



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



*“PRECURSORES DE PROTONES RELATIVISTAS SOLARES
POR ANÁLISIS DIGITAL DE SEÑALES UTILIZANDO
TRANSFORMADA WAVELET Y ANÁLISIS DE
COMPONENTES PRINCIPALES”*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
INGENIERO GEOFÍSICO PRESENTA:

JULIÁN ZAPOTITLA ROMÁN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. VÍCTOR MANUEL VELASCO HERRERA

MÉXICO D.F.

AGOSTO 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres:

Por darme la libertad de vivir mis propias experiencias, tomar mis decisiones y aprender de mis propios errores; por ser complementos uno con otro, por un lado el pensamiento inteligente y por otro la persistencia, dedicación y disciplina.

A mis hermanos:

Porque mi persona lleva implícita cada una de sus personalidades.

Agradecimientos:

A la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, por mostrarme un mundo lleno de personas admirables en un muy amplio rango de disciplinas y que tomo como ejemplo a seguir.

Agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) UNAM-DGAPA por la ayuda económica en la realización de esta tesis.

Agradezco el apoyo incondicional de mi familia, una gran fuente de inspiración para realizar todas y cada una de mis acciones con alegría.

Al Dr. Víctor Manuel Velasco Herrera, por darme la oportunidad de aprender de sus conocimientos y desarrollarme durante el servicio social y la elaboración de esta tesis, además por su forma talentosa de transmitir su sabiduría y su pasión por el análisis de señales.

Al Dr. Jorge Pérez y Peraza, por su visión objetiva y pensamiento científico enfocado a la generación de resultados que ayuden a comprender los maravillosos fenómenos solares.

Al Dr. José Carlos Ortiz Alemán, por su visión matemática y computacional en la gran diversidad de fenómenos en los que él trabaja, y por su enfoque a la resolución en los problemas que abarca esta tesis.

Al Dr. Mauricio Gabriel Orozco del Castillo, por su facilidad para enfrenar los problemas y proponer soluciones contundentes, especialmente por sus algoritmos orientados al objetivo de esta tesis.

A mis profesores Irma Vargas, Rosendo Rojas y José Luis Campos por su disponibilidad, orientación y atención, a quienes guardo una enorme admiración y respeto.

Nuevamente agradezco a la UNAM por brindarme grandes amistades, mis *amigos de la facultad de Ingeniería*, porque nunca compartimos un saludo como extraños, pues desde el primer momento conversamos como si nos conociéramos desde la primaria, agradezco los momentos inolvidables y aun más los momentos que nos hace falta compartir.

A mis amigos del grupo de mariachi, quienes me han demostrado que no sólo soy un elemento más, porque me han manifestado un gran cariño y porque el sentimiento es totalmente mutuo.

Finalmente a mis amigos de toda la vida, porque en realidad en ningún momento me he sentido solo.

ÍNDICE

RESUMEN.....	vii
INTRODUCCIÓN.....	ix

CAPÍTULO 1. ACTIVIDAD SOLAR

1.1. Introducción	1
1.2. Estructura Solar.....	2
1.3. Campo Magnético	5
1.4. Viento Solar	6
1.5. Fulguraciones Solares.....	8
1.6. Rayos Cósmicos.....	9
1.6.1. Rayos Cósmicos Solares.....	10
1.7. Datos	10
1.8. Panorama Actual.....	12

CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE FOURIER

2.1. Introducción.....	15
2.2. Señales.....	16
2.3. Series de Fourier	17
2.3.1. Señales Periódicas y Discontinuas.....	19
2.3.2. Condiciones de Dirichlet	19
2.3.3. Efecto de Gibbs.....	20
2.3.4. Señales Continuas y no Periódicas.....	20
2.4. Transformada de Fourier.....	21
2.4.1. Propiedades.....	21
2.4.2. Fórmula de Parseval.....	23
2.5. Señales Discretas y Periódicas.....	24
2.5.1. Teorema del Muestreo.....	24
2.5.2. Fenómeno de Aliasing.....	25
2.6. Series de Fourier Discreta.....	25
2.7. Transformada Discreta de Fourier.....	27
2.8. Transformada Rápida de Fourier.....	28
2.9. Transformada de Gabor.....	29
2.9.1. Principio de Incertidumbre de Heisenberg	29

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS WAVELET

3.1.	Introducción.....	31
3.2.	Función de Escala.....	32
3.3.	Análisis Multiresolución	33
3.4.	Wavelet Madre	34
3.5.	Transformada Wavelet Continua.....	35
3.6.	Transformada Wavelet Discreta	37
3.7.	Descomposición Wavelet Piramidal.....	39
3.8.	Momentos de Desvanecimiento	41
3.9.	Wavelet Morlet	41
3.10.	Espectro de Potencia Wavelet	42
3.11.	Cono de Influencia y Niveles de Significancia.....	43

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

4.1	Introducción	44
4.2	Componentes Principales	45
4.3	Obtención Analítica del Primer Componente Principal.....	46
4.4	Reconocimiento de Imágenes utilizando ACP.....	52

CAPÍTULO 5. APLICACIONES Y RESULTADOS

5.1	Introducción	56
5.2	Clasificación de GLE en Función del Contenido Espectral.....	57
5.2.1	Características por Grupo.....	65
5.3	Análisis Wavelet por Ventanas Orientado a la Detección de Precusores GLE	67
5.3.1	Características.....	77
5.3.2	Comportamiento 1.....	79
5.3.3	Comportamiento 2.....	80
5.4	Análisis de Componentes Principales de la Matriz Generada por Wavelets.....	82
5.4.1	Resultados del Algoritmo ACP.....	91

CONCLUSIONES.....	94
-------------------	----

ANEXOS

- A. Periodos de rayos cósmicos galácticos que anticipan el evento [días].....A-1
- B. Clasificación de GLE por sus periodos representativos
 - A.3-Grupo A
 - A.4-Grupo B
 - A.5-Grupo C

BIBLIOGRAFÍA.....96

LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

CAPÍTULO 1. ACTIVIDAD SOLAR

Figura 1.1 Representación de la atmosfera solar con sus diferentes regiones en función de la altura, densidad y temperatura.....	4
Figura 1.2 Estructura solar.....	4
Figura 1.3. Líneas de campo magnético abiertas y cerradas y su relación con la velocidad del viento solar...7	
Figura 1.4 Descripción de GLE en función del incremento registrado en la estación de Oulu (perfiles temporales de GLE durante los ciclos 22 y 23), tomado de Andriopoulou <i>et al.</i> , 2011.....	13
Figura 1.5 Modulación con pulsos de la serie de RSP (Pérez-Peraza <i>et al.</i> , 2009).....	14
Tabla 1.1 Estaciones de RCG con datos a partir de 1957 y su localización.....	11

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS WAVELET

Figura 3.1 Dominio tiempo-frecuencia efectuado por la transformada wavelet.....	37
Figura 3.2 Esquema de la descomposición en series wavelet.....	41

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

Figura 4.1 Representación gráfica de un conjunto de tres variables.....	52
Figura 4.2 Descomposición de una imagen en un vector.....	53

CAPÍTULO 5. APLICACIONES Y RESULTADOS

Figura 5.1 Espectro wavelet del evento 21 con un incremento reportado del 6%, el evento está señalado con la línea negra punteada.....	59
Figura 5.2 Espectro wavelet del evento 37 con un incremento reportado de 4%, el evento está señalado con la línea negra punteada.....	59
Figura 5.3 Evento 36 con un incremento reportado de 11%, el evento se encuentra resaltado por la línea negra punteada.....	61
Figura 5.4 Evento 55 con un incremento reportado del 11%, el evento se resalta con una línea negra punteada.....	61
Figura 5.5 Evento con un incremento reportado de 269%, el evento es señalado con una línea negra punteada aunque es evidente en ambos dominios.....	63
Figura 5.6 Evento con un 174% de incremento, el evento está señalado con una línea negra punteada aunque es evidente en ambos dominios	63
Figura 5.7 Señal temporal de los RCG, muestreo diario, estación Oulu.....	68
Figura 5.8 Superposición de los GLE sobre la señal de RCG, periodo característico promedio de 11 años...68	
Figura 5.9 Espectros con filtros de Daubechies orden 8, 6, 4 y 1.....	69
Figura 5.10 Espectro anual de series con presencia de GLE con una muestra por hora correspondientes al año 2003 y 1989 respectivamente.....	71
Figura 5.11 Espectro anual de series de tiempo sin presencia de GLE, correspondiente al año 1996 y 1987 respectivamente.....	72
Figura 5.12 Distribución de ventanas temporales para el análisis de cada evento.....	74
Figura 5.13 Ventanas de distintos tamaños con una distribución de frecuencias con distintas resoluciones; para eventos ocurridos después de 1969 el muestreo en la señal de RCG es de 5 minutos.....	75

ÍNDICE

Figura 5.14 Espectros filtrados para resaltar periodos de menor potencia, las ventanas anticipan a un mismo evento en una hora.....	76
Figura 5.15 Perturbaciones registradas en la señal y reflejadas en los espectros wavelet.....	79
Figura 5.16 Comportamiento característico de los periodos antes de un GLE.....	80
Figura 5.17 Matriz generada por el proceso de ondículas: real, filtrada y con valor absoluto.....	83
Figura 5.18 Los aportes máximos están dados por los primeros eigenvectores, más de una cuarta parte de de la información representativa de todos los elementos se encuentra en el eigenvector #1.....	86
Figura 5.19 Pruebas con ventanas de distinto tamaño.....	92
Figura 5.20 Pruebas con números de elementos de entrenamiento distintos.....	93
Tabla 5.1 Periodos en días con sus respectivas equivalencias.....	57
Tabla 5.2 Límites asociados a los diferentes grupos.....	64
Tabla 5.3 Rango en porcentaje a los distintos grupos.....	64
Tabla 5.4 Periodos de acceso de los diferentes grupos.....	64
Tabla 5.5 Periodos de Mediano Plazo.....	70
Tabla 5.6 Periodos de corto plazo.....	70
Tabla 5.7 Distribución en porcentaje de los eigenvectores.....	85
Tabla 5.8 Resultados de la comparación de los conjuntos de matrices precursoras y matrices de ruido espacial.....	91

RESUMEN

La ocurrencia de Eventos de Protones Solares (SPE por sus siglas en inglés) son considerados fenómenos aleatorios asociados a las fulguraciones solares y fenómenos de ondas de choque; los SPE son de baja energía y no penetran la atmosfera terrestre, su detección es por satélites que se encuentran en el espacio interplanetario. Esporádicamente se presentan Eventos de Protones relativistas Solares (RSP por sus siglas en inglés) con energías mayores a los 500[MeV], también conocidos como Eventos a Nivel del Suelo (GLE por sus siglas en inglés); su detección es por una red de monitores de neutrones con base en tierra (Oulu, Mcurdo, Cheltenham, etc.). El primer evento fue reportado en 1942 registrándose hasta la fecha 70 (último en 2006), los datos de 1942-1960 son muy limitados por el inicio en el desarrollo de los detectores de partículas; actualmente se cuentan con resoluciones por minuto.

El mecanismo que conlleva un GLE no es bien conocido, aunque se observa una asociación con las erupciones solares, se ha examinado el origen con observaciones de eyecciones de masa coronal, explosiones de radio tipo II y flujos de rayos X suaves (Gopalswamy *et al.*, 2010); otros estudios en el tema presentan periodicidades comunes entre los indicadores solares de la cromosfera y corona revelando que los eventos altamente energéticos no son un fenómeno local, asociando una sincronía entre las diferentes capas de la atmósfera solar (Pérez-Peraza *et al.*, 2008). Las repercusiones de estos eventos en las redes de telecomunicaciones y estaciones eléctricas son bien conocidas, y es por esto que se pretende anticipar su ocurrencia. La principal aplicación en ingeniería es encontrar características espectrales que se puedan dirigir como precursor de un GLE.

Los rayos cósmicos galácticos (RCG) son partículas energéticas con un registro continuo en los monitores de neutrones, exploran la atmosfera solar y con ello brindan información sobre el medio circundante, principalmente la estructura de medio interplanetario; la señal se encuentra modulada con frecuencias características ofreciendo información sobre la física solar, así la señal captada por los monitores de neutrones se encuentra afectada en gran parte por procesos que se llevan a cabo dentro de la estrella. Los RCG contienen información del estado del clima espacial y al gestarse un GLE la atmosfera solar comienza a cambiar, postrando características distintas en la señal de RCG, características que en una atmosfera lejana a un evento no se muestran o por lo menos no son comunes.

La transformada wavelets permite describir señales no estacionarias proponiendo un enfoque de análisis más completo que la transformada de Fourier. Un GLE se describe como un evento de rápida transitoriedad el cual es ideal para el análisis wavelet; el contenido en frecuencia de los RCG antes y después de un evento altamente energético puede correlacionarse con frecuencias de otros índices de actividad solar proporcionando información sobre las conexiones entre diferentes capas solares. El análisis por medio de wavelets permite identificar cómo impacta un GLE sobre la señal de RCG, un incremento instantáneo en el número de partículas es descrito con un espectro de potencia característico; proponemos una clasificación de los GLE en función de su espectro de potencia wavelet que puede proporcionar información sobre los mecanismos que lo generan.

Los periodos en la señal de RCG presenta comportamientos característicos a medida que se acerca de fecha del evento, puesto que éste patrón peculiar no es común fuera de los periodos de ocurrencia de GLE, éste resultado puede ser utilizado como herramienta de pronóstico. Las características que observamos en los espectros de potencia wavelet en gran parte se encuentran en función de nuestra capacidad de percepción (el espectro está sujeto a una interpretación); para validar las observaciones proponemos el Análisis de Componentes Principales (ACP).

Además de reducir la dimensionalidad de los datos, otro de los objetivos en el ACP se enfoca a la predicción o reconocimiento de patrones; éste método tiene grandes aplicaciones en la identificación de rostros, huellas digitales, etc.; podemos utilizar el mismo concepto y enfocarlo al reconocimiento de espectros de potencia wavelet. La técnica es implementada para aprobar la premisa de que el precursor existe, suponemos que ventanas temporales que preceden un GLE contienen una distribución específica en los periodos que consideramos como precursores, así entonces, ventanas lejanas a un evento mostraran configuraciones distintas a las ventanas que llamaremos precursoras.

Todas las pruebas realizadas dan por resultado que un conjunto de espectros que preceden eventos altamente energéticos son distintos a espectros lejanos a los mismos eventos. Las conclusiones finales se enfocan a la disposición de abordar el estudio de precursores de protones relativistas solares, para caracterizar a detalle las observaciones realizadas en este trabajo y proponer la posibilidad de un monitoreo en tiempo real para la predicción de los próximos GLE. Por otra parte la clasificación de los GLE por medio del espectro de potencia wavelet puede aportar algunos datos para la explicación de mecanismos físicos comunes entre los GLE y la estructura solar.

INTRODUCCIÓN

El estudio del sol es de gran importancia para entender los fenómenos existentes en el universo y nuestro planeta. El interés sobre su campo magnético, el comportamiento de densidad y temperatura, las distintas características en las capas solares, la emisión y aceleración de partículas, etc., tiene a expertos en física espacial y otras disciplinas en constantes estudios y observaciones para la búsqueda de modelos que sean lo más próximos a la realidad.

Los RCG son partículas energéticas con velocidades cercanas a la velocidad de la luz, en su mayoría protones. Aunque se desconoce el origen de las energías tan altas se cree son producidos por fuentes como el sol, supernovas, estrella de neutrones, hoyos negros, núcleos activos de galaxias u otras fuentes del universo. Estas partículas bañan la heliósfera y al espacio interestelar isotrópicamente, cruzando en su camino la atmósfera solar cuya fenología causa diversas modulaciones. Su detección es por una red de monitores con base en tierra. Esta señal cuasi-estacionaria contiene periodos característicos que podemos estudiar por el análisis de Fourier y análisis Wavelet. Muy de vez en cuando se registran incrementos bruscos en los contadores de partículas, los cuales se asocian a protones con energías mayores a 500[MeV] denominados *protones relativistas solares o eventos a nivel de suelo (GLE)*, con capacidad de penetrar la atmosfera terrestre y dañar las redes eléctricas y de telecomunicaciones. Su impacto sobre la salud aún se investiga. La principal aplicación en ingeniería es encontrar un precursor que permita anticipar estos eventos.

Hasta la fecha se tienen registrados 70 GLE considerados eventos estocásticos; creemos que antes de la ocurrencia de un GLE la señal de RCG registra perturbaciones que se reflejan con un contenido espectral característico. Analizar la señal de RCG y los GLE es el principal objetivo de esta tesis; con los elementos necesarios sobre el análisis de señales tales como la *Transformada Discreta de Fourier* y la *Transformada Wavelet* buscamos estos precursores. El espectro wavelet arroja una imagen que describe la distribución de periodos en una ventana de tiempo, esta imagen la estudiamos por el Análisis de Componentes Principales (ACP).

El análisis de componentes principales es una herramienta matemática que es utilizada para el reconocimiento de patrones, su aplicación en los espectros de potencia wavelet arroja resultados interesantes respecto a la búsqueda del precursor.

CAPÍTULO 1

ACTIVIDAD SOLAR

1.1 Introducción

La tierra y sus habitantes son beneficiados por la luz radiante del sol, sus interesantes fenómenos aún encierran diversos procesos físicos como la aceleración de partículas, estructura electromagnética, propagación de material solar, etc. Con el avance en la tecnología se desarrollan nuevos detectores de partículas, con base en tierra y en el medio interplanetario, para plantear nuevos modelos que describan el comportamiento del astro rey. Podemos ver al sol como una gran máquina aceleradora de partículas que llegan a tomar velocidades hasta el régimen relativista; una pequeña porción de éstas logran obtener energías tan altas capaces de penetrar la atmosfera terrestre, su repercusión en las estaciones eléctricas y redes de telecomunicaciones ya han sido reportados (Suess y Tsurutani, 1998).

Las condiciones extremas solares representan un gran campo de estudio en la comunidad científica, día a día se revelan nuevos avances en el tema con el único fin de comprender los procesos extraordinarios que sólo se observan en las estrellas.

1.2 Estructura Solar

Podemos considerar al sol como un laboratorio para realizar observaciones que sólo se dan en las condiciones especiales de las estrellas. Siendo la principal fuente de energía, su estudio se vuelve indispensable para entender los fenómenos en el universo y algunos que afectan directamente a la tierra por encontrarse dentro de su atmosfera y estar bajo su influencia inmediata.

La combinación de su campo electromagnético, rotación diferencial, plasma, movimientos de convección, altas presiones y temperaturas, etc., dan por resultado un gran número de fenómenos en diversas escalas temporales, espaciales y energéticas; el sol emite grandes cantidades de energía en forma de radiación, partículas aceleradas y grandes cantidades de masa; algunos de estos fenómenos pueden afectar el campo magnético terrestre y repercutir en daños de redes eléctricas o satelitales. En la actualidad existen teorías que asocian el comportamiento de ciertos animales con la actividad solar.

Los fenómenos solares dominan completamente el medio interplanetario (el medio que separa al sol de la tierra y los otros planetas) llamado clima espacial; en particular los fenómenos eruptivos como las ráfagas, eyecciones de masa coronal, etc., emiten radiación electromagnética y partículas de alta energía que causan grandes perturbaciones en el medio interplanetario.

Para la descripción de fenómenos solares se plantean modelos teóricos que se encuentran sujetos a observaciones disponibles como su masa ($m = 1.9891 \times 10^{33} \pm 0.02\%g$), radio ($R = 6.96 \times 10^{10} \pm 0.01\%cm$), luminosidad ($3.8515 \times 10^{33} \pm 0.01erg/s$), etc., y a principios físicos generales como la conservación de la energía, transporte de energía (radiación y convección), la ecuación de estado (relación entre la presión, densidad y temperatura), reacciones nucleares, entre otros.

El elemento más abundante presente en el sol es el hidrogeno (~75%), el segundo componente principal es helio (~24%) y una cantidad relativamente pequeña de elementos más pesados (~1%). Por las condiciones de presión ($\sim 10^{11} atm$) y temperatura ($\sim 10^7 K$) en el núcleo (los primeros 0.25 Radios solares) las interacciones entre protones tienen gran probabilidad de ocurrir, dando como resultado final, núcleos de helio; la energía que se produce en esta capa solar se encuentra principalmente en forma de radiación electromagnética dura (rayos gamma y rayos x) y neutrinos.

CAPÍTULO 1 ACTIVIDAD SOLAR

Fuera del núcleo la presión decae de tal forma que ya no se llevan a cabo las condiciones para la fusión, pero la presión es suficiente para no permitir el movimiento de masa; el mecanismo más eficiente de transporte de energía es en forma de radiación electromagnética. La región de 0.25-0.7 radios solares se denomina zona de radiación, siendo los fotones los únicos que pueden escapar de las condiciones extremas de presión y transportar energía.

Después de los 0.7 radios solares la presión y temperatura descienden, como efecto, la radiación electromagnética deja de ser un mecanismo eficiente de transporte de energía; por las condiciones en esta región, se facilita el paso a la formación de hidrógeno molecular, generándose un gradiente de temperatura que se traduce en el movimiento de masas (convección). Este mecanismo forma celdas convectivas (consideradas adiabáticas) de varios cientos de kilómetros, la región de 0.7-1 radios solares es llamada zona convectiva. El núcleo, zona radiativa y zona convectiva constituyen la parte interna del sol y conforman un radio solar.

A partir de un radio solar la densidad disminuye drásticamente comenzando la atmósfera solar; en esta región las ondas electromagnéticas alrededor de 5000 \AA pueden propagarse libremente y salir del sol; la transición entre el interior y la atmósfera se conoce como fotosfera. La energía proveniente de las capas interiores es radiada en la fotosfera en longitudes de onda que corresponden al espectro visible, su temperatura es de $\sim 5700 \text{ K}$ con un espesor $\sim 500 \text{ km}$.

Es en la fotosfera donde se observan regiones oscuras llamadas manchas solares; fenómeno que es explicado por tubos de flujo de campo magnético provenientes de la zona convectiva, extendiéndose hasta capas superiores de la atmósfera solar; el campo magnético dificulta el flujo del plasma aislándolo del resto y reduciendo su temperatura unos cientos de grados, suficiente para disminuir su radiación.

La siguiente capa es llamada cromósfera, en esta región la temperatura aumenta hasta $\sim 6000 \text{ K}$ con una altura aproximada de 1000 km a 2000 km . Rebasando la cromósfera observamos uno de los fenómenos más interesantes de la física solar, el incremento súbito de temperatura de unos $20\,000 \text{ K}$ hasta llegar a los millones de grados a una altura aproximada de 2300 km ; en esta misma región, la densidad decae bruscamente, anomalía que no se explica claramente; la región es conocida como zona de transición. Después de esta altura el incremento en temperatura y

decremento en densidad tienden a estabilizarse delimitando la Corona solar. Las características de las diferentes regiones se pueden observar en el recuadro 1.1 (Cordero *et al.*, 2006)

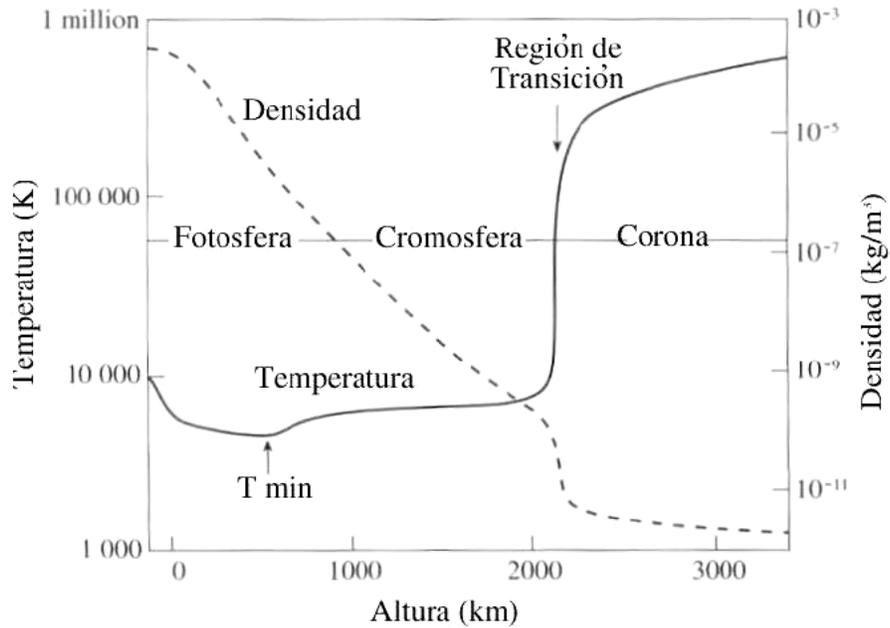


Figura 1.1 Representación de la atmósfera solar con sus diferentes regiones en función de la altura, densidad y temperatura.

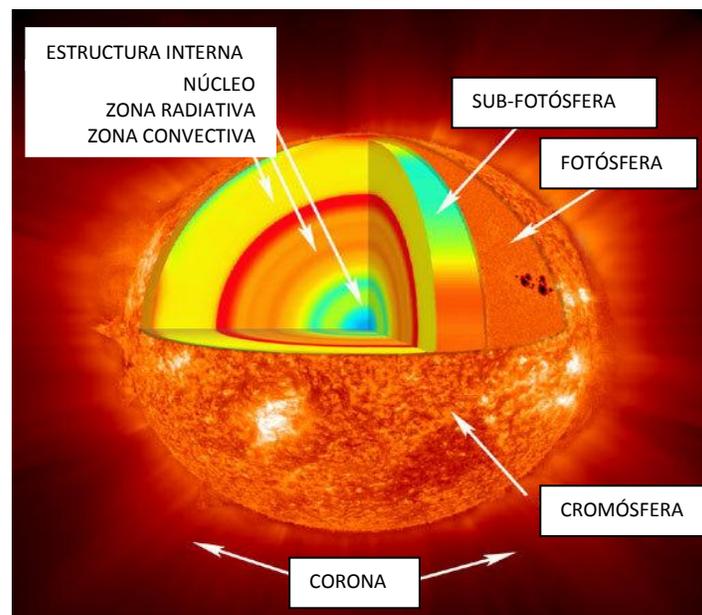


Figura 1.2 Estructura solar.

1.3 Campo Magnético

El campo magnético solar se explica inicialmente en la base de la zona convectiva, donde tiene lugar un proceso de dínamo que genera campo magnético constantemente; los registros demuestran que existe un cambio cíclico en la configuración de aproximadamente 5.5 años.

El comportamiento magnético del sol se distingue al de la tierra por su rotación diferencial; el sol no rota como un cuerpo rígido, por consecuencia, el material en latitudes ecuatoriales gira más rápido en comparación con sus polos. Este fenómeno modifica la estructura del campo magnético, estirando las líneas de fuerza en el ecuador y generando el denominado efecto *omega*, que en combinación con la Fuerza de Coriolis¹ forman tubos de campo magnético (cuerdas magnéticas); del inicio de la configuración dipolar hasta llegar a la configuración toroidal, se tiene un promedio de 5.5 años, esta última configuración contiene la mayor tasa de manchas solares presentándose el máximo de actividad solar. Después de alcanzar el extremo las líneas de campo magnético sufren una reestructuración hasta llegar a un estado de mínima energía tomando nuevamente la configuración dipolar, como efecto decae el número de manchas solares hasta casi desaparecer, este ciclo es muy marcado y corresponde a un periodo característico aproximado de 11 años.

En la atmósfera solar tienen lugar una gran cantidad de fenómenos, la liberación súbita de energía puede acelerar partículas hasta el régimen relativista, proyectar grandes cantidades de material solar o emitir enormes destellos de radiación en todas las longitudes de onda. En la actualidad ya se cuenta con algunos modelos que expliquen parcialmente estos fenómenos.

En ocasiones la corona solar se desestabiliza arrojando hacia el medio interplanetario material (promedio $\sim 5 \times 10^{15} g$) que se encuentra en su entorno, a éste fenómeno se le conoce como *eyección de masa coronal* (CME por sus siglas en inglés). Las velocidades de proyección pueden alcanzar los 2000 [km/s]; alrededor de un tercio de todas las CME viajan lo suficientemente rápido como para conducir a colisiones de onda de choque, estas ondas son las causantes de la aceleración de partículas solares, sobre todo por debajo de los 10 MeV. Aunque muchas grandes fulguraciones solares son acompañadas de eyecciones de masa coronal, únicamente pocas eyecciones de masa coronal aceleran partículas a falta de fulguraciones, mientras que las

¹ Fuerza que experimentan los objetos al desplazarse sobre la superficie de un cuerpo en rotación.

fulguraciones pueden acelerar partículas sin la presencia de eyecciones de masa coronal (Suess y Tsurutani, 1998, Pérez-Peraza, 1998, Pérez-Peraza y Miroshnichenko, 2008).

Las ráfagas o fulguraciones son el resultado de la aceleración por la inestabilidad en el campo magnético en la corona, se dividen en tres etapas, pre-ráfaga, fase impulsiva y fase térmica.

1.4 Viento Solar

La existencia del viento solar se sustentó a partir de observaciones en la deflexión de la cola de los cometas por L. Biermann (1951). La orientación de los iones de la cola se encuentra en dirección contraria al sol y adoptan velocidades moduladas por el viento solar y el cometa.

De acuerdo a investigaciones recientes se ha establecido que, en 1 AU (unidad astronómica) el viento solar tiene una densidad típica de iones alrededor de 7 cm^{-3} ; lo compone el 95% de protones, 5% de helio y lo demás de iones de menor importancia, con una velocidad en el rango de $300\text{-}700 \text{ km/s}$ (Suess y Tsurutani, 1998). Algunos de los efectos del viento solar sobre los astros con campos magnéticos son auroras y tormentas geomagnéticas.

Las propiedades del viento solar tienden a variar por la cambiante estructura magnética solar; sus corrientes se deben a configuraciones magnéticas que giran por los cambios en el balance de las líneas magnéticas, produciendo alteraciones dentro del campo de fuerzas en la corona; la acción del campo de fuerzas causa eventos temporales proyectando grandes masas de plasma, conocidos también como eyecciones de masa coronal; fenómeno que se extiende a más de los 40° del disco solar observados en períodos de horas (Suess y Tsurutani, 1998), sus efectos son perturbaciones en el medio interplanetario, flujos de partículas energéticas (aceleradas por ondas de choque) y tormentas geomagnéticas que repercuten en una escala de tiempo mayor.

El viento solar se presenta porque la corona solar es caliente y la presión en el medio interestelar local es mucho menor, entretanto, a lo que se refiere a los mecanismos que calientan la corona y aceleran el viento solar, existen diversos modelos para explicar el fenómeno aunque aún no son muy claros en nuestros días.

En la región de líneas de campo cerrado, la velocidad del viento solar se considera baja; para el caso de las líneas de campo abiertas (altas latitudes) que se extienden hacia el espacio interplanetario, la velocidad del viento solar es alta (figura 1.3).

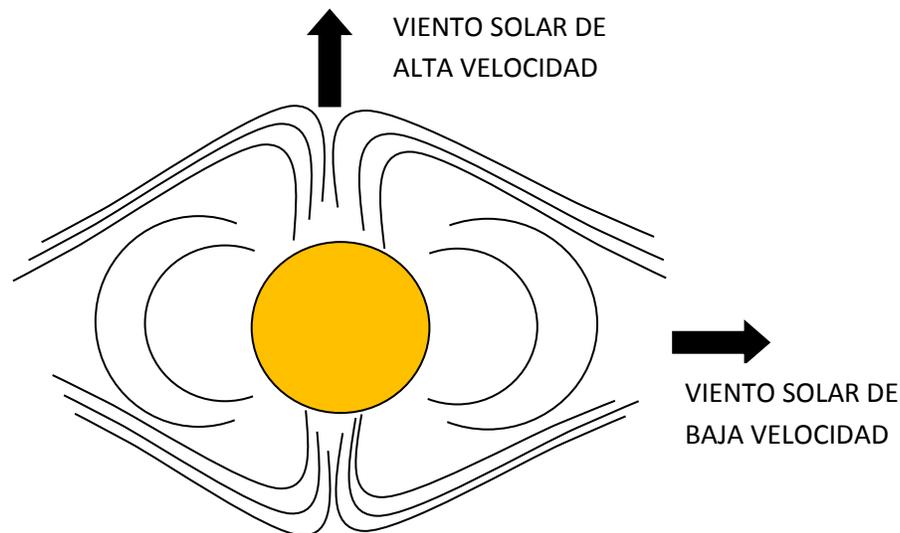


Figura 1.3. Líneas de campo magnético abiertas y cerradas y su relación con la velocidad del viento solar.

Por la complejidad que presentan los procesos que actúan cerca de la superficie solar, se han manejado un sin fin de estudios, uno de ellos, es la elaboración de observaciones telescópicas para resolver la actividad en pequeña escala de la cromósfera y la corona, para la búsqueda de indicios que aporten información sobre las causas que generan la gran diferencias en temperatura; observaciones ópticas de múltiples longitudes de onda con resolución de 0.1 arcseg son obtenidos sobre la atmósfera, esto para la investigación coronal y su relación con el viento solar.

Las interferencias presentes en el calentamiento y la aceleración del viento solar, dependen de las observaciones *in situ* del plasma en el espacio interplanetario. Observaciones del viento solar de 0.3 AU a más de 50 AU demuestran la operación de una gran variedad de procesos que afectan su evolución (Suess y Tsurutani, 1998).

Los intentos por comprender la física del viento solar llevan a utilizar una amplia variedad de información, incluyendo observaciones de la mayor parte de sus propiedades como las fluctuaciones, distribuciones de velocidad, composición del viento solar, su conexión magnética, observaciones de ondas de plasma, observaciones telescópicas en todo el rango de longitudes, inestabilidad de ondas de plasma, turbulencia, etc. El viento solar proporciona un excelente laboratorio para la turbulencia magnetohidrodinámica en un amplio rango de escalas espaciales.

1.5 Fulguraciones Solares

Las fulguraciones solares emiten radiación electromagnética en un rango muy amplio de longitudes de onda, en los casos extremos van de 0.002 \AA ($2 \times 10^{-11} \text{ cm}$) a más de 10 km (10^6 cm). Esta radiación puede ser continua en algunas partes del espectro, líneas de emisión en otros, o una combinación de ambos (Zdeněk Švestka, 1976); los diferentes tipos de radiación provienen de diferentes alturas por encima de la fotosfera y de diferentes partes de la fulguración. El análisis espectral de las fulguraciones en la región de la cromósfera, implica temperaturas cercanas a 10^4 K , análisis de rayos X a alturas de $20\,000 \text{ km}$ demuestran la existencia de temperaturas que exceden los 10^7 K ; como las regiones de baja y alta temperatura implican condiciones físicas muy diferentes, las discusiones sobre el fenómeno se estudian por separado como fulguraciones de baja temperatura y fulguraciones de alta temperatura².

Las fulguraciones son muy diferentes en tamaño e importancia, lo que tienen en común todos los eventos es un rápido calentamiento temporal de una parte restringida de la corona solar y la cromósfera. Dependiendo de la configuración magnética existen procesos que pueden acelerar electrones y núcleos atómicos.

En la fulguración se observa aceleración de partículas en el régimen no relativista y medianamente relativista. Estas partículas son detectadas en el espacio y en realidad no se tiene evidencia de que los protones sean acelerados en la misma región y en el mismo tiempo que los electrones por debajo del régimen relativista.

² Una mayor discusión en Solar Flares, Švestka, 1976.

Cuando los protones son detectados usualmente son acompañados por electrones relativistas; los eventos de protones más comunes contienen energías en el orden de 10MeV (o menores), muy ocasionalmente una fulguración conlleva protones con energías mayores a los 100MeV y de manera aún menos común, protones con energías que exceden 1GeV; estos últimos producen un incremento en el flujo de partículas registrándose en las estaciones de neutrones con base en tierra, eventos denominados rayos cósmicos solares o protones relativistas solares (RSP).

1.6 Rayos Cósmicos

Hoy en día se sabe que cerca del 90% de los rayos cósmicos primarios que llegan al tope de la atmosfera son protones, el resto son partículas alfa y núcleos pesados; estos átomos ionizados que van desde un solo protón hasta núcleos de hierro, viajan con velocidades cercanas a la velocidad de la luz; aunque en realidad se desconoce el origen de las energías tan altas de los rayos cósmicos galácticos (RCG), se cree que son producidos por diversas fuentes como el sol, supernovas, estrella de neutrones, hoyos negros, núcleos activos de galaxias, etc. El flujo de los RCG en el sistema solar es modulado por la actividad solar. Una pequeña fracción de las partículas primarias tienen energías superiores a 10^{16} eV, las partículas secundarias son creadas por la interacción de las partículas primarias con núcleos atómicos (por lo general una molécula de oxígeno o de nitrógeno) de la atmósfera terrestre.

Existen tres tipos diferentes de rayos cósmicos (Mewaldt *et al.*, 1994.):

- 1.-Rayos Cósmicos Galácticos: se originan fuera de nuestro sistema solar.
- 2.-Rayos Cósmicos Solares: también conocidos como partículas energéticas solares, se asocian a fenómenos solares como fulguraciones o eyecciones de masa coronal.
- 3.-Rayos Cósmicos Anómalos: su origen es en el espacio interestelar más allá de la heliopausa³, se diferencia de los anteriores por la composición de átomos neutros.

³ Supone la frontera entre el sistema solar y el espacio interestelar, se encuentra a ~ 100 [AU].

1.6.1 Rayos Cósmicos Solares

Los rayos cósmicos solares, también conocidos como partículas energéticas solares (SEP por sus siglas en inglés) vienen en su mayoría de las fulguraciones solares. Las eyecciones de masa coronal y las ondas de choque también producen partículas energéticas en el medio interplanetario. La composición es similar a los rayos cósmicos galácticos en su mayoría son protones, alrededor del 10% núcleos de He y el resto de elementos más pesados.

Los rayos cósmicos solares fueron descubiertos en primer lugar (experimentalmente) el 28 de febrero de 1942, como un aumento repentino de los contadores de partículas; el incremento en la tasa de conteo se asoció con una fulguración solar. Los detectores de rayos cósmicos, en ocasiones han registrado aumentos repentinos en la intensidad de la radiación asociado a fenómenos en el sol, sobre todo con las fulguraciones. Su estudio es de particular importancia por la implementación en la predicción de flujo de partículas (que pueden ser perjudiciales para los sistemas de telecomunicaciones estaciones eléctricas), el análisis de las condiciones interplanetarias y de la predicción de fuertes tormentas geomagnéticas.

Los eventos de SEP con energías mayores a 500 MeV son conocidos como Eventos a Nivel de Suelo (GLE por sus siglas en inglés); las partículas tienen energías suficientemente altas con capacidad de penetrar la atmósfera terrestre y como resultado pueden ser registrados en los monitores de neutrones ubicados a nivel terrestre. El primer registro efectuado data del 28 de febrero de 1942 (GLE01), hasta el momento se han presentado 70 eventos (último registrado GLE70, 13 de diciembre de 2006), el evento de mayor intensidad corresponde a GLE05 con fecha del 23 de febrero de 1956.

1.7 Datos

Los datos utilizados en este trabajo es una compilación de distintas estaciones de monitoreo; sobre los eventos de 1942-1960 la información es muy limitada debido al número reducido de las estaciones de rayos cósmicos en esa época. Para esos primeros eventos se obtienen los perfiles temporales a partir de artículos, como por ejemplo, los reportados por Scott E. Forbush⁴ con

⁴ Cosmic Rays , The Sun and Geomagnetism, The Works of Scott E. Forbush.

CAPÍTULO 1 ACTIVIDAD SOLAR

muestreos horario. Para el análisis de estos perfiles se contó con la ayuda del programa digitalizador proporcionado por el *Departamento Mareográfico* del Instituto de Geofísica de la UNAM del cual agradecemos la autorización del Dr. Jorge Zavala Hidalgo. Los datos que utilizamos de 1957-1964 fueron tomados de diferentes estaciones con resoluciones horarias:

Estación	Localización
Polo Sur Antártida	90S
McMurdo Antártida	77.9S 166.6E
Thule, Groelandia	76.5N 68.7W
Newark, Delaware	39.7N 75.7W
Awarthmore, Pennsylvania	39.9N 75.4W

Tabla 1.1 Estaciones de RCG con datos comenzando en 1957 y su ubicación geográfica.

A partir del GLE15 utilizamos el Monitor de Neutrones de Oulu, situado en el norte de Finlandia ($65.05^{\circ}N, 25.47^{\circ}E$); la estación es una de las más estables y fiables de la red mundial de monitores de neutrones (Usoskin, *et al.*, 2001), en la que las mediciones de rayos cósmicos se inició en 1964. La base contiene datos con resoluciones de 1 minuto desde 1995, resoluciones de 5 minutos a partir de 1969 y datos horarios desde 1964, disponibles públicamente en la red <http://cosmicrays oulu:fi>.

La estación de Oulu fue seleccionada porque:

- 1) Es una estación sub-polar, capaz de registrar los GLE.
- 2) Técnicamente este instrumento ha proporcionado un monitoreo continuo, fiable y preciso.

En el anexo A proporcionamos la tabla con las fechas de evento con sus respectivos incrementos reportados.

1.8 Panorama actual

El estudio analítico de GLE demuestran que cada evento constituye un caso único, caracterizado por las condiciones específicas solares e interplanetarias durante el periodo de registro (Pérez-Peraza y Miroshnichenko, 2008, Andriopoulou, *et al.*, 2011).

Publicaciones recientes abordan el estudio estadístico de GLE con el fin de aportar datos para la comprensión de mecanismos que explique la física de estos eventos; las características que toman en cuenta son la duración del evento, la intensidad máxima, la ubicación geográfica, así como las conexiones con la actividad solar. Los resultados de estos estudios ubican los eventos con las fases máximas de actividad solar aunque esto no es sistemáticamente cierto (Pérez-Peraza, *et al.*, 2009, Andriopoulou *et al.*, 2011).

Independientemente de la latitud y longitud geográfica, la tasa de incremento en los contadores de partículas se encuentra en función del *cono de aceptación* de las estaciones, lo cual juega un papel importante en el registro de la intensidad máxima de un GLE.

La asociación de un GLE con los fenómenos solares aun no es concreta, las observaciones se encuentran en más de un 90% relacionado a fulguraciones en el lado visible del disco solar y el resto presumiblemente al lado opuesto del disco solar. La relación con mayor evidencia se encuentra con la emisión de rayos X y las fulguraciones; desafortunadamente no se cuenta con datos suficientes para relacionar el estudio con Eyecciones de Masa Coronal. Las ondas de choque (asociadas tal vez a las EMC) solo aceleran eventualmente partículas no relativistas en alguna etapa posterior, simultanea, o incluso *a priori* a la aceleración principal en las fulguraciones.

La figura 1.4 presenta algunos GLE's tratando de encontrar las relaciones entre el incremento máximo registrado y el tiempo de estabilización. La relación entre el incremento máximo asociado a un GLE y su tiempo de decaimiento para llegar a la oscilación promedio, la consideramos de crucial importancia, al suponer que guarda información sobre el origen o el medio circundante que hace que adapten esta configuración *incremento-tiempo de decaimiento*. Para describir esta relación proponemos el análisis por su espectro de potencia wavelet, sus aplicaciones para describir señales de rápida transitoriedad la convierten en una herramienta útil para la clasificación y descripción de los eventos.

Consideramos que el espectro de potencia wavelet proporciona mayor información respecto al desarrollo del GLE que la información en un perfil temporal. El incremento en el contador de partículas y el tiempo de decaimiento puede describirse con una gama de periodos correspondientes a la configuración *incremento-estabilización*.

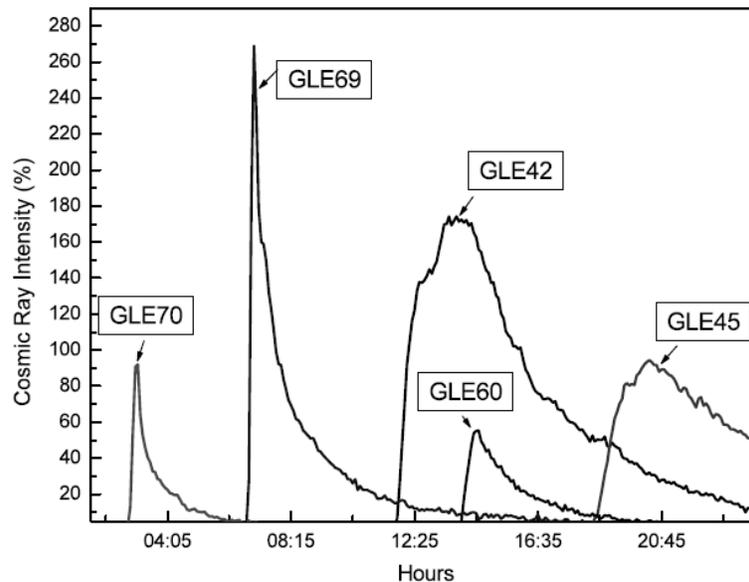


Figura 1.4 Descripción de GLE en función del incremento registrado en la estación de Oulu (perfiles temporales de GLE durante los ciclos 22 y 23), tomado de Andriopoulou *et al.*, 2011.

Tomando en cuenta índices de actividad solar como las Manchas Solares (SS por sus siglas en inglés) que son un indicador directo de la estructura de las líneas de campo magnético (relación directa de la fotosfera) y series de Índice de la Corona (CI por sus siglas en inglés), se tienen resultados publicados del análisis de Coherencia Wavelet entre los indicadores anteriores y la series de pulsos GLE (Pérez-Peraza, *et al.*, 2009); la serie CI e índices de la Fotósfera cubren la totalidad del periodo de registro para los GLE. De acuerdo con el Análisis de Coherencia Wavelet que se realizó para las fechas de ocurrencia, se encontró que los indicadores de la Fotosfera y la Corona se encuentran en anti-fase con la serie temporal de RCG, además, es posible observar que el periodo de control de actividad solar para ambos casos es de 11 años. Como era de esperar, la mayor tasa de incidencia (mas no la totalidad) de los acontecimientos de GLE se lleva a cabo durante el máximo de actividad solar, por otra parte, la tasa de incidencia parece no depender de la intensidad de los ciclos solares (Pérez-Peraza, *et al.*, 2009).

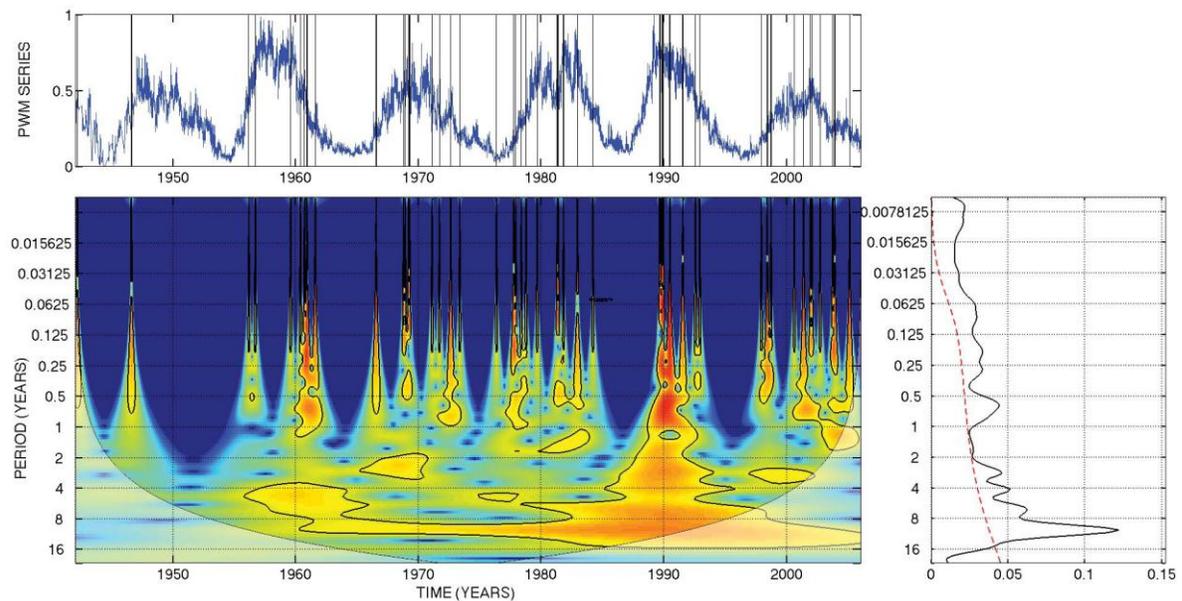


Figura 1.5 Modulación con pulsos de la serie de RSP (Pérez-Peraza, *et al.*, 2009).

Además de los periodos característicos de la actividad solar de mediano plazo (0.3, 0.5, 0.7, 1.3, 3.5, 7 y 11 años) se reportan periodos de corto plazo (menores a tres meses) de 2.5, 5–8, 11, 22–30 y 60 días; del análisis wavelet se reportan periodos de plazo ultra-corto, en el rango de 15 minutos a 10 horas, además periodos de oscilación para la series de manchas solares e índices de la Corona de 2.5, 11,14 y 30 días (SS) y 2.5, 5, 30 y 60 días (IC).

La tendencia en la presencia de RSP durante los máximos en los ciclos de actividad solar puede tal vez, estar asociada, a la presencia de periodicidades de plazo ultra-cortos; puesto que la mayoría de las periodicidades encontradas en RSP, SS y CI son similares, por el momento se puede inferir que existe una sincronización de oscilaciones entre diferentes capas solares, que van desde la sub-fotosfera hasta la Corona, indicando que el fenómeno de RSP no es un fenómeno local específico de la estructura Cromosférica o Coronal (Pérez-Peraza, *et al.*, 2009).

Con al análisis Wavelet y el análisis de Componentes Principales pretendemos proporcionar información que sea orientada a la explicación de la física de un GLE y a la búsqueda de firmas espectrales, que puedan llevar a la predicción de estos fenómenos; en el avance de esta tesis presentamos las bases del análisis de Fourier, el análisis Wavelet y el análisis de Componentes Principales para el sustento de los resultados finales.

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS DE FOURIER

2.1 Introducción

El análisis de Fourier juega un papel central en el tratamiento de señales, su contexto inicial para el estudio de la disipación del calor en un medio sólido, pronto lo llevaron al desarrollo de soluciones para la ecuación de Laplace y la ecuación de Onda. Algunas señales muestran componentes periódicos que se repiten a intervalos fijos; estos son estudiados convenientemente por el análisis armónico basado en la serie de Fourier. Para el estudio en Ciencias de la Tierra es evidente que señales de esta naturaleza son solo ideales, pues no es común encontrar señales estacionarias, de manera que, al utilizar la serie y transformada de Fourier debemos de tener en mente todas las consideraciones necesarias para no generar resultados o interpretaciones erróneos. En el presente capítulo abordamos el tratamiento y análisis de Fourier, desarrollando sus distintas expresiones, presentando sus propiedades hasta llegar a la optimización por la FFT y la transformada de Gabor.

2.2 Señales

Una señal es una representación de una medición o percepción de una o más variables; puede ser una cantidad física que se encuentra en función del tiempo o del espacio, o una cantidad adimensional como el registro de la varianza de un conjunto de datos normalizados. Matemáticamente una señal se expresa como función de una o más variables independientes y se pueden clasificar de acuerdo a distintas características de las cuales presento algunas:

- Según el número de variables

Señales multicanales: tienen en común registrar la misma variable, puede ser por venir de fuentes distintas o por utilizar múltiples sensores.

Señales multidimensionales: registran más de una variable independiente.

- Según su adquisición

Señales análogas: señales continuas, donde la variable independiente se encuentra definida para cualquier instante del dominio (registro de la señal por un sistema análogo).

Señales digitales: señales donde la función toma solo valores específicos definidos por la variable independiente, generalmente con un espaciamiento constante (señales registradas por un sistema digital).

- Según la cantidad de información que se dispone

Señales deterministas: señales, en la cual, su función de transferencia es conocida, se pueden expresar correctamente por una función matemática o regla de correspondencia, se conoce con certeza su evolución en el futuro.

Señales aleatorias: Señales que evolucionan de forma impredecible (no parece existir alguna regla de correspondencia que permita conocer la evolución), se conoce solo el comportamiento durante el registro, ignorando totalmente su pasado y su futuro.

- Según su periodicidad

Señales periódicas: señales en las que a intervalos bien definidos dentro del dominio, la variable dependiente toma exactamente los mismos valores.

Señales aperiódicas: señales en los cuales la variable dependiente se considera transitoria en cualquier intervalo del dominio.

- Según su contenido energético

Señales de energía finita: señales con elementos finitos, en los cuales la integral de su función elevada al cuadrado y evaluada de menos infinito hasta infinito se encuentra definida.

Señales de potencia media: señales que tienen energía infinita de las cuales se puede definir una potencia media.

En este trabajo se estudiaron señales transitorias y digitales; hasta el momento consideramos que la naturaleza de la señal de rayos cósmicos es *cuasi-estacionaria* y los GLE's son de naturaleza *estocástica*, de manera que no conocemos con certeza cuales son los parámetros que controlan la regla de correspondencia. Para afrontar el estudio tenemos que comprender el análisis de Fourier que se desarrolla con consideraciones que abordaremos en este capítulo.

2.3 Series de Fourier

Las series de Fourier describen señales periódicas como una combinación lineal de exponenciales complejas, multiplicados por factores de peso que determinan la contribución relativa de cada componente a la señal original; con esta herramienta podemos analizar una señal periódica en términos de su contenido frecuencial. La combinación lineal permite que operaciones en el dominio del tiempo se conserven en el dominio de las frecuencias. Al conjunto de expansiones en series de Fourier se denomina base ortogonal.

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(n)e^{\frac{i2\pi nt}{T}} \quad (2.1)$$

$$X(n) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) e^{-\frac{i2\pi nt}{T}} dt \quad (2.2)$$

En las ecuaciones anteriores presentamos la serie de Fourier en su forma exponencial; desarrollando la exponencial compleja y reagrupando los términos tenemos sus representaciones trigonométricas:

- Primera forma trigonométrica

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C(n) \cos \left[\frac{2\pi nt}{T} + \phi(n) \right] \quad (2.3)$$

donde

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt$$

$$C_n = 2|X(n)|$$

$$\phi(n) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}\{X(n)\}}{\text{Re}\{X(n)\}} \right].$$

- Segunda forma trigonométrica

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A(n) \cos \left(\frac{2\pi nt}{T} \right) + B(n) \sin \left(\frac{2\pi nt}{T} \right) \right] \quad (2.4)$$

donde

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt$$

$$A(n) = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cos \left(\frac{2\pi nt}{T} \right) dt$$

$$B(n) = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt.$$

A partir de los coeficientes de Fourier (C_0, A_0, C_n, A_n, B_n), es posible obtener la representación en frecuencias de una señal. La gráfica de estos coeficientes en función de su índice armónico se denomina espectro; existen dos tipos de gráficos, uno de amplitudes y otro de fases; mientras el espectro de amplitud es una representación de los factores de peso, el espectro de fase indica su ubicación (la posición de una onda con respecto a otra); para el caso de señales continuas y periódicas el espectro será discreto y no periódico extendiéndose infinitamente hacia ambos lados en el eje de frecuencias. El espectro de amplitud es una función par o simétrica mientras que el espectro de fase es una función impar o asimétrica.

2.3.1 Señales Periódicas y Discontinuas

Si $x(t)$ es continuo entonces las series convergen uniformemente a $x(t)$, de otra manera, si existen discontinuidades, la series convergerán en todo punto excepto en la discontinuidad, teniendo un salto en su valor medio (Oppenheim, 1998).

2.3.2 Condiciones de Dirichlet

Las señales que pueden descomponerse en series de Fourier cumplen con un conjunto de condiciones suficientes pero no necesarias (Howell, 2001).

1. $x(t)$ debe de ser absolutamente integrable en un periodo $\int_{t_1}^{t_1+T} |x(t)| dt$.
2. $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo de tiempo finito.
3. $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un periodo de tiempo finito.
4. $x(t)$ debe de ser periódica.

2.3.3 Efecto de Gibbs

La reconstrucción a partir de series de Fourier de señales discontinuas produce el denominado efecto de Gibbs; consiste en la aparición de un pico en el punto de la discontinuidad, incluso al utilizar un gran número de armónicos el efecto es evidente.

Una función periódica con discontinuidades tiene por espectro un conjunto infinito de armónicos; al tratar de reconstruir la señal utilizando N armónicos estamos truncando la función, este truncamiento hace evidente el efecto de Gibbs (aunque en realidad el fenómeno se debe a la discontinuidad en la señal y no al truncamiento).

2.3.4 Señales Continuas y no Periódicas

Retomando el análisis de señales periódicas, sus armónicos son variables discretas de tal forma que el número de armónico está en función de la frecuencia fundamental:

$$f_0 = \frac{1}{T},$$

donde el periodo T es finito; basándonos en la expresión anterior si tenemos $T \rightarrow \infty$, el eje de frecuencias se vuelve una variable continua de elementos diferenciales:

$$\frac{1}{T} \rightarrow df.$$

De esta manera la sumatoria que representaba la serie de Fourier se vuelve una integral.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi ft} dt \right] e^{i2\pi ft} dt \quad (2.5).$$

Esta integral cumple de igual manera las condiciones de Dirichlet excepto la condición de periodicidad, denominada una condición débil (Howell, 2001).

2.4 Transformada de Fourier

Dada una función $f(t)$ absolutamente integrable, la transformada de Fourier está definida como:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt} dt = \langle e^{-iwt}, f(t) \rangle \quad (2.6)$$

donde $w=2\pi f$.

De manera similar la transformada inversa de Fourier está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{iwt} dw \quad (2.7).$$

2.4.1 Propiedades

La transformada de Fourier es una función continua y compleja, y cumple con un número de propiedades (Vetterli y Kovačević, 1995):

- Linealidad: puesto que la transformada de Fourier es un producto interno se sigue inmediatamente la propiedad de linealidad del producto interno

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(w) + \beta G(w).$$

- Simetría: si $F(w)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$ entonces

$$f(t) \leftrightarrow 2\pi F(-w).$$

- Traslación: el cambio en el tiempo por t_0 resulta en una multiplicación por un factor de fase en el dominio de Fourier

$$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-iwt_0} F(w).$$

Por el contrario un cambio en la frecuencia resulta una modulación por un complejo exponencial en el dominio del tiempo

$$e^{-i\omega t_0} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0).$$

- Escala: un cambio de escala en tiempo se encuentra asociado a un escalado inverso en frecuencias

$$f(at) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

- Diferenciación: la derivada en tiempo resulta una multiplicación en frecuencias

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = (i\omega)^n F(\omega),$$

y la derivada en frecuencias está dado por

$$(-jt)^n f(t) = \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}.$$

- Momento: si llamamos m_n al n -ésimo momento de $f(t)$ entonces (Vetterli y Kovačević, 1995):

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

el teorema del momento en el dominio de Fourier está dado por

$$(-jt)^n m_n = \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \Big|_{\omega=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

- Convolución: la convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ viene dada por

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (2.8),$$

esta operación es denotada por $h(t) = f(t) * g(t)$, además se puede demostrar que la propiedad es simétrica $h(t) = g(t) * f(t)$.

En el dominio de las frecuencias la convolución está definida como una multiplicación, obteniendo la transformada de la ecuación 2.8 resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau e^{-i\omega t} dt \quad (2.9).$$

Cambiando el orden de integración y utilizando la propiedad de traslación llegamos a una multiplicación en el dominio frecuencial.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} G(\omega) d\tau = F(\omega)G(\omega) \quad (2.10)$$

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega) \quad (2.11).$$

2.4.2 Fórmula de Parseval

La transformada de Fourier es una transformación ortogonal y se satisface la conservación de la energía (Andreas, 2006).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G(\omega)d\omega \quad (2.12).$$

Para el caso en el que $f(t)=g(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (2.13),$$

donde el factor $1/2\pi$ viene de la definición de la transformada de Fourier.

La relación de Parseval puede evaluar de igual manera la potencia contenida en una señal a partir de los coeficientes de sus correspondientes series de Fourier

$$P = \frac{1}{T} \int_T [x(t)]^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} [X(k)]^2.$$

2.5 Señales Discretas y Periódicas

Es posible reemplazar una señal continua por una discreta, de esta manera tendremos una sucesión de muestras en lugar de la señal completa. La digitalización de una señal $h(t)$ se realiza multiplicando ésta por un tren de impulsos unitario $\delta_k(t)$, de periodo T (intervalo de muestreo); la consecuencia de éste proceso se puede observar en el dominio de las frecuencias. Aplicando el Teorema de Convolución podemos definir:

$$h(t)\delta_k(t) \leftrightarrow H(f) * \Delta_k(f) \quad (2.14),$$

ésta operación hace que la función $h(t)$ se describa sobre los impulsos a intervalos constantes de $\Delta_k(f)$; como el tren de impulsos está definido en un dominio infinito el resultado es una función periódica en el dominio de las frecuencias.

2.5.1 Teorema del Muestreo

El teorema establece que una señal se muestrea de manera que cumple la condición de Nyquits; esta condición dice que la frecuencia de muestreo tiene que ser mayor que la máxima frecuencia contenida en la señal, de otra manera no se capturará la señal por completo.

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} .$$

Esto significa que para cada valor Δt empleado en el muestreo de una señal el espectro que describe es diferente; para recuperar la señal tenemos que muestrear con una frecuencia mayor o igual a la frecuencia de Nyquits.

Matemáticamente el teorema del muestreo se expresa de la siguiente manera (Brigham, 1988):

$$h(t)\delta_k(t) = h(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = h_m(t) \quad (2.15),$$

donde $h_m(t)$ representa la señal muestreada en tiempo; con una convolución se puede realizar la misma operación en el dominio de las frecuencias.

Si la señal $h(t)$ en el dominio de las frecuencias es de ancho de banda limitada, es decir:

$$H(f) = \begin{cases} \neq 0; & |f| < f_N \\ = 0; & |f| > f_N \end{cases}$$

la función $h(t)$ muestreada con $\Delta t = 1/2f_N$, puede ser reconstruida a partir de sus valores muestreados $h(k\Delta t)$ por la siguiente expresión.

$$h(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(k\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} \quad (2.16).$$

El teorema del muestreo se basa estrictamente en la suposición que la señal $h(t)$ sea limitada en banda, esto sucede solo si su duración en tiempo es infinito (Brigham, 1988).

2.5.2 Fenómeno de Aliasing

Este fenómeno es una consecuencia del muestreo, y se da en el dominio temporal; dado que el número de muestras considerado en el tren de impulsos es infinito, digitalmente se hace necesario truncarlos a un número finito, este proceso se lleva a cabo con una función rectangular que entrega N muestras; el fenómeno de Aliasing disminuye mientras el número de muestras incrementa.

2.6 Serie de Fourier Discreta

Una señal discreta puede ser representada por sus espectros de amplitud y fase, estos dos elementos de análisis se encontraran limitados por una banda de frecuencias f_N .

Una señal periódica con periodo N tal que $x(n) = x(n+N)$, puede ser representada por una serie de Fourier, esta serie contiene N funciones exponenciales y se expresa como:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \quad (2.17),$$

donde

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi kn/N} \quad (2.18).$$

Los coeficientes discretos de Fourier son cíclicos con periodo N, desarrollando la exponencial compleja y reagrupando términos podemos representar las expresiones en su primer y segunda forma trigonométrica.

- Primera forma trigonométrica

$$x(n) = C_0 + \sum_{k=1}^L C(k) \cos \left[\frac{2\pi kn}{N} + \phi(k) \right] \quad (2.19)$$

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$C(k) = 2|X(k)|$$

$$\phi(k) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}\{X(k)\}}{\text{Re}\{X(k)\}} \right].$$

- Segunda forma trigonométrica

$$x(n) = A_0 + \sum_{k=1}^L \left[A(k) \cos \left(\frac{2\pi kn}{N} \right) + B(k) \sin \left(\frac{2\pi kn}{N} \right) \right] \quad (2.20),$$

dónde:

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$A(k) = \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \left(\frac{2\pi kn}{N} \right)$$

$$B(k) = \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right).$$

Los coeficientes discretos de Fourier están dados por $C_0, C_K A_0, A_k, B_k$, (dependiendo de su forma trigonométrica); la dimensión L está en función del número de muestras contenidas en la señal; de acuerdo a la frecuencia de Nyquits solo es necesario la mitad de los armónicos para la reconstrucción de la señal temporal, de manera que L es diferente si se trata de una señal con un número N de muestras par o impar.

$$L = \begin{cases} \frac{N}{2} & ; \quad N \text{ par} \\ \frac{N-1}{2} & ; \quad N \text{ impar} \end{cases}.$$

Señales periódicas y discretas arrojan un espectro periódico y discreto, esto resulta al contemplar el periodo fundamental que es el número de muestras por el intervalo de muestreo.

2.7 Transformada Discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier surge al tender el periodo fundamental (definido anteriormente) al infinito, esto sucede al tratar con señales transitorias y suponer una discretización desde menos infinito hasta infinito.

Para programar este tipo de señales se consideran transitorias y finitas, de esta forma evitamos el concepto de infinito definiendo la transformada de Fourier de la siguiente forma:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (2.21),$$

y su respectiva transformada inversa como:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (2.22).$$

De manera similar al desarrollar la exponencial compleja y reacomodando los términos se pueden expresar en sus diferentes formas trigonométricas.

2.8 Transformada Rápida de Fourier

La implementación de la transformada de Fourier involucra $N \times N$ multiplicaciones y sumas complejas; para cada uno de los N valores de k es necesaria N multiplicaciones por $x(n)$ y $N-1$ sumas de resultados (ecuación 2.21).

El algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) permite reducir el número de operaciones en $N \log_2 N$ (Gaberson, 2003); basándose en las propiedades de separabilidad, simetría y periodicidad se elimina información redundante; podemos calcular la transformada de Fourier de dos variables por la aplicación sucesiva de la transformada de Fourier de una variable.

$$w_N^{k+\frac{N}{2}} = -w_N^k \text{ simetría}$$

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^k \text{ periodicidad}$$

$$W_N = e^{-i2\pi/N}$$

$$N = 2^n$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad k = 0,1,2,3, \dots, N-1.$$

El algoritmo trabaja de forma eficiente cuando la señal es una potencia de dos, con un análisis cuidadoso podemos dividir la transformada de Fourier en una parte par y otra impar:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k}.$$

En la ecuación anterior podemos observar que la transformada de Fourier discreta de N elementos se convierte en la transformada de dos series de $N/2$ elementos; estas series se pueden sub-dividir a su vez en dos partes y continuar con esta acción hasta la etapa $\log_2 N$, finalmente tenemos $N \log_2 N$ sumas complejas. Este proceso de descomposición es llamado *decimación*, y se puede realizar en tiempo o en frecuencias, la diferencia de trabajar la decimación en frecuencias es dividir los datos en los primeros $N/2$ y los últimos $N/2$ frecuencias.

2.9 Transformada de Gabor

Para el análisis de señales estacionarias la transformada de Fourier es una herramienta con perfecta resolución en frecuencias; para el caso de señales cuasi-estacionarias y no estacionaria es necesario conocer la ubicación temporal de las frecuencias, y es exactamente, donde el análisis de Fourier tiene ciertas limitantes que se hacen necesarias resolver.

Gabor (1946) enfrentó el problema proponiendo utilizar la transformada de Fourier por ventanas; el objetivo de esta transformada es modular una onda finita y trasladarla; con éste concepto tratamos de dividir la señal en segmentos temporales donde consideramos que la señal es estacionaria, calculando en estas porciones la transformada de Fourier clásica.

Matemáticamente la transformada de Fourier por ventanas tiene la siguiente expresión:

$$TFV(t, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)e^{-i\varepsilon t} dt \quad (2.23).$$

Consideramos que $h(t)$ es una función ventana de valores reales ubicada en tiempo y modulada por ε .

2.9.1 Principio de Incertidumbre de Heisenberg

El concepto nace en un fenómeno físico al tratar de conocer el momento y la posición exacta de una partícula; éste principio aplicado al análisis de señales dice que no podemos saber la representación exacta *tiempo-frecuencia*.

Utilizando el principio de incertidumbre de Heisemberg sabemos que existe un compromiso entre el tiempo y la frecuencia, esto es, que no podemos tener una alta resolución simultáneamente para ambos dominios, por lo cual, debemos de elegir qué resolución es más conveniente para nuestro estudio al mapearla en el plano *tiempo-frecuencia*.

La transformada de Gabor tiene la limitante de mantener constante el soporte de la ventana durante todo el análisis; al elegir el tamaño de la ventana, estamos decidiendo tener buena resolución en tiempo si la ventana es pequeña, o buena resolución en frecuencias si la ventana es grande. La transformada de Gabor también se encuentra en la literatura como Transformada Corta de Fourier (STFT por sus siglas en inglés).

En el siguiente capítulo presentamos las bases de la Transformada Wavelet, que de igual manera propone una representación *tiempo-frecuencia* para una señal no estacionaria, proporcionando de manera simultánea la ubicación temporal de las frecuencias contenidas en la señal. A diferencia de la STFT, la transformada Wavelet analiza la señal con diferentes resoluciones para diferentes frecuencias, utilizando un soporte de ventana variable y el concepto del *análisis multiresolución*.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS WAVELET

3.1 Introducción

La necesidad de representar señales con diferentes frecuencias para caracterizar un medio estratificado con capas de distinto grosor, llevo a Morlet (1970) implementar el concepto de wavelet; el origen del concepto está en la Ingeniería Geofísica en el estudio de señales sísmicas, más adelante Grossman (1981) y Meyer (1985) lo formalizan matemáticamente.

La transformada wavelet tienes varias ventajas frente al análisis de Fourier, caracterizando eficientemente señales locales no estacionarias y de rápida transitoriedad. Su primera aproximación es por la transformada de Fourier por Ventanas (Transformada de Gabor), el cual mapea la señal en una representación *tiempo-escala* con grandes inconvenientes al mantener el soporte de la ventana constante durante todo el análisis.

El análisis wavelet es una herramienta matemática que descompone una señal temporal en una suma de señales temporales; cada una de estas tiene diferentes escalas en diferentes niveles de resolución que surgen al dilatar y desplazar una función temporal denominada Wavelet (*ondeleta*) Madre, esto permite el análisis con diferentes niveles de detalle dando lugar al *análisis multiresolución*.

Las aplicaciones de esta herramienta son muy extensas y su desarrollo es implementado en disciplinas muy diferentes como lo son la prospección geofísica y la medicina. En éste capítulo presentamos la *Transformada Wavelet continua y discreta*, sus relaciones con el *factor de escala*, el *análisis multiresolución* y la *wavelet madre Morlet*. Al manejar señales no estacionarias la interpretación wavelet requiere de la comprensión de herramientas estadísticas como lo son los *Métodos de Montecarlo*.

3.2 Función de Escala

Se puede construir una base ortogonal en el espacio vectorial V_j por medio de dilataciones y traslaciones discretas de una función $\varphi(t)$ denominada función de escala, además esta función es unitaria para formar una base ortonormal.

Al proyectar una función original $f(t) \in L^2(R)$ en la base ortonormal generada por la función de escala desplazada, estamos realizando una correlación entre la función $f(t)$ y la función de escala $\varphi(t)$ muestreada a intervalos enteros.

La función de escala básica es dilatada por un factor de escala 2^j y desplazada por un factor de escala discreto de traslación k , dividida por la raíz del factor 2^j para ser unitario:

$$\varphi_{i,k}(t) = 2^{-i/2} \varphi(2^{-i}t - k) \quad (3.1).$$

El resultado de la correlación entre $f(t)$ y $\varphi(t-k)$ es una aproximación de menor detalle de la misma función $f(t)$; la proyección forma un subespacio vectorial $V_0 \in L^2(R)$, que contiene todas las aproximaciones de $f(t)$ generadas por el conjunto ortonormal $\{\varphi(t-k)\}$.

V_0 es una base ortonormal con un paso de traslación entero, a continuación se generan las siguientes bases ortonormales V_1, V_2, \dots, V_i ; con la función de escala dilatada y con un paso de traslación $2^1, 2^2, \dots, 2^i$, respectivamente. Finalmente formamos un conjunto de bases ortonormales pertenecientes a la misma función de escala $V_i \in L^2(R)$.

El conjunto de subespacios V_i es el resultado de las proyecciones $f(t)$ sobre el conjunto de bases ortonormales en $L^2(R)$, cada subespacio V_i contiene todas las posibles aproximaciones de $f(t)$; el subespacio V_i pertenece a la base ortonormal de la función de escala en el nivel de resolución i , de esta manera, $\varphi(t)$ genera los espacios del *análisis multiresolución* (Sheng, 1996).

Todas las aproximaciones $f(t)$ son generadas por el mismo factor de escala en distintas resoluciones, establecido esto, las aproximaciones deben de ser equivalentes y los espacios de aproximación V_i pueden ser deducidos por una dilatación, teniendo toda la información el nivel de mayor resolución, así entonces V_i es un subespacio de V_{i-1} :

$$f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{i+1} \text{ (menor resolución)}$$

$$f(t) \in V_i$$

$$f(2t) \in V_{i-1} \text{ (mayor resolución)}.$$

3.3 Análisis Multiresolución

El Análisis Multiresolución se utiliza para estudiar señales en múltiples bandas de frecuencia; consiste en una secuencia de subespacios cerrados V_i en $L^2(\mathbf{R})$ (Sheng, 1996), cuando la resolución i tiende a menos infinito la función aproximada debe de converger a la función original:

$$\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \subset L^2(\mathbf{R}),$$

de modo que:

$$V_{i \rightarrow -\infty} = L^2(\mathbf{R}) \text{ (incremento de resolución)}$$

$$V_{i \rightarrow +\infty} = \mathbf{0} \text{ (decremento de resolución)}.$$

Con señales de alta frecuencia el análisis multiresolución proporciona alta resolución en tiempo y baja en frecuencias, de manera contraria, con señales de baja frecuencia ofrece alta resolución en frecuencias y baja resolución temporal.

El análisis hace uso de filtros con diferentes frecuencias de corte analizando la señal a distintas escalas; consiste básicamente en aproximar una función $f(t)$ con diferentes niveles de resolución, descomponiendo el espacio de la función en una secuencia de subespacios.

La idea central es, que con ayuda de la función de escala tomemos información de la variación de la señal con resolución 2^{-i} , y de esta forma modelar la señal con proyecciones ortogonales sobre espacios vectoriales de diferente resolución.

3.4 Wavelet Madre

La función de escala no es completa a cualquier nivel de resolución, porque se pierde información en el proceso de aproximación al proyectar una función $f(t)$ sobre la función de escala ortonormal $\varphi(t)$ (Sheng, 1996); para obtener la información complementaria se utilizan proyecciones sobre otras funciones llamadas *wavelets*.

De manera similar a la función de escala, las wavelets son formadas a partir de una wavelet madre por dilataciones y traslaciones:

$$\psi_{i,k}(t) = 2^{-i/2}\psi(2^{-i}t - k) \quad (3.2)$$

Las traslaciones de la wavelet madre pueden formar una base ortonormal (transformada wavelet discreta) para cada escala i , cumpliendo al mismo tiempo ser un conjunto ortogonal $\{\psi(2^{-i}t - k)\}$ con el conjunto formado por la función de escala $\varphi(2^{-i}t - k)$ en el mismo nivel de resolución; la expresión matemática que describe esta condición es el producto puto:

$$\langle \varphi_{i,k}, \psi_{i,n} \rangle = 2^{-i} \int \varphi(t - k)\psi(t - n)dt = 0 \quad (3.3)$$

donde $k, n \in \mathbb{Z}$.

La función matemática prototipo denominada wavelet madre debe satisfacer dos condiciones:

1. Ser finita en tiempo

Esta condición se representa por una integral en el dominio temporal que evalúa la cantidad de energía estableciendo un valor positivo definido:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < +\infty \quad (3.4).$$

La función que genera la onda debe de cumplir con la condición de admisibilidad en el dominio de las frecuencias, donde C es llamada *constante de admisibilidad*. Para ser admisible como una

wavelet, esta función debe tener un promedio cero y debe estar localizada tanto en el espacio de frecuencia como en el tiempo (Farge, 1992):

$$C = \int \frac{|\psi(w)|^2}{|w|} dw < +\infty.$$

2. tener valor medio nulo

Expresa que la función wavelet madre debe de ser oscilante:

$$\int \psi(t) dt = 0.$$

Las condiciones para generar una wavelet madre no restringen de manera drástica las funciones que se pueden utilizar como base generadora; por tal motivo varios autores han propuesto diferentes ondículas. El criterio para elegir la wavelet madre se encuentra en función del objetivo del análisis, el comportamiento de la señal y de lo que se pretende observar.

Proyectando la función $f(t)$ sobre la base ortonormal generada por las wavelets realizamos la correlación entre $f(t)$ y $\psi(t)$ que, de igual manera que la función factor de escala, muestrea la función a intervalos discretos; el resultado de estas proyecciones es el subespacio W_i abarcado por $\{\psi(2^{-i}t - k)\}$.

Como la base wavelet y la base función de escala son ortogonales entre si dentro del mismo nivel, se cumple que: el subespacio W_i es el complemento ortogonal del subespacio V_i , además, los dos subespacios están contenidos en el subespacio de mayor resolución V_{i-1} resultando ser, la suma directa de W_i y V_i (Misiti-Oppenheim, 2003).

3.5 Transformada Wavelet Continua

La Transformada Wavelet se define como la descomposición de una función $f(t)$ en un conjunto de funciones $\psi_{s,\tau}(t)$ que forman una base.

$$W_f(s, \tau) = \int f(t)\psi^*(t)dt \quad (3.5).$$

Donde ψ^* representa el complejo conjugado de ψ , esto para eliminar la parte imaginaria.

La base es generada por la dilatación s y la traslación τ de la wavelet madre definida como:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right),$$

donde el factor de escala s y el factor de traslación τ son variables continuas; con esta transformación la función unidimensional en el dominio del tiempo es mapeada en un espacio bidimensional mediante las variables (s, τ) .

Las wavelet generadas tienen diferente escala y ubicación conservando la misma forma, cuando $s > 1$ las wavelets son dilatadas, de manera contraria cuando $s < 1$ las wavelets son contraídas.

Ya definida la *ondícula* y con el análisis multiresolución, obtenemos una representación de variaciones rápidas en el dominio del tiempo en bandas de frecuencias grandes y de baja resolución; recíprocamente a variaciones temporales lentas le corresponden bandas de frecuencias estrechas y de alta resolución.

La cobertura simultánea de los dominios frecuencial y temporal realiza una descomposición en bandas, donde los intervalos de tiempo y frecuencia son fijos a cada nivel de descomposición pero distintos en el nivel siguiente; en cada nivel se forman rectángulos de área $\Delta f \Delta t$ constante correspondiente a la resolución del dominio.

A baja frecuencia los rectángulos son pequeños en altura pero muy anchos por lo que tenemos una buena resolución en frecuencia y al mismo tiempo una mala resolución temporal, por el contrario, en altas frecuencias los rectángulos son pequeños en su ancho pero grandes en altura lo que refleja la pérdida de resolución en frecuencia pero entrega una mejor ubicación temporal (figura 3.1).

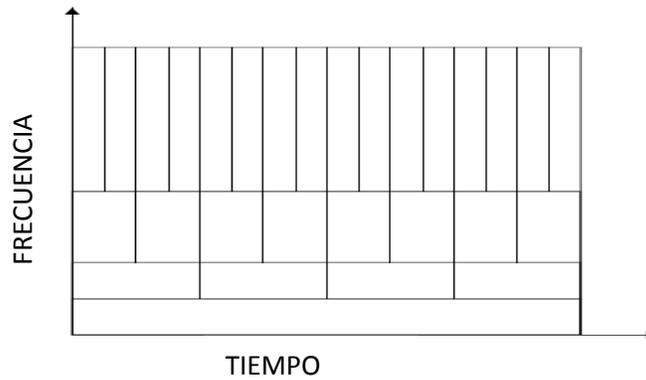


Figura 3.1 Dominio tiempo-frecuencia efectuado por la transformada wavelet.

3.6 Transformada Wavelet Discreta

De manera similar al análisis de Fourier, la transformada wavelet continua tiene su versión discreta; al definir una wavelet madre continua que va a mapear una función $f(t)$ continua pero con un factor de escala y traslación discreto, resulta una serie de coeficientes y es llamada descomposición en *Series Wavelet* (Sheng, 1996).

$$f(t) = \sum_s \sum_\tau W_f(s, \tau) \psi_{s, \tau}(t) \quad (3.6)$$

Las wavelets discretas son funciones wavelets continuas con factor de escala y traslación discretos, estos pueden ser expresados como:

$$s = s_0^i \quad \tau = k\tau_0 s_0^i,$$

donde i, k son números enteros y s_0 es un paso fijo de dilatación ($s_0 > 1$).

El paso de traslación se encuentra en función del paso de dilatación, de esta forma la correspondencia de escalas es uniforme, generando escalas pequeñas para pasos de tiempo pequeños y escalas grandes para pasos de tiempo grandes. La ecuación correspondiente a las wavelets discretas se expresa de la siguiente forma:

$$\psi_{s, \tau}(t) = s_0^{-\frac{i}{2}} \psi \left(s_0^{-i} (t - k\tau_0 s_0^i) \right) = s_0^{-\frac{i}{2}} \psi (s_0^{-i} t - k\tau_0) \quad (3.7)$$

Si se elige $s_0 = 2$ y $\tau=1$, la base $\psi_{s,\tau}(t)$ constituye una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ con buenas propiedades de localización *tiempo-frecuencia* (Zarantonello, 1997).

Con la base ortonormal, una función con energía finita $f(t)$, puede ser reconstruida como la suma de los coeficientes wavelets discretos $W_f(s, \tau)$ multiplicado por las funciones de la base $\psi_{s,\tau}(t)$. Una descomposición wavelet no posee información redundante y representa a la señal de forma unívoca de manera que se cumple (Sheng, 1996):

$$\int \psi(t)_{i,j}^* \psi(t)_{m,n} dt = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i = m, j = n \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

En cada nivel de resolución son generadas dos bases ortonormales, una por el factor de escala y otra correspondiente a la función wavelet; de acuerdo con el análisis multiresolución podemos definir la siguiente expresión:

$$\varphi(t) = \sum_k p(k) \varphi(2t - k),$$

donde se expresa que $\varphi(t) \in V_0$ puede ser representada como combinación lineal de la suma ponderada del conjunto de mayor resolución $\{\varphi(2t - k)\} \in V_{-1}$, en otras palabras, $\varphi(t)$ es proyectado en un espacio de mayor resolución; $p(k)$ es llamado coeficiente de *inter-escala* representando una secuencia correspondiente a un filtro paso bajo discreto (Sheng, 1996).

De manera similar la wavelet madre $\psi(t)$ puede ser desarrollada en la base ortonormal de la función de escala en el subespacio de mayor resolución $\{\varphi(2t - k)\} \in V_{-1}$, generando su símil $q(k)$.

$$\psi(t) = \sum_k q(k) \varphi(2t - k).$$

En este caso $q(k)$ corresponde al coeficiente de *inter-escala* que define un filtro discreto pasa-alto (Sheng, 1996). Las relaciones combinan elementos de la función de escala y la función wavelet, permitiendo a la función wavelet estar en función de la misma función de escala.

3.7 Descomposición Wavelet Piramidal

Consideremos una función $f(t) \in V_0$, que se puede reconstruir como la sumatoria de los coeficientes discretos c_0 multiplicados por la función de escala continua trasladada tal que:

$$c_0(k) = \langle f, \varphi_{0,k} \rangle = \int f(t)\varphi(t-k)dt \quad (3.8),$$

donde $f(t)$ es la combinación lineal siguiente:

$$f(t) = \sum_k c_0 \varphi(t-k) \quad (3.9).$$

El subespacio ortogonal V_0 puede ser considerado como la suma directa de los subespacios ortogonales de menor resolución V_1 y W_1 , de modo que $f(t)$ está descrito por la combinación lineal de funciones $v_1 \in V_1$ y $w_1 \in W_1$.

$$f = f(P_1 + Q_1)$$

$$f = \sum_n c_1(n)\varphi_{1,n} + \sum_n d_1(n)\psi_{1,n},$$

donde

$$fP_1 = \sum_n c_1(n)\varphi_{1,n} \quad (3.10)$$

$$fQ_1 = \sum_n d_1(n)\psi_{1,n}$$

De modo que calculando el producto interno para f y fP_1 se tiene:

$$\langle \varphi_{1,n}, f \rangle = \langle \varphi_{1,n}, fP_1 \rangle \quad (3.11),$$

despejando c_1 de 3.10 y relacionando con 3.11 llegamos a:

$$c_1(n) = \langle \varphi_{1,n}, f \rangle = \langle \varphi_{1,n}, fP_1 \rangle.$$

Retomando la combinación lineal inicial 3.9 de mayor resolución tenemos:

$$c_1(n) = \sum_k \langle \varphi_{1,n} \varphi_{0,k} \rangle c_0(k).$$

De donde observamos que el coeficiente de menor resolución c_1 contiene elementos de c_0 y del cual el producto interno se puede calcular como:

$$\langle \varphi_{1,n}, \varphi_{0,k} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \int \varphi(t-k) \varphi\left(\frac{t}{2} - n\right)$$

del cual se puede demostrar que (Sheng, 1996):

$$c_1(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k p(k-2n) c_0(k)$$

De manera similar se comporta el complemento d_1 de los coeficientes wavelets discretos

$$d_1(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k q(k-2n) c_0(k).$$

La descomposición anterior se puede continuar hasta la resolución que se desee; de modo que es posible llegar a una expresión general:

$$P_{i-1}f = P_i f + Q_i f = \sum_n \varphi_{i,n} c_i(n) + \sum_n \psi_{i,n} d_i(n) \quad (3.12)$$

$$c_i(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k p(k-2n) c_{i-1}(k)$$

$$d_i(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k q(k-2n) c_{i-1}(k)$$

En esta descomposición en Series wavelet, la función de escala y las bases wavelet son continuas, mientras que los coeficientes de aproximación $c_i(n)$ y los coeficientes wavelet $d_i(n)$ son discretos (Sheng, 1996).

Con la implementación recursiva de filtros pasa altas y pasa bajas es posible desarrollar los coeficientes $c_i(n), d_i(n)$; el algoritmo que realiza esta operaciones es conocido como algoritmo de Mallat (Sheng, 1996).

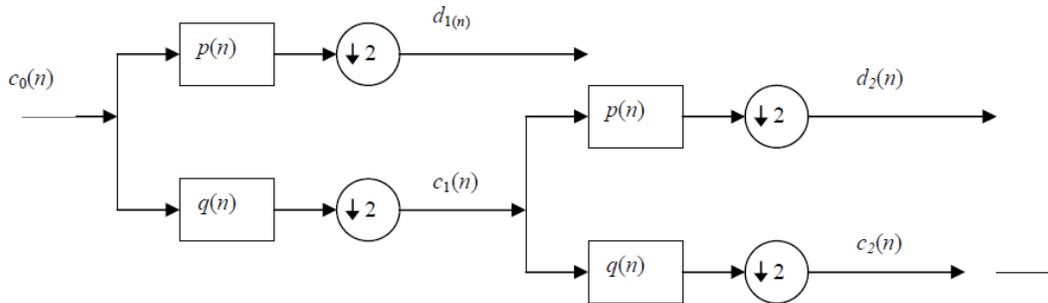


Figura 3.2 Esquema de la descomposición en series wavelet.

3.8 Momentos de Desvanecimiento

El concepto de momentos de desvanecimiento es un parámetro que nos permite conocer la forma de la wavelet (suavidad); el orden de la transformada wavelet está dado por el número de momentos de desvanecimiento que existan. El i -ésimo momento se calcula como (Vetterli y Kovačević, 1995):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)t^n dt = 0 \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.13),$$

El mayor orden que puede alcanzar $\psi(t)$ es N , el primer momento es con N igual a cero

3.9 Wavelet Morlet

El ejemplo clásico de una wavelet de tiempo continuo es la wavelet Morlet, definido como una onda senoidal compleja que contiene una envolvente gaussiana:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2jw_0 t} e^{-t^2/2} \quad (3.14)$$

$$\Psi(w) = e^{-(w-w_0)^2/2}.$$

El factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ se utiliza para que la función cumpla con $|\psi(t)|=1$; en otra parte, la frecuencia central w_0 , se sustituye por el segundo máximo del conjunto $\psi(t)$, esto se debe a que el primero no cumple con la condición de admisibilidad, al utilizar una escala diádica tenemos como frecuencia central:

$$w_0 = \pi \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} = 5.336$$

Con esto notamos que la wavelet no es admisible para $\Psi(w)|_{w=0} \neq 0$ (Vetterli y Kovačević, 1995).

La wavelet madre Morlet la utilizamos en el presente trabajo porque consideramos que entrega buenas características sobre la oscilación de los periodos en la señal de RCG; a diferencia de un wavelet madre tipo Haar que describe cambios bruscos adecuada para discontinuidades.

3.10 Espectro de Potencia Wavelet

La transformada wavelet puede contener una parte real y otra imaginaria (Wavelet Morlet), de la misma forma que se realiza en la transformada de Fourier, podemos definir una amplitud y una fase; la potencia se define como el cuadrado del valor absoluto de la transformada wavelet:

$$P = |W_f(s, \tau)|^2.$$

La normalización de la función wavelet madre en cada escala nos dice que su integral de la misma función madre elevada al cuadrado es uno, de ésta forma, en cada escala la energía es unitaria y además nos brinda la oportunidad de comparar wavelets madre distintas.

El interés de nuestro análisis se enfoca a la distribución temporal de la potencia espectral. Con un análisis cualitativo describiremos la distribución de potencia en la señal de RCG, la imagen de salida es en realidad un arreglo marcial de valores complejos que analizaremos en un capítulo posterior cuantitativamente por medio del *Análisis de Componentes Principales*.

El Espectro Global Wavelet (EGW) es el promedio en cada nivel de resolución, el espectro teórico utilizado es el ruido rojo por ajustarse a los cambios continuos de frecuencia en la señal (Torrence y Compo, 1998)

3.11 Cono de Influencia y Niveles de Significancia

Es la región donde los efectos de borde llegan a ser importantes (Torrence y Compo, 1998), estos efectos se presentan por tener la consideración en la transformada de Fourier de que las señales son cíclicas; para disminuir esto se rellena con ceros los bordes de la señal hasta la siguiente potencia de dos para después removerse; la implementación de los ceros produce discontinuidades generando errores en los extremos de la señal, de igual manera la potencia wavelet al inicio y al final de los bordes decae por un factor de e^{-2} (Torrence y Compo, 1998), por lo tanto la información fuera de esta región no es clara para la interpretación.

Si asumimos que la serie de tiempo tiene un espectro de potencia promedio (respecto al espectro de Fourier de ruido rojo), un pico en el espectro de potencia wavelet superior al espectro anterior lo asumimos como característica verdadera con cierto porcentaje de confianza (o cierto nivel de significancia).

La confiabilidad dentro del cono de influencia y en el espectro Global Wavelet se encuentra definido con el 95% de confianza.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

4.1 Introducción

Al investigar un fenómeno desconocido se pretende abordarlo con muestras de diferentes variables, en las cuales muchas veces existe una fuerte correlación; las relaciones se pueden interpretar como una medida del fenómeno bajo distintos puntos de vista. En un proceso estadístico que cuenta con un gran número de variables es difícil visualizar sus conexiones, al considerar muchas variables tendremos un número mayor de combinaciones representando los coeficientes de correlación.

Es importante reducir el número de variables para desechar información redundante y optimizar el proceso. El Análisis de Componentes Principales (ACP) propone la transformación a un nuevo conjunto sintético de variables (los componentes principales), que no están correlacionados y se encuentran ordenados de tal forma que los primeros conservan la mayor parte de la variación presente en todas las variables originales.

La técnica de ACP fue desarrollada por Pearson (1901) para luego ser retomada por Hotelling (1933) y posteriormente ser implementadas con el impulso de las computadoras. En éste capítulo presentamos el desarrollo de los componentes principales y su aplicación en el reconocimiento de imágenes.

4.2 Componentes Principales

El análisis de componentes principales (ACP) es una técnica estadística multivariante de simplificación, que permite transformar un conjunto de variables originales correlacionadas entre sí, en un conjunto sintético de variables no correlacionados denominados factores o componentes principales. En esta transformación no se establecen jerarquías entre variables y se elimina la información repetida (Jolliffe, 1986). Las nuevas variables son combinaciones linealmente independientes de las variables originales, ordenadas de acuerdo a la representación de dispersión respecto a la nube total de información recogida en las muestras.

Consideremos un grupo de variables (x_1, x_2, \dots, x_p) , cada uno con el mismo número de muestras; cada variable registra información en un vector del mismo tamaño el cual, en forma matricial lo podemos representar de la siguiente manera:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} = 100\% \text{ de información}$$

n = individuos p = variables

La matriz X constituye la tabla de datos u observaciones, el arreglo de columnas y renglones en conjunto representan el 100% de la información.

La comparación de dos individuos i y j es evaluada con la distancia euclidiana clásica entre:

$$d^2(i, j) = \sum_{p=1}^p (x_{ip} - x_{jp})^2 \quad (4.1).$$

A partir de esta matriz calculamos un nuevo conjunto (C_1, C_2, \dots, C_p) no correlacionados entre sí, en la cual sus varianzas vayan decreciendo progresivamente. Cada elemento C_j ($j=1, \dots, p$) representa una combinación lineal de las variables originales (x_1, x_2, \dots, x_p) .

$$C_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jp}x_p$$

$$C_j = a'_j x,$$

donde

$$a'_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj})$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix},$$

a'_j es una matriz de constantes y representa el peso de las variables en cada componente; las componentes explican una parte de la varianza total, pretendiendo encontrar k componentes que representen casi toda la varianza de la nube de información.

Condiciones para obtener el primer componente principal:

1. -Para mantener la ortonormalidad de la transformación se impone que:

$$a'_j a_j = \sum_{k=1}^p a_{kj}^2 = 1 \quad (4.1).$$

2. -La varianza en el primer componente principal C_1 sea máxima en la nube de datos.

El primer componente principal representa la mayor varianza observada sujeta a cumplir la condición de ortonormalidad; el segundo componente principal se obtiene calculando los valores de a_2 de tal manera que C_1 y C_2 sean no correlacionados (ortogonales). Del mismo modo se eligen los siguientes componentes cada uno con menor varianza que el anterior.

4.3 Obtención Analítica del Primer Componente Principal

Consideremos una matriz de datos en desviaciones respecto a su media S ; el primer componente principal viene dado por:

$$\begin{bmatrix} C_{11} \\ \vdots \\ C_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1p} \end{bmatrix} \leftrightarrow C_1 = Xa_1 \quad (4.2),$$

donde C_1 es una variable estandarizada con respecto a su media.

Verificamos que:

$$\text{Var}(C_1) = \frac{1}{n} \sum C_{1i}^2 = \frac{1}{n} C_1' C_1 = \frac{1}{n} a_1' X' X a_1$$

$$\text{Var}(C_1) = a_1' \left[\frac{1}{n} X' X \right] a_1$$

$$\frac{1}{n} X' X = S$$

$$\text{Var}(C_1) = a_1' S a_1 \text{ (máxima varianza)}$$

$$\sum_{j=1}^p a_{1j}^2 = a_1' a_1 = 1 \text{ (ortonormalidad)}$$

Utilizamos los multiplicadores de Lagrange para maximizar la función sujeta a las condiciones anteriores, donde a_1 es la incógnita que representa el vector con la combinación lineal óptima. Buscamos uno de los valores extremos (para nuestro caso el máximo).

$$L = a_1' S a_1 - \lambda (a_1' a_1 - 1) \quad (4.3),$$

Derivando 4.3 respecto a a_1 e igualando a cero tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 2S a_1 - 2\lambda a_1 = 0$$

$$(S - \lambda I_p) a_1 = 0$$

$$S a_1 = \lambda I_p a_1 \quad (4.4).$$

Resolviendo obtenemos p raíces características, donde I_p representa la matriz identidad; para que el sistema tenga una solución distinta de cero la matriz $(S - \lambda I_p)$ tiene que ser singular, es decir, que su determinante debe ser igual a cero $|(S - \lambda I_p)| = 0$. Tomando el máximo de los autovalores λ_1 se obtiene el vector característico asociado a_1 , este vector brinda la mejor combinación lineal de las variables originales representando la mayor varianza; C_1 lo podemos

CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

asociar al eje principal de la nube de datos en un nuevo sistema de referencia, es decir, que sobre C_1 se presenta la mayor distribución de los datos.

Se cumple que:

$$\text{Var}(C_1) = Xa_1 = \frac{1}{n} a_1' X' X a_1 = a_1' S a_1 = a_1' \lambda_1 I_p a_1 = \lambda_1 a_1' a_1 = \lambda_1 \mathbf{1} = \lambda_1.$$

Para obtener la segunda componente realizamos lo siguiente:

$$C_2 = Xa_2$$

$$\text{Var}(C_2) = a_2' S a_2.$$

Condiciones

$$a_2' a_2 = 1$$

$$a_2' a_1 = 0 \text{ (ortogonalidad).}$$

Maximizamos la función sujeta a las condiciones con los operadores de Lagrange:

$$L = a_2' S a_2 - \lambda(a_2' a_2 - 1) - m a_2' a_1,$$

derivando e igualando a cero para encontrar el máximo tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = 2S a_2 - 2\lambda a_2 - m a_1 = 0 \quad (4.5)$$

Multiplicando por a_1

$$2a_1' S a_2 - m = 0$$

$$2a_1' S a_2 = m$$

Como $a_2' S a_1$ no expresa ninguna relación entre las variables entonces:

$$a_2' S a_1 = 0,$$

por los tanto

$$m = 0.$$

De este modo y retomando la ecuación 4.5 tenemos:

$$(S - \lambda I_p)a_2 = 0.$$

Aplicando el mismo razonamiento que el primer componente principal, los coeficientes a_2 del segundo componente principal C_2 , corresponde al segundo mayor autovalor λ_2 ; de igual forma se procede para obtener los demás componentes; cada uno de los componentes se puede representar como el producto de una matriz formada por los autovectores multiplicada por el vector X que contiene las variables originales, de tal forma, que la matriz de covarianzas del nuevo conjunto optimizado tendrá valores diferentes de cero solo en su diagonal:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p \end{bmatrix}.$$

Lo cual es de esperarse ya que C_1, C_2, \dots, C_p no están correlacionadas formando un conjunto ortogonal.

Tenemos que Λ

$$\Lambda = \text{Var}(C) = a' \text{Var}(X) a = a' S a$$

Por propiedades

$$S = a \Lambda a'.$$

Esta expresión simplifica y reduce el número de operaciones a realizar.

Por propiedades matriciales se reduce drásticamente el número de autovalores; por citar un ejemplo, de un conjunto de 40 imágenes cada una con 10 000 píxeles, el conjunto de datos se puede representar con 10 000 autovalores correspondientes a la cantidad de individuos, o de igual

CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

Conociendo el aporte de cada componente principal, podemos decidir el número K de componentes a utilizar, que representen un porcentaje definido menor al 100%, reduciendo significativamente la cantidad de variables.

En el capítulo 5 observamos que para una prueba con 40 variables originales, más del 90% de la información es concentrada en los primeros 20 componentes principales reduciendo el proceso de computo significativamente.

El coeficiente de correlación r_{ij} entre un componente C_j y una variable X_i , se calcula multiplicando el peso de la variable en ese componente por la raíz cuadrada de su valor propio (Jolliffe, 1986).

$$r_{ij} = \sqrt{\lambda_j} a_{ij}$$

$$i=1,\dots,p$$

$$j=1,\dots,k$$

Estos coeficientes se denominan pesos o cargas factoriales representando la varianza respecto a cada variable.

$$x_1=r_{11}C_1 + r_{12}C_2 + \dots + r_{1k}C_k$$

$$x_p=r_{p1}C_1 + r_{p2}C_2 + \dots + r_{pk}C_k$$

La matriz de cargas factoriales es de tamaño $p \times k$, la suma horizontal del cuadrado de las cargas factoriales es parte de la dispersión total de la variable expuesta por el conjunto de k componentes, además, la suma de todos los factores contenidos en la matriz coincide con el porcentaje de dispersión definido por las k componentes, ajustando de igual manera, con la suma de los primeros k valores propios elegidos de un total de p componentes principales.

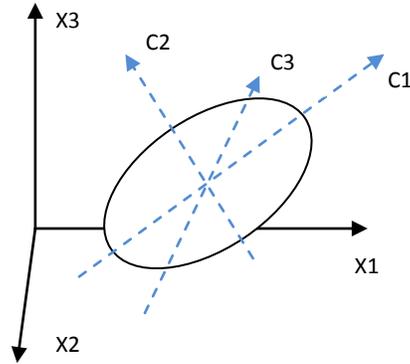


Figura 4.1 Representación gráfica de un conjunto de tres variables, la elipse representa la nube de información.

Los componentes principales estarían representados por los ejes principales del elipsoide (si fuesen tres variables) y el elipsoide conformaría la nube de observaciones.

La magnitud de los eigenvalores corresponde a la varianza de los datos a lo largo de la dirección de su eigenvector correspondiente.

4.4 Reconocimiento de Imágenes Utilizando ACP

Además del propósito de ACP de reducir la dimensionalidad de los datos, otro de sus objetivos se enfoca a la predicción o reconocimiento de patrones; el método tiene grandes aplicaciones en la identificación de rostros y existe una gama de publicaciones en éste contexto.

Podemos utilizar el mismo concepto y enfocarlo al reconocimiento de espectros de potencia wavelet; cada matriz que genera una imagen la reordenamos como un vector, tomamos sus eigenvalores y formamos un eigenespacio; el eigenespacio es calculado identificando los eigenvectores de la matriz de covarianzas derivado del grupo de espectros que consideramos compartan características similares *precursoras o no precursoras*.

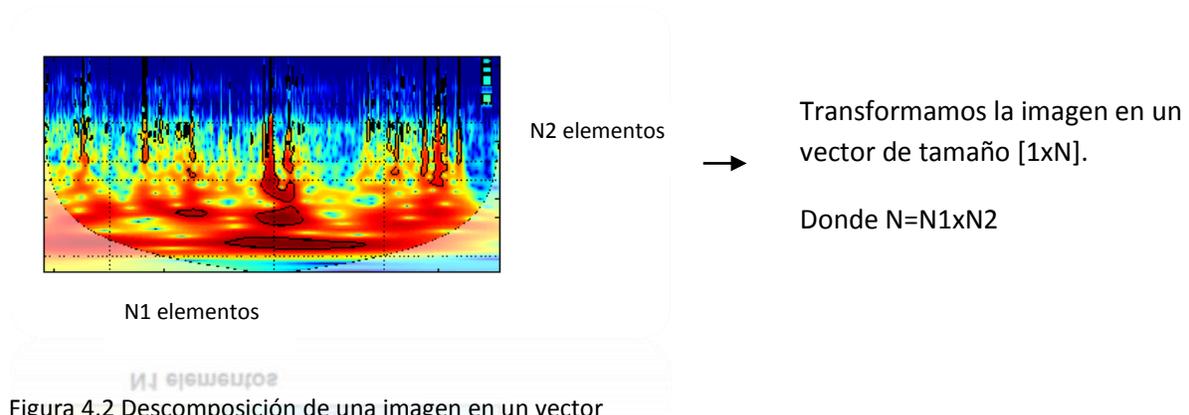


Figura 4.2 Descomposición de una imagen en un vector

Supongamos que Γ es un vector de tamaño $N \times 1$ correspondiente al espectro de potencia wavelet; el propósito es conducirlo a un espacio de menor dimensión, de éste modo un conjunto de M espectros lo podemos representar como una matriz Γ_i ; donde el número de columnas son los M espectros de entrenamiento y el número de renglones son los elementos que conforman la imagen.

- Obtenemos el promedio del grupo de espectros

$$\Psi = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \Gamma_i$$

- Sustraemos el espectro promedio de cada elemento del grupo

$$\Phi_i = \Gamma_i - \Psi$$

- Obtenemos la matriz de covarianzas

$$C = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \Phi_n \Phi_n^T = AA^T$$

La matriz A es de tamaño $N \times M$, observamos que la matriz C se encuentra definida con un gran número de elementos al resultar de tamaño $N \times N$, donde N representa el total de elementos en cada espectro de potencia wavelet.

$$A = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M]$$

Podemos considerar la multiplicación $A^T A$ que comparte los mismos eigenvectores v_i que AA^T reduciendo significativamente el número de operaciones (Turk y Pentland, 1991).

$$A^T A v_i = \mu_i v_i$$

Pre multiplicando por A

$$AA^T A v_i = \mu_i A v_i,$$

$$\text{sí } C = AA^T \text{ y } u_i = A v_i$$

$$C u_i = \mu_i u_i$$

Cada espectro Φ_i en el conjunto Γ_{ij} puede ser representada como una combinación lineal de los mejores K eigenvectores.

$$\Phi_i^{\text{aprox}} - \Psi = \sum_{i=1}^K u_i^T \Phi_i u_i.$$

Donde u_i son los eigenvectores, cada espectro Φ_i es representado en esta base como un vector:

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} w_1^i \\ w_2^i \\ \dots \\ w_k^i \end{bmatrix} \text{ donde } i = 1, 2, \dots, M.$$

Con la base generada podemos hacer el reconocimiento de espectros utilizando los eigenvectores; en base al mínimo error ε_k (con un umbral definido) podemos determinar si Φ_i pertenece o se aproxima al conjunto de espectros originales; el método simplemente determina qué clase de espectros proporcionan una mejor descripción a un espectro de entrada y encuentra los k espectros que minimizan la distancia Euclidiana:

$$\varepsilon_k = \|\Omega - \Omega_k\|$$

Donde Ω describe la contribución de cada eigenvector en representación de la imagen proyectada, en el caso de Ω_k representa la base con k elementos de entrenamiento.

La aplicación y los resultados de esta metodología son presentados en el siguiente capítulo, y es utilizada para corroborar las observaciones realizadas en los espectros de potencia wavelet.

CAPÍTULO 5

APLICACIONES Y RESULTADOS

5.1 Introducción

El estudio por medio de wavelets permite describir señales no estacionarias proponiendo un enfoque más amplio que el análisis de Fourier; un GLE se describe como un evento de rápida transitoriedad lo cual es ideal para el análisis por wavelets. El contenido en frecuencias de los RCG antes y después de un evento altamente energético, puede correlacionarse con frecuencias de otros índices de actividad solar, proporcionando información sobre las conexiones entre diferentes capas solares. En el presente capítulo proponemos una clasificación de los GLE en función de su espectro de potencia wavelet.

En el mismo capítulo realizamos la descripción del espectro precursor, con características que consideramos no son comunes en los espectros de RCG lejanos a un evento. Inicialmente suponemos que una atmósfera lejana a un evento puede considerarse estable, de tal forma, que al acercarse la fecha de ocurrencia la atmosfera comienza a modificarse; estas alteraciones se registran como perturbaciones en la señal de RCG y son las que describimos en los espectros de potencia wavelet. El análisis cualitativo realizado por wavelets lo corroboramos con la técnica de ACP; donde el objetivo es probar que un espectro que precede un evento altamente energético posee características distintas a un espectro lejano a un evento.

En cada apartado presentamos los resultados obtenidos dejando la discusión y conclusiones para el capítulo final. El código del análisis wavelet es una librería modificada de *Matlab*; para el estudio por ACP, el algoritmo es una versión modificada del algoritmo original proporcionado por el *Dr. Mauricio Orozco*¹ y el *Dr. Carlos Ortiz Alemán*².

¹ Dr. Mauricio Gabriel Orozco del Castillo, Investigador del Instituto Mexicano del Petróleo.

² Dr. Carlos Ortiz Alemán, Investigador del Instituto Mexicano del Petróleo.

5.2 Clasificación de GLE en Función del Contenido Espectral

La duración de un GLE es relativamente corta (de unas cuantas horas) en comparación con los periodos representativos de los RCG (años, meses, días, horas); la actual clasificación se encuentra en función del porcentaje de incremento en el contador de partículas de acuerdo al promedio de oscilación en un intervalo de tiempo observado (denominado en inglés como background); con lo anterior tenemos una idea de la magnitud de los eventos.

El comportamiento de los RCG antes y después de un GLE puede brindar información del medio circundante; en publicaciones recientes se han encontrado relaciones entre diferentes capas solares por el análisis de las periodicidades presentes en esta señal (Pérez-Peraza *et al.*, 2009).

Proponemos una clasificación en función del contenido espectral que no solo toma en cuenta el incremento de partículas; ahora clasificamos los GLE de acuerdo a los periodos que los describen.

El análisis por medio de wavelets permite identificar como impacta un GLE sobre la señal de RCG; un incremento instantáneo en el número de partículas es descrito con un espectro de potencia característico; los valores que registra la potencia espectral no son de interés en el estudio ya que la descripción se encuentra enfocada en la *distribución temporal* de los periodos que representan a un GLE. En todos los espectros de potencia wavelet presentados a continuación, las zonas en rojo pertenecen a las regiones de mayor potencia y las regiones en azul corresponden al extremo opuesto de menor potencia. La escala de los espectros de potencia wavelet se presentan en días, para la comodidad del lector mostramos en la siguiente tabla la equivalencia en minutos y horas para una mejor percepción de los periodos en los ejes:

PERIODO DÍAS	EQUIVALENCIA	PERIODO DÍAS	EQUIVALENCIA
4	4 DÍAS	0.125	3 HORAS
2	2 DÍAS	0.0625	1.5 HORAS
1	1 DÍA	0.03125	45 MINUTOS
0.5	12 HORAS	0.015625	22.5 MINUTOS
0.25	6 HORAS	0.0078125	11.25 MINUTOS

Tabla 5.1 Periodos en días con sus respectivas equivalencias.

CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

Un GLE se observa como una dilatación súbita en la intensidad de la señal de RCG; en los eventos de mayor incremento puede apreciarse como una discontinuidad sobre la señal; al realizar el espectro wavelet se toma en cuenta la distancia de esta discontinuidad (incremento), y además, se caracteriza la evolución en tiempo hacia su estabilidad oscilatoria.

Considerando el decaimiento temporal, un evento puede acceder a distintos periodos. Existen casos en los cuales la señal de RCG vuelve a su periodo promedio de oscilación horas después de ocurrido el evento, mientras que en algunos otros (generalmente los de mayor intensidad) puede tardar varios días.

Puesto que la duración de los eventos es de unas cuantas horas, consideramos que en una ventana de aproximadamente cuatro semanas podemos capturar las características que guarda la señal de RCG, analizando quince días antes y quince después de ocurrido el evento; dado esto, el tamaño de las ventanas utilizadas es cercano a 30 días, centrando el evento en el día 15; el tamaño no influye en el comportamiento característico de los espectros; por comodidad la unidad de tiempo correspondiente es de un día. Debido a la falta de información respecto a los primeros 20 eventos, utilizamos datos con un muestreo horario; para al resto de los evento accedemos a muestras cada 5 minutos. En todos los gráficos siguientes el eje de las abscisas representa la evolución temporal (excepto el EGW) y el eje de las ordenadas a los periodos o número de partículas dependiendo el caso.

El registro de un GLE en la señal de RCG presenta una combinación entre el incremento súbito en el contador de partículas y el tiempo de estabilización; esto tiene por consecuencia una composición de periodos que describen la relación en el plano *tiempo-frecuencia*. Cuando no existe registro de evento, la señal de RCG guarda una oscilación promedio el cual contiene periodos característicos. Cuando se presenta un GLE, la señal de RCG se deforma saliéndose de su comportamiento común; analizamos los espectros de potencia wavelet de esta deformación en todo los eventos, y de acuerdo a la relación *incremento-estabilización* logramos dividir los 70 registros en tres grupos que denominamos Grupo A, Grupo B y Grupo C. A continuación presento las características que describen cada grupo, así como los eventos que contienen.

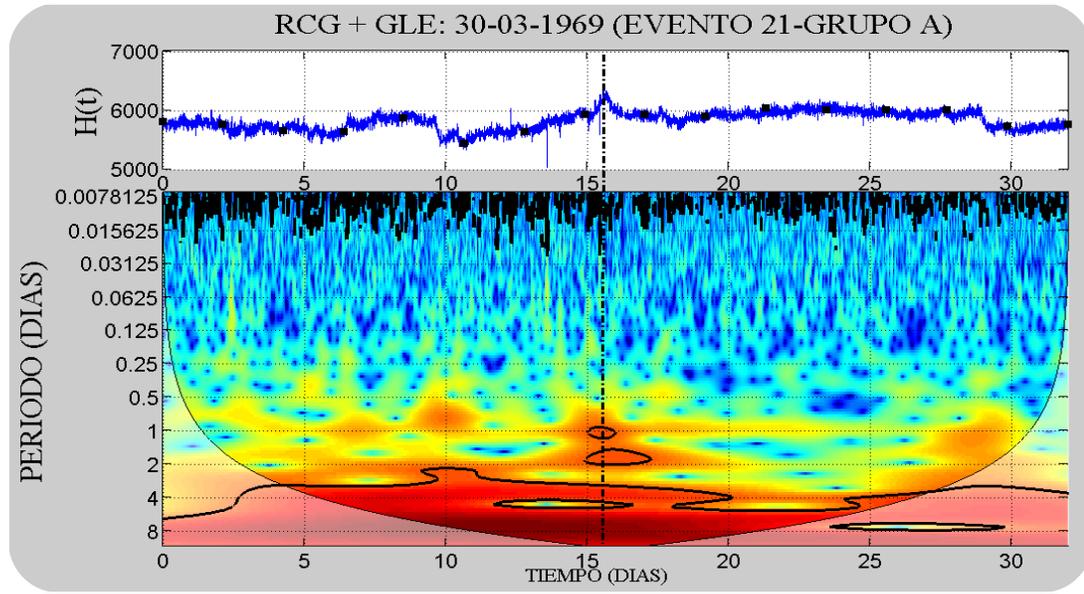


Figura 5.1 Espectro wavelet del evento 21 con un incremento reportado del 6%; el evento está señalado con la línea negra punteada

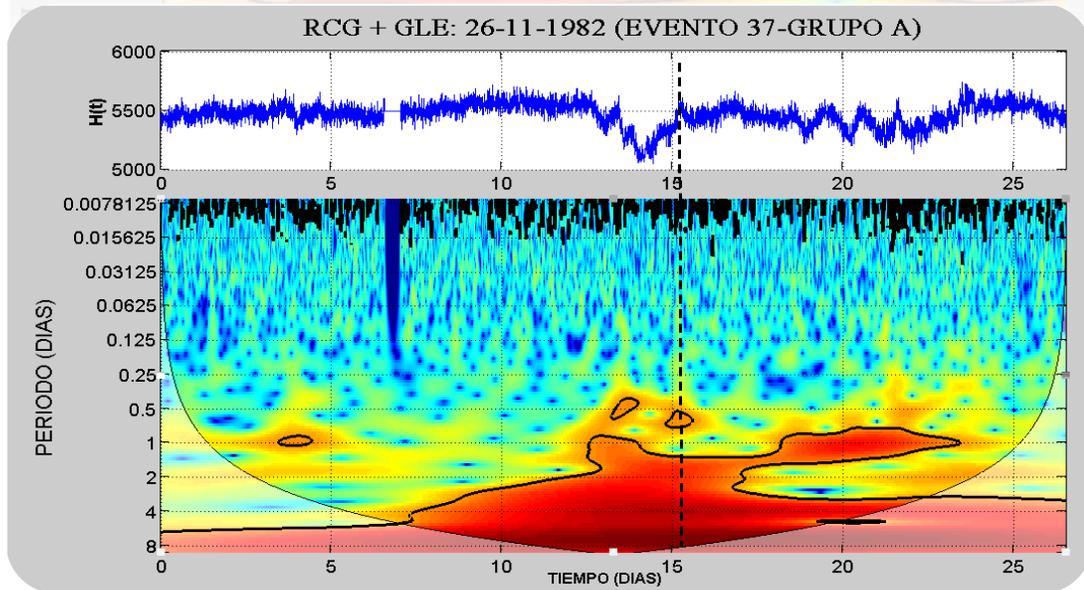


Figura 5.2 Espectro wavelet del evento 37 con un incremento reportado de 4%, el evento está señalado con la línea negra punteada.

La tabla B.1 (anexo B) incluimos 24 eventos; el mayor incremento está dado por el evento 12 y 21 con un 6%, y el mínimo se debe a los eventos 15,20 y 34 con 1%. Este grupo contiene aproximadamente la tercera parte de todos los GLE registrados, describiendo eventos de muy baja intensidad que apenas son detectables en la señal de RCG; su espectro se manifiesta como un

CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

tenue disturbio sobre los periodos de RCG; a continuación muestro los espectros wavelet de 2 eventos que caracterizan al denominado Grupo A.

Los eventos presentados en las dos figuras anteriores, son característicos del Grupo A, la señal $H(t)$ es el número de partículas registrados en el contador de la estación de Oulu, el muestreo correspondiente es de 5 minutos. La escala de tiempo del panel superior es la misma que la descrita por su espectro.

En el Grupo A la potencia espectral de los GLE es muy pequeña que apenas logra perturbar la señal de rayos cósmicos, es por esto que en el Espectro Wavelet el evento no es evidente (figuras 5.1 y 5.2) como lo es en los casos de los grupos B y C.

La base de periodos altos es muy similar a los Grupos B y C, lo que identifica el Grupo A es el periodo mínimo al que logra acceder; el periodo menor que describe la perturbación por causa del GLE es de 12 horas, estos eventos son difíciles de detectar debido a que la señal de rayos cósmicos puede tener perturbaciones que se describen con un espectro similar.

El Grupo B (tabla B.2 anexo B) contiene 23 eventos; observamos el mayor incremento en los registros 16 y 17 con 17%, el incremento mínimo se debe a los eventos 25, 53, 64 y 65 con 5%.

La tabla B.2 contiene aproximadamente la tercera parte de todos los eventos; los describen un mayor número de periodos con un rango de acceso que puede alcanzar los 0.125 días (3 horas), a diferencia de la tabla B.1 el Grupo B abarca periodos menores de 12 horas.

El espectro de los eventos 36 y 55 (figuras 5.3 y 5.4 respectivamente) representa el comportamiento característico en los eventos del Grupo B; estos se encuentran sustentados por un contenido espectral más amplio que los del Grupo A; los periodos van desde 4 días hasta 0.125 días, pero aun el rango de valores abarcados es menor que los incluidos el Grupo C.

En las siguientes figuras logramos observar el espectro de dos señales, estas describen un abanico donde se concentran potencias altas señalada con una línea punteada; $H(t)$ representa el número de partículas en el tiempo, con una muestra cada 5 minutos. Las unidades de tiempo del panel superior son las mismas a las de su espectro representativo.

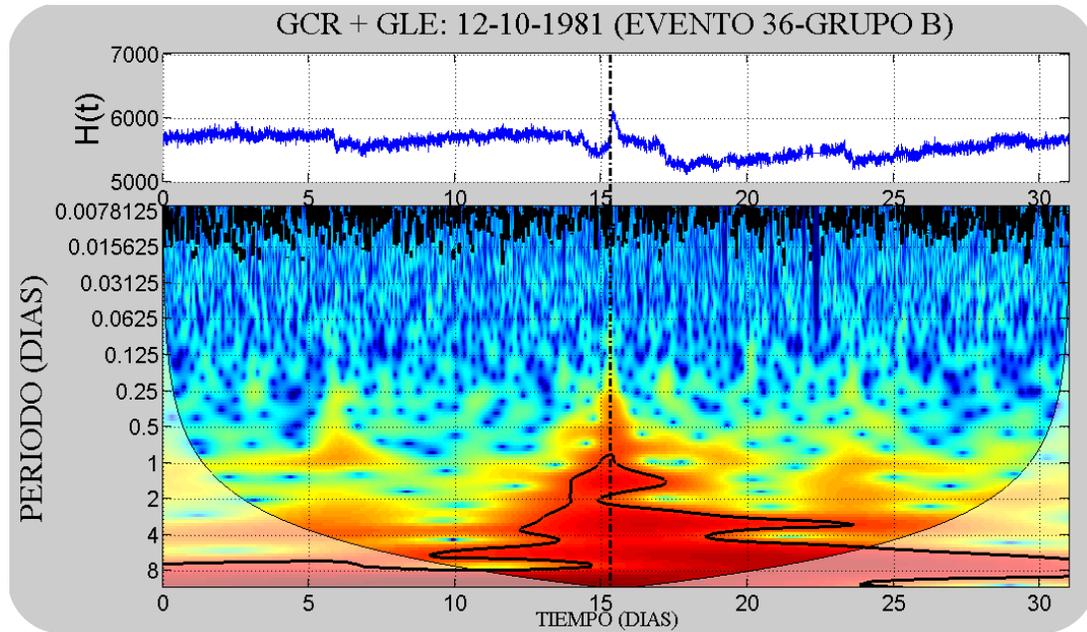


Figura 5.3 Evento 36 con un incremento reportado de 11%, el evento se encuentra resaltado por la línea negra punteada

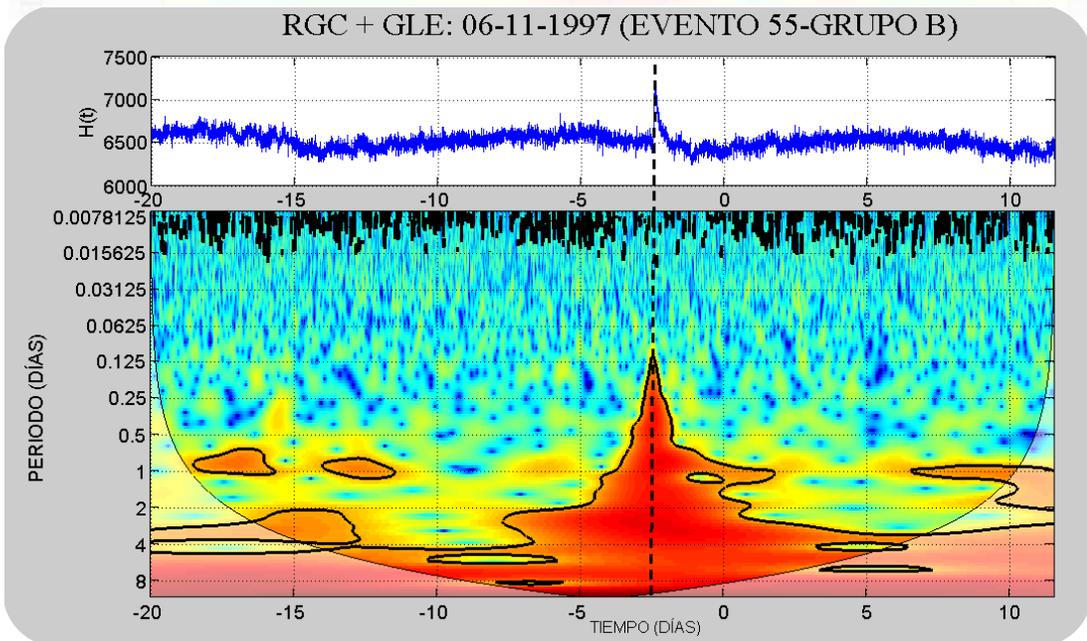


Figura 5.4 Evento 55 con un incremento reportado del 11%, el evento se resalta con una línea negra punteada.

La potencia espectral que aportan los eventos de esta clasificación logra perturbar el espectro wavelet de la señal de rayos cósmicos, representando un comportamiento específico. A partir de este grupo los periodos describen un comportamiento definido que solo pertenece a un GLE.

Finalmente los eventos de mayor potencia se encuentran en el Grupo C (tabla B.3 anexo B).

En la tabla B.3 (23 eventos), el evento más pequeño tiene apenas 12% en incremento (evento 41 y 61), mientras que el mayor sobrepasa 4000% (evento 5). La perturbación generada por el GLE es muy clara tanto en la señal temporal como en el espectro wavelet.

Los eventos de la tabla B.3 acceden a periodos menores a 0.125 días y pueden llegar a abarcar 0.007825 días (11 minutos, esto con un muestreo 5 minutos); el evento altera totalmente el espectro wavelet de la señal de rayos cósmicos centrándose la mayor cantidad de potencia en el momento de la perturbación. En las figuras 5.5 y 5.6 observamos el espectro característico del Grupo C (evento 69 y 42 respectivamente), en ambos espectros logramos detectar una atenuación en los periodos fuera del abanico descrito por el GLE. $H(t)$ representa el número de partículas detectadas por el contador, con un muestreo de 5 minutos; las unidades de tiempo del panel superior son similares a las de su espectro correspondiente.

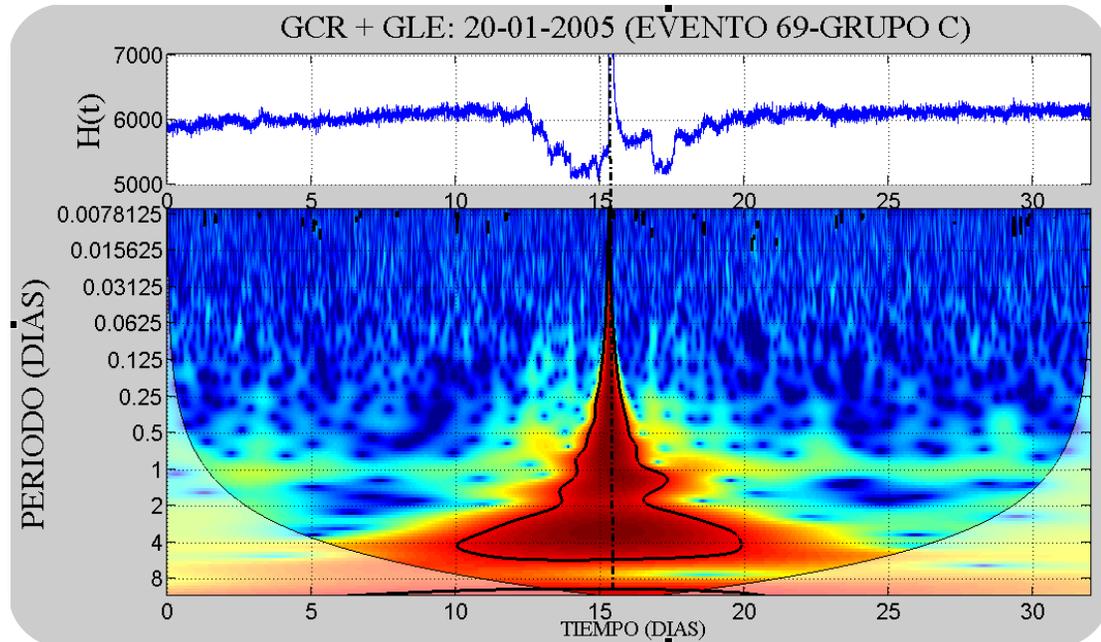


Figura 5.5 Evento con un incremento reportado de 269%, el evento es señalado con una línea negra punteada aunque es evidente en ambos dominios.

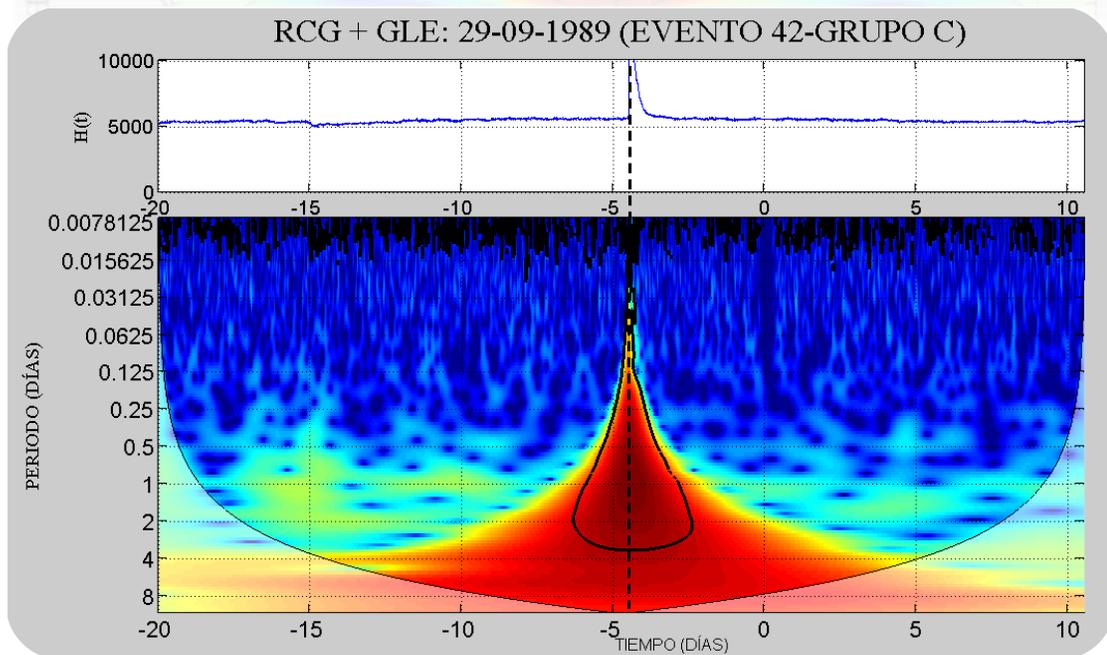


Figura 5.6 Evento con un 174% de incremento, el evento está señalado con una línea negra punteada aunque es evidente en ambos dominios.

CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

Los límites de los porcentajes no son exactos, basándonos del análisis anterior proponemos lo siguiente:

INCREMENTO %		
LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR	GRUPO
1	<5	A
5	6	A ò B
>6	<12	B
12	17	B ó C
>17		C

Tabla 5.2 Límites asociados a los diferentes grupos.

INCREMENTO %		
GRUPO	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
A	(<1	6]
B	[5	17]
C	[12	>17)

Tabla 5.3 Rango en porcentaje de los distintos grupos.

PERIODOS CONTENIDOS DURANTE GLE [DÍAS]										
GRUPO	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0312	0.01562	0.00781
A	X	X	X	X						
B	X	X	X	X	X	X				
C	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabla 5.4 Periodos de acceso de los diferentes grupos.

Presentamos en las tablas 5.2, 5.3 y 5.4 los periodos asociados de cada grupo con los incrementos reportados en la literatura. Observamos en la tabla 5.2 que eventos con un mismo incremento pueden tener un contenido espectral distinto (representado por el Grupo A, B o C); estos resultados pueden brindar información sobre el origen de los eventos; en la tabla 5.3 asociamos

cada grupo al rango de porcentaje que describe un espectro similar, por último la tabla 5.4 presenta la gama de periodos que caracteriza a cada grupo.

5.2.1 Características por Grupo

Características del Grupo A

Contiene eventos menores o iguales a 6%, estos no alcanzan a perturbar el espectro wavelet, los periodos que describen al GLE son iguales en intensidad que los periodos característicos definidos por los rayos cósmicos, por lo tanto en estos casos la contribución en potencia espectral es similar. El grupo tiene periodos que van de 4 días hasta mayores a 0.5 días. 24 de los 70 eventos analizados pertenecen a este grupo.

Características del Grupo B

Contiene eventos con un incremento mayor o igual al 5% y eventos menores o iguales al 17%; el grupo logra perturbar al espectro wavelet generando periodos superiores a 0.125 días, aunque el rango de periodos abarcados es mayor que en el Grupo A, la contribución en potencia aun sigue siendo similar a la contribución energética de los periodos característicos de los RCG, 23 eventos de los 70 analizados pertenecen a este grupo.

Características del Grupo C

El grupo C es el que aporta mayor potencia espectral a la señal de rayos cósmicos, contiene eventos con un incremento mayor o igual al 12%; la característica esencial del GLE es generar una gran gama de periodos que pueden ir desde los 4 días hasta los 0.007813 días. El rango de periodos que describe al evento es de mayor intensidad que los periodos característicos de los RGC. La tabla contiene algunos eventos con incrementos relativamente pequeños (en comparación con el máximo reportado); la característica peculiar que hace que se encuentren dentro del grupo es el corto tiempo que tarda la señal de RGC en estabilizarse; un incremento súbito y una rápida estabilización hace que eventos reportados con un porcentaje pequeño (17%), accedan a periodos similares a los eventos con un porcentaje mucho mayor (200%); existen

eventos en los que la señal de RCG tarda días para volver al rango promedio de oscilación después de un GLE.

Lo anterior se propone porque necesitamos describir los GLE de acuerdo a su impacto sobre la señal de rayos cósmicos galácticos, de esta manera sabemos cómo afecta el evento altamente energético al espectro wavelet de la señal y al mismo tiempo, el modo en que se estabiliza la señal después de ocurrido el evento. Es por esto que clasificamos dentro un mismo grupo un evento de 50% en incremento que un evento de más de 200%.

Un segundo objetivo de esta clasificación, es proporcionar información sobre el origen de los GLE, los periodos pueden relacionarse con otro tipo de señales y detectar el origen entre diferentes regiones del sol (Pérez-Peraza *et al.*, 2009).

5.3 Análisis Wavelet por Ventanas Orientado a la Detección de Precursores GLE.

Una gran cantidad de fenómenos detectados en la naturaleza se conducen de manera sinusoidal, el comportamiento general de los rayos cósmicos no exenta esta tendencia ondulatoria (figura 5.7 datos captados por la estación de Oulu con una muestra por día).

Esta señal se encuentra modulada con frecuencias características brindando información sobre la física solar, así entonces, la señal captada por los monitores de neutrones es afectada en gran parte por procesos que se llevan a cabo dentro de la estrella; los RCG contienen información del estado del clima espacial y al gestarse un GLE la atmosfera solar comienza a cambiar, postrando características particulares sobre la señal de RCG, características que en una atmosfera lejos de un evento no se muestran o por lo menos no son comunes. Cabe aclarar que lo RCG no son de origen solar; provienes de otras fuentes del universo bañando a la heliósfera y el espacio interestelar isotrópicamente, en su camino franquean el sol, cuya fenomenología produce diversas modulaciones.

Los GLE son considerados de naturaleza estocástica, al superponer los eventos con la señal de rayos cósmicos (figura 5.8) observamos una asociación directa con el ciclo de actividad solar; los eventos parecen tener mayor frecuencia respecto a los mínimos de un ciclo promedio de 11 años, mínimo perteneciente a los RCG. En la figura 5.8 presentamos el espectro wavelet de la señal de RCG (1964-2010, con una muestra por día); en la misma figura superponemos los eventos como pulsos (líneas negras verticales); en el espectro observamos cómo se distribuye la potencia con periodos que se intensifican y decaen pareciendo seguir la ocurrencia de GLE.

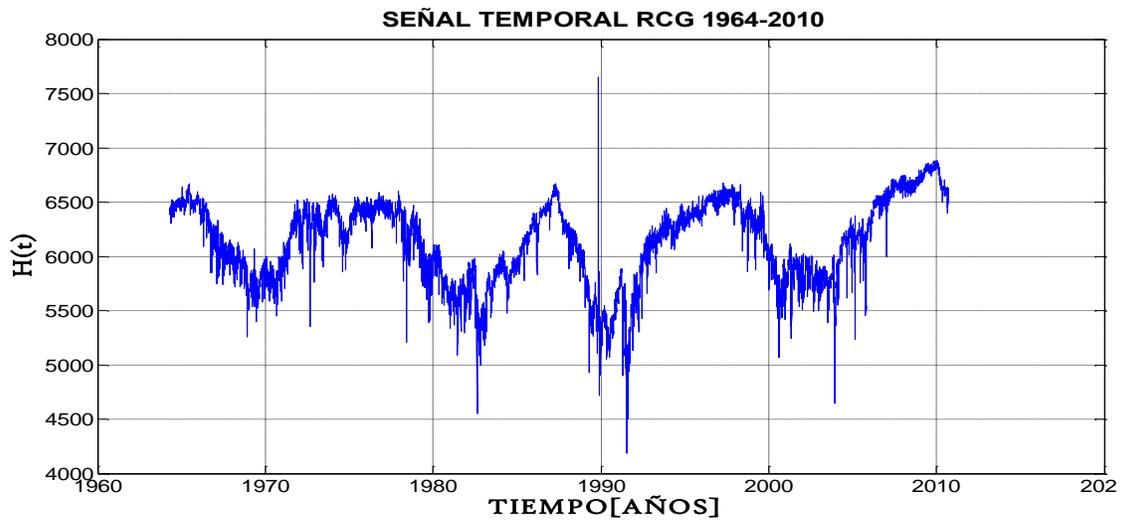


Figura 5.7 Señal temporal de RCG, muestreo diario, estación Oulu.

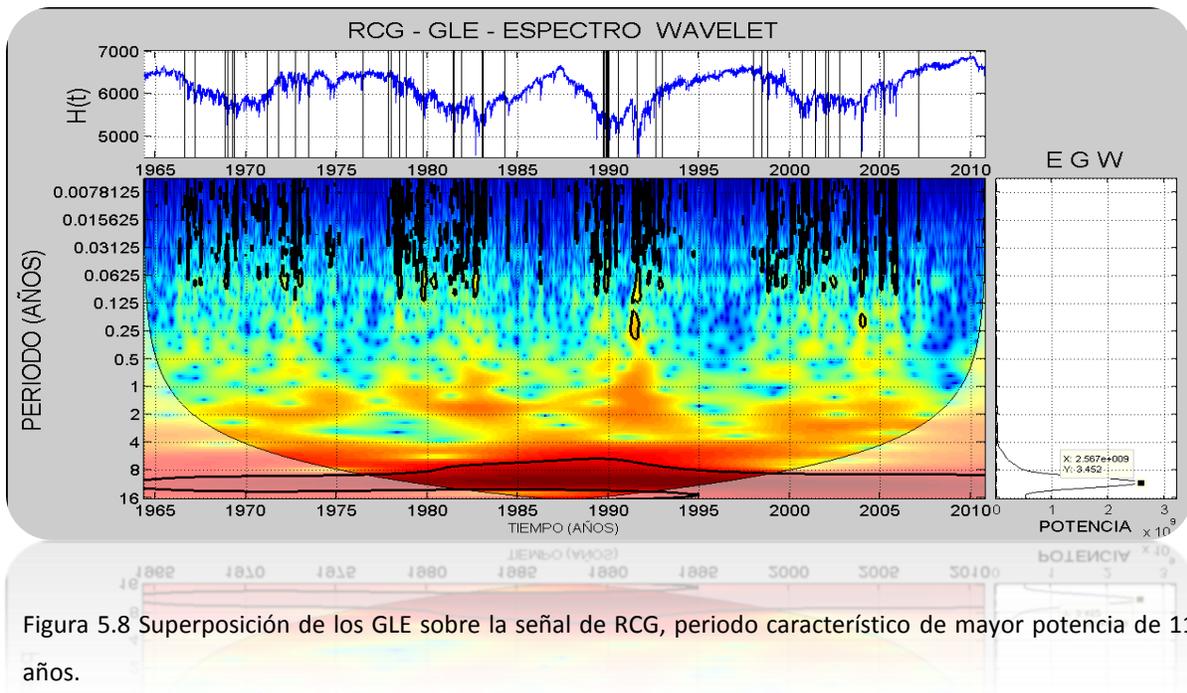


Figura 5.8 Superposición de los GLE sobre la señal de RCG, periodo característico de mayor potencia de 11 años.

En el EGW de la figura 5.8 distinguimos el periodo de mayor potencia, la lectura tomada en el máximo se encuentran en potencia base 2, por lo tanto la lectura del periodo máximo asociado es:

$$2^{3.452} = 10.9434 \text{ años.}$$

Del espectro wavelet de la serie temporal de 1964 hasta 2010 observamos los periodos reportados en publicaciones anteriores; el ciclo predominante es de aproximadamente 11 años; para detectar los periodos de menor potencia utilizamos el filtro pasa altas quitando el mayor aporte.

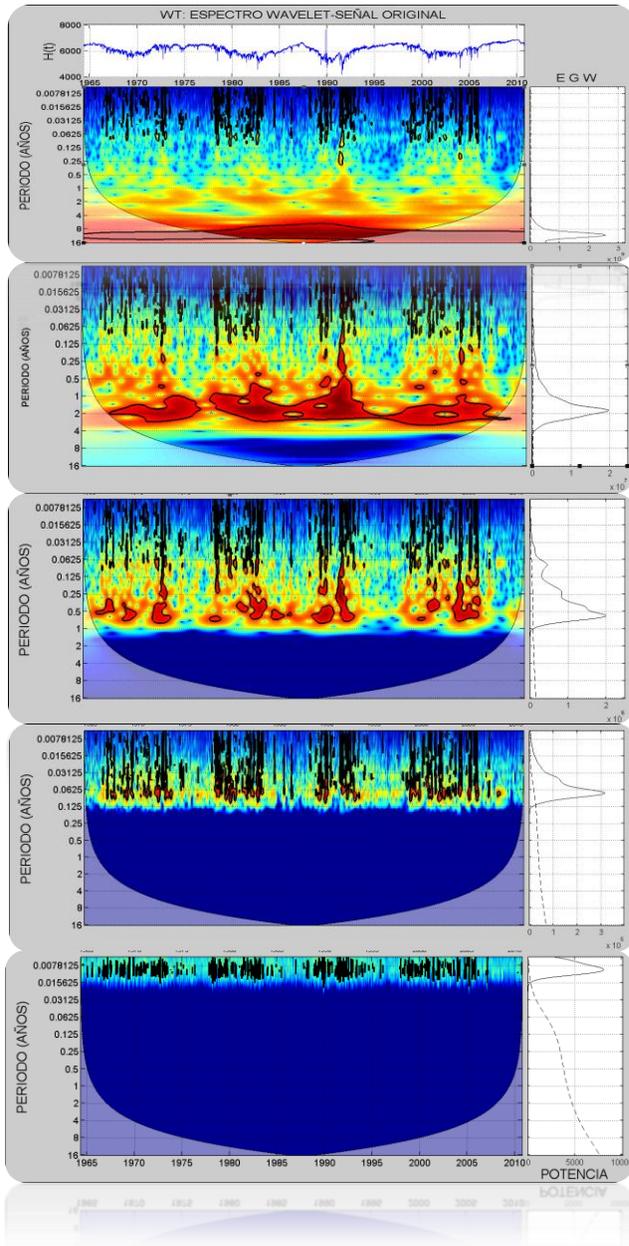


Figura 5.9 Espectros con filtros de Daubechies orden 8, 6, 4 y 1.

Realizando el proceso de filtrado detectamos los periodos con mayor contribución de potencia; con este proceso tenemos una idea general de los periodos característicos asociados a nuestra estación de estudio; en los espectros mostrados a la izquierda es posible distinguir que la intensidad de los periodos incrementan durante la ocurrencia de GLE, como la duración de los eventos es de unas cuantas horas los periodos observados describen directamente el comportamiento de los RCG, como el muestreo de la señal es de un día no podremos detectar la variación diurna que también es un periodo característico importante.

Los espectros en disposición descendente a excepción del primero contienen un filtro de orden 8, 6, 4 y 1 respectivamente, todos muestran el aporte de energía por encima del ruido rojo representado por la línea punteada en EGW, lo que significa una contribución con una significancia aceptable.

CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

En la siguiente tabla ordenamos los periodos de mayor a menor contribución de potencia, la lectura es tomada directamente del EGW en el proceso de filtrado (figura 5.9, panel derecho); estos periodos serán base de análisis para detectar el precursor, más adelante crearemos ventanas de distinto tamaño para el estudio a detalle y su caracterización temporal (evolución).

Los periodo están clasificados como mediano, corto y ultra corto plazo (Pérez-Peraza *et al.*, 2009); estos últimos los utilizaremos para el estudio de ACP.

PERIODOS MEDIANO PLAZO[años]	Promedio
10.94	11 años
5.16	5 años
1.72	1.7 años
1.22	1.2 años
0.58	7 meses
0.24	3 meses

Tabla 5.5 Periodos de Mediano Plazo

PERIODOS CORTO PLAZO [años]	Promedio
0.07615	27 días
0.038	14 días
0.01797	7 días
0.008987	3.5 días

Tabla 5.6 Periodos de corto plazo.

Enfocándonos al estudio de series temporales anuales, en las cuales buscamos diferencias entre años anómalos (con ocurrencia de GLE) y años normales (si ocurrencia de GLE) presentamos cuatro series del análisis total. Los periodos de estudio comprenden algunos del grupo de mediano plazo pero están directamente enfocados a caracterizar el comportamiento de las periodicidades en el grupo de corto plazo. Es así que realizamos una inspección de los periodos que anticipan los eventos.

Del análisis espectral de series anuales de RCG en la figura 5.10, las dos series contienen GLE mientras que en la figura 5.11 pertenece a series de años en los cuales no existe presencia de eventos. Tomando la lectura del Espectro Global Wavelet (panel derecho, EGW gráfico 5.10 y 5.11) el mayor aporte energético viene dado por periodos superiores a 16 días.

Los espectros con y sin evento están sustentados por una base de bajas frecuencias que se extienden sobre todo el intervalo de tiempo, además, el comportamiento de los periodos altos tiene la misma tendencia antes, durante y después de ocurrido el evento, por tanto pasan

desapercibido la anomalía en la serie de RCG; con este resultado nos dirigimos al análisis de periodos de corto plazo

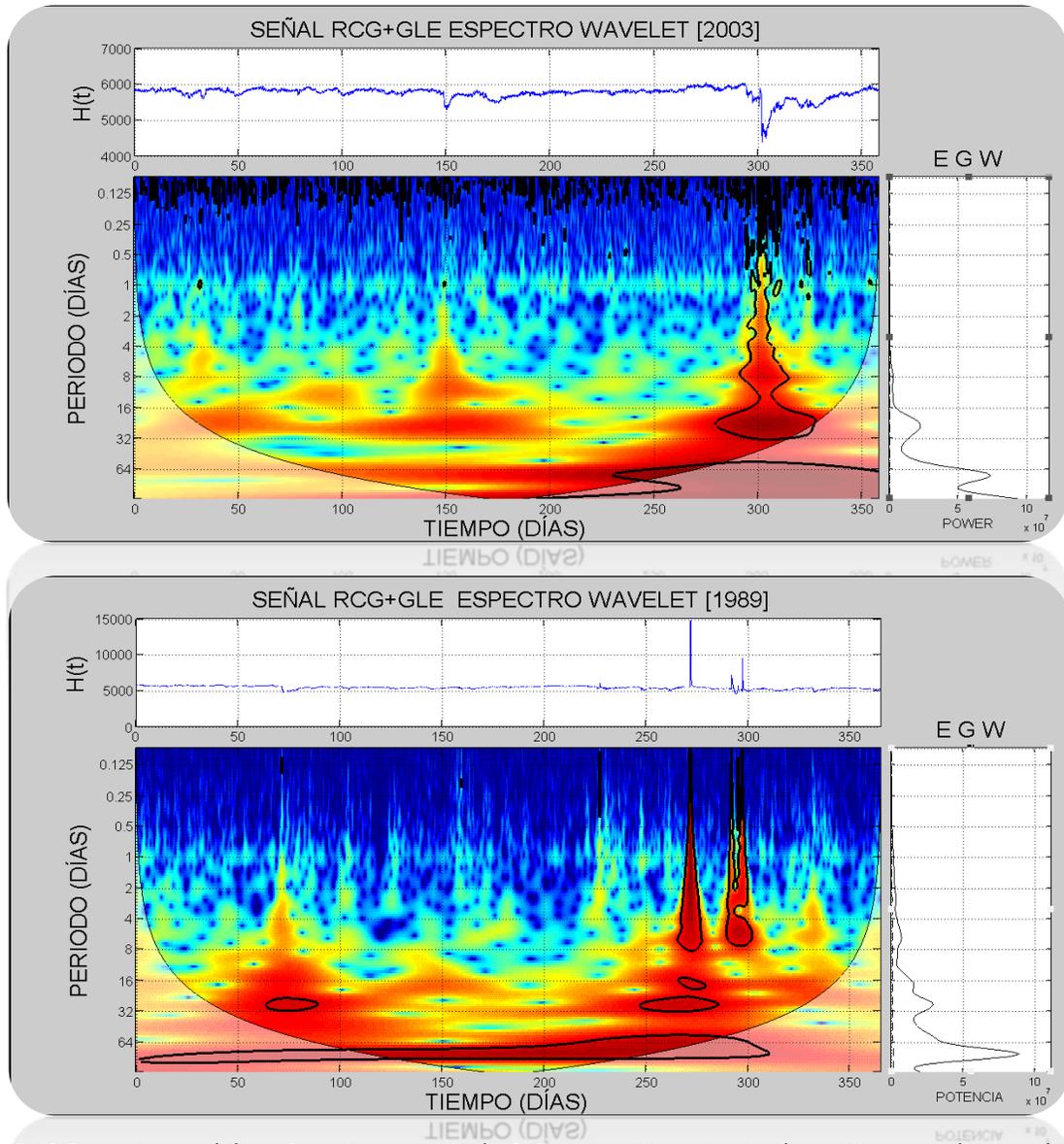


Figura 5.10 Espectro anual de series con presencia de GLE, con una muestra por hora, correspondientes al año 2003 y 1989 respectivamente.

De las figuras 5.10 y 5.11 observamos la distribución temporal de las frecuencias bajas; los espectros expuestos tienen en común la base de periodos largos, es así que distinguimos una gama de periodos similares mayores a 16 días; ya sea en un año con evento o sin evento la base se mantiene describiendo el comportamiento general de los RCG.

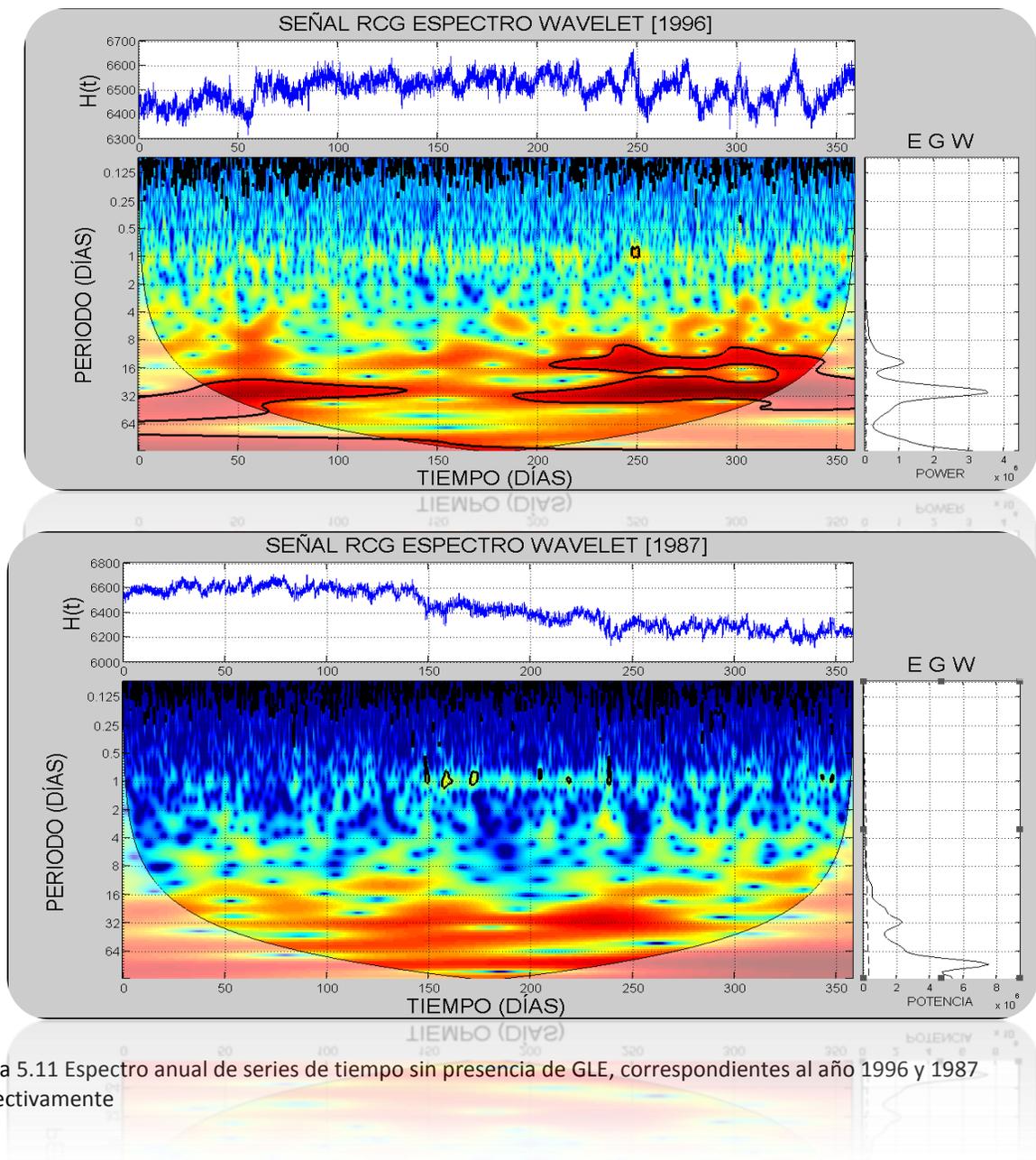


Figura 5.11 Espectro anual de series de tiempo sin presencia de GLE, correspondientes al año 1996 y 1987 respectivamente

Respecto al análisis de los periodos dominantes anuales (leídos en el espectro global EGW), en cada uno de los años sin evento y de los años en los cuales tenemos registros de GLE, no encontramos alguna tendencia en su comportamiento, dado esto limitamos nuestra búsqueda a periodos relativamente cortos; ahora nos enfocamos a ciclos menores a diez días, del análisis anterior elaboramos la tabla C.1 del anexo C.

Los resultados en la tabla C.1 ayudan a reducir el tamaño en la ventana, ya que el contenido de periodos mayores a 10 días es similar en ventanas que anticipan un GLE a ventanas de ruido espacial (señal RCG).

Consideramos que las periodicidades de interés se encuentran en el rango de corto plazo, abarcando días o posiblemente horas; para caracterizar las altas frecuencias reducimos el tamaño temporal de las ventanas.

Una observación más que podemos distinguir es que durante años con mayor actividad solar la potencia de los RCG aumenta, los espectros anuales con anomalía tienen una potencia con un valor de 10^7 , mientras que los espectros en años en los que no se tiene evento la potencia alcanza una magnitud de 10^6 , sin embargo el interés de estudio no se halla en el espectro global sino en la evolución de los periodos que contiene la señal; lo importante es determinar el desarrollo característico de la señal de RCG antes de un evento altamente energético.

De acuerdo a todo el análisis anterior y a la clasificación de los eventos, tenemos una gran gama de periodos, que si los analizamos como un solo conjunto es muy difícil utilizarlos como objetivos de pronóstico; es así que nos volvemos a eventos individuales para caracterizar la evolución antes de la fecha de ocurrencia del GLE.

Las ventanas de estudio son de 30, 15, 5 y 1 días, éstas nos permiten observar a detalle la evolución temporal de periodos menores a 10 días.

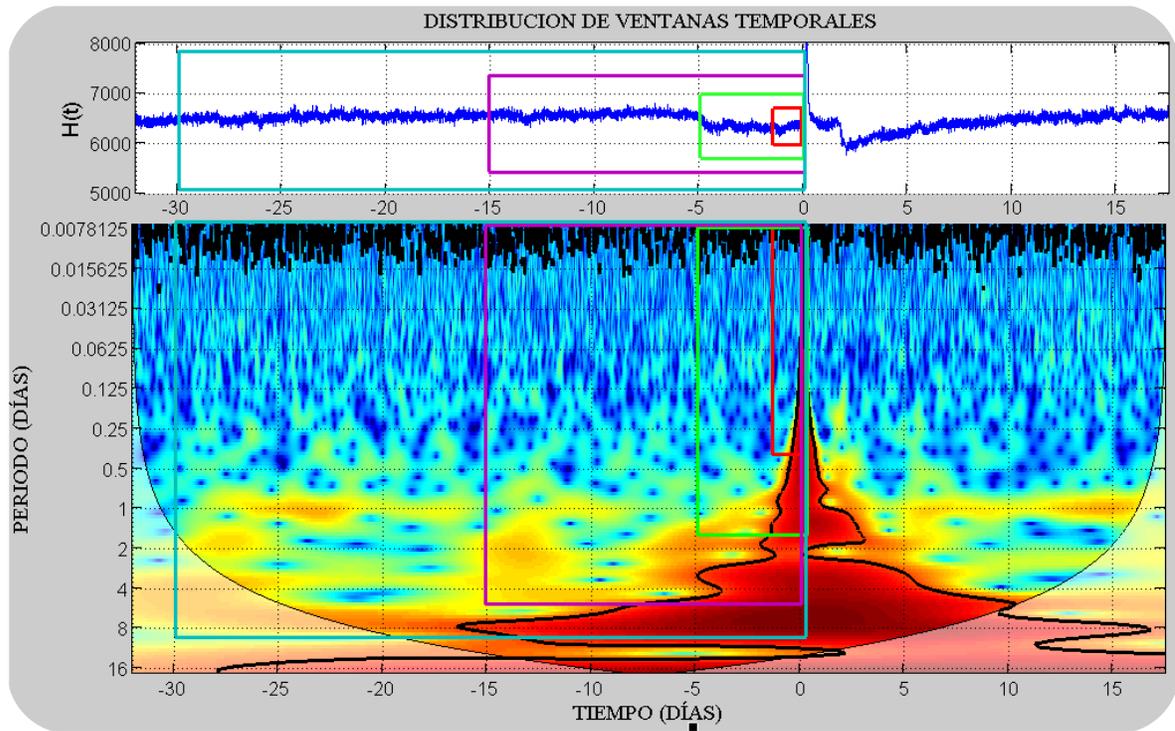


Figura 5.12 Distribución de ventanas temporales para el análisis de cada evento.

El GLE está ubicado en el día cero, por lo tanto la señal que lo anticipa se muestra en una escala de tiempo negativa, así ubicamos las ventanas aproximadamente 60 días antes del evento y observamos la evolución de los periodos antes de llegar al día cero.

En la figura 5.12 mostramos la distribución de las ventanas utilizadas, éstas avanzan en tiempo cada hora, actualizándose 24 veces en un día; podemos ver su evolución al realizar una película con el conjunto de espectros para cada evento. Las ventanas tienen asociadas un rango limitado de acceso a los periodos, por esto, para una ventana de N días accedemos a periodos máximos de $N/3$.

Como la señal de RCG está constituida por un amplio rango de periodos y la intensidad de color (en este caso la potencia) de los periodo es una función exponencial, realizamos un filtrado de bajas frecuencias (filtro pasa altas) para quitar el periodo de mayor aporte energético y de este modo, resaltar el comportamiento de periodos con menores potencias.

CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

La figura 5.13 presenta ventanas de distintos tamaños (30, 15, 5 y 1 días en lectura occidental) sin filtro, todas anticipan en una hora al GLE, cuando reducimos la ventana los periodos de corta duración se visualizan con un mayor detalle.

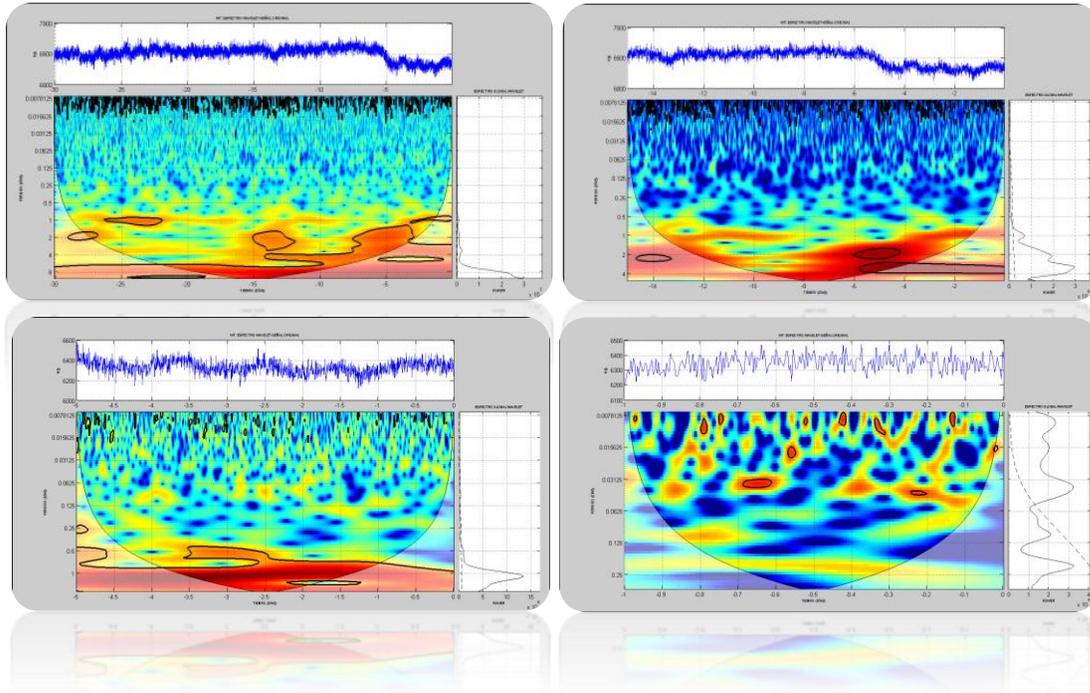


Figura 5.13 Ventanas de distintos tamaños con una distribución de frecuencias con distintas resoluciones; para eventos ocurridos después de 1969 el muestreo en la señal de RCG es de 5 minutos.

En la figura 5.14 observamos las ventanas anteriores con filtro pasa altas (orden 9), resaltando los periodos de menor contribución de potencia; en el caso de la ventana de 1 día, el filtro no cambia el espectro porque la mayor potencia es aportada por los periodos de plazo ultracorto (esto lo observamos en el EGW).

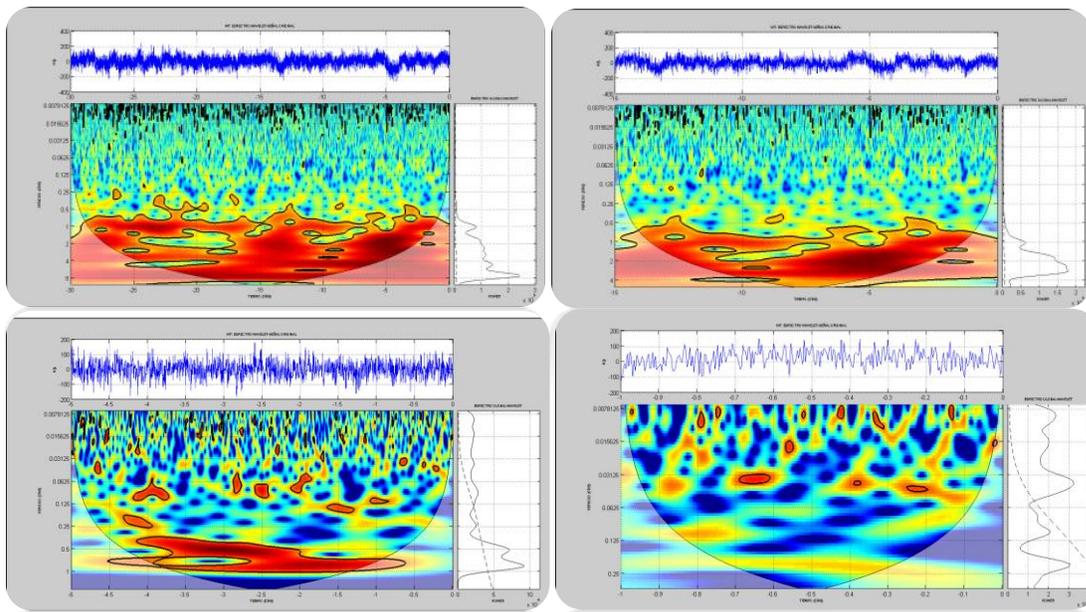


Figura 5.14 Espectros filtrados para resaltar periodos de menor potencia, las ventanas anticipan a un mismo evento en una hora.

Al caracterizar la evolución la primer ventana se encuentra a 60 días del evento, el paso temporal que le damos es de 1 hora, así entonces tenemos una ventana de tamaño N días que avanza en tiempo cada hora con un muestreo en la señal de 5 minutos, esto es, que la ventana al avanzar en tiempo se actualiza con 12 nuevos datos y desecha los últimos doce elementos de la serie.

Ya en este punto la hipótesis a probar es que los periodos fundamentales de la señal de RCG es la clave para detectar las firmas espectrales; esperamos que la intensidad de los periodos incrementen, decaigan o desaparezcan totalmente antes de un evento altamente energético, o de igual manera, que periodos no existentes en la señal comiencen a gestarse.

Al efectuar las distintas ventanas consideramos favorable una de 15 días, esta entrega los detalles suficientes para describir la evolución temporal del contenido espectral (periodos de 4, 2, 1 y 0.5 días), donde consideramos existe el precursor; esto porque no encontramos alguna característica en periodos mayores a 5 días, de esta manera discriminamos ventanas mayores a quince días (eliminando periodos superiores a 5 días).

Los periodos anteriores se encuentran catalogados como periodos característicos, por lo tanto podemos basarnos en su comportamiento para anticipar un GLE. La ventana de 15 días se justifica porque brinda información sobre los periodos requeridos, el interés se reduce a un rango de 5-0.5 días.

Al tener una resolución de 5 minutos es posible acceder a periodos mínimos de 10 minutos, el problema que surge es que los periodos menores a 12 horas se tornan turbulentos a nuestra percepción, de tal forma que no es posible detectar un patrón característico para describirlos; al observar la evolución del espectro wavelet de estos periodos pequeños (periodos de plazo ultra corto) parecen intensificarse, disminuir y desaparecer sin ningún patrón reconocible, por lo que con este primer método de caracterización, los periodos menores a 12 horas no es posible incluirlos dentro del estudio. Con esto podríamos justificar que el muestreo de la señal pudiese ser de 6 horas y optimizar el proceso de cómputo, pero trabajamos con 5 minutos por el tratamiento que realizamos por Componentes Principales, en cual hacemos que la computadora con ayuda de un método matemático encuentre las características que no son perceptibles a nuestros ojos.

5.3.1 Características

Los resultados de la caracterización no muestran solo un patrón antes de un GLE, esto resulta complicado debido al desarrollo temporal de los periodos; esta parte es un símil con la interpretación sísmica, en la cual para la definición de estructuras no existe una regla general, de manera que tenemos la necesidad de personal especializado en donde la interpretación está en función de la experiencia adquirida por la cantidad de imágenes analizadas.

En la figura 5.15 ilustramos un caso de cada grupo (A, B, C respectivamente) observando un comportamiento peculiar en la evolución de los periodos de los RCG; antes de la fecha de evento, existe una perturbación en la señal (línea punteada) que es reflejada en el espectro como un rango de periodo continuos [4-0.25] días, dichas perturbaciones presentan una tendencia a la deriva de alta a baja frecuencia, esta característica se presentan de 50 a 20 días antes del evento y de vez en cuando una segunda perturbación de 1 a 4 días antes del día cero.

La intensidad de los periodos en el momento de la perturbación se torna máxima, y a medida que se acerca la fecha del evento (día cero) comienza a atenuarse. Puesto que este patrón peculiar no

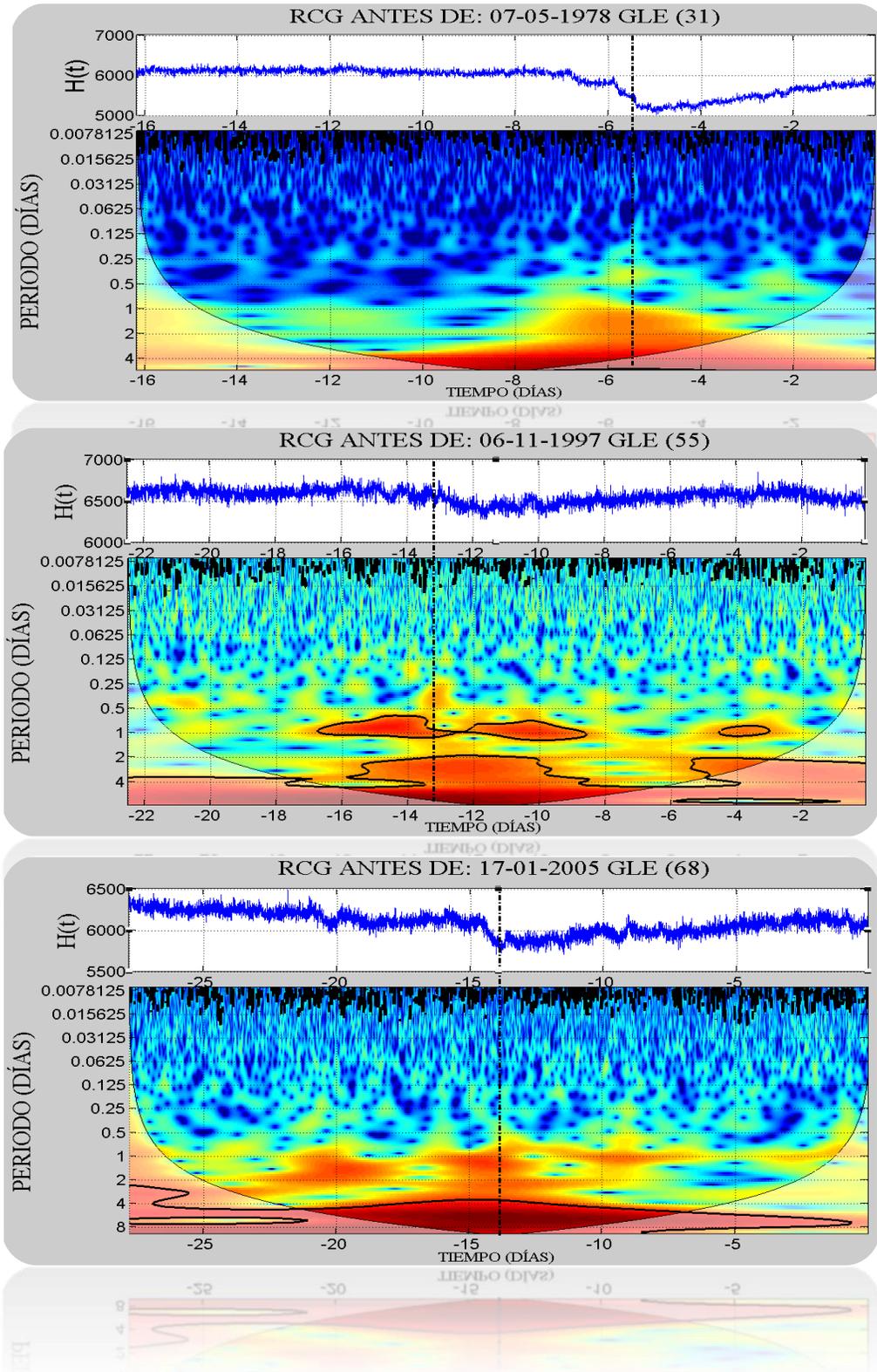
es común fuera de los periodos de ocurrencia de GLR, el resultado puede ser utilizado como herramienta de pronóstico.

Existe otro tipo de comportamiento que podemos caracterizar, es algo similar a la descripción anterior; para este caso el periodo de 1 día se mantiene intensificado días antes del evento formando una franja en tiempo muy notable que puede decaer o no días antes (u horas) de la fecha de ocurrencia, esto es, que se mantiene el comportamiento descrito anteriormente, donde existe la perturbación, solo que no todo el rango de periodos deriva a bajas frecuencias, si no que, se mantiene el periodo de 1 día por más tiempo antes del evento altamente energético, esta segunda característica la podemos observar en la figura 5.16.

El análisis anterior es totalmente cualitativo, lo que necesitamos es un argumento matemático que sustente nuestra teoría de que el espectro wavelet que anticipa a un GLE unos instantes antes es distinto a un espectro que se encuentra muy lejos de un evento; si probamos que los espectros son diferentes probamos al mismo tiempo que el precursor existe.

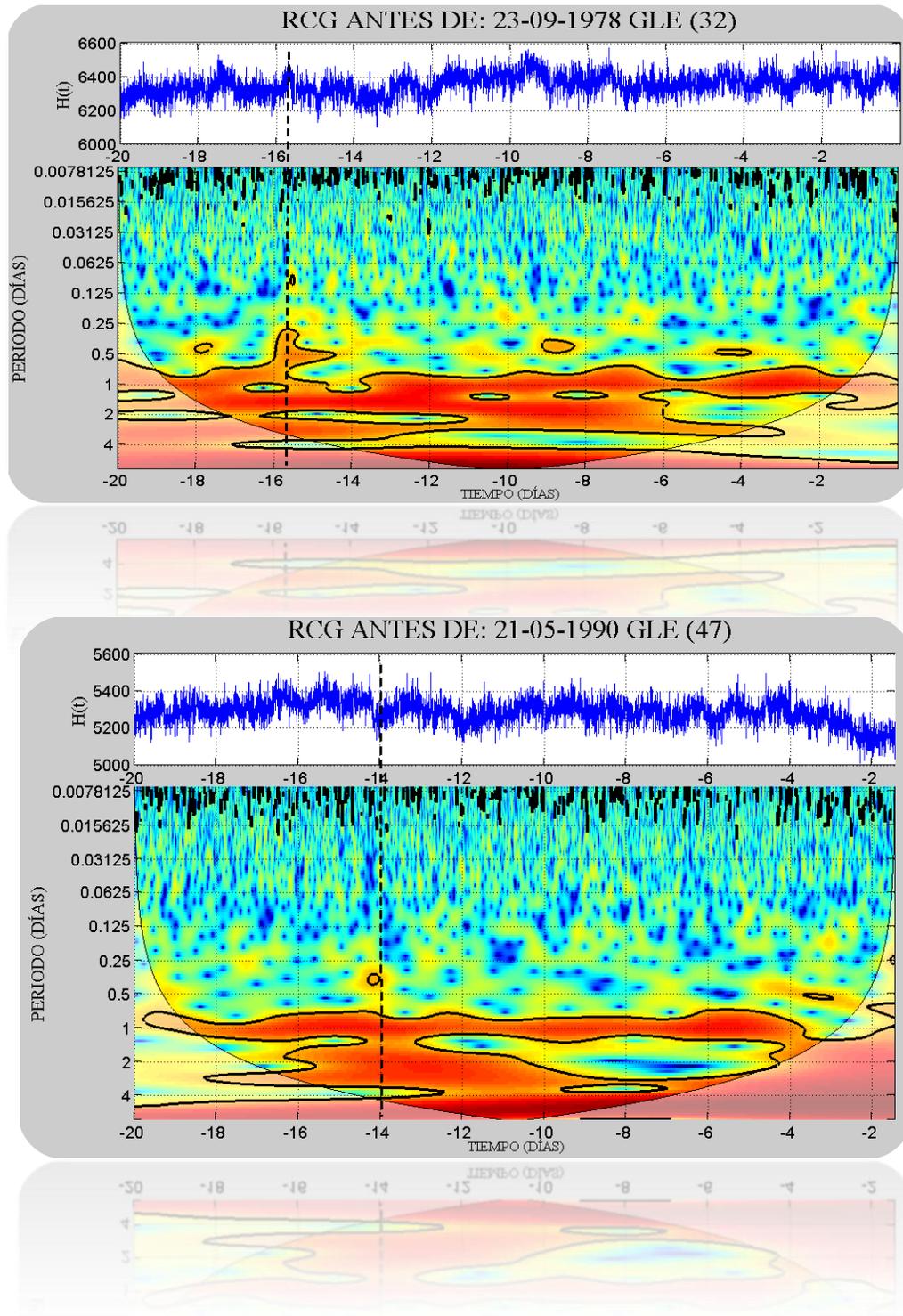
5.3.2 Comportamiento 1

Figura 5.15 Perturbaciones registradas en la señal de RCG reflejadas en los espectros wavelet.



5.3.2 Comportamiento 2

Figura 5.16 Comportamiento característico de los periodos antes de un GLE.



En todos los casos una perturbación es registrada en la señal de RCG antes de un GLE, de manera contraria no todas las perturbaciones anticipan a un GLE, de esta forma necesitamos trabajar para detallar las características sobre la señal de RCG que precede a un evento altamente energético.

Para esto proponemos el Análisis de Componentes Principales (PCA de sus siglas en inglés), este método toma las matrices de datos que generan los espectros wavelet y compara los espectros precursores con espectros no precursores, los detalles se describen a continuación.

5.4 Análisis de Componentes Principales de la Matriz Generada por Wavelets

Este tipo de análisis es utilizado para el reconocimiento de imágenes, una de sus aplicaciones se encuentra en la detección de rostros, enfocándose a características definidas tratando de simular lo que realiza el ojo humano. Aun cuando los rostros son similares en gran parte, el análisis de componentes principales es capaz de identificar los detalles específicos que distinguen uno de otro y los hace diferentes.

Las características que observamos en los espectros de potencia wavelet en gran parte se encuentran en función de nuestra capacidad de percepción; el método científico establece que un experimento debe de ser reproducible bajo las mismas condiciones, para dejar de lado el análisis cualitativo de los espectros wavelet sometemos las imágenes (espectros) a un estudio por sus componentes principales, de esta forma, todos podemos observar los resultados desde el mismo punto de vista, el punto de vista cuantitativo siendo este es totalmente reproducible.

La técnica es implementada para aprobar la premisa de que el precursor existe; suponemos que una ventana de quince días que precede al evento en una hora contiene información que podemos dirigir como precursor, así entonces, ventanas lejanas a un evento mostrarán características distintas a las ventanas que llamaremos precursoras o ventanas pre-evento.

El algoritmo es una adaptación de la versión original proporcionada por el *Dr. Mauricio Orozco* y el *Dr. Carlos Ortiz*. El método se encuentra inspirado en sus artículos publicados, orientados al reconocimiento de cuerpos salinos es secciones sísmicas.

El análisis de componentes principales permite observar características a detalle, por este motivo utilizaremos señales con un muestreo de 5 minutos, los eventos que cumplen esta particularidad comienzan en el evento 18.

CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

Trabajamos directamente sobre la matriz de datos obtenida por el análisis de ondículas; la señal temporal de 15 días contiene 4320 elementos, el tamaño de la matriz es 115x4320 definida en el dominio complejo, las 115 hileras son por un factor de 12 y por la escala máxima obtenida a partir del tamaño en la ventana. Presentamos las pruebas realizadas para tres matrices diferentes: real, valor absoluto y utilizando un filtro pasa altas.

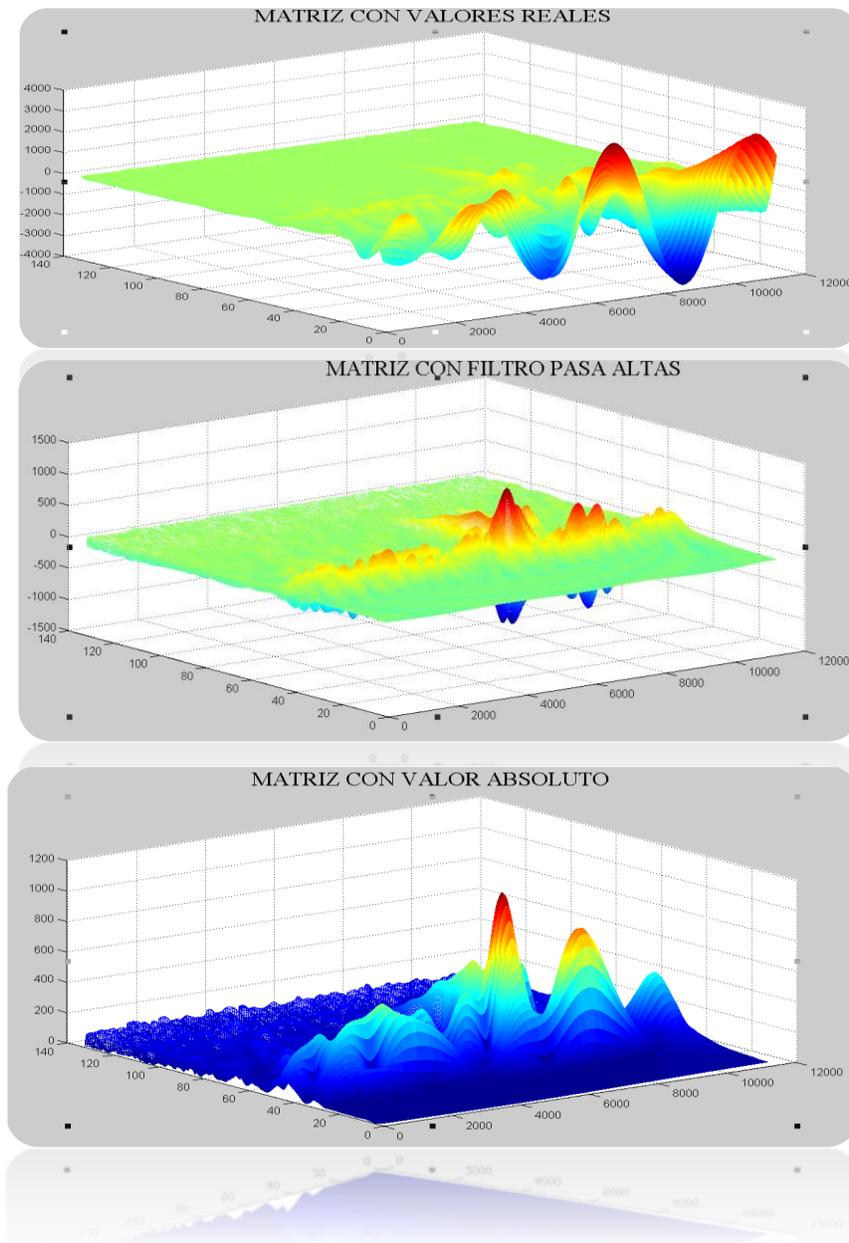


Figura 5.17 Matriz generada por el proceso de ondículas: real, filtrada y con valor absoluto.

El objetivo de realizar las pruebas con cada una de las matrices es seleccionar alguna que resalte las características del precursor; podremos evaluar la mejor matriz en función de la distancia de sus espacios vectoriales respecto a la base de entrenamiento, que se reflejará en un valor del estadístico Z más alto (respecto a una base entrenada con matrices no precursoras).

Tenemos acceso a 53 ventanas (una por cada evento); recortamos la ventana precursora unas horas antes del GLE y suponemos que todas éstas forman un conjunto con la característica esencial de preceder a un evento altamente energético.

Generamos un segundo conjunto de matrices que llamaremos matrices de ruido espacial; para asegurar que se hallan lejos de un evento las obtenemos de ventanas en años en los que no existe presencia de GLE. En total formamos un conjunto de 900 ventanas de ruido espacial que generan 900 matrices no precursoras y podemos comparar con el conjunto de matrices precursoras.

$$A = \{\text{MATRICES PRECURSORAS, 53 ELEMENTOS}\}$$

$$B = \{\text{MATRICES NO PRECURSORAS, 900 ELEMENTOS}\}$$

$$C = \{N \text{ MATRICES DE ENTRENAMIENTO } \in B\}$$

El algoritmo obtiene los valores y vectores característicos de un conjunto de matrices C que representa los elementos de entrenamiento; la base extraída del conjunto C es comparada con los vectores característicos del conjunto A y un subconjunto aleatorio proveniente de B . Esta comparación en realidad es la distancia de los espacios vectoriales; una distancia pequeña se refiere a la similitud de los eigenvectores, esto es, que los conjuntos son similares y pueden describirse con la misma base vectorial, de manera contraria si la distancia es grande, el conjunto al proyectarse en el espacio de entrenamiento estará lejos de ser reconstruido con la base vectorial entrenada.

La base de entrenamiento pertenece a un subconjunto de N elementos aleatorios contenidos en B . Elegimos una base de entrenamiento del conjunto B porque tenemos un número mayor de elementos de comparación; de este modo podemos tomar un conjunto de 40 matrices contenidas en B de manera aleatoria, y acceder a 860 matrices distintas para comparar la base entrenada con el mismo conjunto B ; de la misma forma accedemos a 52 matrices diferentes al comparar la base

CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

entrenada con el conjunto A . De otra manera, si entrenamos la base con 40 elementos del conjunto A tenemos 900 matrices distintas en el conjunto B y solo 12 diferentes pertenecientes al conjunto A . Ya creada la base podemos acceder a N eigenvectores, discriminamos los aportes menores a 0.1%.

Al generar un subconjunto de matrices aleatorio f (contenida en B) del cual realizamos un entrenamiento con todos los elementos, los vectores característicos serán capaces de reconstruir todos y cada uno de los elemento de f (si comparamos la distancia de las matrices proyectadas en el espacio de entrenamiento el resultado es cero)

Mostramos un resultado del algoritmo diseñado (de entrada solo necesitamos las matrices de entrenamiento):

$f =$ [Matrices de entrenamiento, 38 elementos]

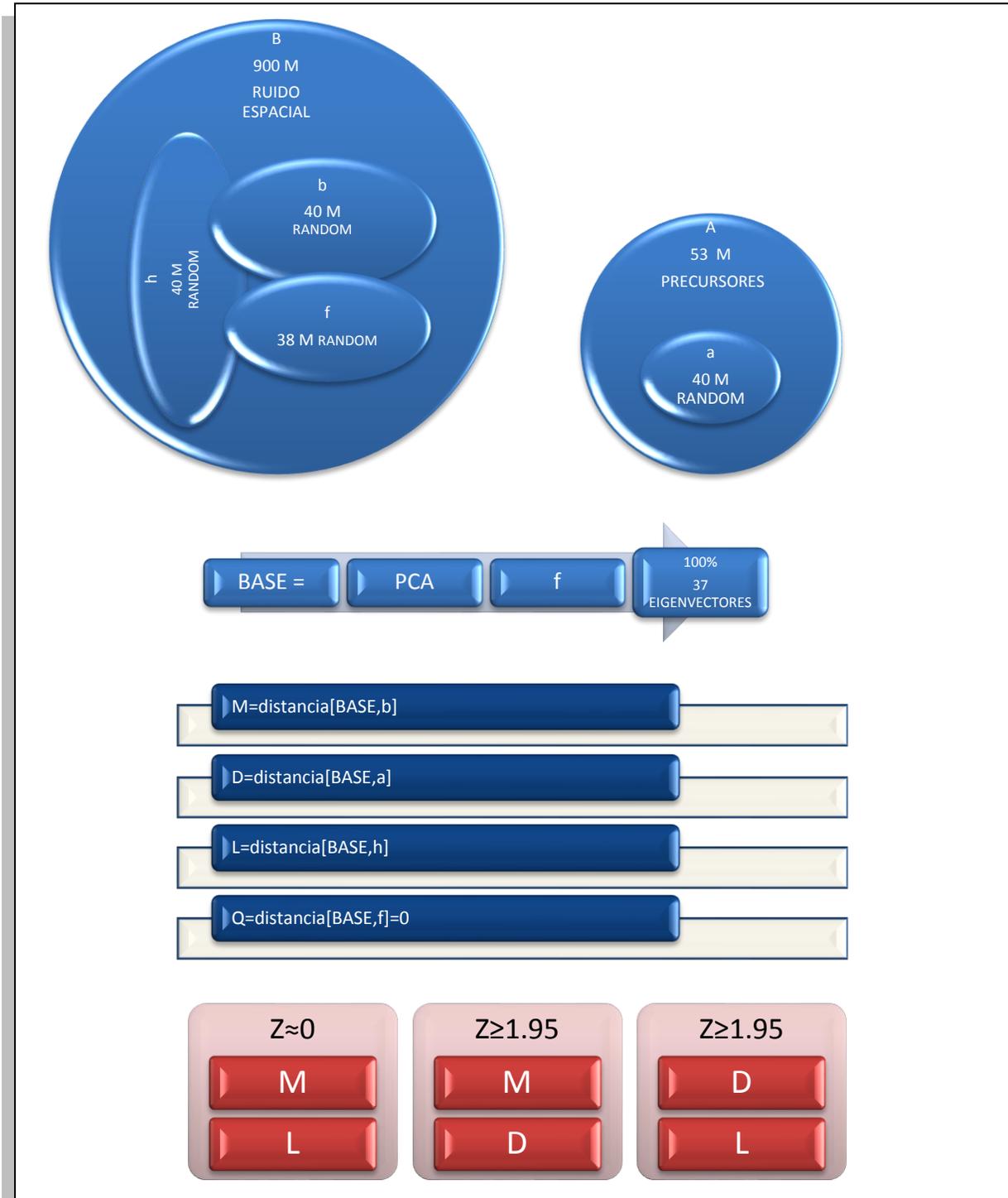
En éste punto tenemos acceso a 38 valores característicos, el número siempre será igual o menor a la cantidad de matrices usadas en el entrenamiento, esto para mantener la independencia lineal (capítulo 4); accediendo a los valores característicos cuantificamos el aporte que realiza cada uno para la reconstrucción de un elemento de f .

Tabla 5.7 Distribución en porcentaje de los eigenvectores.

#	%	de	%												
	aporte		acumulado												
1	26.4159677		26.41596774	11	2.29788126		83.34585728	21	0.64267331		95.10888878	31	0.23766436		98.95744315
2	15.4919071		41.90787485	12	1.90073397		85.24659124	22	0.58833748		95.69722626	32	0.22258332		99.18002648
3	9.43536576		51.34324061	13	1.73536327		86.98195451	23	0.57212161		96.26934787	33	0.18649091		99.36651739
4	6.62192482		57.96516542	14	1.45556981		88.43752432	24	0.50343662		96.7727845	34	0.17493899		99.54145638
5	5.78159465		63.74676008	15	1.37055685		89.80808117	25	0.40347193		97.17625643	35	0.17081481		99.71227119
6	4.13122504		67.87798511	16	1.1938537		91.00193487	26	0.35986034		97.53611677	36	0.14557399		99.85784517
7	3.81860735		71.69659247	17	0.97952946		91.98146433	27	0.33327237		97.86938913	37	0.14215483		100
8	3.60968081		75.30627328	18	0.88340465		92.86486898	28	0.32205027		98.1914394	38	7.53E-16		100
9	3.00362834		78.30990161	19	0.81829618		93.68316517	29	0.27029259		98.461732				
10	2.7380744		81.04797602	20	0.78305031		94.46621547	30	0.25804679		98.71977879				

aleatorio de A ; la $BASE$ es entrenada con f ; 37 eigenvectores logran caracterizar el 100% de los elementos pertenecientes a f .

Cuadro 5.1 Ejemplificación de la distribución de los conjuntos.



CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

Los vectores M , D , L y Q representan las distancias de cada elemento de los subconjuntos hacia la BASE de entrenamiento, en una expresión estadística representan la covarianza de cada matriz contenida en un subconjunto hacia la BASE vectorial entrenada; para el caso de M , D y L los vectores contienen 40 números reales (cada uno representa la covarianza de las matrices hacia la BASE); se espera que las distancias en M y L sean menores que los contenidos en D , ya que los valores de M y L representan matrices pertenecientes al mismo conjunto de entrenamiento ($b, h, f \in B$), de manera similar esperamos que los valores en D sean mayores que los anteriores, porque la premisa es que " a " pertenece a un conjunto distinto lejos de ser representado por la BASE vectorial entrenada (D representa un conjunto que inicialmente consideramos diferente [$a \in A$]). Q representa un vector nulo de 38 elementos, porque podemos representar cada elemento de f con la BASE de entrenamiento.

El estadístico Z lo utilizamos para tener un elemento matemático que garantice que los conjuntos son diferentes, así entonces la hipótesis a probar es la siguiente:

"Las matrices del conjunto A son distintas a las contenidas en el conjunto B"

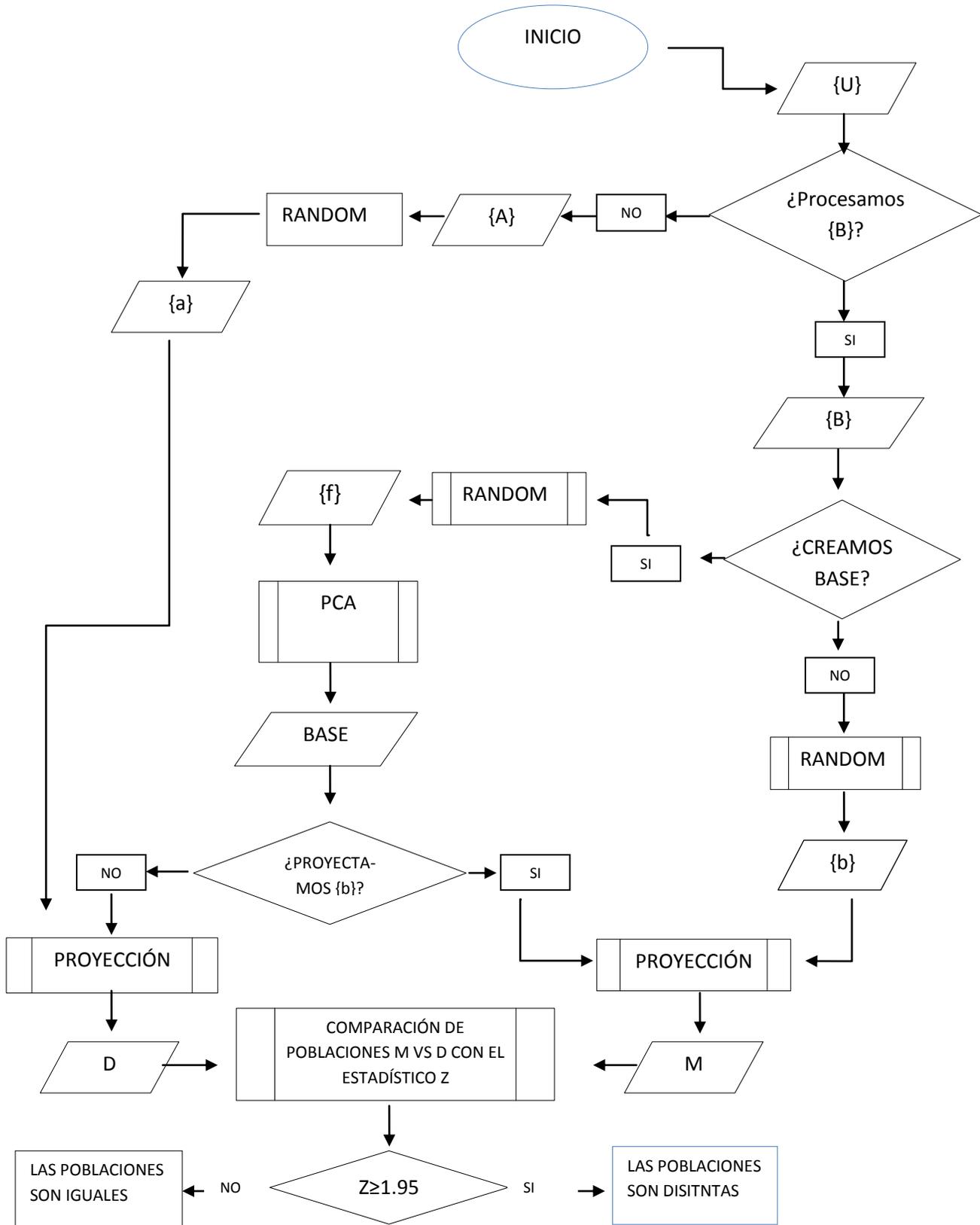
Si $Z \geq 1.95$ la hipótesis se acepta

Si $Z \ll 1.95$ la hipótesis se rechaza

Los recuadros en rojo muestran el valor de Z (al comparar las distancias) que se esperan en los experimentos; si comparamos los valores de M y L obtendremos un resultado Z cercano a cero debido a que las distancias son similares por representar a elementos de un mismo conjunto; para los casos siguientes al comparar $M-D$ y $D-L$ esperamos el valor $Z \geq 1.95$ dado que confrontamos distancias que pertenecen a conjuntos diferentes.

El estadístico Z es útil para comprobar hipótesis de conjuntos con un número de elementos diferente, en las pruebas realizadas elegimos conjuntos representativos de 40 elementos para cumplir la condición de muestras grandes (mayores a 30 elementos).

En el siguiente diagrama explicamos el proceso del algoritmo con una base entrenada con N elementos contenidos en el conjunto B (ruido espacial):



$U = \{A, B, \setminus A \cap B = 0\}$

$A = \{\text{MATRICES PRECURSORAS, 53 ELEMENTOS}\}$

$a = \{n \text{ MATRICES ALEATORIAS } \in A, n \in \mathbb{N}\}$

$B = \{\text{MATRICES DE RUIDO ESPACIAL, 900 ELEMENTOS}\}$

$b = \{n \text{ MATRICES ALEATORIAS } \in B, n \in \mathbb{N}\}$

$f = \{N \text{ MATRICES ALEATORIAS } \in B, N \in \mathbb{N}\}$

$BASE = \{\sum EIGENVECTORES \geq 99.99\%, \#EIGENVECTORES \leq N\}$

$M = \{n \text{ DISTANCIAS LEJANAS DEL ESPACIO B}\}$

$D = \{n \text{ DISTANCIAS CERCANAS DEL ESPACIO B}\}$

5.4.1 Resultados del Algoritmo ACP

Presentamos los resultados del análisis con distintos números de entrenamiento, utilizando matrices de diferentes características, manteniendo constante la ventana de 15 días y una comparación (para evaluar el estadístico Z) de 40 matrices $\in A$ vs 40 matrices $\in B$.

MATRIZ GENERADA POR ONDÍCULAS (datos con filtro pasa altas)		
# DE ENTRENAMIENTO	# DE EIGENVECTORES $\approx 100\%$	$\langle Z \rangle$
20	[17-18]	6.2342
40	[35-38]	6.3335
180	[152-167]	6.1754
MATRIZ GENERADA POR ONDÍCULAS (sin filtro)		
# DE ENTRENAMIENTO	# DE EIGENVECTORES $\approx 100\%$	$\langle Z \rangle$
20	[17-18]	6.2352
40	[35-38]	6.4476
180	[154-165]	6.5259
MATRIZ GENERADA POR ONDÍCULAS (valor absoluto)		
# DE ENTRENAMIENTO	# DE EIGENVECTORES $\approx 100\%$	$\langle Z \rangle$
20	[17-18]	6.4307
40	[35-38]	6.2778
180	[152-160]	6.3309

Tabla 5.8 Resultados de la comparación de los conjuntos de matrices precursoras y matrices de ruido espacial.

La tabla 5.8 resulta de las pruebas realizadas, el número de matrices de entrenamiento propuestos son [20 40 180], 180 forma la quinta parte de la población de entrenamiento; el estadístico Z muestra la diferencia entre las poblaciones y en todo los casos aprueba la hipótesis de una manera contundente.

La diferencia en el trabajo de una matriz real, con valor absoluto o filtrada no influye de manera drástica en los resultados; adoptamos la matriz real para el análisis posterior.

CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

La matriz filtrada no influye de manera radical en los resultados porque solo filtramos un rango de periodos pequeño (>4 días) para resaltar ligeramente los periodos de plazo ultra corto. El algoritmo logra identificar características similares en una matriz que trabaja con la parte real o con el valor absoluto de la matriz compleja.

En el análisis wavelet por ventanas describimos que la ventana de 15 días es el tamaño en el cual logramos caracterizar espectros distintos entre ventanas precursoras y ventanas lejanas a un evento; realizamos pruebas variando el tamaño en la ventana de 1 hasta 50 días, los resultados se presentan en la figura 5.19.

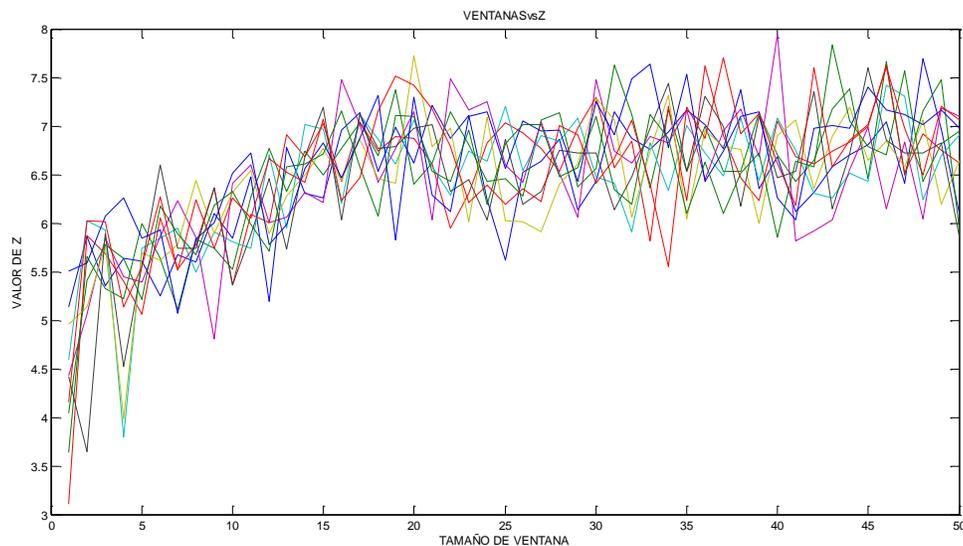


Figura 5.19 Pruebas con ventanas de distinto tamaño.

Del la figura 5.19 notamos que la hipótesis se aprueba en todos los tamaños de ventana; en estos casos mantuvimos constante el número de elementos de entrenamiento (40 matrices reales) realizando 10 pruebas sobre cada ventana. Podemos observar que existe una pendiente muy marcada de la ventana de tamaño 1 hasta la 14, y de acuerdo a nuestras observaciones por el análisis wavelet el sistema considera de igual manera que la ventana de 15 días contiene mejores características como precursor; de la figura anterior las distancias más grandes comienzan en la ventana de 15 días, esto se interpreta como una mayor diferencia entre los conjuntos en comparación.

CAPÍTULO 5 APLICACIONES Y RESULTADOS

Una prueba más que realizamos es el número óptimo de matrices de entrenamiento; para éste caso mantenemos constante el tamaño en la ventana de 15 días y entrenamos la base con subconjuntos aleatorios de 10 hasta 180 elementos (con un intervalo de 10) contenidos en el conjunto B ; cada prueba se realizó 10 veces bajo las mismas condiciones y los resultados se muestran en la figura 5.20.

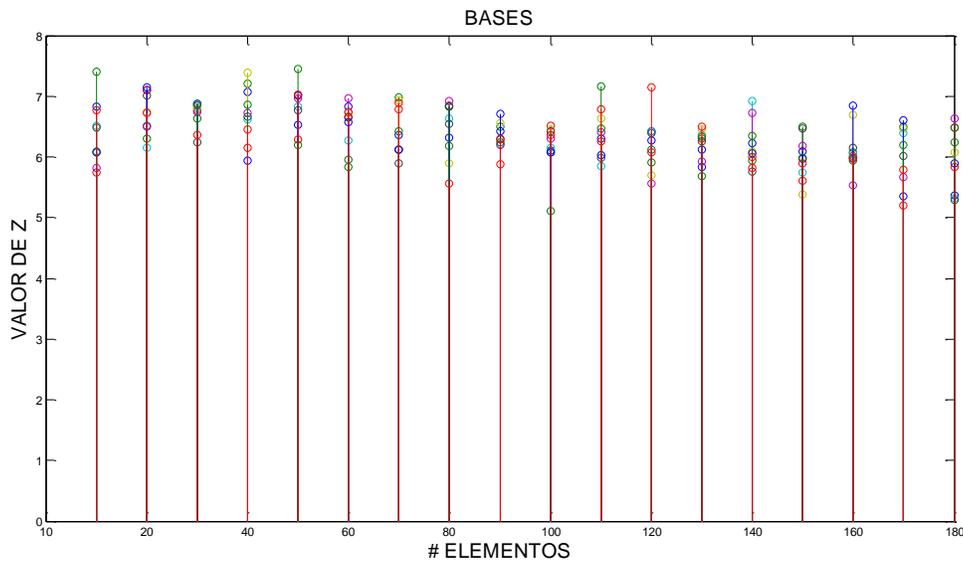


Figura 5.20 Pruebas con números de elementos de entrenamiento distintos.

Al analizar la figura 5.20 apreciamos que el número de elementos de entrenamiento no es un parámetro que influye de manera drástica en los resultados; parece ser que el sistema logra capturar los detalles de los espectros con una base de entrenamiento de 10 elementos o de 180. Este resultado refleja que las matrices de entrenamiento muestran una homogeneidad. Para acelerar el proceso de cómputo recomendamos una base de entrenamiento con 40 elementos.

Finalmente en el capítulo siguiente presentamos las conclusiones y recomendaciones de este trabajo de tesis.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

El análisis por medio de wavelet proporciona información sobre la distribución de la potencia espectral durante un GLE; dependiendo del comportamiento en el incremento y decaimiento en la señal de RCG el evento se describe con una distribución de periodos característico, de los cuales podemos clasificar en tres principales grupos A, B y C, cada uno con un rango de periodos que detalla la relación *incremento-estabilización* sobre los RCG. Un GLE se registra sobre la señal de RCG con un comportamiento que pertenece a alguno de los grupos anteriores, los resultados se dirigen en busca de asociaciones con su origen, al correlacionarlos con otros indicadores solares y conocer las conexiones entre las diferentes capas solares.

La señal de RCG trae consigo características del clima espacial, el cual se encuentra regulado por los fenómenos solares; la señal de RCG es capaz de registrar cambios en la atmosfera solar que preceden a un GLE, estos cambios se observan como perturbaciones en el espectro de potencia wavelet y pueden ser dirigidos como precursores, de manera contraria hacemos la observación de que no todas las perturbaciones conllevan a un GLE. En el análisis descrito no existe solo un patrón que preceda a un GLE, en este trabajo presentamos la descripción de dos tendencias en la distribución de los periodos antes de cada evento.

Las descripciones cualitativas observadas en los espectros son corroboradas por medio del análisis de componentes principales; la hipótesis inicial en el cual suponemos que un conjunto de espectros que anticipan un GLE contiene características distintas a espectros lejanos a un evento se aprobó contundentemente en todos los experimentos, por lo tanto es posible concluir que el precursor existe.

Recomendaciones

La clasificación se encuentra ligada al muestreo de las señales, dado que los GLE son de rápida transitoriedad es importante contar con un muestreo con buena resolución para observarlas y poder realizar esta clasificación.

Es primordial mencionar que no todas las perturbaciones corresponden a ventanas precursoras, necesitamos realizar análisis más a fondo para caracterizar de manera eficiente los precursores.

La ventana temporal para ACP que consideramos entrega mejores resultados es de 15 días; respecto a la base de entrenamiento proponemos un conjunto de 40 elementos para pruebas posteriores.

En éste momento estamos realizando investigaciones en el tema para detallar los precursores y tratar de aproximar la fecha de ocurrencia del próximo GLE, a diferencia de otros trabajos creemos inicialmente que los GLE no se conducen de manera estocástica, si no que guardan una tendencia pseudo-armónica el cual nos puede permitir conocer con un rango de incertidumbre el próximo evento, denominado GLE71.

ANEXOS

EVENTO	Fecha	PERIODOS DE RAYOS CÓSMICOS GALÁCTICOS QUE ANTICIPAN EL EVENTO [DÍAS]									INCREMENTO
		0-0.5	0.6-1	1.1-2	2.1-4	4.1-8	8.1-16	16.1-32	32.1-64	64.1-128	
1	28--Feb-42	0.5		2		6		32	64	128	6%
2	7-Mar-42	0.5		2		6		32	64	128	6%
3	25-Jul-46					5	16	24	54	75,117	16%
4	19-Nov-49						16	32	52	93	40%
5	23-Feb-56		1	1.5		4,7	10,15	28	40	99	4554%
6	31-Aug-56		1	1.5	3	6	10,15	28	40	99	3.30%
7	17-Jul-59			2		4,7	12	29		74,128	10%
8	4-May-60		1		3	4	14	26	41	70,128	290%
9	3-Sep-60		1	2		5	15	26	41	70,128	4.50%
10	12-Nov-60		0.75	1.5	3	5	9,16	26	41	70,128	135%
11	15-Nov-60				2.5	6	10	26	41	70,128	160%
12	20-Nov-60			1.5	2.5		10	26	41	70,128	6%
13	18-Jul-61		1		2.5	4	11		64	96	23.50%
14	20-Jul-61		1		2.5	5	13		64	96	3%
15	7-Jul-66		1	2		6		30	52	100	1%
16	28-Jan-67		1		2.5	6	14	30		99	17%
17	28-Jan-67		1		2.5	6	14	30		99	17%
18	29-Sep-68		1		3	6	14	27		93,128	3%
19	18-Nov-68		1		3	6	14				3%
20	25-Feb-69		1		2.5	5	9,16	27	50	128	1%
21	30-Mar-69		1		3.5	7	13	27	50	128	6%
22	24-Jan-71		0.6,1	1.8	3.5	6		25	64	117	16%
23	1-Sep-71	0.4	1		3		13	25	64	117	14%
24	4-Aug-72			1.2	3.5	6	9	26	50	100	10%
25	7-Aug-72		1		2.2		13	26	50	100	5%
26	29-Apr-73		1		2.5	6	12	32	40	83	4%
27	30-Apr-76		1		3		13	29	47	70	4%
28	19-Sep-77	0.375	1	1.8	3.5	6	14		37	80	3%
29	24-Sep-77	0.375	0.9	1.5	3	5	9		37	80	7%
30	22-Nov-77		1		3.5	4.5	9		37	80	13%
31	7-May-78	0.4		1.5	2		12	27	41	70	84%
32	23-Sep-78	0.4	1	1.8	3		12	27		70	7%
33	21-Aug-79	0.375	1		2.5,3		14	26	44	88	4%
34	10-Apr-81		1		3	4	12	23	37	88	1%
35	10-May-81		1	2	4	8	16	23	37	88	2%
36	12-Oct-81		1	2	3	8	14	23	37	88	11%
37	26-Nov-82	0.4		1.2	3	4	8	27		74	4%
38	7-Dec-82		1		3.5	7	14	27		74	26%

ANEXOS

39	16-Feb-84	0.9		2			10,14	30		99	15%
40	25-Jul-89		1		3	6		26		83	2%
41	16-Aug-89		0.75		2.2, 3.8	5	14	26		83	12%
42	29-Sep-89		1	2		5	14	26		83	174%
43	19-Oct-89			1.2,1.8	2.2,3	5	14	26		83	37%
44	22-Oct-89			1.5	3	6		26		83	17%
45	24-Oct-89			1.5	2.5	7	10,16	26		83	94%
46	15-Nov-89		1	2	3	6	8	26		83	5%
47	21-May-90		1		2.5	6	16	17		74	13%
48	24-May-90		1		2.5	6	16	17		74	8%
49	26-May-90		1		2.5	6	16	17		74	6%
50	28-May-90		1		2.5	6	16	17		74	5%
51	11-Jun-91		1		2.2,3.5		10		39	83	7%
52	15-Jun-91		1	2			10		39	83	24%
53	25-Jun-92		1	2			16	29	64	127	5%
54	2-Nov-92	0.5			3	6	16	29	64	127	3%
55	6-Nov-97		1		2.2		8,14	26	47	70	11%
56	2-May-98		1		3		16	26	64	128	7%
57	6-May-98		1		2.2		13	26	64	128	4%
58	24-Aug-98	0.5	1		3	5	10,14	26	64	128	3%
59	14-Jul-00		1	1.5	3		9	16.5,27	59	128	30%
60	15-Apr-01		1	1.8	4		14	32	50	128	57%
61	18-Apr-01		1	2			14	32	50	128	15%
62	4-Nov-01		1		3	6	14	32	50	128	3%
63	26-Dec-01		1	1.7	3	5	14	32	50	128	7%
64	24-Aug-02		1		3		10	30		70,111	5%
65	28-Oct-03	0.75	1.7		2.5	4	9	25		74,128	5%
66	29-Oct-03	0.75	1.7		2.5	4	9	25		74,128	--
67	2-Nov-03	0.75	1.7		2.5	4	7	25		74,128	6%
68	17-Jan-05		1	2	4		7	30	60	128	3%
69	20-Jan-05		1		3	5	12	30	60	128	269%
70	13-Dec-06		1	1.8	3		14	32		111	92%
		0-0.5	0.6-1	1.1-2	2.1-4	4.1-8	8.1-16	16.1-32	32.1-64	64.1-128	
		PERIODOS DE RAYOS CÓSMICOS GALÁCTICOS QUE ANTICIPAN EL EVENTO [DÍAS]									INCREMENTO

ANEXO A

ANEXOS

Tabla B.1. Grupo A

ANEXO B

GRUPO A		TABLA 1	INCREMENTO		%6		PERIODO		# EVENTOS 24		
			MAX=	MIN=	% 1	PERIODO MIN = 0.5	MAX = 1				
FECHA	EVENUTO	INCREMENTO	PERIODOS CONTENIDOS DURANTE GEL [DÍAS]								
		%	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.015625
31-ago-56	6	3.30%	X	X	X	X					
03-sep-60	9	4.50%	X	X	X	X					
20-nov-60	12	6%	X	X	X	X					
20-jul-61	14	3%	X	X	X	X					
07-jul-66	15	1%	X	X	X	X					
29-sep-68	18	3%	X	X	X	X					
18-nov-68	19	3%	X	X	X						
25-feb-69	20	1%	X	X	X	X					
30-mar-69	21	6%	X	X	X	X					
29-abr-73	26	4%	X	X	X	X					
30-abr-76	27	4%	X	X	X	X					
19-sep-77	28	3%	X	X	X	X					
21-ago-79	33	4%	X	X	X	X					
10-abr-81	34	1%	X	X	X						
10-may-81	35	2%	X	X	X						
26-nov-82	37	4%	X	X	X	X					
25-jul-89	40	2%	X	X	X	X					
15-nov-89	46	5%	X	X	X	X					
28-may-90	50	5%	X	X	X	X					
02-nov-92	54	3%	X	X	X	X					
06-may-98	57	4%	X	X	X	X					
24-ago-98	58	3%	X	X	X	X					
04-nov-01	62	3%	X	X	X	X					
17-ene-05	68	3%	X	X	X	X					

ANEXOS

GRUPO B		TABLA 2	INCREMENTO				PERIODO				#EVENTOS 23	
			MAX=	17%			MAX =0.25					
			INCREMENTO	5%			PERIODO MIN	=0.125				
FECHA	EVENTO	INCREMENTO	PERIODOS CONTENIDOS DURANTE GEL [DÍAS]									
		%	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.015625	0.0078125
28-feb-42	1	8%	X	X	X	X	X					
07-mar-42	2	6%	X	X	X	X	X					
25-jul-46	3	16%	X	X	X	X	X					
17-jul-59	7	10%	X	X	X	X	X					
28-ene-67	16	17%	X	X	X	X	X	X				
28-ene-67	17	17%	X	X	X	X	X	X				
01-sep-71	23	14%	X	X	X	X	X	X				
04-ago-72	24	10%	X	X	X	X	X	X				
07-ago-72	25	5%	X	X	X	X	X					
24-sep-77	29	7%	X	X	X	X	X					
23-sep-78	32	7%	X	X	X	X	X	X				
12-oct-81	36	11%	X	X	X	X	X	X				
24-may-90	48	8%	X	X	X	X	X					
26-may-90	49	6%	X	X	X	X	X					
11-jun-91	51	7%	X	X	X	X	X					
25-jun-92	53	5%	X	X	X	X	X					
06-nov-97	55	11%	X	X	X	X	X	X				
02-may-98	56	7%	X	X	X	X	X					
26-dic-01	63	7%	X	X	X	X	X	X				
24-ago-02	64	5%	X	X	X	X	X					
28-oct-03	65	5%	X	X	X	X	X					
29-oct-03	66	5%	X	X	X	X	X					
02-nov-03	67	6%	X	X	X	X	X					

Tabla B.2. Grupo B

ANEXOS

Tabla B.3. Grupo C

GRUPO C		TABLA 3	INCREMENTO MAX= 4554%										PERIODO MAX =0.0625	#eventos 23
			INCREMENTO MIN= 12%										PERIODO MIN = 0.0078125	
FECHA	EVENTO	INCREMENTO	PERIODOS CONTENIDOS DURANTE GEL [DÍAS]											
		%	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.015625	0.0078125		
19-nov-49	4	40%	X	X	X	X	X	X	X					
23-feb-56	5	4554%	X	X	X	X	X	X	X					
04-may-60	8	290%	X	X	X	X	X	X	X					
12-nov-60	10	135%	X	X	X	X	X	X	X					
15-nov-60	11	160%	X	X	X	X	X	X	X					
18-jul-61	13	23.50%	X	X	X	X	X	X	X					
24-ene-71	22	16%	X	X	X	X	X	X	X	X				
22-nov-77	30	13%	X	X	X	X	X	X	X	X				
07-may-78	31	84%	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
07-dic-82	38	26%	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
16-feb-84	39	15%	x	x	x	X	X	X	X	X	X	X		
16-ago-89	41	12%	X	X	X	X	X	X	X					
29-sep-89	42	174%	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
19-oct-89	43	37%	X	X	X	X	X	X	X					
22-oct-89	44	17%	X	X	X	X	X	X	X					
24-oct-89	45	94%	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
21-may-90	47	13%	X	X	X	X	X	X	X	X				
15-jun-91	52	24%	X	X	X	X	X	X	X	X				
14-jul-00	59	30%	X	X	X	X	X	X	X	X		X		
15-abr-01	60	57%	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
18-abr-01	61	12%	X	X	X	X	X	X	X					
20-ene-05	69	269%	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
13-dic-06	70	92%	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		

BIBLIOGRAFÍA

1. Allen, Ronald L., 2004. *Signal Analysis: Time, Frequency, Scale and Structure*. Wiley – Interscience, U.S.A, 937 pp.
2. Andreas, Antoniou, 2006. *Digital Signal Processing, Signal, System and filters*. University of Victoria, British Columbia Canada, McGraw Hill.
3. Andriopoulou, M., Mavromichalaki, H., Plainaki, C., Belov, A., Eroshenko, E., 2011. *Intense Ground – Level Enhancements of Solar Cosmic Rays During the Last Solar Cycles*. *Solar Physics*, 269, 155 – 168.
4. Bai T., 2003, *Periodicities in Solar Flare Occurrence: Analysis of Cycles*, *the Astrophysical Journal*, the American Astronomical Society, 591, 406 – 415.
5. Bogart Richard S. and Bai Taeil, 1985, *Confirmation of a 152 day periodicity in the occurrence of Solar Flares Inferred from Microwave data*, *the Astrophysical Journal*, the American Astronomical Society, 299, L51 – L55.
6. Boggess A. y F. Narcowich, 2001. *A first course in wavelets with Fourier analysis*, Prentice Hall.
7. Brigham, O., 1988. *The Fast Fourier Transform and Its Applications*. Prentice Hall, 448 pp.
8. Chatfield, C., 1989. *The analysis of Time Series: An Introduction*, 4th Ed. Chapman and Hall, 241 pp.
9. Cordero, G., Lara, A., Maravilla, D., Mendoza, B., Valdés, J.F. y Velasco, V., 2008. *Introducción a la Física Espacial*. Dir. Gral. de Publ. UNAM.
10. DeFatta, David J., et al, 1988. *Digital Signal Precessing: A System Design Approach*. John Wiley & Sons, the U.S.A, 661 pp.
11. Dimitropoulou, M., Moussas, X., Strintzi D., and Enhanced Rieger. 2008, *Type periodicities' detection in X – ray solar flares and statistical validation of Rossby waves' existence*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 386, 2278 – 2284.
12. Farge, M., 1992. *Wavelet transforms and their applications to turbulence*. *Ann. Rev. Fluid Mech*, 24:395-457.
FFT, Spectral Dynamics. Inc., San Marcos, CA., October.
13. Gaberson, H. A., 2003. *The DFT and the FFT as a Discrete Fourier Series of Sampled Data*. MFPT Advanced Signal Analysis Course Notes, Section 2, January.
14. Gerontdou M., Vassilaki A., Mavromichalaki H., Kurt, V., 2002. *Frequency distributions of solar proton event*. *Journal of Atmospheric and Solar – Terrestrial Physics*, 64, 489 – 496.
15. Gopalswamy, N., Xie, H., Yashiro, S., Usoskin, I., 2005. *Coronal Mass Ejections and Ground Level Enhancements*. *International Cosmic Ray Conference Pune*, 1, 169-172.
16. Gopalswamy, N., Xie, H., Yashiro, S., Usoskin, I., 2010. *Ground level enhancement events of Solar cycle 23*. *Indian Journal of Radio & Space Physics*, 39,240 - 248.
17. Harris, F. J., 1977. *Trigonometric Transforms, a Unique Introduction to the*
18. Howell, Kenneth B., 2001. *Principles of Fourier Analysis*. Chapman & Hall/CRC, The U.S.A, 776 pp.
19. Jolliffe, I.T., 1986. *Principal Component Analysis*. 2° edition, Springer, USA, 487 pp.
20. Markus, J., and Aschwanden, 2002. *Particle Acceleration and Kinematics in Solar Flares*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 227 pp.
21. Mewaldt, R. A., Cummings, A. C., and Stone, E. C., 1994. *Anomalous cosmic rays: Interstellar interlopers in the heliosphere and magnetosphere*. *EOS*, 75, Number 16.

BIBLIOGRAFÍA

22. Misiti, Y., Misiti, M., Oppenheim, G., and Poggi, J. M., 2003. *Wavelets and their Applications*. Lavoisier, USA, 330 pp.
23. Mullan, Dermott J., 2010. *Physics of the Sun*. Chapman & Hall/CRC, USA, 360 pp.
24. Oppenheim, Alan V., et al., 1989. *Discrete – Time Signal Processing*. Prentice Hall, New Jersey, 879 pp.
25. Oppenheim, Alan V., et al., 1998. *Señales y Sistemas*. 2ª edición, Pearson, México, 956 pp.
26. Pérez – Peraza, J., Velasco, V. M., Zapotitla J., Vashenyuk, E. V., and Miroshnichenko L. I., 2009, *Pulses with Modulation Analysis of Ground Level Proton Events*, Proceedings of the 31st ICRC. ODZ.
27. Pérez-Peraza, J., 1998. Proc. 16th European Cosmic Ray Symposium 97.
28. Pérez-Peraza, J., Miroshnichenko, L., et al. 2008. *Relativistic proton production at the Sun in the 20 January 2005 solar event*. Advances in Space Research Volume 41, Issue 6, pages 947-954
29. Pinsky M., 2003. *Introducción al análisis de Fourier y las ondeletas*. Thomson, México.
30. Poularikas, A.D., 2000. *Discrete Time and Discrete Fourier Transforms*. The Transforms and Applications Handbook: Second Edition, Ed. Alexander D. Poularikas.
31. Saeed, V. and Vaseghi. 2006. *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*. Third edition, John Wiley & Sons Ltd, Englad.
32. Sheng, Y., 1996. *The transforms and Applications Handbook*. CRC Press.
33. Smith, Steven W., 1999. *The Scientist and Engineer`s Guide to Digital Signal Processing*. Second Edition, California Technical Publishing, San Diego, California.
34. Suess Steven, T., and Tsurutani Bruce T., 1998. *From de Sun: Auroras, Magnetics Storm, Solar Flares, Cosmic Rays*. American Geophysical Union, Washington D.C., USA, 172 pp.
35. Torrence, C., and Compo, G., 1998. *A practical guide to wavelet analysis*. Bull. American Meteorol. Soc. 9, 61-78.
36. Turk, M., and Pentland, A., 1991. *Eigenfaces for Recognition*. Journal of Cognitive Neuroscience, vol. 3, no. 1, pp. 71-86.
37. Turk, M.A., Pentland, A.P., 1991. *Face Recognition Using Eigenfaces*. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, 586 – 591.
38. Usoskin, L.G., Mursul, K., Kangas, J., Gvozdevsky., 2001. *On – Line Database of Cosmic Ray Intensities*. Proceedings of ICRC, 1 - 4.
39. Van, A., and James, A., 1993. *Cosmic Rays, The Sun and Geomagnetism: The Works of Scott E. Forbush*. American Geophysical Union, Washington D.C., USA 472 pp.
40. Vetterli, M., and Kovačević J., 1995. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall, New Jersey, 505 pp.
41. Zarantonello, S. E., 1997. *Theory and application of Wavelets*. Santa Clara University.
42. Zdeněk Švestka, 1976. *Solar Flares*. D. Reidel Publishing Company, Belgium, 399 pp.