



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

ESTUDIO DE LAS OSCILACIONES DE NEUTRINOS
A LA LUZ DE LA TEORÍA DE CAMPOS

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICAS)

PRESENTA:
CESAR ALFONSO AGÓN QUINTERO

DIRECTOR:
DR. JUAN CARLOS D'OLIVO

COMITÉ TUTORAL:
DR. GUSTAVO MEDINA TANCO
DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR



posgrado en ciencias físicas
u n a m

JUNIO DE 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTUDIO DE LAS OSCILACIONES DE NEUTRINOS
A LA LUZ DE LA TEORÍA DE CAMPOS

CESAR ALFONSO AGÓN QUINTERO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

2011

ESTUDIO DE LAS OSCILACIONES DE NEUTRINOS
A LA LUZ DE LA TEORÍA DE CAMPOS

CESAR ALFONSO AGÓN QUINTERO

TRABAJO DE GRADO
PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICA

DIRECTOR:
JUAN CARLOS D' OLIVO

COMITÉ TUTORAL:
GUSTAVO MEDINA TANCO
EDUARDO NAHMAD ACHAR

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

2011

*Este trabajo está dedicado a mis padres
Raúl Augusto Agón Camacho y Deyanira Quintero Torres
y en especial a mi abuela Sara Camacho de Agón.*

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo quiero agradecer a Dios por mi vida y la de mis seres queridos, por permitirme ser parte del bello misterio de su creación a través del lenguaje de la Física, por la capacidad de asombro y el deseo de saber que han mantenido vivos hasta este momento en mí y que han hecho posible la culminación de esta etapa de mi vida.

Agradezco al Dr. Juan Carlos D'Olivo, por su gran paciencia y entrega en la dirección de este trabajo, por su motivación y ánimo constantes en los aspectos teóricos que discutimos durante estos dos años, y por tener siempre abiertas las puertas de su oficina a la discusión. A mis sinodales Dr. Alexis Aguilar, Dr. Gustavo Medina, Dr. Omar Miranda y Dr. Manuel Torres por sus valiosos consejos y comentarios sobre la tesis.

Agradezco a todas las personas que contribuyeron con mi formación académica, es decir:

Al Dr. Pier Mello por su gran dedicación a la enseñanza, por introducirme en uno de los campos más bellos de la Física (Física Estadística), y por su interesante curso de Mecánica Cuántica I, el cual complementé muy satisfactoriamente en un segundo curso impartido por los doctores Luis Urrutia y Juan Carlos D'Olivo quienes enriquecieron mi conocimiento con distintos aspectos avanzados y prácticos de la Mecánica Cuántica.

Al Dr. Juan Carlos D'Olivo por presentarnos una versión formal de la Teoría Cuántica de Campos y ser un estímulo para el estudio de las teorías fundamentales de la naturaleza. Al Dr. Wolfgang Bietenholz quien nos presentó la física de partículas elementales desde una perspectiva teórica y fenomenológica y al Dr. David Vergara quien complementó muy bien los distintos aspectos matemáticos de teoría de campos y física de partículas con su curso de matemáticas I.

Al Dr. Alberto Guijosa de cuyos cursos de Teoría de Campos fuí fiel asistente, por los distintos aspectos conceptuales que con tanto empeño desveló para sus estudiantes y por su excepcional intuición en teoría de campos que tan bien nos transmitió. Al Dr. Saúl Ramos por su curso de introducción a la teoría de cuerdas, fundamental para el nuevo camino que quiero emprender en mi carrera profesional.

A todos los compañeros colombianos y mexicanos con quienes compartí durante mi estancia en las instalaciones del ICN y del instituto de Física, en especial a Paolo Ospina y Felipe Pedraza con quienes compartí vivienda y de quienes recibí miles de consejos que fueron muy importantes para mí.

Agradezco también a todas las instituciones que me brindaron su apoyo, es decir:

A la UNAM, por aceptarme en el posgrado de ciencias y por los apoyos económicos que me ha brindado a través del proyecto PAEP, para la asistencia a distintos eventos. A Yanalté por su excelente asistencia en documentos y procedimientos.

Al ICN, por ser mi casa en estos dos años y por su apoyo en la asistencia a eventos. A Triny por su amabilidad y colaboración en todas mis dudas. Al CONACYT por mantenerme becado durante estos años y por su apoyo económico a través de la Red de Física Altas Energías.

También quiero agradecer a mi familia:

En especial a mi abuela Sara, quien ha patrocinado siempre mis estudios, por apoyarme en mi viaje a México y por el gran amor que siempre me ha brindado. A mi Padre, Raúl Agón, por ser siempre el más bello ejemplo a seguir, por su gran amistad y cariño. A mi madre por su ejemplo de lucha y trabajo, por su incomparable amor y por ser mi mamá. A mis hermanos y familiares por su gran aprecio y apoyo, porque siempre he contado con todos ellos.

Finalmente, quiero agradecer a mi novia Yolima, con quien he tenido la oportunidad de convivir este último año de mi Maestría, por su gran apoyo y dedicación, por su incomparable amor del cual nunca antes había sido partícipe y por contemplar un futuro a mi lado.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	v
ABSTRACT	vi
INTRODUCCIÓN	1
1. ESTADOS DE PONTECORVO	15
1.1. Introducción	15
1.2. Bases completas y estados localizados	16
1.2.1. Paquetes ortonormales y completos	20
1.3. Paquetes de onda y estados de Pontecorvo	22
1.4. Amplitud y probabilidad de transición	25
1.5. Dependencia espacial de las oscilaciones	30
1.5.1. límite ultrarelativista	40
1.6. Valor esperado en mecánica cuántica	40

ÍNDICE GENERAL	II
<hr/>	
2. ESTADOS DE BOGOLIUBOV	44
2.1. Transformaciones de Bogoliubov	44
2.2. Mezcla en teoría de campos	45
2.3. Una elección particular	52
3. FUNCIÓN DE ONDA DE SABOR	56
3.1. Función de onda de sabor	56
3.2. Independencia en parámetro de masa	59
3.3. Densidades de probabilidad equivalentes	61
3.4. Dependencia espacial de las oscilaciones	66
3.4.1. límite ultrarelativista	72
CONCLUSIONES	74
APÉNDICES	79
A.1. Matriz de Mezcla	79
A.2. Identidad de Baker-Campbell-Hausdorff	80
A.3. Operador de carga y Probabilidad	81
A.4. Carga de sabor en el vacío	85
REFERENCIAS	88

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. $ \mathcal{U}_{12}(\mathbf{p}) $ como función de $ \mathbf{p} $, en puntos para $m_1 = 10^{-2}[eV]$ y $m_2 = 10^{-3}[eV]$, línea a trazos $m_1 = 10^{-2}[eV]$ y $m_2 = 10^{-4}[eV]$, línea continua para $m_1 = 10^{-2}[eV]$ y $m_2 = 0[eV]$	36
1.2. $P_{e \rightarrow \mu}^P(L)$ para $\sigma = 0,01[eV]$ y $P = 0,1[eV]$	37
1.3. $P_{\mu \rightarrow \tau}^P(L)$ para $\sigma = 0,2[eV]$ y $P = 2[eV]$	38
1.4. $D_{e \rightarrow \mu}^{P-E}(L)$ en línea continua y $R_{e \rightarrow \mu}^{P-E}(L)$ en línea a trazos, con $\sigma = 0,01[eV]$ y $P = 0,1[eV]$. Cada gráfica tiene distinto rango.	38
1.5. $D_{\mu \rightarrow \tau}^{P-E}(L)$ en línea continua y $R_{\mu \rightarrow \tau}^{P-E}(L)$ en línea a trazos, con $\sigma = 0,2[eV]$ y $P = 2[eV]$. Cada gráfica tiene distinto rango.	39
3.1. $ \mathcal{U}_{\mathbf{p}} ^2$ como función de $ \mathbf{p} $, en puntos para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 10^{-3}[eV]$, línea a trazos para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 10^{-4}[eV]$, línea continua para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 0[eV]$	68
3.2. $ \mathcal{V}_{\mathbf{p}} ^2$ como función de $ \mathbf{p} $, en puntos para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 10^{-3}[eV]$, línea a trazos para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 10^{-4}[eV]$, línea continua para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 0[eV]$	69
3.3. $P_{e \rightarrow \mu}^B(L)$ con $\sigma = 0,01[eV]$, $m_2 = 10^{-2}[eV]$, $m_1 = 0[eV]$ y $P = 0,1[eV]$	70

3.4. $D_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L)$ en línea continua , $R_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L)$ en línea a trazos, con $m_2 = 10^{-2}[eV]$, $m_1 = 0[eV]$ y $P = 0,1[eV]$. Cada una de las gráficas corresponden a rangos y dominios distintos.	71
--	----

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE LAS OSCILACIONES DE NEUTRINOS A LA LUZ DE LA TEORÍA DE CAMPOS.*

AUTHOR: AGÓN QUINTERO, Cesar Alfonso .†

PALABRAS CLAVES: Oscilaciones de neutrinos, teoría cuántica de campos, estados de Pontecorvo, estados de Bogoliubov.

DESCRIPCIÓN: En este trabajo estudiamos algunos aspectos de la teoría cuántica de las oscilaciones de neutrinos, para dos posibles definiciones de los estados de sabor que llamamos estados de Pontecorvo y estados de Bogoliubov y sus respectivas probabilidades de transición de sabor. En primera instancia hemos construido estados masivos localizados, partiendo del desarrollo de sus campos libres, los cuales fueron generalizados a los estados de sabor siguiendo un criterio específico en la interpretación del desarrollo de los campos interactuantes. Una definición para la amplitud de transición de sabor fue dada en términos de los estados de sabor, los campos de sabor y el vacío de la teoría en total analogía con la amplitud de probabilidad estándar de una partícula masiva. Esta amplitud permitió la conversión tiempo a distancia de la probabilidad de transición a través del estudio de su comportamiento en el tiempo, lo cual acentúa al formalismo de la corriente usado en la literatura. Otra posible conversión tiempo a distancia basada en el valor esperado de la distancia recorrida por el neutrino de sabor fue presentada. Las probabilidades de transición de sabor fueron calculadas a partir de la amplitud de transición de sabor. Uno de los resultados importantes fue la demostración de la equivalencia entre las densidades de probabilidad de transición de sabor derivadas de nuestro formalismo y las que se obtienen mediante la carga de sabor.

* Trabajo de Grado.

† Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México. Director: Dr. Juan Carlos D'Olivo

ABSTRACT

TITLE: QUANTUM FIELD THEORY TREATMENT IN THE STUDY OF NEUTRINO FLAVOR OSCILLATIONS.*

AUTHOR: AGÓN QUINTERO, Cesar Alfonso .†

KEY WORDS: neutrino oscilations, quantum field theory, Pontecorvo states, Bogoliubov states.

DESCRIPTION: This report deals with some aspects of the quantum theory of neutrino oscillation, focusing on two possible definitions of the neutrino flavor states which we called Pontecorvo and Bogoliubov states and their corresponding flavor oscillation probabilities. The construction of localized massive states was analyzed from the free field expansion point of view and its generalization to flavor eigenstates was obtained following a criteria related with the interpretation of the interacting field expansion. A flavor transition amplitude definition was given in terms of the flavor states, the flavor field and the vacuum of the theory in analogy with the standard probability amplitude for a massive particle. One advantage of our approach, in comparison with the flavor current formalism existing in the literature, is that it allows to express the probability amplitude as a function of the distance from the study of the wave packet amplitude behavior in time. An alternative way to make the conversion time to distance was given in terms of the expectation value of the distance traveled by the neutrino beam from the production time. The flavor transition probabilities were calculated from the amplitude transition probabilities. One of the main results of this work was the proof of the equivalence between the probability densities derived from our formalism and those obtained by means of the flavor charge.

* Degree work.

† Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México. Director: Dr. Juan Carlos D'Olivo

INTRODUCCIÓN

Gell-Mann y Pais descubrieron en la década de los cincuenta que los estados propios de sabor no necesariamente debían coincidir con las estados de partículas con masas y tiempos de vida media bien definidas [1]. Este importante descubrimiento dió lugar al nacimiento del concepto de mezcla de sabor. Pais y Piccioni [2] sugirieron que los estados propios de sabor eran superposiciones coherentes de estados propios de masa, lo cual permite una conversión parcial del estado inicial de sabor en otros estados de sabor a medida que se propaga. La probabilidad de ocurrencia de tales transiciones oscila en el espacio con una longitud de onda dependiente de las diferencias de masas. Este fenómeno fue bautizado con el nombre de oscilación de probabilidad.

B. Pontecorvo en 1957-58 [3, 4] trasladó estas ideas al caso de los neutrinos, siguiendo una analogía directa del caso ya observado de oscilaciones $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$, por lo que propuso las oscilaciones $\nu_L \rightleftharpoons \bar{\nu}_L$ y $\bar{\nu}_R \rightleftharpoons \nu_R$, dado que en aquel entonces sólo se conocía una familia de neutrinos. Z.Maki, M. Nakagawa and S. Sakata fueron un paso adelante al proponer en 1962 [5] transiciones entre neutrinos del electrón y del muón $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$, aunque la primera teoría fenomenológica de mezcla entre dos neutrinos fue propuesta por V. Gribov and B. Pontecorvo en 1969 [6]. Las oscilaciones de los neutrinos provenientes del Sol fueron predichas por Pontecorvo en 1967 [7] como consecuencia de las oscilaciones entre neutrinos del electrón y del muón.

Desde su propuesta, hasta este momento se ha realizado una gran cantidad de experimentos que han demostrado la existencia de las oscilaciones de neutrinos, tales como, el experimento KamLAND con reactores [8], el experimento Super

Kamiokande con neutrinos atmosféricos y solares [9] y otros [10, 11], el experimento SNO [12] y otros con neutrinos solares [13–16] y el experimento K2K [17]. La propuesta de Pontecorvo no es la única que ha dado una explicación aceptable a tales problemas, otras propuestas han surgido en la literatura en las que se postulan interacciones no estándar [18, 19] e incluso en algunas se consideran neutrinos no masivos [20], sin embargo tales propuestas se han visto sumamente desfavorecidas en los últimos años.

De todos los tratamientos que describen las oscilaciones de neutrinos, el primero, y más utilizado, (que llamaremos formalismo estándar), está basado en primera cuantización e introduce la mezcla a nivel de funciones de onda. En este contexto, hay una enorme cantidad de trabajos, en los que se discuten distintos aspectos que no son bien entendidos ni definidos en el marco de este tratamiento y en los que proponen distintas mejoras al mismo que no siempre preservan sus virtudes. Uno de los aspectos que han sido encontrados en esta dirección, es la violación intrínseca del número leptónico [21, 22], es decir la violación del número leptónico aún antes de cualquier efecto de propagación que aparece cuando se utilizan soluciones de la ecuación de Dirac como descripción más fiel al carácter relativista del fenómeno. A pesar de ello, el formalismo estándar es ampliamente aceptado debido a que las diferencias asociadas con las cantidades medibles experimentalmente, entre este tratamiento y otros más formales de la teoría de campos, son despreciablemente pequeñas y casi completamente indetectables.

Un argumento en contra de la formulación en términos de paquetes de onda de las oscilaciones de neutrinos en primera cuantización es la relacionada con la producción y detección de neutrinos, la cual fue parcialmente resuelta por Giunti [23]. Este autor propone una versión modificada de los paquetes de ondas intermedios, en donde estos son computados con teoría cuántica de campos, por medio de la aproximación de paquetes de onda externos. Esta aproximación consiste en considerar a los neutrinos como partículas virtuales que intervienen en el computo del proceso conjunto de producción, propagación y detección describiendo a los estados asintóticos a través de paquetes de onda. Recientemente, este mismo procedimiento ha sido tratado de manera más precisa por Akhmedov [24].

En el modelo estándar de la física de partículas está contemplado que los campos (de “sabor”) que describen los quarks así como los neutrinos deben escribirse como combinaciones lineales de otros campos con el propósito de diagonalizar los términos de masa en el lagrangiano de la teoría. A pesar de ello, en el sector interactuante son los campos de sabor los que están asociados con procesos que producen las partículas que representan. Por esta razón, resulta de crucial importancia entender la relación entre los estados de sabor y los estados de masa.

El formalismo que intenta dar una respuesta a la pregunta por la relación entre los estados que describen las partículas de sabor y los autoestados de masa es el desarrollado por Blasone [25–39]. En este formalismo, los estados propios de sabor son considerados como estados propios del operador de carga, el cual es definido de la manera usual, es decir a partir de las simetrías del lagrangiano de los neutrinos. Partiendo de estos estados y usando el operador de carga correspondiente, se define la probabilidad de transición como el valor esperado del operador de carga calculado con el estado de sabor inicial.

En el presente trabajo llevamos a cabo un estudio del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos con el propósito de entender algunos aspectos relativos al tratamiento con paquetes de onda en la deducción de la probabilidad de transición de sabor entre los neutrinos. Entre los aspectos tratados se encuentra el de la caracterización de los paquetes desde el punto de vista de partículas localizadas, la conversión de tiempo a distancia en la probabilidad de transición y el rol de la teoría de campos en la correcta definición de los estados de sabor. Este trabajo se divide en tres capítulos:

En el primero de ellos se trata el problema de la mezcla de neutrinos desde una perspectiva de segunda cuantización (teoría cuántica de campos), tanto para la definición de la función de onda como para la construcción de los paquetes de onda, pero de primera cuantización para la definición de los estados de sabor. A partir de este tratamiento se obtiene una expresión para la probabilidad de oscilación de sabor, cuya dependencia con la distancia recorrida es obtenida mediante el análisis cuidadoso de la amplitud de transición, en conjunto con una definición de distancia recorrida motivada de la definición de centro de masa relativista. Se presentan además las correcciones a las probabilidades de transformación de

sabor estándares, obtenidas a partir de nuestro formalismo en el régimen ultrarelativista. Finalmente, damos una definición de distancia recorrida por un neutrino de sabor, derivada del cálculo mecanocuántico del valor esperado de la posición del paquete de sabor, como una manera alternativa de realizar la conversión de tiempo a distancia en la fórmula de probabilidad.

En el segundo capítulo se hace una revisión del formalismo de transformaciones de Bogoliubov, rederivando las relaciones entre operadores de creación (aniquilación) de sabor y de masa en el contexto de paquetes de onda. Partiendo de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, en un tercer capítulo, se derivan expresiones para la probabilidad de oscilación de sabor dependiente del tiempo y sus propiedades. En este capítulo presentamos el principal resultado de este trabajo, que es la equivalencia entre la densidad de probabilidad calculada por medio de nuestro formalismo y la obtenida por Blasone y Vitiello mediante el formalismo de la carga de sabor. Nuestro resultado para la probabilidad incluye los efectos de interferencia de las soluciones a la ecuación de Dirac de energías positivas y negativas analizadas anteriormente desde una perspectiva de mecánica cuántica relativista [40, 41]. Por último, obtenemos una expresión para la probabilidad de transición dependiente de la distancia recorrida por el neutrino, aplicando el procedimiento de conversión de tiempo a distancia seguido en el capítulo uno y exploramos la posibilidad de observar estos efectos en los experimentos.

Fenomenología

Un ingrediente importante del sector electrodébil del modelo estándar mínimo son los neutrinos, partículas no masivas que participan únicamente de las interacciones débiles, de la manera descrita por el lagrangiano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I = & \frac{g}{2\sqrt{2}} [W_\mu^+ \bar{\nu}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e(x) + W_\mu^+ \bar{\nu}_\mu(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mu(x) \\
& + W_\mu^+ \bar{\nu}_\tau(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \tau(x) + h.c.] \\
& - \frac{g}{4 \cos(\theta_W)} [\bar{\nu}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e(x) Z_\mu + \bar{\nu}_\mu(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\mu(x) Z_\mu \\
& + \bar{\nu}_\tau(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\tau(x) Z_\mu + h.c.] \tag{I.1}
\end{aligned}$$

donde por \mathcal{L}_I , representamos al lagrangiano que describe las interacciones de corriente cargada y corriente neutra de los neutrinos, las partículas W^\pm, Z son los mediadores de las interacciones electrodebiles, g es la constante de acoplamiento, y θ_W es el ángulo electrodébil.

De las simetrías del lagrangiano se deducen tres cantidades conservadas independientemente, que se conocen como números cuánticos de sabor L_e, L_μ, L_τ , los cuales relacionan parejas de campos por la naturaleza de sus interacciones debiles (carga leptónica). Los dobletes de campos que comparten números cuánticos de sabor son los siguientes:

$$L_e : \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}, \quad L_\mu : \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \quad L_\tau : \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (\text{I.2})$$

al igual que las correspondientes antipartículas, con sus respectivas cargas opuestas.

Los procesos físicos (que involucran neutrinos) permitidos por estas simetrías son los siguientes

$$\begin{aligned} W^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e, & W^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e, & Z &\rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e, \\ W^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, & W^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, & Z &\rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu, \\ W^+ &\rightarrow \tau^+ + \nu_\tau, & W^- &\rightarrow \tau^- + \bar{\nu}_\tau, & Z &\rightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_\tau. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

En estos procesos se conserva el número leptónico $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ y los números de sabor, luego los neutrinos que intervienen en cada uno de ellos son autoestados de sabor y de masa simultaneamente; razón por la cual su sabor no puede cambiar desde su producción hasta su detección. En otras palabras, los únicos términos de interacción en el lagrangiano son diagonales en sabor.

Sin embargo, muchas observaciones experimentales han sido explicadas de manera sencilla bajo la suposición de que los neutrinos conocidos (3 familias) efectúan transiciones de sabor, lo cual es posible dentro de un esquema de neutrinos masivos, en el que se introducen términos no diagonales al lagrangiano (acoplamientos de Yukawa), que mezclan los campos de neutrinos, permitiendo así, transiciones entre los distintos sabores.

La inclusión de estos términos preserva la forma estándar de un lagrangiano libre de una partícula de Dirac (en este estudio consideraremos a los neutrinos como partículas de Dirac) pero escrito en forma matricial y con una matriz de masa no diagonal, es decir:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(x)(i\Gamma^\mu D_\mu - M)\Psi(x), \quad (\text{I.4})$$

donde

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \\ \nu_\tau(x) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{\mu e} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\tau e} & m_{\tau\mu} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.5})$$

$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \mathbf{1}$, $D_\mu = \mathbf{1}\partial_\mu$, con $\mathbf{1}$ la identidad en 3 dimensiones. La matriz de masa se puede diagonalizar a través de una transformación unitaria sobre los campos de sabor, la cual define unos nuevos campos libres masivos y desacoplados $\nu_i(x)$ (con $i=1,2,3$), que están relacionados con los campos de sabor por la matriz unitaria PMNS (Pontecorvo, Maki, Nakagawa y Sakata) [5]

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ia} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ib} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.6})$$

donde $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, and $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $\theta_{ij} = (\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23})$, δ es la fase de violación de CP, y las dos fases de Majorana (a,b), son parámetros que caracterizan la matriz unitaria. La construcción de esta matriz puede verse con más detalle en el apéndice (A.1).

La transformación $\Psi \equiv U\Psi_M$, hace que el nuevo lagrangiano tome la forma

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}_M(x)(i\Gamma^\mu D_\mu - \widetilde{M})\Psi_M(x), \quad (\text{I.7})$$

con $\widetilde{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ siendo m_i , los valores propios de M , y $\Psi_M(x)$, el triplete formado por los campos libres $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$ y $\nu_3(x)$, pero al mismo tiempo desdiagonaliza la interacción.

La forma factorizada de la matriz unitaria (I.6), resulta muy útil en la interpretación de datos, dado que la primera de las matrices que la compone, contiene

los datos relevantes para las oscilaciones de neutrinos atmosféricos y de aceleradores, la segunda contiene los parámetros asociados a experimentos de reactores accesibles a distancias pequeñas, mientras que la tercera contiene los parámetros que involucran las oscilaciones de neutrinos solares. Los parámetros de la cuarta matriz no pueden ser observados directamente, debido a que las oscilaciones dependen de términos de la forma $U_{\alpha i}^* U_{\beta i}$, aunque si pueden serlo de manera indirecta, a través de los efectos de conservación de CP en experimentos como el doble decaimiento beta, el cual sólo podría ser observado en caso de que los neutrinos fueran de Majorana [42]. De no ser así los neutrinos serían de Dirac y las fases de Majorana pueden tomarse iguales a cero.

Las oscilaciones de neutrinos pueden cuantificarse, si definimos a los neutrinos de sabor como una superposición de estados masivos, dada por

$$|\nu_\alpha\rangle \equiv \sum_j U_{\alpha j}^* |\nu_j\rangle, \quad (\text{I.8})$$

donde $|\nu_\alpha\rangle = \{|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle\}$, representan los autoestados de sabor, y $|\nu_j\rangle = \{|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle\}$, representan los autoestados de masa, modelo propuesto por Pontecorvo [3, 4].

Partículas de Majorana y Partículas de Dirac

Todos los fermiones del modelo estándar (con excepción de los neutrinos, de los cuales desconocemos su naturaleza) son partículas de Dirac, razón por la cual resulta natural suponer que los neutrinos también lo sean. Sin embargo, los neutrinos tienen la peculiaridad de ser partículas sin carga eléctrica, lo cual da lugar a una posibilidad teórica adicional, que es que sean su propia antipartícula [43]. Esto implica que en la expansión de los campos los operadores de creación (aniquilación) de antipartícula coinciden con los de partícula.

A nivel de los campos, tal condición puede implementarse imponiendo

$$\nu = \mathcal{C}\bar{\nu}^T, \quad (\text{I.9})$$

donde T indica traspuesta y \mathcal{C} es la matriz de conjugación de carga que en términos de las matrices gamma es dada por

$$\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0. \quad (\text{I.10})$$

Con esta imposición, los grados de libertad de los campos fermiónicos son reducidos a la mitad, lo cual es equivalente a la reducción de grados de libertad en fermiones sin masa, en este segundo caso las ecuaciones de movimiento del campo de un neutrino

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L &= m\nu_R, \\ i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_R &= m\nu_L, \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

se desacoplan, reduciéndose a

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L &= 0, \\ i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_R &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

donde ν_L y ν_R son las partes izquierda y derecha del campo ν , respectivamente. Esto implica que para la descripción de un campo sin masa basta con tomar una de sus proyecciones (parte izquierda o derecha). En el caso de neutrinos de Majorana la reducción de grados de libertad en términos de sus componentes izquierdas y derechas se ve como

$$\nu_R = \mathcal{C}\bar{\nu}_L^T. \quad (\text{I.13})$$

Esto tiene como consecuencia que el término de masa de una partícula de Majorana tenga la forma

$$\mathcal{L}_{mass}^L = \frac{1}{2}m_L\nu_L^T\mathcal{C}^\dagger\nu_L + h.c.. \quad (\text{I.14})$$

Por otra parte, si las partículas no fueran de Majorana existiría el término de masa de Dirac estándar, es decir

$$\mathcal{L}_{mass}^D = -m_D\bar{\nu}_R\nu_L + h.c., \quad (\text{I.15})$$

lo cual implícitamente da lugar a un término de Majorana izquierdo

$$\mathcal{L}_{mass}^R = \frac{1}{2}m_R\nu_R^T\mathcal{C}^\dagger\nu_R + h.c.. \quad (\text{I.16})$$

Es decir, para una partícula de Dirac no sólo los términos de masa que usualmente se consideran son admisibles como parte del lagrangiano sino que también lo son los términos de Majorana, luego en general

$$\mathcal{L}_{mass} = \mathcal{L}_{mass}^D + \mathcal{L}_{mass}^L + \mathcal{L}_{mass}^R. \quad (\text{I.17})$$

La suposición sobre la cual se construyeron estos términos estaba basada en la ausencia de carga eléctrica en los neutrinos así como de su carga leptónica, pero como se vió anteriormente los términos masivos de los neutrinos violan en general el número leptónico luego no hay razón para prohibir los términos de majorana los cuales violan en dos unidades esta cantidad. Sin embargo, si pedimos que los términos masivos respeten la simetría de gauge electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_Y$, entonces los términos permitidos serán

$$\mathcal{L}_{mass} = \mathcal{L}_{mass}^D + \mathcal{L}_{mass}^R, \quad (\text{I.18})$$

dado que ν_R es un singlete ante este grupo.

Finalmente, si se impone conservación del número leptónico total entonces los términos de Majora que vienen del campo izquierdo también estarán prohibidos, lo cual es justo el caso que consideraremos en el presente trabajo.

Un argumento teórico a favor de considerar que los neutrinos sean partículas de Majorana radica en que a partir de esta clase de neutrinos es posible explicar la pequeñez de la masa de los neutrinos observables es decir de los neutrinos izquierdos mediante el mecanismo de see-saw [44].

Probabilidad de transición

Los experimentos de oscilaciones de neutrinos, miden usualmente la probabilidad de que un neutrino producido como $|\nu_\alpha\rangle$, sea detectado como $|\nu_\beta\rangle$ luego de haber recorrido una distancia L . Para lo cual, con el tratamiento tradicional, se obtiene [45]

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \left| \sum_i U_{\alpha i}^* e^{im_i^2 L/E} U_{\beta i} \right|^2, \quad (\text{I.19})$$

que depende de las diferencias entre los cuadrados de las masas $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$, con $(ij) = (21), (32), (31)$. Estas cantidades son fijadas por los resultados experimentales [46]

$$\Delta m_{32}^2 = 2,7 \pm 0,4 \times 10^{-3} eV^2, \quad \Delta m_{21}^2 = 8,0 \pm 0,4 \times 10^{-5} eV^2, \quad (\text{I.20})$$

al igual que los distintos ángulos de mezcla

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12} &= 0,31 \pm 0,03, \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0,50 \pm 0,15, \\ \sin^2 \theta_{13} &< 0,04, \\ 0 &\leq \delta < 2\pi. \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Jerarquía de masas

Los experimentos de oscilaciones de neutrinos son sensibles únicamente a la diferencia de los cuadrados de las masas de los neutrinos y por tanto estos experimentos no pueden imponer directamente condiciones sobre sus masas individuales. Una cota conocida sobre estas masas está basada en argumentos cosmológicos y condiciona a la mayor de las masas de los neutrinos a ser menor a $1eV$ [47]. Por otra parte, dada la insensibilidad al signo de la diferencia $m_3^2 - m_{1,2}^2$, por parte de los experimentos, se presentan dos posibles esquemas de ordenamiento de masas, conocidos como jerarquías: “*Jerarquía Normal*” en la cual $m_3 > m_2 > m_1$ y “*Jerarquía Invertida*” en la cual $m_2 > m_1 > m_3$.

En ambos esquemas puede darse el caso en que las masas sean casi-degeneradas es decir

$$m_1 \approx m_2 \approx m_3 \approx m_\nu \quad (\text{I.22})$$

con

$$m_\nu \gg \sqrt{\Delta m_{1,3}^2} \approx 5 \times 10^{-2} eV \quad (\text{I.23})$$

En este caso es muy difícil distinguir entre los dos esquemas. Por otra parte, cada uno de los esquemas tienen características muy distintas si uno de ellos es mucho

más ligero que $\sqrt{\Delta m_{1,3}^2}$ por ejemplo en el esquema de jerarquía normal

$$m_1^2 \ll m_2^2 \ll m_3^2, \quad (\text{I.24})$$

mientras que en el esquema de jerarquía invertida

$$m_3^2 \ll m_1^2 \approx m_2^2. \quad (\text{I.25})$$

Tratamiento Estándar

La fórmula clásica (I.19) se obtiene tomando el cuadrado de la amplitud de que el neutrino α , al tiempo t se encuentre en el estado β , esto es

$$\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle, \quad (\text{I.26})$$

donde

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = e^{-iHt}|\nu_\alpha\rangle = \sum_j e^{-iE_j t} U_{\alpha j}^* |\nu_j\rangle. \quad (\text{I.27})$$

Teniendo en cuenta que los neutrinos son ultrarelativistas, podemos suponer $t \approx L$, ($c = 1$) y con ello

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) &= |\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}(L)|^2 \\ &= \left| \sum_j U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-iE_j L} \right|^2 \\ &= \sum_{ij} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{i(E_i - E_j)L} \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

donde

$$E_i - E_j = \frac{(E_i - E_j)(E_i + E_j)}{(E_i + E_j)} \simeq \frac{(m_i^2 - m_j^2)}{2E} \quad (\text{I.29})$$

donde $E = (E_1 + E_2)/2$. Por tanto, podemos expresar a (I.28) de la manera dada en (I.19).

Cada uno de los factores en la amplitud de probabilidad de la expresión (I.28), tienen una interpretación sencilla en este modelo. El factor $U_{\alpha i}^*$ es la amplitud de

que el neutrino creado en el estado α se encuentre en el estado i , el factor exponencial codifica la evolución “temporal” de este estado, y el factor $U_{\beta i}$ es la amplitud de que el neutrino i se encuentre en el estado de sabor β , luego la amplitud de transición es la suma de todos estos procesos intermedios.

Varios experimentos han medido probabilidades de transición que involucran antineutrinos del electrón debido a la facilidad que se tiene para generar flujos controlados de estos antineutrinos a través de reactores nucleares. Esto facilita el estudio de este tipo de transiciones, el cual se ve favorecido en lo referente a la detección por el hecho de que su interacción con la materia normal (protones, neutrones y electrones) es mucho mayor que la del resto de neutrinos. En particular, la probabilidad de supervivencia de antineutrinos del electrón, está dada por

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}(L) = 1 - 4|U_{e3}|^2|U_{e1}|^2 \sin^2 \Delta_{31} - 4|U_{e3}|^2|U_{e2}|^2 \sin^2 \Delta_{32} - 4|U_{e2}|^2|U_{e1}|^2 \sin^2 \Delta_{21}, \quad (\text{I.30})$$

donde el índice $\bar{\nu}_e$ se refiere al antineutrino del electrón y $\Delta_{ij} \equiv \Delta m_{ij}^2 L / 4E$. Esta fase conviene expresarla en unidades practicas, es decir

$$\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} = 1,2669... \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{eV^2} \right) \left(\frac{L}{km} \right) \left(\frac{GeV}{E} \right), \quad (\text{I.31})$$

así, teniendo en cuenta los datos dados en (I.20) y (I.21), la fórmula (I.30) se puede escribir de manera aproximada como

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}(L) \cong 1 - P_{12} - P_{23}, \quad (\text{I.32})$$

donde

$$\begin{aligned} P_{12} &= \cos^4 \theta_{31} \sin^2(2\theta_{21}) \sin^2 \Delta_{21}, \\ P_{23} &= \sin^2(2\theta_{32}) \sin^2 \Delta_{32}. \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

Probabilidad de oscilación efectiva

Para algunos fines prácticos, resulta suficiente modelar las oscilaciones de neutrinos como causadas por la mezcla entre solo dos neutrinos masivos. Por ejemplo,

si consideramos experimentos con reactores, tales como KamLAND [8] donde L está en el rango (15 -150)Km y E está en el rango (1-10)MeV, la cantidad P_{23} sería despreciable debido a que θ_{13} es muy pequeña comparado con la unidad y el factor $\sin^2 \Delta_{23}$ es promediado a $1/2$. Tal promedio es el resultado de la rapidez de las respectivas oscilaciones a esta distancia. Esto hace que la probabilidad de supervivencia del antineutrino del electrón se reduzca a

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}(L) = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \Delta_{12}, \quad (\text{I.34})$$

donde adicionalmente se ha aproximado el factor $\cos^4 \theta_{13}$ a 1 dado que $\sin^4 \theta_{13} < 10^{-4}$, de esta manera la probabilidad resultante es equivalente a la probabilidad de transición obtenida por la mezcla entre dos neutrinos. Este tipo de experimentos permite obtener con gran precisión la cantidad θ_{12} que es el parámetro más importante en el estudio de los neutrinos solares.

Otro ejemplo importante en el que las transiciones de sabor en un esquema de tres neutrinos se pueden estudiar a partir del de dos neutrinos, son los experimentos con reactores para los cuales L/E está en el intervalo (0.5-1)km/MeV. En estos casos, la probabilidad de supervivencia del antineutrino del electrón se puede escribir como

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}(L) = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23} + O(\Delta_{12}^2). \quad (\text{I.35})$$

La cantidad Δ_{12}^2 es muy pequeña a esas distancias, luego el término $O(\Delta_{12}^2)$ puede despreciarse. Experimentos como CHOOZ, Palo Verde, Double Chooz [48] y Daya Bay [49], son ejemplos en los que este esquema se aplica y a partir de sus datos intentan reducir las cotas tanto de θ_{23} como de Δm_{23}^2 , que son los parámetros más importantes en el estudio de oscilaciones de neutrinos atmosféricos.

Oscilaciones entre dos neutrinos

Dado que experimentalmente la fórmula general de probabilidad de transición entre neutrinos de distintos sabores (obtenidas bajo la suposición de mezcla entre tres neutrinos) se reduce a la forma de una probabilidad de transición en la que sólo intervienen dos neutrinos, resulta útil e interesante estudiar este caso.

Consideremos como el par de neutrinos de sabor a los neutrinos del electrón y del muón, los cuales están descritos por el Lagrangiano libre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \bar{\nu}_e(x)(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m_{ee})\nu_e(x) + \bar{\nu}_\mu(x)(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m_{\mu\mu})\nu_\mu(x) \\ & - m_{e\mu}(\bar{\nu}_e(x)\nu_\mu(x) + \bar{\nu}_\mu(x)\nu_e(x)), \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

que en la base de los neutrinos masivos $\nu_1(x)$ y $\nu_2(x)$, adquiere la forma

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\nu}_1(x)(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m_1)\nu_1(x) + \bar{\nu}_2(x)(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m_2)\nu_2(x). \quad (\text{I.37})$$

Los campos de sabor y los campos masivos se relacionan mediante la siguiente rotación

$$\begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{I.38})$$

con lo cual, el \mathcal{L}_0 se vuelve diagonal en las masas. Estas se relacionan con los parámetros del lagrangiano inicial por

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} \left[m_e + m_\mu - \sqrt{(m_\mu - m_e)^2 + 4m_{e\mu}^2} \right], \\ m_2 &= \frac{1}{2} \left[m_e + m_\mu + \sqrt{(m_\mu - m_e)^2 + 4m_{e\mu}^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

mientras que el ángulo θ que cuantifica la mezcla (I.38) es dado por

$$\tan 2\theta = \frac{2m_{e\mu}}{m_\mu - m_e}. \quad (\text{I.40})$$

Partiendo de esta parametrización y la fórmula general (I.19), obtenemos las probabilidades de supervivencia y de transición de sabor

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(L) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \Delta_{21}, \quad (\text{I.41})$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \Delta_{21} \quad (\text{I.42})$$

con $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(L) + P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(L) = 1$.

CAPÍTULO 1

ESTADOS DE PONTECORVO

1.1 Introducción

La Mecánica cuántica se ha establecido desde su nacimiento como uno de los pilares más sólidos de la física moderna dado su carácter fundamental en la descripción de la naturaleza y su perfecto acuerdo con la observación. Ni los principios ni las predicciones de la mecánica cuántica han sido contradichos por ningún experimento hasta este momento, razón por la cual cualquier teoría física debe estar de acuerdo con sus principios en el rango de validez de la misma. A pesar de ello, la mecánica cuántica se formuló inicialmente como una teoría no relativista, por tanto, su rango de validez se limitaba a fenómenos no relativistas.

Distintos trabajos fueron desarrollados con el propósito de obtener una formulación relativista de la mecánica cuántica, pero la estructura misma del espacio de Hilbert resultaba ser insuficiente para describir toda la física que acontece en la naturaleza en este régimen. Por ello, todas las propuestas anteriores a la teoría de campos resultaron ser sólo aproximadas, y esta teoría se estableció como la correcta generalización de la mecánica cuántica que incorpora a la relatividad especial de forma consistente.

La física de partículas es una área que se ha visto regida, casi completamente,

por la teoría de campos, dado que la mayoría de fenómenos de su interés ocurren a altas energías, donde las partículas adquieren velocidades relativistas y se crean nuevas partículas. Dentro de este marco es donde se desarrolla la física de neutrinos, los cuales, dadas sus pequeñísimas masas, viajan a velocidades relativistas.

A pesar de ello, para algunos fenómenos, como las oscilaciones de neutrinos, es posible dar una descripción aproximada, en el marco de la mecánica cuántica, en gran acuerdo con las observaciones. Esta particularidad, ha permitido a los físicos de partículas avanzar en la solución de muchos de los problemas de interés de este campo de investigación, sin las complicaciones adicionales que traen consigo algunos aspectos del formalismo de la teoría cuántica de campos.

Uno de los problemas ignorados comúnmente en la mayoría de los tratamientos de las oscilaciones de neutrinos, es el de la correcta definición de los estados de sabor, para lo cual, consideran a los estados que nosotros llamaremos de Pontecorvo como una aproximación suficientemente válida de los verdaderos estados de sabor. Por ello resulta de especial interés abordar el problema de las oscilaciones de sabor utilizando inicialmente los estados de sabor establecidos por Pontecorvo.

En este capítulo damos una descripción a partir de la teoría de campos del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos, utilizando como estados de sabor los estados de Pontecorvo. En nuestro tratamiento utilizamos estados localizados para la descripción de los neutrinos de sabor, los cuales surgen naturalmente de un cambio de base en la expansión de los campos y por tanto están sujetos a relaciones de completitud y ortonormalidad, comúnmente ignoradas en los tratamientos estándar. Así mismo proponemos una definición para la posición promedio del neutrino de sabor que permite la obtención de una expresión para las oscilaciones de neutrinos dependiente de la distancia entre fuente y detector.

1.2 Bases completas y estados localizados

Un campo espinorial asintótico, se puede escribir en cualquier base completa de funciones que satisfagan la ecuación de Dirac libre [50]. De esta manera es posible

escribir el campo $\hat{\Psi}^{in}(x)$ como

$$\hat{\Psi}^{in}(x) = \int d^3p \sum_s [U_{p,s}(x)\hat{\alpha}(\mathbf{p}, s) + V_{p,s}(x)\hat{\beta}^\dagger(\mathbf{p}, s)], \quad (1.1)$$

donde $U_{p,s}(x)$ y $V_{p,s}(x)$ son ondas planas construidas a partir de las soluciones de la ecuación de Dirac en el espacio de momentos de frecuencias positiva $u(\mathbf{p}, s)$ y negativa $v(\mathbf{p}, s)$ respectivamente

$$U_{p,s}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}u(\mathbf{p}, s)e^{-ipx} \quad \text{y} \quad V_{p,s}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}v(\mathbf{p}, s)e^{ipx}.$$

Estos espinores base se escogen completos para tener la posibilidad de desarrollar en términos de ellos, toda solución posible de la ecuación de Dirac, y ortonormales para poder separar de manera natural los coeficientes del desarrollo, de manera que no interfieran entre sí. Es decir, para que los coeficientes (operadores) correspondientes a las soluciones de frecuencia positiva no interfieran con los coeficientes (operadores) correspondientes a las soluciones de frecuencia negativa. Es en este sentido que se interpreta al operador $\alpha^\dagger(\mathbf{p}, s)$ como el operador de creación de una **partícula** con momento \mathbf{p} y proyección de espín s y al operador $\beta^\dagger(\mathbf{p}, s)$ como el operador de creación de una **antipartícula** con las mismas características.

Las propiedades de completéz y ortonormalidad se resumen en

$$\sum_s \left\{ u_a(\mathbf{p}, s)u_b^\dagger(\mathbf{p}, s) + v_a(-\mathbf{p}, s)v_b^\dagger(-\mathbf{p}, s) \right\} = \delta_{a,b}$$

$$u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s) = \delta_{s,s'}, \quad v^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s) = \delta_{s,s'} \quad u^\dagger(\mathbf{p}, s)v(-\mathbf{p}, s) = 0. \quad (1.2)$$

El campo $\hat{\Psi}^{in}(x)$ se puede desarrollar también en términos de cualquier otro conjunto completo de soluciones de la ecuación de Dirac, y si queremos mantener la separación entre partículas y antipartículas este conjunto debe ser ortogonal. Una manera de hacer esto es a través de paquetes de onda

$$\hat{\Psi}^{in}(x) = \sum_{n,s} [f_n(x, s)\hat{\alpha}(n, s) + g_n(x, s)\hat{\beta}^\dagger(n, s)] \quad (1.3)$$

donde los paquetes de onda $f_n(x, s)$ y $g_n(x, s)$ se contruyen a apartir de las ondas planas del anterior desarrollo

$$f_n(x, s) = \int d^3p \tilde{f}(n, \mathbf{p})U_{p,s}(x) \quad \text{y} \quad g_n(x, s) = \int d^3p \tilde{f}(n, \mathbf{p})V_{p,s}(x). \quad (1.4)$$

En las integrales que definen estas funciones se ha utilizado un conjunto completo, paquetes de onda $\tilde{f}(n, \mathbf{p})$ con el objeto de rescatar algunas de las propiedades de la expansión en ondas planas del campo. La ortogonalidad y completez de los paquetes se resume en

$$\int d^3p \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) \tilde{f}(n', \mathbf{p}) = \delta_{n,n'}, \quad \sum_n \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) \tilde{f}(n, \mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (1.5)$$

Es fácil probar que estos paquetes satisfacen la ecuación de Dirac, al igual que las ondas planas del primer desarrollo del campo, esto es:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)f_n(x, s) &= 0, & (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)g_n(x, s) &= 0, & \text{y} \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)U_{p,s}(x) &= 0, & (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)V_{p,s}(x) &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

dada la ortogonalidad de los espinores, las ondas planas espinoriales son también ortogonales

$$\begin{aligned} \int d^3x U_{p,s}^\dagger(x) U_{p',s'}(x) &= u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}', s) \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(p-p')x} \\ &= u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \delta_{s,s'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ \int d^3x U_{p,s}^\dagger(x) V_{p',s'}(x) &= u^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}', s) \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(p-p')x} \\ &= u^\dagger(\mathbf{p}, s) v(-\mathbf{p}, s) e^{2iEt} \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{p}') = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

y la ortogonalidad de los paquetes de onda se debe conjuntamente a la ortogonalidad tanto de los paquetes como de las ondas planas

$$\begin{aligned} \int d^3x f_n^\dagger(x, s) f_{n'}(x, s') &= \int d^3p \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) \int d^3p' \tilde{f}(n', \mathbf{p}') \int d^3x U_{p,s}^\dagger(x) U_{p',s'}(x), \\ &= \delta_{s,s'} \int d^3p \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) \tilde{f}_{n'}(p) = \delta_{s,s'} \delta_{n,n'}, \\ \int d^3x f_n^\dagger(x, s) g_{n'}(x, s') &= \int d^3p \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) \int d^3p' \tilde{g}(n', \mathbf{p}') \int d^3x U_{p,s}^\dagger(x) V_{p',s'}(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Es decir, en resumen, la ortonormalidad de las bases en ondas planas esta condensada en

$$\begin{aligned} \int d^3x U_{p,s}^\dagger(x) U_{p',s'}(x) &= \delta_{s,s'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), & \int d^3x U_{p,s}^\dagger(x) V_{p',s'}(x) &= 0, \\ \int d^3x V_{p,s}^\dagger(x) V_{p',s'}(x) &= \delta_{s,s'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), & \int d^3x V_{p,s}^\dagger(x) U_{p',s'}(x) &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

y la ortonormalidad de los paquetes de onda en

$$\begin{aligned} \int d^3x f_n^\dagger(x, s) f_{n'}(x, s') &= \delta_{s, s'} \delta_{n, n'}, & \int d^3x f_n^\dagger(x, s) g_{n'}(x, s') &= 0, \\ \int d^3x g_n^\dagger(x, s) g_{n'}(x, s') &= \delta_{s, s'} \delta_{n, n'}, & \int d^3x g_n^\dagger(x, s) f_{n'}(x, s') &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Utilizando estas propiedades podemos calcular las siguientes integrales

$$\begin{aligned} \int d^3x \hat{\Psi}^{\dagger in}(x) f_n(x, s) &= \sum_{n', s'} \left\{ \int d^3x f_{n'}^\dagger(x, s') f_n(x, s) \hat{\alpha}^\dagger(n', s') \right. \\ &\quad \left. + \int d^3x g_{n'}^\dagger(x, s') f_n(x, s) \hat{\beta}(n', s') \right\} = \hat{\alpha}^\dagger(n, s) \\ \int d^3x g_n^\dagger(x, s) \hat{\Psi}^{in}(x) &= \sum_{n', s'} \left\{ \int d^3x g_n^\dagger(x, s) f_{n'}(x, s') \hat{\alpha}(n', s') \right. \\ &\quad \left. + \int d^3x g_n^\dagger(x, s) g_{n'}(x, s') \hat{\beta}^\dagger(n', s') \right\} = \hat{\beta}^\dagger(n, s). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Es decir, los operadores de creación y aniquilación en esta base se obtienen a partir de los campos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^\dagger(n, s) &= \int d^3x \hat{\Psi}^{\dagger in}(x) f_n(x, s), & \hat{\beta}(n, s) &= \int d^3x \hat{\Psi}^{\dagger in}(x) g_n(x, s), \\ \hat{\alpha}(n, s) &= \int d^3x f_n^\dagger(x, s) \hat{\Psi}^{in}(x), & \hat{\beta}^\dagger(n, s) &= \int d^3x g_n^\dagger(x, s) \hat{\Psi}^{in}(x). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Lo cual es completamente análogo al caso de ondas planas, en el que los operadores y los campos se relacionan por:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^\dagger(\mathbf{p}, s) &= \int d^3x \hat{\Psi}^{\dagger in}(x) U_{p, s}(x), & \hat{\beta}(\mathbf{p}, s) &= \int d^3x \hat{\Psi}^{\dagger in}(x) V_{p, s}(x), \\ \hat{\alpha}(\mathbf{p}, s) &= \int d^3x U_{p, s}^\dagger(x) \hat{\Psi}^{in}(x), & \hat{\beta}^\dagger(\mathbf{p}, s) &= \int d^3x V_{p, s}^\dagger(x) \hat{\Psi}^{in}(x). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Finalmente dada la relación entre las funciones bases, expresadas en las ecuaciones (1.4), se obtiene directamente, junto con las ecuaciones (1.12) y (1.13), las

relaciones entre los operadores de las distintas bases las cuales están dada por.

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^\dagger(n, s) &= \int d^3p \tilde{f}(n, \mathbf{p}) \hat{\alpha}^\dagger(\mathbf{p}, s), & \hat{\beta}(n, s) &= \int d^3p \tilde{f}(n, \mathbf{p}) \hat{\beta}(\mathbf{p}, s), \\ \hat{\alpha}(n, s) &= \int d^3p \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) \hat{\alpha}(\mathbf{p}, s), & \hat{\beta}^\dagger(n, s) &= \int d^3p \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) \hat{\beta}^\dagger(\mathbf{p}, s).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Aplicando cada lado de las ecuaciones (1.14) al vacío de esta teoría tenemos la relación entre los autoestados de masa y sus correspondientes estados localizados

$$|\nu(n, s)\rangle = \int d^3p \tilde{f}(n, \mathbf{p}) |\nu(\mathbf{p}, s)\rangle, \quad |\tilde{\nu}(n, s)\rangle = \int d^3p \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) |\tilde{\nu}(\mathbf{p}, s)\rangle \tag{1.15}$$

en donde los estados $|\nu(n, s)\rangle$ representan estados de partículas, mientras que $|\tilde{\nu}(n, s)\rangle$ representan estados de antipartículas.

1.2.1. Paquetes ortonormales y completos

Como se ha visto en esta sección, para la construcción de estados localizados es indispensable el uso de un conjunto completo de funciones ortonormales, las cuales según el caso físico que se quiera representar deben tener propiedades específicas que pueden imponerse de diversas maneras. Una vez encontrado este conjunto, es posible relacionar los operadores de creación de estas partículas y los operadores de creación de partículas con momentos bien definidos mediante la ecuación (1.15).

En lo que sigue daremos un ejemplo concreto. Una manera de obtener tal conjunto de funciones siguiendo un criterio físico sencillo es suponer que las partículas que queremos describir tienen una localización completamente indeterminada dentro de un volumen fijo. En otras palabras, dividimos el espacio mediante cajas de volúmenes iguales y cada una de estas cajas representaría una posible posición de una partícula. En un experimento real, una de estas cajas podría corresponder al acelerador, el cual tiene dimensiones fijas y podríamos pensar que al interior del mismo no tenemos idea de la localización de la partícula. Esto lo podemos modelar imponiendo condiciones a la frontera a sus funciones de onda dentro de cada caja con lo cual su momento se cuantiza y el conjunto completo de tales

funciones definida dentro de cada volumen que llena el espacio representaría el conjunto deseado. Es decir

$$F^{\mathbf{jk}}(\mathbf{x}) = F_x^{j_1 k_1}(x) F_y^{j_2 k_2}(y) F_z^{j_3 k_3}(z)$$

con $j_1, j_2, j_3, k_1, k_2, k_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (1.16)

donde cada una de estas funciones esta definida de la siguiente manera

$$F_x^{jk}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ no está en } [j\Delta x, (j+1)\Delta x] \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \exp(2\pi i k x / \Delta x) & j\Delta x < x < (j+1)\Delta x \end{cases} \quad (1.17)$$

Los índices (j_1, j_2, j_3) representan las posiciones de las cajas y los índices (k_1, k_2, k_3) representan las componentes de los momentos que pueden tener las partículas en cada caja.

A este conjunto de funciones le corresponde en el espacio de momento un conjunto de paquetes, el cual se obtiene a través de una transformada de Fourier. Estos paquetes heredan las propiedades de ortogonalidad y completez que tenían las funciones en el espacio de coordenadas y esta dada por

$$G^{\mathbf{jk}}(\mathbf{p}) = G_{p_x}^{j_1 k_1}(p_x) G_{p_y}^{j_2 k_2}(p_y) G_{p_z}^{j_3 k_3}(p_z),$$

con $j_1, j_2, j_3, k_1, k_2, k_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (1.18)

donde cada una de estas funciones esta definida de la siguiente manera

$$G^{jk}(p) = \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta P}} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta P} (p - k\Delta p) \right) \exp \left\{ i(2j+1) \left(\frac{\pi}{\Delta P} (p - k\Delta P) \right) \right\} \quad (1.19)$$

En este espacio la representación de los índices (k_1, k_2, k_3) es más claro, estos están relacionados con los momentos centrales de los paquetes e interesantemente guardan una separación homogénea entre sí igual a $\Delta P = 2\pi/\Delta x$, en total acuerdo con el principio de incertidumbre. Ahora el índice de posición altera la fase de los distintos paquetes en total analogía a lo que ocurría al índice de momentos en el espacio de coordenadas.

1.3 Paquetes de onda y estados de Pontecorvo

En el contexto de la teoría cuántica de campos, consideramos en primera instancia que los neutrinos masivos pueden ser descritos adecuadamente por campos asintóticos $\Psi_j(x)$, los cuales satisfacen la ecuación libre de Dirac para las masas m_j , con $j = 1, 2, 3$. Estos campos y los campos de sabor, descritos por el modelo estándar están relacionados de la manera siguiente:

$$\hat{\Psi}_\alpha(x) = \sum_j U_{\alpha j} \hat{\Psi}_j(x), \quad (1.20)$$

donde $\alpha = e, \mu, \tau$ es el índice de sabor, que etiqueta a las distintas familias de leptones $\{e, \mu, \tau\}$, $U_{\alpha j}$ son los elementos de la matriz unitaria que implementa la mezcla a nivel de los campos. La forma específica de esta matriz está determinada por el lagrangiano del término de masa no diagonalizado, ya que esta matriz diagonaliza este sector.

Ahora bien, los campos de masa pueden ser escritos en una base de ondas planas

$$\hat{\Psi}_j(x) = \sum_s \int d^3p [u_j(\mathbf{p}, s) e^{ipx} \hat{\alpha}_j(\mathbf{p}, s) + v_j(\mathbf{p}, s) e^{-ipx} \hat{\beta}_j^\dagger(\mathbf{p}, s)], \quad (1.21)$$

donde los espinores $u_j(\mathbf{p}, s) e^{ipx}$ y $v_j(\mathbf{p}, s) e^{-ipx}$ son soluciones de energía positiva y negativa, respectivamente, de la ecuación de Dirac para una partícula de masa m_j y proyección de espín s , y los operadores $\hat{\alpha}_j^\dagger(\mathbf{p}, s)$ y $\hat{\beta}_j^\dagger(\mathbf{p}, s)$ crean partículas y antipartículas cuando actúan sobre el vacío de la teoría.

Este mismo campo se puede escribir en una base de paquetes de onda, como se vió en la sección anterior

$$\hat{\Psi}_j(x) = \sum_{n,s} [f_n^j(x, s) \hat{\alpha}_j(n, s) + g_n^j(x, s) \hat{\beta}_j^\dagger(n, s)], \quad (1.22)$$

donde $f_n^j(x, s)$ y $g_n^j(x, s)$ son paquetes de onda de energía positiva y negativa, respectivamente, para una partícula de masa m_j . Estas soluciones son superposiciones de las correspondientes soluciones de onda plana usadas en la expansión

(1.21), las cuales se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} f_n^j(x, s) &= \int d^3p \tilde{f}_j(n, \mathbf{p}) u_j(\mathbf{p}, s) e^{ipx}, \\ g_n^j(x, s) &= \int d^3p \tilde{f}_j(n, \mathbf{p}) v_j(\mathbf{p}, s) e^{-ipx}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Los coeficientes $\tilde{f}_j(n, \mathbf{p})$, constituyen un conjunto completo de funciones ortogonales en el espacio de momentos, a las que llamaremos de manera abreviada paquetes. Los operadores de creación asociados a esta base, y que hemos denotado por $\hat{\alpha}_j^\dagger(n, s)$ y $\hat{\beta}_j^\dagger(n, s)$, difieren de los asociados a la base de ondas planas en que crean estados de partículas localizadas, y por tanto, con un momento no completamente definido. Esta información está codificada en el índice n , el cual enumera los valores de momento que maximizan cada una de los paquetes así como a las distintas regiones de localización de las partículas que estos describen.

Ahora bien, partiendo de la descomposición en ondas planas del campo, podemos construir autoestados del operador cuadrimomento correspondientes a neutrinos de masa m_j , dados por $|\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle = \hat{\alpha}_j^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle$, los cuales satisfacen la ecuación de autovalores

$$\hat{P}^\mu |\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle = p_j^\mu |\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle, \quad (1.24)$$

donde $p_j^\mu = (\omega_j, \mathbf{p})$, con $\omega_j = \omega_j(\mathbf{p}) = \sqrt{m_j^2 + |\mathbf{p}|^2}$. Los neutrinos de sabor están descritos por los autoestados de sabor establecidos por Pontecorvo

$$|\nu_\alpha(\mathbf{p}, s)\rangle \equiv \sum_j U_{\alpha j}^* |\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle, \quad (1.25)$$

donde $|\nu_\alpha(\mathbf{p}, s)\rangle$ es el estado que describe al neutrino de sabor α , $|\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle$ el estado que describe al neutrino de masa m_j y los coeficientes $U_{\alpha j}^*$ constituyen los elementos de matriz de mezcla que relaciona los estados entre sí.

Así, partiendo de esta definición de estados de sabor y de (1.25) vemos que los estados propios de sabor son estados propios del trimomento, es decir

$$\hat{\mathbf{P}} |\nu_\alpha(\mathbf{p}, s)\rangle = \mathbf{p} |\nu_\alpha(\mathbf{p}, s)\rangle, \quad (1.26)$$

pero debido a la ausencia de una masa definida ya no lo serán de la energía \hat{P}^0 y menos aún del invariante relativista $\hat{P}^2 = \hat{P}^\mu \hat{P}_\mu$.

A pesar de que una descripción de partículas en términos de ondas planas es posible, claramente con tal descripción no podríamos obtener la probabilidad de encontrar un neutrino en cierta región del espacio, tal noción es sólo posible mediante una descripción con paquetes de onda y por ende, usando la base dada en (1.22). Sin embargo algunos cálculos se simplifican cuando se trabaja con la base de ondas planas y, dado que la ecuación (1.23) establece una relación entre las dos bases, es posible, derivar el resultado en una base a partir del resultado calculado en la otra base.

Por otra parte, tal como se había notado anteriormente, el paquete $\tilde{f}(n, \mathbf{p})$, tiene información tanto del momento central como de la localización de la partícula, ambas cantidades en total acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg. Por tanto, para mayor claridad, cuando lo amerite, denotaremos al paquete haciendo explícitas ambas variantes, es decir, por $\tilde{f}^{(l)}(n, \mathbf{p})$, donde n designa al momento central del paquete que llamaremos \mathbf{P}_n y l da información de la región de localización del neutrino masivo. Por tanto, los estados localizados construídos a partir de los operadores de creación de la expansión (1.22), son dados por

$$|\nu_j^{(l)}(n, s)\rangle \equiv \int d^3p \tilde{f}_j^{(l)}(n, \mathbf{p}) |\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle. \quad (1.27)$$

De manera análoga, definimos a los estados localizados de sabor como superposiciones de estados de onda plana de sabor, pesadas por paquetes en el espacio de momento, es decir

$$|\nu_\alpha^{(l)}(n, s)\rangle \equiv \int d^3p \tilde{f}_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}) |\nu_\alpha(\mathbf{p}, s)\rangle. \quad (1.28)$$

donde por analogía con los estados masivos consideramos que los paquetes $\tilde{f}_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p})$, satisfacen las relaciones de ortogonalidad y completez.

Utilizando la propiedad de completez y obviando el índice de localización, obtenemos

$$|\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle = \sum_n \tilde{f}_j^*(n, \mathbf{p}) |\nu_j(n, s)\rangle, \quad (1.29)$$

y, por tanto, si aplicamos el operador cuadrimento a ambos lados de la definición y reescribimos los autoestados de momento en términos de los autoestados

localizados, obtenemos

$$\hat{P}^\mu |\nu_j(n, s)\rangle = \sum_{n'} \int d^3p \tilde{f}_j(n, \mathbf{p}) \tilde{f}_j^*(n', \mathbf{p}) p_j^\mu |\nu_j(n', s)\rangle. \quad (1.30)$$

Esta es el equivalente a la ecuación (1.24), resultando una ecuación de autovalores en la medida en que podemos aproximar $\int d^3p \tilde{f}_j(n, \mathbf{p}) \tilde{f}_j^*(n', \mathbf{p}) p_j^\mu \approx \delta_{nn'} P_n^\mu$, con $P_n^\mu = (\omega_j(\mathbf{P}_n), \mathbf{P}_n)$.

Así mismo, podemos generalizar los estados de Pontecorvo al caso de estados localizados, partiendo de la relación (1.25) y usando las propiedades de los paquetes de onda y la relación (1.29)

$$|\nu_\alpha(n, s)\rangle = \sum_j U_{\alpha j}^* \sum_{n'} \int d^3p \tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p}) \tilde{f}_j^*(n', \mathbf{p}) |\nu_j(n', s)\rangle. \quad (1.31)$$

Esta expresión se simplifica notablemente si consideramos que los paquetes en el espacio de momento asociados a los estados de neutrino masivos y los correspondientes a los neutrinos de sabor son todos iguales entre sí. Es decir, si adoptamos un único paquete $\tilde{f}_j(n, \mathbf{p}) = \tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p}) = \tilde{f}(n, \mathbf{p})$ para todas la partículas. En este caso

$$|\nu_\alpha(n, s)\rangle = \sum_j U_{\alpha j}^* |\nu_j(n, s)\rangle. \quad (1.32)$$

La suposición de un paquete común a todas las partículas, no es necesaria en este tratamiento y por tanto, preferimos trabajar con la expresión (1.31).

1.4 Amplitud y probabilidad de transición

A partir del campo libre $\hat{\Psi}_j(x)$ en el espacio de coordenadas, la función de onda asociada con el estado localizado de una partícula de masa m_j resulta

$$\psi_j^n(x) \delta_{ij} = \langle 0 | \hat{\Psi}_j(x) | \nu_i(n, s) \rangle = f_n^j(x, s) \delta_{ij}, \quad (1.33)$$

es decir, corresponde a la función espinorial que, en el desarrollo del campo (1.22), multiplica al operador que crea dicho estado. La ecuación (1.33) nos da la amplitud de probabilidad de encontrar un neutrino de masa m_i en la posición \mathbf{x} , al

tiempo t partiendo de un neutrino de sabor α .

Para los estados de sabor, la definición dada en (1.33) puede ser generalizada como sigue

$$\psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x) = \langle 0 | \hat{\Psi}_\beta(x) | \nu_\alpha(n, s) \rangle, \quad (1.34)$$

donde los índices α y β , no están restringidos a ser iguales para garantizar una amplitud distinta de cero. Físicamente este hecho es deseable para describir una partícula cuyo sabor puede cambiar con la propagación, de manera que presente el fenómeno de oscilación. Desde este punto de vista la función de onda definida en (1.34), representa la amplitud de probabilidad de encontrar un neutrino de sabor β , en la posición \mathbf{x} al tiempo t .

Para el cómputo de la función de onda de sabor definida en (1.34), utilizamos las relaciones (1.20), (1.22) y (1.31), con lo cual

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x) &= \sum_{i,j} U_{\beta i} U_{\alpha j}^* \sum_{n'} \int d^3 p \tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p}) \tilde{f}_j^*(n', \mathbf{p}) \langle 0 | \hat{\Psi}_i(x) | \nu_j(n', s) \rangle, \\ &= \sum_{i,j} U_{\beta i} U_{\alpha j}^* \sum_{n'} \int d^3 p \tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p}) \tilde{f}_j^*(n', \mathbf{p}) f_{n'}^i(x, s) \delta_{ij}, \\ &= \sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \int d^3 p \tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p}) \\ &\quad \times \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n'} \tilde{f}_j^*(n', \mathbf{p}) \tilde{f}_j(n', \mathbf{p}') u_j(\mathbf{p}', s) e^{-ipx}, \end{aligned}$$

de donde, usando la propiedad de completéz y haciendo la integral en \mathbf{p}' se obtiene

$$\psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x) = \sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p}) u_j(\mathbf{p}, s) e^{-ipx} \quad (1.35)$$

Como es usual, el módulo cuadrado de la amplitud de transición representa la densidad de probabilidad y viene dada por

$$\begin{aligned} |\psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x)|^2 &= \sum_{i,j} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} \\ &\quad \times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p}) \tilde{f}_\alpha^*(n, \mathbf{p}') u_i^\dagger(\mathbf{p}', s) u_j(\mathbf{p}, s) e^{-i(p-p')x}. \end{aligned}$$

Integrando el resultado anterior, en el espacio de coordenadas obtenemos la probabilidad al tiempo t , esto es

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^n(t) \equiv \int d^3x |\psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x)|^2 \quad (1.36)$$

$$= \sum_{j,i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} \int d^3p |\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})|^2 \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) e^{-i(\omega_j - \omega_i)t} \quad (1.37)$$

donde $\mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) = u_i^\dagger(\mathbf{p}, s) u_j(\mathbf{p}, s)$.

La expresión anterior puede escribirse como

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^n(t) = \int d^3p |\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})|^2 P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(t), \quad (1.38)$$

donde $P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(t)$ representa la probabilidad de transición de sabor derivada mediante la descripción en términos de ondas planas:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(t) = \sum_{j,i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) e^{-i(\omega_j - \omega_i)t}. \quad (1.39)$$

Nos detendremos a estudiar la probabilidad dada en (1.39) y luego, a través de la igualdad (1.38), obtendremos $P_{\alpha \rightarrow \beta}^n(t)$. Antes que nada, resulta de especial interés probar que la normalización de la probabilidad se mantiene en el tiempo. En efecto sumando sobre los estados finales

$$\sum_{\beta} P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(t) = \sum_{\beta} \sum_{j,i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) e^{-i(\omega_j - \omega_i)t}, \quad (1.40)$$

pero, para j e i fijos, podemos hacer la suma sobre β , la cual dada la unitariedad de la matriz de mezcla se reduce a una delta de Kronecker

$$\sum_{\beta} U_{\beta i}^* U_{\beta j} = \sum_{\beta} (U^\dagger)_{i\beta} U_{\beta j} = (U^\dagger U)_{ij} = \delta_{ij} \quad (1.41)$$

y de aquí, dada la normalización de los espinores, resulta

$$\sum_{\beta} P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(t) = \sum_j U_{\alpha j} U_{\alpha j}^* \mathcal{U}_{j,j}(\mathbf{p}) = 1. \quad (1.42)$$

Conviene determinar los espinores $u_j(\mathbf{p}, s)$, en la base quirál, ya que en esta base es más fácil obtener el límite ultrarelativista, así como los autoestados de quiralidad. En dicha base las matrices gamma tienen la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

donde σ^i son las matrices de Dirac y los espinores

$$u_j(\mathbf{p}, s) = \chi_j \left(\begin{array}{c} \left(1 + \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_j + \omega_j}\right) \xi_s \\ \left(1 - \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_j + \omega_j}\right) \xi_s \end{array} \right) \quad \text{donde} \quad \chi_j = \left(\frac{m_j + \omega_j}{4\omega_j} \right)^{1/2}, \quad (1.44)$$

donde los ξ_s son espinores bidimensionales y están ortonormalizados de la manera usual como $\xi_r^\dagger \xi_s = \delta_{rs}$. Notese que hemos expresado a los distintos espinores $u_j(\mathbf{p}, s)$ que dependen de las masas m_j , en términos de los mismos espinores ξ_r . A partir de la fórmula anterior se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{j,j}(\mathbf{p}) &= u_j^\dagger(\mathbf{p}, s) u_j(\mathbf{p}, s) = 1 \\ \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) &= u_i^\dagger(\mathbf{p}, s) u_j(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{m_i}{\omega_i}} \sqrt{1 + \frac{m_j}{\omega_j}} + \sqrt{1 - \frac{m_i}{\omega_i}} \sqrt{1 - \frac{m_j}{\omega_j}} \right] \end{aligned} \quad (1.45)$$

Claramente las cantidades $\mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p})$ son reales e independientes de s .

Así, podemos escribir la probabilidad de cambio de sabor como:

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(t) &= \sum_i U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* + \sum_{i>j} U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) e^{i(\omega_i - \omega_j)t} \\ &\quad + \sum_{j>i} U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) e^{i(\omega_i - \omega_j)t}, \\ &= \sum_i |U_{\beta i}^*|^2 |U_{\alpha i}|^2 \\ &\quad + \sum_{i>j} 2\Re\{U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^*\} \cos[(\omega_i - \omega_j)t] \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) \\ &\quad + \sum_{i>j} 2\Im\{U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*\} \sin[(\omega_i - \omega_j)t] \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Notemos que, en $t = 0$,

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(0) = \sum_i |U_{\beta i}^*|^2 |U_{\alpha i}|^2 + \sum_{i>j} 2\Re\{U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^*\} \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}), \quad (1.47)$$

que, teniendo en cuenta,

$$\begin{aligned} \sum_i |U_{\beta i}^*|^2 |U_{\alpha i}|^2 + \sum_{i>j} 2\Re\{U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^*\} &= \Re \left\{ \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \right\}, \\ &= \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

puede reescribirse como

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(0) = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i>j} 2(\mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) - 1) \Re\{U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*\}. \quad (1.49)$$

Esto implica, que cuando se usan estados de Pontecorvo, la probabilidad de cambio de sabor al tiempo en que los neutrinos son producidos, es distinta de cero. Este asunto ha sido discutido en la literatura, y se conoce como violación intrínseca de la carga de sabor [21, 22]. Esto corresponde a una incorrecta definición de los estados de los neutrinos [39], dado que si al momento de la producción de los neutrinos, los estados correspondientes son autoestados de sabor entonces es deseable que

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(0) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.50)$$

Esta patología no está presente en los tratamientos simplificados de las oscilaciones de neutrinos, ya que en ellos, el carácter espinorial es ignorado, lo que en nuestro tratamiento, equivale a sustituir al término $\mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p})$ por 1, con lo cual el término de violación de la carga de sabor desaparece.

En el régimen ultrarelativista, es decir en el límite en que $m_i/\omega_i \ll 1$, que es característico de los neutrinos, $\mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) = 1 + O((m_i/\omega_i)^2)$ y por tanto

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(0) = \delta_{\alpha\beta} + O((m_i/\omega_i)^2). \quad (1.51)$$

Por lo tanto, el comportamiento de $\mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p})$ en este régimen, explica, el porque, en los distintos tratamientos de oscilaciones de neutrinos en los que se desprecia la estructura espinorial de estas partículas, se obtienen resultados que practicamente coinciden con los obtenidos en tratamientos que si la toman en cuenta.

En virtud de la ecuación (1.38), la probabilidad de transición de sabor de nuestro interés hereda las propiedades de normalización y violación de número leptónico, encontradas para la probabilidad de transición de onda plana, esta probabilidad es

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}^n(t) = & \int d^3p |\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})|^2 \left[\sum_i |U_{\beta i}^*|^2 |U_{\alpha i}|^2 \right. \\ & + \sum_{i>j} 2\Re\{U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^*\} \cos[(\omega_i - \omega_j)t] \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) \\ & \left. + \sum_{i>j} 2\Im\{U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*\} \sin[(\omega_i - \omega_j)t] \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) \right]. \quad (1.52) \end{aligned}$$

1.5 Dependencia espacial de las oscilaciones

A pesar del uso de paquetes de onda, la dependencia de la probabilidad de transición en la distancia recorrida, no está dada explícitamente en la expresión (1.52), sino que debe extraerse del comportamiento de la función de onda de sabor.

Para ello, partimos de la función de onda de sabor (1.35)

$$\psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x) = \sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} |\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})| u_j(\mathbf{p}, s) e^{-i p x} e^{i \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p})}, \quad (1.53)$$

donde $\Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p})$, corresponde a la fase del paquete $\tilde{f}_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p})$, en la que hemos identificado de antemano que la dependencia en la localización de la partícula viene por completo codificada en la fase del paquete.

A un tiempo t , para la mayoría de los puntos \mathbf{x} , el factor exponencial en (1.35) oscila tantas veces en la región donde $|\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})|$ es significativamente distinto de cero, que la integral se anula. Sin embargo, si $\mathbf{x}_j(t)$ es un punto tal que la fase del exponente es casi constante en el rango donde $|\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})|$ es grande, entonces habrá una contribución relevante a la integral. Determinamos $\mathbf{x}_j(t)$ requiriendo que

$$\nabla_p(-\omega_j t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}))|_{\mathbf{P}} = 0, \quad \text{en } \mathbf{x} = \mathbf{x}_j(t), \quad (1.54)$$

de donde se deduce que

$$\mathbf{x}_j(t) = \nabla_p(\omega_j t - \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}))|_{\mathbf{P}},$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t) = \nabla_p(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_j t + \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}))|_{\mathbf{P}},$$

donde \mathbf{P} , es la cantidad que maximiza al paquete en el espacio de momentos, la cual, corresponde a $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n$.

Haciendo un desarrollo a primer orden en \mathbf{p} , de la fase total

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_j(\mathbf{p})t + \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}) &\cong \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} - \omega_j(\mathbf{P})t + \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{P}) \\
&\quad + \nabla_p(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_j t + \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}))|_{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{P}) \\
&\cong \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} - \omega_j(\mathbf{P})t + \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{P}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{P}) \\
&\cong \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{P}) - \omega_j(\mathbf{P})t + \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_j(t) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) \cdot \mathbf{p}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

y usando la notación abreviada $P_j x_j = \omega_{\mathbf{P}j} t - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_j(t)$, con $\omega_{\mathbf{P}j} = \omega_j(\mathbf{P})t$, tendríamos

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_j(\mathbf{p})t + \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}) \cong \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{P}) - P_j x_j + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)). \tag{1.56}$$

Reemplazando directamente estas fases en la ecuación (1.35), se observa el comportamiento deseado

$$\psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x) \cong e^{i\Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{P})} \sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-iP_j x_j} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} |\tilde{f}_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p})| u_j(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t))}, \tag{1.57}$$

siendo

$$\mathbf{x}_j(t) = \frac{\mathbf{P}t}{\omega_{\mathbf{P}j}} - \nabla_p \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}) \Big|_{\mathbf{P}}. \tag{1.58}$$

Es decir, la función de onda así aproximado se visualiza como la superposición de paquetes de onda masivos, y cada uno de estos paquetes esta compuesto por una onda plana con momento igual al momento central del paquete y un término de carácter espinorial modulado por el paquete de sabor α en el espacio de momento.

Si consideramos que en el instante $t = 0$, se produce el neutrino de sabor α , en una posición inicial \mathbf{x}_0 , entonces, esto implicaría, que, debemos escoger los índices l 's asociados a los paquetes de onda tomados en la expansión del campo de sabor α de manera que sus fases cumplan la siguiente condición.

$$\nabla_p \Phi_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}) \Big|_{\mathbf{P}} \cong -\mathbf{x}_0, \tag{1.59}$$

donde la igualdad aproximada hace referencia a que esto debe entenderse sólo dentro del rango de incertidumbre de localización de los paquetes.

De la expresión (1.58) y (1.59) resulta que la distancia propagada por el neutrino de masa m_j en el intervalo t es

$$\mathbf{L}_j = \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{P}t}{\omega_{\mathbf{P}j}}, \quad (1.60)$$

expresión que nos da una relación lineal entre la distancia recorrida por el neutrino iésimo y el tiempo transcurrido desde su producción t , y en donde el término $\mathbf{P}/\omega_{\mathbf{P}j}$ no es mas que la velocidad de grupo del paquete de ondas.

En este caso hemos identificado a los centros de los paquetes de onda masivos con las posiciones de estas partículas y, a partir de ello, notamos que las distancias recorridas por estas partículas dependen de la masa de las mismas, de manera que las distintas partículas recorren distintas distancias con el transcurso del tiempo, razón por la cual no es posible inferir a apartir de ello y de manera única, lo que podríamos considerar como la distancia recorrida por el neutrino de sabor. Para tener tal noción, inspirados en la definición de centro de masa relativista, proponemos definir la distancia recorrida por el neutrino de sabor \mathbf{L} , como el promedio de las distancias recorridas por los neutrinos masivos, ponderado por las respectivas energías

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &\equiv \frac{\sum_i \omega_{\mathbf{P}i} \mathbf{L}_i}{\sum_j \omega_{\mathbf{P}j}}, \\ &= \frac{\mathbf{P}t}{\bar{\omega}_{\mathbf{P}}}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

con

$$\bar{\omega}_{\mathbf{P}} \equiv \sum_j \frac{\omega_{\mathbf{P}j}}{N}, \quad (1.62)$$

donde N es el número de familias que estamos considerando. Es importante notar que para $N=2$, esta definición coincide con la definición dada en [51]. Para verlo de manera explícita suponemos que cada partícula tiene un \mathbf{P}_i , en general distintos entre sí (esto es necesario dado que su expresión es dentro del contexto de ondas planas), de manera que de nuestra definición tenemos

$$\mathbf{L} = \frac{(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j)t}{\omega_{\mathbf{P}i} + \omega_{\mathbf{P}j}}, \quad (1.63)$$

y de allí podémos definir como velocidad media a

$$\bar{v} \equiv \frac{(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j)}{\omega_{\mathbf{P}_i} + \omega_{\mathbf{P}_j}}. \quad (1.64)$$

La diferencia entre la definición (1.61) y la dada en [51], que es equivalente a (1.64), es que la primera esta dada en términos de un número arbitrario de partículas mientras que la segunda solo considera pares de partículas, ya que su analisis lo hace en términos de las fases relativas entre las distintas componentes de los estados masivos.

A partir de nuestra definición tenemos

$$t = \frac{\bar{\omega}_{\mathbf{P}}|\mathbf{L}|}{|\mathbf{P}|}, \quad (1.65)$$

y, de aqui, las distancias recorridas por los paquetes asociados a las partículas masivas, pueden reexpresarse como

$$\mathbf{L}_i = \frac{\bar{\omega}_{\mathbf{P}}\mathbf{L}}{\omega_{\mathbf{P}_i}}. \quad (1.66)$$

Partiendo de la definición de probabilidad de transición, pero ahora utilizando la función de onda aproximada (1.57) y las relaciones (1.65) y (1.66), tenemos

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}^n(\mathbf{L}) &= \sum_{i,j} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i(P_j x_j - P_i x_i)} \\ &\times \int d^3 p \int d^3 p' |\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})| |\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p}')| u_i^\dagger(\mathbf{p}', s) u_j(\mathbf{p}, s) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_j(\mathbf{L}) - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{L}))} \\ &\times \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}, \\ &= \sum_i |U_{\beta i}^*|^2 |U_{\alpha i}|^2 + \\ &+ \sum_{i>j} 2 \cos(c_{ij} \mathbf{P} \cdot \mathbf{L}) \Re \left\{ U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* \int d^3 p |\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})|^2 \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) e^{-ia_{ij} \mathbf{p} \cdot \mathbf{L}} \right\} \\ &+ \sum_{i>j} 2 \sin(c_{ij} \mathbf{P} \cdot \mathbf{L}) \Im \left\{ U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \int d^3 p |\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})|^2 \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) e^{-ia_{ij} \mathbf{p} \cdot \mathbf{L}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

con $c_{ij} = c_i - c_j$, y $a_{ij} = a_i - a_j$, donde

$$c_i \equiv \bar{\omega}_{\mathbf{P}} \left(\frac{\omega_{\mathbf{P}i}}{|\mathbf{P}|^2} - \frac{1}{\omega_{\mathbf{P}i}} \right), \quad \text{y} \quad a_i \equiv \frac{\bar{\omega}_{\mathbf{P}}}{\omega_{\mathbf{P}i}}. \quad (1.68)$$

Es importante recordar que el índice n , está relacionado con el momento central del paquete \mathbf{P}_n , el cual estamos llamando por simplicidad simplemente como \mathbf{P} .

Con el objeto de obtener una expresión explícita de la oscilación de neutrinos, conviene examinar el caso de dos sabores, en el que la matriz de mezcla asociado al mismo es:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

A partir de esta matriz y la ecuación (1.46), se obtiene para las probabilidades

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}^{\mathbf{P}}(t) &= 1 - \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left[1 - \mathcal{U}_{12}(\mathbf{p}) \cos(\omega_1 - \omega_2)t \right] \\ P_{e \rightarrow \mu}^{\mathbf{P}}(t) &= \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left[1 - \mathcal{U}_{12}(\mathbf{p}) \cos(\omega_1 - \omega_2)t \right], \end{aligned} \quad (1.70)$$

y para obtener la expresión dependiente de la longitud de oscilación, usamos la expresión (1.67), y con ello se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}^n(L) &= 1 - \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \\ &+ \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left[\cos(c_{12}\mathbf{P} \cdot \mathbf{L}) \int d^3p |\tilde{f}_e(n, \mathbf{p})|^2 \mathcal{U}_{12}(\mathbf{p}) \cos(a_{12}\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) \right. \\ &\quad \left. - \sin(c_{12}\mathbf{P} \cdot \mathbf{L}) \int d^3p |\tilde{f}_e(n, \mathbf{p})|^2 \mathcal{U}_{12}(\mathbf{p}) \sin(a_{12}\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) \right] \quad \text{y} \\ P_{e \rightarrow \mu}^n(L) &= \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \\ &- \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left[\cos(c_{12}\mathbf{P} \cdot \mathbf{L}) \int d^3p |\tilde{f}_e(n, \mathbf{p})|^2 \mathcal{U}_{12}(\mathbf{p}) \cos(a_{12}\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) \right. \\ &\quad \left. - \sin(c_{12}\mathbf{P} \cdot \mathbf{L}) \int d^3p |\tilde{f}_e(n, \mathbf{p})|^2 \mathcal{U}_{12}(\mathbf{p}) \sin(a_{12}\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) \right] \end{aligned} \quad (1.71)$$

Si bien esta aproximación es completamente válida en el régimen de altas energías, es interesante notar que de otra manera la relación de Pontecorvo no sería válida

y por tanto se requeriría de un resultado más general para abordar otros regímenes.

Por otra parte, las expresiones anteriores pueden reescribirse de manera aproximada si utilizamos como paquetes funciones gaussianas, las cuales supondremos que aproximan suficientemente bien a alguna elección de paquetes ortogonales y completos, puesto que tales propiedades han sido requeridas en todo nuestro tratamiento.

De esta manera, introduciendo los paquetes $f_e(n, \mathbf{p})$, con

$$|f_e(n, \mathbf{p})|^2 = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{P})^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.72)$$

donde σ representa la incertidumbre en el momento central, obtenemos

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}^{PP}(L) &\cong 1 - \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left(1 - |\mathcal{U}_{12}(\mathbf{P})| \cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} \right), \\ P_{e \rightarrow \mu}^{PP}(L) &\cong \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left(1 - |\mathcal{U}_{12}(\mathbf{P})| \cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} \right), \end{aligned} \quad (1.73)$$

siendo λ la longitud de onda del término oscilante de las probabilidades de transición y L_{coh} su longitud de coherencia.

En términos de los coeficientes ya definidos, estas cantidades están dadas por

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{(a_{12} + c_{12})|\mathbf{P}|} = \frac{4\pi|\mathbf{P}|}{(m_1^2 - m_2^2)}, \\ L_{coh} &= \frac{\sqrt{2}}{\sigma a_{12}} = \frac{2\sqrt{2}\omega_{\mathbf{P}1}\omega_{\mathbf{P}2}}{\sigma(m_1^2 - m_2^2)}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

En la evaluación de la integral sobre \mathbf{p} , hemos considerado que $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$ es aproximadamente igual a $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{P})|$, dado que la función $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$ es muy suave dentro del rango de integración en el que la distribución es significativamente diferente de cero. Este requerimiento es equivalente al utilizado en la sección (1.5), en el análisis del comportamiento de la función de onda de sabor.

En la figura 1.1, mostramos el comportamiento de $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$ en regiones de interés para distintos valores de las masas m_1 y m_2 . A partir de ello podemos identificar la región en que $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$ es significativamente distinto de 1, la cual está aproximadamente localizada en una vecinda de $|\mathbf{p}|$, alrededor del mayor valor de las masas.

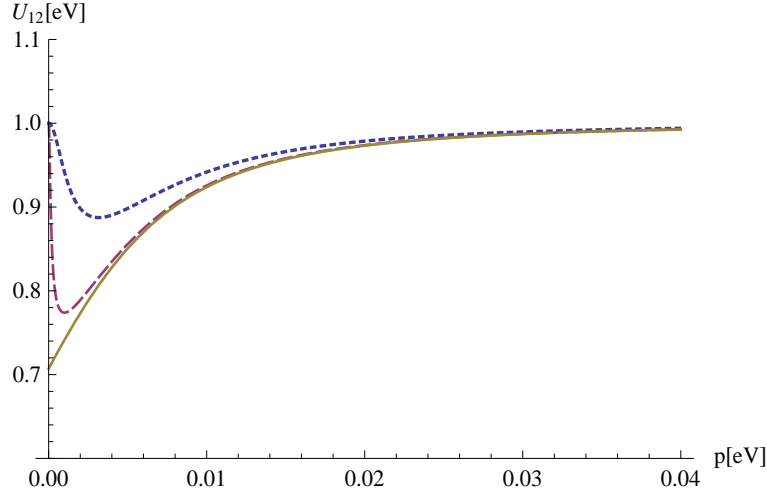


Figura 1.1: $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$ como función de $|\mathbf{p}|$, en puntos para $m_1 = 10^{-2}[eV]$ y $m_2 = 10^{-3}[eV]$, línea a trazos $m_1 = 10^{-2}[eV]$ y $m_2 = 10^{-4}[eV]$, línea continua para $m_1 = 10^{-2}[eV]$ y $m_2 = 0[eV]$.

De la figura 1.1, concluimos que en el límite en que una de las dos masas es igual cero, la función $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$ se aleja más de su valor asintótico 1, el cual toma cuando $|\mathbf{p}| \gg m_1, m_2$. Parte de esta conclusión ya se había obtenido a partir de la expansión de $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$ con $|\mathbf{p}| \gg m_1, m_2$, pero nuestro interés ahora se centra en alejarnos de este límite y explorar la región cercana a las masas (región de baja energía), ya que en ella esperamos observar algún efecto en las oscilaciones debido a la presencia de $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$ que lo haga distinto del resultado (I.19). Para ello debemos tener en cuenta las restricciones impuestas sobre $|\mathbf{p}|$ y su respectiva incertidumbre por las condiciones que hacen posible las oscilaciones de los neutrinos. Es decir, las condiciones mínimas necesarias para que el fenómeno de oscilación sea observable. Estas condiciones fueron reportadas por primera vez en [52], y recientemente discutidas en [53]. Las restricciones aplicables al caso más general se resumen en

$$\begin{aligned} \sigma_p \gg \frac{m_1^2 - m_2^2}{2|\mathbf{p}|} &= \frac{2\pi}{\lambda}, \\ \sigma_x &\ll \frac{\lambda}{2\pi}, \end{aligned} \quad (1.75)$$

la primera de ellas nos dice que la incertidumbre en $|\mathbf{p}|$ debe ser tal que sea imposible determinar con exactitud la masa de la partícula, y la segunda que la

resolución en la posición debe ser mucho menor a la longitud de oscilación de probabilidad. Por otra parte, hemos considerado que $\sigma_p \ll |\mathbf{p}|$, luego parametrizando estas condiciones, es decir, tomando $a, b \gg 1$, de manera que

$$\sigma_p = \frac{|\mathbf{p}|}{a} = b \frac{m_1^2 - m_2^2}{2|\mathbf{p}|}, \quad (1.76)$$

encontramos una condición sobre el cuadrado de \mathbf{p} , que es

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{ab(m_1^2 - m_2^2)}{2}. \quad (1.77)$$

Siguiendo nuestro objetivo, tomaremos $a \approx 10$ y $b \approx 20$, que son compatibles con las condiciones anteriores y a su vez permiten un $|\mathbf{p}|$ cercano a las masas de los neutrinos. Para esto utilizamos dos escenarios de oscilación (ambos dentro del modelo de mezcla entre dos neutrinos) los cuales representamos en las figuras 1.2 y 1.3. En el primero consideramos oscilación entre neutrinos del electrón y neutrinos del muón con $\sin^2 \theta_{12} = 0.3$, y en el segundo consideramos oscilaciones entre neutrinos del muón y neutrinos del tau con $\sin^2 \theta_{23} = 0.5$, tomando como masas $m_{2,3}$ las más grandes permitidas por los datos experimentales (I.20) y como masa $m_1 = 0$. Así para el primer caso tomaremos $m_2 = 10^{-2}$ y para el segundo $m_3 = 5 \cdot 10^{-1}$.

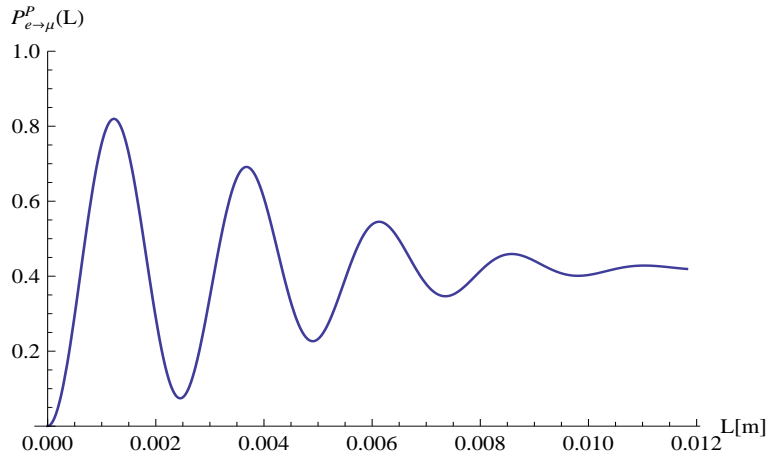


Figura 1.2: $P_{e \rightarrow \mu}^P(L)$ para $\sigma = 0,01[eV]$ y $P = 0,1[eV]$.

La correspondiente diferencia entre esta expresión en ambos escenarios y la obtenida en (I.19) está representada en las figuras 1.4 y 1.5 así como su diferencia

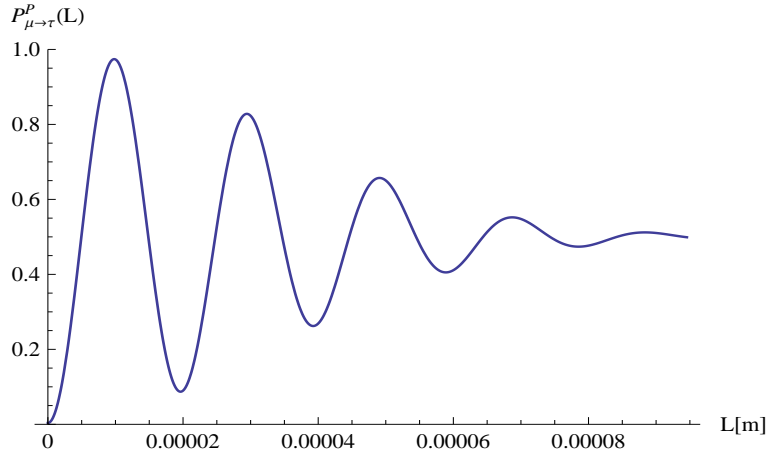


Figura 1.3: $P_{\mu \rightarrow \tau}^P(L)$ para $\sigma = 0,2[eV]$ y $P = 2[eV]$.

porcentual, es decir, la razón entre la diferencia de las probabilidades y la probabilidad estándar.

Para ello hemos introducido la siguiente notación

$$D_{\alpha \rightarrow \beta}^{P-E}(L) = P_{\alpha \rightarrow \beta}^P(L) - P_{\alpha \rightarrow \beta}^E(L), \quad R_{\alpha \rightarrow \beta}^{P-E}(L) = \frac{P_{\alpha \rightarrow \beta}^P(L) - P_{\alpha \rightarrow \beta}^E(L)}{P_{\alpha \rightarrow \beta}^E(L)}. \quad (1.78)$$

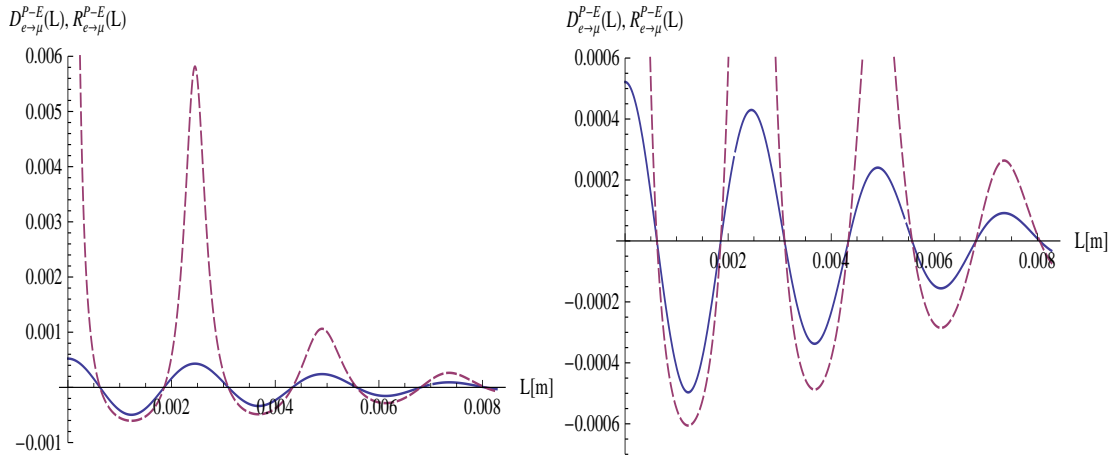


Figura 1.4: $D_{e \rightarrow \mu}^{P-E}(L)$ en línea continua y $R_{e \rightarrow \mu}^{P-E}(L)$ en línea a trazos, con $\sigma = 0,01[eV]$ y $P = 0,1[eV]$. Cada gráfica tiene distinto rango.

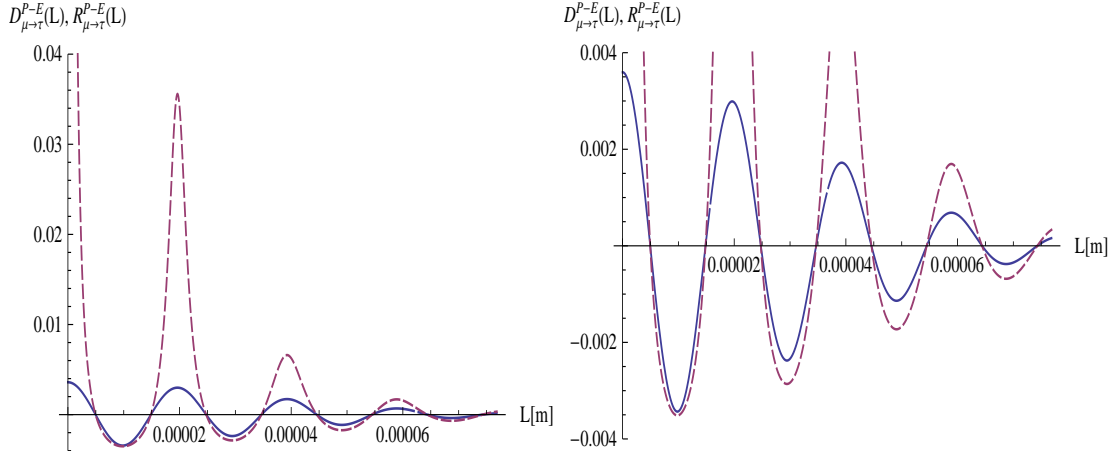


Figura 1.5: $D_{\mu \rightarrow \tau}^{P-E}(L)$ en línea continua y $R_{\mu \rightarrow \tau}^{P-E}(L)$ en línea a trazos, con $\sigma = 0,2[eV]$ y $P = 2[eV]$. Cada gráfica tiene distinto rango.

En las figuras 1.2 y 1.3 se observa el comportamiento esperado, es decir una probabilidad de transición que en el origen es cero y que va oscilando conforme aumenta la distancia de manera que la amplitud de las oscilaciones van decreciendo hasta que la probabilidad se hace constante e igual a $\sin^2(2\theta)/2$.

En las figuras 1.4 y 1.5 podemos ver, que a pesar de incluir de manera consistente la naturaleza espinorial de los neutrinos en nuestro tratamiento, en contraposición al tratamiento clásico, tal hecho no tiene consecuencias visibles dentro de los posibilidades permitidas físicamente para un experimento pensado ya que ello incluye la posibilidad de discriminar una diferencia entre probabilidades del 4 por mil a distancias absurdamente pequeñas. Por otra parte, debemos tener en cuenta que en caso de que sí fuera posible tal cosa, a través de mediciones indirectas, nuestras condiciones han sido muy idealizadas y por tanto la posibilidad de tener una mezcla coherente de neutrinos está en peligro, ya que, hemos disminuido al máximo condiciones fuertes entre cantidades, por ejemplo, considerando como mucho mayores cantidades que sólo difieren entre sí en un factor de 10 o 20.

Un resultado un tanto alentador, es seguir el comportamiento de la diferencia porcentual $R_{\alpha \rightarrow \beta}^{P-E}(L)$, y con ello notar, que de ser sensibles a esta cantidad (a distancias sumamente pequeñas), entonces habría una posibilidad de determinar la validez de esta expresión (aunque ya sabemos que no es la expresión correcta) ya

que la misma puede tomar valores del orden de 0.04 a distancias cercanas a 20 micras para los datos analizados. Sin embargo un estudio más detallado de esta canditad se hará en el capítulo 3 con la probabilidad correcta.

Finalmente los resultados anteriores explican el porqué la fórmula de oscilación de neutrinos obtenida por el tratamiento estándar es tan ampliamente aceptada.

1.5.1. límite ultrarelativista

En el límite ultrarelativista la fórmula de probabilidad derivada de este formalismo se puede escribir como la fórmula de probabilidad dada en (I.19) más correcciones de orden $O(m_i^2/|\mathbf{P}|^2)$ que daremos explícitamente. Primero desarrollamos

$$|\mathcal{U}_{\mathbf{P}}| \cong 1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{8|\mathbf{P}|^2} + O((m_i/|\mathbf{P}|)^4) \quad (1.79)$$

y luego, reemplazamos el desarrollo en la ecuación (3.42)

$$P_{e \rightarrow e}^P(L) \cong P_{e \rightarrow e}^E(L) - \frac{(m_2 - m_1)^2 \sin^2(2\theta)}{16|\mathbf{P}|^2} \cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} + O((m_i/|\mathbf{P}|)^4). \quad (1.80)$$

1.6 Valor esperado en mecánica cuántica

En el tratamiento que hemos seguido en este capítulo tuvimos que dar una definición para la posición media de la partícula de sabor, la cual fue inspirada en un argumento clásico. Sin embargo, la mecánica cuántica aplicada a una partícula deslocalizada, es decir una partícula que no es un autoestado del operador de posición, NO nos da una definición de la posición de la misma como función del tiempo, dado que tal definición carece de sentido.

El principio de correspondencia nos permite encontrar las relaciones clásicas entre cantidades que a nivel cuántico están relacionadas sólo en el sentido de valores esperados. Por ejemplo, la mecánica cuántica predice que en ausencia de un po-

tencial externo, el valor esperado de la posición de una partícula esta dado por

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{x}(0) \rangle + \left\langle \frac{\mathbf{p}t}{E} \right\rangle \quad (1.81)$$

la cual coincide con su equivalente clásico cambiando simplemente de valores esperados a cantidades clásicas.

Por otra parte, la noción de mezcla no es un concepto clásico sino cuántico, por ende no es posible predecir el valor esperado de la posición de una partícula mezclada, partiendo del principio de correspondencia. Un primer intento en esta dirección nos tentaría a definir el valor esperado de tal operador posición como

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \frac{\int d^3x \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^*(x) \mathbf{x} \psi_{\alpha \rightarrow \beta}(x)}{\int d^3x \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^*(x) \psi_{\alpha \rightarrow \beta}(x)}, \quad (1.82)$$

pero en efecto tal definición está errada. Puesto que nuestra función de onda de sabor no está normalizada, es más a partir de ella obteníamos la probabilidad de transición entre los distintos sabores. Pero como vimos, dado que la suma de estas probabilidades sobre sus estados finales si está normalizada, esto es

$$\sum_{\beta} \int d^3x \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^*(x) \psi_{\alpha \rightarrow \beta}(x) = 1, \quad (1.83)$$

por tanto, los valores esperados de los distintos operadores deben calcularse, con la suma sobre los estados finales del cálculo individual realizado con estas funciones de onda, es decir

$$\langle \mathbf{O} \rangle \equiv \sum_{\beta} \int d^3x d^3x' \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^*(x) \mathbf{O}(x, x') \psi_{\alpha \rightarrow \beta}(x'), \quad (1.84)$$

donde \mathbf{O} representa cualquier observable físico.

Esto se parece bastante al formalismo de matriz densidad en mecánica cuántica, en el sentido de que los promedios se hacen primero sobre los estados puros, luego se pesan con las concentraciones de estos estados en la mezcla y finalmente se suman entre sí todas estas cantidades, para obtener el valor esperado del observable físico.

El formalismo de matriz densidad nos permite tratar con sistemas cuánticos que están compuestos de distintos estados puros, lo cual lo hace ligeramente parecido al formalismo de mezcla entre partículas. Quizá esta observación pueda llevarnos a la construcción de un formalismo, dentro del tratamiento tradicional de oscilaciones de neutrinos, basado en la matriz densidad de la mecánica cuántica.

Aplicando esta definición a la posición del estado de sabor, y usando como primera aproximación los estados de pontecorvo, tenemos

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \sum_{\beta} \int d^3x \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^{*n}(x) \mathbf{x} \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x), \quad (1.85)$$

$$= \sum_j |U_{\alpha j}|^2 \int d^3x \psi_{j,\alpha}^{*n}(x) \mathbf{x} \psi_{j,\alpha}^n(x) \quad (1.86)$$

donde hemos definido a

$$\psi_{j,\alpha}^n(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{f}_{\alpha}(n, \mathbf{p}) u_j(\mathbf{p}, s) e^{-ipx} \quad (1.87)$$

es decir, la misma definición de $\psi_j(x)$ dada anteriormente, pero utilizando como paquete a $|\tilde{f}_{\alpha}(n, \mathbf{p})|$. Con ello podemos escribir

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \sum_j |U_{\alpha j}|^2 \langle \mathbf{x} \rangle_j, \quad (1.88)$$

donde $\langle \mathbf{x} \rangle_j$ representan los valores esperados del operador posición calculados con las funciones $\psi_{j\alpha}(x)$. Esto implica que en lugar de la definición (1.61) utilizada para hacer la conversión de tiempo a distancia otra posible definición derivada de las consideraciones explicadas en esta sección es

$$\mathbf{L}_{\alpha} \equiv \sum_j |U_{\alpha j}|^2 \mathbf{L}_j. \quad (1.89)$$

Ahora bien, dado que la definición de distancia recorrida por el neutrino de sabor afecta únicamente las longitudes de onda y las longitudes de oscilación de las expresiones de probabilidad encontradas anteriormente, basta con calcular estas cantidades para apreciar que efecto tendría el uso esta definición.

Para el caso de dos neutrinos

$$\mathbf{L}_e \equiv \cos^2 \theta \mathbf{L}_1 + \sin^2 \theta \mathbf{L}_2, \quad (1.90)$$

$$\mathbf{L}_{\mu} \equiv \sin^2 \theta \mathbf{L}_1 + \cos^2 \theta \mathbf{L}_2. \quad (1.91)$$

Esta nueva definición a diferencia de la dada en la sección (1.61), tiene como propiedad interesante que depende del ángulo de mezcla y por tanto varía según el grado de mezcla de la partícula, un comportamiento que es deseable dado que en el límite en que la mezcla es casi nula uno esperaría que la posición del neutrino de sabor sea prácticamente la misma que la de la componente que se ve favorecida por ejemplo en el límite en que $\theta \rightarrow 0$, $\mathbf{L}_e \rightarrow \mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_\mu \rightarrow \mathbf{L}_2$.

Bajo este esquema tenemos que

$$\begin{aligned} L_{coh} &= \frac{\sqrt{2}(\omega_{\mathbf{P}1} \sin^2 \theta + \omega_{\mathbf{P}2} \cos^2 \theta)}{\sigma(\omega_{\mathbf{P}2} - \omega_{\mathbf{P}1})}, \\ \lambda &= \frac{2\pi|\mathbf{P}|(\omega_{\mathbf{P}1} \sin^2 \theta + \omega_{\mathbf{P}2} \cos^2 \theta)}{\omega_{\mathbf{P}1}\omega_{\mathbf{P}2}(\omega_{\mathbf{P}2} - \omega_{\mathbf{P}1})} \end{aligned} \quad (1.92)$$

las cuales introducen correcciones de orden $O((m_i/|\mathbf{P}|)^4)$ sobre las definiciones anteriores, es por ello que el resultado es independiente de la definición de la posición del neutrino.

CAPÍTULO 2

ESTADOS DE BOGOLIUBOV

2.1 Transformaciones de Bogoliubov

Las transformaciones de Bogoliubov son aquellas transformaciones que permiten pasar de una representación unitaria de cierta álgebra de relaciones de conmutación (anticonmutación) canónica a otra representación unitaria de la misma álgebra.

Los objetos sobre los que se define el álgebra en el contexto de la teoría cuántica de campos son los operadores de los campos. Estos operadores actúan sobre los distintos elementos que viven en un espacio de Fock específico, definido por la teoría considerada, los cuales son contruidos a partir de la acción de los operadores (que constituyen las distintas representaciones de dicha álgebra) sobre el vacío de la teoría. La transformación de Bogoliubov en este contexto establece un mapeo entre los elementos de un espacio de Fock y otro que es determinado por la definición de los nuevos operadores básicos en función de los anteriores. Tal mapeo puede ser tal, que el vacío de la nueva teoría resulte ortogonal al anterior y, por tanto, que el espacio mismo contruido a partir del vacío sea ortogonal al espacio de la anterior teoría; en tal caso, se dice que las representaciones del álgebra son unitariamente no equivalentes.

Tal situación es particular del gran número de grados de libertad que involucra la teoría de campos y, por tanto, no está presente en las transformaciones canónicas usadas tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica. A pesar de ello, este tipo de transformaciones resultan de gran utilidad en el tratamiento de problemas de la física, especialmente en el contexto de la materia condensada, en modelos de superconductividad y en el estudio de teorías de campos térmicas.

2.2 Mezcla en teoría de campos

La aparición de la mezcla en teoría de campos ocurre con la definición de ciertos campos relacionados con campos presentes en la teoría y que permiten diagonalizar cierto sector del Hamiltoniano de la misma. Este paso de los campos iniciales a otros que están relacionados con los primeros, puede interpretarse como un cambio de representación que deja invariante el álgebra existente entre los campos y que puede implementarse a través de una transformación de Bogoliubov que genere la mezcla.

Nuestro interés estará centrado en la mezcla entre neutrinos de diferentes sabores y por simplicidad se considerarán únicamente dos familias de neutrinos (e : electrónico y μ : muónico). En este caso el sector que se diagonaliza es el sector masivo, de tal manera que los neutrinos de sabor están relacionados con los neutrinos masivos a través de la siguiente rotación;

$$\Psi_e(x) = \cos \theta \Psi_1(x) + \sin \theta \Psi_2(x), \quad (2.1)$$

$$\Psi_\mu(x) = -\sin \theta \Psi_1(x) + \cos \theta \Psi_2(x), \quad (2.2)$$

donde $\Psi_i(x)$, con $i = 1, 2$, representa a los neutrinos masivos y $\Psi_\sigma(x)$ con $\sigma = e, \mu$ representa a los neutrinos de sabor.

Esta transformación puede reescribirse en términos de un operador unitario, lo cual permite simplificar la relación mutua entre los campos, a saber

$$\Psi_e(x) = G_\theta^{-1}(t) \Psi_1(x) G_\theta(t), \quad (2.3)$$

$$\Psi_\mu(x) = G_\theta^{-1}(t) \Psi_2(x) G_\theta(t), \quad (2.4)$$

donde el operador unitario que efectúa la transformación es

$$G_\theta(t) = \exp \left[\theta \int d^3x (\Psi_1^\dagger(x) \Psi_2(x) - \Psi_2^\dagger(x) \Psi_1(x)) \right]. \quad (2.5)$$

Tal resultado se puede visualizar como una transformación de Bogoliubov e interpretar a los campos de sabor y de masa, como representaciones unitariamente no equivalentes entre el álgebra que los define. La demostración de esta identidad se puede realizar usando la relación de Baker-Campbell-Hausdorff (A.2).

La expansión en ondas planas de los campos puede llevarse a cabo al interior de una caja imponiendo condiciones periódicas en la frontera de la misma, con lo cual, los distintos modos normales de oscilación quedarían discretizados y la expansión realizada en (1.21) resultará

$$\Psi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, r} \left[u_{\mathbf{k}, i}^r \alpha_{\mathbf{k}, i}^r(t) + v_{-\mathbf{k}, i}^r \beta_{-\mathbf{k}, i}^{r\dagger}(t) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

donde $\alpha_{\mathbf{k}, i}^r(t) = e^{-i\omega_{\mathbf{k}, i} t} \alpha_{\mathbf{k}, i}^r$ y $\beta_{\mathbf{k}, i}^r(t) = e^{-i\omega_{\mathbf{k}, i} t} \beta_{\mathbf{k}, i}^r$, con $\omega_{\mathbf{k}, i} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_i^2}$. Los operadores de aniquilación $\alpha_{\mathbf{k}, i}^r$ y $\beta_{\mathbf{k}, i}^r$ ($r = 1, 2$), aniquilan el estado de vacío $|0\rangle_{1,2} \equiv |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$: $\alpha_{\mathbf{k}, i}^r |0\rangle_{1,2} = \beta_{\mathbf{k}, i}^r |0\rangle_{1,2} = 0$. El uso de un volumen finito para la construcción del campo nos lleva a las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\{\Psi_i^a(x), \Psi_j^{b\dagger}(y)\}_{t=t'} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab} \delta_{ij}, \quad a, b = 1, \dots, 4, \quad (2.7)$$

$$\{\alpha_{\mathbf{k}, i}^r, \alpha_{\mathbf{q}, j}^{s\dagger}\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \delta_{rs} \delta_{ij}, \quad \{\beta_{\mathbf{k}, i}^r, \beta_{\mathbf{q}, j}^{s\dagger}\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \delta_{rs} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.8)$$

El resto de los anticonmutadores son iguales a cero.

Las relaciones de ortogonalidad y completez son

$$u_{\mathbf{k}, i}^{r\dagger} u_{\mathbf{k}, i}^s = v_{\mathbf{k}, i}^{r\dagger} v_{\mathbf{k}, i}^s = \delta_{rs}, \quad u_{\mathbf{k}, i}^{r\dagger} v_{-\mathbf{k}, i}^s = v_{-\mathbf{k}, i}^{r\dagger} u_{\mathbf{k}, i}^s = 0, \quad (2.9)$$

$$\sum_r (u_{\mathbf{k}, i}^r u_{\mathbf{k}, i}^{r\dagger} + v_{-\mathbf{k}, i}^r v_{-\mathbf{k}, i}^{r\dagger}) = \mathbb{I}, \quad (2.10)$$

las cuales son completamente análogas a las introducidas en la sección 1.2.

De manera análoga al caso continuo, podremos expandir estos campos en paquetes de onda caracterizados por un índice n que los enumera, esto es:

$$\Psi_i(x) = \sum_{n, r} \left[f_{n, i}^r(x) \alpha_{n, i}^r(t) + g_{n, i}^r(x) \beta_{n, i}^{r\dagger}(t) \right], \quad i = 1, 2, \quad (2.11)$$

donde

$$f_{n,i}^r(x) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^i \frac{u_{\mathbf{k},i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad g_{n,i}^r(x) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^i \frac{v_{-\mathbf{k},i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.12)$$

Tal como se muestra en la sección 1.2, estas nuevas funciones bases (paquetes de onda), satisfacen la ecuación de Dirac para las masas m_i , y los operadores asociados que crean estados localizados, pueden obtenerse a partir de los campos siguiendo el mismo procedimiento mostrado en la sección 1.2 para el caso continuo, es decir

$$\begin{aligned} \alpha_{n,i}^{s\dagger}(t) &= \int d^3x \Psi_i^\dagger(x) f_{n,i}^s(x), & \beta_{n,i}^s(t) &= \int d^3x \Psi_i^\dagger(x) g_{n,i}^s(x), \\ \alpha_{n,i}^s(t) &= \int d^3x f_{n,i}^{s\dagger}(x) \Psi_i(x), & \beta_{n,i}^{s\dagger}(t) &= \int d^3x g_{n,i}^{s\dagger}(x) \Psi_i(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Así mismo, estos operadores están relacionados con los de momento definido de la manera esperada:

$$\alpha_{n,i}^{s\dagger}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^i \alpha_{\mathbf{k},i}^{s\dagger}(t), \quad \beta_{n,i}^s(t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^i \beta_{-\mathbf{k},i}^s(t). \quad (2.14)$$

La versión discreta para la ortogonalidad y completez de los paquetes resulta

$$\sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{i*} \tilde{f}_{n',\mathbf{k}}^i = \delta_{nn'}, \quad \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{i*} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}'}^i = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (2.15)$$

lo cual garantiza los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \int d^3x f_{n,i}^{s\dagger}(x) f_{n',i}^{s'}(x) &= \delta_{ss'} \delta_{nn'}, & \int d^3x g_{n,i}^{s\dagger}(x) g_{n',i}^{s'}(x) &= \delta_{ss'} \delta_{nn'}, \\ \int d^3x f_{n,i}^{s\dagger}(x) g_{n',i}^{s'}(x) &= 0, & \int d^3x g_{n,i}^{s\dagger}(x) f_{n',i}^{s'}(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

y con ello la validez de las ecuaciones (2.13).

Por otra parte, dado que las soluciones a la ecuación de Dirac para una masa y helicidad determinadas, forman un conjunto completo para los espinores, entonces cualquier espinor se puede escribir como una superposición de estos espinores base. Este hecho nos permite escoger cualquier conjunto completo de soluciones de una ecuación de Dirac (para un parámetro de masa arbitrario fijo), para expandir

cualquier campo de Heisemberg, en particular a los campos de los neutrinos de sabor,

$$\Psi_\sigma(x) = \sum_{n,r} [f_{n,\sigma}^r(x)\alpha_{n,\sigma}^r(t) + g_{n,\sigma}^r(x)\beta_{n,\sigma}^{r\dagger}(t)], \quad \sigma = e, \mu, \quad (2.17)$$

de manera análoga a la expansión de los campos de masa, con la diferencia de que estos últimos se expanden en bases que son solución de la ecuación de Dirac asociada a su masa respectiva. Esta arbitrariedad en la expansión de los campos de sabor hace que la relación obtenida entre los operadores de creación de las partículas de sabor y de las partículas masivas no sea única sino que exista una familia infinita de tales relaciones. Este fenómeno dejaría de ser preocupante si se puede demostrar que los observables físicos asociados con las distintas relaciones nos llevan a los mismos resultados.

Los operadores de creación (aniquilación) de sabor en términos de los campos seguirán la relación ya deducida para los campos de masa

$$\alpha_{n,\sigma}^s(t) = \int d^3x f_{n,\sigma}^{s\dagger}(x)\Psi_\sigma(x), \quad \beta_{n,\sigma}^{s\dagger}(t) = \int d^3x g_{n,\sigma}^{s\dagger}(x)\Psi_\sigma(x), \quad (2.18)$$

pero $\Psi_\sigma(x) = G_\theta^{-1}(t)\Psi_j(x)G_\theta(t)$, donde la pareja $(\sigma, j) = (e, 1), (\mu, 2)$, luego

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,\sigma}^s(t) \\ \beta_{n,\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = G_\theta^{-1}(t) \left\{ \int d^3x \begin{pmatrix} f_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) \\ g_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) \end{pmatrix} \Psi_j(x) \right\} G_\theta(t).$$

En la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \int d^3x f_{n,\sigma}^{s\dagger}(x)\Psi_j(x) &= \sum_{n',r} \int d^3x f_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) [f_{n',j}^r(x)\alpha_{n',j}^r(t) + g_{n',j}^r(x)\beta_{n',j}^{r\dagger}(t)] \\ &= \sum_{n',r} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \frac{1}{V} [\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} \tilde{f}_{n',\mathbf{k}'}^j u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k}',j}^r \alpha_{n',j}^r(t) + \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} \tilde{f}_{n',\mathbf{k}'}^j u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k}',j}^r \beta_{n',j}^{r\dagger}(t)] \\ &\quad \times \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

teniendo en cuenta que $\int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{x}} = V\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ y, si se usan bases para los espinores $u^r, v^{r\dagger}$ y $u^s, v^{s\dagger}$, tales que, independientemente del campo que describan, sean ortogonales para $r \neq s$, entonces la suma en r se reduce a un único término, con lo cual

$$\begin{aligned} \int d^3x f_{n,\sigma}^{s\dagger}(x)\Psi_j(x) &= \sum_{n'} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} \tilde{f}_{n',\mathbf{k}}^j [u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s \alpha_{n',j}^s(t) + u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s \beta_{-n',j}^{s\dagger}(t)], \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} [u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) + u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t)]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

En la última igualdad, empleamos las expresiones para $\alpha_{\mathbf{k},j}^s(t)$ y $\beta_{\mathbf{k},j}^s(t)$ en términos de $\alpha_{n,j}^s(t)$ y $\beta_{n,j}^s(t)$ respectivamente, que resulta de (2.14).

Siguiendo un procedimiento análogo obtenemos

$$\int d^3x g_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) \Psi_j(x) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} [v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) + v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t)]. \quad (2.21)$$

Reemplazando (2.20) y (2.21), en la ecuación (2.18), encontramos la forma general de la transformación que relaciona los operadores de creación de ambos campos

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,\sigma}^s(t) \\ \beta_{n,\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} \left[G_{\theta}^{-1}(t) \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s & u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s \\ v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s & v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} G_{\theta}(t) \right],$$

Para simplificar esta expresión debemos utilizar una base particular para los espinores, la cual, al igual que en el capítulo anterior, será la base quiral. En esta base, los espinores son

$$u_{\mathbf{k},j}^s = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{s|\mathbf{k}|}{m_j + \omega_j}\right) \xi^s \\ \left(1 - \frac{s|\mathbf{k}|}{m_j + \omega_j}\right) \xi^s \end{pmatrix}, \quad v_{-\mathbf{k},j}^s = is \mathcal{N} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{s|\mathbf{k}|}{m_j + \omega_j}\right) \xi^s \\ -\left(1 + \frac{s|\mathbf{k}|}{m_j + \omega_j}\right) \xi^s \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{N} = \left(\frac{m_j + \omega_j}{4\omega_j}\right)^{1/2}$ (2.22)

donde ξ_s son espinores de dos componentes, tales que, $\sigma \cdot \mathbf{k} \xi_s = s|\mathbf{k}| \xi_s$, con ($s = \pm 1$). Estos espinores se pueden reescribir de forma simplificada como

$$u_{\mathbf{k},j}^{s\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} \left(\sqrt{\omega_j + s|\mathbf{k}|} \quad \sqrt{\omega_j - s|\mathbf{k}|} \right) \xi_s^\dagger \quad v_{-\mathbf{k},j}^s = \frac{-is}{\sqrt{2\omega_j}} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_j - s|\mathbf{k}|} \\ -\sqrt{\omega_j + s|\mathbf{k}|} \end{pmatrix} \xi_s, \quad (2.23)$$

e igualmente reescribimos los espinores asociados a los parámetros de masa m_σ , como

$$u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma}} \left(\sqrt{\omega_\sigma + s|\mathbf{k}|} \quad \sqrt{\omega_\sigma - s|\mathbf{k}|} \right) \xi_s^\dagger \quad v_{-\mathbf{k},\sigma}^s = \frac{-is}{\sqrt{2\omega_\sigma}} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_\sigma - s|\mathbf{k}|} \\ -\sqrt{\omega_\sigma + s|\mathbf{k}|} \end{pmatrix} \xi_s, \quad (2.24)$$

En las ecuaciones (2.23) y (2.24), hemos introducido una fase igual a is en los espinores $v_{-\mathbf{k},j}^s$ y $v_{-\mathbf{k},\sigma}^s$, lo cual, hace que los productos espinoriales no dependan

de la proyección de espín s , es decir

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s &= v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{s|\mathbf{k}|}{\omega_\sigma}} \sqrt{1 + \frac{s|\mathbf{k}|}{\omega_j}} + \sqrt{1 - \frac{s|\mathbf{k}|}{\omega_\sigma}} \sqrt{1 - \frac{s|\mathbf{k}|}{\omega_j}} \right], \\ u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s &= v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s = \frac{is}{2} \left[\sqrt{1 - \frac{s|\mathbf{k}|}{\omega_\sigma}} \sqrt{1 + \frac{s|\mathbf{k}|}{\omega_j}} - \sqrt{1 + \frac{s|\mathbf{k}|}{\omega_\sigma}} \sqrt{1 - \frac{s|\mathbf{k}|}{\omega_j}} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

además de no alterar las propiedades de los espinores.

Identificando a $\cos(\chi_j) = |\mathbf{k}|/\omega_j$ y $\cos(\chi_\sigma) = |\mathbf{k}|/\omega_\sigma$, podemos escribir

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s &= v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s = \rho_{\sigma,j} = \cos\left(\frac{\chi_\sigma - \chi_j}{2}\right) \quad y \\ u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s &= v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s = i\lambda_{\sigma,j} = i \sin\left(\frac{\chi_\sigma - \chi_j}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Así, los operadores de creación de sabor en términos de los operadores de masa, se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{n,\sigma}^s(t) \\ \beta_{n,\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} &= \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} \left[G_\theta^{-1}(t) \begin{pmatrix} \rho_{\sigma,j} & i\lambda_{\sigma,j} \\ i\lambda_{\sigma,j} & \rho_{\sigma,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} G_\theta(t) \right], \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

con lo cual

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = G_\theta^{-1}(t) \begin{pmatrix} \rho_{\sigma,j} & i\lambda_{\sigma,j} \\ i\lambda_{\sigma,j} & \rho_{\sigma,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} G_\theta(t). \quad (2.28)$$

La acción de la matriz sobre el vector de operadores que crean neutrinos masivos, puede obtenerse a través de un operador unitario $I(t)$, de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \rho_{\sigma,j} & i\lambda_{\sigma,j} \\ i\lambda_{\sigma,j} & \rho_{\sigma,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = I^{-1}(t) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} I(t), \quad (2.29)$$

con $I(t)$ dado por [29]

$$I(t) = \exp \left\{ i \sum_{\mathbf{k}'s'} \sum_{(\sigma,j)} \zeta_{\sigma,j}(\mathbf{k}') [\alpha_{\mathbf{k}',j}^{s'\dagger}(t) \beta_{-\mathbf{k}',j}^{s'\dagger}(t) + \beta_{-\mathbf{k}',j}^{s'}(t) \alpha_{\mathbf{k}',j}^{s'}(t)] \right\}, \quad (2.30)$$

donde $\zeta_{\sigma,j} = (\chi_\sigma - \chi_j)/2$.

La prueba de que efectivamente el operador $I(t)$ genera la combinación de la ecuación (2.29) cuando es aplicado sobre los operadores de aniquilación y creación masivos, se lleva a cabo usando la relación de Baker-Campbell-Hausdorff, ya aplicada para demostrar la relación entre los campos Ψ_σ y Ψ_j .

De esta manera, los operadores de sabor en función de los operadores de masa se escriben como

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = K^{-1}(t) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} K(t), \quad (2.31)$$

con $K(t) = I(t)G_\theta(t)$.

Esta es la transformación de Bogoliubov entre los operadores de sabor y los operadores de masa. A partir de la ecuación (2.31), y su conjugada, notamos que

$$\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)K^{-1}(t)|0\rangle_{1,2} = K^{-1}(t)\alpha_{\mathbf{k},j}^s(t)|0\rangle_{1,2} = 0, \quad (2.32)$$

$$\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)K^{-1}(t)|0\rangle_{1,2} = K^{-1}(t)\beta_{-\mathbf{k},j}^s(t)|0\rangle_{1,2} = 0, \quad (2.33)$$

es decir, los operadores de aniquilación de sabor, $\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)$ y $\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)$, no aniquilan al vacío de masa $|0\rangle_{1,2}$, sino a un nuevo vacío que podemos definir como

$$|0(t)\rangle_{e,\mu} \equiv K^{-1}(t)|0\rangle_{1,2} \quad (2.34)$$

pero entonces, el vacío de esta teoría sería dinámico y estaría en total desacuerdo con la noción de vacío de la teoría de campos. Tal aparente contradicción se debe a que en realidad los campos de sabor, Ψ_σ no son campos libres, y por ende en la expansión (2.17), los operadores $\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)$ y $\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)$ no deben entenderse como operadores de creación de neutrinos de sabor, más que a un tiempo dado, el cual por conveniencia consideramos como $t = 0$, de lo cual se deduce que el verdadero vacío de los campos de sabor, es

$$|0\rangle_{e,\mu} \equiv K^{-1}(0)|0\rangle_{1,2}, \quad (2.35)$$

e igualmente, que los estados que describen los neutrinos del electrón y del muón son respectivamente

$$\begin{aligned} |\nu_e(\mathbf{k}, s)\rangle &\equiv \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0)|0\rangle_{e,\mu}, \\ |\nu_\mu(\mathbf{k}, s)\rangle &\equiv \alpha_{\mathbf{k},\mu}^{s\dagger}(0)|0\rangle_{e,\mu}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.3 Una elección particular

Ahora bien, dada la arbitrariedad en la elección de los parámetros de masa de sabor, en la referencia [26], los autores proponen, por simplicidad, tomar las mismas masas físicas m_j asociadas a los campos Ψ_j , dada la relación existente entre estos y los campos de sabor Ψ_σ . Esta elección particular no debe incidir en las cantidades observables [31], criterio que es satisfecho para la probabilidad de oscilación, que se definirá mas adelante.

Al hacer la elección indicada, el campo de sabor se desarrolla como

$$\Psi_\sigma(x) = \sum_{n',r} \left[f_{n',j}^r(x) \tilde{\alpha}_{n',\sigma}^r(t) + g_{n',j}^r(x) \tilde{\beta}_{n',\sigma}^{r\dagger}(t) \right], \quad (2.37)$$

donde los nuevos operadores de creación y aniquilación que llamaremos $\tilde{\alpha}_{n',\sigma}^s(t)$ y $\tilde{\beta}_{n',\sigma}^{s\dagger}(t)$ son

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{n,\sigma}^s(t) \\ \tilde{\beta}_{n,\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} &= \int d^3x \begin{pmatrix} f_{n,j}^{s\dagger}(x) \\ g_{n,j}^{s\dagger}(x) \end{pmatrix} \Psi_\sigma(x) \\ &= G_\theta^{-1}(t) \sum_{n',r} \int d^3x \begin{pmatrix} f_{n',j}^{s\dagger}(x) \\ g_{n',j}^{s\dagger}(x) \end{pmatrix} \left[f_{n',j}^r(x) \alpha_{n',j}^r(t) + g_{n',j}^r(x) \beta_{n',j}^{r\dagger}(t) \right] G_\theta(t) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{n,\sigma}^s(t) \\ \tilde{\beta}_{n,\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} &= G_\theta^{-1}(t) \begin{pmatrix} \alpha_{n,j}^s(t) \\ \beta_{n,j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} G_\theta(t), \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{j*} G_\theta^{-1}(t) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} G_\theta(t), \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{j*} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = G_\theta^{-1}(t) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} G_\theta(t), \quad (2.38)$$

y de las ecuaciones (2.28) y (2.38) se deduce directamente la relación entre los operadores generales de momento definido, y los operadores de momento definido

asociados a esta elección particular

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{\sigma,j} & i\lambda_{\sigma,j} \\ i\lambda_{\sigma,j} & \rho_{\sigma,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

de manera que el operador que genera esta transformación tendrá la misma forma funcional que $I(t)$ pero ahora con los operadores $\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)$ y $\tilde{\beta}_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)$ en lugar de los operadores $\alpha_{\mathbf{k},j}^s(t)$ y $\beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t)$, por lo que lo llamaremos $J(t)$ y estará dado por

$$J(t) = \exp \left\{ i \sum_{\mathbf{k}'s'} \sum_{(\sigma,j)} \zeta_{\sigma,j}(\mathbf{k}') [\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^{s'\dagger}(t) \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s'\dagger}(t) + \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s'}(t) \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^{s'}(t)] \right\}, \quad (2.40)$$

y la transformación respectiva será:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = J^{-1}(t) \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} J(t). \quad (2.41)$$

Como probaremos en la sección (3.2), los valores esperados obtenidos con la base más general $\{\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)\}$ y $\{\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)\}$ son iguales a los obtenidos con la base específica $\{\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)\}$ y $\{\tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)\}$, y esta segunda resulta ser mucho más práctica en el momento de realizar cálculos. Por tal razón optaremos por utilizar la segunda de ellas con la notación genérica $\{\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)\}$ y $\{\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)\}$.

Para encontrar la fórmula explícita que relaciona los operadores de creación de sabor y los operadores de creación de masa, partimos de la expresión (2.38)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = G_{\theta}^{-1}(t) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} G_{\theta}(t),$$

expresando los operadores de masa en términos de los campos, dados en la ecuación (2.13), tendríamos

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = \int d^3x \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^j \begin{pmatrix} f_{n,j}^{s\dagger}(x) \\ g_{n,j}^{s\dagger}(x) \end{pmatrix} G_{\theta}^{-1}(t) \Psi_j(x) G_{\theta}(t), \quad (2.42)$$

y evaluando la integral anterior para $(\sigma, j) = (e, 1)$, con la forma explícita de la mezcla implementada por $G_\theta(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},e}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},e}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} &= \int d^3x \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^1 \begin{pmatrix} f_{n,1}^{s\dagger}(x) \\ g_{n,1}^{s\dagger}(x) \end{pmatrix} G_\theta^{-1}(t) \Psi_1(x) G_\theta(t), \\
&= \cos \theta \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^1 \int d^3x \begin{pmatrix} f_{n,1}^{s\dagger}(x) \\ g_{n,1}^{s\dagger}(x) \end{pmatrix} \Psi_1(x) \\
&\quad + \sin \theta \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^1 \int d^3x \begin{pmatrix} f_{n,1}^{s\dagger}(x) \\ g_{n,1}^{s\dagger}(x) \end{pmatrix} \Psi_2(x), \\
&= \cos \theta \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^1 \begin{pmatrix} \alpha_{n,1}^s(t) \\ \beta_{n,1}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} + \sin \theta \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^1 \sum_{n',r} \int d^3x \begin{pmatrix} f_{n,1}^{s\dagger}(x) f_{n',2}^r(x) \\ g_{n,1}^{s\dagger}(x) f_{n',2}^r(x) \end{pmatrix} \alpha_{n',2}^r(t) \\
&\quad + \sin \theta \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^1 \sum_{n',r} \int d^3x \begin{pmatrix} f_{n,1}^{s\dagger}(x) g_{n',2}^r(x) \\ g_{n,1}^{s\dagger}(x) g_{n',2}^r(x) \end{pmatrix} \beta_{n',2}^{r\dagger}(t), \tag{2.43}
\end{aligned}$$

ahora evaluamos la suma e integral dadas por

$$\begin{aligned}
\sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^1 \int d^3x f_{n,1}^{s\dagger}(x) f_{n',2}^r(x) &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^1 f_{n,\mathbf{k}'}^{1*} \tilde{f}_{n',\mathbf{k}''}^2 \frac{u_{\mathbf{k}',1}^{s\dagger} u_{\mathbf{k}'',1}^r}{V} \int d^3x e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{x}} \\
&= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \tilde{f}_{n',\mathbf{k}''}^2 \frac{u_{\mathbf{k}',1}^{s\dagger} u_{\mathbf{k}'',1}^s}{V} \delta_{rs} V \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \\
&= \tilde{f}_{n',\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k},1}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},2}^s \delta_{rs}, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

y de la misma manera el resto de integrales, con lo cual, reemplazando estos resultados en la ecuación (2.43), y teniendo en cuenta la relación (2.14), llegamos a

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},e}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},e}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},1}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k},1}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},2}^s & u_{\mathbf{k},1}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},2}^s \\ v_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},2}^s & v_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},2}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},2}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix}.$$

Si repetimos el procedimiento anterior ahora considerando $(\sigma, j) = (\mu, 2)$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\mu}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\mu}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},2}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} - \sin \theta \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k},2}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},1}^s & u_{\mathbf{k},2}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},1}^s \\ v_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},1}^s & v_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},1}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},1}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, escribiendo todas los operadores de sabor en forma resumida tendremos

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\mathbf{k},e}^r(t) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},1}^r(t) + \sin \theta \left(\rho_{12} \alpha_{\mathbf{k},2}^r(t) + i\lambda_{12} \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger}(t) \right) \\
 \alpha_{\mathbf{k},\mu}^r(t) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},2}^r(t) - \sin \theta \left(\rho_{12} \alpha_{\mathbf{k},1}^r(t) - i\lambda_{12} \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger}(t) \right) \\
 \beta_{-\mathbf{k},e}^r(t) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},1}^r(t) + \sin \theta \left(\rho_{12} \beta_{-\mathbf{k},2}^r(t) - i\lambda_{12} \alpha_{\mathbf{k},2}^{r\dagger}(t) \right) \\
 \beta_{-\mathbf{k},\mu}^r(t) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},2}^r(t) - \sin \theta \left(\rho_{12} \beta_{-\mathbf{k},1}^r(t) + i\lambda_{12} \alpha_{\mathbf{k},1}^{r\dagger}(t) \right)
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

De este resultado se observa que en ausencia de mezcla, es decir con $\theta = 0$, los operadores de creación de sabor coinciden con los operadores de creación de masa, multiplicados por una fase que lleva información de la evolución del mismo, pero que podemos extraer de la definición de los operadores de sabor con el objeto de que esta coincida por completo con los operadores de masa y sin dependencia temporal extra cuando $\theta = 0$.

Extraer tal fase, tiene como consecuencia un ligero cambio en la expansión del campo de sabor, la cual, necesariamente involucrará la fase de manera explícita.

Con esta modificación, los operadores resultantes son

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\mathbf{k},e}^r(t) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},1}^r + \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) \alpha_{\mathbf{k},2}^r + \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} \right) \\
 \alpha_{\mathbf{k},\mu}^r(t) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},2}^r - \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \alpha_{\mathbf{k},1}^r - \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} \right) \\
 \beta_{-\mathbf{k},e}^r(t) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},1}^r + \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) \beta_{-\mathbf{k},2}^r - \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \alpha_{\mathbf{k},2}^{r\dagger} \right) \\
 \beta_{-\mathbf{k},\mu}^r(t) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},2}^r - \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},1}^r + \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \alpha_{\mathbf{k},1}^{r\dagger} \right)
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

donde $\epsilon^r = (-1)^r$ y

$$\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \equiv u_{\mathbf{k},2}^{r\dagger}(t) u_{\mathbf{k},1}^r(t) = v_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger}(t) v_{-\mathbf{k},2}^r(t) = |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \tag{2.47}$$

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \equiv \epsilon^r u_{\mathbf{k},1}^{r\dagger}(t) v_{-\mathbf{k},2}^r(t) = -\epsilon^r u_{\mathbf{k},2}^{r\dagger}(t) v_{-\mathbf{k},1}^r(t) = |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} \tag{2.48}$$

$$|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| = \frac{|\mathbf{k}|^2 + (\omega_1 + m_1)(\omega_2 + m_2)}{2\sqrt{\omega_1\omega_2(\omega_1 + m_1)(\omega_2 + m_2)}} \tag{2.49}$$

$$|\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| = \frac{(\omega_1 + m_1) - (\omega_2 + m_2)}{2\sqrt{\omega_1\omega_2(\omega_1 + m_1)(\omega_2 + m_2)}} |\mathbf{k}| \tag{2.50}$$

$$|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \tag{2.51}$$

CAPÍTULO 3

FUNCIÓN DE ONDA DE SABOR

3.1 Función de onda de sabor

El formalismo de la función de onda de mezcla ó amplitud de transición de sabor desarrollado en la sección (1.3), se llevó acabo, tomando como estados de sabor los estados de Pontecorvo, que, como se hizo notar en aquel momento, son deducidos de un formalismo de primera cuantización (mecánica cuántica no relativista), razón por la cual, nuestro tratamiento no había sido del todo consistente en el marco de la teoría de campos.

Por otra parte, en el capítulo anterior, se mostró, que desde el punto de vista de la teoría de campos, la mezcla entre campos de masa puede generarse a través de transformaciones de Bogoliubov, a partir de las cuales se puede establecer una relación entre operadores de creación (aniquilación) de los campos de sabor y los operadores de creación (aniquilación) de los campos de masa. De esta manera queda definidos los estados de neutrinos de sabor mediante la aplicación de los operadores de creación de sabor en el vacío correspondiente.

Aquellos estados de sabor son consistentes con la teoría cuántica de campos y por tanto ideales para nuestra implementación de la función de onda de sabor

definida en la ecuación (1.34) del primer capítulo,

$$\psi_{\rho \rightarrow \sigma}^n(x) = \langle 0 | \hat{\Psi}_\sigma(x) | \nu_\rho(n, s) \rangle. \quad (3.1)$$

Así, partiendo de la descomposición del campo de sabor en ondas planas usado en la sección anterior para el campo de sabor,

$$\Psi_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, r} \left[u_{\mathbf{k}, i}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^r(t) + v_{-\mathbf{k}, i}^r(t) \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^{r\dagger}(t) \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (i, \sigma) = (1, \alpha), (2, \beta), \quad (3.2)$$

con $u_{\mathbf{k}, i}^r(t) = u_{\mathbf{k}, i}^r e^{-i\omega_i t}$, $v_{-\mathbf{k}, i}^r(t) = v_{-\mathbf{k}, i}^r e^{i\omega_i t}$ y utilizando la definición de función de onda de sabor, así como los estados de Bogoliubov, obtenemos

$$\begin{aligned} \psi_{\rho \rightarrow \sigma}^n(x) &= \langle 0 | \hat{\Psi}_\sigma(x) | \nu_\rho(n, s) \rangle, \\ &= \sum_{\mathbf{k}', r} \int \frac{u_{\mathbf{k}', i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{n, \rho}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}', r} \int \frac{v_{-\mathbf{k}', i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{n, \rho}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle, \\ &= \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}', r} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^j \int \frac{u_{\mathbf{k}', i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}', r} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^j \int \frac{v_{-\mathbf{k}', i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde hemos usado las relaciones $\alpha_{n, \rho}^s(t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^{*j} \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^s(t)$, con $(\rho, j) = (e, 1), (\mu, 2)$ para pasar de la segunda a la tercera igualdad en la ecuación anterior.

En este capítulo, al igual que en el anterior, hemos partido de un campo que se ha cuantizado en una caja y cuyos espinores son soluciones de la ecuación de Dirac para las masas físicas m_i .

Si notamos que

$$\alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) = \{ \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t), \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) \} - \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t), \quad (3.4)$$

$$\beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) = \{ \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t), \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) \} - \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t), \quad (3.5)$$

y que, por definición $\alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^s(0) | 0 \rangle = \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^s(0) | 0 \rangle = 0$, donde $| 0 \rangle \equiv | 0 \rangle_{e, \mu}$, entonces,

los anteriores valores esperados en la ecuación (3.3) son

$$\langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}',\sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \{ \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \}, \quad (3.6)$$

$$\langle 0 | \beta_{-\mathbf{k}',\sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \{ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \}, \quad (3.7)$$

y reemplazando estas cantidades en la expresión (3.3), podemos efectuar directamente la suma sobre \mathbf{k}' , \mathbf{r} con lo cual obtenemos

$$\psi_{\rho \rightarrow \sigma}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^j \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{V}} \left[u_{\mathbf{k},i}^s \{ \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \} + v_{-\mathbf{k},i}^s \{ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \} \right]. \quad (3.8)$$

La probabilidad será el cuadrado de esta cantidad integrada sobre todo el espacio, es decir

$$\begin{aligned} P_{\rho \rightarrow \sigma}^n(t) &= \int d^3x |\psi_{\rho \rightarrow \sigma}^n(x)|^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^j|^2 \left[\left| \{ \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \} \right|^2 + \left| \{ \beta_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \} \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

y la probabilidad de momento definido será

$$P_{\rho \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) = \left| \{ \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \} \right|^2 + \left| \{ \beta_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \} \right|^2. \quad (3.10)$$

Por sencillez analizaremos la probabilidad de momento definido, es decir su correcta normalización y la reproducción en términos de probabilidad de la condición inicial de sabor.

En lo que sigue debemos tener en cuenta que, dada la expansión del campo que hemos utilizado en (3.2), los operadores de creación (aniquilación), llevan toda la dependencia temporal del campo, y por tanto coinciden con los operadores definidos en la ecuación (2.46). Así, utilizando estos operadores, encontramos para los anticonmutadores, lo siguiente

$$\begin{aligned} \{ \alpha_{\mathbf{k}',e}^r(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[\cos^2 \theta + \sin^2 \theta e^{i\omega_1 t} (|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 e^{-i\omega_2 t} + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\omega_2 t}) \right], \\ \{ \beta_{\mathbf{k}',e}^{r\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[2i\epsilon^s |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \sin^2 \theta \sin(\omega_2 t) e^{-i\omega_1 t} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \{ \alpha_{\mathbf{k}',\mu}^r(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[\sin \theta \cos \theta |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| e^{-i\omega_1 t} (e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_2 t}) \right], \\ \{ \beta_{\mathbf{k}',\mu}^{r\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[\epsilon^s \sin \theta \cos \theta |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| e^{-i\omega_1 t} (e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A partir de estas cantidades computamos las probabilidades de transición para un neutrino inicialmente del electrón y obtenemos por tanto

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}^{\mathbf{k}}(t) &= 1 - \sin^2(2\theta) \left[|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \right], \\ P_{e \rightarrow \mu}^{\mathbf{k}}(t) &= \sin^2(2\theta) \left[|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

la cual está claramente normalizada, es decir, para todo t , se cumple que

$$P_{e \rightarrow e}^{\mathbf{k}}(t) + P_{e \rightarrow \mu}^{\mathbf{k}}(t) = 1. \quad (3.14)$$

La generalización a paquetes de onda es inmediata

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}^n(t) + P_{e \rightarrow \mu}^n(t) &= \sum_{\mathbf{k}} |f_{n,\mathbf{k}}^1|^2 \left(P_{e \rightarrow e}^{\mathbf{k}}(t) + P_{e \rightarrow \mu}^{\mathbf{k}}(t) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} |f_{n,\mathbf{k}}^1|^2 \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Esta definición trae consigo la correcta reproducción de las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}^n(0) &= 1, \\ P_{e \rightarrow \mu}^n(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

las cuales eran satisfechas solo de manera aproximada usando los estados de Pontecorvo (1.50). Esto implica que, si se utiliza como definición de estados de sabor la dada en (2.36), podemos incluir el carácter de espín de los neutrinos en la descripción de las oscilaciones de sabor y obtener con ello probabilidades de transición correctamente normalizadas y en total acuerdo con las condiciones iniciales.

3.2 Independencia en parámetro de masa

Tal como se comentó en el capítulo anterior, dado que la probabilidad de transición es un observable físico, esta debe ser independiente del parámetro de masa

que se escoja en la parametrización del campo de sabor, y por ende, de los distintos operadores de creación que se obtienen con las distintas elecciones [29, 31].

Para mostrar este hecho, debemos computar nuestras fórmulas de oscilación de probabilidad usando la base más general posible, es decir la base de los operadores $\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)$ y $\tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)$, (esta notación es la opuesta a la usada en el capítulo anterior) y llegar, a través de la relación (2.39), a una expresión idéntica a la obtenida con los operadores específicos $\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)$ y $\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)$.

Partimos de

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{\sigma,j}\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) + i\lambda_{\sigma,j}\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \\ i\lambda_{\sigma,j}\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) + \rho_{\sigma,j}\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

y utilizando esta expresión, calculamos la probabilidad de transición de un neutrino del electrón a un neutrino de sabor σ

$$\tilde{P}_{e \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) = \left| \left\{ \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t), \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 + \left| \left\{ \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t), \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2, \quad (3.18)$$

computando primero los distintos conmutadores de la base particular, encontramos algunas relaciones entre ellos que se resumen en

$$\begin{aligned} \{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)\} &= -\{\beta_{-\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0), \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)\}^*, \\ \{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)\} &= -\{\beta_{-\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0), \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)\}^*, \end{aligned} \quad (3.19)$$

así, puesto que los conmutadores de nuestro interés están dados en términos de estos conmutadores, podemos escribirlos teniendo en cuenta las relaciones anteriores, como

$$\begin{aligned} \{\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^s(0), \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)\} &= \rho_{e,j}\rho_{\sigma,j}\{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)\} + \lambda_{e,j}\lambda_{\sigma,j}\{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)\}^* \\ &\quad - i\rho_{e,j}\lambda_{\sigma,j}\{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)\} - i\rho_{\sigma,j}\lambda_{e,j}\{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)\}^*, \\ \{\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^s(0), \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)\} &= -i\rho_{e,j}\lambda_{\sigma,j}\{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)\} + i\rho_{\sigma,j}\lambda_{e,j}\{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t)\}^* \\ &\quad + \rho_{e,j}\rho_{\sigma,j}\{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)\} - \lambda_{e,j}\lambda_{\sigma,j}\{\alpha_{\mathbf{k},e}^s(0), \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)\}^*. \end{aligned}$$

A partir de este resultado, haciendo uso sucesivo de las identidades $\rho_{\sigma,j}^2 + \lambda_{\sigma,j}^2 = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t), \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 + \left| \left\{ \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t), \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 &= \left| \left\{ \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 \\ &\quad + \left| \left\{ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 \end{aligned}$$

y por tanto concluimos que

$$\tilde{P}_{e \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) = P_{e \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t), \quad (3.20)$$

es decir, que la probabilidad de oscilación de sabor es independiente del parámetro de masa que distingue las distintas bases en las que se puede expandir el campo de sabor.

El resultado obtenido en la ecuación (3.18), basado en la función de onda de sabor definida en (3.1), nos provee de una expresión para la probabilidad de transición de sabor en función del tiempo, que es idéntica a la obtenida por Blasone y Vitiello [25, 26, 32]. Esto indica que las dos descripciones deben ser equivalentes posiblemente a un nivel mayor es decir no solo la probabilidad total sino probablemente la densidad de probabilidad.

3.3 Densidades de probabilidad equivalentes

Blasone y Vitiello [25–38], definen la probabilidad de transición de un neutrino de un sabor α a un sabor σ , como el valor esperado del operador de carga al tiempo t respecto al estado inicial del neutrino a tiempo $t = 0$, es decir

$$\mathcal{P}_{\alpha \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) \equiv \langle \nu_{\alpha} | Q_{\sigma}(t) | \nu_{\alpha} \rangle \quad (3.21)$$

donde por simplicidad denotamos a $|\nu_{\alpha}(\mathbf{k}, s)\rangle$ por $|\nu_{\alpha}\rangle$, y $Q_{\sigma}(t)$ es el operador de carga de sabor al tiempo t , el cual está dado por

$$Q_{\sigma}(t) = \int d^3x : \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \Psi_{\sigma}(x) :, \quad (3.22)$$

donde $: A(x) := A(x) - \langle 0 | A(x) | 0 \rangle$ representa el orden normal de el operador $A(x)$.

La probabilidad de transición de sabor derivada de este formalismo es

$$\mathcal{P}_{\alpha \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) = \int d^3x \langle \nu_{\alpha} | : \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \Psi_{\sigma}(x) : | \nu_{\alpha} \rangle. \quad (3.23)$$

Comparando con nuestra expresión para la probabilidad de transición de sabor

$$P_{\alpha \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) = \int d^3x \langle \nu_{\alpha} | \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_{\sigma}(x) | \nu_{\alpha} \rangle, \quad (3.24)$$

vemos que no es posible determinar si estas probabilidades son o no equivalentes entre sí a simple vista, a pesar de que el cálculo explícito muestra que si lo son, puede verse en detalle en el apéndice (A.3). Si bien este resultado es general, desearíamos saber si las densidades de probabilidad son equivalentes entre sí.

Para ello, partimos de la densidad de probabilidad obtenida en el marco de la función de onda de sabor, para un neutrino que es inicialmente del electrón

$$\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle, \quad (3.25)$$

y luego de algunos cálculos mostraremos que esta cantidad es idéntica a

$$\langle \nu_e | : \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) : | \nu_e \rangle. \quad (3.26)$$

Utilizamos la identidad en términos de un conjunto completo de estados de neutrinos de sabor,

$$\mathbb{I} = |0\rangle\langle 0| + \sum_{\bar{\alpha}} \int d^3k |\nu_{\bar{\alpha}}\rangle\langle \nu_{\bar{\alpha}}| + \frac{1}{2} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \int d^3k d^3k' |\nu_{\bar{\alpha}}\nu_{\bar{\beta}}\rangle\langle \nu_{\bar{\alpha}}\nu_{\bar{\beta}}| + \dots, \quad (3.27)$$

donde hemos cambiado por el momento las sumas por integrales, al mismo tiempo introducimos los índices $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ que representan tanto a partículas como a antipartículas de sabor. Del segundo término en adelante podemos escribir sus contribuciones en función de los estados de masa como

$$\begin{aligned} \mathbb{I} = |0\rangle\langle 0| &+ \sum_{\bar{i}} \int d^3k G_\theta^{-1}(0) |\nu_{\bar{i}}\rangle\langle \nu_{\bar{i}}| G_\theta(0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\bar{i}, \bar{j}} \int d^3k d^3k' G_\theta^{-1}(0) |\nu_{\bar{i}}\nu_{\bar{j}}\rangle\langle \nu_{\bar{i}}\nu_{\bar{j}}| G_\theta(0) + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde $|0\rangle\langle 0|$, corresponde al vacío de sabor y \bar{i}, \bar{j} son índices que representan tanto a partículas como a antipartículas de masa.

Ahora despejamos de la ecuación (3.28) el operador $|0\rangle\langle 0|$ para incluirlo en la

expresión (3.25)

$$\begin{aligned}
\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle &= \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle \\
&- \sum_{\bar{i}} \int d^3 k \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_{\bar{i}} \rangle \langle \nu_{\bar{i}} | G_\theta(0) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle \\
&- \frac{1}{2} \sum_{\bar{i}, \bar{j}} \int d^3 k d^3 k' \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_{\bar{i}} \nu_{\bar{j}} \rangle \langle \nu_{\bar{i}} \nu_{\bar{j}} | G_\theta(0) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle \\
&- \dots
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Analizamos de la ecuación (3.29) los términos que vienen del desarrollo de la identidad adicionales al término $|0\rangle\langle 0|$, que tienen la forma genérica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!} \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n} \int d^3 k_1 \dots d^3 k_n \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) G_\theta^{-1}(0) [\dots |0\rangle\langle 0| \dots] G_\theta(0) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle \\
= \frac{1}{n!} \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n} \int d^3 k_1 \dots d^3 k_n |U_{\sigma,j} \langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \Psi_j(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_1 \rangle|^2,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

donde $[\dots |0\rangle\langle 0| \dots] = |\nu_{\bar{i}_1} \dots \nu_{\bar{i}_n}\rangle \langle \nu_{\bar{i}_1} \dots \nu_{\bar{i}_n}|$. En la expresión anterior hemos escribieron los campos de sabor en términos de los campos de masa y los estados de neutrino del electrón $|\nu_e\rangle$ en términos del estado $|\nu_1\rangle$.

El valor esperado

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \Psi_j(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_1 \rangle &= \sum_s \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} u_{\mathbf{k},j}^s(t) \langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \alpha_{\mathbf{k},j}^s G_\theta^{-1}(0) \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \\
&+ \sum_s \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} v_{-\mathbf{k},j}^s(t) \langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger} G_\theta^{-1}(0) \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Ahora bien, dado que $G_\theta^{-1}(0) = G_{-\theta}(0)$ y que $\alpha_{\mathbf{p},\sigma}^r(0) = G_\theta^{-1}(0) \alpha_{\mathbf{p},j}^r G_\theta(0)$, vemos que podemos escribir el resultado de actuar con los operadores G_θ sobre los operadores de creación y aniquilación (3.31) relacionándolos con sus respectivos operadores de sabor pero cambiando el signo de θ .

Es decir, partiendo de

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathbf{k},e}^r(t) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},1}^r + \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) \alpha_{\mathbf{k},2}^r + \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} \right) \\
\alpha_{\mathbf{k},\mu}^r(t) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},2}^r - \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \alpha_{\mathbf{k},1}^r - \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} \right) \\
\beta_{-\mathbf{k},e}^{r\dagger}(t) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} + \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} - \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^*(t) \alpha_{\mathbf{k},2}^r \right) \\
\beta_{-\mathbf{k},\mu}^{r\dagger}(t) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} - \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} + \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^*(t) \alpha_{\mathbf{k},1}^r \right), \quad (3.32)
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
G_{\theta}(0)\alpha_{\mathbf{k},1}^r(t)G_{\theta}^{-1}(0) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},1}^r - \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \alpha_{\mathbf{k},2}^r + \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} \right) \\
G_{\theta}(0)\alpha_{\mathbf{k},2}^r(t)G_{\theta}^{-1}(0) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},2}^r + \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \alpha_{\mathbf{k},1}^r - \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} \right) \\
G_{\theta}(0)\beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger}(t)G_{\theta}^{-1}(0) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} - \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} - \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \alpha_{\mathbf{k},2}^r \right) \\
G_{\theta}(0)\beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger}(t)G_{\theta}^{-1}(0) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} + \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} + \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \alpha_{\mathbf{k},1}^r \right). \quad (3.33)
\end{aligned}$$

A partir de estas relaciones vemos que de todos los términos representados por $\langle 0 | \dots \rangle$ solo contribuirán los que tienen dos operadores; de manera que puedan contraerse con los operadores restantes del valor esperado. De esta manera para identificar el conjunto de estados que contribuyen en cada caso, desarrollamos cada término por separado, así

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \dots \rangle G_{\theta}(0)\alpha_{\mathbf{k},1}^s G_{\theta}^{-1}(0)\alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle &= \cos \theta \langle 0 | \dots \rangle \alpha_{\mathbf{k},1}^s \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \\
&\quad - \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \alpha_{\mathbf{k},2}^s \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \epsilon^s |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \right), \\
&= -\epsilon^s \sin \theta |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle, \\
\langle 0 | \dots \rangle G_{\theta}(0)\beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} G_{\theta}^{-1}(0)\alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle &= \cos \theta \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \\
&\quad - \sin \theta |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle, \\
\langle 0 | \dots \rangle G_{\theta}(0)\alpha_{\mathbf{k},2}^s G_{\theta}^{-1}(0)\alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle &= -\epsilon^s \sin \theta |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle, \\
\langle 0 | \dots \rangle G_{\theta}(0)\beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} G_{\theta}^{-1}(0)\alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle &= \cos \theta \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \\
&\quad + \sin \theta |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle, \quad (3.34)
\end{aligned}$$

definimos la amplitud

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\sigma &\equiv U_{\sigma,j}\langle 0|\cdots\rangle G_\theta(0)\Psi_j(x)G_\theta^{-1}(0)|\nu_1\rangle \\ &= U_{\sigma,1}\langle 0|\cdots\rangle G_\theta(0)\Psi_1(x)G_\theta^{-1}(0)|\nu_1\rangle + U_{\sigma,2}\langle 0|\cdots\rangle G_\theta(0)\Psi_2(x)G_\theta^{-1}(0)|\nu_1\rangle\end{aligned}$$

y desarrollando los campos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\sigma &= \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} [U_{\sigma_2} \cos \theta v_{-\mathbf{k},2}^s(t) - U_{\sigma_1} \sin \theta (\epsilon^s |\mathcal{V}_\mathbf{k}| u_{\mathbf{k},1}^s(t) + |\mathcal{U}_\mathbf{k}| v_{-\mathbf{k},1}^s(t))] \\ &\quad \times \langle 0|\cdots\rangle \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle \\ &+ \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} [U_{\sigma_1} \cos \theta v_{-\mathbf{k},1}^s(t) - U_{\sigma_2} \sin \theta (\epsilon^s |\mathcal{V}_\mathbf{k}| u_{\mathbf{k},2}^s(t) - |\mathcal{U}_\mathbf{k}| v_{-\mathbf{k},2}^s(t))] \\ &\quad \times \langle 0|\cdots\rangle \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle\end{aligned}\quad (3.35)$$

escrito de esta forma el cuadrado de esta amplitud se divide en dos, dado que los estados $\langle 0|\cdots\rangle$ seleccionan solo una de las dos partes de la amplitud, de esta manera podemos computar el término de interés, que como dijimos consiste de contribuciones de dos estados que son $\langle 0|\alpha_{\mathbf{k}',1}^r \beta_{-\mathbf{k}'',2}^s$ y $\langle 0|\alpha_{\mathbf{k}',1}^r \beta_{-\mathbf{k}'',1}^s$ y con ello obtenemos

$$\frac{1}{2} \sum_{\bar{i}, \bar{j}} \int d^3k' d^3k'' \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_{\bar{i}} \nu_{\bar{j}} \rangle \langle \nu_{\bar{i}} \nu_{\bar{j}} | G_\theta(0) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle = \sum_s [\delta(0)]^2. \quad (3.36)$$

Lo cual permite obtener la siguiente relación

$$\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle = \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle - \sum_s [\delta(0)]^2, \quad (3.37)$$

pero la densidad de probabilidad de Blasone y Vitiello esta definida con el orden normal del producto de los campos (3.26), el cual está relacionado con el producto sin orden normal por

$$\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle = \langle \nu_e | : \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) : | \nu_e \rangle + \sum_s [\delta(0)]^2, \quad (3.38)$$

y uniendo estos dos resultados, se deduce que en efecto las densidades de probabilidad definida con la densidad de carga y con la función de onda coinciden entre sí, es decir

$$\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_{\nu_\sigma}(x) | \nu_e \rangle = \langle \nu_e | : \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) : | \nu_e \rangle. \quad (3.39)$$

3.4 Dependencia espacial de las oscilaciones

Dentro del contexto del formalismo del valor esperado de la carga de sabor, se contempló la posibilidad de obtener una probabilidad dependiente de la distancia utilizando el valor esperado de la corriente [37]. Sin embargo, la conexión entre carga y corriente no es clara debido a la ausencia de una ecuación de continuidad que las relacione luego esta prescripción y la de la carga son independientes razón por la cual la conversión tiempo a distancia sigue siendo insatisfactoria en este formalismo. Por otra parte, dentro del contexto de la amplitud de probabilidad es posible pensar en la función de onda como un paquete localizado que se propaga, de manera que haciendo las mismas aproximaciones presentadas en el capítulo (1.3) y usando los coeficientes definidos en (1.68) obtenemos una probabilidad dependiente de la distancia

$$\begin{aligned}
P_{e \rightarrow e}^n(L) &= 1 - \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \\
&+ \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left[\cos(c_{12}\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}|^2 |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \cos(a_{12}\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}) \right. \\
&\quad + \cos(\tilde{c}_{12}\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}|^2 |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \cos(\tilde{a}_{12}\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}) \\
&\quad - \sin(c_{12}\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}|^2 |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin(a_{12}\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}) \\
&\quad \left. - \sin(\tilde{c}_{12}\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}|^2 |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin(\tilde{a}_{12}\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}) \right], \\
P_{e \rightarrow \mu}^n(L) &= \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \\
&- \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left[\cos(c_{12}\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}|^2 |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \cos(a_{12}\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}) \right. \\
&\quad + \cos(\tilde{c}_{12}\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}|^2 |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \cos(\tilde{a}_{12}\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}) \\
&\quad - \sin(c_{12}\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}|^2 |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin(a_{12}\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}) \\
&\quad \left. - \sin(\tilde{c}_{12}\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}|^2 |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin(\tilde{a}_{12}\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}) \right]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

donde por simplicidad hemos utilizado las siguientes abreviaciones $a_{12} = a_1 - a_2$, $\tilde{a}_{12} = a_1 + a_2$, $c_{12} = c_1 - c_2$ y $\tilde{c}_{12} = c_1 + c_2$. La cantidad $\mathbf{K} = \mathbf{K}_n$, es decir el número de onda correspondiente al máximo del paquete.

Estas probabilidades pueden reescribirse de manera aproximada si cambiamos la suma sobre \mathbf{k} por una integral sobre la variable continua \mathbf{p} , cambiando respectivamente los paquetes, de tal manera que estén normalizados a la unidad, y usando como caso particular paquetes gaussianos, bajo las mismas suposiciones tenidas en cuenta en la obtención de la ecuación (1.73).

Así, utilizando los mismos paquetes introducidos en el capítulo anterior

$$|f_e(n, \mathbf{p})|^2 = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{P})^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.41)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}^B(L) &\cong 1 - \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left(1 - |\mathcal{U}_{\mathbf{P}}|^2 \cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} \right. \\ &\quad \left. - |\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2 \cos(2\pi L/\bar{\lambda}) e^{-L^2/\bar{L}_{coh}^2} \right), \\ P_{e \rightarrow \mu}^B(L) &\cong \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left(1 - |\mathcal{U}_{\mathbf{P}}|^2 \cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} \right. \\ &\quad \left. - |\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2 \cos(2\pi L/\bar{\lambda}) e^{-L^2/\bar{L}_{coh}^2} \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde λ y $\bar{\lambda}$ son las longitudes de onda de las funciones armónicas que componen las probabilidades de transición, y L_{coh} y \bar{L}_{coh} , son las longitudes de coherencia de cada una de estas componentes. Las cantidades λ y L_{coh} están dadas en la ecuación (1.74) y las cantidades restantes en términos de los coeficientes ya definidos, están dadas por

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{(\bar{a}_{12} + \bar{c}_{12})|\mathbf{P}|}, \quad \bar{L}_{coh} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma \bar{a}_{12}} \quad (3.43)$$

o bien explícitamente todas ellas

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{4\pi|\mathbf{P}|}{(m_1^2 - m_2^2)}, & L_{coh} &= \frac{2\sqrt{2}\omega_{\mathbf{P}1}\omega_{\mathbf{P}2}}{\sigma(m_1^2 - m_2^2)}, \\ \bar{\lambda} &= \frac{4\pi|\mathbf{P}|}{(\omega_{\mathbf{P}1} + \omega_{\mathbf{P}2})^2}, & \bar{L}_{coh} &= \frac{2\sqrt{2}\omega_{\mathbf{P}1}\omega_{\mathbf{P}2}}{\sigma(\omega_{\mathbf{P}1} + \omega_{\mathbf{P}2})^2}.\end{aligned}\quad (3.44)$$

En la evaluación de la integral sobre \mathbf{p} , hemos considerado, como en el capítulo uno, que $|\mathcal{U}_{\mathbf{p}}|^2$ y $|\mathcal{V}_{\mathbf{p}}|^2$ son aproximadamente iguales a $|\mathcal{U}_{\mathbf{P}}|^2$ y $|\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2$, puesto que estas funciones son muy suaves dentro del rango de integración en el que la distribución es significativamente diferente de cero.

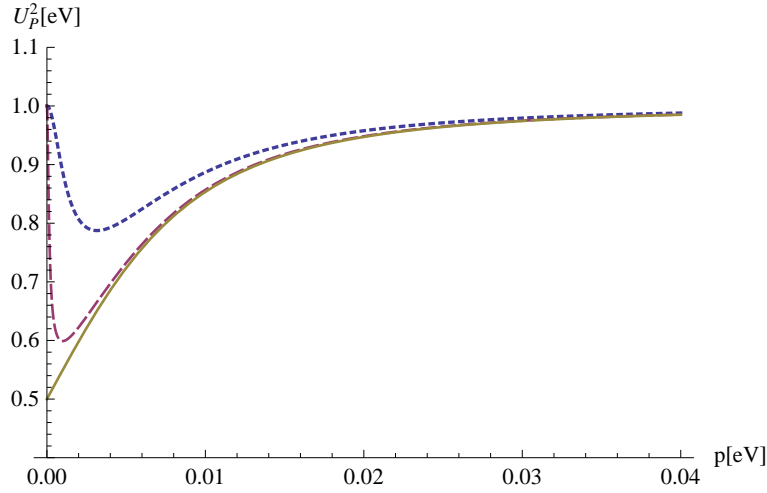


Figura 3.1: $|\mathcal{U}_{\mathbf{p}}|^2$ como función de $|\mathbf{p}|$, en puntos para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 10^{-3}[eV]$, línea a trazos para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 10^{-4}[eV]$, línea continua para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 0[eV]$.

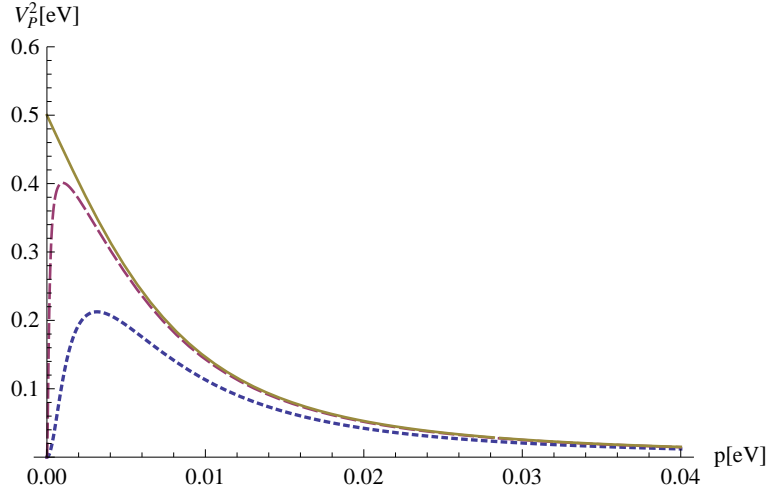


Figura 3.2: $|\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2$ como función de $|\mathbf{p}|$, en puntos para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 10^{-3}[eV]$, línea a trazos para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 10^{-4}[eV]$, línea continua para $m_2 = 10^{-2}[eV]$ y $m_1 = 0[eV]$.

En las figuras 3.1 y 3.2, mostramos el comportamiento de estas funciones en rangos de interés para distintos valores de las masas m_1 y m_2 . A partir de las cuales podemos ver, como ya lo habíamos anticipado, que estas funciones se acercan a sus valores límites 1 y 0 respectivamente, conforme $|\mathbf{p}|$ se va alejando del valor de la mayor de las masas presentes en la mezcla. Esto nos muestra claramente que en la fórmula de probabilidad de oscilación de sabor el segundo término se ve casi completamente suprimido por el factor $|\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2$. Por otra parte notamos también que para m_1 ó m_2 muy pequeños, la función difiere en mayor grado de sus valores asintóticos.

Con el propósito de visualizar el comportamiento completo de la expresión (3.42) y compararla al mismo tiempo con la expresión estándar, presentamos en la figura 3.3 la probabilidad de transición de un neutrino del electrón a un neutrino del múon para un momento no ultrarelativista. Igualmente computamos en la figura 3.4, tanto la diferencia entre este y la expresión estándar como la razón entre su diferencia y la probabilidad estándar, para los mismos parámetros usados tanto en la figura 1.2 como en la figura 3.3.

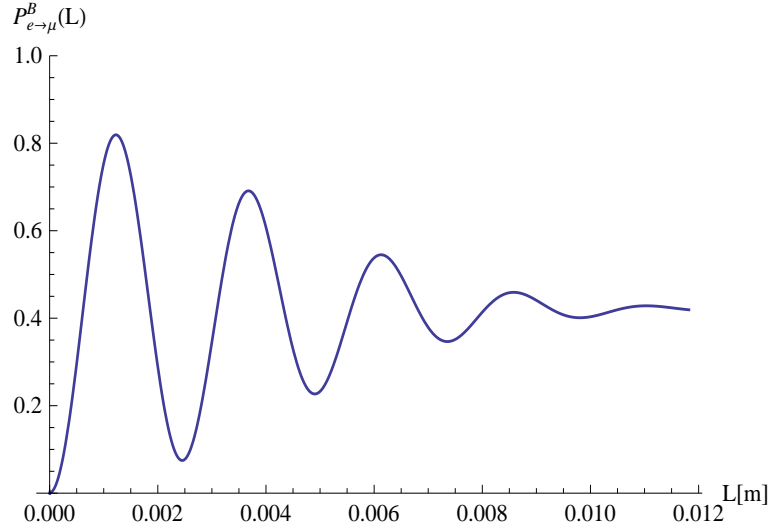


Figura 3.3: $P_{e \rightarrow \mu}^B(L)$ con $\sigma = 0,01[eV]$, $m_2 = 10^{-2}[eV]$, $m_1 = 0[eV]$ y $P = 0,1[eV]$.

Las gráficas de la figura 3.3 muestran un comportamiento oscilatorio con una amplitud que decae con la distancia, de la manera descrita por el exponencial $\exp\{-L^2/L_{coh}^2\}$. Esto se debe a que el factor $|\mathcal{U}_{\mathbf{P}}|^2$ que acompaña a este término para los valores de $|\mathbf{P}|$ considerados, es aproximadamente igual a 1 y por tanto el factor $|\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2 \approx 0$. Esto quiere decir, que el término con longitud de oscilación $\bar{\lambda}$ esta fuertemente suprimido respecto al término con oscilación λ y por tanto su efecto en la probabilidad es muy pequeño.

Por otra parte, de los valores explícitos para λ , $\bar{\lambda}$, L_{coh} y \bar{L}_{coh} notamos que

$$\bar{\lambda} < \lambda, \quad \bar{L}_{coh} < L_{coh}, \quad \text{para } |\mathbf{P}| > m_1, m_2, \quad (3.45)$$

y

$$\bar{\lambda} \ll \lambda, \quad \bar{L}_{coh} \ll L_{coh}, \quad \text{para } |\mathbf{P}| \gg m_1, m_2. \quad (3.46)$$

A partir de ello concluimos que el término oscilante adicional, obtenido del tratamiento con teoría de campos, es altamente oscilatorio y decae muy rápidamente en el caso menos ultrarelativista posible consistente con el fenómeno de oscilación y que adicionalmente es suprimido por el factor $|\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2$, lo cual lo hace casi imposible de detectar con los experimentos actuales.

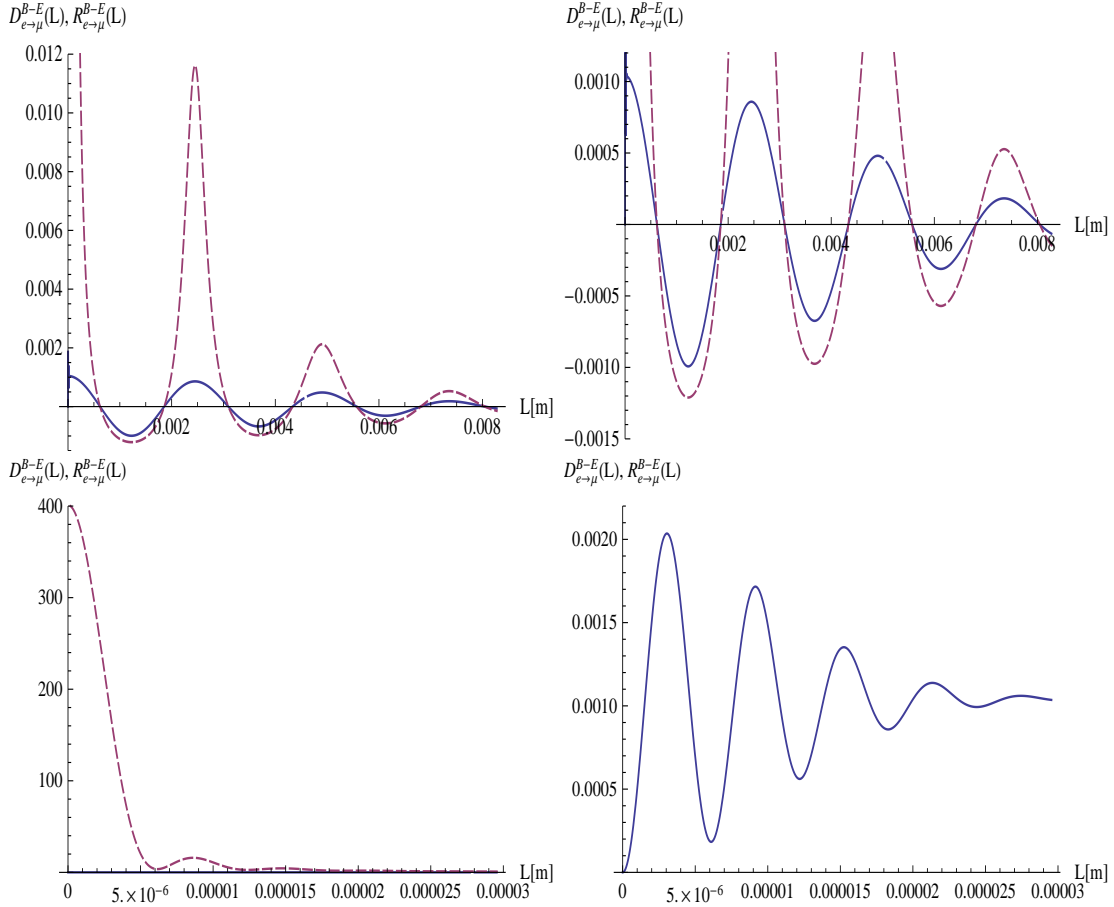


Figura 3.4: $D_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L)$ en línea continua , $R_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L)$ en línea a trazos, con $m_2 = 10^{-2}[eV]$, $m_1 = 0[eV]$ y $P = 0,1[eV]$. Cada una de las gráficas corresponden a rangos y dominios distintos.

Por otra parte, la probabilidad obtenida en este capítulo difiere tanto de la probabilidad estándar como de la obtenida en el capítulo 1, en el factor que pondera al término lentamente oscilante y por tanto su diferencia con la primera no solo contiene el término altamente oscilante sino también a uno de oscilación lenta, esto podemos verlo de la gráficas superiores en la figura 3.4, en donde hemos representado las siguientes cantidades de interés

$$D_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L) \equiv P_{e \rightarrow \mu}^B(L) - P_{e \rightarrow \mu}^E(L), \quad R_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L) \equiv \frac{P_{e \rightarrow \mu}^B(L) - P_{e \rightarrow \mu}^E(L)}{P_{e \rightarrow \mu}^E(L)}, \quad (3.47)$$

en el rango de distancias para el cual las oscilaciones lentas son apreciables. En estas gráficas observamos también que en los máximos de la diferencia entre pro-

babilidades (por ejemplo el máximo del intervalo (0.002[m]-0.003[m])), la razón porcentual es significativamente grande, es decir alcanza hasta un uno por ciento respecto del valor estándar.

Por otra parte, en la región en que la oscilación rápida es visible, encontramos un comportamiento más interesante. Vemos que la diferencia entre las probabilidades tiene el mismo comportamiento de la probabilidad de la figura (3.3), pero ahora en un rango mucho más pequeño, y la razón entre esta diferencia y la probabilidad estándar tiene un comportamiento muy interesante a distancias muy pequeñas, en efecto esta razón tiende a 400 cuando la distancia tiende a cero para los parámetros utilizados. En general, es posible calcular este límite el cual es

$$\lim_{L \rightarrow 0} R_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L) = |\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2 \left[\frac{\bar{L}_{coh}^{-2} + (2\pi/\bar{\lambda})^2/2}{L_{coh}^{-2} + (2\pi/\lambda)^2/2} \right] \quad (3.48)$$

que para los valores utilizados es del orden de 400, lo que indica que a distancias muy pequeñas y con una excelente resolución para medir probabilidades, sería posible (al menos en principio) determinar si la expresión presentada en este trabajo es o no la correcta probabilidad que describe las oscilaciones de neutrinos entre los distintos sabores.

3.4.1. límite ultrarelativista

En el límite ultrarelativista la fórmula de probabilidad derivada de este formalismo se puede escribir como la fórmula de probabilidad estándar más correcciones del orden $O(m_i^2/|\mathbf{P}|^2)$ que daremos explícitamente, para ello notamos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}_{\mathbf{P}}| &\cong 1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{8|\mathbf{P}|^2} + O((m_i/|\mathbf{P}|)^4) \\ |\mathcal{U}_{\mathbf{P}}|^2 &\cong 1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{4|\mathbf{P}|^2} + O((m_i/|\mathbf{P}|)^4) \\ |\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2 &\cong \frac{(m_2 - m_1)^2}{4|\mathbf{P}|^2} + O((m_i/|\mathbf{P}|)^4) \end{aligned} \quad (3.49)$$

luego desarrollando estos términos en la ecuación (3.42), obtenemos

$$\begin{aligned}
 P_{e \rightarrow e}^B(L) &\cong P_{e \rightarrow e}^E(L) - \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \frac{(m_2 - m_1)^2}{4|\mathbf{P}|^2} \left[\cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} \right. \\
 &\quad \left. - \cos(2\pi L/\bar{\lambda}) e^{-L^2/\bar{L}_{coh}^2} \right] + O((m_i/|\mathbf{P}|)^4), \\
 P_{e \rightarrow \mu}^B(L) &\cong P_{e \rightarrow \mu}^E(L) + \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \frac{(m_2 - m_1)^2}{4|\mathbf{P}|^2} \left[\cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} \right. \\
 &\quad \left. - \cos(2\pi L/\bar{\lambda}) e^{-L^2/\bar{L}_{coh}^2} \right] + O((m_i/|\mathbf{P}|)^4),
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

CONCLUSIONES

El estudio de las oscilaciones de neutrinos ha tenido reciente interés debido a las distintas investigaciones que han dado lugar a la identificación de un espacio de Fock de sabor no equivalente unitariamente al espacio de Fock de los estados de los neutrinos masivos [25–39], y a distintos tratamientos en donde se han comparado derivaciones basadas en Teoría Cuántica de Campos con aquellas de la Mecánica Cuántica [24, 53], entre otros. Lo cual muestra en términos generales la ausencia de un acuerdo global respecto a las distintas presentaciones existentes hasta el momento de la descripción del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos. Esta ha sido la motivación principal de este trabajo el cual tiene como objetivo aportar elementos que ayuden a una construcción completa y autoconsistente de tal descripción.

Para cumplir con nuestro objetivo, hemos realizamos un estudio de algunos aspectos de las oscilaciones de neutrinos en el vacío, basándonos en la teoría cuántica de campos para la construcción de estados localizados. En dicho estudio adoptamos dos perspectivas distintas; en la primera de ellas se adoptó una definición *ad hoc* de los estados de sabor utilizada ampliamente en la literatura e introducida inicialmente por Pontecorvo, ecuación (1.26), mientras que en la segunda se obtuvieron los estados de sabor a partir de los operadores de creación de sabor derivados de un tratamiento de transformaciones de Bogoliubov, ecuación (2.31). Como fruto de esta investigación introdujimos algunos ingredientes adicionales respecto a los dados en trabajos anteriores, entre los cuales podemos mencionar los siguientes:

- El desarrollo de los campos en términos de paquetes de onda necesaria para construir estados localizados como en el formalismo de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ).
- La prescripción de uso de la función de onda de sabor en el cálculo de valores esperados de observables físicos.
- La demostración de la equivalencia entre las probabilidades derivadas de amplitudes de probabilidad y de valores esperados de cargas.

Nuestro estudio se dividió en tres capítulos:

En el capítulo uno, se presentó una derivación de los operadores de creación asociados a partículas relativistas localizadas y de espín $1/2$, procedente de la expansión en paquetes de onda de los campos. A partir de ello, concluimos que desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos, la identificación de los coeficientes del desarrollo de un campo, como operadores de creación y aniquilación, es posible sólo si las funciones que le acompañan forman un conjunto completo de funciones ortogonales. Tal conjunto se puede construir partiendo del desarrollo del campo en autoestados de momento, a través de un conjunto completo de paquetes ortogonales. Como ejemplo de lo anterior, construimos tales paquetes siguiendo algunas consideraciones físicas y en total acuerdo con algunas de las posibles condiciones de producción de neutrinos.

A continuación, se llevó a cabo un estudio de los estados de Pontecorvo localizados y de las funciones de onda de sabor asociadas a los mismos, partiendo de sus correspondientes objetos masivos, ecuación (1.34). De este estudio concluimos que, es posible utilizar paquetes arbitrarios en la modelación de los neutrinos masivos y, aún así, obtener expresiones sencillas y exactas para el cálculo de las probabilidades de transición de sabor, ecuación (1.52). Basados en esta expresión, encontramos que en $t = 0$ la carga leptónica de sabor no es conservada, hecho ya discutido en la literatura en otros tratamientos y que tiene su origen en cierta incompatibilidad existente entre los estados de Pontecorvo y la formulación relativista de estas oscilaciones, razón por la cual la expresión (I.19) carece de tal problema.

Una vez obtenida la expresión para la probabilidad de transición, la cual, dada la definición (1.36), depende del tiempo, iniciamos un análisis de la función de onda de sabor que se basó en el estudio del comportamiento de los máximos de la misma. Considerando a estos puntos como las posiciones de los neutrinos masivos e introduciendo una definición para la posición del neutrino de sabor (inspirada en la noción de centro de masa relativista), ecuación (1.61), encontramos una manera de transformar una expresión dependiente del tiempo a otra dependiente de la distancia recorrida por el neutrino de sabor. Tal procedimiento no es único, como se remarcó en el capítulo 1, y quizá no sea el más adecuado desde el punto de vista de la mecánica cuántica, dado que en ese contexto lo que consideramos como la posición de una partícula es su valor esperado, según lo cual la posición del neutrino de sabor resulta ser el promedio de las posiciones de los neutrinos masivos pesadas con los cuadrados de los coeficientes de la mezcla, ecuación (1.89). En este punto notamos una pequeña diferencia del orden de $O((m_i/|\mathbf{P}|)^4)$ en las cantidades medibles de las oscilaciones de neutrino, entre esta definición de valor esperado y la definición dada a priori. Por lo tanto, hasta este orden las fórmulas obtenidas son independientes de la definición que demos para la posición del neutrino de sabor.

Con el objeto de obtener una expresión cerrada y de fácil manejo, utilizamos paquetes gaussianos para la evaluación explícita de la probabilidad de transición, que se caracterizó por la presencia de un término de decaimiento exponencial y un término oscilatorio, ambos pesados por la función $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$, la cual incluye en dicha probabilidad el carácter espinorial de los neutrinos. A fin de analizar esta expresión se procedió a identificar las condiciones necesarias para mantener el patrón de oscilación de los neutrinos y, al mismo tiempo, permitieran tener un $|\mathbf{P}|$ para el cual $|\mathcal{U}_{12}(\mathbf{p})|$ tuviera un valor distintos de uno, en total acuerdo con las restricciones sobre los parámetros de oscilaciones de neutrinos. Siguiendo este criterio en el esquema de mezcla entre dos neutrinos, graficamos la probabilidad de transición de un neutrino del electrón a un neutrino del muón y de un neutrino del muón a uno del tau, para los valores óptimos de sus parámetros. A partir de ello encontramos que la diferencia entre nuestra probabilidad y la probabilidad estándar es de orden $O((m_i/|\mathbf{P}|)^2)$, luego bajo las condiciones analizadas tales diferencias son difícilmente detectables, especialmente al tratarse de diferencias

entre probabilidades.

En el capítulo dos, presentamos un resumen breve de algunos conceptos asociados a las transformaciones de Bogoliubov y de su aplicación en el problema de la correcta definición de los estados de sabor de la mezcla. Siguiendo algunos de los lineamientos de trabajos recientes en esta área, obtuvimos los operadores de creación localizados de partículas mezcladas en términos de sus correspondientes operadores masivos y de contracciones procedentes de la estructura espinorial de las partículas. Esto nos permitió definir de manera consistente los estados de neutrinos de sabor en total acuerdo con los trabajos de Blasone y Vitiello [26]. Mostramos que este problema admite una familia completa de tales operadores parametrizados por los coeficientes que se elijan como masas de sabor en la expansión del campo, y encontramos además que una y otra de estas posibilidades están relacionadas a través de un operador unitario que no influye en el cálculo de la probabilidad de transición, como físicamente se espera.

Finalmente en el capítulo tres, basados en las relaciones entre operadores y en la definición de función de onda de sabor, obtuvimos la probabilidad de transición de sabor dependiente del tiempo, la cual resultó ser igual a la obtenida por [26]. Dimos una prueba formal de la equivalencia entre nuestras expresiones para las densidades de probabilidad y aquellas dadas en los trabajos antes mencionados. Con ello, logramos conciliar el formalismo del operador de carga y el formalismo de la función de onda usados en la descripción de las oscilaciones de neutrinos, bajo la premisa de tomar los estados de Bogoliubov para la descripción de las partículas mezcladas. Este resultado constituye desde nuestra perspectiva, una contribución importante de el presente trabajo. En particular, el anterior enunciado muestra que en efecto la descripción en términos de funciones de onda (propia de la mecánica cuántica) es equivalente a una descripción en términos de operadores de campo (característica de la teoría cuántica de campos) y, por tanto una y otra son la misma siempre y cuando se asigne con la primera el estado de sabor adecuado.

La probabilidad de transición obtenida satisface correctamente la condición inicial de conservación de sabor, lo cual implica que los efectos de violación de sabor encontrados en el capítulo 1, se debían a la incorrecta definición de los estados de

sabor.

Como último punto, utilizamos la transformación de tiempo a distancia presentada en el capítulo uno para obtener la expresión de probabilidad dependiente de la distancia recorrida por el neutrino. La cual graficamos utilizando los lineamientos seguidos en el capítulo uno, al igual que hicimos con la diferencia entre esta y la probabilidad de transición estándar, así como la razón entre esta diferencia y la probabilidad estándar, figuras (3.3) y (3.4). De estas gráficas pudimos identificar la escala en las que aparece el término altamente oscilante, de lo cual concluimos finalmente que, en presencia del fenómeno de oscilación en la propagación de neutrinos de sabor los efectos de los términos adicionales provenientes de la teoría de campos son prácticamente indetectables. Sin embargo, observamos que la razón entre las diferencias de probabilidades y la probabilidad estándar a distancias del orden de la longitud de oscilación rápida, toma un valor de 400 para los parámetros utilizados, así que en experimentos que pudieran dar información de esta razón a tales distancias, nuestro tratamiento podría ser validado.

Nuestra formulación, en términos de funciones de onda tiene ciertas ventajas, por ejemplo, podemos calcular valores esperados de la manera descrita en la ecuación (1.84), y mediante un análisis en tiempo de la amplitud de probabilidad extraer información dinámica de la partícula. En particular, del valor esperado de la posición, y del procedimiento seguido en el capítulo 1, obtuvimos una probabilidad de transición dependiente de la distancia recorrida por el neutrino sin los problemas presentes en el tratamiento de la corriente de sabor seguido en [37] y discutidos en el capítulo 3.

APÉNDICES

A.1 Matriz de Mezcla

El procedimiento mostrado en la sección (Fenomenología) de la introducción de este trabajo, no es el más preciso, puesto que en realidad los parámetros libres de la matriz de mezcla no son los mismos que los de una matriz unitaria ($n \times n$) arbitraria la cual tendría n^2 parámetros, sino que los parámetros significativos son en realidad $(n - 1)^2$. La reducción de parámetros en el caso de neutrinos de Dirac (que es la suposición inicial del presente trabajo) se debe a que la matriz unitaria de mezcla entre neutrinos U , tiene una forma particular en términos de las matrices unitarias que relacionan a los campos leptónicos cargados izquierdos (e_L, μ_L, τ_L) y a los campos leptónicos neutros izquierdos ($\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$) antes y después del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil que llamaremos U_{lL} y $U_{\nu L}$. Dicha relación está dada por

$$U = U_{lL} U_{\nu L}^\dagger. \tag{A.1}$$

Cada una de las matrices unitarias $U_{\nu L}^\dagger$ y U_{lL} pueden eliminar n fases arbitrarias en la matriz producto U de manera independiente, mediante una redefinición de los campos izquierdos. De esta manera y considerando que una de estas fases es una fase global la cual siempre puede hacerse igual a uno, tenemos que el número de parámetros independientes de la matriz U es $n^2 - 2n - 1 = (n - 1)^2$. Por tanto, escribiendo a U como un matriz ortogonal de ($n \times n$) la cual está caracterizada por $n(n - 1)/2$ parámetros, requerimos de $(n - 1)(n - 2)/2$ fases adicionales.

Por ejemplo, para $n = 3$ la matriz U es

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

donde los distintos elementos tienen la misma interpretación dada en la introducción de este trabajo.

Si se extendiera el anterior argumento a neutrinos de Majorana el Número de fases para $n = 3$ se aumentaría en 2 y daría lugar por tanto a la expresión (I.6) de la introducción de este trabajo, la cual es

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ia} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ib} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Si consideramos ahora el caso $n = 2$, el número de parámetros será uno y por tanto basta con una rotación para describir a la matriz U , esto es

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

que es el caso que estudiamos en el presente trabajo.

A.2 Identidad de Baker-Campbell-Hausdorff

Partiendo de la relación de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (\text{A.5})$$

usando $\hat{A} = -\theta\hat{V}$ y $\hat{B} = \Psi_{1,2}(x)$, con $\hat{V} = \int d^3x(\Psi_1^\dagger(x)\Psi_2(x) - \Psi_2^\dagger(x)\Psi_1(x))$, y definiendo los campos como

$$\begin{aligned} \Psi_{\nu_e}(x) &\equiv e^{-\theta\hat{V}}\Psi_1(x)e^{\theta\hat{V}} \\ &= \Psi_1(x) - \theta[\hat{V}, \Psi_1(x)] + \frac{\theta^2}{2!}[\hat{V}, [\hat{V}, \Psi_1(x)]] \\ &\quad - \frac{\theta^3}{3!}[\hat{V}, [\hat{V}, [\hat{V}, \Psi_1(x)]]] + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\theta^n[\hat{V}[\hat{V} \dots [\Psi_1(x)] \dots]] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\nu_\mu}(x) &\equiv e^{-\theta\hat{V}}\Psi_2(x)e^{\theta\hat{V}} \\
 &= \Psi_2(x) - \theta[\hat{V}, \Psi_2(x)] + \frac{\theta^2}{2!}[\hat{V}, [\hat{V}, \Psi_2(x)]] \\
 &\quad - \frac{\theta^3}{3!}[\hat{V}, [\hat{V}[\hat{V}, \Psi_2(x)]]] + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\theta^n[\hat{V}[\hat{V}\dots[\Psi_2(x)]\dots]] \quad (\text{A.7})
 \end{aligned}$$

se obtiene, luego del cálculo de un análisis recursivo con los conmutadores

$$[\hat{V}, \Psi_1(x)] = -\Psi_2(x), \quad [\hat{V}, \Psi_2(x)] = \Psi_1(x) \quad (\text{A.8})$$

$$[\hat{V}, [\hat{V}, \Psi_1(x)]] = -\Psi_1(x) \quad [\hat{V}, [\hat{V}, \Psi_2(x)]] = -\Psi_2(x) \quad (\text{A.9})$$

que tal definición es equivalente a una transformación de rotación entre los campos

$$\Psi_{\nu_e}(x) = \cos\theta\Psi_1(x) + \sin\theta\Psi_2(x) \quad (\text{A.10})$$

$$\Psi_{\nu_\mu}(x) = -\sin\theta\Psi_1(x) + \cos\theta\Psi_2(x) \quad (\text{A.11})$$

A.3 Operador de carga y Probabilidad

Notando que en efecto la noción de carga (cantidad conservada) en Teoría de Campos surge de alguna simetría presente en el lagrangiano de la teoría considerada, Blason opta por tomar a esta como el elemento natural con el cual construir lo que posteriormente daría lugar a Probabilidades de las oscilaciones de neutrinos.

$$\begin{aligned}
 Q_\sigma(t) &= \int d^3x : \Psi_\sigma^\dagger(x)\Psi_\sigma(x) : \\
 Q_\sigma(t) &= \sum_{n,r} \left(\alpha_{n,\sigma}^{r\dagger}(t)\alpha_{n,\sigma}^r(t) - \beta_{-n,\sigma}^{r\dagger}(t)\beta_{-n,\sigma}^r(t) \right), \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

con $\sigma = e, \mu$. Los autoestados de este operador así definido en $t = 0$ son los estados difusos $|\nu_\sigma(n, s)\rangle$, esto es, $Q_\sigma(0)|\nu_\sigma(n, s)\rangle = |\nu_\sigma(n, s)\rangle$ y $Q_\sigma(0)|\tilde{\nu}_\sigma(n, s)\rangle = -|\tilde{\nu}_\sigma(n, s)\rangle$, donde $|\tilde{\nu}_\sigma(n, s)\rangle = \beta_{n,\sigma}^{\dagger s}|0\rangle$.

La manera como este objeto iba a representar el cambio de la naturaleza de sabor del neutrino conforme este se propagaba no fue inmediata sino que requirió un trabajo sistemático de las propiedades que esta cantidad de interés debía satisfacer. Así Blason definió la probabilidad de transición de un neutrino de un

sabor a otro como el valor esperado del operador de carga al tiempo t respecto al estado inicial de aquel neutrino a tiempo $t = 0$, es decir:

$$\mathcal{P}_{e \rightarrow \sigma}^n(t) \equiv \langle \nu_e(n, s) | Q_\sigma(t) | \nu_e(n, s) \rangle \quad (\text{A.13})$$

de manera que al igual que la probabilidad de que el sabor de un neutrino permanezca siendo el mismo cuando no ha transcurrido ningún intervalo de tiempo $t = 0$ debe ser 1, así mismo el valor esperado de el operador de carga de un sabor tomado respecto al estado propido de ese mismo sabor a $t = 0$ es 1, es decir

$$\langle \nu_\sigma(n, s) | Q_\sigma(0) | \nu_\sigma(n, s) \rangle = 1. \quad (\text{A.14})$$

El operador de carga en la base de ondas planas tiene la misma forma que en la base de paquetes de onda y por tanto los estados de sabor y momento definido son autoestados de este operador.

$$Q_\sigma(t) = \sum_{\mathbf{k}, r} \left(\alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^r(t) - \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^{r\dagger}(t) \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^r(t) \right). \quad (\text{A.15})$$

Partiendo de esta versión es fácil probar que el valor esperado del operador de carga a cualquier tiempo es cero, ${}_{e, \mu} \langle 0 | Q_\sigma(t) | 0 \rangle_{e, \mu} = 0$. La prueba de ello se puede obtener de forma directa llevando tanto los operadores como el vacío a la base de masa, y observando que en este punto el valor esperado en el vacío del término $\alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^r(t)$ es exactamente igual al del término $\beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^{r\dagger}(t) \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^r(t)$, por lo que el valor esperado del operador de carga es idénticamente cero (la prueba explícita de este enunciado se encuentra en el apéndice (A.4)).

De forma explícita la probabilidad de que un neutrino inicialmente del electrón sea detectado al tiempo t como un neutrino de sabor σ es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{e \rightarrow \sigma}^n(t) &= \langle \nu_e(n, s) | Q_\sigma(t) | \nu_e(n, s) \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}', r} \left(\langle 0 | \alpha_{n, e}^s(0) \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{n, e}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle 0 | \alpha_{n, e}^s(0) \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{n, e}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Utilizando las expresiones que relacionan los estados difusos y los estados de momento definido para los estados del neutrino del electrón en la expresión anterior,

tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{e \rightarrow \sigma}^n(t) &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^{e*} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}''}^e \sum_{\mathbf{k}', r} \left(\langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}, e}^s(0) \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}'', e}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}, e}^s(0) \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}'', e}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Esta expresión se simplifica reemplazando las siguientes equivalencias entre operadores:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) &= \{ \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t), \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \} - \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t), \\ \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) &= \{ \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t), \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \} - \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Por tanto calculando los distintos conmutadores que permiten simplificar los términos involucrados en la expresión (A.17) se llega a

$$\begin{aligned} \langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}, e}^s(0) \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}'', e}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \left| \left\{ \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t), \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 \\ &\quad + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}''} \langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) | 0 \rangle \\ \langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}, e}^s(0) \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}'', e}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}''} \langle 0 | \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^r(t) | 0 \rangle \\ &\quad - \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \left| \left\{ \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Para obtener estos resultados fue necesario notar que algunos conmutadores son nulos, como

$$\left\{ \alpha_{\mathbf{k}, e}^s(0), \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \right\} = \left\{ \alpha_{\mathbf{k}, e}^s(0), \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \right\} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Uniendo estos dos resultados y teniendo en cuenta que los conmutadores en ambos casos tienen deltas de kroneker, los cuales hacen que la suma en \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' y en r se reduzcan al término en que $r = s$, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ y $\mathbf{k}'' = \mathbf{k}$.

$$\mathcal{P}_{e \rightarrow \sigma}^n(t) = \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^e|^2 \mathcal{P}_{e \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) \quad \text{donde} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{e \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) &= \left| \left\{ \alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 + \left| \left\{ \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 +_{e, \mu} \langle 0 | Q_{\sigma}(t) | 0 \rangle_{e, \mu}, \\ \mathcal{P}_{e \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) &= \left| \left\{ \alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 + \left| \left\{ \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k}, e}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

El computo explícito de esta cantidad se reduce al cálculo de los distintos anti-conmutadores involucrados, lo cual se lleva a cabo usando las relaciones (2.46), y

de esto resulta

$$\begin{aligned} \{\alpha_{\mathbf{k}',e}^r(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0)\} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[\cos^2 \theta + \sin^2 \theta e^{i\omega_1 t} (|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 e^{-i\omega_2 t} + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\omega_2 t}) \right] \\ \{\beta_{\mathbf{k}',e}^{r\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0)\} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[2i\epsilon^s |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \sin^2 \theta \sin(\omega_2 t) e^{-i\omega_1 t} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \{\alpha_{\mathbf{k}',\mu}^r(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0)\} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[\sin \theta \cos \theta |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| e^{-i\omega_1 t} (e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_2 t}) \right] \\ \{\beta_{\mathbf{k}',\mu}^{r\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0)\} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[\epsilon^s \sin \theta \cos \theta |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| e^{-i\omega_1 t} (e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

y con ello obtenemos las expresiones para la oscilación de la carga de sabor que interpretaremos como la probabilidad de que el neutrino inicialmente del electrón tenga una componente de neutrino electrónico $\mathcal{P}_{e \rightarrow e}^{\mathbf{k}}(t)$ y una componente de neutrino muónico $\mathcal{P}_{e \rightarrow \mu}^{\mathbf{k}}(t)$, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{e \rightarrow e}^{\mathbf{k}}(t) &= 1 - \sin^2(2\theta) \left[|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \right], \\ \mathcal{P}_{e \rightarrow \mu}^{\mathbf{k}}(t) &= \sin^2(2\theta) \left[|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

La conservación de carga de sabor es inmediata dado que $\mathcal{P}_{e \rightarrow e}^{\mathbf{k}}(t) + \mathcal{P}_{e \rightarrow \mu}^{\mathbf{k}}(t) = 1$. La versión difusa de este valor esperado es inmediata dada la relación (A.21)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{e \rightarrow e}^n(t) &= 1 - \sin^2(2\theta) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^e|^2 \left[|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \right. \\ &\quad \left. + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \right], \\ \mathcal{P}_{e \rightarrow \mu}^n(t) &= \sin^2(2\theta) \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^e|^2 \left[|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Para que este resultado pueda considerarse como un verdadero observable (cantidad física), debe ser independiente de la escogencia de los parámetros de masa, pero tal hecho está probado en la sección (3.3).

A.4 Carga de sabor en el vacío

Partiendo de los operadores $\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)$ y $\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)$ operadores de creación y destrucción asociados a soluciones de la ecuación de Dirac con masas arbitrarias m_σ , calculamos

$$\langle 0|Q_\sigma(t)|0\rangle, \quad (\text{A.27})$$

tal como se vió en el capítulo (2) $|0\rangle = J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle$ y $Q_\sigma(t) = \tilde{Q}_\sigma(t)$ luego

$$\begin{aligned} \langle 0|Q_\sigma(t)|0\rangle &= \langle \tilde{0}|J(0)\tilde{Q}_\sigma(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k},r} \langle \tilde{0}|J(0)\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^{r\dagger}(t)J^{-1}(0)J(0)\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^r(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k},r} \langle \tilde{0}|J(0)\tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{r\dagger}(t)J^{-1}(0)J(0)\tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^r(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

donde hemos insertado una unidad en cada producto de operadores de la forma $1 = J^{-1}(0)J(0)$, lo cual nos permite escribir a estos productos como normas de vectores en el espacio de Fock de la forma

$$\begin{aligned} \langle 0|Q_\sigma(t)|0\rangle &= \sum_{\mathbf{k},r} \|J(0)\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^r(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle\|^2 \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k},r} \|J(0)\tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^r(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle\|^2, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

con $\|A\|^2 \equiv (|A\rangle)^\dagger|A\rangle$. Invirtiendo las relaciones (2.46) a tiempo igual a cero (esto puede realizarse a tiempo arbitrario pero tal resultado no es de nuestro interés) tendremos a los operadores de masa en términos de los operadores de sabor, es decir

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k},1}^r &= \cos\theta \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^r - \sin\theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\mu}^r + \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\mu}^{r\dagger} \right) \\ \alpha_{\mathbf{k},2}^r &= \cos\theta \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\mu}^r + \sin\theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^r - \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},e}^{r\dagger} \right) \\ \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} &= \cos\theta \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},e}^{r\dagger} - \sin\theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\mu}^{r\dagger} - \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\mu}^r \right) \\ \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} &= \cos\theta \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\mu}^{r\dagger} + \sin\theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},e}^{r\dagger} + \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^r \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

donde todos los operadores de sabor están evaluados al tiempo $t = 0$. Por tanto, aplicando las relaciones (2.46) a la expresión (A.29) y a estas a su vez las expresiones (A.30) logramos pasar de una expresión que depende de los operadores de

sabor a un tiempo arbitrario a una que depende de los operadores de sabor al tiempo $t = 0$ y con ello computar la acción del operador $J(0)$ sobre estos; es decir

$$\begin{aligned}
J(0)\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^r(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle &= J(0) \left[\cos\theta \alpha_{\mathbf{k},1}^r + \sin\theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) \alpha_{\mathbf{k},2}^r + \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} \right) \right] J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle \\
&= \cos\theta J(0) \left(\cos\theta \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^r \right. \\
&\quad \left. - \sin\theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\mu}^r + \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\mu}^{r\dagger} \right) \right) J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle \\
&+ \sin\theta \mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) J(0) \left(\cos\theta \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\mu}^r \right. \\
&\quad \left. + \sin\theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^r - \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},e}^{r\dagger} \right) \right) J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle \\
&+ \epsilon^r \sin\theta \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) J(0) \left(\cos\theta \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\mu}^{r\dagger} \right. \\
&\quad \left. + \sin\theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},e}^{r\dagger} + \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},e}^r \right) \right) J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Ahora bien la acción del operador $J(t)$ sobre los operadores de sabor se conoce a tiempos iguales por lo que ahora podemos evaluar tal acción en cada uno de los términos presentes en la expresión anterior.

Para aclarar este punto notemos que en el capítulo (de Bogoliubov) el operador $J(t)$ se introdujo para generar la mezcla

$$J^{-1}(t) \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} J(t) = \begin{pmatrix} \rho_{\sigma,j} & i\lambda_{\sigma,j} \\ i\lambda_{\sigma,j} & \rho_{\sigma,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix}, \tag{A.32}$$

y de la definición de $J(t)$ dada en (2.40), se encuentra que $J^{-1}(t)$ es igual a $J(t)$ cambiando el ángulo $\zeta_{\sigma,j} \rightarrow -\zeta_{\sigma,j}$ lo cual se visualiza dentro de la expresión anterior, como un cambio del parámetro $\lambda_{\sigma,j} \rightarrow -\lambda_{\sigma,j}$ es decir para nuestro caso tendríamos

$$J(0) \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^s \\ \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} \end{pmatrix} J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle = \begin{pmatrix} -i\lambda_{\sigma,j} \\ \rho_{\sigma,j} \end{pmatrix} \tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}|\tilde{0}\rangle,$$

en donde se ha tenido en cuenta que el vacío es aniquilado por el operador de destrucción a tiempo $t = 0$. Por tanto de esta ecuación y de su respectiva dual para $\sigma = e, \mu$ obtenemos todos los términos necesarios en la evaluación de la expresión (A.31) así como de la expresión que resultaría con el operador de antipartícula

correspondiente. Así, luego del computo llegamos a

$$\begin{aligned}
\|J(0)\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^r(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle\|^2 &= \left| \epsilon^r \sin^2 \theta \rho_{e,1} [|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|\mathcal{V}_{\mathbf{k}}^*(t) - |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t)] \right. \\
&\quad \left. + i\lambda_{e,1} \left[\cos^2 \theta + \sin^2 \theta [|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|\mathcal{V}_{\mathbf{k}}^*(t)] \right] \right|^2 \\
&\quad + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \left| \epsilon^r \rho_{\mu,2} (\mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) - |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|) + i\lambda_{\mu,2} (\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) - |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|) \right|^2
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Lo importante de este resultado es que es idéntico al del cómputo del término $\|J(0)\tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^r(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle\|^2$ lo cual hace que el valor esperado de la carga se haga idénticamente cero

$$\begin{aligned}
\langle 0|Q_\sigma(t)|0\rangle &= \sum_{\mathbf{k},r} \|J(0)\tilde{\alpha}_{\mathbf{k},\sigma}^r(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle\|^2 \\
&\quad - \sum_{\mathbf{k},r} \|J(0)\tilde{\beta}_{-\mathbf{k},\sigma}^r(t)J^{-1}(0)|\tilde{0}\rangle\|^2 = 0.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

REFERENCIAS

- [1] M. Gell-Mann and A. Pais, "Behavior of neutral particles under charge conjugation," Phys. Rev. **97** (1955) 1387.
- [2] A. Pais and O. Piccioni, "Note on the decay and absorption of the θ_0 ," Phys. Rev. **100** (1955) 1487.
- [3] B. Pontecorvo, J.Exptl. Theoret. Phys. 33 (1957) 549 [Sov. Phys. JETP 6 (1958) 429]. 16
- [4] B. Pontecorvo, J.Exptl. Theoret. Phys. 34 (1958) 247 [Sov. Phys. JETP 7 (1958) 172].
- [5] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28** (1962) 870.
- [6] V. N. Gribov and B. Pontecorvo, "Neutrino astronomy and lepton charge," Phys. Lett. **28B** (1969) 493.
- [7] B. Pontecorvo, "Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge," Sov. Phys. JETP 26 (1968) 984 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 53 (1967) 1717].
- [8] KamLAND Collaboration, T. Araki et al hep-ex/0406035, submitted to Phys.Rev.Lett.
- [9] Super-Kamiokande Collaboration, S. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. 81, 1562 (1998); S. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. 82, 2644 (1999); S. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. 85, 3999-4003 (2000). E. Kearns.
- [10] Soudan 2 Collaboration, W.W.M.Allison et al., Physics Letters B 449 (1999) 137;

-
- [11] MACRO Collaboration, M. Ambrosio et al. hep-ex/0106049; Phys. Lett. B517 (2001) 59 M. Ambrosio et al. NATO Advanced Research Work-shop on Cosmic Radiations, Oujda (Morocco), 21-23 March, 2001.
- [12] SNO collaboration, Q.R. Ahmad et al., Phys. Rev. Lett. 87, 071301 (2001) Phys.Rev.Lett. 89, 011301 (2002); nucl-ex/0204008. Phys.Rev.Lett 89, 011302 (2002); nucl-ex/0204009. nucl-ex/0309004.
- [13] B. T. Cleveland et al., Astrophys. J. 496 (1998) 505.
- [14] GALLEX Collaboration, W. Hampel et al., Phys. Lett. B 447 (1999)127; GNO Collaboration, M. Altmann et al., Phys. Lett. B 490 (2000)16; Nucl.Phys.Proc.Suppl. 91 (2001) 44.
- [15] SAGE Collaboration, J. N. Abdurashitov et al., Phys. Rev. C 60 (1999) 055801; Nucl.Phys.Proc.Suppl. 110 (2002) 315;
- [16] Super-Kamiokande Collaboration, S. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 5651;
- [17] K2K Collaboration, T. Nakaya, Proceedings of 21th International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics (Neutrino 2004), 13-19 June 2004, Paris, France.
- [18] S. Bergmann, Y. Grossmann, and D.M. Pierce, "Can lepton flavor violating interactions explain the atmospheric neutrino problem?" Phys. Rev. D **61** , (2000) 053005
- [19] J. Kopp, M. Linder, T. Ota, and J. Sato, "Nonstandard neutrino interactions in reactor and superbeam experiments" Phys. Rev. D **77** (2008) 013007
- [20] M.M. Guzzo, A. Masiero, and S.T. Petcov, "On the MSW effect with massless neutrinos and no mixing in the vacuum" Phys. Lett. B**260**, 154 (1991); S.Bergmann, M.M. Guzzo, P.C. de Holanda, P.I. Krastev, and H. Nunokawa, "Status of the solution to the solar neutrino problem based on nonstandard neutrino interactions " Phys. Rev. D**62**, (2000) 073001
- [21] C.C. Nishi, "Intrinsic flavor violation for massive neutrinos " Phys. Rev D **78**, (2008) 113007

-
- [22] C.C. Nishi, “Intrinsic flavor violation in neutrinos produced through decays”. (2010) [hep-ph/10065634]
- [23] C. Giunti, “Neutrino Flavor States and the Quantum Theory of Neutrino Oscillations ”(2006), [hep-ph/0608070]
- [24] E. Akhmedov and J. Kopp, “Neutrino oscillations: Quantum mechanics vs. quantum field theory”(2010) [hep-ph/1001.4815]
- [25] M. Blasone and G. Vitiello, “Quantum field theory of fermion mixing” *Annals Phys.* **244** (1995) 283-313 [Erratum-ibid. **249** (1995) 363].
- [26] M. Blasone, P. A. Henning and G. Vitiello, “M.Greco Ed. ”La Thuile 1996, Results and perspectives in particle physics”in, INFN Frascati 1996, p.139-152 [hep-ph/9605335]. M. Blasone, P. A. Henning and G. Vitiello, “The exact formula for neutrino oscillations ” *Phys. Lett. B* **451** (1999) 140-145;
- [27] M. Blasone, in A.Zichichi Ed. “Erice 1998, From the Planck length to the Hubble radius”(World Scientific) p.584, [hep-ph/9810329].
- [28] M. Binger and C. R. Ji, “Quantum Field Theory of Meson Mixing ” *Phys. Rev. D* **60** (1999) 056005. C. R. Ji and Y. Mishchenko, “Nonperturbative Vacuum Effect in the Quantum Field Theory of Meson Mixing” *Phys. Rev. D* **64** (2001) 076004; *Phys. Rev. D* **65** (2002) 096015.
- [29] K. Fuji, C. Habe and T. Yabuki, “Note on the field theory of neutrino mixing” *Phys. Rev. D* **59** (1999) 113003 [Erratum-ibid. *D* **60** (1999) 099903]; “Remarks on flavor-neutrino propagators and oscillation formulas” *Phys. Rev. D* **64** (2001) 013011.
- [30] K. C. Hannabuss and D. C. Latimer, “Fermion mixing in quasifree states ” *J. Phys. A* **36** (2003)
- [31] M. Blasone and Blasone y G. Vitiello, “Remarks on the neutrino oscillation formula” *Phys. Rev D* **60** (1999) 111302
- [32] M. Blasone, P. Jizba and G. Vitiello, “Currents and charges for mixed fields” *Phys. Lett. B* **517** (2001) 471.

-
- [33] M. Blasone, A. Capolupo and G. Vitiello, in Yue-Liang Wu, editor, “Flavor Physics”, 425-433. World Scientific, Singapore 2002. [hep-th/0107125];
- [34] M. Blasone, A. Capolupo, O. Romei and G. Vitiello, “Quantum Field Theory of boson mixing” Phys. Rev. D **63** (2001) 125015.
- [35] M. Blasone, A. Capolupo and G. Vitiello, “Quantum field theory of three flavor neutrino mixing and oscillations with CP violation” Phys. Rev. D **66** (2002) 025033;
- [36] M. Blasone and J. S. Palmer, “Mixing and oscillations of neutral particles in Quantum Field Theory” [hep-ph/0305257]
- [37] M. Blasone, P. P. Pacheco and H. W. Tseung, “Neutrino oscillations from relativistic flavor currents ” Phys. Rev. D **67** (2003) 073011.
- [38] M. Blasone, P. Jizba and G. Vitiello, “Observables in the Quantum Field Theory of neutrino mixing and oscillations” [hep-ph/0308009].
- [39] M. Blasone, A. Capolupo, F. Terranova, and G. Vitiello “On flavor violation for massive and mixed neutrinos ” Phys. Rev D **72** (2005) 013003
- [40] A. E. Bernardini and S. De Leo, “Flavor and chiral oscillations with Dirac wave packets ” Phys. Rev D **71** (2005) 076008
- [41] A. E. Bernardini, M. M. Guzo and C.C. Nishi, “Quantum flavor oscillations extended to the Dirac theory” [hep-ph/1004.0734v3]
- [42] J. Schechter and J.W. F Valle “Neutrino oscillation thought experiments” Phys. Rev D **23** (1981) 101103
- [43] E. Majorana, “Theory of the Symmetry of Electrons and Positrons, ” Nuovo Cim. **14**, 171 (1937)
- [44] C. Giunti and C. W. Kim, “Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics ” (Oxford University Press 2007)
- [45] S. Eliezer and Arthur R. Swift, “Experimental consequences of $\nu_e - \nu_\mu$ mixing in neutrino beams” Nucl. Phys. B **105** , (1976)

-
- [46] J. Thomas and P. Vahle, “Neutrinos Oscillations Present Status and Future Plans ” (World Scientific Publishing 2008)
- [47] S. Hannestad, “Cosmological limit on the neutrino mass ” *Phys. Rev D* **66**, (2002)
- [48] F. Ardellier et al., [DoubleChooz Collaboration], [arXiv:hep-ex/0606025].
- [49] S. Chen, “The Daya Bay Reactor Neutrino Experiment ” *J. Phys. Conf. Ser.* **120** (2008) 052024.
- [50] C. Itzykson and J.B Zuber, “Quantum Field Theory ” (McGraw-Hill, New York. 1980). N.N. Bogoliubov, A.A. Logunov, A. I. Osak, y I.T. Todorov, “General Principles of Quantum Field Theory”, (Klumer Academic Publishers, Dordrecht, 1990).
- [51] H. J. Lipkin, “Quantum theory of neutrino oscillations for pedestrians: simple answers to confusinsg questions ” *Physics Letters B* **642** (2006).
- [52] B. Kayser, “On quantum mechanics of neutrino oscillation” *Phys. Rev D* **24**, (1981)
- [53] E. K. Akhmedov and A. Y. Smirnov, “Paradoxes of neutrino oscillations” (2009), [hep-ph/09051903]