



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**“ANÁLISIS TERMOELÁSTICO DE UN CONDUCTOR
ELÉCTRICO SOMETIDO A CORRIENTE ALTERNA”**

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRA EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:

PAULINA SOTO VILLASEÑOR

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

CIUDAD UNIVERSITARIA 2011





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

NOMENCLATURA	4
SÍMBOLOS GRIEGOS	6
RESUMEN	8
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	
1.1. GENERALIDADES	11
1.2. ANTECEDENTES	16
CAPÍTULO 2. PRESENTACIÓN Y DERIVACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO	
2.1. MODELO FÍSICO	26
2.2. MODELO MATEMÁTICO	
2.2.1. Ecuaciones Elásticas de Gobierno	28
2.2.2. Ecuaciones de Maxwell para la propagación de Corriente	33
2.2.3. Ecuaciones de Difusión de Calor para el Conductor	34
CAPÍTULO 3. ADIMENSIONALIZACIÓN Y MÉTODO DE SOLUCIÓN	
3.1. ECUACIONES ADIMENSIONALES	
3.1.1. Órdenes de Magnitud y Números Adimensionales	37
3.1.2. Adimensionalización del Modelo Elástico combinado con la parte Eléctrica y Térmica	39
ANÁLISIS TERMOELÁSTICO DE UN CONDUCTOR ELÉCTRICO SOMETIDO A CORRIENTE ALTERNA	

3.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS	
3.2.1. Método de Diferencias Finitas y Método de Crank-Nicolson	45
3.2.2. Discretización de las Ecuaciones y Condiciones de Frontera	45
3.2.3. Algoritmo de Thomas	48
CAPÍTULO 4. RESULTADOS	
4.1. TEMPERATURA	51
4.2. DEFORMACIÓN Y ESFUERZO CORTANTE EN EL ACERO	
4.2.1. Deformación	55
4.2.2. Esfuerzo Cortante	58
4.3. DEFORMACIÓN Y ESFUERZO CORTANTE EN EL ALUMINIO	
4.3.1. Deformación	60
4.3.2. Esfuerzo Cortante	62
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES	65
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67

NOMENCLATURA

A	Área del conductor $[m^2]$
\vec{B}	Densidad de flujo magnético $\left[\frac{J}{A \cdot m^2}\right]$
Bi	Número de Biot $Bi = \frac{hR}{k}$
c	Calor específico $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$
\vec{D}	Densidad de flujo eléctrico $\left[\frac{C}{m^2}\right]$
\vec{E}	Intensidad de campo eléctrico $\left[\frac{J}{C \cdot m}\right]$
E	Módulo de Young $[GPa]$
h	Coeficiente de convección $\left[\frac{W}{m^2 \cdot K}\right]$
\vec{H}	Intensidad de campo magnético $\left[\frac{A}{m}\right]$
\vec{J}	Densidad de corriente $\left[\frac{A}{m^2}\right]$
k	Conductividad térmica $\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$
r	Coordenada radial $[m]$
R	Radio del conductor $[m]$

t	Tiempo [s]
T	Tensión [kN]
T_c	Temperatura característica [K]
T_∞	Temperatura ambiente [K]
u	Vector desplazamiento [m]

SÍMBOLOS GRIEGOS

α	Coeficiente de expansión térmica lineal $[K^{-1}]$
α	Parámetro adimensional $\alpha = \frac{\alpha^2 Bi^2}{R^2} \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)$
β	Constante termoelástica $\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu)$
β	Parámetro adimensional $\beta = \frac{2 \left(\frac{\lambda_{mec}}{2} + \mu \right)}{A(\mu E)_{material}} \frac{Tk}{\lambda_{elect} J_R^2 R^2}$
Δ	Esfuerzo cortante adimensional
ε	Parámetro pelicular
ϵ_{rr}	Componente del esfuerzo de deformación
ϕ	Densidad de corriente adimensional
φ	Deformación adimensional
γ	Permitividad eléctrica $\left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right]$
η	Coordenada radial adimensional
λ_{elect}	Resistividad eléctrica $\left[\frac{W \cdot m}{A^2} \right]$
λ	Constante de Lamé $[GPa]$
μ	Constante de Lamé $[GPa]$
ν	Relación de Poisson

θ	Temperatura adimensional
ρ	Densidad
σ_{rr}	Componente del esfuerzo de tensión
τ	Tiempo adimensional

RESUMEN

En el presente trabajo se desarrolla el estudio termoelástico de un conductor eléctrico que consiste de un núcleo de acero o aluminio. La presencia de un campo eléctrico permite establecer que los efectos combinados anteriores sean tomados en cuenta simultáneamente.

Al conductor se le hace pasar una corriente eléctrica provocando un calentamiento en todo el elemento y que siendo no necesariamente uniforme a lo largo del conductor, es conocido como el efecto Joule. De hecho en la mayoría de las circunstancias asociadas a una alta frecuencia de la corriente alterna que circula por el conductor, el flujo de corriente eléctrica se distribuye hacia la pared externa del conductor y por la singularidad de este comportamiento se le conoce a tal fenómeno como el efecto pelicular.

Los cables de alta tensión debido al calentamiento provocado por la corriente eléctrica y a las mismas condiciones ambientales a las que se encuentran sometidos a diario al estar a la intemperie, provocan que éstos se puedan deformar elásticamente y en condiciones de operación críticas pueden llegar a trabajar transitoriamente en estados plásticos. Considerando estas circunstancias sobre la operación del material conductor y por ende sobre el desempeño de las redes eléctricas, al aplicar al conductor una tensión mecánica para garantizar el desempeño y la integridad de éste, la acción combinada de estos efectos, conduce inevitablemente a la necesidad de estimar simultáneamente el comportamiento de la temperatura, la deformación y el esfuerzo cortante en el conductor.

La base de este estudio es partir entonces de las ecuaciones necesarias que describan las deformaciones elásticas y la manera en que éstas se acoplen a la distribución de la temperatura en el conductor eléctrico, tomando en cuenta desde luego la influencia del efecto Joule ocasionado por el paso de la corriente

eléctrica en el conductor y por consiguiente, el uso simplificado también de las ecuaciones de Maxwell.

Para llevar a cabo lo anterior, se considera exclusivamente el caso de una corriente eléctrica alterna que posee muy alta frecuencia, lo que permite estimar analíticamente la densidad de corriente. Con lo anterior, la ecuación de difusión de calor se puede calcular numéricamente y con los perfiles de temperatura evaluados, la ecuación de Cauchy; es decir la ecuación que predice el estado elástico se puede utilizar para predecir las deformaciones originadas por los efectos de la temperatura no-uniforme en el elemento conductor. Para facilitar los cálculos anteriores, se introducen los órdenes de magnitud necesarios para adimensionalizar las ecuaciones resultantes.

Para resolver el modelo matemático se utiliza el método de diferencias finitas discretizando las ecuaciones y resolviendo estas con el método de Crank-Nicolson; obteniendo de esta manera las ecuaciones algebraicas, que se resuelven usando el algoritmo de Thomas. Los resultados principales muestran los perfiles de temperatura, el campo de las deformaciones elásticas y esfuerzos cortantes originados como consecuencia de los efectos térmicos desarrollados en el conductor eléctrico. Dichos perfiles son evaluados como función de los parámetros adimensionales y los resultados demuestran que los efectos ambientales, reflejados a partir de un número de Biot característico y el efecto pelicular, determinan la operación eléctrica del conductor. También, los resultados numéricos se obtuvieron para dos materiales conocidos: el acero y el aluminio.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

1.1. GENERALIDADES

En este trabajo se presenta el estudio teórico de un conductor eléctrico normal que se somete a una tensión mecánica. Al hablar de tensión mecánica es indispensable considerar las ecuaciones de las deformaciones asociadas que pueden afectar la operación eléctrica del conductor. Bajo las circunstancias normales a las que se encuentra regularmente sometido un conductor eléctrico, el análisis elástico y las respuestas mecánicas de un conductor, no puede llevarse a cabo de manera racional si no se toman en cuenta a su vez el impacto que tiene el estado de deformación sobre otras propiedades como las electromagnéticas y térmicas. Generalmente, muchos estudios se han limitado a considerar que las propiedades electromagnéticas se asumen bajo la consideración de que la temperatura es la misma en todo el conductor. Sin embargo, si la frecuencia del conductor se incrementa, como ocurre en la mayoría de las aplicaciones prácticas asociadas a los sistemas de alta tensión, la condición isotérmica fácilmente se altera complicando de manera muy particular, la operación del mismo. Los conductores tradicionales utilizados en transmisión de potencia y líneas aéreas de transporte de corriente eléctrica generalmente trabajan bajo las circunstancias anteriores debido a su excelente conductividad. Estos conductores tuvieron gran auge en los años 50. Desde entonces, el estudio del comportamiento operacional comenzó su desarrollo.

En la práctica, los sistemas conductores suelen ser aún más complejos en su composición ya que generalmente este tipo de conductores consta de un conjunto de alambres de aluminio trenzados concéntricamente que rodean a otro conjunto de alambres de acero que conforman el núcleo del conductor (Fig. 1.1.1). El núcleo de acero proporciona la resistencia mecánica, y los alambres de

aluminio transportan la mayor parte de la corriente eléctrica. De acuerdo al número de capas de aluminio, los conductores anteriores pueden ser clasificados como conductores sencillos, de doble capa o multicapilares que son los de más de tres capas de aluminio

. La corriente alterna que fluye en los alambres de aluminio, produce un flujo magnético axial en el núcleo. Este flujo causa pérdidas de energía, que en general pueden deberse a los efectos combinados de histéresis, corrientes parásitas y la redistribución de la corriente en el conjunto de alambres del aluminio, Morgan, [1].

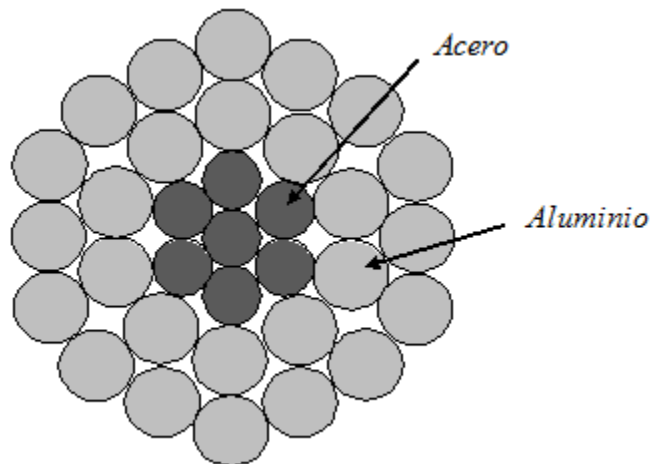


FIGURA 1.1.1. REPRESENTACIÓN DE UN CONDUCTOR ACSR (aluminium conductor steel reinforced), CON ALAMBRES DE ACERO FORMANDO EL NÚCLEO Y ALAMBRES DE ALUMINIO ALREDEDOR.

La distribución de densidad de corriente en conductores ACSR no es uniforme, debido al efecto skin (efecto pelicular) y al efecto transformador. El efecto skin causa un incremento moderado en la densidad de corriente en cada uno de los alambres. Este fenómeno, predicho por Kelvin alrededor de 1850, es causado por el cambio de las líneas de corriente eléctrica en un conductor sólido bajo la acción de su propio campo magnético. Este efecto tiene cierta relevancia

en el calentamiento desigual de cada uno de los conjuntos de alambres, Barka et al, [2].

El efecto transformador causa por otro lado, un cambio significativo de corriente de las capas internas y externas de los cables de aluminio. Esta redistribución de corriente aumenta la resistencia de corriente alterna y la pérdida de energía en el conductor. La magnitud del efecto transformador depende de la fuerza del campo magnético, y por consiguiente, de la corriente y su distribución, la geometría del conductor y la permeabilidad del núcleo de acero, Morgan, [3].

El cálculo de la temperatura de los conductores se basa generalmente en la distribución uniforme de corriente sobre la sección transversal del conductor. En el caso de conductores bimetálicos, la permeabilidad del acero depende de la temperatura; por lo tanto, la distribución radial de corriente, depende también de la temperatura y ésta afectará también la resistencia en la corriente alterna y la inductancia interna del conductor.

La distribución de temperaturas no cambia con la temperatura de referencia, pero el cambio es obvio sobre la distribución con diferentes campos magnéticos. Las distribuciones de desplazamiento tienen grandes diferencias para diferentes valores del campo magnético.

Los puntos de discontinuidad en la distribución de tensión para valores diferentes de desplazamiento, cuando el valor del campo magnético cambia, significan que el aumento del campo magnético hace que los puntos de discontinuidad en la posición, aumenten.

Un cambio de tensión, puede afectar las características de la corriente alterna de un conductor bimetálico, porque la permeabilidad del núcleo varía con la tensión. Esta variación puede tener un efecto significativo en la distribución radial de la densidad de corriente en la sección del aluminio, Žunec et al, [4].

Por otro lado, la deformación elástica de un cuerpo siempre está asociada con un cambio del contenido calorífico y, consecuentemente con un cambio de la temperatura del cuerpo. Una deformación variante con el tiempo conduce a un cambio del campo de temperatura e inversamente, un cambio en la temperatura produce una deformación. La energía interna del cuerpo, por lo tanto se convierte en una función de la deformación y la temperatura. La rama de la ciencia que trata con estos dos procesos acoplados es la termoelasticidad.

Durante la segunda mitad del siglo XX, problemas no isotérmicos de la teoría de la elasticidad, se hicieron cada vez más importantes, debido a sus aplicaciones en campos muy diversos. Las altas velocidades de aviones modernos dan lugar a un calentamiento aerodinámico, que produce intensos esfuerzos térmicos que reducen la resistencia de la estructura de los aviones, y en el campo nuclear, las temperaturas extremadamente altas y los gradientes de temperatura originados en el interior de reactores nucleares, influyen en su diseño y operación.

La termoelasticidad es un campo relativamente nuevo. La termoelasticidad investiga la interacción entre los esfuerzos mecánicos y los campos de temperatura y, sobre las bases de la termodinámica de procesos irreversibles, relaciona dos ciencias desarrolladas independientemente: la teoría de la elasticidad y la teoría de la conducción del calor. Los problemas de estática son considerados como isotérmicos, mientras que los problemas dinámicos se suponen adiabáticos. La termoelasticidad combina estos dos campos y los considera como uno solo.

Las investigaciones en el campo de la termoelasticidad fueron precedidas por un extenso estudio de la llamada teoría de las tensiones térmicas. Esta teoría emplea la ecuación de conducción de calor clásica, y no contiene ningún término relacionado con la deformación del cuerpo. Y conociendo la distribución de la temperatura resultante de la solución de la ecuación de conducción de calor, las ecuaciones de desplazamiento de la teoría de la elasticidad se resuelven.

En la literatura especializada generalmente se le ha dedicado más atención a la interacción entre el campo magnético y el campo de esfuerzos que se desarrolla en un sólido termoelástico debido a sus muchas aplicaciones en los campos de la geofísica, física de plasmas y temas relacionados. La consideración elemental es que las interacciones entre los dos campos se llevan a cabo mediante las fuerzas de Lorentz y mediante la ley de Ohm y el punto de vista tradicional es describir el campo eléctrico producido por la velocidad de una partícula que se mueve en un campo magnético. Usualmente, en estas investigaciones la ecuación de la energía se considera que se encuentra desacoplada del fenómeno mismo. Esta suposición se justifica en muchas situaciones, ya que las soluciones obtenidas utilizando cualquiera de estas ecuaciones difieren muy poco cuantitativamente si se incluye el efecto térmico.

La teoría de la termoelasticidad, que admite una velocidad finita de señales térmicas, ha recibido una gran cantidad de atención en las pasadas cuatro décadas. En contraste a la teoría de la termoelasticidad convencional acoplada basada en la ecuación de calor parabólica, que predice una velocidad infinita para la propagación de calor, esta teoría envuelve una ecuación de calor hiperbólica y hace referencia a la teoría de la termoelasticidad generalizada.

La discrepancia entre la teoría clásica de la elasticidad y la experimentación es sorprendente en los problemas dinámicos caracterizados por frecuencias altas y longitudes de onda pequeñas. En estos problemas, la influencia de la microestructura del cuerpo se vuelve muy significativa. De esta manera, la teoría de elasticidad micropolar, que se ocupa de tales materiales con microestructura, ganó gran importancia en las pasadas décadas y encontró aplicación principalmente en los problemas de deformación de medios granulares y sistemas multimoleculares.

En problemas típicos de termoelasticidad dinámica, las tasas de calentamiento son suficientemente lentas y la tensión y la tasa de temperatura son de magnitudes comparables. Tanto la inercia como los términos de acoplamiento

en las ecuaciones de gobierno, que se pueden quitar y colocar, simplifican en gran medida las ecuaciones y las hacen susceptibles a la solución analítica, Nowacki, [5].

1.2. ANTECEDENTES

La termoelasticidad es un campo nuevo de la ciencia. Aunque el acoplamiento de la temperatura y los campos de deformaciones fueron postulados por J. M. C. Duhamel, [6] y la ecuación generalizada de la ecuación de calor escrita por W. Voigt, [7] y H. Jeffreys, [8] el desarrollo real de la teoría tuvo lugar veinte años después.

Una técnica para el análisis de las tensiones, se basa en mediciones de radiación infra roja emitidas por la superficie de un sólido como resultado del cambio en la temperatura derivado del cambio de la tensión. Un tratamiento teórico del efecto de la termoelasticidad fue publicado en 1853 por lord Kelvin, [9] y en 1967 Belgen, [10] mostró que las técnicas radiométricas de infra rojo podrían ser usadas para medir los cambios de temperatura. Sin embargo, en ese tiempo la sensibilidad de los instrumentos disponibles era de tal modo inexacto, que el análisis de tensión cuantitativo de cualquier valor práctico no podía ser abordado cabalmente. Tras los recientes desarrollos en electro-óptica y técnicas de procesamiento de señales, un sistema radiométrico de infra rojo ha sido desarrollado por SIRA Ltd., Inglaterra, con una resolución de temperatura de 0.002 °C y una resolución espacial de menos de 1 mm. El sistema, referido como SPATE (Stress Pattern Analysis by Thermal Emission) consiste esencialmente de un digitalizador y una unidad de detección, una unidad de procesamiento de señal analógica, y una unidad de control digital, almacenamiento y visualización, Stanley, [11].

Double, [12] encontró que la inducción magnética a esfuerzos de tensión y fuerzas de campo magnético constantes de un alambre de acero galvanizado de

4.5 mm de diámetro tomada del núcleo de un conductor ACSR, se incrementó con el aumento de la temperatura, en el rango de 16 a 52 °C. Morgan y Price, [13] encontraron el mismo efecto en alambres de acero galvanizado de 2.19, 3.12 y 3.56 mm de diámetro en el rango de temperatura de 20 a 130 °C. Ellos atribuyeron este efecto a una reducción en los esfuerzos internos.

Double, [12] también encontró que la permeabilidad a temperatura y fuerza de campo magnético constante, disminuye con el aumento de los esfuerzos de tensión, en el rango de 47 a 818 MPa. Morgan y Price, [13] encontraron un efecto similar en el rango de esfuerzos de tensión de 0 a 1000 MPa, y atribuyeron esta variación al efecto Villari, [14].

Matsch y Lewis, [15] reportaron que, cuando los alambres de acero galvanizado tenían diámetros de 1.61 a 4.79 mm, la inducción magnética con fuerza de campo magnético constante aumentaba con un incremento de temperatura en el rango de 20 a 100 °C. Riaz, [16] usó alambres de acero con diámetros variables de 2.36 a 4.78 mm.

Ninguna de estas pruebas reprodujo la condición de los alambres en un estado de tensión. Barrett y colaboradores, [17] probaron un núcleo de 19/2.26 mm de diámetro, obteniendo un diámetro de 1.968 mm. Los extremos del núcleo fueron unidos con una abrazadera de compresión. Sin embargo, el arreglo mencionado no permite que la tensión en el núcleo varíe. Las pruebas fueron realizadas únicamente a temperatura ambiente.

De las medidas hechas en un núcleo de acero galvanizado de 2.24 mm, se encontró que el módulo de permeabilidad relativa disminuía con el incremento del esfuerzo de tensión, en el rango de 0 a 290 MPa, a temperatura constante. Otro resultado obtenido fue que la disminución en el valor máximo de la permeabilidad relativa en el rango de 0 a 290 MPa es aproximadamente del 12% a cualquier temperatura en el rango de 25 a 120 °C. Este resultado es similar al reportado por Morgan y Price para un cable de acero galvanizado de 2.76 mm en

el mismo rango de tensión. Sin embargo, Double, [12] reportó una disminución de solo 3% en la permeabilidad relativa de cable de acero galvanizado de 4.5 mm de diámetro a 16.1 °C en el mismo rango de tensión.

El pequeño aumento en la permeabilidad relativa, el cual ocurre entre 0 y 58 MPa, también fue observado por Bozorth y Williams, [18] con muestras de hierro. Ellos encontraron que la permeabilidad relativa aumentó a un valor máximo cuando la tensión aumentó a 40 MPa, y luego disminuyeron a tensiones más altas, debido a los esfuerzos internos. Este comportamiento es debido a la deformación plástica del metal. Morgan y Price también notaron este aumento inicial de la permeabilidad como el aumento de la tensión, para fuerzas de campo magnético arriba de 700 A/m. A altas fuerzas de campo magnético, sólo cables no galvanizados, presentaron este efecto.

La parte real de la permeabilidad relativa compleja, es menos sensible, comparada con el módulo de ésta. Barret y colaboradores, reportaron que la parte real, para un conductor con núcleo de acero a 300 MPa fue 5% más grande que para un toroide formado con un núcleo de acero. El valor máximo de la parte imaginaria de la permeabilidad relativa, disminuye un 23% con el aumento del esfuerzo de tensión en un rango de 0 a 290 MPa, a temperatura constante. Estos resultados se comparan a una reducción del 21%, reportada por Barret y colaboradores, con un incremento en el esfuerzo de tensión de 0 a 300 MPa, Morgan et al, [19].

Danilouskaya, [20] fue el primero en resolver un problema actual en la teoría de elasticidad con calor no uniforme. El problema estaba en el contexto de lo que se conoce como la teoría de termoelasticidad desacoplada. En esta teoría, la temperatura está gobernada por una ecuación diferencial parcial, la cual no contiene ningún término elástico. Más adelante, se realizaron intentos para remediar las deficiencias de la teoría.

La primera generalización de la teoría de la termoelasticidad, para cuerpos isotrópicos, es debida a Lord y Shulman, [21] quienes obtuvieron una ecuación de calor del tipo ondulatoria, postulando una nueva ley de conducción de calor para reemplazar la ley de Fourier clásica. Othman, [22] construyó el modelo de termoelasticidad generalizada en un medio isotrópico elástico bajo la dependencia del módulo de elasticidad en la temperatura de referencia con un tiempo de relajación.

La segunda generalización es conocida como la teoría de la termoelasticidad con dos tiempos de relajación, y fue propuesta por Green y Lindsay, [23]. Está basada en una forma de la desigualdad de la entropía propuesta por Green y Laws, [24]. No viola la ley de Fourier de la conducción de calor cuando el cuerpo bajo estudio tiene un centro de simetría, y es válida para cuerpos isotrópicos y anisotrópicos. Othman, [22] estudió los efectos de relajación en problemas de choque térmico en medios elásticos de ondas magneto-termoelásticas.

La teoría de la termoelasticidad sin disipación de energía es otra teoría generalizada y fue formulada por Green y Naghdi, [25]. Ésta incluye el gradiente de desplazamiento térmico entre estas variables constitutivas independientes, y difiere de las teorías previas en que no se acepta disipación de energía térmica. Hetnarski y Ignaczak, [26] en su estudio examinaron generalizaciones de la teoría acoplada y obtuvieron un número importante de resultados analíticos. Othman, [27] estudió las formulaciones del espacio permanente para problemas de termoelasticidad en dos dimensiones con dos tiempos de relajación con módulos de elasticidad dependientes de la temperatura de referencia.

La teoría acoplada de la termoelasticidad fue introducida por Biot, [28] para eliminar la paradoja inherente en la teoría desacoplada clásica que presenta cambios elásticos sin efectos sobre la temperatura. Las ecuaciones de calor para ambas teorías son del tipo parabólico, y predicen velocidades infinitas de

propagación para ondas de calor, contrario a las observaciones físicas, Ezzat, [29].

Los cimientos de la magneto elasticidad fueron presentados por Knopoff, [30], Chadwick, [31] y desarrollado por Kaliski y Petykiewicz, [32]. Nayfeh y Nemat-Nasser, [33] introdujeron un modelo más general de electro-magneto-termoelasticidad, el cual incluía un tiempo de relajación.

La teoría lineal generalizada de la magneto-termoelasticidad fue estudiada por Nowacki, [34].

Wang, [35] presentó un método para el análisis del problema de termoelasticidad dinámica en un cilindro hueco. Las principales desventajas de su trabajo es que la ecuación de conducción de calor no se resuelve para el problema y tuvo que usar una distribución de temperatura constante para encontrar la tensión. Siguiendo el mismo enfoque, Cho y colaboradores, [36] resolvieron el correspondiente problema en un cilindro, cuya solución tenía la misma desventaja. Kandil y colaboradores, [37] presentaron un análisis numérico de tensiones térmicas dentro de un cilindro de paredes gruesas bajo un gradiente de temperatura. La distribución de temperatura dentro de la pared del cilindro se determinó usando métodos numéricos. Ghosn y Sabbaghian, [38] consideraron un problema termoelástico unidimensional y obtuvieron la solución general de las ecuaciones que lo rigen en el dominio de la transformada de Laplace. Chen, [39] consideró un cilindro hueco transversalmente isotrópico de longitud finita y resolvió el problema por aproximación directa de series de potencia. Yee y Moon, [40] presentaron una solución analítica para el estudio de tensiones térmicas de un cilindro hueco sujeto a una distribución de temperatura inicial arbitraria y a condiciones de frontera térmicas homogéneas. La solución termoelástica fue obtenida por una aproximación de la función de tensión.

Jane y Lee, [41] consideraron cilindros anulares de longitud infinita cuyas temperaturas conocidas estaban sujetas a la tracción en las superficies interna y

externa. Lee presentó el análisis de tensiones térmicas dentro de cilindros sujetos a condiciones de frontera periódicas. Sen y colaboradores, [42] derivaron una técnica de elemento finito para encontrar tensiones térmicas las cuales ocurren durante el enfriamiento de agua de barras cilíndricas sólidas y tubos de acero de sección transversal. Segall, [43] presentó una solución para tensiones térmicas en cilindros de espesor de pared sujetos a calentamiento en la superficie interna del cilindro con convección hacia el medio ambiente externo. Shahani y Nabavi, [44] resolvieron analíticamente el problema de tensión térmica transitoria para un cilindro hueco, usando la transformada finita de Hankel, en la cual las condiciones de frontera térmicas se asumen constantes.

En un artículo publicado por Shahani y Nabavi, [44] el problema de termoelasticidad cuasi estático en un cilindro de paredes gruesas se resolvió analíticamente. Las condiciones de frontera térmicas dependientes del tiempo se suponen que actúan sobre la superficie interna del cilindro y la relación para la distribución de temperatura es derivada de forma general. Para las condiciones de frontera mecánicas, se consideraron dos problemas: en el primero, se asume que la condición de frontera de tracción está prescrita sobre la superficie interna del cilindro y la condición de frontera del desplazamiento es fija en la superficie externa, y en el segundo problema, las tracciones actúan sobre las superficies interna y externa del cilindro hueco. Para resolver los problemas, se usa la transformada finita de Hankel y las relaciones de forma cerrada se extraen para las tensiones térmicas en los dos problemas. En casos especiales, dos condiciones de frontera térmicas diferentes son consideradas sobre la superficie interna del cilindro: 1) temperatura constante prescrita y 2) temperatura aplicada exponencialmente decaendo. Para los dos casos especiales, se extrajeron relaciones analíticas para la temperatura y la distribución de tensiones en el cilindro.

Filipovic-Gledja, y colaboradores, [45] propusieron un Modelo Integral diseñado originalmente para conductores de tres capas para estudiar las

propiedades electromagnéticas, térmicas y mecánicas de un conductor ACSR. Basados en la experiencia de que en conductores de una sola capa, la resistencia es mayor, Findlay y Liu, [46] desarrollaron un Modelo Integral para conductores de una sola capa.

Este modelo fue diseñado para crear un nuevo modelo de conductores ACSR y para mejorar los conductores existentes reduciendo pérdidas, y optimizando las características eléctricas y mecánicas.

Las observaciones obtenidas de este modelo fueron: el arrastre y el esfuerzo elástico disminuyen con un incremento de la corriente. El esfuerzo térmico es función de la temperatura y aumenta cuando aumenta la corriente.

La discusión de los esfuerzos, deformaciones y tensiones tuvieron prácticamente el mismo significado debido a que en el diseño tradicional, la tensión representa un porcentaje de la resistencia a la tensión, Liu y colaboradores, [47].

Se desarrollaron cuatro modelos matemáticos para tener en cuenta el comportamiento eléctrico, mecánico y térmico del conductor. El modelo electromagnético, el cual es particularmente aplicable a conductores de núcleo de acero, ha sido desarrollado por Morgan y Price, y por Barret y colaboradores. Este modelo incluye la pérdida de potencia electromagnética en el núcleo de acero y la redistribución de corriente debida al efecto transformador. Las variables de entrada son: la geometría del conductor, las propiedades eléctricas y magnéticas del material, la corriente total y la temperatura. Las variables de salida son: la corriente compleja, la pérdida de potencia y la corriente alterna.

El modelo mecánico ha sido progresivamente desarrollado por varios autores. Las variables de entrada son: la geometría del conductor, las propiedades físicas del material, el tiempo, la tensión y la temperatura. Las variables de salida son: los esfuerzos, las fuerzas radiales, la flexión, el arrastre y resistencia a la

tracción. El modelo predice esfuerzos de compresión en los cables de aluminio a altas temperaturas.

El modelo térmico se desarrolló progresivamente durante muchos años, pero su presente forma es principalmente atribuida a Makhlin, [48], House, y Tuttle, [49], Webs, [50] y Morgan, [51]. Las variables de entrada son: la geometría del conductor, la corriente o la temperatura del conductor, la resistencia, variables atmosféricas, como la velocidad del viento, su dirección y la intensidad de la radiación solar. Las variables de salida son: la temperatura en la superficie del conductor, la corriente si no está como variable de entrada, y la conductividad térmica radial si la temperatura es variable de entrada.

Una combinación de los 3 primeros modelos fue usada para calcular la distribución de temperatura en un conductor ACSR. El conductor fue sometido a una corriente constante de 1500 A, y se mantuvo a una tensión también constante de 30 kN.

La combinación de los cuatro modelos, fue llamado el Modelo Unificado, y su aplicación se concentra en determinar los efectos de varios parámetros sobre la contribución de la corriente. La temperatura y la tensión del conductor, se asumieron variables. El propósito de este modelo, es la utilidad en la transmisión y distribución eléctrica en el conductor, ya que predice sus características mecánicas, eléctricas, electromagnéticas y térmicas. La sensibilidad de de parámetros como tensiones internas, variables atmosféricas como la intensidad de la radiación solar y la velocidad del viento, pueden determinarse fácilmente. Un mayor desarrollo del modelo deberá tener en cuenta la variación de la carga eléctrica del sistema, y por lo tanto las líneas de corriente, Filipovic-Gledja y colaboradores, [45].

Con los antecedentes anteriores, el objetivo del trabajo es hacer el análisis termoelástico de un conductor eléctrico al cual se le hace pasar una corriente eléctrica alterna y que está sometido a una tensión mecánica. Debido a estas

condiciones, el conductor presenta un calentamiento y una deformación, los cuales se estudian de manera simultánea con el fin de obtener un modelo matemático que describa el comportamiento de la temperatura, la deformación y el esfuerzo

CAPÍTULO 2
PRESENTACIÓN Y
DERIVACIÓN DEL
MODELO MATEMÁTICO

CAPÍTULO 2

PRESENTACIÓN Y DERIVACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

2.1. MODELO FÍSICO

A continuación se considera el siguiente modelo simplificado: a un conductor eléctrico homogéneo de longitud L y radio R se le hace pasar una corriente alterna, $I = I_0 \text{sen}(\omega t)$ de alta frecuencia ω generando calor mediante el efecto Joule, situación que permite el calentamiento del conductor a lo largo del mismo. Las condiciones externas del conductor son generalmente condiciones ambientales y representadas por una temperatura de referencia T_∞ y un coeficiente convectivo h . En la Fig. 2.1.1 se puede apreciar un bosquejo del mismo.

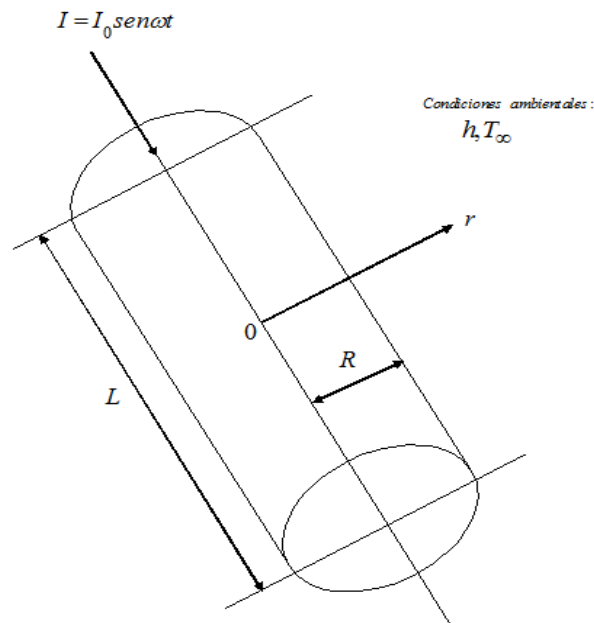


FIGURA 2.1.1. REPRESENTACIÓN DE LA CORRIENTE ALTERNA QUE SE HACE PASAR POR EL CONDUCTOR, DE LONGITUD L Y RADIO R .

Además en el presente trabajo se considera que el elemento se somete a una tensión mecánica (véase Fig. 2.1.2), lo que ocasionará eventualmente una deformación, haciendo entonces que éste se comprima (Fig. 2.1.3) y sufra un pequeño desplazamiento.

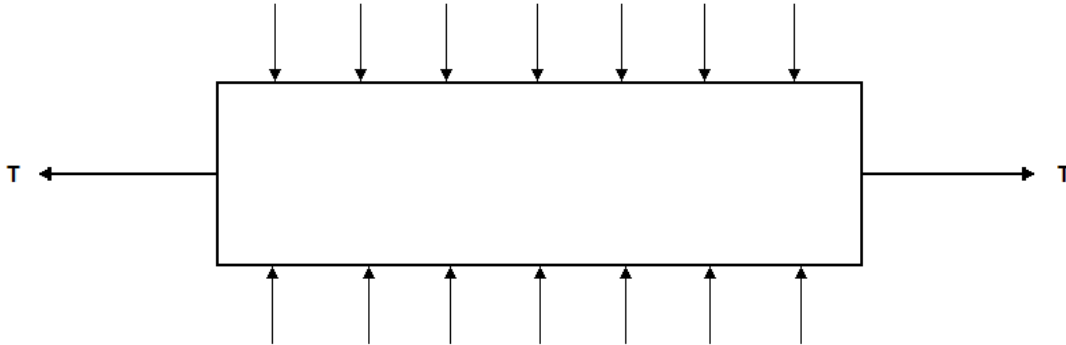


FIGURA 2.1.2. REPRESENTACIÓN DE LA DEFORMACIÓN CUANDO SE APLICA LA TENSIÓN MECÁNICA

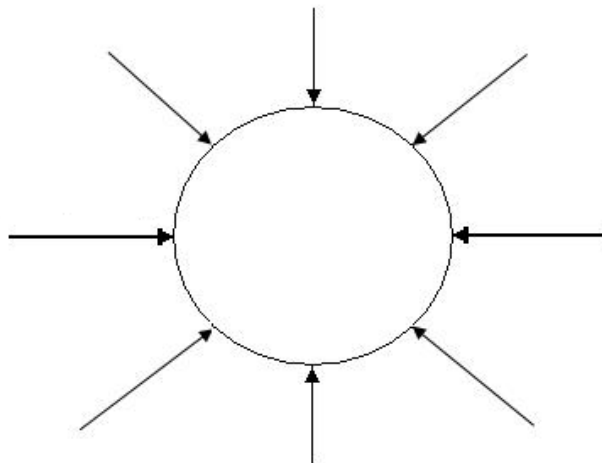


FIGURA 2.1.3. REPRESENTACIÓN DE LA DEFORMACIÓN DEBIDA A LA COMPRESIÓN RADIAL INDUCIDA.

2.2. MODELO MATEMÁTICO

2.2.1. Ecuaciones Elásticas de Gobierno

Ecuación de la deformación. Para derivar la ecuación que predice las deformaciones unitarias en el conductor como resultado de los efectos combinados de tensión mecánica y temperatura, se considera al conductor como un cuerpo elástico de forma cilíndrica, sujeto a cambios de temperatura y tensión mecánica. En referencia a la Fig. 2.2.1 y considerando un sistema de coordenadas cilíndrico; si el punto A es un punto arbitrario del conductor, entonces hipotéticamente este punto puede experimentar un pequeño desplazamiento u , y se considera que existe una deformación en ese punto del conductor. De esta manera, cuando todo el elemento AB, después de una pequeña deformación, se convierte en el elemento A*B* (Fig. 2.2.1), la longitud del conductor en el eje transversal del elemento A*B* se puede expresar mediante la siguiente relación, Noda, [52].

$$\begin{aligned} A^*B^* &= dr - u_r(B) + u_r(A) \\ &= dr - [u_r(B) - u_r(A)] \end{aligned}$$

o bien en términos de desplazamientos infinitesimales

$$(A^*B^*)_r = dr - \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) dr$$

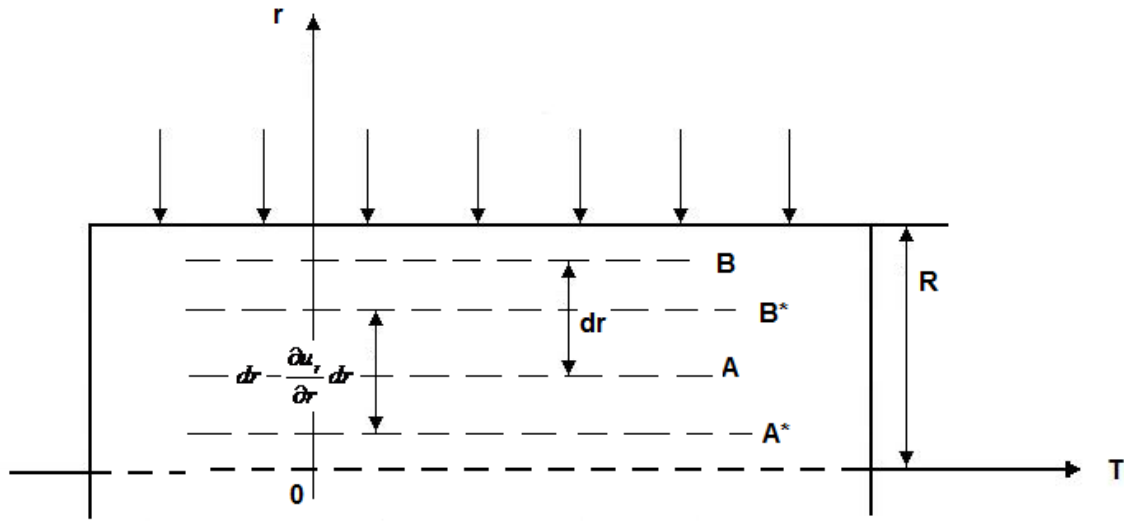


FIGURA 2.2.1. DEFORMACIÓN DEL CONDUCTOR.

De esta manera, la deformación radial unitaria en el punto A, en la dirección radial se puede escribir mediante la siguiente ecuación,

$$\epsilon_{rr} = \frac{dr - \left(\frac{\partial u_{rr}}{\partial r} \right) dr - dr}{dr} = - \left(\frac{\partial u_{rr}}{\partial r} \right). \quad (2.1)$$

En general si solo se toma en cuenta deformaciones planas debido a la compresión inducida en el conductor tensionado longitudinalmente, entonces los desplazamientos se pueden expresar con ayuda de las siguientes relaciones generales,

$$u_r = u_r(r, \theta), \quad u_\theta = u_\theta(r, \theta), \quad u_z = \epsilon_0 z + \epsilon_1, \quad (2.2)$$

de esta manera, se infiere que las componentes de la deformación normal unitaria en el punto A serían expresables también en general mediante las siguientes expresiones,

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{rr}(r, \theta), \quad \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\theta\theta}(r, \theta), \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_0 = cte \quad , \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \epsilon_{r\theta}(r, \theta), \quad \epsilon_{rz} = 0, \quad \epsilon_{\theta z} = 0 \quad .$$

Las relaciones anteriores se derivaron utilizando las siguientes ecuaciones entre las deformaciones unitarias ϵ_{ij} ($i = r, \theta, z$ y $j = r, \theta, z$) y los correspondientes desplazamientos u_k :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \epsilon_0, \quad (2.4)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad \epsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

La Ley de Hooke generalizada en coordenadas cilíndricas puede expresarse en términos de la definición de las deformaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \epsilon_{rr} + \lambda e - \beta\tau = 2\mu \epsilon_{rr} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}) - \beta\tau \\ &= (\lambda + 2\mu) \epsilon_{rr} + \lambda(\epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_0) - \beta\tau \quad , \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu \epsilon_{r\theta} = \sigma_{\theta r} \quad , \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu \epsilon_{\theta\theta} + \lambda e - \beta\tau = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{\theta\theta} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_0) - \beta\tau \quad , \\ \sigma_{\theta z} &= 2\mu \epsilon_{\theta z} = 2\mu \epsilon_{z\theta} = 0 \quad , \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \epsilon_0 + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_0) - \beta\tau = (\lambda + 2\mu) \epsilon_0 + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) - \beta\tau \quad , \\ \sigma_{zr} &= 2\mu \epsilon_{zr} = 2\mu \epsilon_{rz} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde la dilatación e se define mediante la siguiente relación,

$$e = \epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad .$$

En las relaciones constitutivas anteriores, el primer subíndice indica el plano sobre el cual actúa el esfuerzo, y el segundo subíndice representa la dirección de la componente del esfuerzo.

Considerando el equilibrio de fuerzas actuando sobre un cuerpo en un sistema de coordenadas cilíndricas, la ecuación de equilibrio en la dirección radial es:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

Expresando la ecuación anterior en términos de la deformación, Ec. (2.4) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda + 2\mu) \epsilon_{rr} + \lambda (\epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_0) - \beta\tau \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2\mu \epsilon_{\theta r} \right] + \\ & \frac{1}{r} \left[(\lambda + 2\mu) \epsilon_{rr} + \lambda (\epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_0) - \beta\tau - (\lambda + 2\mu) \epsilon_{\theta\theta} - \lambda (\epsilon_{rr} + \epsilon_0) + \beta\tau \right] \\ & = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.7) \end{aligned}$$

O bien, en términos de los desplazamientos la Ec. (2.7) se puede escribir como,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \epsilon_0 \right) - \beta\tau \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{r} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \epsilon_0 \right) - (\lambda + 2\mu) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \epsilon_0 \right) \right] = \\ & \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.8) \end{aligned}$$

Después de ciertas simplificaciones algebraicas se tiene que

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \epsilon_0 \right) - \beta \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\
 & - \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2\mu}{r^2} u_r - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por otro lado, en el presente trabajo se consideró que al igual que las variaciones de densidad de corriente eléctrica y distribución de temperatura, el campo de las deformaciones o desplazamientos solo depende en primera aproximación, de la coordenada radial y del tiempo. Lo anterior permite suponer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 u_r &= u_r(r, \theta, t) \sim u_r(r, t), \\
 u_\theta &= u_\theta(r, \theta, t) \sim u_\theta(r, t) .
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

En consecuencia la Ec. (2.9) se puede reescribir como:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \lambda \frac{u_r}{r^2} - \beta \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2\mu}{r^2} u_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.11}$$

ó

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r^2} - \beta \frac{\partial \tau}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \tag{2.12}$$

Reconociendo que los primeros tres términos de la ecuación anterior se pueden reagrupar en uno solo, se tiene que

$$(\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} \right) \right] - \beta \frac{\partial \tau}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.13}$$

o bien,

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right] - \beta \frac{\partial \tau}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \quad (2.14)$$

2.2.2. Ecuaciones de Maxwell para la Propagación de Corriente

Reconociendo que el conductor es sometido a una corriente eléctrica alterna, lo anterior conlleva la formación de un campo eléctrico a lo largo del conductor y en general el fenómeno se puede describir con ayuda de las ecuaciones de Maxwell, que describen la propagación electromagnética:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \quad (2.15)$$

después se sustituyen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \gamma \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \quad , \end{aligned} \quad (2.16)$$

y queda:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aplicando el rotacional, derivada temporal, y haciendo uso de identidades, se obtiene la siguiente una ecuación de onda para obtener la parte eléctrica

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) . \quad (2.18)$$

Esta ecuación de onda se escribe en coordenadas cilíndricas de la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = \mu \left(\frac{\partial J_z}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right). \quad (2.19)$$

Usando la ley de Ohm $\vec{E} = \lambda \vec{J}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \lambda J_z}{\partial r} \right) = \mu \left(\frac{\partial J_z}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \lambda J_z}{\partial t^2} \right). \quad (2.20)$$

Se sustituye una onda del tipo $e^{i\omega t}$, y la densidad de corriente queda

$$J_z = J_S e^{i\omega t}, \quad (2.21)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$r = 0: \quad \frac{dJ_S}{dr} = 0 \quad (2.22)$$

$$r = R: \quad J_S = J_R,$$

donde

$$I = \int_S J_S \cdot dA. \quad (2.23)$$

2.2.3. Ecuaciones de Difusión de Calor para el Conductor

Para la parte térmica, se considera que el conductor eléctrico obedece la ecuación de difusión del calor en estado transitorio, tomando en cuenta la presencia del efecto Joule, término que se genera por el mismo paso de la corriente eléctrica. Además se considera únicamente las variaciones de temperatura en la coordenada radial. De esta manera la ecuación correspondiente con propiedades uniformes se reduce a la siguiente expresión:

$$k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda |J_s|^2 = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.24)$$

con condiciones de frontera e inicial

$$r = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$r = R; \quad -k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_\infty) \quad (2.25)$$

$$t = 0; \quad T = T_\infty .$$

CAPÍTULO 3

ADIMENSIONALIZACIÓN Y

MÉTODO DE SOLUCIÓN

CAPÍTULO 3
ADIMENSIONALIZACIÓN Y
MÉTODO DE SOLUCIÓN

3.1. ECUACIONES ADIMENSIONALES

3.1.1. Órdenes de Magnitud y Números Adimensionales.

Para el aumento de la temperatura característica, se tiene un balance de energía entre el término de generación de calor y el término transitorio:

$$\lambda J_R^2 \sim \rho c \frac{\Delta T_c}{t_c} \quad (3.1)$$

ó

$$k \frac{\Delta T_c}{R^2} \sim \lambda J_R^2, \quad \Delta T_c \sim \frac{\lambda R^2 J_R^2}{k} \quad (3.2)$$

por lo tanto,

$$k \frac{\Delta T_c}{R} \sim h \Delta T_c \Rightarrow h \sim \frac{k}{R}. \quad (3.3)$$

De la Ec. (3.2) y la Ec. (3.3) se tiene

$$\Delta T_c \sim \frac{\lambda R J_R^2}{h}. \quad (3.4)$$

Definiendo el número de Biot como:

$$Bi = \frac{hR}{k} . \quad (3.5)$$

Usando ahora la Ec. (3.1) y la Ec. (3.4) se tiene que el tiempo característico se puede expresar como,

$$t_c \sim \frac{\rho c \Delta T_c}{\lambda J_R^2} \sim \frac{\rho c}{\lambda J_R^2} \cdot \frac{\lambda J_R^2 R}{h} \sim \frac{\rho c R}{h} . \quad (3.6)$$

Con las escalas anteriores, se puede hacer uso de las siguientes variables adimensionales con objeto de simplificar el número de parámetros involucrados:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T_c}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{th}{\rho c R}, \quad \phi = \frac{J_S}{J_R} \quad (3.7)$$

$$\varphi = \frac{u_r}{u_R} \rightarrow u_r = u_R \varphi,$$

de esta manera, la Ec. (2.1) se puede escribir en términos de variables adimensionales, de la forma

$$\epsilon_{rr} = - \left(\frac{\partial u_{rr}}{\partial r} \right) = - \frac{\varphi_R}{R} u_R \simeq 0 . \quad (3.8)$$

3.1.2. Adimensionalización del Modelo Elástico combinado con la parte Eléctrica y Térmica

Sustituyendo las ecuaciones adimensionales en la Ec. (2.18), resulta

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{R^2} u_r - \frac{\beta \Delta T_c}{R} = \rho \frac{u_r}{\tau}, \quad (3.9)$$

de donde,

$$u_r \sim \frac{\beta \Delta T_c R}{(\lambda + 2\mu)}. \quad (3.10)$$

Considerando lo anterior, la Ec. (2.14) se puede reescribir como,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \varphi) \right) - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{Bi^2 \alpha^2}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}. \quad (3.11)$$

Haciendo

$$\alpha = \frac{\alpha^2 Bi^2}{R^2} \left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right), \quad (3.12)$$

la ecuación anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \varphi) \right] - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \quad (3.13)$$

y considerando que el problema es cuasi-estacionario para las deformaciones del cable, se tiene

$$\alpha \ll 1,$$

con lo que la Ec. (3.13) queda como

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \varphi) \right] = \frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \quad \theta = \theta(\eta, \tau) \quad (3.14)$$

sujeta a la condición de simetría

$$\eta = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad (3.15)$$

y para la condición de frontera en la pared, se tiene:

$$\nu = \frac{\epsilon_{\ell}}{\epsilon_{rr}} = \frac{(T/A)}{E}, \quad (3.16)$$

que representa la razón entre el alargamiento longitudinal producido, dividido por el acotamiento de una longitud situada en un plano perpendicular a la dirección de la carga aplicada.

Sustituyendo la Ec. (3.16) en la Ec. (3.8), esta última se puede expresar como,

$$\left. \frac{\partial u_r}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{(T/A)}{E\nu} = \frac{T}{A(E\nu)}, \quad (3.17)$$

que en variables adimensionales se expresa con ayuda de la siguiente expresión,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \frac{RT}{A(\nu E)u_r} = \frac{2\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)RT}{A(\nu E)\beta R \Delta T_c} = \frac{2\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)}{A(\nu E)\beta} \frac{Tk}{\lambda_{elect} J_R^2 R^2} = \beta, \quad (3.18)$$

con lo que la condición de frontera en la pared queda expresada de la forma

$$\eta=1 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \beta, \quad (3.19)$$

en donde el parámetro $\tilde{\beta}$, representa la relación entre los parámetros eléctricos, térmicos y mecánicos.

Para el esfuerzo cortante, se tiene

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} - \beta(T - T_\infty), \quad (3.20)$$

que adimensionalizado queda

$$\sigma_{rr} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{R} u_r \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\lambda u_r}{R} \frac{\varphi}{\eta} - \beta \Delta T_c \theta, \quad (3.21)$$

y despejando se tiene Δ , que representa el esfuerzo cortante adimensionalizado

$$\left[\frac{\sigma_{rr}}{(\lambda + 2\mu) u_r} \right] = \Delta = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\frac{\lambda u_r}{R}}{\frac{\lambda + 2\mu}{R} u_r} \frac{\varphi}{\eta} - \frac{\beta \Delta T_c}{\frac{\lambda + 2\mu}{R} u_r} \theta, \quad (3.22)$$

que en forma simplificada queda

$$\Delta = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \bar{\alpha} \frac{\varphi}{\eta} - \theta. \quad (3.23)$$

Para adimensionalizar la parte eléctrica, se hace una separación de variables, se aplican derivadas temporales, se reagrupan términos, y con los números adimensionales, se tiene

$$\varepsilon^2 \left[\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d\phi}{d\eta} \right] = 2i\phi, \quad (3.24)$$

con las condiciones de frontera

$$\eta = 0; \quad \frac{d\phi}{d\eta} = 0 \tag{3.25}$$

$$\eta = 1; \quad \phi = 1.$$

En la Ec. (3.24), el parámetro pelicular ε , es definido como $\varepsilon = (\delta/R)^2 = 2\lambda/\omega\mu R^2$. Para valores grandes de la frecuencia ω , el valor del parámetro pelicular es pequeño, y por lo tanto, se puede aplicar la teoría de la capa límite porque la derivada mayor de la Ec. (3.24) está multiplicada por este parámetro. Y con esto se asume que existe una capa límite eléctrica cercana a la superficie del conductor, en donde es más significativa la contribución de la densidad de corriente.

Introduciendo el siguiente cambio de variable

$$\xi = \frac{1-\eta}{\varepsilon^{1/2}}, \tag{3.26}$$

y proponiendo

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_{1+...} \tag{3.27}$$

se obtiene la siguiente aproximación del orden cero, que deja el siguiente sistema

$$\frac{d^2\phi_0}{d\xi^2} = 2i\phi_0, \tag{3.28}$$

$$\xi = 0: \quad \phi_0 = 1,$$

$$\xi \rightarrow \infty: \quad \frac{d\phi_0}{d\xi} = 0,$$

cuya solución es

$$\phi_0 = e^{-\xi} [\cos(\xi) - i \operatorname{sen}(\xi)] \quad (3.29)$$

$$|\phi_0| = e^{-\xi} = e^{(\eta-1/\varepsilon)}.$$

Para la adimensionalización de la parte térmica se usan variables adimensionales y se sustituyen en la Ec. (2.24), para obtener

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{\lambda J_R^2 R^2 k Bi}{k \lambda J_R^2 R^2} \phi^2 = \frac{Rh}{k} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (3.30)$$

y sustituyendo la Ec. (3.29) en (3.30), se obtiene

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + Bi e^{-2(1-\eta/\varepsilon)} = Bi \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (3.31)$$

con condiciones de frontera

$$\eta = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta},$$

$$\eta = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -Bi\theta, \quad (3.32)$$

$$\tau = 0 \quad ; \quad \theta = 0.$$

Las tablas 1 y 2 muestran las propiedades físicas de los dos metales que conforman al conductor ACSR. Tanto las propiedades eléctricas como térmicas son constantes [1, 4], Gere, [53], Incropera et al, [54].

$\lambda = 115.385 [GPa]$	$\mu = 153.846 [GPa]$	$\beta = 0.00719 [GPa]$	$E = 200 [GPa]$	$\nu = 0.3$
$\lambda_{elect} = 20 \times 10^{-8} \left[\frac{W \cdot m}{A^2} \right]$	$J_R = 60 \times 10^6 \left[\frac{A}{m^2} \right]$	$A = 0.084 \times 10^{-3} [m^2]$	$R = 5.182 \times 10^{-3} [m]$	
$k = 15.1 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$	$T_1 = 10 [kN]$	$T_2 = 20 [kN]$	$T_3 = 30 [kN]$	

TABLA 1. PROPIEDADES FÍSICAS DEL ACERO

$\lambda = 51.084 [GPa]$	$\mu = 52.632 [GPa]$	$\beta = 0.0062 [GPa]$	$E = 70 [GPa]$	$\nu = 0.33$
$\lambda_{elect} = 2.63 \times 10^{-8} \left[\frac{W \cdot m}{A^2} \right]$	$J_R = 60 \times 10^6 \left[\frac{A}{m^2} \right]$	$A = 0.622 \times 10^{-3} [m^2]$	$R = 14.072 \times 10^{-3} [m]$	
$k = 237 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$	$T_1 = 10 [kN]$	$T_2 = 20 [kN]$	$T_3 = 30 [kN]$	

TABLA 2. PROPIEDADES FÍSICAS DEL ALUMINIO

3.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS.

3.2.1. Método de Diferencias Finitas y Método de Crank-Nicolson.

El método de diferencias finitas es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El primer paso para la aplicación del método consiste en discretizar la ecuación a resolver, las condiciones de frontera y la condición inicial, con el fin de transformar la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

El método de Crank-Nicolson, conserva el lado izquierdo de la ecuación implícita, pero modifica el lado derecho tomando la media aritmética de los lados de la derecha de la ecuación explícita e implícita.

3.2.2. Discretización de las Ecuaciones y Condiciones de Frontera. La aproximación de diferencias finitas de la ecuación de difusión, Ec. (3.31) con el método de Crank-Nicolson se convierte en

$$\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\theta_{i-1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1}}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{\Delta\eta i} \left(\frac{\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1}}{2\Delta\eta} \right) + q_i^{n+1} \right] + \left[\frac{\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i+1}^n}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{\Delta\eta i} \left(\frac{\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n}{2\Delta\eta} \right) + q_i^n \right] \right\} = \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta\tau}, \quad (3.33)$$

multiplicando por $2\Delta\eta^2$

$$\left\{ \left[\theta_{i-1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1} + \frac{1}{2i} (\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1}) + q_i^{n+1} \Delta\eta^2 \right] + \left[\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i+1}^n + \frac{1}{2i} (\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n) + q_i^n \Delta\eta^2 \right] \right\} = \frac{2\Delta\eta^2}{\Delta\tau} (\theta_i^{n+1} - \theta_i^n), \quad (3.34)$$

por expansión en serie de Taylor alrededor del nodo (i, n) , se puede demostrar que el método de Crank-Nicolson es de segundo orden, tanto para espacio como para tiempo, esto es $O\left[(\Delta t)^2, (\Delta \eta)^2\right]$.

El lado derecho de la Ec. (3.34) es la media aritmética de las expresiones centrales para la segunda derivada $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$ sobre el nodo i en pasos de tiempo $n+1$ y n . Tal promedio se puede considerar como una estimación de la segunda derivada en el nodo i en el tiempo $n + \frac{1}{2}$ ilustrado como el nodo A en la Fig. 3.2.1. Entonces el lado izquierdo de la Ec. (3.34) puede ser considerado como una representación de $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$ sobre el punto A.

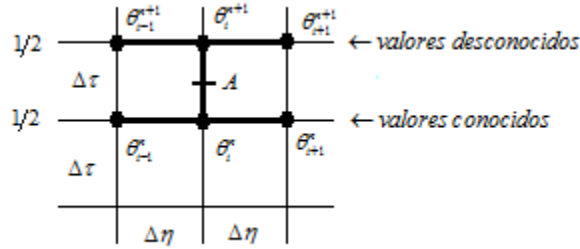


FIGURA 3.2.1. NODOS PARA DIFERENCIAS FINITAS POR EL MÉTODO DE CRANK-NICOLSON.

haciendo $r = \frac{2\Delta \eta^2}{\Delta \tau}$ y agrupando términos semejantes, la Ec. (3.34) queda

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \theta_{i-1}^{n+1} + (-2 - r) \theta_i^{n+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \theta_{i+1}^{n+1} + q_i^{n+1} \Delta \eta^2 + \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \theta_{i-1}^n + (-2 + r) \theta_i^n + \\ & \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \theta_{i+1}^n + q_i^n \Delta \eta^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.35}$$

ordenando términos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2i}\right)\theta_{i-1}^{n+1} + (-2-r)\theta_i^{n+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right)\theta_{i+1}^{n+1} = & -\left(1 - \frac{1}{2i}\right)\theta_{i-1}^n - (-2+r)\theta_i^n \\ & -\left(1 + \frac{1}{2i}\right)\theta_{i+1}^n - 2q_i^n \Delta\eta^2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

la aproximación en diferencias finitas para las condiciones de frontera de la Ec. (3.32) sobre los nodos $i=0$ y $i=M$ es

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0 \quad \frac{\theta_1^n - \theta_0^n}{\Delta\eta} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = -Bi\theta \quad \frac{\theta_M^n - \theta_{M-1}^n}{\Delta\eta} = -Bi\theta_M^n \Rightarrow (1 + Bi\Delta\eta)\theta_M^n - \theta_{M-1}^n = 0$$

Para la Ecuación de la deformación, Ec. (3.14), se tiene que la discretización queda

$$\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{i\Delta\eta} \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta\eta} \right) - \frac{\varphi_i}{(i\Delta\eta^2)} = \theta_M, \quad (3.38)$$

multiplicando por $\Delta\eta^2$

$$\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1} + \frac{1}{2i}(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) - \frac{1}{i}\varphi_i = \theta_M, \quad (3.39)$$

agrupando términos semejantes y simplificando, la Ec. (3.39) queda

$$\left(1 - \frac{1}{2i}\right)\varphi_{i-1} + \left(-2 - \frac{1}{i^2}\right)\varphi_i + \left(1 + \frac{1}{2i}\right)\varphi_{i+1} = \frac{\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n}{2\Delta\eta}, \quad (3.40)$$

con las condiciones de frontera de la Ec. (3.15) y de la Ec. (3.19)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta \eta}$$

(3.41)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \beta \quad \frac{\varphi_M - \varphi_{M-1}}{\Delta \eta} = \beta \Rightarrow \varphi_M - \varphi_{M-1} = \beta \Delta \eta$$

3.2.3. Algoritmo de Thomas.

En el caso de un sistema tridiagonal de ecuaciones algebraicas, como la encontrada en la solución de problemas de conducción de calor unidimensionales, el método de eliminación de Gauss puede además ser simplificado aprovechando los ceros de la matriz de coeficientes tridiagonal. Este procedimiento modificado, generalmente denominado Algoritmo de Thomas, es un método muy eficiente para resolver un gran número de estas ecuaciones, Özişik, [55].

El método a seguir es el siguiente: Se tiene un sistema de N ecuaciones algebraicas y se considera la matriz de coeficientes tridiagonal dada por la ecuación

$$T_1 = \frac{(d_1 - a_{13}T_3 - a_{12}T_2)}{a_{11}}.$$

(3.42)

Para resolver el sistema de ecuaciones, la matriz de coeficientes se pone en la diagonal principal, y los demás elementos se ocupan con ceros:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

La primera ecuación se toma como el pivote, multiplicado por $\frac{a_2}{b_1}$ y restada de la segunda ecuación para eliminar a_2 . El resultado de la segunda ecuación es equivalente a

$$\text{reemplazar } b_2 \text{ por } \left(b_2 - \frac{a_2}{b_1} c_1 \right) \text{ y reemplazar } d_2 \text{ por } \left(d_2 - \frac{a_2}{b_1} d_1 \right)$$

La segunda ecuación modificada se escoge como el pivote, y se toma una propuesta similar para eliminar a_3 . El resultado de la tercera ecuación es equivalente a

$$\text{reemplazar } b_3 \text{ por } \left(b_3 - \frac{a_3}{b_2} c_2 \right) \text{ y reemplazar } d_3 \text{ por } \left(d_3 - \frac{a_3}{b_2} d_2 \right)$$

El procedimiento se repite hasta que se elimina a_N de la última ecuación. Por lo tanto, el procedimiento general para la diagonal principal de la matriz se indica como:

$$\text{Reemplazar } b_i \text{ por } \left(b_i - \frac{a_i}{b_{i-1}} c_{i-1} \right) \text{ para } i = 2, 3, \dots, N$$

$$\text{Reemplazar } d_i \text{ por } \left(d_i - \frac{a_i}{b_{i-1}} d_{i-1} \right) \text{ para } i = 2, 3, \dots, N$$

Las incógnitas T_i son determinadas por

$$T_N = \frac{d_N}{b_N},$$

$$T_i = \frac{d_i - c_i T_{i+1}}{b_i}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 1$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

Los resultados obtenidos a partir del modelo matemático, son los campos de temperatura y deformación. Tanto la temperatura como la deformación, están en términos de la coordenada radial adimensional, η , el número de Biot, Bi , el parámetro pelicular, ε y $\tilde{\beta}$ que es un parámetro sensible a los efectos elásticos, electromagnéticos y térmicos.

4.1. TEMPERATURA

De la Fig. 4.1.1. a la Fig. 4.1.5 se muestran los resultados de la temperatura, los cuales comienzan en el valor cero, lo que significa que se tiene la temperatura ambiente como punto de partida de las tres gráficas. Se escogieron valores del número de Biot, Bi y del parámetro pelicular, ε fijos, y tres valores diferentes del tiempo adimensional τ , que fueron: 5, 50 y para el estado estacionario con un valor de $\tau = 500$.

El efecto del tiempo adimensional se ve reflejado en el aumento de la temperatura adimensional al aumentar el tiempo hasta el punto en que éste tiende al estado estacionario.

La influencia del número de Biot, Bi , se muestra en un aumento de temperatura con la disminución de éste. Mientras que el parámetro pelicular, ε muestra la influencia del efecto pelicular al observarse que conforme el parámetro pelicular disminuye la temperatura disminuye significativamente, lo que se puede expresar como una distribución de las temperaturas hacia las paredes del conductor.

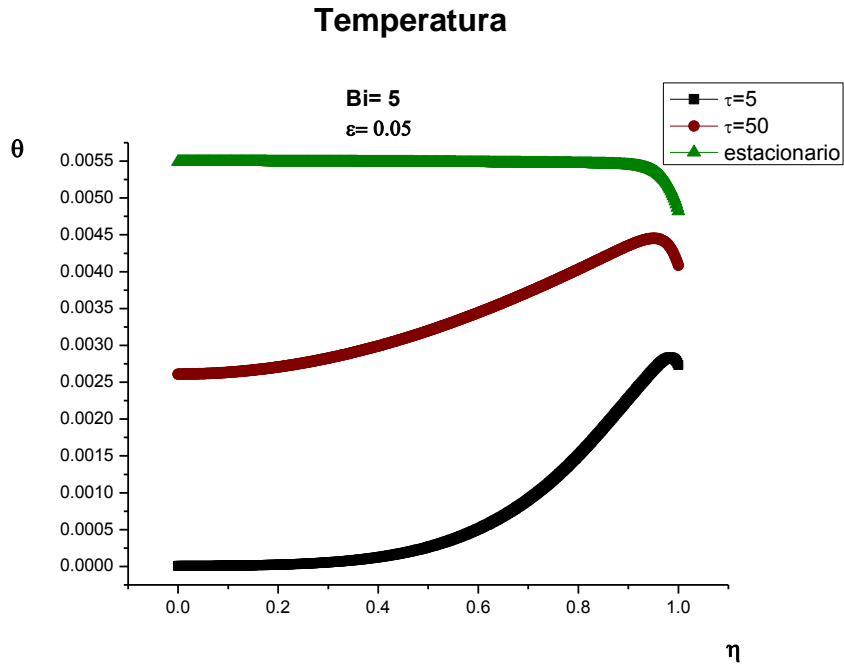


FIGURA 4.1.1. PERFIL DE TEMPERATURA θ , PARA DIFERENTES VALORES DE τ , Y $Bi = 5$ Y $\varepsilon = 0.05$.

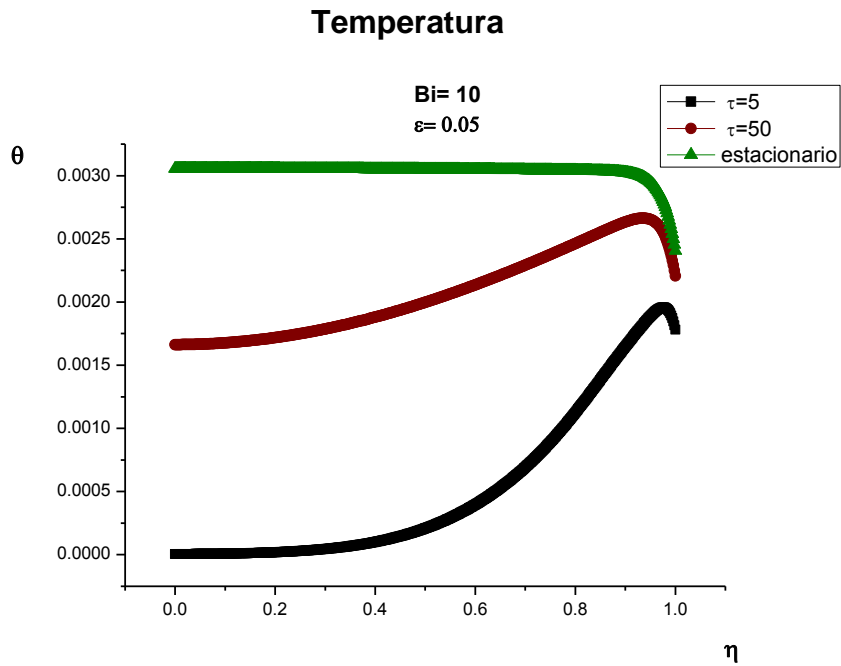


FIGURA 4.1.2. PERFIL DE TEMPERATURA θ , PARA DIFERENTES VALORES DE τ , Y $Bi=10$ Y $\varepsilon=0.05$.

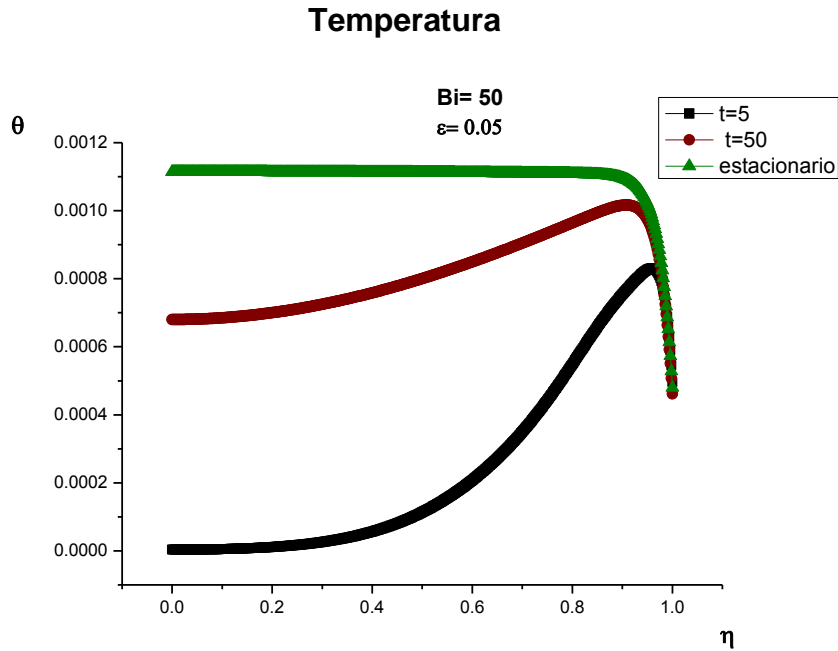


FIGURA 4.1.3. PERFIL DE TEMPERATURA θ , PARA DIFERENTES VALORES DE τ , Y $Bi=50$ Y $\varepsilon=0.05$.

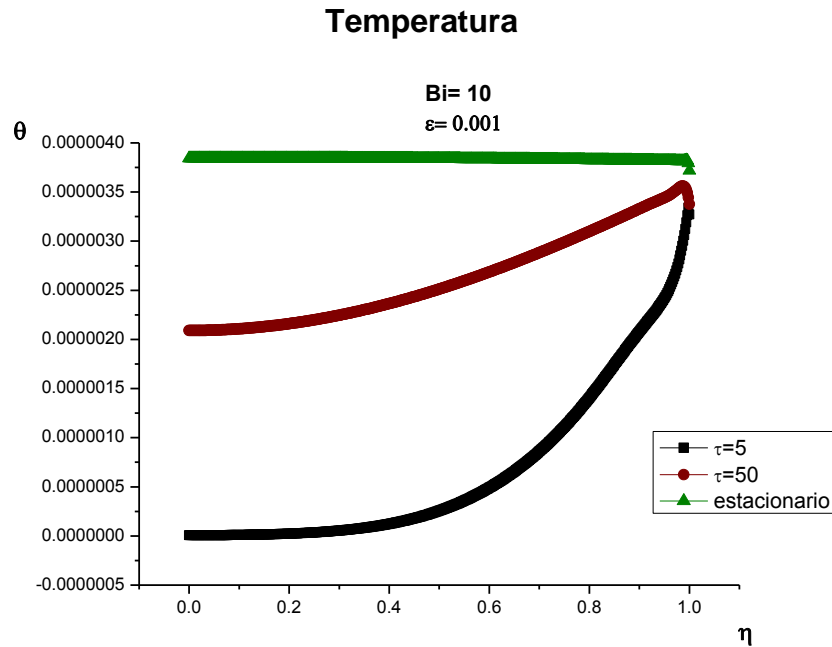


FIGURA 4.1.4. PERFIL DE TEMPERATURA θ , PARA DIFERENTES VALORES DE τ , Y $Bi=10$ Y $\varepsilon=0.001$.

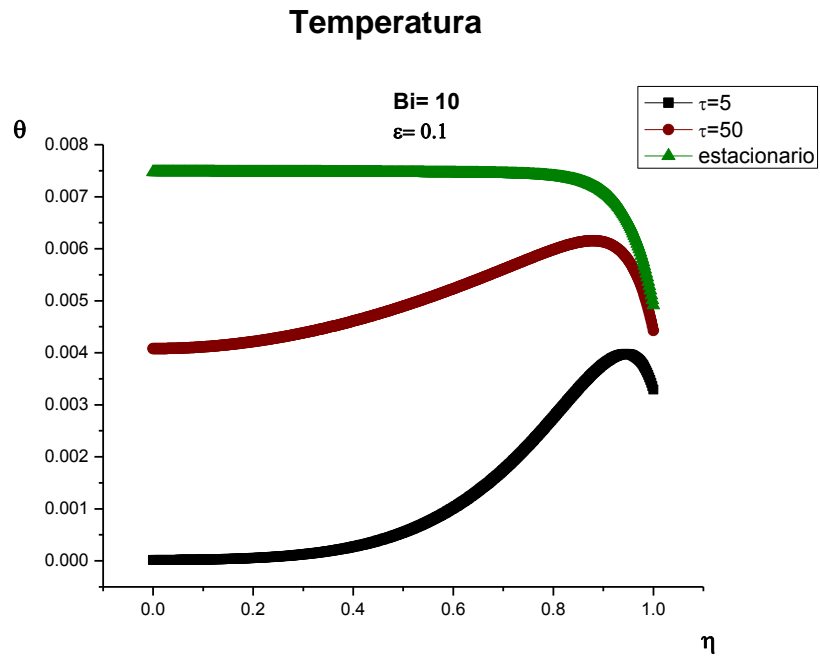


FIGURA 4.1.5. PERFIL DE TEMPERATURA θ , PARA DIFERENTES VALORES DE τ , Y $Bi=10$ Y $\varepsilon=0.1$.

4.2. DEFORMACIÓN Y ESFUERZO CORTANTE EN EL ACERO

4.2.1. Deformación

En las gráficas presentadas a continuación, (Fig. 4.2.1 – Fig. 4.2.3) se muestra el efecto de la deformación a través del tiempo.

En la Fig. 4.2.1 se tienen valores del número de Biot, Bi y del parámetro pelicular, ε fijos, y se varía el parámetro $\tilde{\beta}$, el cual produce en la deformación un aumento conforme se avanza en la coordenada radial. Así mismo se puede observar que para un $\tilde{\beta}$ mayor, los rangos de deformación también son mayores.

La Fig. 4.2.2 muestra los perfiles de deformación con valores del parámetro $\tilde{\beta}$ y el parámetro pelicular, ε fijos, y el número de Biot es el variable. En dicha gráfica se muestra el mismo comportamiento que es el de un aumento en la deformación a lo largo de la coordenada radial, pero para diferentes valores del número de Biot, Bi la variación es muy pequeña.

Para la Fig. 4.2.3 se tiene que la influencia del parámetro pelicular, ε es similar a la producida por el número de Biot, Bi , la variación es mínima, pero la deformación tiende a aumentar conforme se avanza en la coordenada radial. Los parámetros a variar en esta gráfica son el número de Biot, Bi y el parámetro $\tilde{\beta}$.

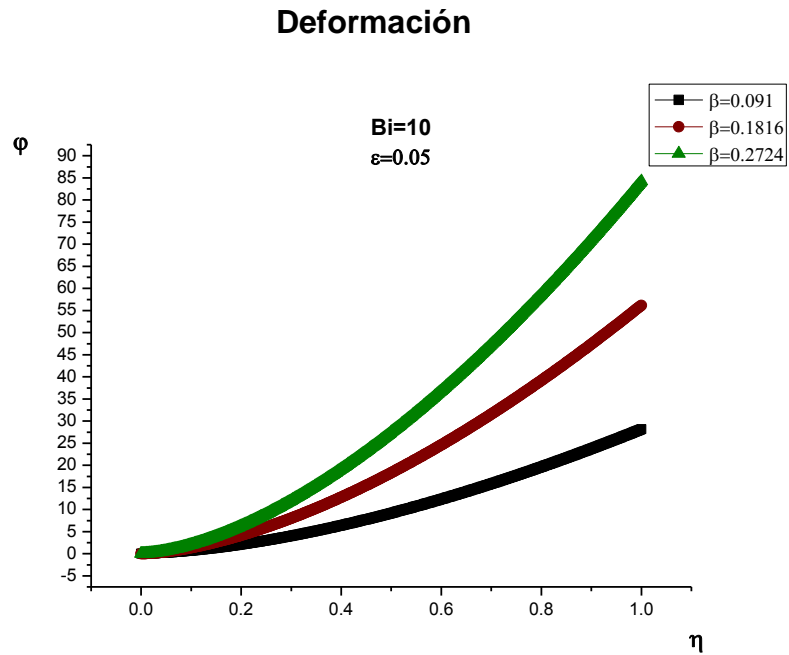


FIGURA 4.2.1. DEFORMACIÓN ϕ , PARA DIFERENTES VALORES DE β , Y $Bi=10$ Y $\epsilon=0.05$.

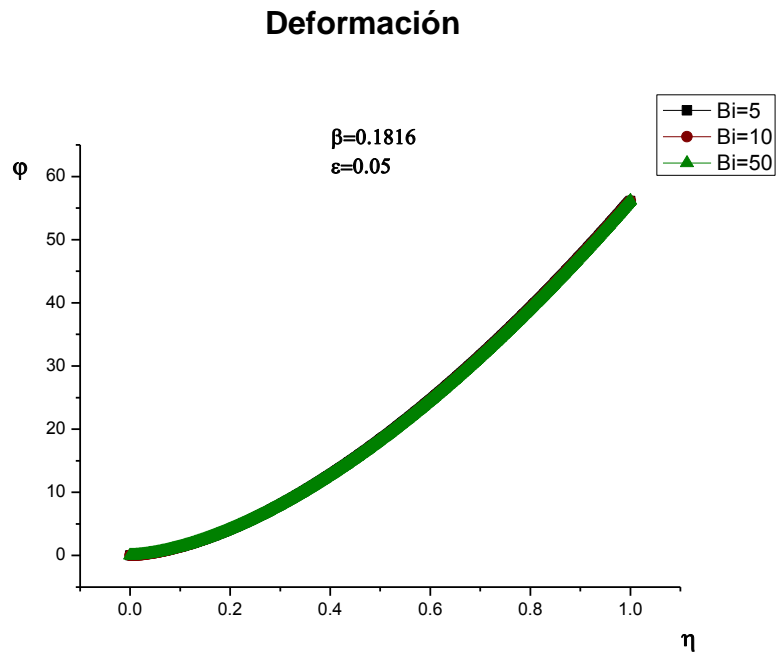


FIGURA 4.2.2. DEFORMACIÓN ϕ , PARA DIFERENTES VALORES DE Bi , Y $\beta=0.1816$ Y $\epsilon=0.05$.

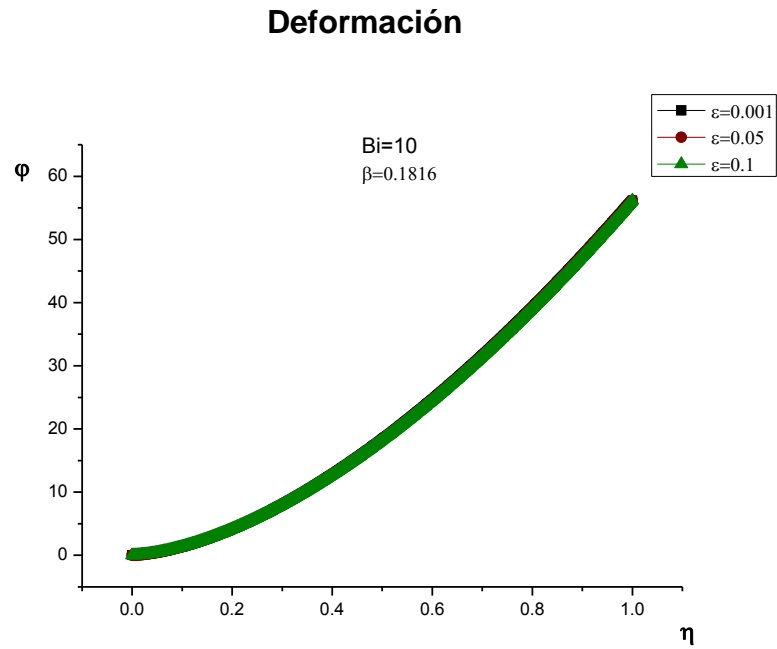


FIGURA 4.2.3. DEFORMACIÓN φ , PARA DIFERENTES VALORES DE ϵ , Y $Bi=10$ Y $\beta=0.1816$.

4.2.2. Esfuerzo Cortante

En la Fig. 4.2.4 se tiene la influencia del esfuerzo cortante a lo largo de la coordenada radial, manteniendo fijos el número de Biot y el parámetro pelicular y variando el parámetro $\tilde{\beta}$. Lo que se puede observar es que el esfuerzo cortante adimensional, Δ tiende a crecer conforme aumenta la coordenada radial adimensional, η , y para los diferentes valores del parámetro $\tilde{\beta}$ se tiene un incremento al incrementar este parámetro.

Cuando los parámetros a variar son el número de Biot, Bi y el parámetro pelicular, ε , como lo muestran la Fig. 4.2.5 y la Fig. 4.2.6, el efecto que se produce en el esfuerzo cortante es la tendencia a crecer, sin embargo entre un valor de los parámetros variables, la diferencia entre una curva y otra es casi nula.

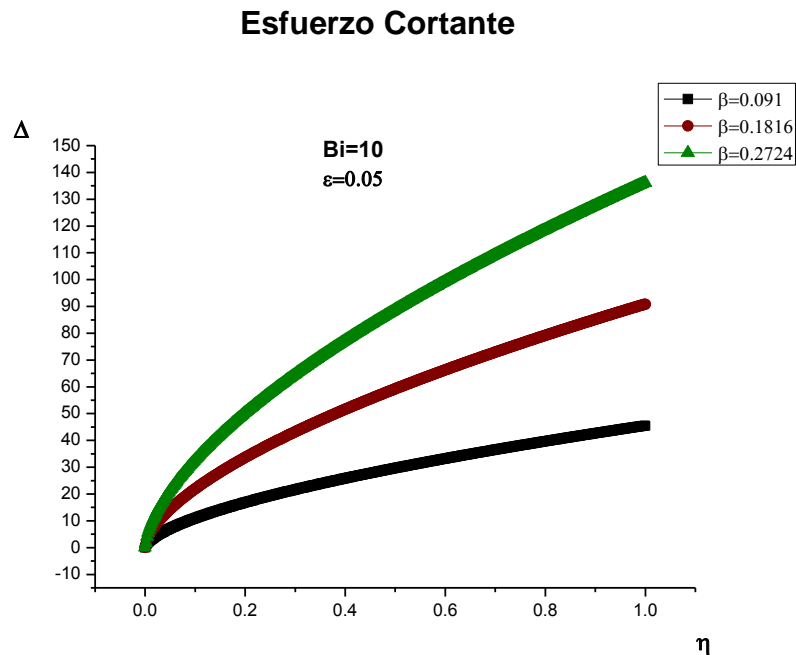


FIGURA 4.2.4. ESFUERZO CORTANTE Δ , PARA DIFERENTES VALORES DE β , Y $Bi=10$ Y $\varepsilon=0.05$.

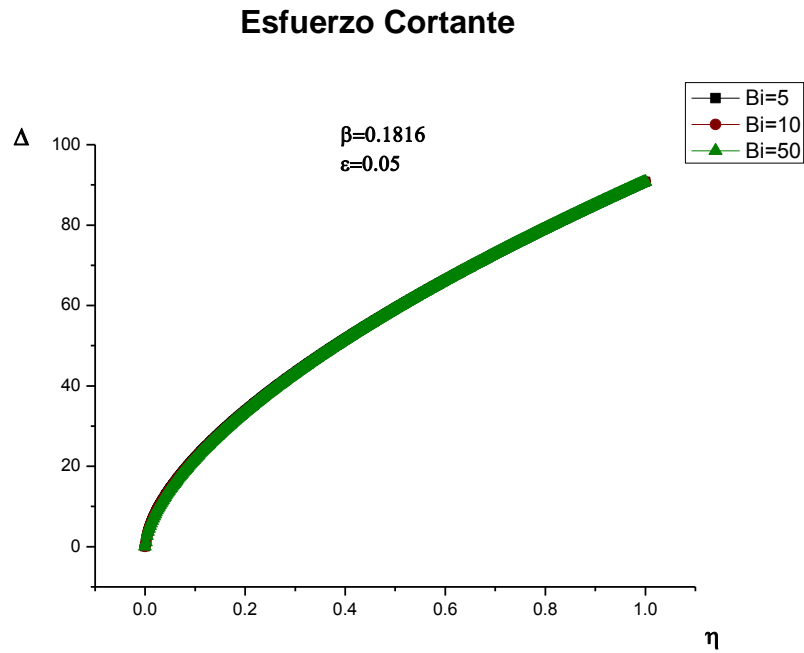


FIGURA 4.2.5. ESFUERZO CORTANTE Δ , PARA DIFERENTES VALORES DE Bi , Y $\beta=0.1816$ Y $\varepsilon=0.05$.

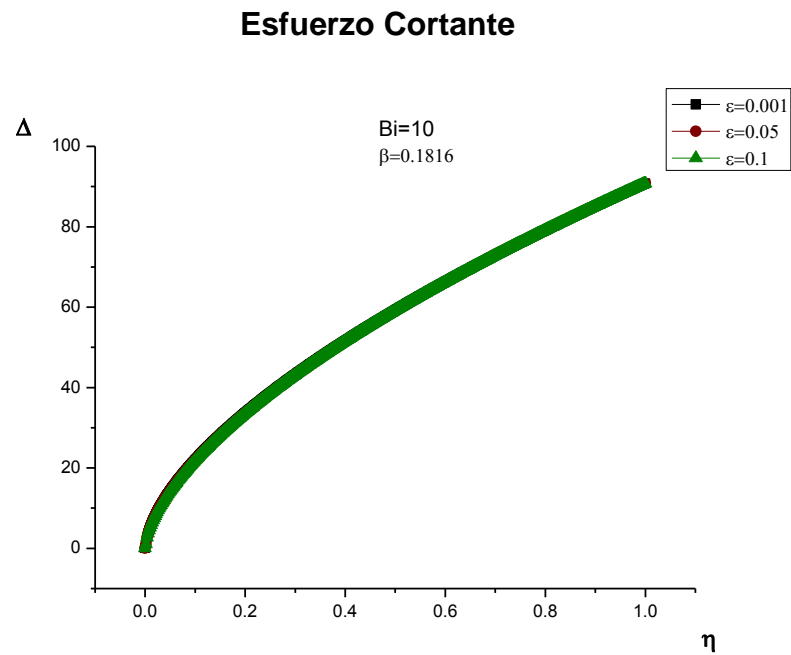


FIGURA 4.2.6. ESFUERZO CORTANTE Δ , PARA DIFERENTES VALORES DE ε , Y $Bi=10$ Y $\beta=0.1816$.

4.3. DEFORMACIÓN Y ESFUERZO CORTANTE EN EL ALUMINIO

4.3.1. Deformación

El comportamiento del aluminio es similar al del acero. Para variaciones del parámetro $\tilde{\beta}$ (Fig. 4.3.1) se tienen variaciones en la deformación, la cual se incrementa conforme se avanza en la coordenada radial. Y cuando se varían el número de Biot, Bi y el parámetro pelicular, ε (Fig. 4.3.2 y Fig. 4.3.3), la tendencia al crecimiento se mantiene, pero con una variación mínima.

La diferencia entre el acero y el aluminio radica en que los valores de deformación en el aluminio son mayores.

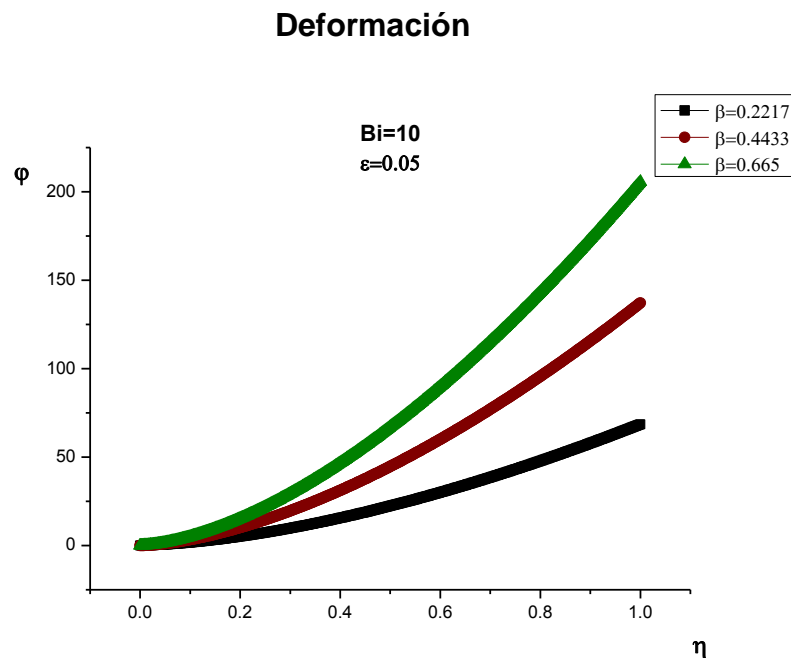


FIGURA 4.3.1. DEFORMACIÓN φ , PARA DIFERENTES VALORES DE β , Y $Bi=10$ Y $\varepsilon=0.05$.

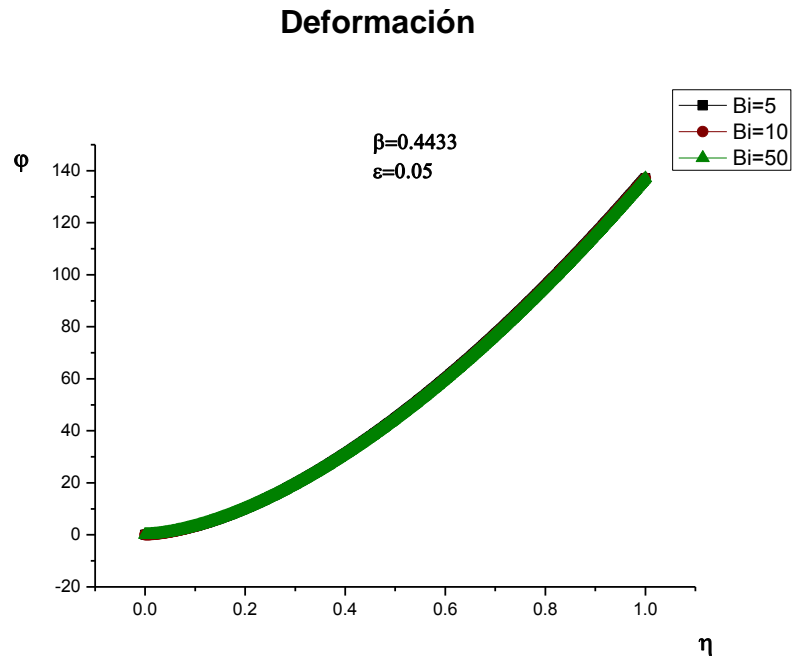


FIGURA 4.3.2. DEFORMACIÓN ϕ , PARA DIFERENTES VALORES DE Bi , Y $\beta=0.4433$ Y $\epsilon=0.05$.

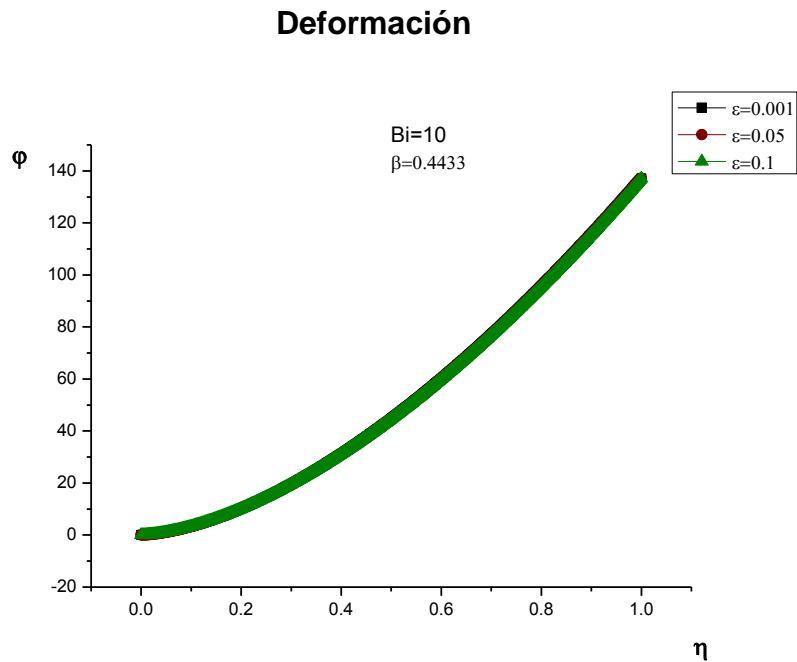


FIGURA 4.3.3. DEFORMACIÓN ϕ , PARA DIFERENTES VALORES DE ϵ , Y $Bi=10$ Y $\beta=0.4433$.

4.3.2. Esfuerzo Cortante

Con el esfuerzo cortante en el aluminio sucede algo similar a la deformación comparada con el acero. Los valores alcanzados en el aluminio superan a los del acero para los mismos valores de la coordenada radial adimensional. Y la única variación se presenta en los diferentes valores del parámetro $\tilde{\beta}$ manteniendo fijos el número de Biot, Bi y el parámetro pelicular, ε (Fig. 4.3.4). Mientras que en las gráficas donde se varía el número de biot, Bi y el parámetro pelicular, ε (Fig. 4.3.5 y Fig. 4.3.6) no hay una gran variación en los valores entre una curva y otra, manteniéndose el comportamiento de crecimiento en el esfuerzo cortante a lo largo de la coordenada radial, η .

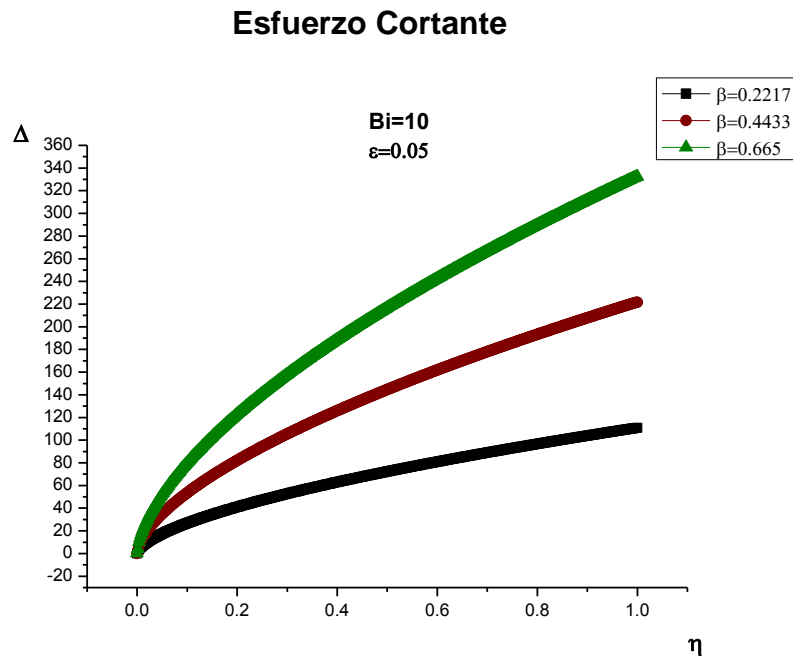


FIGURA 4.3.4. ESFUERZO CORTANTE Δ , PARA DIFERENTES VALORES DE β , Y $Bi=10$ Y $\varepsilon=0.05$.

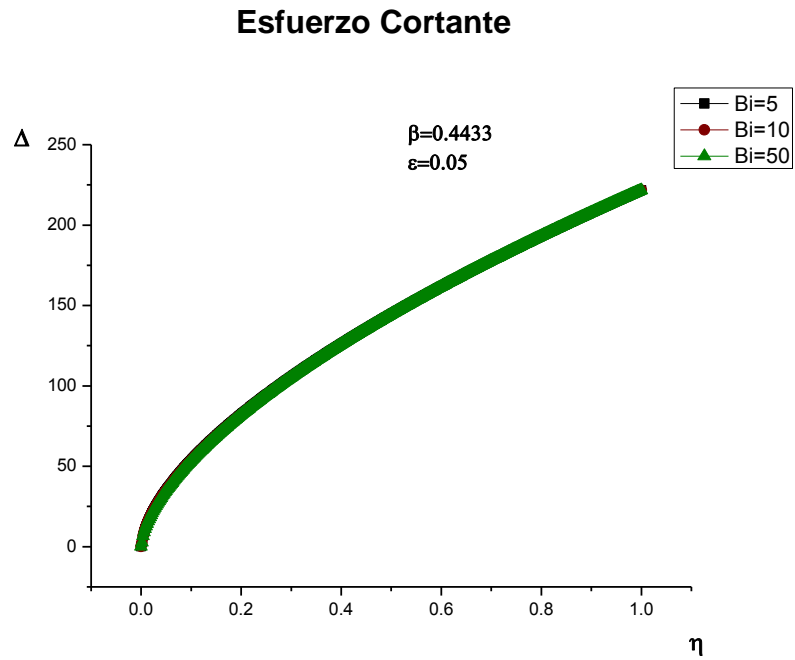


FIGURA 4.3.5. ESFUERZO CORTANTE Δ , PARA DIFERENTES VALORES DE Bi , Y $\beta=0.4433$ Y $\varepsilon=0.05$.

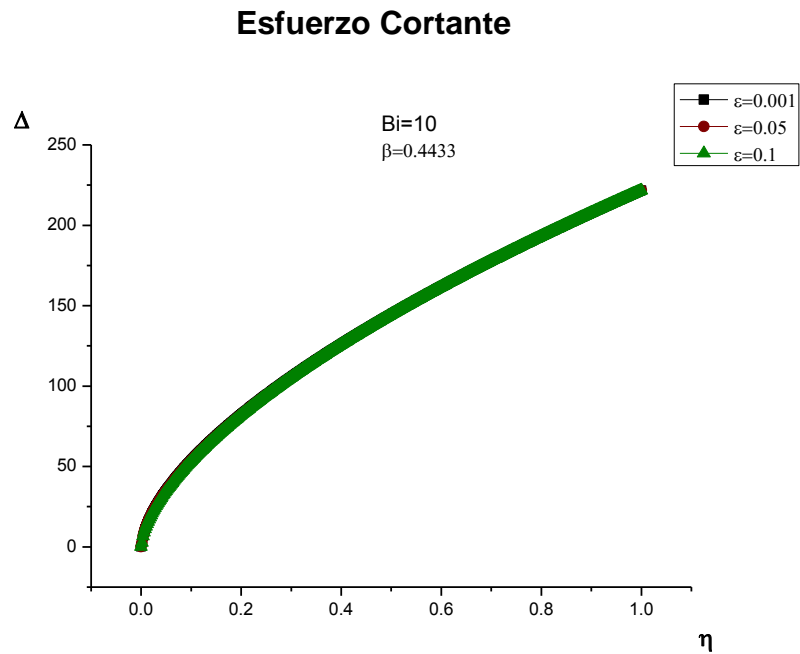


FIGURA 4.3-6. ESFUERZO CORTANTE Δ , PARA DIFERENTES VALORES DE ε , Y $Bi=10$ Y $\beta =0.4433$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En los resultados obtenidos mediante las gráficas se puede observar que para la temperatura adimensional, el comportamiento de ésta va evolucionando a lo largo del tiempo, y empieza de un valor inicial cero que representa la temperatura ambiente y va aumentando al inducirle una corriente eléctrica con lo que el calor se empieza a propagar hasta llegar a una cierta temperatura, y posteriormente ésta se vuelve mayor en las paredes del conductor.

La temperatura presenta variaciones al cambiar los diferentes parámetros, para números de Biot variables se tiene que la temperatura va cambiando, presentándose un valor máximo para valores del número de Biot, Bi menores, al igual que con la disminución del valor del parámetro pelicular, ε , los rangos de temperatura disminuyen.

El aumento en la temperatura produce una dilatación en el conductor, lo que por sí solo tiene como consecuencia una deformación del material, y al aplicar la tensión mecánica, se tiene que la deformación aumenta.

Se pudo observar que de los parámetros variables de la ecuación de la deformación, el más sensible es el parámetro $\tilde{\beta}$ ya que la deformación varía notablemente cuando se varía éste, situación que no se presenta cuando son el número de Biot, y el parámetro pelicular, ε ambient. Es importante destacar que este resultado es importante debido a que es éste el parámetro que involucra términos mecánicos, eléctricos y térmicos.

Al tener un aumento en la deformación del material, se puede considerar que al conductor desde un inicio se le pueden reducir las medidas, y tensionarlo para así obtener los mismos resultados, pero con menos material.

El poder tener un ahorro en material, trae como consecuencia un ahorro económico, así como menos repercusiones al medio ambiente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Morgan, Vincent T. *Effects of Alternating and Direct Current, Power Frequency, Temperature, and Tension on the Electrical Parameters of ACSR Conductors*. IEEE Transactions on Power Delivery; 18(2003): 859-866.

[2] Barka, Ali, Bernard, Jean Joseph, Benyoucef, Boumédiène. *Thermal behavior of a conductor submitted to skin effect*. Applied Thermal Engineering; 23(2003): 1261-1274

[3] Morgan, V.T. *The Effect of Frequency on the Resistance and Internal Inductance of Bare ACSR Conductors*. IEEE Transactions on Power Delivery; 6(1991): 1319-1326

[4] Žunec, Miro, Tičar, Igor, Jakl, Franc. *Determination of Current and Temperature Distribution in Overhead Conductors by Using Electromagnetic-Field Analysis Tool*. IEEE Transactions on Power Delivery; 21(2006): 1524-1529

[5] Nowacki, Witold. *Dynamic Problems of Thermoelasticity*. Polish Scientific Publishers, Polonia, 1975

[6] Duhamel, J. M. C. *Second mémoire sur les phénomènes thermomécaniques*. J. de l'Ecole Polytech; 15(1873): 1-15

[7] Voigt, W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, 1910

[8] Jeffreys, H. *The thermodynamics of an elastic solid*. Proc. Camb. Phil. Soc.; 26(1930)

- [9] Todhunter, I., Pearson, K. *A history of the elasticity and strength of materials*. Vol. 2, 1893, Cambridge Press
- [10] Belgen, M.H. *Structural stress measurements with an infrared radiometer*. ISA Trans; 6(1967): 49-53
- [11] Stanley, P., Chan, W. K. *Quantitative Stress Analysis by Means of the Thermoelastic Effect*. Journal of Strain Analysis; 20(1985): 129-137
- [12] Double, E. W. W. *Distribution of Tensile Load in Relation to Temperature and Sag of Steel-Cored Aluminium Conductors*. IEE; 92(1945): 345-361
- [13] Morgan, Vincent T., Price, C. F. *Magnetic Properties in Axial 50 Hz Fields of Steel Core Wire for Overhead-Line Conductors*. IEE; 116(1969): 1681-1694
- [14] Villari, E. *Über die Änderungen des Magnetischen Moments, welche der Zug und das Hindurchleiten eines Galvanischen Stroms in einem Stabe von Stahl oder Eisen Hervorbringen*. Annal. Phys. **U**. Chem.; 126(1865): 87-122
- [15] Matsch, L. W., Lewis, W. A. *The Magnetic Properties of ACSR Core Wire*. AIEE; 77(1959): 1178-1189
- [16] Riaz, H. *Magnetic Properties of ACSR Core Wire over an Extended Temperature Range*. Electrical and Electronics Conf., Toronto, 26-28 Sept 1983, pp. 682-685
- [17] Barret, J. S., Nigol, O., Fehervari, C. J., Findlay, R. D. *A new Model of AC Resistance in ACSR Conductors*. IEEE Transactions on Power Delivery; PWRD-1(1945): 198-208

- [18] Bozorth, R. M., Williams, H. J. *Effect of Small Stresses on Magnetic Properties*. Reviews of Modern Physics; 17(1945): 72-80
- [19] Morgan, Vincent T., Zhang, Bo, Findlay, Raymond D. *Effects of Temperature and Tensile Stress on the Magnetic Properties of a Steel Core from an ACSR Conductor*. IEEE Transactions on Power Delivery; 11(1996): 1907-1913.
- [20] Danilouskaya, V. *Thermal Stresses in elastic half-space due sudden heating of its boundary*. Prinkl. Mat. Mekh; 14(1950): 316-321
- [21] Lord, H. W., Shulman, Y. *A generalized dynamical theory of thermoelasticity*. Journal of Mechanics Physics Solids; 15(1967): 299-309
- [22] Othman, M. I. A. *Lord-Shulman theory under the dependence of the modulus of elasticity on the reference temperature in two-dimensional generalized thermoelasticity*. Journal of Thermal Stresses; 25(2002): 1027-1045
- [23] Green, A. E., Lindsay, K. A. *Thermoelasticity*. Journal of Elasticity; 2(1972): 1-7
- [24] Green, A. E., Laws, N. *On the entropy production inequality*. Arch. Ration. Mech. Anal; 45(1972): 45-47
- [25] Green, A. E., Naghdi. *On thermo elasticity without energy dissipation*. Journal of Elasticity; 31(1993): 189-208
- [26] Hetnarski, R. B. Ignaczak, J. *Generalized thermoelasticity*. Journal of Thermal Stresses; 22(119): 451-476

- [27] Othman, M. I. A., Song, Y. Q. *The effect of rotation on the reflection of magneto-thermoelastic waves under thermoelasticity without energy dissipation.* Acta Mech.; 184(2006): 189-204
- [28] Biot, M. *Thermoelasticity and irreversible thermo-dynamics.* Journal of Applied Physics; 27(1956): 240-253
- [29] Ezzat, Magdy A. *Fundamental Solution in Generalized Magneto-Thermoelasticity with two Relaxation Times for Perfect Conductor Cylindrical Region.* International Journal of Engineering Science; 42(2004): 1503-1519
- [30] Knopoff, L. *The Interaction between elastic wave motion and a magnetic field in electrical conductors.* Journal of Geophysics; 60(1955): 441-456
- [31] Chadwick, P. Ninth International Congress of Applied Mechanics; 7(1957): 143
- [32] Kaliski, S., Petykiewicz, J. *Equation of motion coupled with the field of temperature in a magnetic field involving mechanical and electrical relaxation for anisotropic bodies.* Proc. Vibr. Pobl.; 1(1959): 4
- [33] Nayfeh, A., Nemat-Nasser, S. *Electromagneto-thermoelastic plane waves in solids with thermal relaxation.* Journal of Applied Mechanics; 39(1972): 108-113
- [34] Nowacki, W. *Couple stresses in the theory of thermoelasticity.* Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech. 14(1966): 129-138
- [35] Wang, Zheng. *Thermal shock in a hollow cylinder caused by rapid arbitrary heating.* Journal of Sound and Vibration; 35(1995): 899-906

[36] Cho. H. *Thermal shock stresses due to heat convection at a bounding surface in a thick orthotropic cylindrical shell*. International Journal of Solids and Structures; 38(2001): 2769-2788

[37] Kandil, A., El-Kady, A. A., El-Kafrawy. *Transient thermal stress analysis of thick-walled cylinders*. International Journal of Mechanical Sciences; 37(1995): 721-732

[38] Ghosn, A.H., Sabbaghian, M., *Quasi-Static Coupled Problems of Thermoelasticity for Cylindrical Regions*. Journal of Thermal Stresses; 5(1982): 299-313

[39] Chen, T.M. *New Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method for Three-Dimensional Transient Heat Conduction Problem*. Int. Journal of Numerical Methods; 32 (1991): 45-61

[40] Yee. K. C., Moon, T. J. *Plane thermal stress analysis of an orthotropic cylinder subjected to an arbitrary, transient, asymmetric temperature distribution*. Journal of applied mechanics; 69(2002): 632-640

[41] Jane, K.C., Lee, Z.Y., *Thermoelastic Transient Response of an Infinitely Long Multilayered Cylinder*. Mech. Res. Comm. 26(1999): 709-718

[42] Sen, S., Aksakal, B., Ozel, A. *Transient and residual thermal stresses in quenched cylindrical bodies*. International Journal of Mechanical Sciences; 42(2000). 2013-2029

[43] Segall, A. E. *Transient analysis of thick-walled piping under polynomial thermal loading*. Nuclear Engineering and Design; (226): 183-191

- [44] Shahani, A.R., Nabavi, S.M. *Analytical solution of the quasi-static thermoelasticity problema in a pressurized thick-walled cylinder sunjected to transient termal loading*. Applied Mathematical Modelling; 31(2007): 1807-1818
- [45] Filipovic-Gledja, V., Morgan, V.T., Findlay, R.D. *A Unified Model for Predicting the Electrical, Mechanical and Thermal Characteristics of Stranded Overhead-Line Conductors*. Department of Electrical and Computer Engineering (2007)
- [46] Liu, Fang, Findlay, Raymond D. *Investigation of mechanical properties of single layer ACSR base on an Integrated Model*. Electric Power System Research; 78(2008): 209-216
- [47] Liu, F., Findlay, R. D., Song, Q. *Discussion and prediction of mechanical properties for single layer ACSR*. The First International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC-06); Vol. 1, Beijing, China, August 30-September 1, 2006: 138-141
- [48] Makhlin, B. *Conductor Heating and its Effect on Their Mechanical Strength*. TSNIEL Trudy; 5(1956): 186-202
- [49] House, H. E., Tuttle, P. D. *Current-Carryng Capacity of ACSR*. AIEE Trans. Pt. III; PAS 77(1958): 1169-1178
- [50] Webs, A. *Dauerstrombelastbarkeit von nach DIN 48201 gefertigten Freileitungsseilen auf Kupfer, Aluminium und Aldrey*. Elekt: wirts; 62(1963): 861-872
- [51] Morgan, V.T. *Rating of Bare Overhead Conductors for Continuous Currents*. Proc. IEE; 114: 1473-1482

[52] Noda, Naotake, Hetnarski, Richard, Tanigawa, Yoshinobu. *Thermal Stresses*. Taylor & Francis, Nueva York, 2003

[53] Gere, James M. *Mecánica de Materiales*. Thomson Learning, México, 2002

[54] Incropera, Frank P., De Witt, David P. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Wiley, Singapur, 1990

[55] Özişik, M. Necati. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*. CRC, Nueva York, 1994