disipación son mucho más altas que en el caso del reservorio en el estado de vacío (son del orden de  $N(\omega_A)$  veces más grandes, con  $N(\omega_A)$  el valor esperado del número de fotones en un modo con frecuencia  $\omega_A$ ). Como consecuencia de esto se mostró que el enredamiento decae mucho más rápido y presenta una muerte súbita (varía con la distancia, pero para el estado inicial considerado y átomos no muy cerca desaparece en un tiempo del orden  $1/[\gamma_1 N(\omega_A)]$  con  $\gamma_1$  la tasa de emisión espontánea de un átomo).

Después consideramos el caso en que los átomos están forzados por un láser monocromático, pero no interactúan con el reservorio. Se encontró que el sistema es exactamente soluble y se probó que el enredamiento en el sistema era constante en el tiempo. Esto último es consecuencia de la evolución unitaria del sistema.

Posteriormente se estudió el caso en que los átomos son forzados por un láser monocromático e interactúan con el reservorio en el estado de vacío o en un estado térmico a temperatura  $T$  tal que  $N(\omega_A) \simeq 0$ . Se usó una ecuación maestra de Born-Markov-secular para describir la evolución del operador de densidad de los dos átomos (la región de validez es la misma que antes) y se estudió el estado estacionario para dos configuraciones. En la primera, un átomo estaba localizado en una posición donde el campo eléctrico del láser valía cero, mientras que el otro átomo estaba en una región donde el campo era distinto de cero. En la segunda configuración los dos átomos estaban localizados en posiciones distintas donde el campo eléctrico del láser tomaba el mismo valor. Nos referiremos a la primera configuración como el caso  $G_2 = 0$ , mientras que el segundo caso se llamará  $G_1 = G_2$ . En el esquema de interacción considerado se encontró que el operador de densidad estacionario existe sólo cuando la frecuencia del láser es resonante con la frecuencia de transición atómica. Se obtuvo una expresión analítica para el estado estacionario  $\rho_A^{ST}$  de cada una de las configuraciones mencionadas arriba. Esto nos permitió estudiar varios casos límites que resultaron en un entendimiento más profundo del estado estacionario del sistema además de los mecanismos responsables para la generación de correlaciones entre los dos átomos.

Se mostró para las dos configuraciones que cualquier estado inicial de los dos átomos tiende a sus respectivos operadores de densidad estacionarios si la frecuencia del láser está en resonancia con la frecuencia de transición de los átomos. Estos operadores de densidad estacionarios están enredados y tienen discordias cuántica y geométrica izquierda y derecha distintas de cero si la intensidad del láser no es muy alta. Intensidades altas del láser convierten a  $\rho_A^{ST}$  en el estado mixto no correlacionado  $(1/4)\mathbb{I}$  en el caso  $G_1 = G_2$  y en un estado  $X$  (ver (2.187) y el párrafo que le sigue) separable con discordias cuántica y geométrica derecha distintas de cero en el caso  $G_2 = 0$  (aquí las mediciones se hacen sobre el átomo que no es forzado por el láser).

Se encontró que forzando a los dos átomos con el campo del láser (caso  $G_1 = G_2$ ) no es

eficiente para la generación de correlaciones cuánticas estacionarias (enredamiento y discordia cuántica), puesto éstas disminuyeron sus valores cuando se les compara con las del caso  $G_2 = 0$  y sólo el grado de mezcla aumentó. En las dos configuraciones las correlaciones cuánticas estacionarias (enredamiento y discordia cuántica) se maximizan para intensidades bajas del láser. Incrementando la intensidad de éste conduce en todos los casos a una muerte súbita de enredamiento (éste ocurre cuando la frecuencia de Rabi  $\mathbf{d}_{01} \cdot \bar{\mathcal{E}}_L g(\mathbf{r})/\hbar$  es del orden de la tasa de emisión espontánea  $\gamma_1$  de un átomo). Sin embargo, la discordia cuántica sí sobrevive y, en algunos casos, no decae a cero. Además, encontramos que la distancia entre los átomos es fundamental para el desarrollo de correlaciones cuánticas estacionarias. Entre más separados estén los átomos, menos correlaciones pueden tener (son despreciables si  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \geq \lambda_A$ ). Este resultado es esperado, pues los átomos sólo pueden interactuar intercambiando fotones emitidos espontáneamente y este tipo de interacción es menos efectiva entre más separados estén los átomos.

En general todas las correlaciones exhiben un comportamiento oscilatorio que tiende a cero conforme la distancia entre los dos átomos se incrementa. Las oscilaciones están más marcadas cuando  $d_\perp = |\mathbf{d}_{01}|$  (aquí las oscilaciones tienen un período del orden de  $\omega_A |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c \sim 3$  con  $\omega_A$  la frecuencia asociada a la transición atómica), pero el decaimiento con la distancia es más lento cuando  $d_\perp = 0$ . Se encontró que este comportamiento es debido a la función  $F_{12}$  que resulta de la interacción colectiva de los átomos con el reservorio. De todos los resultados que presentamos, éste es el único que no es físico porque hace referencia a un valores específicos de  $d_\perp$ . Este resultado sólo es válido para el modelo sin la interacción dipolo-dipolo.

Las configuraciones consideradas también nos permitieron estudiar el comportamiento de la discordia cuántica cuando los átomos están en posiciones equivalentes y no equivalentes. En particular, se estudiaron las discordias cuántica y geométrica, la información cuántica mutua y las correlaciones clásicas en el límite de intensidad del láser muy grande. Esto permitió una comparación directa entre las discordias geométrica y cuántica y se encontró que cualitativamente se comportan igual, puesto que la discordia geométrica reprodujo el comportamiento de la discordia cuántica como función de la distancia entre los átomos. La discordia geométrica también se usó para estudiar los casos en que la intensidad de láser no era alta y se observó que sobrevive a pesar de que el enredamiento había desaparecido.

Debido a que los átomos están en posiciones no equivalentes en el caso  $G_2 = 0$ , se encontró que la discordia geométrica derecha  $D_2^{(2)}(\rho_A^{ST})$  (obtenida cuando las mediciones se llevan a cabo sobre el átomo no forzado) es muy diferente de la discordia geométrica izquierda  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$  (obtenida cuando las mediciones se llevan a cabo sobre el átomo forzado). Se observó que  $D_2^{(2)}(\rho_A^{ST})$  adquiere rápidamente un valor estacionario distinto de cero y no despreciable cuando la intensidad del láser se incrementa ( $G_1 \sim \gamma_1$ ). Por otra parte,  $D_1^{(2)}(\rho_A^{ST})$  tiende a cero si la intensidad del láser se incrementa ( $G_1 \sim \gamma_1$ ). Por lo tanto, la información contenida en las correlaciones entre los dos átomos en  $\rho_A^{ST}$  que no se puede extraer haciendo mediciones sólo sobre uno de ellos es muy diferente en la configuración  $G_2 = 0$ . Esto no sucede en el caso  $G_1 = G_2$  en donde los átomos están en posiciones equivalentes.

Se obtuvieron expresiones analíticas para las poblaciones estacionarias de los eigenestados del hamiltoniano libre de los dos átomos y se estableció su comportamiento en los límites de

alta y baja intensidad. Se determinó que las poblaciones de los estados  $|0,0\rangle$  y  $|1,0\rangle$  explican en gran medida el comportamiento de la concurrencia en ambas configuraciones. Este hecho es mucho más marcado para el caso  $G_2 = 0$  donde se mostró que la concurrencia crecía o disminuía con la población del singulete de forma casi lineal cuando la distancia entre los dos átomos era más pequeña que una longitud de onda asociada con la transición atómica.

En la parte final del capítulo consideramos dos átomos de dos niveles interactuando con el reservorio. La diferencia con secciones anteriores consiste en que se cuantizó el movimiento de centro de masa de cada átomo en tres dimensiones y se colocaron en potenciales de oscilador armónico. Para tratar este sistema desarrollamos un método que describe aproximadamente el operador de densidad de los dos átomos cuando sus respectivos movimientos de centro de masa están completamente dominados por los potenciales de oscilador armónico (el esquema experimental es el mismo que antes) y cuando los átomos son tratados como partículas distinguibles. Usando este procedimiento se pudo utilizar la ecuación maestra deducida para el caso en que los átomos están en posiciones fijas y se determinó cómo evoluciona el operador de densidad de los dos átomos para varias condiciones iniciales. En general, se encontró que una incertidumbre en la posición de los dos átomos puede conducir a una tasa de decaimiento exponencial más pequeña para algunas poblaciones y, como consecuencia, también para el enredamiento (medido por la concurrencia) entre los dos átomos. Cuando el movimiento de centro de masa de cada átomo está descrito por estados de número del oscilador armónico y los dos átomos están sujetos al mismo potencial de oscilador armónico, este decaimiento exponencial desaparece para la población del estado  $|0,0\rangle$  y toma asintóticamente la forma de una ley de potencias ( $t^{-3/2}$  para los casos que se trabajaron explícitamente). Esto a su vez da lugar a un decaimiento del enredamiento como ley de potencias.

El decaimiento como ley de potencias en la población de  $|0,0\rangle$  y en el enredamiento va a estar presente para cualquier estado inicial de los grados de libertad internos de los dos átomos siempre y cuando la población inicial de  $|0,0\rangle$  sea positiva, los dos átomos estén sujetos al mismo potencial de oscilador armónico y sus grados de libertad externos estén descritos por estados de número. Sin embargo, el decaimiento exponencial se enciende tan pronto el movimiento de centro de masa de los átomos no está descrito por estos estados.

Es importante mencionar que en esta introducción del movimiento de centro de masa de cada átomo no se despreció la interacción dipolo-dipolo entre los dos átomos. Además, para poder hacer uso de la ecuación maestra deducida para átomos en posiciones fijas hemos tratado a los dos átomos como partículas distinguibles, puesto que esta ecuación maestra no puede incluir términos no diagonales asociados con los grados de libertad de movimiento. A continuación vamos a explicar en qué condiciones se pueden considerar distinguibles los dos átomos. Supongamos que las condiciones experimentales son tales que los grados de libertad de movimiento de cada átomo no son afectados por el reservorio ni por los grados de libertad internos de los átomos y sólo evolucionan bajo los hamiltonianos de oscilador armónico (que es la situación que se describió). Si los grados de libertad de movimiento de cada átomo están descritos a todo tiempo por estados *casi* ortogonales, entonces estos grados de libertad nos permiten tratar a los átomos como si fueran partículas distinguibles. Por ejemplo, la distinguibilidad de los dos átomos queda justificada con este argumento cuando consideramos los casos en que los grados de libertad de movimiento de los átomos estaban descritos por estados de número distintos o por estados

coherentes que se traslapaban poco. Por otra parte, si los átomos tienen aproximadamente los mismos elementos de matriz del operador dipolar eléctrico y frecuencias de transición  $\omega_1$  y  $\omega_2$  tales que  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_A$  con  $\omega_A = (\omega_1 + \omega_2)/2$ , entonces los dos átomos claramente son distintos y podemos aproximar  $\omega_1$  y  $\omega_2$  por  $\omega_A$ . Notamos que es necesario que las transiciones atómicas asociadas a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se traslapen en el ancho de línea para poder aproximar que se tiene la misma transición [81]. Con este segundo argumento se justifica la distinguibilidad de los átomos en todas las situaciones consideradas.





# Conclusiones generales

A continuación mencionamos algunos de los logros del trabajo realizado:

- Se dedujo la función que se debe minimizar para poder calcular las correlaciones clásicas y la discordia cuántica de dos qubits. Actualmente, en la literatura generalmente esta función no aparece explícitamente o se hacen transformaciones que resultan en un dominio más complicado que el que se presentó en la tesis sobre el cual se debe llevar a cabo la minimización.
- Se consideró el modelo de un átomo de dos niveles con movimiento de centro de masa cuantizado en una dimensión interactuando con un campo eléctrico cuantizado de un modo con perfil gaussiano.
  - Se encontró que las oscilaciones de Rabi en la probabilidad de emisión del átomo desaparecen para velocidades iniciales suficientemente bajas cuando la dispersión inicial en la posición del átomo es mucho menor que la cintura del campo y hay resonancia entre la frecuencia de transición del átomo y la frecuencia del campo.
  - Se encontró que el sistema presenta enredamiento tripartita genuino cuando la dispersión inicial en la posición del átomo es mucho menor que la cintura del campo y hay resonancia entre la frecuencia de transición del átomo y la frecuencia del campo.
  - Se encontró que el tratamiento semiclásico adiabático del movimiento de centro de masa reproduce cualitativamente bien los resultados del tratamiento cuantizado cuando la dispersión inicial en la posición del átomo es mucho menor que la cintura del campo y el desintonamiento entre la frecuencia de transición del átomo y la frecuencia del campo es suficientemente grande.
  - Se determinó cómo el campo eléctrico puede alterar el movimiento del átomo y cómo puede dar lugar a estructuras de eco y a precursores en la función de densidad de probabilidad de posición del átomo y en las funciones de onda asociadas a éste.
  - Se encontró que una dispersión inicial en la posición del átomo comparable con la cintura del campo eléctrico provoca una evolución muy distinta del sistema caracterizada por la aparición de resonancias en diversas propiedades. En particular, todos los grados de libertad están enredados y la probabilidad de que el átomo atraviese la cavidad se modifica grandemente.

- Se consideró el modelo de dos átomos idénticos de dos niveles fijos en posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  interactuando con todos los modos del campo electromagnético (reservorio). Se despreció la interacción coherente dipolo-dipolo y se conservó la interacción disipativa que surgen de la interacción colectiva de los átomos con el reservorio. A pesar de esto, los resultados que no hacen referencia a un valor específico de  $d_{\perp}$  sí son físicos, puesto que se puede escoger  $d_{\perp}$  para cada distancia entre los átomos de tal manera que la interacción dipolo-dipolo desaparece.
  - Se obtuvo analíticamente la solución de la ecuación maestra que describe la evolución del operador de densidad de los dos átomos cuando el reservorio se encuentra en el estado de vacío o en un estado térmico con número promedio de fotones muy grande en los modos con frecuencia igual a la frecuencia de transición de los átomos.
  - Se determinó en el caso del reservorio en el estado de vacío que, empezando en un estado separable, los átomos se pueden enredar por un tiempo y que el enredamiento es más grande mientras más cerca estén los átomos. El enredamiento surge debido a la interacción disipativa entre los átomos y ésta consiste en que los átomos intercambian fotones emitidos espontáneamente.
  - Para el caso del reservorio en un estado térmico con número grande de fotones, se determinó que las tasas de disipación y de decoherencia son mucho más grandes y que el enredamiento presenta una muerte súbita.
- Se incorporó al modelo de dos átomos con reservorio (en el estado de vacío o en un estado térmico a temperatura  $T$  tal que  $N(\omega_A) = 0$ ) un láser que esté forzando al sistema.
  - Se obtuvieron analíticamente las soluciones estacionarias de la ecuación maestra bajo la condición de resonancia para dos configuraciones de los átomos. En una de ellas uno de los átomos estaba en una posición donde el campo eléctrico del láser es cero, mientras que en la otra los dos átomos estaban en posiciones donde el campo eléctrico del láser tomaba el mismo valor.
  - Se mostró que los átomos se enredan cuando las poblaciones de los estados  $|0,0\rangle$  y  $|1,0\rangle$  decaen a tasas muy distintas y que la concurrencia está determinada por las poblaciones de éstos.
  - Se mostró que el enredamiento presenta muerte súbita como función de la intensidad del láser y que hay correlaciones cuánticas (la discordia) que persisten a pesar de que el enredamiento desaparece. Además, el enredamiento presenta un comportamiento oscilatorio como función de la posición que es más pronunciado cuando el elemento de matriz del operador de momento dipolar eléctrico de cada átomo es ortogonal a la línea que une a los átomos.
  - Se mostró que la discordia geométrica describe cualitativamente muy bien a la discordia cuántica.

- Se elaboró un método que permite describir de forma aproximada la evolución del operador de densidad de un sistema cuando la evolución de algunos grados de libertad está dominada por ciertas partes del hamiltoniano del sistema.
  - Se utilizó este método para incorporar al modelo de dos átomos interactuando con un reservorio (en el estado de vacío o en un estado térmico a temperatura  $T$  tal que  $N(\omega_A) = 0$ ) el movimiento de centro de masa de cada átomo. Los átomos se trataron como partículas distinguibles y se colocaron en potenciales de oscilador armónico.
  - Se encontró que una dispersión en la posición de los átomos puede conducir a tasas de disipación y de decaimiento del enredamiento más pequeñas. Más aún, se mostró que algunas poblaciones de los eigenestados del hamiltoniano de los grados de libertad internos de los átomos y el enredamiento pueden decaer como una ley de potencias para ciertas condiciones iniciales.

Finalmente, cerramos esta tesis mencionando algunas perspectivas de trabajos a futuro:

- Un trabajo inmediato es la incorporación de la interacción coherente dipolo-dipolo en el estudio del sistema de dos átomos y el análisis correspondiente de las correlaciones del sistema. Comparando con los resultados del trabajo ya hecho permitirá distinguir los efectos de dicha interacción con aquéllos asociados únicamente con la interacción disipativa ya estudiada.
- Un línea de trabajo que puede rendir varios frutos es el incorporar al modelo de dos átomos el movimiento de centro de masa cuantizado desde el inicio. Esto permitirá el tratamiento de partículas idénticas, el estudio de las correlaciones entre los distintos grados de libertad del sistema y el análisis del proceso de decoherencia. Además, permitirá comparar con los resultados obtenidos con el método aproximado presentado en esta tesis y permitirá tener un mejor entendimiento de éstos. Posteriormente, se pueden incorporar interacciones con un láser y un campo cuantizado que permitirá estudiar el espectro de emisión de los átomos y determinar las diferencias que introduce el tener el movimiento cuantizado de los átomos. Además, permitirá estudiar tanto las correlaciones que existen entre los diversos grados de libertad del sistema como el proceso de decoherencia en éste.
- Otros trabajos a futuro incluyen el tratamiento de átomos con más de dos niveles, reservorios con estructuras especiales y la identificación de los nuevos efectos asociados a éstos.



# Apéndice

En este apéndice vamos a presentar la matriz  $\mathbb{A}$  que fue usada para obtener las soluciones analíticas de diversas ecuaciones maestras.

En varias secciones del Capítulo 4 se hizo uso de la siguiente ecuación maestra de Born-Markov-secular

$$\frac{d}{dt}\rho_A(t) = i \left[ \sum_{j=1,2} G(\mathbf{r}_j) \left( \sigma_{+j} e^{-i\delta_L t} + \sigma_{-j} e^{i\delta_L t} \right), \rho_A(t) \right] + \mathcal{D}[\rho_A(t)] , \quad (4.252)$$

ver (4.143) y (4.144). Es importante mencionar que esta ecuación está en un esquema de interacción, ver (4.89) y (4.144). Las expresiones para el disipador  $\mathcal{D}$  están dadas en (4.34)-(4.38), mientras que las expresiones para  $G_j = G(\mathbf{r}_j)$  se pueden ver en (4.23) y (4.124).

La ecuación (4.252) describe la evolución del operador de densidad  $\rho_A(t)$  (en el esquema de interacción) de dos átomos de dos niveles en posiciones fijas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  interactuando con todos los modos del campo electromagnético cuántico (consistentes con la aproximación de longitud de onda larga) y con el campo eléctrico de un láser monocromático (ver (4.22) para la expresión del campo del láser). Aquí  $\delta_L$  es el desentonamiento entre la frecuencia del láser y la frecuencia de transición atómica. Si se quiere eliminar (o *apagar*) el láser, entonces basta tomar  $G(\mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_2) = 0$ . Cabe mencionar que en la ecuación (4.252) se ha descreciado la interacción dipolo-dipolo  $H_{dd}$  o, bien, se ha escogido el valor de  $d_{\perp}$  de tal manera que  $H_{dd} = 0$ , ver (4.48).

Si se escriben las ecuaciones de los elementos de matriz de la ecuación maestra (4.252) en la base del triplete-singulete, ver (4.5), entonces éstas se pueden escribir en forma matricial como un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}(t) , \quad (4.253)$$

donde

$$\mathbb{A}(t) = ( \gamma_1 \mathbb{A}_1(t), \gamma_1 \mathbb{A}_2(t) ) , \quad \mathbf{x}^T(t) = ( \mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t), \mathbf{x}_3^T(t), \mathbf{x}_4^T(t) ) , \quad (4.254)$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} \langle 1, 1 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle \\ \langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle \\ \langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle \\ \langle 0, 0 | \rho_A(t) | 1, 1 \rangle \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_2(t) &= \begin{pmatrix} \langle 1, 1 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle \\ \langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle \\ \langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle \\ \langle 0, 0 | \rho_A(t) | 1, 0 \rangle \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}_3(t) &= \begin{pmatrix} \langle 1, 1 | \rho_A(t) | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, 0 | \rho_A(t) | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, -1 | \rho_A(t) | 1, -1 \rangle \\ \langle 0, 0 | \rho_A(t) | 1, -1 \rangle \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_4(t) &= \begin{pmatrix} \langle 1, 1 | \rho_A(t) | 0, 0 \rangle \\ \langle 1, 0 | \rho_A(t) | 0, 0 \rangle \\ \langle 1, -1 | \rho_A(t) | 0, 0 \rangle \\ \langle 0, 0 | \rho_A(t) | 0, 0 \rangle \end{pmatrix}. \tag{4.255}
\end{aligned}$$

Aquí  $\mathbb{A}_j(t)$  son matrices complejas de  $16 \times 8$  que hacen uso de las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
\alpha &\equiv \frac{e^{i\delta_L t}}{\sqrt{2}\gamma_1} (G_1 + G_2), & \xi &\equiv 1 + \frac{3}{2}F_{12}, & \chi &= -\frac{3}{4}(2 + F_{12}), \\
\beta &\equiv \frac{e^{i\delta_L t}}{\sqrt{2}\gamma_1} (G_1 - G_2), & \zeta &\equiv 1 - \frac{3}{2}F_{12}, & \eta &= -\frac{3}{4}(2 - F_{12}).
\end{aligned}$$

Las matrices  $\mathbb{A}_1(t)$  y  $\mathbb{A}_2(t)$  están definidas a continuación:

$$\mathbb{A}_1(t) \equiv \begin{pmatrix} -2 & i\alpha^* & 0 & -i\beta^* & -i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ i\alpha & \chi & i\alpha^* & 0 & 0 & -i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & i\alpha & -1 & i\beta & 0 & 0 & -i\alpha & 0 \\ -i\beta & 0 & i\beta^* & \eta & 0 & 0 & 0 & -i\alpha \\ -i\alpha^* & 0 & 0 & 0 & \chi & i\alpha^* & 0 & -i\beta^* \\ \xi & -i\alpha^* & 0 & 0 & i\alpha & -\xi & i\alpha^* & 0 \\ 0 & \xi & -i\alpha^* & 0 & 0 & i\alpha & -\frac{1}{2}\xi & i\beta \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha^* & -i\beta & 0 & i\beta^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\alpha^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & -i\alpha^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & -i\alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\alpha^* \\ i\beta^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\beta^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\beta^* & -\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & i\beta^* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}_2(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\beta \\ -i\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & i\alpha^* & 0 & -i\beta^* & -i\beta^* & 0 & 0 & 0 \\ i\alpha & -\frac{1}{2}\zeta & i\alpha^* & 0 & 0 & -i\beta^* & 0 & 0 \\ 0 & i\alpha & 0 & i\beta & 0 & 0 & -i\beta^* & \zeta \\ -i\beta & 0 & i\beta^* & -\frac{1}{2}\zeta & -\zeta & 0 & 0 & -i\beta^* \\ -i\beta & 0 & 0 & 0 & \eta & i\alpha^* & 0 & -i\beta^* \\ 0 & -i\beta & 0 & 0 & i\alpha & -1 & i\alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & -i\beta & 0 & 0 & i\alpha & -\frac{1}{2}\zeta & i\beta \\ 0 & 0 & 0 & -i\beta & -i\beta & 0 & i\beta^* & -\zeta \end{pmatrix}.$$





# Artículos publicados

En esta sección damos las referencias a los artículos que sirven de sustento al presente trabajo de tesis doctoral.

1. L. O. Castaños y R. Jáuregui, *Effects of uncertainty in position on the dissipation rates and the entanglement of two atoms collectively interacting with a reservoir*, Phys. Rev. A 83, 062103 (2011).
2. L. O. Castaños y R. Jáuregui, *Entanglement properties of an ultracold atom interacting with a cavity quantized electromagnetic field*, Phys. Rev. A 82, 053815 (2010) Published November 15, 2010.
3. L. O. Castaños, *Steady-state quantum correlations of two driven qubits collectively interacting with a vacuum reservoir*, arXiv:1104.3329.



# Bibliografía

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics, Vol. 1*, (Wiley-Interscience,2006).
- [2] M. Schlosshauer, *Decoherence*, (Springer,2007).
- [3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge,2001).
- [4] G. Benenti, G. Casati, and G. Strini, *Principles of Quantum Computation and Information - Vol.1: Basic Concepts*, (World Scientific Publishing Company, 2004).
- [5] S. M. Barnett, *Quantum Information*, (Oxford, 2009).
- [6] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, (Oxford University Press, USA,2007).
- [7] J. Maziero, L. C. Céleri, R. M. Serra, and V. Vedral, Phys. Rev. A **80**, 044102 (2009).
- [8] T. Werlang, S. Souza, F. F. Fanchini, and C. J. Villas Boas, Phys. Rev. A **80**, 024103 (2009).
- [9] L. Mazzola, J. Piilo, and S. Maniscalco, Phys. Rev. Lett. **104**, 200401 (2010).
- [10] F. F. Fanchini, T. Werlang, C. A. Brasil, L. G. E. Arruda, and A. O. Caldeira, Phys. Rev. A **81**, 052107 (2010).
- [11] S. Banerjee, V. Ravishankar, and R. Srikanth, Annals of Physics (N.Y.) **325**, 816-834 (2010).
- [12] A. Auyuanet and L. Davidovich, Phys. Rev. A **82**, 032112 (2010).
- [13] A. F. Alharbi and Z. Ficek, Phys. Rev. A **82**, 054103 (2010).
- [14] F. Giraldi and F. Petruccione, Phys. Rev. A **83**, 012107 (2011).
- [15] J. Dalibard, J. M. Raimond, and J. Zinn-Justin, eds. *Proceeding of the Summer School in Les Houches 1990: Fundamental Systems in Quantum Optics. Les Houches, Session LIII, 1990*, (Elsevier, 1992).

- [16] V. Letokhov, *Laser Control of Atoms and Molecules*, (Oxford, 2007).
- [17] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*, (Wiley-VCH,1998).
- [18] H. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics I*, (Springer,1999). H. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 2: Non-Classical Fields*, (Springer,2007).
- [19] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [20] S. Haroche, “Cavity Quantum Electrodynamics: A Review of Rydberg Atom-Microwave Experiments on Entanglement and Decoherence” in *Latin-American School of Physics XXXI ELAF* edited by S. Hacyan, R. Jáuregui, and R. López-Peña (American Institute of Physics, New York, 1998).
- [21] H. Walther, B. Varcoe, B. G. Englert, and T. Becker, *Rep. Prog. Phys.* **69** 1325 (2006).
- [22] T. Rudolph and Z. Ficek ,*Phys. Rev. A* **58**, 748751 (1998).
- [23] Z. Ficek and R. Tanas, *Physics Reports* **372**, 369-443 (2002).
- [24] B. G. Englert, *Elements of Micromaser Physics*, arXiv:quant-ph/0203052v1 (2002).
- [25] B. G. Englert, M. Löffler, O. Benson, B. Varcoe, M. Weidinger, and H. Walther, *Fortschr. Phys.* **46**, 897 (1998).
- [26] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **17**, 821-825 (1976).
- [27] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119-130 (1976).
- [28] V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, *Rep. Math. Phys.* **13**, 149-173 (1978).
- [29] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, (SIAM,2001).
- [30] P. R. Halmos, *Measure Theory*, (Springer, 1974).
- [31] B. Schumacher and M. D. Westmoreland, *Phys. Rev. A* **74**, 042305 (2006).
- [32] B. Groisman, S. Popescu, and A. Winter, *Phys. Rev. A* **72**, 032317 (2005).
- [33] M. Plenio and S. Virmani, *Quant. Inf. Comp.* **7**, 1 (2007).
- [34] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998). W. K. Wootters, *Quantum. Inf. Comput.* **I**, 27 (2001).
- [35] R. Horodecki, P. Horodecki , M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
- [36] K. Modi, T. Paterek, W. Son, V. Vedral, and M. Williamson, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 080501 (2010).

- [37] L. Henderson and V. Vedral, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 6899-6905 (2001).
- [38] H. Ollivier and W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2001).
- [39] M. Ali, A. R. P. Rau, and G. Alber, *Phys. Rev. A* **81**, 042105 (2010).
- [40] S. Luo, *Phys. Rev. A* **77**, 042303 (2008).
- [41] X. M. Lu, J. Ma, Z. Xi, and X. Wang, *Phys. Rev. A* **83**, 012327 (2011).
- [42] B. Dakić, V. Vedral, and C. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190502 (2010).
- [43] T. M. Apostol, *Calculus, Vol. II*, Second Edition, (Wiley,1969).
- [44] B.-G. Englert, J. Schwinger, A. O. Barut, and M. O. Scully, *Europhys. Lett.* **14**, 25 (1991).
- [45] M. Battocletti and B.-G. Englert, *J. Phys. II France* **4**, 1939 (1994).
- [46] M. O. Scully, G. M. Meyer, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4144 (1996).
- [47] G. M. Meyer, M. O. Scully, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **56**, 4142 (1997).
- [48] M. Löffler, G. M. Meyer, M. Schröder, M. O. Scully, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **56**, 4153 (1997).
- [49] M. Schröder, K. Vogel, W. P. Schleich, M. O. Scully, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **56**, 4164 (1997).
- [50] C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty, A. S. Parkins, and H. J. Kimble, *Science* **287**, 1447 (2000).
- [51] T. Bastin and J. Martin, *Phys. Rev. A* **67**, 053804 (2003).
- [52] T. Bastin and J. Martin, *Phys. Rev. A* **72**, 053815 (2005).
- [53] J. Martin and T. Bastin, *Eur. Phys. J. D* **48**, 301 (2008).
- [54] F. Brennecke, T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, M. Köhn, and T. Esslinger, *Nature* **450**, 269 (2007).
- [55] Y. Colombe, T. Steinmetz, G. Dubois, F. Linke, D. Hunger, and J. Reichel, *Nature* **450**, 272 (2007).
- [56] S. Gupta, K. L. Moore, K. W. Murch, and D. M. Stamper-Kurn, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 213601 (2007).
- [57] R. Juárez-Amaro, J. M. Vargas-Martínez, and H. Moya-Cessa, *Laser Physics* **18**, 344(2008).
- [58] S. Haroche, M. Brune, and J. M. Raimond, *Europhys. Lett.* **14**, 19 (1991).

- [59] S. Haroche and J. M. Raimond, “Manipulation of nonclassical field states in a cavity by atom interferometry” in *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics, Supplement 2* edited by P. R. Berman (Academic Press, New York, 1994).
- [60] *Cavity Quantum Electrodynamics, Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics, Supplement 2* edited by P. R. Berman (Academic Press, New York, 1994).
- [61] J. Larson and S. Stenholm, Phys. Rev. A **73**, 033805 (2006).
- [62] S. V. Prants, M. Yu. Uleysky, and V. Yu. Argonov, Phys. Rev. A **73**, 023807 (2006).
- [63] J. Larson and M. Abdel-Aty, Phys. Rev. A **80**, 053609 (2009).
- [64] J. Larson, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **42**, 044015 (2009).
- [65] W. E. Schiesser, *The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations*, (Academic Press, USA, 1991).
- [66] W. E. Schiesser and G. W. Griffiths, *A Compendium of Partial Differential Equation Models: Method of Lines Analysis with Matlab*, (Cambridge, New York, 2009).
- [67] K. W. Morton and David Mayers, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, 2nd ed. (Cambridge, New York, 2005).
- [68] D. F. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, (Birkhuser, Boston, 2001).
- [69] T. Bastin and E. Solano, Computer Physics Communications **124**, 197 (2000).
- [70] P. Münstermann, T. Fischer, P. Maunz, P. W. H. Pinkse, and G. Rempe, Phys. Rev. Lett. **82**, 3791 (1999).
- [71] R. W. Boyd and D.J. Gauthier, “Slow and fast light” in *Progress in Optics 43* edited by E. Wolf (Elsevier, Netherlands, 2002).
- [72] Se pueden ver dos películas en [[www.fisica.unam.mx/research/movies](http://www.fisica.unam.mx/research/movies)].
- [73] G. M. Meyer, M. Löffler, and H. Walther, Laser Physics Vol. **8**, No. 3, pp. 649-652 (1998).
- [74] A. Al-Qasimi and D. F. V. James, Phys. Rev. A **77**, 012117 (2008).
- [75] J. H. Huang and S. Y. Zhu, Optics Communications **281**, 2156-2159 (2008).
- [76] J. H. Huang and S. Y. Zhu, Phys. Rev. A **76**, 062322 (2007).
- [77] E. A. Coddington and R. Carlson, *Linear Ordinary Differential Equations*, (SIAM, 1997).
- [78] W. J. Munro, D. F. V. James, A. G. White, and P. G. Kwiat, Phys. Rev. A **64**, 030302 (2001).
- [79] P. Meystre, *Atom Optics*, (Springer, 2001).

- [80] J. W. Negele and H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, (Wiley-Classics,1998).
- [81] S. Falke, E. Tiemann, C. Lisdat, H. Schnatz, and G. Grosche, Phys. Rev. A 74, 032503 (2006); D. Das and V. Natarajan, J. Phys. B 41, 035001 (2008).