



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

DECAIMIENTO CUÁNTICO
DE DOS PARTÍCULAS IDÉNTICAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)
P R E S E N T A
LUIS GUILLERMO MENDOZA LUNA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GASTÓN GARCÍA CALDERÓN

MIEMBROS DEL COMITÉ DE TUTORES:
DR. GASTÓN GARCÍA CALDERÓN
DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
DR. AXEL DE LA MACORRA PETTERSSON





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del trabajo

1. Datos del alumno Mendoza Luna Luis Guillermo Universidad Nacional Autónoma de México Instituto de Física Posgrado en Ciencias Físicas 302092398
2. Datos del tutor Dr Gastón García Calderón
3. Datos del sinodal 1 Dra Rocío Jáuregui Renaud
4. Datos del sinodal 2 Dr Fernando Matías Moreno Yntriago
5. Datos del sinodal 3 Dr José Francisco Récamier Angelini
6. Datos del sinodal 4 Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar
7. Datos del trabajo escrito Decaimiento cuántico de dos partículas idénticas 49pp. 2011

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Dr. Gastón García Calderón por haberme guiado hasta este punto. Su influencia, sus enseñanzas y su apoyo han sido cruciales en mi carrera científica.

Agradezco a mis padres José Luis Mendoza Arreguín y Luisa Luna Castillo y a mi hermana María Luisa por haberme acompañado y apoyado en el transcurso de estos estudios así como en todas las etapas previas de mi formación; lo que soy se lo debo a ellos pero admito que las fallas son exclusivamente mías. Reconozco también la inmensa deuda que tengo con mis primos, tíos y abuelos quienes han depositado en mí su confianza y a quienes espero corresponderles debidamente.

Aprovecho este espacio para expresar mi gratitud al plantel 9 de la Escuela Nacional Preparatoria, en cuyas aulas aprendí una manera de ser y que me orientaron decisivamente en mi elección de una carrera científica. Lo mejor de mí se debe en buena medida a mi paso por sus maravillosas aulas, a sus profesores y a los amigos que en ella hice.

Agradezco profundamente al Instituto de Física por la oportunidad que me dio al recibirme como uno de sus estudiantes asociados y así permitirme disfrutar el ambiente tan propicio para discutir e intercambiar las ideas. Agradezco también a la Universidad Nacional Autónoma de México y al Posgrado en Ciencias Físicas por haberme admitido como uno de sus miembros y así haber contribuido en mi formación académica, así como al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para realizar estos estudios de posgrado.

Agradezco a los doctores Gastón García Calderón, Rocío Jáuregui Renaud y Axel de la Macorra, de mi comité de tutores, por su tiempo para atender las reuniones de tutores así como por sus consejos acertados sobre el futuro de mi carrera y a los miembros del jurado de mi examen de grado, los doctores Gastón García Calderón, Rocío Jáuregui Renaud, Fernando Matías Moreno Yntriago, José Francisco Récamier Angelini y Jorge Alberto Villavicencio Aguilar por su lectura cuidadosa y el interés mostrado, así como por sus comentarios y críticas al presente escrito, que contribuyeron significativamente a mejorarlo; los errores que quedaran en él son responsabilidad mía.

Aunque siempre resulta injusto para las personas no mencionadas quiero adelantar una lista de todos aquellos que me han ayudado con sus consejos en esta etapa tan trascendente de mi vida. Vaya mi más sincero reconocimiento y afecto a las Dras. Patricia Goldstein Menache, María de los Ángeles Ortiz, Rosa María Méndez Vargas, así como a Sonia Cornejo, Samanta Patricia Saavedra, Xitzel Sánchez, Alexandro Heiblum, Diego Garrido, Erika Cerón, Gabriela Díaz, Gisela Noemí Ortiz, Erika Martínez, Miguel Ángel Juárez, Cintli Aguilar, Jessica Jaurez, María Mansurova, Israel Barragán, Marduk Bolaños y Laura Michelle Jiménez. Pido una disculpa a todos aquellos cuyo nombre omito.

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
1. Introducción	1
2. Estados resonantes y decaimiento	5
2.1. Formulación del problema del decaimiento	5
2.2. Estados resonantes	6
2.3. Función de Green de onda saliente	10
2.4. Normalización de los estados resonantes	12
2.5. Solución exacta del problema de un cuerpo	14
2.6. El método del punto silla	16
3. Ejemplo: el problema del potencial δ de un cuerpo	18
3.1. El modelo del potencial δ	18
3.2. Solución analítica	19
3.3. Solución asintótica	22
4. Partículas idénticas	24
4.1. Sumario de física de partículas idénticas.	24
4.2. Formulación del problema.	24
4.3. Propagador retardado de dos partículas.	25
5. Ejemplo: el problema del potencial δ de dos cuerpos.	28
5.1. Función espacial simétrica factorizada	28
5.2. Función espacial simétrica enredada	33
5.3. Función espacial antisimétrica	37
5.4. Discusión	41

5.5. Extensión a N partículas	44
6. Conclusiones	46

Resumen

En este trabajo se encuentra una solución analítica a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para dos partículas idénticas que decaen. También se han desarrollado las correspondientes expresiones asintóticas de la solución, mismas que valen para tiempos largos comparados con la vida media del sistema. Se demuestra, para sistemas de dos cuerpos que decaen sujetos a potenciales de alcance finito, que el régimen de decaimiento exponencial de las probabilidades de supervivencia y no-escape para estados iniciales simétricos (factorizados y enredados) y antisimétricos es dominado por ciertas combinaciones de la suma de los anchos de las resonancias y que para tiempos grandes dichas cantidades siguen la ley de potencia inversa t^{-6} en el caso de estados simétricos y la ley de potencia inversa t^{-10} para estados antisimétricos. Los hallazgos antes mencionados y una comparación con el caso correspondiente de una partícula se hacen para el modelo de potencial δ en onda s . Asimismo, se explora la extensión de los resultados anteriores al caso general de N cuerpos obteniendo expresiones exactas y aproximadas de las probabilidades de supervivencia y no-escape.

Abstract

In this work an analytic solution of the time-dependent Schrödinger equation for a two-particle decaying system is given; the corresponding asymptotic expressions of the solution are given as well, which are found to hold for long times compared to the lifetime of the system. It is shown, for decaying two-body systems subject to a finite-range potential, that the exponential decay regime of the survival and non-escape probabilities for initial symmetric (factorized and entangled) and antisymmetric states is dominated by certain combinations of the sum of the widths of such resonances and that for long times these probabilities follow the inverse power law t^{-6} in the symmetric case and the t^{-10} law in the antisymmetric case; the aforementioned findings and a comparison with the single-particle case are made for the s -wave δ -shell model. It is explored as well the extension of the former results to the general N body case obtaining both exact and approximate expressions of the survival and nonescape probabilities.

Capítulo 1

Introducción

El decaimiento es uno de los temas más antiguos de la teoría cuántica. Este término se refiere al escape por tunelaje de partículas de una cierta región. Mientras que la teoría de perturbaciones ha sido tradicionalmente usada para estudiar ejemplos de decaimiento [1], a lo largo de los años se ha desarrollado un enfoque del decaimiento cuántico que involucra un desarrollo resonante utilizando el hamiltoniano completo H del sistema [2]. En este trabajo se aborda el problema del decaimiento de sistemas de 2 partículas sin interacción a partir del formalismo de estados resonantes.

Uno de los primeros problemas en los que la Mecánica Cuántica fue aplicada exitosamente fue el estudio del decaimiento α . Independientemente Gamow [3, 4] y Gurney y Condon [5, 6] estudiaron este problema encontrando que las partículas siguen una tasa de decaimiento exponencial como función del tiempo; la contribución de Gamow fue la de resolver la ecuación de eigenvalores de Schrödinger con un potencial efectivo de barrera de alcance finito y, además, imponer condiciones de frontera de onda saliente, lo cual tiene como consecuencia que los eigenvalores de la energía resulten complejos y que los estados decaigan exponencialmente respecto al tiempo y que resulten divergentes como función de la distancia al potencial; esta última característica los mantuvo relegados como herramientas de cálculo por mucho tiempo [7]. Este enfoque condujo a Gamow a considerar la parte imaginaria de la energía como una medida del ancho del estado por decaer, lo que da una escala de tiempo natural para el decaimiento. El trabajo de Gamow dio entonces sustento a trabajo experimental previo reportando una tasa de decaimiento exponencial [8, 9, 10].

La ley del decaimiento exponencial se ha observado en contextos ajenos a la física nuclear y la radiactividad. Otros ejemplos los constituyen la atenuación de la radiación en la materia (ley de Lambert-Beer), la ley del enfriamiento de Newton y la descarga de un capacitor debida a una resistencia, lo cual puede hacer suponer que la ley del decaimiento exponencial es una ley general sin excepciones. Sin embargo, el trabajo pionero de Khalfin permitió establecer la

incompatibilidad del decaimiento puramente exponencial con la Mecánica Cuántica [11, 12, 13]. En el trabajo teórico subsecuente se encuentra la consideración de un modelo de potencial δ en el que el decaimiento se manifiesta a través del tunelaje por una barrera de potencial [14]; en este trabajo se mostró explícitamente la desviación al decaimiento exponencial a tiempos cortos y largos respecto a la vida media del sistema. Continuando con el trabajo teórico mencionado García Calderón aplicó el formalismo de los estados resonantes a un problema de decaimiento en 3 dimensiones de una onda s sujeta a un potencial δ encontrando explícitamente un término de potencia inversa $t^{-3/2}$ en el propagador de una partícula [15]. Tiempo después se han encontrado experimentalmente desviaciones a la ley del decaimiento exponencial a tiempos muy cortos y muy largos comparados con la vida media del sistema [16, 17]. A tiempos largos se han encontrado varias leyes de potencia inversa que describen distintos sistemas.

Existe otro tipo de desviación al decaimiento exponencial, el efecto Zeno cuántico, que es la inhibición de transiciones entre estados cuánticos debida a mediciones frecuentes del estado. Dicha inhibición surge porque las mediciones evitan que la función de onda evolucione como lo haría según la ecuación de movimiento, y si el intervalo de tiempo entre mediciones es suficientemente corto la función de onda permanece en el estado inicial [18]. En contraste con esto, existe el efecto anti-Zeno, en el que mediciones frecuentes de un sistema pueden hacer que éste decaiga más rápidamente [19].

Además de la función de onda misma, dos cantidades de interés son las probabilidades de supervivencia $S(t)$ y de no-escape $P(t)$. La primera se define como la probabilidad de que la partícula que decae permanezca en su estado original al evolucionar en el tiempo y la segunda se define como la probabilidad de que la partícula que decae permanezca dentro del área observada. En el caso de 1 partícula en onda s que decae sujeta a un potencial δ se ha establecido, utilizando el formalismo de estados resonantes, que $S(t)$ y $P(t)$ poseen ambos un régimen no exponencial proporcional a t^{-3} ; los resultados de este enfoque han sido comparados con resultados obtenidos directamente por integración numérica y se ha demostrado coincidencia entre ambos métodos [20].

El comportamiento de escape de partículas idénticas también ha captado interés en años recientes. Mientras que se ha establecido una relación entre sistemas caóticos y las leyes de potencia inversa a tiempos grandes en el decaimiento [21], también se ha establecido que el Principio de Exclusión de Pauli tiene consecuencias sobre la ley particular de decaimiento obedecida en la evolución de partículas idénticas que decaen confinadas inicialmente en una región y que después pueden evolucionar libremente [22]. En particular, se ha establecido que $S(t)$ posee, en el caso libre, un comportamiento de potencia inversa proporcional a t^{-6} para estados iniciales simétricos (que corresponden únicamente a la parte espacial de la función

de onda, de donde no necesariamente ello implica que correspondan a bosones) y una ley de potencia proporcional a t^{-10} para estados iniciales antisimétricos. El enfoque utilizado corresponde a usar el propagador de partícula libre de línea completa ($-\infty < x < \infty$) para obtener el propagador de la semilínea ($0 < x < \infty$) y, utilizando un desarrollo asintótico para tiempos largos, se obtuvo el término dominante de potencia inversa en la ley de decaimiento.

El decaimiento de un gas de Tonks-Girardeu de pocos cuerpos también ha sido estudiado antes con la intención de obtener resultados analíticos que puedan compararse con el experimento. El tratamiento utilizado en esos estudios involucró una integración sobre todas las coordenadas de las partículas salvo una y la ley de potencia obtenida en este estudio es proporcional a t^{-3} [23]. Sin embargo, el enfoque seguido aquí considera a ambas probabilidades, de supervivencia y de no escape, como verdaderas observables de muchas partículas y como tales las integraciones correspondientes se realizarán todas en un solo paso.

En este trabajo la representación del propagador de un sistema de 2 partículas se escribe como una suma sobre los estados resonantes (de una partícula) del sistema; esta suma también comprende la evaluación de la función de Moshinsky M en los polos complejos del sistema, y además es tal que permite inmediatamente la integración para obtener la función de onda que decae de un sistema de dos partículas, que queda descrita como una suma sobre los polos resonantes del sistema. En dicha suma se pueden separar explícitamente los términos exponenciales de aquellos no exponenciales debido a las propiedades de la función M . Cabe señalar que la expresión obtenida para el propagador es válida para cualquier potencial de alcance finito que afecte a ambas partículas. Si se impone, además, la condición de que ambas partículas sean idénticas, lo cual conlleva la simetría o antisimetría de la función de onda, entonces se obtienen en general leyes de potencia inversas distintas a las seguidas por el decaimiento de una partícula.

Para facilitar el estudio de dichas leyes de potencia en lugar de usar el desarrollo exacto para el propagador de dos partículas puede utilizarse, alternativamente, el método del punto silla [24], el cual provee de expresiones asintóticas para el propagador de un cuerpo que pueden ser combinadas para dar explícitamente el comportamiento asintótico correcto del propagador de dos cuerpos y, mediante integraciones, de la función de onda y de $S(t)$ y $P(t)$. Los resultados de ambos enfoques coinciden, lo cual brinda una prueba de consistencia del presente estudio.

Este trabajo se encuentra organizado como sigue. En el Capítulo 2 se hace una revisión del formalismo de estados resonantes y del problema del decaimiento de una partícula. En el Capítulo 3 se expone el problema de la partícula que evoluciona desde un estado inicial sujeta a un potencial δ . En el Capítulo 4 se presenta la extensión del formalismo para sistemas de 2 partículas idénticas, así como las correspondientes expresiones para el propagador de dos

partículas. En el Capítulo 5 se desarrolla el ejemplo de dos partículas idénticas sujetas ambas a un potencial δ , así como también se lleva a cabo el cálculo de $S(t)$ y $P(t)$. Finalmente, en el Capítulo 6 se exponen las conclusiones y posibles caminos para continuar con el presente trabajo.

Capítulo 2

Estados resonantes y decaimiento

2.1. Formulación del problema del decaimiento

Considérese una partícula confinada en $t = 0$ a lo largo de la región interna de un potencial esféricamente simétrico de alcance finito, es decir, un potencial tal que $V(r) = 0$ para $r > a$.

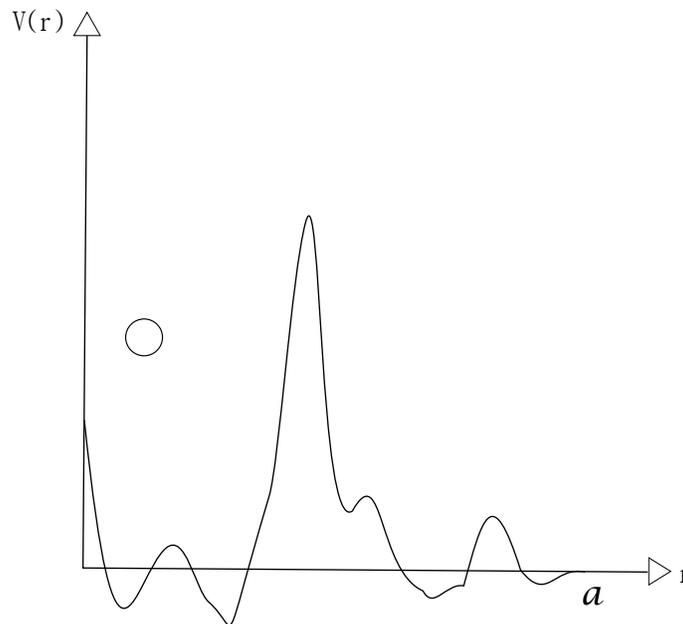


Figura 2.1: Formulación del problema del decaimiento de una partícula sobre la que actúa un potencial de alcance finito arbitrario.

Por simplicidad consideraremos $\hbar = 2m = 1$, elección a veces denominada “de unidades naturales”. La función de onda $\Psi(r, t)$ a tiempos posteriores está dada por el propagador $g(r, r', t)$ como

$$\Psi(r, t) = \int_0^a g(r, r', t) \Psi(r', 0) dr'. \quad (2.1.1)$$

Entonces, para conocer la evolución temporal de un sistema basta conocer su propagador $g(r, r', t)$. Utilizando unidades naturales, la función de Green retardada $g(r, r', t)$ del problema puede escribirse como [2]

$$g(r, r', t) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} G^+(r, r', k) e^{-ik^2 t} 2k \, dk, \quad (2.1.2)$$

donde el contorno hiperbólico \mathcal{C} se señala en la Figura 2.2 y $G^+(r, r', k)$ es la función de Green de onda saliente. En el caso de un potencial de alcance finito $G^+(r, r', k)$ puede extenderse

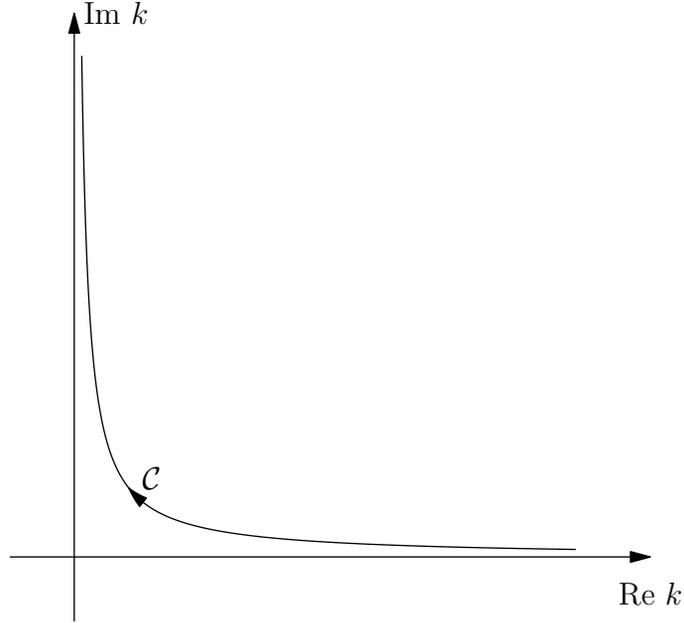


Figura 2.2: Contorno de integración de la Ec. (2.1.2).

analíticamente al plano complejo k , donde posee una cantidad infinita de polos distribuida en una forma conocida [25, 26]: los polos que representan estados ligados del sistema se localizan sobre la parte positiva del eje imaginario; los estados antiligados están sobre la parte negativa del eje imaginario y en la mitad inferior del plano complejo, distribuidos simétricamente respecto al eje imaginario debido a la invariancia ante inversión temporal, se encuentran los polos resonantes del sistema [27]. Para clarificar el significado de estas afirmaciones haremos una digresión sobre los estados resonantes.

2.2. Estados resonantes

En la teoría de la dispersión cuántica es común considerar una onda plana viajando en la dirección z y que encuentra un potencial dispersor que produce una onda esférica saliente. A grandes distancias del potencial dispersor la solución de la ecuación de Schrödinger puede

escribirse como

$$\psi(r, \theta) \approx A \left(e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \quad (2.2.1)$$

De esta situación física se sigue el resultado del cálculo de la sección diferencial de interacción como $|f(\theta)|^2$. Uno de los métodos más importantes para el cálculo de esta cantidad es el análisis en ondas parciales, que revisamos brevemente a continuación.

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger para un potencial esféricamente simétrico pueden escribirse de forma separable como

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.2.2)$$

donde (r, θ, ϕ) representan las coordenadas esféricas usuales. Las funciones $Y_{lm}(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos y las funciones $R(r)$, a través de $v(r) = rR(r)$, satisfacen la ecuación

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] v(r) = Ev(r) \quad (2.2.3)$$

Las funciones $v(r)$ satisfacen la condición de frontera

$$v(r=0) = 0. \quad (2.2.4)$$

En lo que sigue consideraremos únicamente onda s , es decir, supondremos $l = 0$.

El origen de los estados resonantes puede rastrearse en la solución presentada por Gamow del problema del decaimiento α de los núcleos atómicos [3, 28]. Para obtener estos estados se impone sobre la ecuación de Schrödinger la condición de frontera de onda saliente, es decir, que la solución no posea componentes entrantes a grandes distancias del potencial considerado, o bien, que solamente posea componentes salientes.

En este trabajo se consideran únicamente potenciales de alcance finito, es decir, tales que $V(r) = 0$ si $r > a$. Además, adoptaremos la notación de señalar a los estados resonantes como u .

De la ecuación (2.2.3), reescrita para onda s como

$$-\frac{d^2}{dr^2}u(r) + V(r)u(r) = Eu(r), \quad (2.2.5)$$

observamos que tiene como solución en la región fuera del alcance del potencial

$$u(r) = Ce^{-ikr} + De^{ikr}. \quad (2.2.6)$$

Si se impone la condición de frontera de onda saliente, es decir, que $C = 0$, los eigenvalores del problema resultan complejos [29]. Los valores de k para los que u es una solución de la ecuación de Schrödinger que consta puramente de ondas salientes se denotarán por k_n (o

E_n para la respectiva energía compleja) y sus respectivas eigenfunciones por u_n . Entonces, considerando k_n compleja la solución en la región exterior al potencial es

$$u_n(r) = D_n e^{ik_n r}. \quad (2.2.7)$$

Así, la condición de frontera de onda saliente en el caso tridimensional puede escribirse como

$$\left. \frac{d}{dr} u_n(r) \right|_{r=a^-} = ik_n u_n(a^-) \quad (2.2.8)$$

Entonces, los estados resonantes son soluciones de la ecuación de Schrödinger sujetas a condiciones de frontera de onda saliente y que por ello tienen asociados valores complejos de la energía. Debido a que los potenciales que consideraremos son reales y a consideraciones de simetría ante inversión temporal [25], los polos se encuentran distribuidos simétricamente respecto al eje imaginario del plano k . En general, los polos se encontrarán sobre la parte positiva del eje imaginario (estados ligados), sobre la parte negativa de dicho eje (estados antiligados) y en el tercer y cuarto cuadrante (resonancias). Entonces podemos escribir

$$k_n = a_n - ib_n \quad (2.2.9)$$

$$E_n = \epsilon_n - \frac{i}{2} \Gamma_n. \quad (2.2.10)$$

De $E_n = k_n^2$ se deducen las relaciones

$$\epsilon_n = a_n^2 - b_n^2 \quad (2.2.11)$$

$$\Gamma_n = 4a_n b_n. \quad (2.2.12)$$

Una solución general de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$\Psi_n(r, t) = u_n(r) e^{-iE_n t} = u_n(r) e^{-i\epsilon_n t} e^{-\frac{1}{2} \Gamma_n t} \quad (2.2.13)$$

según el método de separación de variables, de donde se ve que la densidad de probabilidad ρ del estado resonante decae exponencialmente con el tiempo:

$$\rho_n(r, t) = |\Psi_n(r, t)|^2 = |u_n(r)|^2 e^{-\Gamma_n t}. \quad (2.2.14)$$

Entonces, en el modelo considerado por Gamow, los estados resonantes decaen exponencialmente como función del tiempo con una vida media

$$\tau_n = \frac{1}{\Gamma_n}, \quad (2.2.15)$$

a diferencia de los estados estacionarios, que no exhiben esta propiedad.

En un problema de decaimiento, τ_n brinda una escala del tiempo en que la partícula se queda atrapada en el sistema.

Asintóticamente, la forma de la función de onda a grandes distancias del potencial ($r > a$) es

$$\Psi_n(r, t) = u_n(r)e^{-iE_n t} = D_n \exp [i (a_n r - \epsilon_n t)] e^{b_n r} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_n t}. \quad (2.2.16)$$

El primer factor en (2.2.16) representa una onda saliente asociada a un estado de energía positiva (cuando k_n es una resonancia propia). El hecho de que $\text{Im}(k_n) < 0$ implica que, a grandes distancias, la amplitud del estado resonante aumenta exponencialmente lo cual se interpreta como que a mayores distancias están presentes partículas emitidas anteriormente por una fuente; por esta razón las reglas de normalización, ortogonalidad y completitud de las eigenfunciones comunes no aplican, lo que le valió a los estados resonantes que fueran descartados por mucho tiempo como herramientas de cálculo [7].

Por otro lado, en el caso de una resonancia aislada, es decir, tal que

$$\Gamma_n \ll |\epsilon_{n+1} - \epsilon_n|, \quad (2.2.17)$$

la amplitud de transmisión del problema independiente del tiempo adopta aproximadamente la llamada forma lorentziana o de Breit-Wigner

$$t(E) \approx \frac{\Gamma_n/2}{E - \epsilon_n + i\Gamma_n/2} \quad (2.2.18)$$

de donde

$$|t(E)|^2 \approx \frac{(\Gamma_n/2)^2}{(E - \epsilon_n)^2 + (\Gamma_n/2)^2} \quad (2.2.19)$$

y, por ello, el estado resonante no corresponde a una energía definida sino a una distribución de energías centrada en ϵ_n y de ancho Γ_n a la semialtura de la misma.

Otra propiedad importante de los estados resonantes se obtiene escribiendo la ecuación de eigenvalores para u_n y multiplicándola por u_n^*

$$u_n^*(r) \left[-\frac{d^2}{dr^2} u_n(r) + V(r)u_n(r) \right] = E_n |u_n(r)|^2 \quad (2.2.20)$$

y, simétricamente, multiplicando la ecuación de eigenvalores que satisface u_n^* por u_n

$$u_n(r) \left[-\frac{d^2}{dr^2} u_n^*(r) + V(r)u_n^*(r) \right] = E_n^* |u_n(r)|^2. \quad (2.2.21)$$

Restando (2.2.21) de (2.2.20), integrando de 0 a a y usando las condiciones de frontera (2.2.4) y (2.2.8), procedimiento conocido como fórmula de Green, se deduce que

$$\Gamma_n \int_0^a |u_n(r)|^2 dr = 2a_n |u_n(a)|^2. \quad (2.2.22)$$

Esta relación es interesante ya que vincula el ancho de un estado n con el valor de u_n en el punto en que deja de actuar el potencial V .

2.3. Función de Green de onda saliente

La función de Green de la ecuación de Schrödinger con condiciones de onda saliente $G^+(r, r', k)$ es un medio teórico que proporciona una manera conveniente de ligar los estados resonantes con procesos físicos de interés pues posee propiedades analíticas que son de utilidad en el estudio de los problemas de dispersión y decaimiento [2]. La función de Green de onda saliente es un propagador definido como la transformada de Laplace de la función de Green retardada $g(r, t; r', 0)$

$$G^+(r, r', s) = \int_0^\infty e^{-st} g(r, t; r', 0) dt \quad (2.3.1)$$

donde $g(r, t; r', 0)$ representa la función de Green retardada del sistema.

Por otro lado, es posible mostrar que $G^+(r, r', k)$ satisface la ecuación diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + [k^2 - U(r)] \right) G^+(r, r', k) = \delta(r - r') \quad (2.3.2)$$

y la condición de onda saliente

$$\frac{\partial}{\partial r} G^+(r, r', k) \Big|_{r=a^-} = ik G^+(a, r', k). \quad (2.3.3)$$

Es entonces posible escribir una representación de la función de Green retardada $g(r, r', t)$ al completar el contorno \mathcal{C} de la forma que se indica en la Figura 2.3. Las contribuciones a la integral debidas a los arcos de círculo \mathcal{C}_R se anulan en el límite $R \rightarrow \infty$, mientras que las contribuciones debidas a los polos ubicados en el cuarto cuadrante del plano complejo k se evalúan mediante el teorema del residuo.

Entonces, la función de Green retardada $g(r, r', t)$ puede escribirse como

$$g(r, r', t) = \sum_b u_b(r) u_b(r') e^{-ik_b^2 t} + \sum_p u_p(r) u_p(r') e^{-ik_p^2 t} + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_l} G^+(r, r', k) e^{-ik^2 t} 2k dk, \quad (2.3.4)$$

La primera suma se toma sobre los posibles estados ligados del sistema y la segunda sobre aquellos polos resonantes encerrados por la trayectoria de integración de la Fig. 2.3. Esta

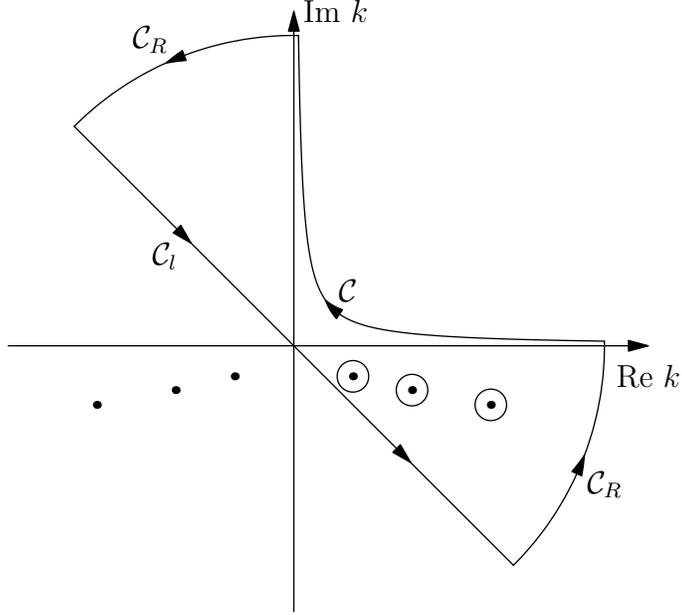


Figura 2.3: Una forma de completar la trayectoria de integración de la Ec. (2.1.2).

representación exacta para el propagador permite separar las contribuciones exponenciales a la evolución del sistema de las no exponenciales, contenidas esencialmente en la integral de la ecuación anterior. Para continuar evaluando la expresión anterior es posible presentar un desarrollo exacto sustentado en los polos del sistema, que permite escribir series con la evolución temporal correcta para todo tiempo. Para ello se utiliza el siguiente desarrollo para la función de Green de onda saliente [2]

$$G^+(r, r', k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n(k - k_n)}, \quad (r, r')^\dagger \leq a \quad (2.3.5)$$

donde el índice de la suma significa que ésta se toma sobre el conjunto completo de los polos del sistema. La notación $(r, r')^\dagger$ significa que el punto $r = r' = a$ ha sido excluido del desarrollo señalado arriba. Esta expresión converge para cuando ambas variables están dentro del alcance del potencial, incluso cuando una de ellas es a , pero diverge si $r = r' = a$. La fórmula anterior conduce a una representación de la función de Green retardada $g(r, r', t)$ en términos de estados resonantes y funciones de Moshinsky M [30], de las cuales se puede obtener el comportamiento asintótico correcto; otro camino para analizar el comportamiento a tiempos grandes es el método del punto silla, que se describirá más adelante.

Sustituyendo (2.3.5) en la ecuación diferencial que satisface $G^+(r, r', k)$ y sumando y restando $k_p^2 u_p(r)$ obtenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k + k_n}{k_n} u_n(r)u_n(r') = \delta(r - r'). \quad (2.3.6)$$

A partir de aquí se deducen las reglas de suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u_n(r)u_n(r')}{k_n} = 0; \quad (2.3.7)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n u_n(r)u_n(r') = 0; \quad (2.3.8)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r)u_n(r') = \delta(r - r'). \quad (2.3.9)$$

Utilizando la identidad algebraica

$$\frac{1}{2k_p(k - k_p)} = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k - k_p} + \frac{1}{k_p} \right) \quad (2.3.10)$$

podemos escribir $G^+(r, r', k)$ como

$$G^+(r, r', k) = \frac{1}{2k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u_n(r)u_n(r')}{k - k_n}. \quad (2.3.11)$$

Entonces, el término integral en la Ec. (2.3.4) puede escribirse como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r)u_n(r') \left(-\frac{i}{2\pi} \int_{C_1} \frac{e^{-ik^2 t}}{k_n - k} dk \right). \quad (2.3.12)$$

Esta información puede expresarse en términos de la función M [15] evaluada en $x = 0$, k_n y t :

$$M(k_n, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \frac{e^{-u^2}}{iy_n - u} du = \frac{1}{2} e^{y_n^2} \operatorname{erfc} y_n \quad (2.3.13)$$

con $y_n = -\exp(-i\pi/4)k_n t^{1/2}$. Notamos la simetría propiedad de simetría obedecida por M:

$$M(k_n, t) = e^{-ik_n^2 t} - M(-k_n, t), \quad (2.3.14)$$

la cual permite escribir el propagador $g(r, r', t)$ en forma compacta

$$g(r, r', t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r)u_n(r')M(k_n, t). \quad (2.3.15)$$

2.4. Normalización de los estados resonantes

Con el fin de que este trabajo sea autocontenido, en esta sección se expone la deducción del comportamiento de la función de Green de onda saliente $G^+(r, r', k)$ cerca de sus polos complejos para deducir el valor del residuo de dicha función, lo cual permite proponer un criterio de normalización de u_n [2].

En una vecindad de sus polos k_n , la función de Green puede escribirse como

$$G^+(r, r', k) = \frac{C_n(r, r')}{k - k_n} + \chi(r, r', k), \quad (2.4.1)$$

donde χ es regular en k_n . Esto permite reescribir (2.3.2) como

$$\frac{1}{k - k_n} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + [k^2 - U(r)] \right) C_n + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + [k^2 - U(r)] \right) \chi = \delta(r - r'). \quad (2.4.2)$$

Multiplicando (2.4.2) por $(k - k_n)$ y haciendo $k \rightarrow k_n$ se deduce

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + [k^2 - U(r)] \right) C_n(r, r', k) = 0. \quad (2.4.3)$$

Ahora, a (2.4.2) se le suma y resta $k_n^2 C_n(r, r', k)/(k - k_n)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k - k_n} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + [k^2 - U(r)] + [k^2 - k_n^2] \right) C_n(r, r', k) + \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + [k^2 - U(r)] \right) \chi(r, r', k) = \delta(r - r'). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Por (2.4.3), (2.4.4) se simplifica a

$$\frac{k^2 - k_n^2}{k - k_n} C_n + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + [k^2 - U(r)] \right) \chi = \delta(r - r'),$$

de donde

$$(k + k_n) C_n + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + [k^2 - U(r)] \right) \chi = \delta(r - r'). \quad (2.4.5)$$

Haciendo $k \rightarrow k_n$ se encuentra la condición

$$2k_n C_n(r, r') + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + [k_n^2 - U(r)] \right) \chi(r, r', k_n) = \delta(r - r'). \quad (2.4.6)$$

Las condiciones de frontera que satisface G^+ se pueden reescribir en términos de $C_n(r, r', k)$ y $\chi(r, r', k_n)$ como

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} C_n(r, r') \right|_{r=a^-} = ik C_n(a, r') \quad (2.4.7)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \chi(r, r', k) \right|_{r=a^-} = ik \chi(a, r', k) + i C_n(a, r'). \quad (2.4.8)$$

Así, u_n y C_n satisfacen la misma ecuación diferencial en r y las mismas condiciones de frontera, por lo que estas funciones deben diferir a lo más por un factor que no depende de r , es decir, la dependencia en r' de C_n puede ser factorizada.

$$C_n(r, r') = u_n(r)P_n(r'). \quad (2.4.9)$$

Es posible obtener una expresión para $P_n(r')$ en términos de $u_n(r')$ usando (2.4.6) y (2.4.8). El resultado es

$$P_n(r') = \frac{1}{2k_n} \frac{u_n(r')}{\int_0^a u_n^2(\rho) d\rho + \frac{i}{2k_n} u_n^2(a)}. \quad (2.4.10)$$

Finalmente,

$$C_n(r, r', k_n) = \frac{1}{2k_n} \frac{u_n(r)u_n(r')}{\int_0^a u_n^2(\rho) d\rho + \frac{i}{2k_n} u_n^2(a)}. \quad (2.4.11)$$

Para simplificar la expresión del residuo de la función de Green la expresión anterior sugiere usar la convención de normalización

$$\frac{i}{2k_n} u_n^2(a) + \int_0^a u_n^2(\rho) d\rho = 1, \quad (2.4.12)$$

con lo que el residuo $C_n(r, r', k_n)$ de la función de Green se expresa simplemente como

$$C_n(r, r', k_n) = \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n}. \quad (2.4.13)$$

2.5. Solución exacta del problema de un cuerpo

Del conocimiento del propagador $g(r, r', t)$ es inmediato calcular la función de onda y las probabilidades de supervivencia y de no-escape. Dado un estado inicial $\Psi(r, 0)$ y usando las Ecs. (2.1.1) y (2.3.15) es inmediato obtener

$$\Psi(r, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m u_m(r) M(k_m, t), \quad (2.5.1)$$

donde

$$C_m = \int_0^a u_m(r) \Psi(r, 0) dr. \quad (2.5.2)$$

La amplitud de supervivencia $A(t)$ de una partícula se define como

$$A(t) = \int_0^a \Psi^*(r, 0) \Psi(r, t) dr. \quad (2.5.3)$$

A partir de ella se define la probabilidad de supervivencia $S(t)$ como

$$S(t) = |A(t)|^2, \quad (2.5.4)$$

mientras que la probabilidad de no-escape $P(t)$ de una partícula confinada a una región se define como

$$P(t) = \int_0^a \Psi^*(r, t) \Psi(r, t) dr = \int_0^a |\Psi(r, t)|^2 dr. \quad (2.5.5)$$

Las integraciones se llevan a cabo en la región sobre la que actúa el potencial considerado; en este trabajo nos limitaremos a considerar potenciales de alcance finito. De las últimas dos definiciones y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce que $S(t) \leq P(t)$.

Entonces, de las definiciones anteriores, la amplitud de supervivencia está dada por

$$A(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \bar{C}_m M(k_m, t), \quad (2.5.6)$$

con

$$\bar{C}_m = \int_0^a u_m(r) \Psi^*(r, 0) dr, \quad (2.5.7)$$

mientras que la probabilidad de no escape está dada por

$$P(t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_m C_n^* I_{m,n} M(k_m, t) M^*(k_n, t), \quad (2.5.8)$$

donde

$$I_{m,n} = \int_0^a u_m(r) u_n^*(r) dr. \quad (2.5.9)$$

Por lo tanto, la amplitud de supervivencia para la evolución temporal del decaimiento se puede escribir como una suma infinita de términos que involucran estados resonantes y los correspondientes eigenvalores k_n . La solución también involucra el cálculo de funciones de Moshinsky M evaluadas al tiempo t y en los polos complejos del problema; las funciones M no dependen de la posición en que está evaluada la solución. El análisis de los límites asintóticos de esta solución permite estudiar la contribución no-exponencial a la solución del problema. Vale la pena notar que $S(t)$ y $P(t)$ han sido evaluadas analíticamente, sin aproximaciones: las integraciones quedan contenidas implícitamente en C_m y en $I_{m,n}$. La función de onda y las cantidades asociadas a ella son una serie de coeficientes y funciones M ; también es necesario destacar que en $\Psi(r, t)$ la dependencia de las coordenadas espaciales está separada de la dependencia en el tiempo.

Permanece, sin embargo, la cuestión de la convergencia de la serie anterior, lo cual en principio puede requerir la evaluación de un número muy grande de polos. No obstante, en los problemas que examinaremos se verá que la cantidad de polos necesarios para obtener resultados convergentes es baja. En la siguiente sección se analiza un método independiente

del formalismo de estados resonantes que permite estudiar el comportamiento asintótico de la solución que no requiere del cálculo de los polos del sistema.

2.6. El método del punto silla

El método del punto silla es conocido en la literatura [24] y es útil cuando uno desea conocer el comportamiento asintótico de una función analítica (en el sentido de la variable compleja) definida a través de una integral sobre alguna trayectoria en el plano complejo.

Este método será útil para obtener soluciones aproximadas al problema de movimiento a tiempos grandes comparados con la mayor vida media del sistema; estas soluciones tienen la ventaja de dar luz sobre el comportamiento asintótico de potencia inversa además de que vuelven innecesario evaluar una función M , que numéricamente puede ser complicado. Este método aprovecha el hecho de que la integral en

$$g(r, r', t) = \sum_{p=1}^{\infty} u_p(r)u_p(r')e^{-ik_p^2 t} + \frac{i}{2\pi} \int_C G^+(r, r', k)e^{-ik^2 t} 2k dk \quad (2.6.1)$$

tiene un punto silla en $k = 0$ y uno puede efectuar un desarrollo de Taylor de $G^+(r, r', k)$ alrededor de ese valor:

$$G^+(r, r', k) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^p}{p!} \frac{\partial^p}{\partial k^p} G^+(r, r', k) \Big|_{k=0} = G^+(r, r', 0) + k \frac{\partial}{\partial k} G^+(r, r', k) \Big|_{k=0} + \dots \quad (2.6.2)$$

La sustitución de esta ecuación en la anterior conduce a una expresión para el propagador retardado en términos de los estados resonantes del sistema; la integral puede ser evaluada explícitamente a través del cambio de variable $k = \sqrt{-i}u$. Así, para tiempos suficientemente grandes, el propagador retardado de una partícula puede escribirse como

$$g(r, r', t) \approx \sum_{p=1}^{\infty} u_p(r)u_p(r')e^{-i\varepsilon_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m}{t^{(2m+1)/2}} \frac{\partial^{2m-1}}{\partial k^{2m-1}} G^+(r, r', k) \Big|_{k=0} \quad (2.6.3)$$

donde los primeros coeficientes η_i están dados por

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi i}} \quad (2.6.4)$$

$$\eta_2 = -\sqrt{\frac{i}{64\pi}} \quad (2.6.5)$$

$$\eta_3 = -\frac{1}{\sqrt{4096\pi i}}. \quad (2.6.6)$$

En el decaimiento de una partícula podemos obtener el término dominante a tiempos grandes comparados con la vida media del sistema truncando la Ec. (2.6.3) en $m = 1$, es decir, en

el orden $t^{-3/2}$; así, una partícula en onda s o, equivalentemente, una partícula confinada en una dimensión por una pared posee una ley de potencia inversa proporcional a $t^{-3/2}$. El propagador de nuestro sistema de una partícula queda como

$$g(r, r', t) \approx \sum_{p=1}^{\infty} u_p(r)u_p(r')e^{-ik_p^2 t} + \frac{\eta_1}{t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial k} G^+(r, r', k) \Big|_{k=0}. \quad (2.6.7)$$

Capítulo 3

Ejemplo: el problema del potencial δ de un cuerpo

3.1. El modelo del potencial δ

Para seguir adelante en la evaluación de $A(t)$ y $P(t)$ de la sección anterior es necesario proponer un modelo de potencial que actúe sobre la partícula. La opción más sencilla y accesible para los cálculos es la de un potencial δ localizado en el punto a y de intensidad λ [14] de la forma

$$V(r) = \lambda\delta(r - a) \quad (3.1.1)$$

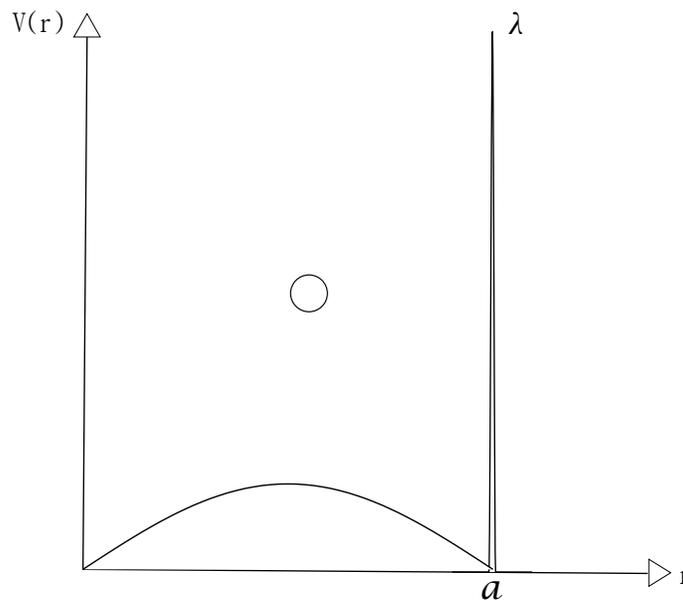


Figura 3.1: Formulación del problema del decaimiento de una partícula sujeta al potencial (3.1.1).

Para completar el modelo proponemos como estado inicial para la partícula, siguiendo [20, 31], un eigenestado de la caja infinita de potencial

$$\Psi(r, 0) = \psi_\alpha(r) \quad (3.1.2)$$

donde

$$\psi_\alpha(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\alpha\pi r}{a}\right) \quad (3.1.3)$$

Los estados resonantes del problema satisfacen

$$u_p(r) = \begin{cases} A_p \sin(k_p r), & r \leq a \\ B_p e^{ik_p r}, & r \geq a. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

donde las k_p satisfacen, debido a las condiciones de frontera del potencial δ , la condición algebraica

$$2ik_p + \lambda(e^{2ik_p a} - 1) = 0. \quad (3.1.5)$$

La ecuación anterior puede resolverse de manera aproximada utilizando el método de Newton [32]. Dichas soluciones constituyen los polos del sistema, mismos que dependen de λ y a ; es decir, a distintos valores de estos parámetros les corresponde una distribución distinta de polos $\{k_p\}$. Para obtener una idea de la distribución de los polos de este sistema en el plano es posible fijar a y sondear la ubicación en el plano de estos polos, lo cual se realiza en la Figura 3.2.

Dada una intensidad λ y un ancho del potencial a es posible obtener los polos del sistema. En la Figura 3.3 se muestra una de tales configuraciones. La constante de normalización A_p viene dada por

$$A_p = \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda a + e^{-2ik_p a}}}. \quad (3.1.6)$$

3.2. Solución analítica

Utilizando las Ecs. (3.1.2) y (3.1.3) junto con el planteamiento de la Sección 2.5 es posible obtener las expresiones para $\Psi(r, t)$, $A(t)$ y $P(t)$ siguientes

$$\Psi(r, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{m,\alpha} u_m(r) M(k_m, t); \quad (3.2.1)$$

$$A(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{m,\alpha}^2 M(k_m, t); \quad (3.2.2)$$

$$P(t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{m,\alpha} C_{n,\alpha}^* I_{m,n} M(k_m, t) M^*(k_n, t). \quad (3.2.3)$$

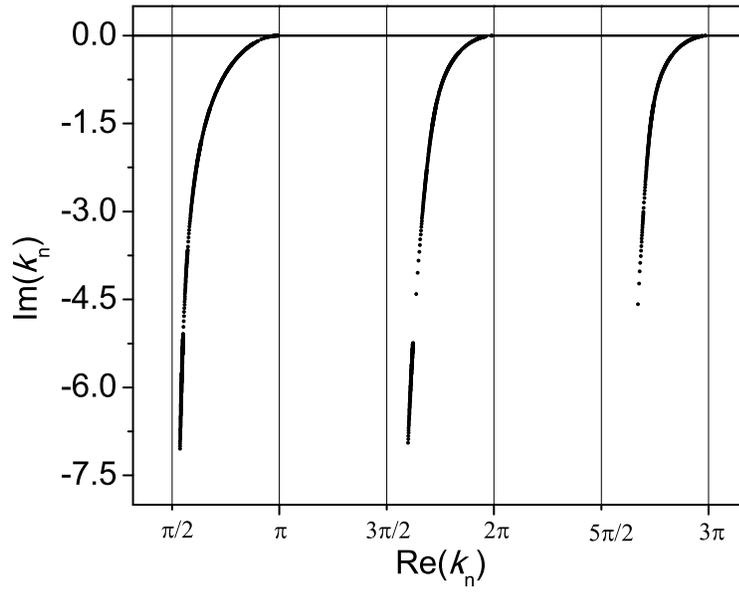


Figura 3.2: Trayectoria de los polos en el potencial δ de Dirac. Para obtener esta figura se fijó $a = 1$ y se exploraron diversos valores de la intensidad del potencial λ . Los polos se aproximan a $n\pi$ conforme λ crece mientras que se alejan a $i\infty$ a medida que λ disminuye.

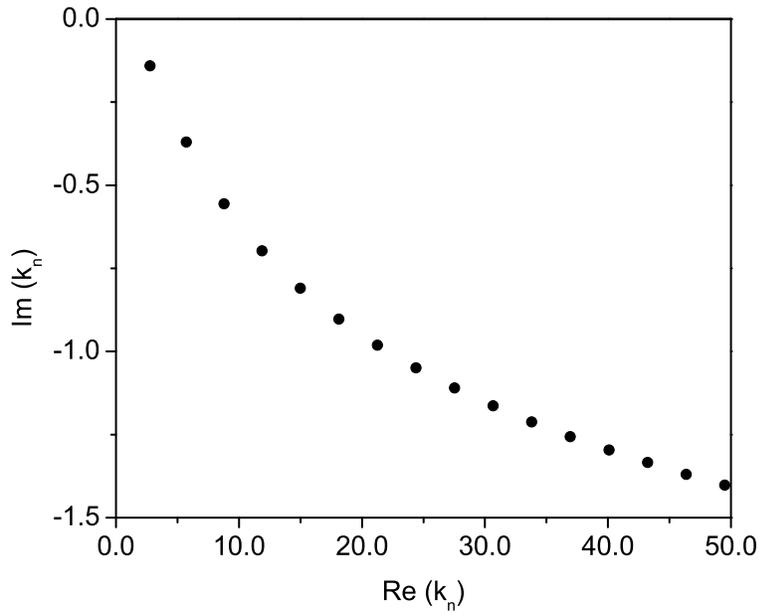


Figura 3.3: Primeros polos en el sistema de intensidad $\lambda = 6$ y ancho $a = 1$.

donde se han redefinido

$$C_{m,\alpha} = \int_0^a u_m(r) \psi_\alpha(r) \, dr \quad (3.2.4)$$

$$\bar{C}_{m,\alpha} = \int_0^a u_m(r) \psi_\alpha^*(r) \, dr, \quad (3.2.5)$$

para el caso particular del eigenestado de la caja, en las cuales además observamos la simplificación

$$C_{m,\alpha} = \bar{C}_{m,\alpha}. \quad (3.2.6)$$

El resultado de evaluar los coeficientes $C_{m,\alpha}$ es

$$C_{m,\alpha} = \sqrt{2a} A_m \frac{(-1)^{\alpha+1} \alpha \pi \sin(k_m a)}{\alpha^2 \pi^2 - k_m^2 a^2}. \quad (3.2.7)$$

En este modelo la función de Green de onda saliente $G^+(r, r', k)$ puede evaluarse explícitamente como [20]

$$G^+(r, r', k) = -\frac{\sin kr}{r} \left(\frac{e^{ikr'} - (\lambda/k) \sin k(r' - a) e^{ika}}{1 + (\lambda/k) \sin(ka) e^{ika}} \right). \quad (3.2.8)$$

Conviene citar los valores de las siguientes derivadas parciales de $G^+(r, r', k)$ ya que, como se vio en la Sección 2.6, éstos serán necesarios para implementar el método del punto silla en este problema.

$$\left. \frac{\partial}{\partial k} G^+(r, r', k) \right|_{k=0} = -\frac{irr'}{h_1}; \quad (3.2.9)$$

$$\left. \frac{\partial^3}{\partial k^3} G^+(r, r', k) \right|_{k=0} = \frac{irr'(h_1(r^2 + (r')^2) - h_2)}{h_1^2}; \quad (3.2.10)$$

$$\left. \frac{\partial^5}{\partial k^5} G^+(r, r', k) \right|_{k=0} = -\frac{irr'}{3h_1^3} (h_1^2(3r^4 + 3(r')^4 + 10r^2(r')^2) + h_3(r^2 + (r')^2) + h_4), \quad (3.2.11)$$

donde

$$h_1 = (1 + \lambda a)^2; \quad (3.2.12)$$

$$h_2 = 8\lambda a^3 + 2\lambda^2 a^4; \quad (3.2.13)$$

$$h_3 = -120\lambda^3 a^5 - 80\lambda a^3 - 20\lambda^4 a^6 - 180\lambda^2 a^4; \quad (3.2.14)$$

$$h_4 = 192\lambda^3 a^7 - 96\lambda a^5 + 24\lambda^4 a^8 + 432\lambda^2 a^6. \quad (3.2.15)$$

3.3. Solución asintótica

En el caso de una partícula que decae sujeta a la influencia del potencial δ podemos obtener una expresión que exhibe el comportamiento no-exponencial sustituyendo la Ec. (3.2.9) en la Ec. (2.6.7). El propagador de nuestro sistema de una partícula queda como

$$g(r, r', t) \approx \sum_{p=1}^{\infty} u_p(r)u_p(r')e^{-ik_p^2 t} - \frac{\eta_1}{t^{3/2}} \frac{ir r'}{(1 + \lambda a)^2}. \quad (3.3.1)$$

Es posible, entonces, utilizar el propagador aproximado con que ahora contamos para obtener la función de onda $\Psi(r, t)$, considerando los mismos eigenestados de la caja de potencial como estados iniciales de nuestro sistema. La función de onda $\Psi(r, t)$ queda escrita asintóticamente como

$$\Psi(r, t) \approx \sum_{p=1}^{\infty} u_p(r)C_{p,\alpha}e^{-ik_p^2 t} - \frac{\eta_1}{t^{3/2}} \frac{ir D_\alpha}{(1 + \lambda a)^2}, \quad (3.3.2)$$

con

$$D_q = \int_0^a y \psi_q(y) dy = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{(-1)^{q+1} a^2}{q\pi}. \quad (3.3.3)$$

Entonces

$$A(t) \approx \sum_{p=1}^{\infty} C_{p,\alpha}^2 e^{-i\epsilon_p t} e^{-\Gamma_p t/2} - \frac{i\eta_1 D_\alpha^2}{t^{3/2}(1 + \lambda a)^2}, \quad (3.3.4)$$

y

$$P(t) \approx \sum_{p,s=1}^{\infty} I_{p,s} C_{p,\alpha} C_{s,\alpha}^* e^{-i(\epsilon_p - \epsilon_s)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p + \Gamma_s)t} - \frac{2D_\alpha}{t^{3/2}(1 + \lambda a)^2} \operatorname{Re} \left(i\eta_1 \sum_{p=1}^{\infty} F_p C_{p,\alpha} e^{-i\epsilon_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t} \right) + \frac{a^3 |\eta_1|^2 D_\alpha^2}{3t^3 (1 + \lambda a)^4}, \quad (3.3.5)$$

con

$$F_p = \int_0^a y u_p(y) dy = A_p \left(\frac{\sin(k_p a) - \cos(k_p a) k_p a}{k_p^2} \right). \quad (3.3.6)$$

De estas expresiones es evidente que a tiempos grandes comparados con la vida media del sistema las probabilidades $S(t)$ y $P(t)$ presentan un término no-exponencial, dependiente del tiempo como una potencia inversa proporcional a t^{-3} , lo cual constituye el primer ejemplo de desviación al decaimiento exponencial en este modelo mostrado explícitamente en este trabajo.

Es interesante calcular $S(t)$ y $P(t)$ para una partícula usando las expresiones exactas (2.5.3) y (2.5.5)¹ y comparar dicho cálculo con el que corresponde a las expresiones asintóticas. Los resultados de este procedimiento se muestran en las Figs. 3.4 y 3.5.

¹El cálculo de la función M en este trabajo se basa en el código desarrollado en FORTRAN por el Dr. Sergio Cordero y que puso a disposición de la comunidad científica a través del Internet.

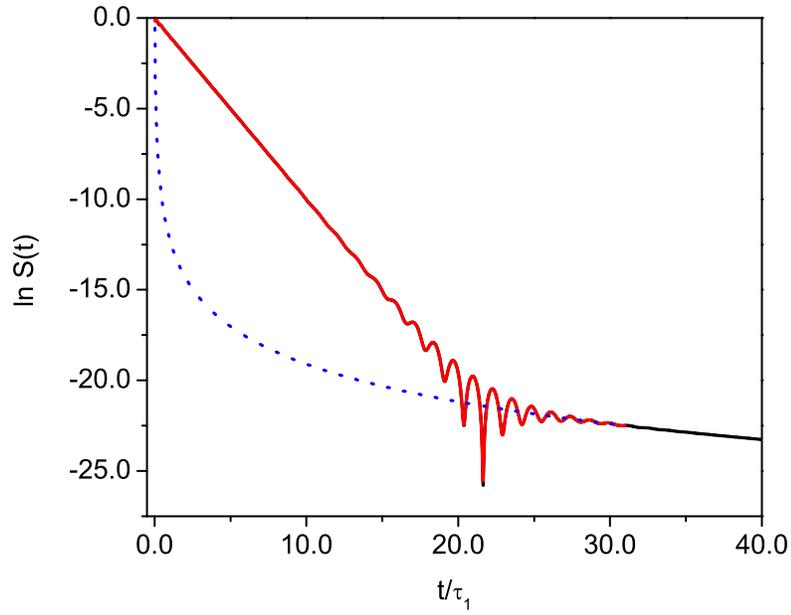


Figura 3.4: Comparación en el cálculo de $\ln S(t)$ de una partícula usando las Ecs. (3.2.2) (negro) y (3.3.4) (rojo), así como la contribución puramente no-exponencial (línea punteada azul). Las líneas negra y roja se encuentran traslapadas. Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$.

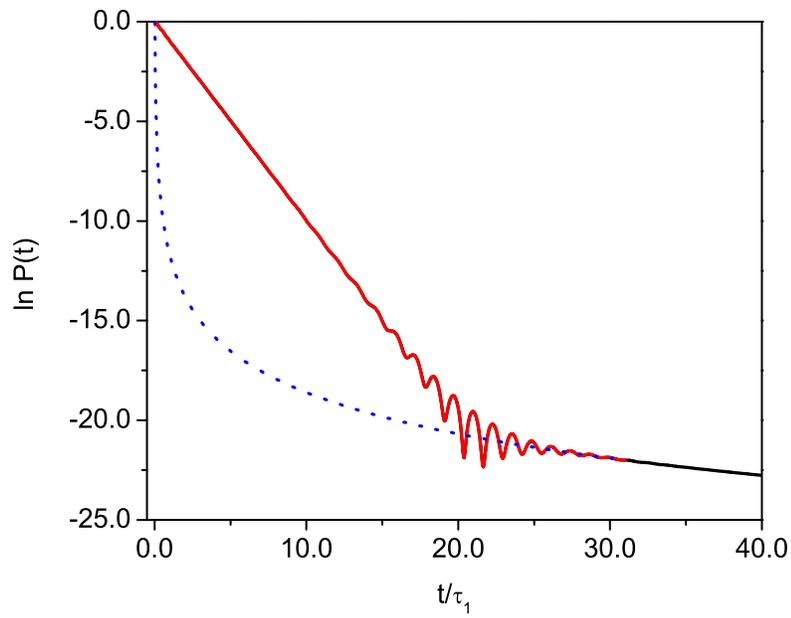


Figura 3.5: Comparación en el cálculo de $\ln P(t)$ de una partícula usando las Ecs. (3.2.3) (negro) y (3.3.5) (rojo), así como la contribución puramente no-exponencial (línea punteada azul). Las líneas negra y roja se encuentran completamente superpuestas. Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$.

Capítulo 4

Partículas idénticas

4.1. Sumario de física de partículas idénticas.

En la descripción clásica del movimiento dos partículas que tienen las mismas propiedades intrínsecas como masa, carga eléctrica y momento magnético pueden distinguirse por medio de la trayectoria que cada una sigue. Esta afirmación deja de ser cierta en la teoría cuántica, en la que el concepto clásico de trayectoria pierde significado. A las partículas con las mismas propiedades intrínsecas se les conoce como partículas idénticas; a la luz de lo dicho anteriormente, las partículas idénticas cuánticas resultan indistinguibles.

En la naturaleza hasta donde sabemos existen dos tipos de partículas, a saber: bosones y fermiones. Los primeros no satisfacen el Principio de Exclusión de Pauli mientras que los segundos sí lo hacen. Dicho principio establece que dos partículas no pueden poseer los mismos números cuánticos. Más aún, sabemos que la función de onda total que representa un sistema de varias partículas idénticas debe satisfacer propiedades de simetría o antisimetría según las partículas que lo integran sean bosones o fermiones, respectivamente.

4.2. Formulación del problema.

En el caso de un sistema de dos partículas idénticas se sabe que el hamiltoniano H debe ser simétrico bajo la permutación de los índices de las partículas, es decir, que

$$[H, P_{12}] = 0, \quad (4.2.1)$$

donde P_{12} denota el operador de intercambio. Así, es suficiente imponer la simetría o antisimetría apropiada sobre el estado inicial $\Psi(y_1, y_2, 0)$ ya que ésta se conserva en el desarrollo temporal

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^a \int_0^a g(r_1, y_1, t)g(r_2, y_2, t)\Psi(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2, \quad (4.2.2)$$

donde un $g(r, y, t)$ individual denota el propagador retardado de una sola partícula y \mathbf{r} denota (r_1, \dots, r_N) , con N el número de partículas que integran el sistema. En el caso del presente trabajo $N = 2$.

Como estado inicial podemos escoger las posibles combinaciones simétricas y antisimétrica de los eigenestados de la caja infinita de potencial. Hacemos énfasis en que el estado del sistema en el espacio de Hilbert corresponde a un ket que puede ser factorizado en una parte espacial y en una parte de espín ya que estamos trabajando con hamiltonianos independientes del espín. La parte de espín del vector de estado tiene que tomarse en cuenta para determinar la simetría total del estado. En este trabajo solo discutiremos la evolución de la parte espacial.

4.3. Propagador retardado de dos partículas.

Como se ha visto arriba, el propagador de dos partículas que no interactúan entre sí puede escribirse como

$$g_2(r_1, y_1, r_2, y_2, t) = g(r_1, y_1, t)g(r_2, y_2, t) \quad (4.3.1)$$

siempre y cuando $H = H_1 + H_2$, en donde H_i denota el hamiltoniano de una partícula individual.

En el caso de un potencial de alcance finito tenemos que

$$g(r_1, y_1, t)g(r_2, y_2, t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} u_m(r_1)u_m(y_1)u_n(r_2)u_n(y_2) M(k_m, t) M(k_n, t). \quad (4.3.2)$$

A partir de esto es posible escribir el desarrollo temporal de la parte espacial de la función de onda. Estas son las expresiones exactas para el propagador correspondiente a dos partículas. En ellas no hay aproximación de ningún tipo. Sin embargo, para evaluar (4.3.2) es necesario evaluar la función M utilizando las reglas de suma (2.3.7) y (2.3.8). Eso implica algunas complicaciones que pueden ser obviadas si no se está interesado en el régimen de tiempos ultra-cortos aprovechando el método del punto silla.

Podemos extender el tratamiento hecho para una partícula utilizando el método del punto silla. De la Ec. (2.6.3) podemos escribir el propagador a primer orden como

$$g(r, r', t) \rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} u_p(r)u_p(r')e^{-ik_p^2 t} + \frac{\eta_1}{t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial k} G^+(r, r', k) \Big|_{k=0}; \quad (4.3.3)$$

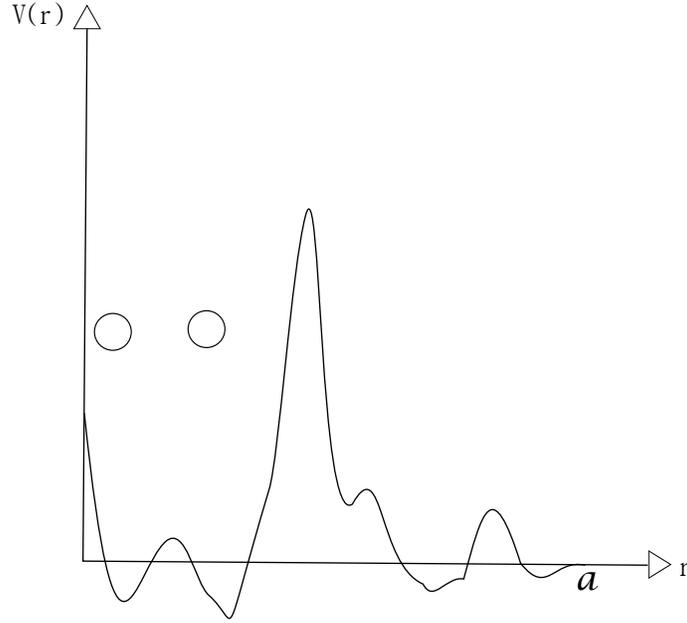


Figura 4.1: Formulación del problema del decaimiento de dos partículas sujetas a un potencial de alcance finito arbitrario.

entonces, la dependencia temporal del propagador de dos partículas puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 g(r_1, y_1, t)g(r_2, y_2, t) &\approx \sum_{p,q=1}^{\infty} u_p(r_1)u_p(y_1)u_q(r_2)u_q(y_2)e^{-i(\mathcal{E}_p+\mathcal{E}_q)t}e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p+\Gamma_q)t} + \\
 \frac{\eta_1}{t^{3/2}} \sum_{p=1}^{\infty} &\left(u_p(r_1)u_p(y_1) \frac{\partial}{\partial k} G^+(r_2, y_2, k) \Big|_{k=0} + \frac{\partial}{\partial k} G^+(r_1, y_1, k) \Big|_{k=0} u_p(r_2)u_p(y_2) \right) e^{-i\mathcal{E}_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t} + \\
 &\frac{\eta_1^2}{t^3} \frac{\partial}{\partial k} G^+(r_1, y_1, k) \Big|_{k=0} \frac{\partial}{\partial k} G^+(r_2, y_2, k) \Big|_{k=0}, \quad (4.3.4)
 \end{aligned}$$

de donde puede verse que el régimen exponencial del decaimiento de dos partículas idénticas está conformado por términos que involucran la suma de los anchos de cada combinación de dos resonancias mientras que, en general, a tiempos largos se obtiene una ley proporcional a t^{-3} . Sin embargo, puede ocurrir una cancelación exacta del término proporcional a t^{-3} y debe buscarse el desarrollo a órdenes superiores. En tales casos hay ejemplos en que el desarrollo de la función de onda se anula exactamente a órdenes t^{-3} y t^{-4} , en cuyo caso uno debe desarrollar la Ec. (2.6.3) hasta el orden $t^{-7/2}$ para obtener todos los términos proporcionales

a t^{-5} . Así, la Ec. (2.6.3) desarrollada al orden mencionado se ve como

$$g(r, r', t) \rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} u_p(r) u_p(r') e^{-ik_p^2 t} + \frac{\eta_1}{t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial k} G^+(r, r', k) \Big|_{k=0} + \frac{\eta_2}{t^{5/2}} \frac{\partial^3}{\partial k^3} G^+(r, r', k) \Big|_{k=0} + \frac{\eta_3}{t^{7/2}} \frac{\partial^5}{\partial k^5} G^+(r, r', k) \Big|_{k=0} \quad (4.3.5)$$

y, considerando los términos más importantes, el correspondiente propagador de dos partículas es

$$g(r_1, r'_1, t) g(r_2, r'_2, t) \rightarrow \sum_{p,q=1}^{\infty} u_p(r_1) u_p(r'_1) u_q(r_2) u_q(r'_2) e^{-i(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_q)t} e^{-(\Gamma_p + \Gamma_q)t/2} + \frac{\eta_1}{t^{3/2}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(u_p(r_1) u_p(r'_1) \frac{\partial}{\partial k} G^+(r_2, r'_2, k) \Big|_{k=0} + \frac{\partial}{\partial k} G^+(r_1, r'_1, k) \Big|_{k=0} u_p(r_2) u_p(r'_2) \right) e^{-i\mathcal{E}_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t} + \frac{\eta_2^2}{t^5} \frac{\partial^3}{\partial k^3} G^+(r_1, r'_1, k) \Big|_{k=0} \frac{\partial^3}{\partial k^3} G^+(r_2, r'_2, k) \Big|_{k=0} + \frac{\eta_1 \eta_3}{t^5} \left(\frac{\partial^5}{\partial k^5} G^+(r_1, r'_1, k) \Big|_{k=0} \frac{\partial}{\partial k} G^+(r_2, r'_2, k) \Big|_{k=0} + \frac{\partial^5}{\partial k^5} G^+(r_2, r'_2, k) \Big|_{k=0} \frac{\partial}{\partial k} G^+(r_1, r'_1, k) \Big|_{k=0} \right) \quad (4.3.6)$$

Una vez conocido el desarrollo del propagador de dos partículas adecuado al problema que se trate es inmediato obtener $\Psi(\mathbf{r}, t)$. La amplitud de supervivencia de dos partículas está definida como

$$A(t) = \int_0^a \int_0^a \Psi(r_1, r_2, t) \Psi^*(r_1, r_2, 0) dr_1 dr_2; \quad (4.3.7)$$

por otro lado, la probabilidad de supervivencia se sigue definiendo como

$$S(t) = |A(t)|^2. \quad (4.3.8)$$

La probabilidad de no-escape de dos partículas se define como

$$P(t) = \int_0^a \int_0^a |\Psi(r_1, r_2, t)|^2 dr_1 dr_2. \quad (4.3.9)$$

Capítulo 5

Ejemplo: el problema del potencial δ de dos cuerpos.

Un modelo apropiado para realizar cálculos que extiende el trabajo hecho en el caso de partícula libre es el modelo de potencial δ , cuya simplicidad matemática permite describir las características físicas principales de la evolución temporal del decaimiento. Este modelo ha sido estudiado extensamente en el caso de una partícula [2, 14] y sus resultados pueden ser generalizados inmediatamente al caso de dos partículas. En el caso de 2 partículas este potencial se escribe como

$$V(r_1, r_2) = \lambda\delta(r_1 - a) + \lambda\delta(r_2 - a). \quad (5.0.1)$$

Para resolver este problema podemos utilizar un enfoque basado en la solución del problema correspondiente para 1 partícula, lo cual reporta el beneficio de que en ese caso ya están calculados los estados resonantes u_p y los polos k_p del sistema de 1 partícula. Para continuar con la solución de este problema es necesario proponer, en analogía con el Cap. 3, estados iniciales que, a diferencia del caso de 1 partícula, deben exhibir propiedades de simetría específicas debido a la identidad de las partículas involucradas.

5.1. Función espacial simétrica factorizada

Cuando la función de onda espacial simétrica está dada por

$$\Psi(y_1, y_2, 0) = \psi_q(y_1)\psi_q(y_2), \quad (5.1.1)$$

donde los estados ψ_q están dados por la Ec. (3.1.3), la función de onda $\Psi(r_1, r_2, t)$ puede encontrarse de forma exacta utilizando el propagador (4.3.2) debido a la forma factorizada

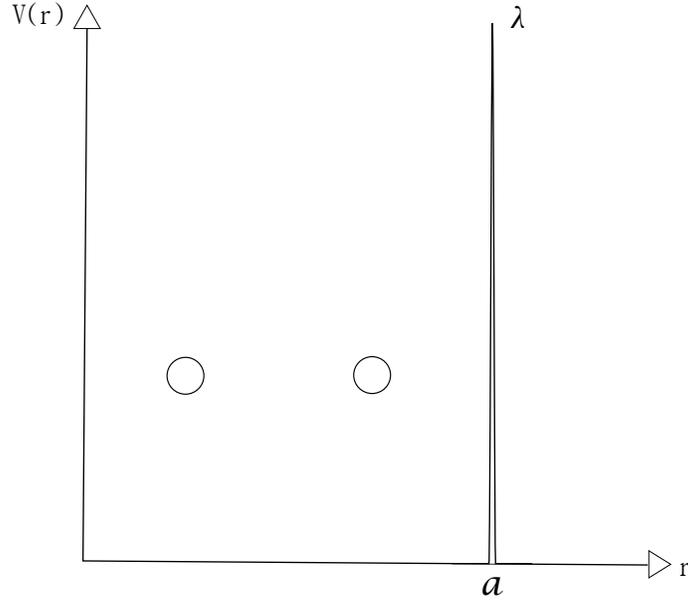


Figura 5.1: Formulación del problema del decaimiento de dos partículas sujetas al potencial (5.0.1).

del estado inicial y es posible, entonces, reutilizar el enfoque de una sola partícula para encontrar la solución exacta al problema. Recordamos ahora que debido a la conmutatividad de H y el operador de intercambio P_{12} , la simetría o antisimetría de la función de onda espacial es una cantidad conservada así que si el estado inicial posee una cierta simetría, ésta se conservará en la evolución temporal del sistema. El resultado de la integración para obtener $\Psi(r_1, r_2, t)$ es

$$\Psi(r_1, r_2, t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{m,q} C_{n,q} u_m(r_1) u_n(r_2) M(k_m, t) M(k_n, t). \quad (5.1.2)$$

A partir de la Ec. (5.1.2) es inmediato calcular $A(t)$ y $P(t)$ como

$$A(t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{m,q}^2 C_{n,q}^2 M(k_m, t) M(k_n, t). \quad (5.1.3)$$

y

$$P(t) = \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2=-\infty}^{\infty} C_{m_1, q} C_{n_1, q} C_{m_2, q}^* C_{n_2, q}^* I_{m_1, m_2} I_{n_1, n_2} \times \\ M(k_{m_1}, t) M(k_{n_1}, t) M^*(k_{m_2}, t) M^*(k_{n_2}, t). \quad (5.1.4)$$

De la Ec. (4.3.4) se deduce que $\Psi(r_1, r_2, t)$ está dada asintóticamente por

$$\begin{aligned} \Psi(r_1, r_2, t) \approx & \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{m,r} C_{n,r} e^{-i(\varepsilon_m + \varepsilon_n)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_m + \Gamma_n)t} u_m(r_1) u_n(r_2) - \frac{r_1 r_2 D_q^2 \eta_1^2}{(1 + \lambda a)^4 t^3} \\ & - \frac{i D_q \eta_1}{(1 + \lambda a)^2 t^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} C_{m,q} (r_1 u_m(r_2) + r_2 u_m(r_1)) e^{-i\varepsilon_m t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_m t} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Entonces podemos calcular $A(t)$ a tiempos largos como

$$\begin{aligned} A(t) \approx & \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{m,q}^2 C_{n,q}^2 e^{-i(\varepsilon_m + \varepsilon_n)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_m + \Gamma_n)t} - \frac{2i D_q^2 \eta_1}{(1 + \lambda a)^2 t^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} C_{m,q}^2 e^{-i\varepsilon_m t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_m t} \\ & - \frac{D_q^4 \eta_1^2}{(1 + \lambda a)^4 t^3}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

y la $P(t)$ como

$$\begin{aligned} P(t) \approx & \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2=1}^{\infty} C_{m_1} C_{m_2}^* C_{n_1} C_{n_2}^* e^{-i(\varepsilon_{m_1} + \varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{m_2} - \varepsilon_{n_2})t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_{m_1} + \Gamma_{n_1} + \Gamma_{m_2} + \Gamma_{n_2})t} I_{m_1, m_2} I_{n_1, n_2} + \\ & \frac{2D_q^2 |\eta_1|^2}{(1 + \lambda a)^4 t^3} \left(\frac{a^3}{3} \sum_{m,n=1}^{\infty} I_{m,n} C_m C_n^* e^{-ik_m^2 t} e^{-ik_n^2 t^*} + \text{Re} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} I_{m,n} F_m \bar{F}_n e^{-ik_m^2 t} e^{-ik_n^2 t^*} \right) \right) \\ & + 2 \text{Re} \left(\sum_{m,n,s=1}^{\infty} C_m C_n C_s^* e^{-i(\varepsilon_m + \varepsilon_n - \varepsilon_s)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_m + \Gamma_n + \Gamma_s)t} \frac{i D_q \eta_1^*}{(1 + \lambda a)^2 t^{3/2}} (F_m I_{ns} + F_n I_{ms}) \right) \\ & - 2 \text{Re} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} e^{-i(\varepsilon_m + \varepsilon_n)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_m + \Gamma_n)t} F_m F_n \frac{D_q^2 \eta_1^{*2}}{(1 + \lambda a)^4 t^3} \right) \\ & + 4 \text{Re} \left(\frac{i D_q^3 \eta_1 \eta_1^{*2} a^3}{3(1 + \lambda a)^6 t^{9/2}} \sum_{m=1}^{\infty} F_m C_m e^{-i\varepsilon_m t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_m t} \right) + \frac{a^6 D_q^4 |\eta_1|^4}{9(1 + \lambda a)^8 t^6}. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Se observa una contribución exponencial al decaimiento de pendiente $-2\Gamma_3$ en las gráficas de $\ln S(t)$ y $\ln P(t)$ de las Figs. 5.2 y 5.3 que, después de los términos de interferencia, se convierte en una contribución de pendiente $-2\Gamma_1$. Después de otra interferencia el sistema pasa al régimen de potencia inversa proporcional a t^{-6} .

Los estados (5.1.1) se ofrecen más inmediatos para la comparación del comportamiento de $\ln S(t)$ y $\ln P(t)$ entre 1 y 2 cuerpos. En las Figs. 5.4 y 5.5 se contrasta la diferencia de pendientes que en el caso de un cuerpo van inicialmente como $-\Gamma_3$ y posteriormente como $-\Gamma_1$ mientras que en el de dos cuerpos con un estado inicial factorizado van como $-2\Gamma_3$ y $-2\Gamma_1$, como ya se mencionó.

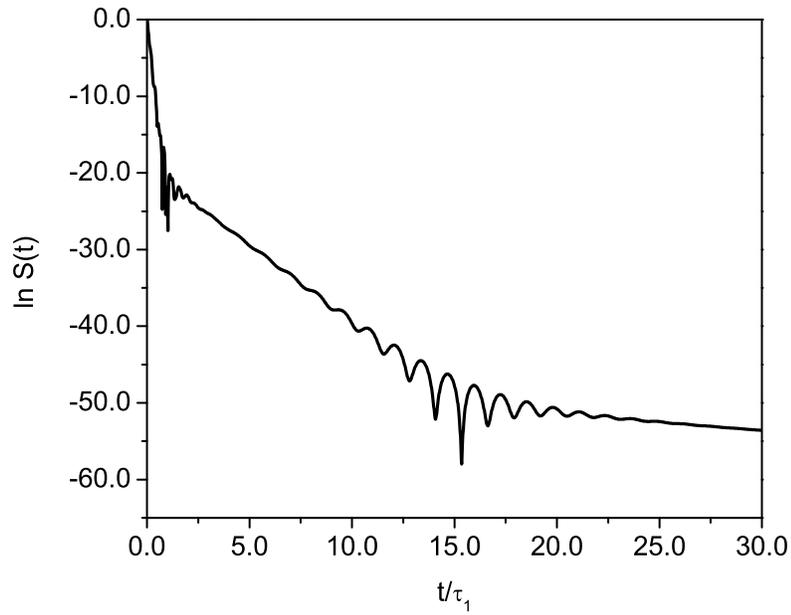


Figura 5.2: Cálculo de $S(t)$ usando la Ec. (5.1.6) para un estado inicial simétrico factorizado. Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $q = 3$.

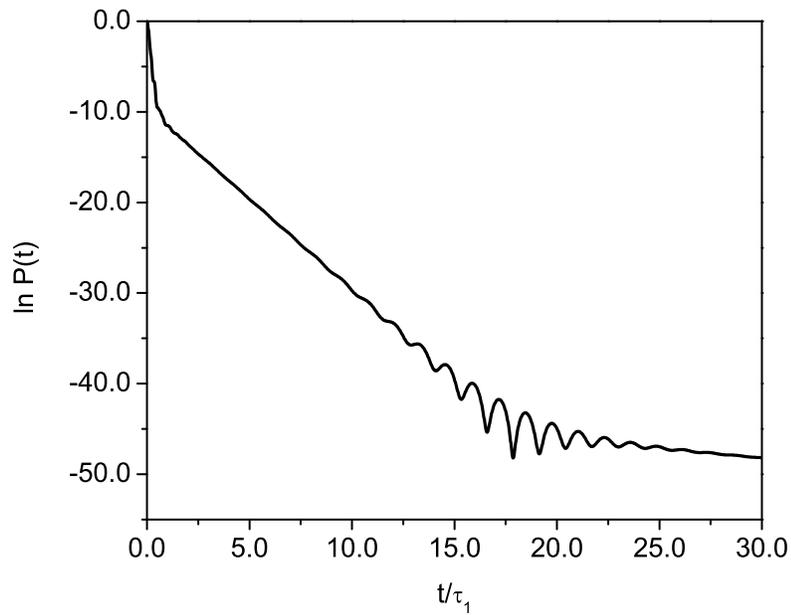


Figura 5.3: Cálculo de $P(t)$ usando la Ec. (5.1.7) para un estado inicial simétrico factorizado. Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $q = 3$.

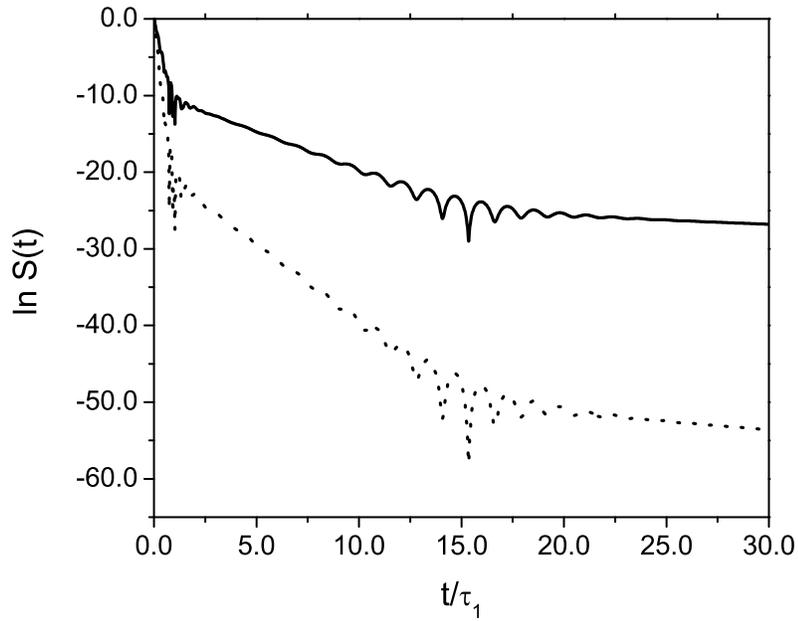


Figura 5.4: Comparación de $S(t)$ usando las Ecs. (5.1.6) (línea punteada, 2 partículas con función de onda inicial factorizada) y (3.3.4) (línea continua, 1 partícula). Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $q = 3$.

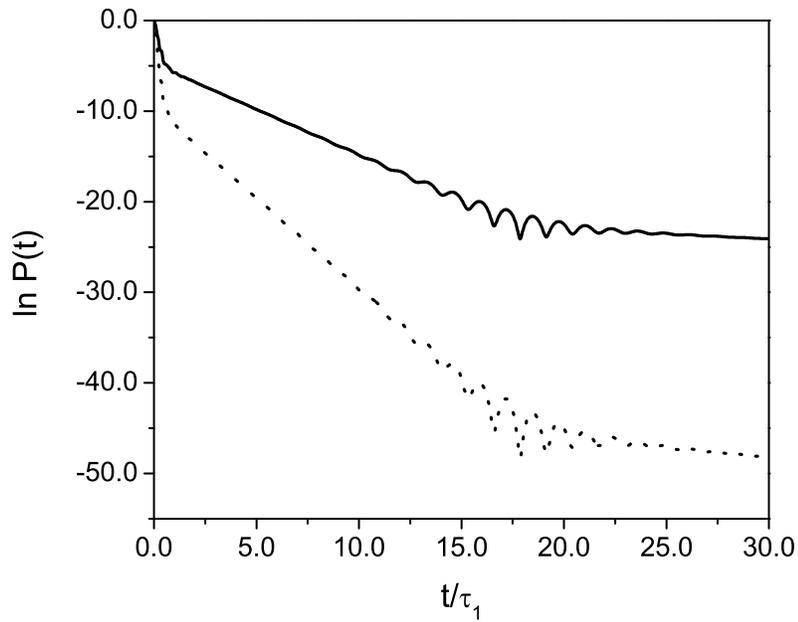


Figura 5.5: Comparación de $P(t)$ usando las Ecs. (5.1.7) (línea punteada, 2 partículas con función de onda inicial factorizada) y (3.3.5) (línea continua, 1 partícula). Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $q = 3$.

Estas gráficas indican que al transcurrir el tiempo cada vez es menos probable encontrar al sistema en su estado original (en el caso de $S(t)$) así como en la región que inicialmente le era permitida al sistema (esta información la proporciona $P(t)$).

5.2. Función espacial simétrica enredada

Otra posible función de onda espacial simétrica está dada por

$$\Psi(y_1, y_2, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_\alpha(y_1)\psi_\beta(y_2) + \psi_\beta(y_1)\psi_\alpha(y_2)) \quad (5.2.1)$$

con los estados iniciales de una partícula dados por la Ec. (3.1.3). Al utilizar esta notación supondremos que $\alpha < \beta$.

Aunque este estado no es factorizable sí es la suma de dos estados factorizables, lo cual permite que las integraciones que requerimos realizar puedan llevarse a cabo inmediatamente. La solución exacta de la función de onda $\Psi(r_1, r_2, t)$ a este problema está dada por

$$\Psi(r_1, r_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (C_{n,\alpha}C_{m,\beta} + C_{m,\alpha}C_{n,\beta})u_n(r_1)u_m(r_2) M(k_m, t) M(k_n, t). \quad (5.2.2)$$

A partir de la Ec. (5.2.2) es inmediato calcular $A(t)$ y $P(t)$ como

$$A(t) = \frac{1}{2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (C_{n,\alpha}C_{m,\beta} + C_{m,\alpha}C_{n,\beta})^2 M(k_m, t) M(k_n, t) \quad (5.2.3)$$

y

$$P(t) = \frac{1}{2} \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2=-\infty}^{\infty} (C_{m_1, \alpha} C_{n_1, \beta} + C_{n_1, \alpha} C_{m_1, \beta})(C_{m_2, \alpha} C_{n_2, \beta} + C_{n_2, \alpha} C_{m_2, \beta})^* I_{m_1, m_2} I_{n_1, n_2} \times \\ M(k_{m_1}, t) M(k_{n_1}, t) M^*(k_{m_2}, t) M^*(k_{n_2}, t). \quad (5.2.4)$$

Podemos utilizar nuevamente la Ec. (4.3.4) para estudiar el límite asintótico de tiempos largos, desarrollando el propagador hasta el orden $t^{-3/2}$ para obtener la forma asintótica de la función de onda $\Psi(r_1, r_2, t)$. Para un estado inicial (5.2.1) la función de onda asintótica es

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p,q=1}^{\infty} (C_{p,\alpha}C_{q,\beta} + C_{p,\beta}C_{q,\alpha})u_p(r_1)u_q(r_2)e^{-i(\mathcal{E}_p+\mathcal{E}_q)t}e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p+\Gamma_q)t} - \frac{\sqrt{2}r_1r_2D_\alpha D_\beta \eta_1^2}{(1+\lambda a)^4 t^3} \\ - \frac{i\eta_1}{\sqrt{2}(1+\lambda a)^2 t^{3/2}} \sum_{p=1}^{\infty} (D_\beta C_{p,\alpha} + D_\alpha C_{p,\beta})(r_2 u_p(r_1) + r_1 u_p(r_2))e^{-i\mathcal{E}_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t}. \quad (5.2.5)$$

La función de onda posee tres contribuciones importantes en esta aproximación: una puramente exponencial, una puramente no-exponencial de potencia inversa (proporcional a t^{-3}) y un término mixto que tiene contribuciones de potencia $t^{-3/2}$ por exponenciales.

La amplitud de supervivencia $A(t)$ es, entonces,

$$A(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{\infty} (C_{p,\alpha}C_{q,\beta} + C_{p,\beta}C_{q,\alpha})^2 e^{-i(\varepsilon_p+\varepsilon_q)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p+\Gamma_q)t} - \frac{2D_\alpha^2 D_\beta^2 \eta_1^2}{(1+\lambda a)^4 t^3} \\ - \frac{i\eta_1}{(1+\lambda a)^2 t^{3/2}} \sum_{p=1}^{\infty} (D_\beta C_{p,\alpha} + D_\alpha C_{p,\beta})^2 e^{-i\varepsilon_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t}. \quad (5.2.6)$$

Ahora calculamos la probabilidad de supervivencia $P(t)$ como

$$P(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{p_1,p_2,q_1,q_2=1}^{\infty} (C_{p_1,\alpha}C_{q_1,\beta} + C_{p_1,\beta}C_{q_1,\alpha})(C_{p_2,\alpha}C_{q_2,\beta} + C_{p_2,\beta}C_{q_2,\alpha})^* I_{p_1,p_2} I_{q_1,q_2} \\ e^{-i(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{q_1}-\varepsilon_{p_2}-\varepsilon_{q_2})t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_{p_1}+\Gamma_{q_1}+\Gamma_{p_2}+\Gamma_{q_2})t} + \frac{2a^6 D_\alpha^2 D_\beta^2 |\eta_1|^4}{9(1+\lambda a)^8 t^6} + \\ \frac{|\eta_1|^2}{(1+\lambda a)^4 t^3} \sum_{p,q=1}^{\infty} (D_\beta C_{p,\alpha} + D_\alpha C_{p,\beta})(D_\beta C_{q,\alpha} + D_\alpha C_{q,\beta})^* \left(\frac{a^3}{3} I_{p,q} + F_p \bar{F}_q \right) e^{-i(\varepsilon_p-\varepsilon_q)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p+\Gamma_q)t} \\ - \frac{2D_\alpha D_\beta}{(1+\lambda a)^4 t^3} \operatorname{Re} \left(\eta_1^{*2} \sum_{p,q}^{\infty} F_p F_q e^{-i(\varepsilon_p+\varepsilon_q)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p+\Gamma_q)t} (C_{p,\alpha}C_{q,\beta} + C_{p,\beta}C_{q,\alpha}) \right) + \frac{1}{(1+\lambda a)^2 t^{3/2}} \times \\ \operatorname{Re} \left(i\eta_1^* \sum_{p,q,s=1}^{\infty} (I_{ps}F_q + I_{qs}F_p) e^{-i(\varepsilon_p+\varepsilon_q-\varepsilon_s)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p+\Gamma_q+\Gamma_s)t} (C_{p,\alpha}C_{q,\beta} + C_{p,\beta}C_{q,\alpha})(D_\beta C_{s,\alpha}^* + D_\alpha C_{s,\beta}^*) \right) \\ - 4 \frac{a^3 D_\alpha D_\beta}{3(1+\lambda a)^6 t^{9/2}} \operatorname{Re} \left(i\eta_1 \eta_1^{*2} \sum_{p=1}^{\infty} \bar{F}_p (D_\beta C_{p,\alpha}^* + D_\alpha C_{p,\beta}^*) e^{-i\varepsilon_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t} \right). \quad (5.2.7)$$

Usando las Ecs. (5.2.6) y (5.2.7) es posible obtener las gráficas de $\ln S(t)$ y $\ln P(t)$ que se muestran en las Figs. 5.6 y 5.7, que tienen las siguientes características: a tiempos cortos hay un régimen exponencial de pendiente $-(\Gamma_1 + \Gamma_6)$, seguido por la interferencia entre los términos exponenciales y los términos mixtos; la siguiente región es lineal y tiene pendiente $-2\Gamma_1$; luego viene la interferencia entre la contribución exponencial y la contribución de potencia inversa y finalmente el régimen de potencia inversa proporcional a t^{-6} .

La forma cualitativa de las gráficas anteriores permanece inalterada para otros valores de los parámetros que definen el estado inicial (5.2.1). Esto puede apreciarse en las Figs. 5.8 y 5.9.

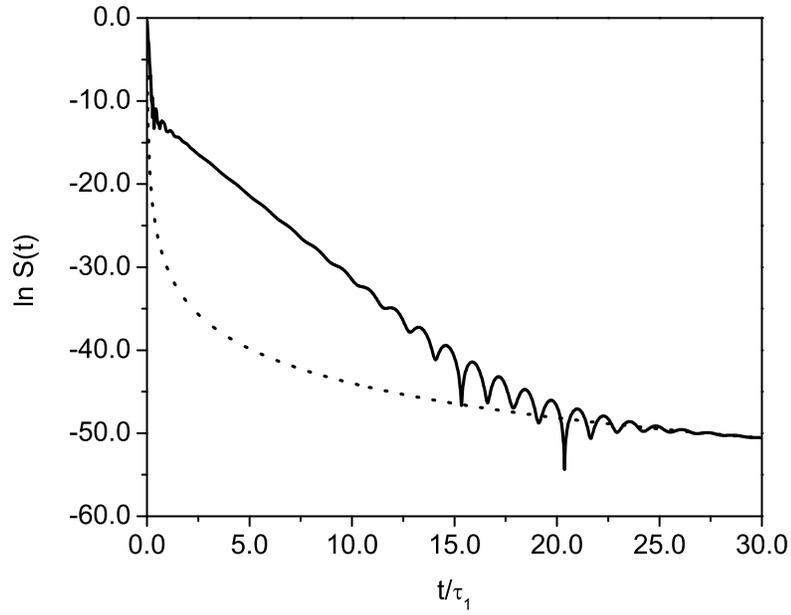


Figura 5.6: Cálculo de $S(t)$ para dos partículas con un estado inicial simétrico enredado usando la Ec. (5.2.6) (línea continua); la línea punteada representa la contribución puramente no-exponencial del cálculo. Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$.

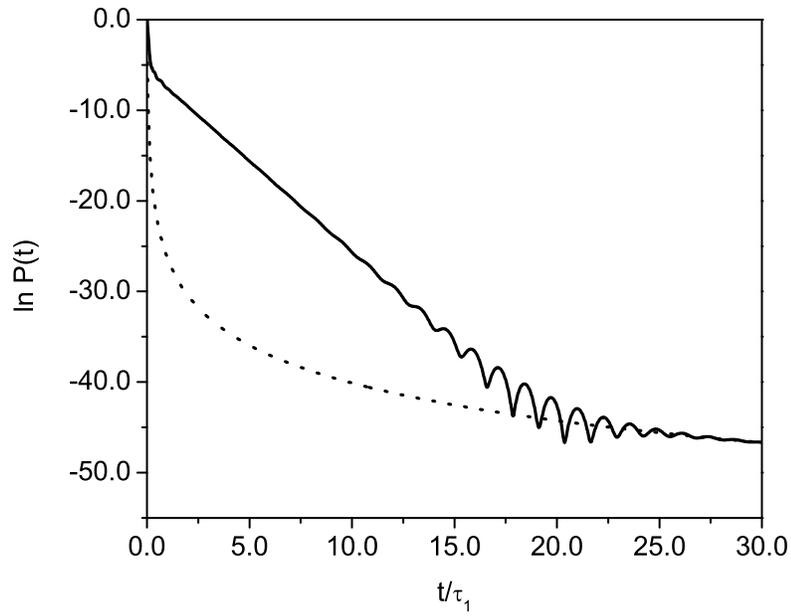


Figura 5.7: $P(t)$ para dos partículas con un estado inicial simétrico enredado obtenida de la Ec. (5.2.7) (línea continua); la línea punteada representa la contribución puramente no-exponencial del cálculo. Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$.

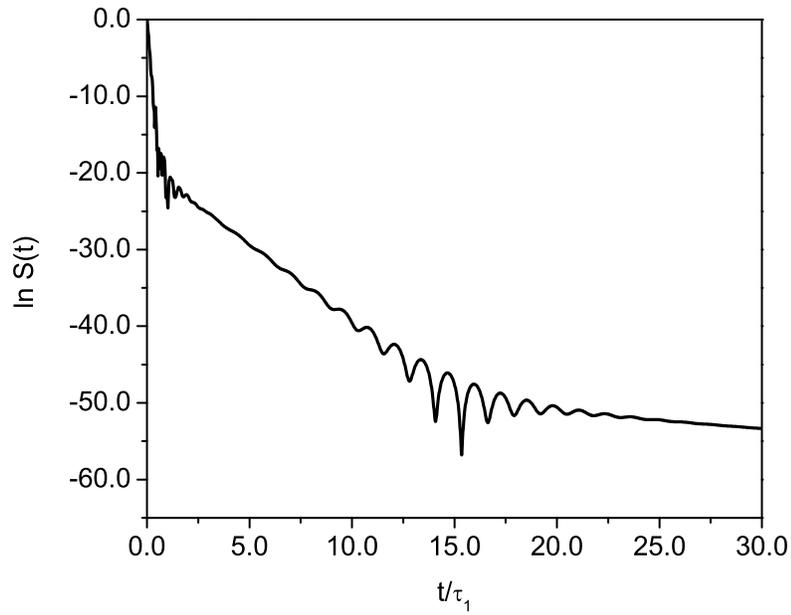


Figura 5.8: Cálculo de $S(t)$ para dos partículas con un estado inicial simétrico enredado usando la Ec. (5.2.6).
Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

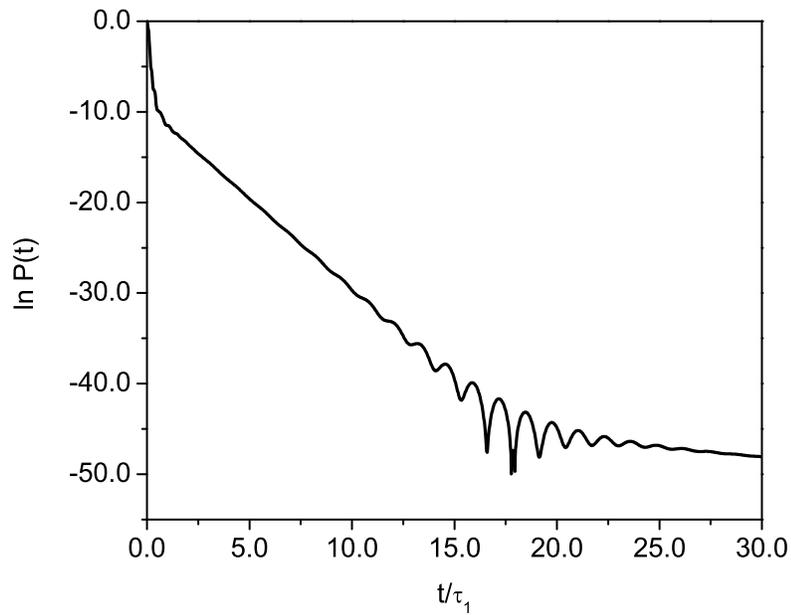


Figura 5.9: $P(t)$ para dos partículas con un estado inicial simétrico enredado obtenida de la Ec. (5.2.7).
Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

5.3. Función espacial antisimétrica

El estado inicial que consideramos es del tipo

$$\Psi(y_1, y_2, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_\alpha(y_1)\psi_\beta(y_2) - \psi_\beta(y_1)\psi_\alpha(y_2)) \quad (5.3.1)$$

donde, nuevamente, se utilizan los estados iniciales de una partícula de la Ec. (3.1.3).

La solución exacta del problema puede obtenerse en forma análoga a la sección anterior con los resultados para $\Psi(r_1, r_2, t)$ dados por

$$\Psi(r_1, r_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (C_{n,\alpha}C_{m,\beta} - C_{m,\alpha}C_{n,\beta})u_n(r_1)u_m(r_2) M(k_m, t) M(k_n, t), \quad (5.3.2)$$

En este punto es interesante observar que $\Psi(r_1, r_2, t)$ y por lo tanto $A(t)$ y $P(t)$ no van a tener contribuciones de aquellos términos para los cuales $n = m$ debido a la cancelación exacta de dichos términos por el factor $(C_{n,\alpha}C_{m,\beta} - C_{m,\alpha}C_{n,\beta})$. Esto implica que las cantidades de interés van a tener un comportamiento sensiblemente distinto a las del caso simétrico, en donde los términos con $n = m$ tenían un papel dominante.

De (5.3.2) se pueden calcular $A(t)$ y $P(t)$ como

$$A(t) = \frac{1}{2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (C_{n,\alpha}C_{m,\beta} - C_{m,\alpha}C_{n,\beta})^2 M(k_m, t) M(k_n, t) \quad (5.3.3)$$

y

$$P(t) = \frac{1}{2} \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2=-\infty}^{\infty} (C_{m_1, \alpha} C_{n_1, \beta} - C_{n_1, \alpha} C_{m_1, \beta})(C_{m_2, \alpha} C_{n_2, \beta} - C_{n_2, \alpha} C_{m_2, \beta})^* I_{m_1, m_2} I_{n_1, n_2} \times \\ M(k_{m_1}, t) M(k_{n_1}, t) M^*(k_{m_2}, t) M^*(k_{n_2}, t). \quad (5.3.4)$$

Para funciones de onda espaciales antisimétricas también es posible obtener el límite asintótico para tiempos grandes de las expresiones anteriores. Sin embargo, en este caso, el propagador debe desarrollarse hasta orden $t^{-7/2}$ debido a la cancelación exacta de los términos proporcionales a t^{-3} y t^{-4} en $\Psi(\mathbf{r}, t)$, que según la Ec. (4.3.6) queda como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p,q=1}^{\infty} (C_{p,\alpha}C_{q,\beta} - C_{p,\beta}C_{q,\alpha})u_p(r_1)u_q(r_2)e^{-i(\mathcal{E}_p+\mathcal{E}_q)t}e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p+\Gamma_q)t} + \\ \left(\eta_2 - \frac{10\eta_1\eta_3}{3} \right) \frac{(r_1^3 r_2 - r_2^3 r_1)(D_\beta G_\alpha - G_\beta D_\alpha)}{\sqrt{2}(1+\lambda a)^4 t^5} + \\ \frac{i\eta_1}{\sqrt{2}(1+\lambda a)^2 t^{3/2}} \sum_{p=1}^{\infty} (C_{p,\alpha}D_\beta - D_\alpha C_{p,\beta})(r_1 u_p(r_2) - r_2 u_p(r_1))e^{-i\mathcal{E}_p t}e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t}. \quad (5.3.5)$$

La función de onda $\Psi(r_1, r_2, t)$ tiene tres contribuciones dominantes: una puramente exponencial, una ley de potencia inversa puramente no-exponencial (proporcional a t^{-5}) y un término mixto proporcional a $t^{-3/2}$ por un término exponencial. Estrictamente, en el desarrollo anterior también existen términos proporcionales a $t^{-5/2}$, $t^{-7/2}$ y $t^{-9/2}$ multiplicados todos por un término exponencial pero sus contribuciones son todas dominadas por el término proporcional a $t^{-3/2}$, de ahí que no sean consideradas en lo sucesivo.

$$A(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{\infty} (C_{p,\alpha} C_{q,\beta} - C_{p,\beta} C_{q,\alpha})^2 e^{-i(\varepsilon_p + \varepsilon_q)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p + \Gamma_q)t} +$$

$$\left(\eta_2^2 - \frac{10\eta_1\eta_3}{3} \right) \frac{(D_\beta G_\alpha - G_\beta D_\alpha)^2}{(1 + \lambda a)^4 t^5} - \frac{i\eta_1}{(1 + \lambda a)^2 t^{3/2}} \sum_{p=1}^{\infty} (C_{p,\alpha} D_\beta - D_\alpha C_{p,\beta})^2 e^{-i\varepsilon_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t}.$$
(5.3.6)

$$P(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{p_1, p_2, q_1, q_2=1}^{\infty} (C_{p_1, \alpha} C_{q_1, \beta} - C_{p_1, \beta} C_{q_1, \alpha}) (C_{p_2, \alpha} C_{q_2, \beta} - C_{p_2, \beta} C_{q_2, \alpha})^* I_{p_1, p_2} I_{q_1, q_2}$$

$$e^{-i(\varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{q_1} - \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{q_2})t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_{p_1} + \Gamma_{q_1} + \Gamma_{p_2} + \Gamma_{q_2})t} + \frac{4a^{10} (D_\alpha G_\beta - G_\alpha D_\beta)^2 |\eta_2^2 - \frac{10\eta_1\eta_3}{3}|^2}{525(1 + \lambda a)^8 t^{10}} +$$

$$\frac{|\eta_1|^2}{(1 + \lambda a)^4 t^3} \sum_{p,q=1}^{\infty} (D_\beta C_{p,\alpha} - D_\alpha C_{p,\beta}) (D_\beta C_{q,\alpha} - D_\alpha C_{q,\beta})^* \left(\frac{a^3}{3} I_{p,q} - F_p \bar{F}_q \right) e^{-i(\varepsilon_p - \varepsilon_q)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p + \Gamma_q)t}$$

$$+ \frac{2(D_\alpha G_\beta - G_\beta D_\alpha)}{\sqrt{2}(1 + \lambda a)^4 t^5} \times$$

$$\text{Re} \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} \eta_1 \eta_3 - \frac{\eta_2^2}{\sqrt{2}} \right)^* \sum_{p,q=1}^{\infty} (H_p F_q - F_p H_q) e^{-i(\varepsilon_p + \varepsilon_q)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p + \Gamma_q)t} (C_{p,\alpha} C_{q,\beta} - C_{p,\beta} C_{q,\alpha})$$

$$- \frac{1}{(1 + \lambda a)^2 t^{3/2}} \times$$

$$\text{Re} \left(i\eta_1^* \sum_{p,q,s=1}^{\infty} (I_{qs} F_p - I_{ps} F_q) e^{-i(\varepsilon_p + \varepsilon_q - \varepsilon_s)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p + \Gamma_q + \Gamma_s)t} (C_{p,\alpha} C_{q,\beta} - C_{p,\beta} C_{q,\alpha}) (D_\beta C_{s,\alpha}^* - D_\alpha C_{s,\beta}^*) \right)$$

$$+ 4 \frac{(D_\alpha G_\beta - G_\beta D_\alpha)}{\sqrt{2}(1 + \lambda a)^6 t^{13/2}} \times$$

$$\text{Re} \left(\left(\frac{5\sqrt{2}}{3} \eta_1 \eta_3 - \frac{\eta_2^2}{\sqrt{2}} \right)^* i\eta_1 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{a^5}{5} F_p - \frac{a^3}{3} H_p \right) (D_\beta C_{p,\alpha}^* - D_\alpha C_{p,\beta}^*) e^{-i\varepsilon_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t} \right). \quad (5.3.7)$$

En este caso observamos que $S(t)$ y $P(t)$ tienen una contribución puramente no-exponencial que se manifiesta a tiempos largos y que para ambas cantidades es proporcional a t^{-10} . En este caso, además, y a diferencia de lo observado para funciones espaciales simétricas, el término que debería ser dominante, a saber el término con pendiente $-2\Gamma_1$ se ve cancelado de forma exacta, lo mismo que todos aquellos para los cuales $m = n$; esto es consecuencia directa de la antisimetría de la función de onda.

En las expresiones anteriores se han utilizado las abreviaturas siguientes:

$$\bar{F}_p = \int_0^a y u_p^*(y) dy = A_p^* \left(\frac{\sin(k_p^* a) \cos(k_p^* a) k_p^* a}{k_p^{*2}} \right) \quad (5.3.8)$$

$$G_\alpha = \int_0^a y^3 \psi_r(y) dy = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{a^4}{\alpha^3 \pi^3} (-1)^{\alpha+1} (\alpha^2 \pi^2 - 6) \quad (5.3.9)$$

$$H_p = \int_0^a y^3 u_p(y) dy = -\frac{A_p}{k_p^4} \times \\ (k_p^3 a^3 \cos(k_p a) - 3k_p^2 a^2 \sin(k_p a) - 6k_p a \cos(k_p a) + 6 \sin(k_p a)) \quad (5.3.10)$$

Podemos obtener gráficas de $\ln S(t)$ y $\ln P(t)$ utilizando las Ecs. (5.3.6) y (5.3.7).

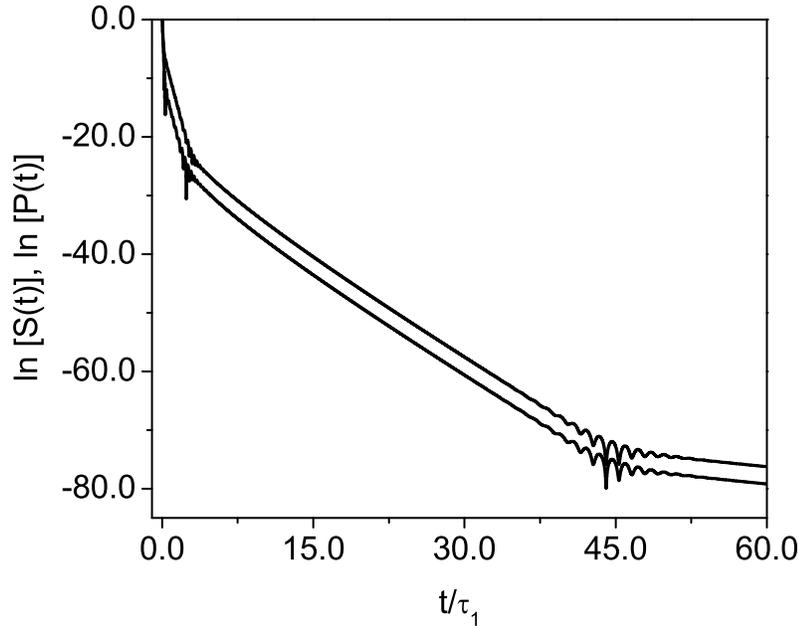


Figura 5.10: $\ln S(t)$ (abajo) y $\ln P(t)$ (arriba) para dos partículas con un estado inicial antisimétrico según las Ecs. (5.3.6) y (5.3.7). Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$.

En la Fig. 5.10 se pueden identificar varias regiones características en el comportamiento de $\ln S(t)$ y $\ln P(t)$. A tiempos cortos hay un régimen exponencial en el que la pendiente de ambas gráficas es $-(\Gamma_1 + \Gamma_6)$, luego hay un régimen de interferencia entre los mismos términos no-exponenciales seguido de una corta región lineal que en la Fig. 5.10 posee pendiente $-(\Gamma_1 + \Gamma_2)$; después aparece un término de interferencia entre el término puramente exponencial y el término mixto; la siguiente región posee una pendiente $-\Gamma_1$ que viene del término mixto. Luego viene una interferencia entre los términos mixtos y la potencia inversa y finalmente el régimen no-exponencial.

Para comprobar que la región lineal más larga en la Fig. 5.10 se debe al término mixto podemos hacer una gráfica de $\ln S(t)$ considerando la Ec. (5.3.6), que considera el término mixto, y compararla con una que carezca de dicho término, es decir, que solamente contenga los términos puramente exponenciales y puramente de potencia inversa. El resultado de ese cálculo se encuentra en la Fig. 5.11.

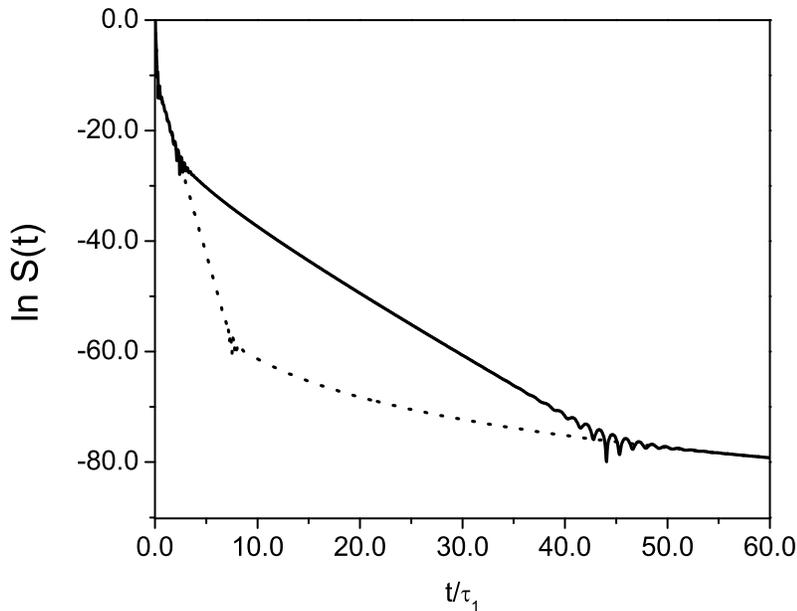


Figura 5.11: $S(t)$ para dos partículas con un estado inicial antisimétrico calculada tomando todos los términos de la Ec. (5.3.6) (línea continua) y tomando solo los términos exponenciales y de potencia inversa (línea punteada). Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$.

5.4. Discusión

Es posible notar que para los estados simétricos enredados y los estados antisimétricos de la sección precedente las soluciones exactas del problema pueden escribirse todas de una forma compacta como

$$\Psi(r_1, r_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (C_{n,\alpha}C_{m,\beta} \pm C_{m,\alpha}C_{n,\beta})u_n(r_1)u_m(r_2) M(k_m, t) M(k_n, t), \quad (5.4.1)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (C_{n,\alpha}C_{m,\beta} \pm C_{m,\alpha}C_{n,\beta})^2 M(k_m, t) M(k_n, t) \quad (5.4.2)$$

y

$$P(t) = \frac{1}{2} \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2=-\infty}^{\infty} (C_{m_1,\alpha}C_{n_1,\beta} \pm C_{n_1,\alpha}C_{m_1,\beta})(C_{m_2,\alpha}C_{n_2,\beta} \pm C_{n_2,\alpha}C_{m_2,\beta})^* I_{m_1, m_2} I_{n_1, n_2} \times \\ M(k_{m_1}, t) M(k_{n_1}, t) M^*(k_{m_2}, t) M^*(k_{n_2}, t). \quad (5.4.3)$$

Estas soluciones, junto con aquellas correspondientes a los estados simétricos factorizados, son notables ya que en la función de onda la dependencia de las coordenadas está separada de la dependencia temporal, lo cual facilita las siguientes integraciones para obtener las probabilidades de interés.

Las soluciones en términos de las funciones M, sin embargo, no proporcionan una perspectiva clara desde el punto de vista físico de lo que ocurre en el decaimiento y es por ello que se buscan esquemas de aproximación de los que se pueda obtener más información. La aproximación asintótica que proporciona el método del punto silla es satisfactoria en el sentido de que además de proporcionar expresiones sencillas para realizar los cálculos (con la correspondiente ganancia desde el punto de vista numérico y de tiempo de cómputo), los cálculos realizados bajo este esquema reproducen los resultados exactos aproximadamente desde $0.5\tau_1$, es decir, a partir de la mitad de la primera vida media del sistema.

Otro esquema de aproximación que puede ensayarse y que solo sería válido para tiempos muy cortos respecto a la vida media del sistema viene de considerar solamente los términos exponenciales, que en las expresiones asintóticas que hemos venido desarrollando se ven dominados en la región $t \rightarrow 0^+$ por los términos de potencia inversa, que divergen en esa región. En las Figs. 5.12 y 5.13 se muestra la comparación entre este esquema de aproximación y el resultado del cálculo exacto con las funciones M.

Uno podría conjeturar que el enredamiento tiene efectos en la ley de potencia inversa que siguen los sistemas que decaen pero, al menos en el caso de los sistemas sujetos a un potencial de alcance finito, esta hipótesis se ve descartada por el hecho de que los estados

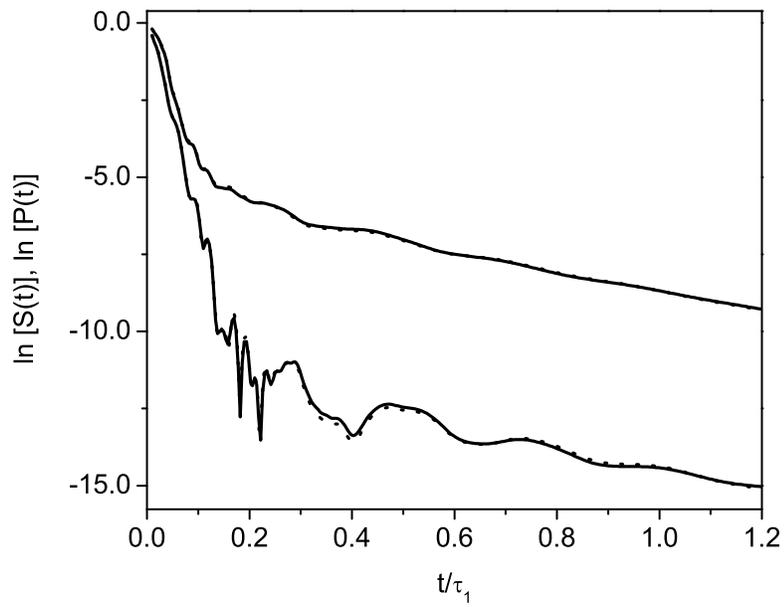


Figura 5.12: $\ln S(t)$ (abajo) calculada de forma exacta (línea continua) y tomando los términos puramente exponenciales (línea punteada); $\ln P(t)$ (arriba) calculada de forma exacta (línea continua) y tomando los términos puramente exponenciales (línea punteada). Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y estados iniciales (5.2.1).

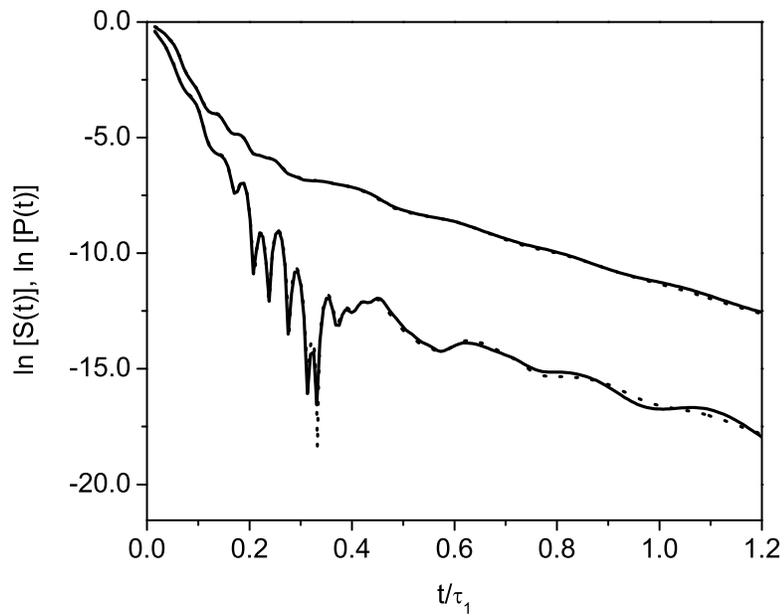


Figura 5.13: $\ln S(t)$ (abajo) calculada de forma exacta (línea continua) y tomando los términos puramente exponenciales (línea punteada); $\ln P(t)$ (arriba) calculada de forma exacta (línea continua) y tomando los términos puramente exponenciales (línea punteada). Parámetros: $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y estados iniciales (5.3.1).

simétricos estudiados en este trabajo, tanto factorizados como enredados, poseen la misma ley de potencia inversa.

Es notable que las pendientes de las contribuciones exponenciales iniciales de los estados simétricos enredados y de los antisimétricos sean iguales, a saber $-(\Gamma_1 + \Gamma_6)$ (utilizando los parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$). Esto se debe a que las combinaciones de coeficientes $(C_{m,\alpha}C_{n,\beta} \pm C_{n,\alpha}C_{m,\beta})$ son tales que independientemente del signo que se elija uno tiene, desde el caso de una partícula, que $C_{p,\alpha}$ es dominante cuando $p = \alpha$; entonces, en el caso que nos ocupa, las contribuciones dominantes son aquellas en las que $m = \alpha$, $n = \beta$, y $m = \beta$, $n = \alpha$.

Por otro lado, los resultados obtenidos en esta sección generalizan directamente el estudio de partícula libre de [22] al caso en el que existe un potencial, obteniendo las mismas leyes de potencia inversa. Los resultados de este trabajo se reducen a los de [22] poniendo $\lambda = 0$.

5.5. Extensión a N partículas

Es posible extender las consideraciones anteriores al caso de N partículas. La solución exacta del problema de N partículas idénticas no interactuantes puede darse inmediatamente multiplicando los N propagadores de una partícula (2.3.15) e integrando.

En el caso de los estados factorizados simétricos uno puede escribir inmediatamente

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \psi_\alpha(r_1) \cdot \dots \cdot \psi_\alpha(r_N), \quad (5.5.1)$$

que generaliza a N partículas el correspondiente resultado de (5.1.2). Entonces, la correspondiente solución dependiente del tiempo es

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{p_1, \dots, p_N} C_{p_1, \alpha} \dots C_{p_N, \alpha} u_{p_1}(r_1) \dots u_{p_N}(r_N) M(y_{p_1}) \dots M(y_{p_N}). \quad (5.5.2)$$

En la expresión anterior hay N sumas anidadas, cada una de las cuales se realiza sobre el conjunto completo de polos del sistema.

Consideremos un estado de un sistema de N partículas descrito por un estado inicial enredado dado por un determinante de Slater

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = C_{\pm, N} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha_1}(r_1) & \psi_{\alpha_1}(r_2) & \dots & \psi_{\alpha_1}(r_N) \\ \psi_{\alpha_2}(r_1) & \psi_{\alpha_2}(r_2) & \dots & \psi_{\alpha_2}(r_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{\alpha_N}(r_1) & \psi_{\alpha_N}(r_2) & \dots & \psi_{\alpha_N}(r_N) \end{vmatrix}_{\pm} \quad (5.5.3)$$

donde un determinante con el signo $+$ significa tomarlo con todos los signos positivos. La constante $C_{\pm, N}$ corresponde a la normalización del estado.

La solución del problema al tiempo t es

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = C_{\pm, N} \sum_{p_1, \dots, p_N} u_{p_1}(r_1) \dots u_{p_N}(r_N) \times \begin{vmatrix} C_{p_1, \alpha_1} & C_{p_2, \alpha_1} & \dots & C_{p_N, \alpha_1} \\ C_{p_1, \alpha_2} & C_{p_2, \alpha_2} & \dots & C_{p_N, \alpha_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{p_1, \alpha_N} & C_{p_2, \alpha_N} & \dots & C_{p_N, \alpha_N} \end{vmatrix}_{\pm} M(y_{p_1}) \dots M(y_{p_N}) \quad (5.5.4)$$

Se puede lograr un mejor entendimiento de la fórmula anterior estudiando el régimen exponencial de la solución que se reduce a

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \approx C_{\pm, N} \sum_{p_1, \dots, p_N} u_{p_1}(r_1) \dots u_{p_N}(r_N) e^{-i(\varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_N})t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_{p_1} + \dots + \Gamma_{p_N})t} \times \begin{vmatrix} C_{p_1, \alpha_1} & C_{p_2, \alpha_1} & \dots & C_{p_N, \alpha_1} \\ C_{p_1, \alpha_2} & C_{p_2, \alpha_2} & \dots & C_{p_N, \alpha_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{p_1, \alpha_N} & C_{p_2, \alpha_N} & \dots & C_{p_N, \alpha_N} \end{vmatrix}_{\pm} . \quad (5.5.5)$$

En el caso antisimétrico el determinante se cancela exactamente si $\alpha_i = \alpha_j$ para $i \neq j$. En el caso simétrico enredado se vuelve evidente que la pendiente de las gráficas de $\ln S(t)$ y $\ln P(t)$ tendrá contribuciones de todas las posibles combinaciones de polos mientras que el caso enredado antisimétrico nuevamente tendrá cancelaciones exactas cuando $p_i = p_j$. Se espera que el comportamiento general de las gráficas de las cantidades de interés sea considerablemente más complejo que en el caso enredado de dos partículas.

De las fórmulas anteriores es posible ver que la evaluación de la solución se vuelve más difícil a medida que N se incrementa. El caso estudiado con todo detalle en este trabajo corresponde a tomar $N = 2$ en las fórmulas de esta sección.

Por otro lado, la contribución no-exponencial para tiempos grandes es proporcional a $t^{-3N/2}$ para $\Psi(\mathbf{r}, t)$ y es proporcional a t^{-3N} para las probabilidades $S(t)$ y $P(t)$ siempre y cuando no haya una cancelación exacta de los términos $t^{-3/2}$ en el propagador. En la literatura se afirma que una cancelación exacta de dicho término ocurre para todo potencial de alcance finito en el caso de estados iniciales antisimétricos en el caso general de N partículas [33], como se ha mostrado que sucede en este trabajo en el modelo del potencial δ y en el caso de partícula libre [22].

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha explorado la dinámica de un sistema de dos cuerpos sin interacción que decaen sujetos ambos a un potencial arbitrario de alcance finito usando el formalismo de estados resonantes. Como ejemplo se han calculado las probabilidades de supervivencia y de no-escape para el potencial δ de Dirac. En el límite en que la intensidad de la δ tiende a cero, los resultados encontrados se reducen a los del caso de la partícula libre [22].

Se ha obtenido que la identidad de las partículas en el espacio de configuración, es decir, la simetría (con o sin enredamiento) o antisimetría del estado inicial tiene consecuencias en el comportamiento del sistema que se expresan como las pendientes de las gráficas de $\ln S(t)$ y $\ln P(t)$ correspondientes a las regiones exponenciales de dichas cantidades así como en la región no-exponencial del decaimiento, en el que las probabilidades de supervivencia y no-escape son proporcionales a t^{-6} en el caso de estados iniciales simétricos y a t^{-10} en el caso de estados iniciales antisimétricos.

En este trabajo nos hemos restringido a la discusión de desarrollos de la solución dependiente del tiempo a lo largo de la región interna de interacción del potencial, lo cual es suficiente para calcular las probabilidades de supervivencia y no-escape, pero puede extenderse en otras direcciones al considerar asimismo la evolución a lo largo de la región externa generalizando el desarrollo resonante del propagador utilizado en este trabajo. También puede ampliarse el análisis discutiendo el efecto de posibles estados ligados y antiligados en la suma resonante.

En la generalización al caso de N partículas se ha encontrado que el régimen exponencial depende de las sumas de los anchos de todas las resonancias pero las contribuciones más importantes se ven determinadas fuertemente por la simetría o antisimetría del estado inicial. Por otro lado, las probabilidades de supervivencia y de no-escape satisfacen una ley de potencia proporcional a, cuando menos, t^{-3N} a tiempos grandes comparados con la vida media del sistema. En el caso general de N cuerpos uno puede considerar potenciales más realistas

para así comenzar a describir la dinámica de *qbits*, lo cual es de interés en el estudio de la Información Cuántica pero también puede ser reformulado en las áreas de Química Ultrafría e Interferometría de Átomos.

Los órdenes de magnitud mostrados en las figuras de este trabajo son sumamente pequeños y es por ello que solamente la región de tiempos cortos, esto es, la región exponencial, sea viable de ser demostrada experimentalmente, de ahí que la determinación de las pendientes en este trabajo cobre mayor relevancia. Las expresiones asintóticas para $\Psi(\mathbf{r}, t)$ dadas en este trabajo no son válidas en el régimen de tiempos muy pequeños comparados con la primera vida media del sistema; para estudiar esta región el método del punto silla debe ser descartado y debe buscarse otra aproximación para evaluar $\Psi(\mathbf{r}, t)$, o bien, ser calculada con las funciones M exactas.

Bibliografía

- [1] E. MERZBACHER, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., Third edition, 1998.
- [2] G. GARCÍA-CALDERÓN, *Adv. in Quant. Chem.* **60**, 407 (2010).
- [3] G. GAMOW, *Z. Phys.* **51**, 204 (1928).
- [4] G. GAMOW, *Nature* **122**, 805 (1928).
- [5] R. W. GURNEY and E. U. CONDON, *Nature* **122**, 439 (1928).
- [6] R. W. GURNEY and E. U. CONDON, *Phys. Rev.* **33**, 127 (1929).
- [7] G. GARCÍA-CALDERÓN and R. PEIERLS, *Nuclear Physics A* **265**, 443 (1976).
- [8] E. RUTHERFORD, *Phil. Mag.* **49**, 1 (1900).
- [9] H. GEIGER and J. M. NUTTALL, *Phil. Mag.* **22**, 613 (1911).
- [10] H. GEIGER, *Z. Phys.* **8**, 45 (1922).
- [11] L. A. KHALFIN, *Sov. Phys.-JETP* **6**, 1053 (1958).
- [12] L. E. BALLENTINE, *Quantum Mechanics: A Modern Development*, chapter 12, World Scientific Publishing Co., 1998.
- [13] P. T. GREENLAND, *Nature (London)* **335**, 298 (1988).
- [14] R. G. WINTER, *Phys. Rev.* **123**, 1503 (1961).
- [15] G. GARCÍA-CALDERÓN, *Resonant States and the Decay Process: Symmetries in Physics*, chapter 17, p. 252, Springer-Verlag Berlin, 1992.
- [16] S. R. WILKINSON, C. F. BHARUCHA, M. C. FISCHER, K. W. MADISON, P. R. MORROW, Q. NIU, B. SUNDARAM, and M. G. RAIZEN, *Nature (London)* **387**, 575 (1997).
- [17] C. ROTHE, S. I. HINTSCHICH, and A. P. MONKMAN, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 163601 (2006).

- [18] W. M. ITANO, D. J. HEINZEN, J. J. BOLLINGER, and D. J. WINELAND, *Phys. Rev. A* **41**, 2295 (1990).
- [19] A. G. KOFMAN and G. KURIZKI, *Nature (London)* **405**, 546 (2000).
- [20] G. GARCÍA-CALDERÓN, I. MALDONADO, and J. VILLAVICENCIO, *Phys. Rev. A* **76**, 012103 (2007).
- [21] W. BAUER and G. F. BERTSCH, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2213 (1990).
- [22] T. TANIGUCHI and S.-I. SAWADA, *Phys. Rev. E* **83**, 026208 (2011).
- [23] A. DEL CAMPO, F. DELGADO, G. GARCÍA-CALDERÓN, J. G. MUGA, and M. G. RAIZEN, *Phys. Rev. A* **74**, 013605 (2006).
- [24] G. B. ARFKEN and H. J. WEBER, *Mathematical Methods for Physicists*, Harcourt Academic Press, 5th edition, 2001.
- [25] R. G. NEWTON, *Scattering Theory of Waves and Particles*, Dover Publications Inc., second edition, 2002.
- [26] J. R. TAYLOR, *Scattering Theory: The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions*, John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [27] J. HUMBLET and L. ROSENFELD, *Nuclear Physics* **26**, 529 (1961).
- [28] G. GAMOW and C. L. CRITCHFIELD, *Theory of Atomic Nucleus and Nuclear Energy Sources*, pp. 156–169, Oxford at the Clarendon Press, 1949.
- [29] M. RAZAVY, *Quantum Theory of Tunneling*, World Scientific, 2003.
- [30] G. GARCÍA-CALDERÓN, J. L. MATEOS, and M. MOSHINSKY, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 337 (1995).
- [31] I. DE L. MALDONADO SÁNCHEZ, Estudios de evolución temporal y propagación espacial en el decaimiento cuántico, Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2005.
- [32] E. JÜLI and D. MAYERS, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2003.
- [33] A. DEL CAMPO, *Phys. Rev. A* **84**, 012113 (2011).