



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COLORACIÓN ESTELAR DE
GRÁFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ALEJANDRO VÁZQUEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno	
Apellido paterno	Vázquez
Apellido materno	López
Nombre(s)	Alejandro
Teléfono	56 56 07 48
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	406045605
2. Datos del tutor	
Grado	M. en C.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz
3. Datos del sinodal 1	
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Virginia
Apellido paterno	Abrín
Apellido materno	Batule
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Hortensia
Apellido paterno	Galeana
Apellido materno	Sánchez
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Mucuy-Kak del Carmen
Apellido paterno	Guevara
Apellido materno	Aguirre
7. Datos del trabajo escrito.	
Título	Coloración Estelar de Gráficas
Número de páginas	70 p.
Año	2011

Índice general

1. Definiciones y Conceptos Básicos	1
1.1. Isomorfismos de gráficas	3
1.2. Subgráficas	5
1.3. El grado de un vértice	5
1.4. Caminos y conexidad	6
1.5. Excentricidad de un vértice	10
1.6. Operaciones sobre gráficas	11
1.7. Árboles y bosques	12
1.8. Árboles arraigados	15
2. Coloraciones	17
2.1. Conjuntos independientes	17
2.2. Coloración por vértices	17
2.3. r -cubos Q_r	23
3. Coloración Estelar	25
3.1. Conceptos básicos	26
3.2. Generalidades	27
4. Número Cromático Estelar de Algunas Familias de Gráficas	41
4.1. Árboles y ciclos	41
4.2. Ruedas	43
4.3. Gráficas bipartitas completas	44
4.4. r -cubos	45
4.5. Rejillas d -dimensionales	49
4.6. Toros d -dimensionales	55
4.7. Gráficas cúbicas	58
4.8. El producto cartesiano de dos gráficas completas	62

5. Conclusiones	67
Bibliografía	69

Agradecimientos

Tanto en mi trayectoria universitaria como en la elaboración y conclusión del presente trabajo han habido personas que merecen las gracias, pues sin su valiosa aportación esto no hubiera sido posible, también hay quienes las merecen por su apoyo y cariño constante a lo largo de mi vida.

En primer lugar quiero agradecer a todas las personas que participaron e hicieron posible este trabajo:

A César Hernández, director de la presente tesis, por la oportunidad y por tu inagotable paciencia y disponibilidad en cada momento de la realización de dicho trabajo; a Virginia Abrin, Hortensia Galeana, Juan José Montellano, Mucuy-Kak del Carmen Guevara, sinodales: gracias por su apoyo y enseñanza.

En seguida quiero agradecer a la persona que más me ha apoyado en toda mi vida y a la cual le debo todo, mi padre Fidel, por tu guía, tu fortaleza y tu buen ejemplo, gracias papá.

A mi madre Rosa María, por haber estado en cada momento de mi vida estudiantil siempre dispuesta a ayudarme, aún cuando no sabías como hacerlo, gracias mamá no se que haría sin tí.

A mi hermano Javier por tu apoyo constante, tu amistad y por estar siempre disponible para mí, sobre todo en cada momento de la elaboración de este trabajo, gracias no podría tener un mejor hermano.

A mi hermana Diana por saber hacerme sonreír hasta en los momentos más difíciles, gracias hermanita.

A Fernanda por tu invaluable apoyo, por tu tiempo y compañía, además de los consejos tanto en mi carrera universitaria como en la elaboración de este trabajo, gracias por compartir mi vida y mis logros.

A Marisol por todo el apoyo y por estar siempre presente en toda mi vida tanto personal como estudiantil, gracias Marisol.

A mi tío Toño por el cariño e interes hacía mi persona no sólo durante

la realización del presente trabajo sino en toda mi vida, estés donde estés gracias por el apoyo y por haber sido parte de mi vida.

Al profesor Manuel López Mateos por haber sido guía y pieza importante en este proceso, gracias Manuel.

A Daniel Allard, Fernando Rodríguez, Guillermo López, Mauricio Medina y Alvaro Hernández, pues sin su apoyo y constante enseñanza durante toda la carrera esto no hubiera sido posible, gracias amigos.

A todo el equipo del Seminario sobre la Enseñanza de las Matemáticas con los que pasé muy buenos momentos, Emiliano Valdés, Egbert Méndez, Efraín Pineda, Jonathan Jaimes, gracias compañeros y amigos.

Por último pero no menos importante, quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ciencias por haber sido mi casa durante todo este tiempo y darme la oportunidad de crecer.

Gracias a todas las personas que hicieron posible la culminación de esta etapa y la elaboración del presente trabajo, esta tesis es suya.

Introducción

El presente trabajo es una investigación sobre las coloraciones estelares de algunas familias de gráficas no dirigidas, así como de su número cromático estelar, para lo cual se trabajó con el artículo *Star Coloring of Graphs* [7] de autores: Guillaume Fertin, Andre Raspaud y Bruce Reed, publicado en el año 2004.

En los primeros dos capítulos se definen los elementos de la Teoría de las Gráficas que se utilizarán para el desarrollo de los capítulos 3 y 4, en los cuales se presenta el contenido principal del trabajo en cuestión.

En el capítulo 1 aprovecharemos los elementos antes mencionados para dar una demostración del Teorema de Brooks. Finalizaremos el capítulo introduciendo el concepto de árbol arraigado, así como las definiciones que se desprenden de dicho concepto.

En el capítulo 2 introducimos la definición de conjuntos independientes de vértices, así como la definición de coloración por vértices, para poder después definir el número cromático usual de una gráfica G . Introducimos también las gráficas conocidas como r -cubos y terminamos el capítulo demostrando que tales gráficas son bipartitas y consecuentemente 2-coloreables.

En el capítulo 3 se definen los conceptos de coloración estelar y número cromático estelar, así como de coloración acíclica y número cromático acíclico. Se observará fácilmente que el número cromático acíclico es menor o igual que el número cromático estelar, desigualdad de la cual obtendremos una cota superior muy útil para el número cromático estelar, pues nos servirá en diversas ocasiones en el capítulo 4 para demostrar cotas inferiores de algunas familias de gráficas. En este capítulo también encontraremos un Teorema que relaciona al número cromático estelar con el número cromático acíclico, de igual manera se muestra una gráfica plana la cual necesita al menos 6 colores para tener una coloración estelar.

El capítulo 4 está dedicado al cálculo del número cromático estelar de las

gráficas conocidas como: árboles, ciclos, ruedas, gráficas bipartitas completas y rejillas 2-dimensionales, así como a la acotación tanto inferior como superior del número cromático estelar de otras familias de gráficas: los r -cubos, las rejillas d -dimensionales, los toros d -dimensionales y las gráficas cúbicas. Para la demostración de las cotas superiores de los números cromáticos estelares de los r -cubos y las rejillas d -dimensionales nos auxiliaremos de una coloración peculiar basada en la representación binaria de los vértices de los r -cubos y en las coordenadas en cada dimensión para los vértices de las rejillas d -dimensionales respectivamente. Para demostrar que la coloración antes mencionada es estelar para las rejillas d -dimensionales nos apoyaremos también en la definición de coloración 2-distancia, la cual introducimos en esta sección.

En la sección de gráficas cúbicas demostraremos que el número cromático estelar de una gráfica G es menor o igual que el número cromático estelar de G^2 , asimismo daremos una cota para dicho número en función de su grado máximo. Posteriormente acotaremos el número cromático estelar de la familia de las gráficas cúbicas. Finalmente, concluiremos el trabajo dando una cota superior para el número cromático estelar del producto cartesiano de dos gráficas completas.

Cabe mencionar que tanto el número cromático estelar de la familia de las gráficas conocidas como ruedas, como también la cota del número cromático estelar del producto cartesiano de dos gráficas completas son producto del presente trabajo, al igual que una de las cotas superiores del número cromático estelar del toro d -dimensional (la cual mencionamos con detalle en el capítulo 4), pues un error en la demostración de dicha cota fue encontrado, obligandonos a dar y demostrar otra cota, la cual es más grande, sin embargo tanto la cota dada como el desarrollo de la demostración están basados en la dada en [7].

Capítulo 1

Definiciones y Conceptos Básicos

La intención de este capítulo es introducir los elementos básicos de la Teoría de las Gráficas que se utilizarán más adelante.

Muchas situaciones de la vida real pueden describirse convenientemente por medio de diagramas, los cuales constan de un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen a algunos de esos puntos. Por ejemplo los puntos pueden representar a personas y las líneas unir a parejas de amigos, o bien los puntos podrían simbolizar ciudades y las líneas las vías de comunicación que las unen. Démonos cuenta que lo que es relevante en este tipo de diagramas no es la clase de relación que se describa, sino el hecho de que dos puntos están unidos por una línea o no; es decir el hecho mismo de estar relacionados. Una abstracción matemática de esta naturaleza es la que da origen al concepto de *gráfica*.

Una *gráfica* G es una pareja $\{V(G), A(G)\}$, donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío de elementos llamados *vértices* (puntos, nodos) y $A(G)$ es un subconjunto finito de parejas no ordenadas de $V(G)$ llamadas *aristas* (líneas, arcos).

Una gráfica es *finita* si tanto su conjunto de vértices, como su conjunto de aristas es finito. En este trabajo estudiamos sólo gráficas finitas, por lo que el término gráfica siempre significará *gráfica finita*. Si una gráfica G consta de un vértice, se dice que la gráfica es *trivial*, de otra forma G es *no trivial*. Los extremos de una arista son los elementos del conjunto de vértices que la determinan. Cuando estas son iguales, obtenemos un *lazo* (arista a_1 de la gráfica G en la Figura 1.1). A dos o más aristas con los mismos extremos se les llama *aristas múltiples* (aristas a_{10} y a_{11} de la gráfica G en la Figura 1.1).

Los ejemplos de la Figura 1.1 ayudarán a entender mejor la definición.

Para la gráfica $G = (V(G), A(G))$ tenemos que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $A(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$, mientras que para $H = (V(H), A(H))$ tenemos que $V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ y $A(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

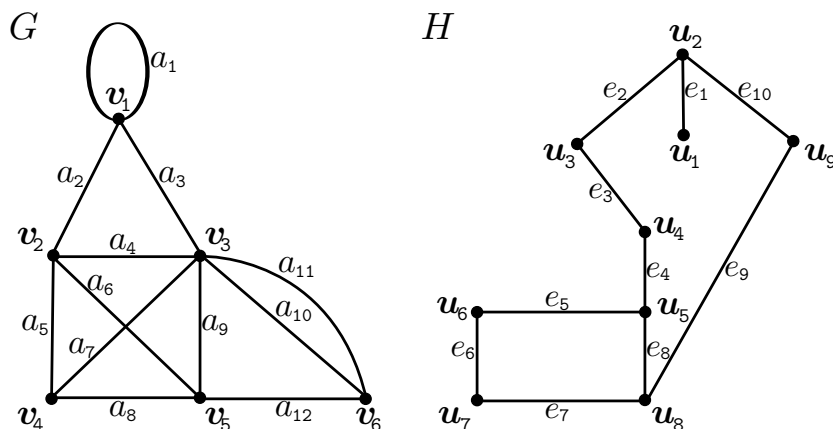


Figura 1.1: Las gráficas G y H .

De aquí en adelante se estudiarán gráficas que no contienen lazos ni aristas múltiples, este tipo de gráficas son llamadas *gráficas simples*. Las gráficas son nombradas así porque pueden ser representadas gráficamente, y es esta representación gráfica la que nos ayuda a comprender muchas de sus propiedades. Un aspecto importante es que no hay una única manera de representar una gráfica, la posición de los vértices y las aristas algunas veces carece de importancia.

Al número de vértices de una gráfica G se le llama *orden* de la gráfica G y se denota $|V(G)|$, mientras que al número de aristas se le denomina *tamaño* de la gráfica G y se denota $|A(G)|$.

Si u y v son dos vértices de una gráfica G y $a = uv$, una arista de G , decimos que u y v son *adyacentes* (a tiene extremos u y v). Dos aristas son *adyacentes* si tienen un extremo en común. Una arista *incide* sobre un vértice si dicha arista tiene como uno de sus extremos al vértice mencionado antes.

1.1. Isomorfismos de gráficas

Dos gráficas G y H son *idénticas* ($G = H$) si $V(G) = V(H)$ y $A(G) = A(H)$. Sin embargo es posible que dos gráficas que no son idénticas tengan el mismo diagrama, entonces se dice que G y H son *gráficas isomorfas*. En general dos gráficas simples G y H son *isomorfas* ($G \cong H$) si y sólo si existe una función biyectiva $f : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserve las adyacencias de sus vértices, es decir, $uv \in A(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in A(H)$. La función biyectiva f es llamada *isomorfismo* entre G y H . Es claro que dos gráficas isomorfas tienen el mismo número de vértices y aristas, sin embargo el hecho de que dos gráficas cumplan con lo anterior no significa que sean isomorfas.

Para mostrar que dos gráficas son isomorfas debemos indicar un isomorfismo entre ellas. El siguiente isomorfismo $f : V(G) \rightarrow V(H)$:

$$f(v_1) = u_4 \quad f(v_2) = u_1 \quad f(v_3) = u_3 \quad f(v_4) = u_2$$

muestra que las gráficas G y H de la Figura 1.2 son isomorfas.

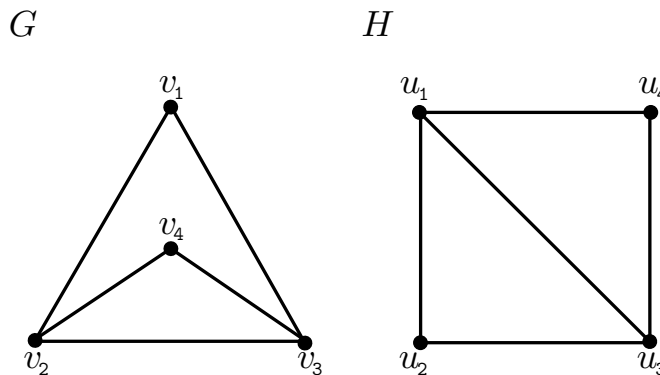


Figura 1.2: $G \cong H$.

A continuación introducimos algunos tipos especiales de gráficas.

Una gráfica es *completa* si todo par de vértices es adyacente. La gráfica completa con n vértices se denota por K_n .

Una gráfica G es *bipartita* si existe una partición de $V(G)$ en dos conjuntos V_1 , V_2 de forma que cada arista de G tenga un extremo en V_1 y otro en V_2 , dicha partición $\{V_1, V_2\}$ se denomina bipartición de la gráfica.

Una gráfica G es *bipartita completa* si existe una bipartición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ de tal manera que cada vértice de V_1 es adyacente a todos los vértices de V_2 . Estas gráficas se denotan por $K_{n,m}$; donde $n = |V_1|$ y $m = |V_2|$. Observemos que $K_{n,m}$ tiene $n + m$ vértices y $n \cdot m$ aristas. En este tipo de gráficas existe una única bipartición. Una gráfica bipartita de la forma $K_{1,m}$ es llamada *estrella*.

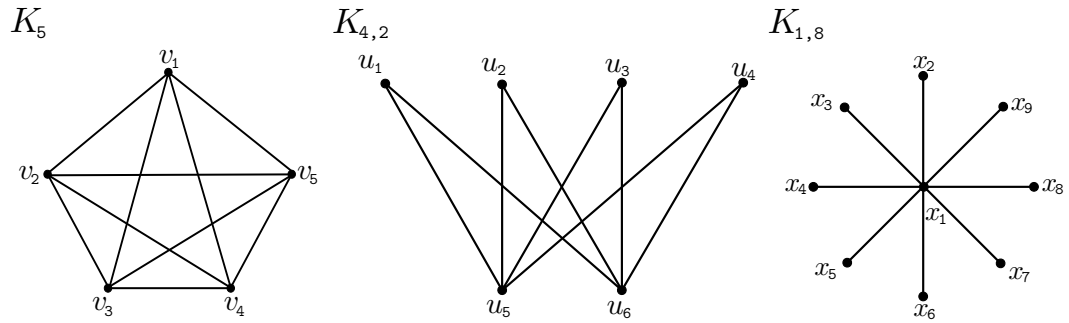


Figura 1.3: Se muestran las gráficas K_5 , $K_{4,2}$ y $K_{1,8}$ respectivamente.

Se dice que una gráfica es *plana* si está dibujada en el plano de manera tal que sus aristas sólo se intersectan en vértices de la gráfica misma.

Sin embargo una gráfica G es *aplanable* si es isomorfa a una gráfica plana. La Figura 1.4 ilustra una gráfica aplanable.

El *complemento* de una gráfica G es la gráfica \overline{G} tal que $V(G) = V(\overline{G})$, y tal que u es adyacente a v en \overline{G} si y sólo si u no es adyacente a v en G .

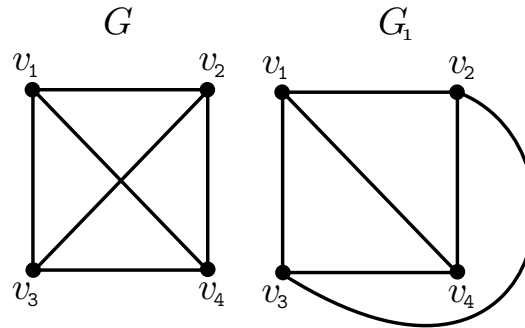


Figura 1.4: G es aplanable, pues $G \cong G_1$ y G_1 es plana.

1.2. Subgráficas

Dada una gráfica G con n vértices y m aristas, hay dos maneras naturales de obtener gráficas "pequeñas" a través de G . Si a es una arista de G , podemos obtener una gráfica de $m - 1$ aristas al eliminar a de G , dejando los vértices y aristas restantes intactos. La gráfica resultante se denota $G - a$. Análogamente, si v es un vértice de G , podemos obtener una gráfica de $n - 1$ vértices al eliminar de G el vértice v junto con todas las aristas incidentes a él. La gráfica resultante se denota $G - v$. Las gráficas $G - a$ y $G - v$ son ejemplos de *subgráficas* de G .

Dada una gráfica G , una *subgráfica* H de G , es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. También se dice que H está contenida en G .

Una *subgráfica inducida* H de G es una subgráfica que contiene todas las aristas de G entre los vértices de H .

La Figura 1.5 ilustra el concepto de subgráfica.

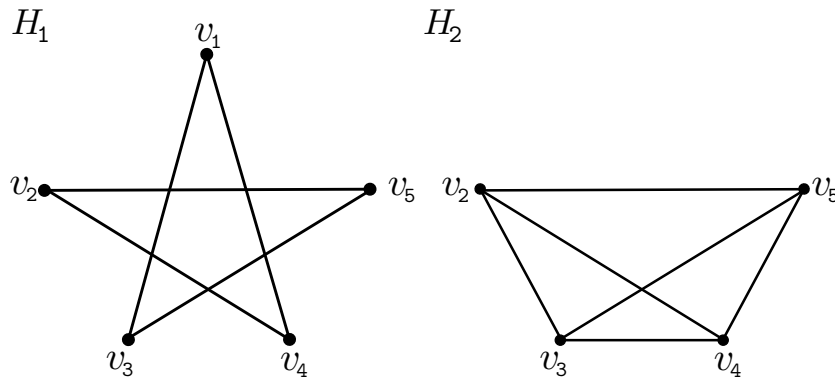


Figura 1.5: H_1 es una subgráfica de K_5 mientras que H_2 es una subgráfica inducida de K_5 pues contiene todas las aristas de K_5 sobre los vértices de H_2 .

1.3. El grado de un vértice

Para todo $v \in V(G)$, el *grado* de v es el número de aristas incidentes en él, se denota $gr(v)$ ó $grad_G(v)$. El *grado mínimo* de una gráfica G es el

menor de los grados de sus vértices y se denota por $\delta(G)$, mientras que el *grado máximo* es el máximo de los grados y se denota por $\Delta(G)$.

Teorema 1.3.1. *Si G es una gráfica con q aristas entonces:*

$$\sum_{v \in V(G)} gr(v) = 2q$$

Demostración. En la suma de los grados de los vértices se cuenta el número de aristas que inciden en cada vértice. Como cada arista tiene dos extremos es contada dos veces en la suma, terminando con esto la demostración. ■

Una gráfica *k-regular*, o de grado k , es aquella en la que todos los vértices son de grado k .

La gráfica completa K_n es regular de grado $n - 1$, mientras que la gráfica bipartita completa $K_{n,n}$ es n -regular. Una gráfica 3-regular es llamada *gráfica cúbica* o *trivalente*.

En una gráfica G , el grado de cualquier vértice satisface: $\delta(G) \leq gr(v) \leq \Delta(G)$, por lo tanto, tenemos:

$$|V(G)| \cdot \delta(G) \leq \sum_{v \in V(G)} gr(v) \leq |V(G)| \cdot \Delta(G)$$

Aplicando el Teorema 1.3.1, si G es una gráfica con n vértices y m aristas, tenemos:

$$\frac{n}{2} \cdot \delta(G) \leq m \leq \frac{n}{2} \cdot \Delta(G)$$

1.4. Caminos y conexidad

Ahora introducimos el concepto de camino, del cual se desprenden más conceptos los cuales serán de gran utilidad conforme avancemos en el trabajo.

Un *camino* $v_0, a_0, v_1, a_1, \dots, a_{n-1}v_{n-1}, a_n, v_n$ en una gráfica G es una sucesión alternada de vértices y aristas de G tal que $a_i = v_i v_{i+1}$. La *longitud* de un camino es el número de aristas que lo forman. A un camino con vértice inicial u y vértice final v se le llama *uv-camino*.

Un *paseo* en una gráfica G es un camino en el que no se repiten aristas. Las aristas $\{v_1v_2, v_2v_5, v_5v_4, v_4v_2\}$ de la Figura 1.6 describen un paseo.

Una *trayectoria* en una gráfica G es un paseo en el que no se repiten vértices. Las aristas $\{v_1v_3, v_3v_6, v_6v_5\}$ de la Figura 1.6 describen una trayectoria.

Un camino (paseo) *cerrado* es un camino (paseo) cuyo vértice inicial coincide con el vértice final. Las aristas $\{v_4v_5, v_5v_3, v_3v_2, v_2v_5, v_5v_4\}$ de la Figura 1.6 describen un camino cerrado. Las aristas $\{v_1v_3, v_3v_6, v_6v_5, v_5v_3, v_3v_2, v_2v_1\}$ describen un paseo cerrado.

Un *ciclo* es un camino cerrado $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ donde $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. Las aristas $\{v_1v_2, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_3, v_3v_1\}$ de la Figura 1.6 describen un ciclo.

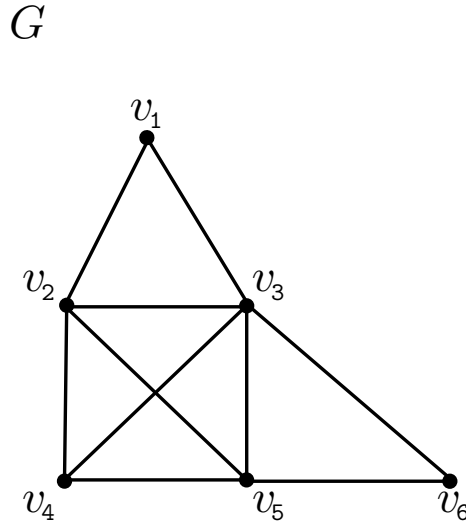


Figura 1.6: La gráfica simple G .

Se dice que dos vértices u y v de G están *conectados* si existe un uv -camino en G . Ahora, si existe un uv -camino en G entonces existe una uv -trayectoria en G . La *distancia* entre dos vértices u y v de G se define como la longitud de la trayectoria más corta entre u y v , si existe, y se denota por $d_G(u, v)$, si no existe tal trayectoria $d_G(u, v) = \infty$.

Proposición 1.4.1. *Todo uv -paseo contiene una uv -trayectoria.*

Demostración. Sea $u, w_1, w_2, \dots, w_n, v$ el uv -paseo, si no se repiten vértices ya es una trayectoria.

De no ser así, sea w_i el primer vértice que se repite y sea j el índice que tiene w_i al repetirse ($w_i = w_j$).

Observemos el paseo $u, w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_{j+1}, w_{j+2}, \dots, w_n, v$, este es un uv -paseo con un vértice menos repitiéndose. Se repite el proceso para obtener un uv -paseo con dos vértices menos repitiéndose. Repetimos el proceso una vez más y en algún momento debe terminar pues el número de vértices es finito, obteniendo al final una uv -trayectoria. ■

Proposición 1.4.2. *La unión de dos trayectorias distintas entre dos vértices contienen un ciclo.*

Demostración. Sean u y v dos vértices tales que están unidos por al menos dos trayectorias diferentes T_1 y T_2 . Sea w el primer vértice que pertenece a T_1 y a T_2 tal que el siguiente vértice no cumple con esto y sea w' el siguiente vértice que vuelve a estar en T_1 y T_2 . Si T'_1 es la subtrayectoria de T_1 entre w y w' y T'_2 la subtrayectoria de T_2 entre w y w' , entonces $T'_1 \cup T'_2$ es un ciclo. ■

Una gráfica G es *conexa* si y sólo si para cualquier par de vértices existe una trayectoria que los une.

Se dice que una gráfica es *inconexa* cuando no es conexa. Si una gráfica G es inconexa, decimos que sus *componentes conexas* son todas las subgráficas conexas máximas (por contención). El *número de componentes conexas* de una gráfica G se denota por $c(G)$. La Figura 1.7 ilustra estos conceptos.

En este trabajo centraremos nuestra atención en gráficas que son conexas. Sin embargo, algunas gráficas son conexas con tanta debilidad que es posible desconectarlas eliminando tan sólo uno de sus vértices o aristas.

Dada una gráfica G y un vértice $v \in V(G)$, se dice que v es un *vértice de corte* si $c(G - v) > c(G)$. Claramente, si G es conexa, un vértice $w \in V(G)$ es de corte si y sólo si $G - w$ no es conexa. En general, un vértice v de una gráfica G es de corte si al eliminarlo se desconecta a alguna componente de G .

Por otro lado, dada una gráfica G y una arista $a \in A(G)$, se dice que a es una *arista de corte* o *punte* si y sólo si $c(G - a) > c(G)$. Al igual que en la definición anterior, si G es conexa, $a \in A(G)$ es de corte si y sólo si $G - a$ es inconexa.

En la gráfica H de la Figura 1.8 u, v son vértices de corte, mientras que a es una arista de corte.

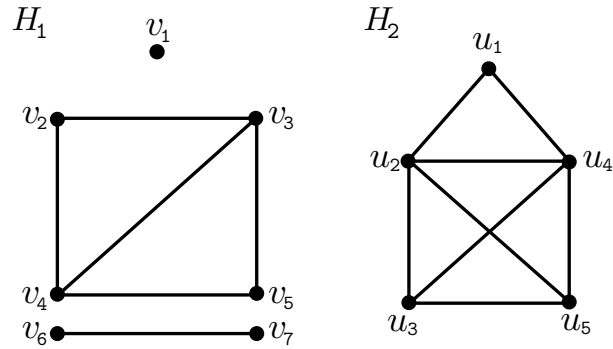


Figura 1.7: La gráfica H_1 es inconexa con $c(G) = 3$, mientras que la gráfica H_2 es conexa.

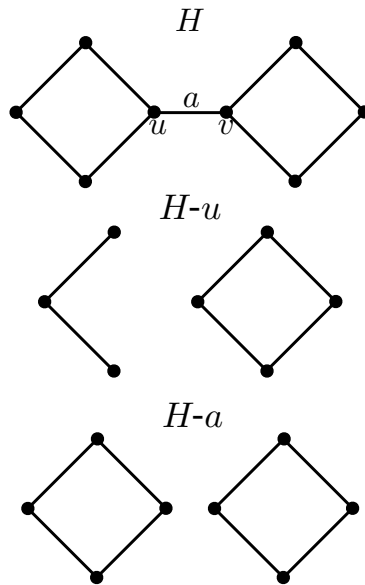


Figura 1.8: La gráfica H , la cual se desconecta al eliminar ya sea el vértice u ó v , ó la arista a .

A una gráfica que no contiene vértices de corte se le llama *bloque*. Los *bloques de una gráfica* G son las subgráficas máximas de G con la propiedad de ser bloques.

Si una gráfica tiene por lo menos un vértice de corte, tendrá varios bloques, aquellos que sólo tienen un vértice de corte se llaman *bloques terminales*.

No siempre es tan fácil desconectar una gráfica, pues hay gráficas en las que es necesario eliminar más de un vértice para hacerlas inconexas. Es esto lo que nos lleva a las siguientes definiciones.

La *conexidad puntual* $\kappa(G)$ de una gráfica conexa G con $n \geq 2$, es el mínimo número de vértices de G cuya eliminación aumenta el número de componentes conexas de G ó la hace trivial. Se dirá que una gráfica G es *k-conexa* si y sólo si $\kappa(G) \geq k$. En la Figura 1.9 se muestra una gráfica 3-conexa.

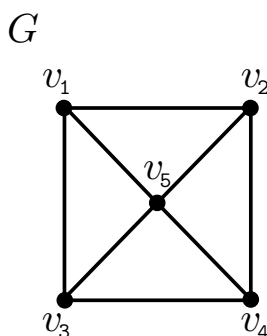


Figura 1.9: La gráfica G se desconecta al quitarle los vértices v_1 , v_4 y v_5 .

1.5. Excentricidad de un vértice

La *excentricidad* de un vértice v , denotada por $e(v)$, es la máxima de las distancias al resto de los vértices de la gráfica:

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v).$$

Gracias a la definición anterior podemos obtener más definiciones que también serán de gran utilidad más adelante, las cuales introducimos a continuación.

El *radio* de una gráfica G es la mínima de las excentricidades sobre todos los vértices $V(G)$. Se denota por $r(G)$.

El *diámetro* de una gráfica G es la máxima de las excentricidades, se denota por $d(G)$.

El *cueño* de una gráfica G es la longitud del ciclo de longitud mínima, se denota por $g(G)$.

La *circunferencia* de una gráfica G es la longitud del ciclo de longitud máxima, se denota por $c(G)$.

En la gráfica G_1 de la Figura 1.10, $r(G_1) = 4$ pues $d(l, c) = 4$, mientras que $d(G_1) = 7$ ya que $d(a, q) = 7$. En la gráfica G_2 , $g(G_2) = 4$ pues el ciclo de longitud mínima en G_2 mide 4, mientras que $c(G_2) = 6$.

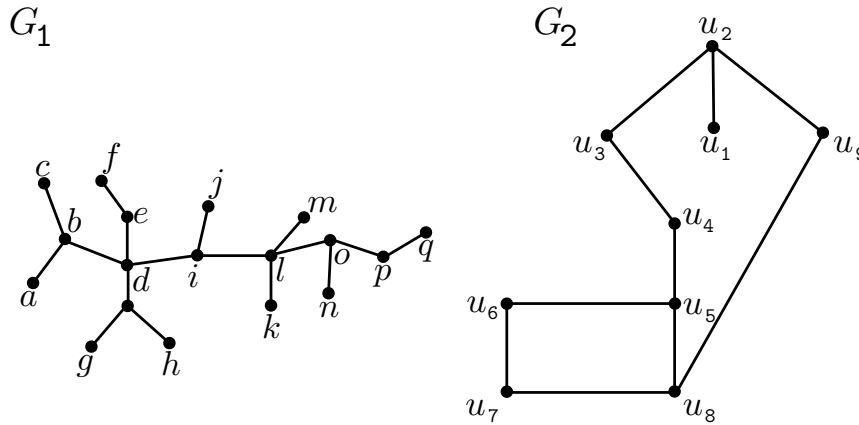


Figura 1.10: Se muestran las gráficas G_1 y G_2 respectivamente.

1.6. Operaciones sobre gráficas

En la definición de gráfica complemento vimos una manera en la que podemos generar una gráfica a partir de otra. Si tenemos dos gráficas G y H , una nueva gráfica puede ser definida en varias formas. Los conceptos descritos a continuación pueden ser extendidos sin dificultad a un contexto general.

Una de las formas más básicas de combinar gráficas es con la operación *unión*. La *unión* de dos gráficas G y H es la gráfica $G \cup H$ tal que $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ y $A(G \cup H) = A(G) \cup A(H)$.

El *producto cartesiano* de dos gráficas G y G' es la gráfica $G \square G'$ tal que el conjunto de vértices es $V(G) \times V(G')$ y dos vértices (x, x') y (y, y') están unidos por una arista si y sólo si $x = y$ y $x'y'$ es una arista de G' ó $x' = y'$ y xy es una arista de G . El producto cartesiano $P_m \square P_n$ de dos trayectorias de longitudes m y n respectivamente da origen a la gráfica que recibe el nombre de *rejilla* $G(m+1, n+1)$. Se muestra un ejemplo en la Figura 1.11.

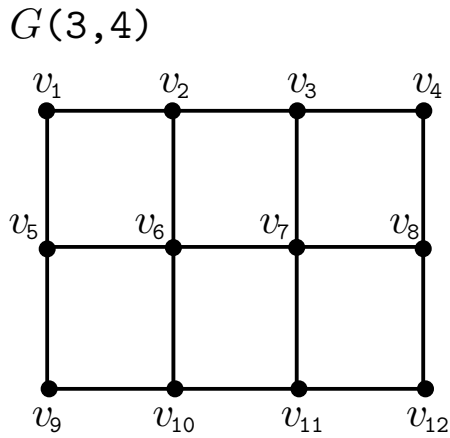


Figura 1.11: Se muestra la rejilla $G(3, 4)$.

Estas operaciones son asociativas y conmutativas bajo isomorfismos y pueden ser extendidas a un número arbitrario de gráficas.

La *suma* de dos gráficas G y H denotada por $G + H$ es la gráfica tal que $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ y $A(G + H) = A(G) \cup A(H) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$.

Las Figuras 1.12 y 1.13 ilustran los conceptos definidos antes.

El *cuadrado de una gráfica* $G = (V(G), A(G))$ es la gráfica G^2 cuyo conjunto de vértices es $V(G)$, dos vértices son adyacentes en G^2 si y sólo si su distancia en G es a lo más 2. La Figura 1.14 muestra el cuadrado de C_4 .

1.7. Árboles y bosques

Una *gráfica acíclica* es una gráfica que no contiene ciclos. Un *árbol* es una gráfica conexa acíclica.

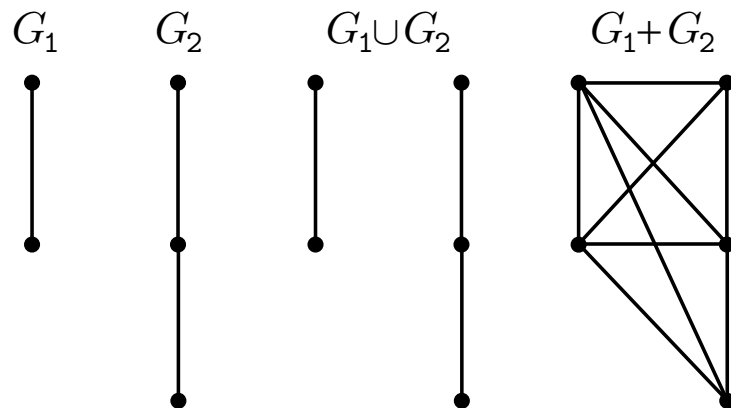


Figura 1.12: Se muestra la unión y la suma de las gráficas G_1 y G_2 .

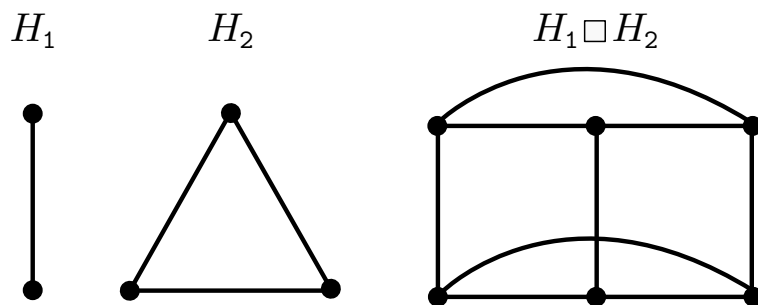


Figura 1.13: Se muestra el producto cartesiano de H_1 y H_2 .

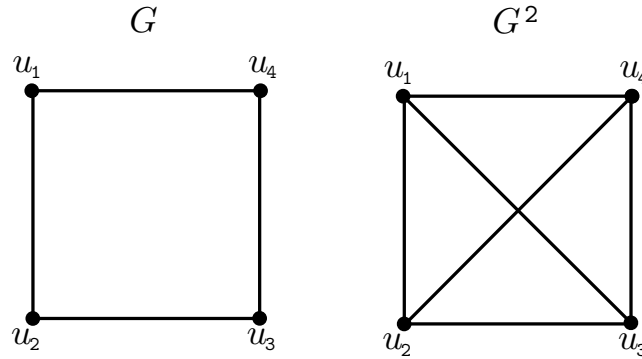


Figura 1.14: La gráfica G^2 , el cuadrado de $G = C_4$.

Un *bosque* es una gráfica acíclica, por lo que sus componentes conexas son árboles.

Así, toda gráfica sin ciclos es un bosque y si además es conexa, es también un árbol.

Dado que los árboles son gráficas conexas, para cualesquiera dos vértices existe una trayectoria que los une, sin embargo la particularidad de los árboles consiste en que dicha trayectoria es única, ya que de no ser así, la unión de dos trayectorias distintas entre dos puntos generaría un ciclo, expresar esto es la intención del siguiente teorema.

Teorema 1.7.1. *Una gráfica es un árbol si y sólo si para cualquier par de vértices existe una única trayectoria que los une.*

Demostración. Para la ida, G es conexa pues G es un árbol, entonces existe una trayectoria entre cualquier par de vértices, procedamos por reducción al absurdo y supongamos que no es única. Entonces por la Proposición 1.4.2 existe un ciclo, lo cual es una contradicción ya que G es un árbol. Por lo tanto para todo par de vértices existe una trayectoria única.

Para el regreso tenemos que G es conexa, pues existe una trayectoria entre cada par de vértices, por lo que sólo resta demostrar que es acíclica. Por reducción al absurdo supongamos que G contiene al menos un ciclo $C = x_1x_2, \dots, x_nx_1$. Entonces existen dos x_1x_2 -trayectorias, a saber $\{x_1x_2\}$ y $\{x_1x_n, x_nx_{n-1}, \dots, x_3x_2\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto G es un árbol. ■

A continuación veremos la relación entre el número de vértices de un árbol y sus aristas.

Teorema 1.7.2. *Si G es un árbol tal que $|V(G)| = n$ y $|A(G)| = m$, entonces $m = n - 1$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de vértices de G .

Si $n = 1$, entonces $G = K_1$ y $m = 0 = n - 1$. Supongamos que el resultado es válido para todos los árboles con menos de n vértices (Hipótesis de inducción). Sea G un árbol con n vértices y $a \in A(G)$. Como G no tiene ciclos, a es un puente, por lo que la gráfica $G - a$ es inconexa y tiene exactamente dos componentes que claramente son conexas y acíclicas; por lo tanto son árboles y cada una tiene menos de n vértices. Llamemos G_1 y G_2 a dichas componentes y sean $n_1 = |V(G_1)|$, $n_2 = |V(G_2)|$, $m_1 = |A(G_1)|$ y $m_2 = |A(G_2)|$.

Por hipótesis de inducción sabemos que $m_1 = n_1 - 1$ y $m_2 = n_2 - 1$. Entonces tenemos que:

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

$$|V(G)| = n = n_1 + n_2$$

$$A(G) = A(G_1) \cup A(G_2) \cup \{a\}$$

$$|A(G)| = m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1. \quad \blacksquare$$

1.8. Árboles arraigados

Un *árbol arraigado* $T(r)$ es un árbol T con un vértice específico r , llamado raíz de T . En tal caso las aristas tienen una orientación natural en sentido contrario de la raíz. Observemos que cada vértice es alcanzable desde la raíz por una única trayectoria. Por lo que, el orden parcial asociado al árbol es el orden parcial sobre sus vértices con $u \leq v$ si y sólo si la única trayectoria de la raíz a v pasa por u .

En un árbol arraigado, el *padre* de un vértice es el vértice adyacente a él en la trayectoria hacia la raíz; cada vértice excepto la raíz tiene un único padre. El *hijo* de un vértice v es un vértice para el cual v es el padre. Una *hoja* es un vértice sin hijo. El *nivel* ó *profundidad* de un vértice $v \in T$ es la longitud de la rv -trayectoria.

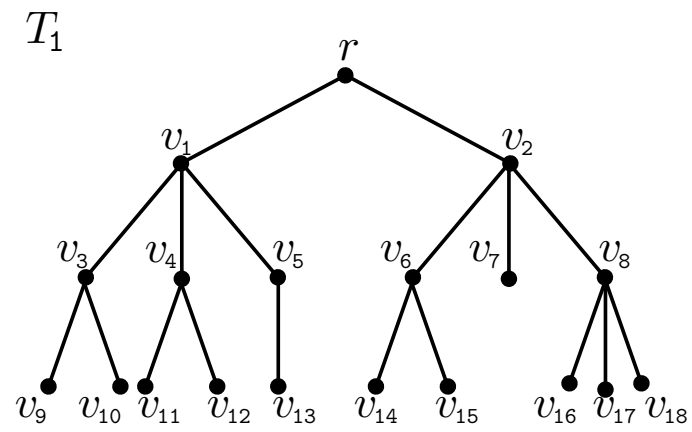


Figura 1.15: La gráfica T_1 , un árbol arraigado con raíz r .

Capítulo 2

Coloraciones

2.1. Conjuntos independientes

Un conjunto de vértices de una gráfica G es *independiente* si y sólo si ninguna pareja de vértices en el conjunto es adyacente. En otras palabras, $S \subseteq V(G)$ es independiente en G si y sólo si la subgráfica inducida por S en G no posee aristas. Claramente si S es independiente entonces cualquier $S' \subset S$ es independiente.

Un conjunto independiente de vértices es *máximo* (por contención) si no es subconjunto propio de ningún otro conjunto independiente de vértices.

Un conjunto independiente con el máximo número de elementos es un *conjunto independiente de cardinalidad máxima*.

Al número de vértices de un conjunto independiente de cardinalidad máxima de una gráfica G se le llama *número de independencia de G* y se denota por $\alpha(G)$. En la Figura 2.1 mostramos que $\alpha(Q_3) = 4$.

2.2. Coloración por vértices

Probablemente, la coloración de los vértices de una gráfica sea una de las áreas de la Teoría de las Gráficas que más atención haya recibido a lo largo de los años. Sin duda, este hecho se debe en gran medida a la relación que esta guarda con el conocido problema de los Cuatro Colores, el cual fue demostrado en 1976 por Kenneth Appel and Wolfgang Haken con la ayuda de una computadora. El Teorema de los Cuatro Colores fue el primer gran Teorema que ha sido demostrado con la ayuda de una computadora, es por eso

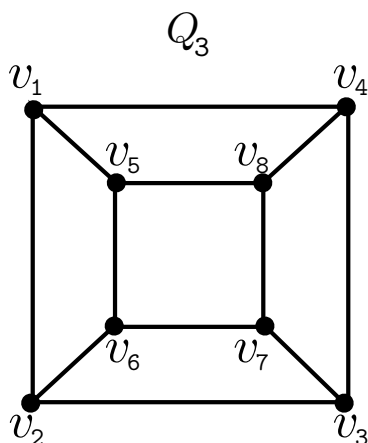


Figura 2.1: $\{v_1, v_3, v_6, v_8\}$ es un conjunto independiente de cardinalidad máxima para la gráfica Q_3 .

que la demostración no es plenamente aceptada por todos los matemáticos ya que sería impracticable por su cantidad de detalles que un humano la verificase manualmente.

Si G es una gráfica, una *coloración* de G es una asignación de elementos de un conjunto (a los que llamaremos *colores*) a los vértices de G de manera que a cada vértice $v \in V(G)$ le corresponda un color y sólo uno. Una coloración en la que se emplean k colores se define como *k-coloración*.

La definición anterior no excluye la posibilidad de que a dos vértices adyacentes se les asigne el mismo color, por lo que definiremos un tipo particular de coloración. Sea G una gráfica, entonces una *coloración propia* ó *buena coloración* de G es una asignación de colores a los vértices de G de manera que para cualesquiera $u, v \in V(G)$ con $uv \in A(G)$, el color de u es distinto al color de v .

En adelante, para simplificar, siempre que se hable de una coloración, se supondrá propia, a menos que se especifique lo contrario.

Si una gráfica tiene una n -coloración, entonces tiene también una $n + 1$ -coloración, una $n + 2$ coloración y, en general, una $n + z$ -coloración con $z \in \mathbb{N}$ y $n + z \leq |V(G)|$, este hecho da origen a la siguiente definición.

Una gráfica G es *n-coloreable* si existe una m -coloración de G para alguna $m \leq n$.

Claramente toda gráfica de orden n es n -coloreable y encontrar una n -

coloración no presenta dificultad. Un problema más interesante es saber cuál es el mínimo número k para el cual una gráfica G es k -coloreable.

El mínimo número para el cual una gráfica G es m -coloreable se denomina *número cromático* de G y se denota por $\chi(G)$. Si $\chi(G) = n$, entonces se dice que G es n -cromática.

Al colorear los vértices de una gráfica se obtienen varios subconjuntos de $V(G)$, según la coloración que se haya dado. Un conjunto de vértices a los que se les ha asignado el mismo color tiene la particularidad de que ningún elemento del conjunto es adyacente a otro del mismo conjunto. Dada una coloración de una gráfica G , al conjunto cuyos elementos son todos los vértices a los que se les ha asignado un mismo color se le llama *clase cromática*.

Las coloraciones que se muestran en la Figura 2.2 permiten ver que siempre es posible encontrar una 2-coloración para tales gráficas y por lo tanto $\chi(C_{2n}) = 2$.

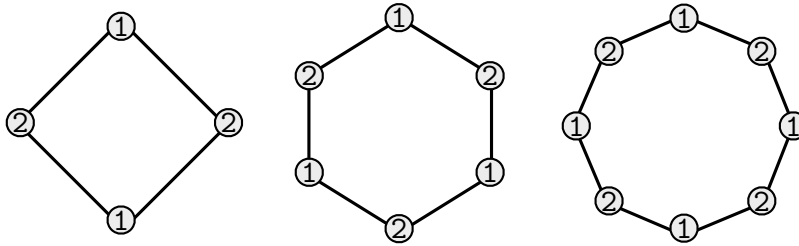


Figura 2.2: Ciclos de longitud 4, 6 y 8 respectivamente.

Siguiendo un método de coloración similar al hecho en la Figura 2.2 nos daremos cuenta que para dar una coloración propia a un ciclo de longitud impar no son suficientes dos colores, sin embargo bastará con uno más (Figura 2.3). Por lo tanto $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

Ahora si pensamos en $\chi(K_n)$ nos daremos cuenta de que en una gráfica de este estilo cada vértice es adyacente a todos los demás, por lo que deducimos que $\chi(K_n) = n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora que hemos encontrado algunas gráficas particulares cuyo número cromático es 2 (C_{2n}), podríamos preguntarnos si es posible caracterizar a todas las gráficas que cumplan con lo anterior. Esto es precisamente la intención del siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. *Para toda gráfica G , $\chi(G) = 2$ si y sólo si G es bipartita.*

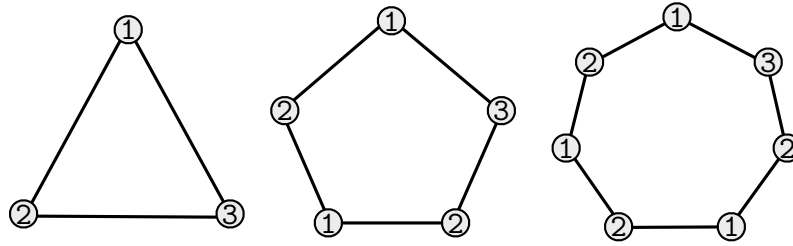


Figura 2.3: Ciclos de longitud 3, 5 y 7 respectivamente.

Demostración. Sea G una gráfica tal que $\chi(G) = 2$, entonces existen en G dos clases cromáticas que inducen una bipartición de los vértices de G , ya que si llamamos V_1 y V_2 a las clases cromáticas de una coloración dada sabemos que $V_1 \cup V_2 = V(G)$; $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$; $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y V_1, V_2 son conjuntos independientes, por lo que G es bipartita .

Por otro lado si G es una gráfica bipartita, $V(G) = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 dos conjuntos tales que $V_1, V_2 \neq \emptyset$. Asignando un color a todos los vértices de V_1 y otro a todos los de V_2 , lo cual es posible pues $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y V_1, V_2 son conjuntos independientes, habremos encontrado una 2-coloración de $V(G)$. Por lo tanto $\chi(G) = 2$. ■

Corolario 2.2.2. Si T es un árbol, con $n \geq 2$, entonces $\chi(T) = 2$.

Demostración. Sea $v \in V(T)$ asignemos la siguiente coloración a los vértices de T :

$$c(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } d(v, u) = 2r, \\ 1 & \text{si } d(v, u) = 2r + 1 \end{cases}$$

para todo $u \in V(T)$ y para alguna $r \in \mathbb{Z}$, con lo que hemos encontrado una 2-coloración para T , implicando que $\chi(T) = 2$. ■

Teorema 2.2.3. Sea $\Delta(G)$ el grado máximo de una gráfica G , entonces $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Demostración. Por inducción sobre el número de vértices, observemos que el teorema se cumple si la gráfica tiene uno ó dos vértices; y supongamos que toda gráfica G con $(n - 1)$ vértices y grado máximo $\Delta(G)$ es coloreable con $\Delta(G) + 1$ colores.

Consideremos una gráfica G con n vértices. Al quitar un vértice v junto con sus aristas incidentes, se sigue claramente que la gráfica $G' = G - v$ tiene $(n - 1)$ vértices con grado a lo más $\Delta(G)$. Por la hipótesis de inducción G' es $(\Delta(G') + 1)$ -coloreable; ahora observemos que v es adyacente a lo más a $\Delta(G)$ vértices en G , y por lo tanto se puede colorear a v con un color diferente a los usados en sus vecinos, con lo que terminamos la demostración. ■

A continuación enunciaremos y demostraremos el Teorema de Brooks.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Brooks). *Sea G una gráfica conexa, si $G \neq C_{2n+1}$ y $G \neq K_n$, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Demostración. Sea G una gráfica conexa, entonces procedamos por inducción sobre el número de vértices. Si $\Delta(G) = 0$, $G = K_1$; si $\Delta(G) = 1$, $G = K_2$; si $\Delta(G) = 2$, G es un camino, ó un ciclo de longitud par y $\chi(G) = 2$, y entonces el teorema se verifica para $n = 0, 1$ y 2 . Así, supongamos el teorema válido para todas las gráficas con $(n - 1)$ vértices.

Tomemos una gráfica con n vértices, y supongamos que G tiene un vértice de corte v . Al quitar el vértice de corte v , la gráfica $G' = G - v$ claramente tiene al menos dos componentes conexas C_1 y C_2 , con a lo más $(n - 2)$ vértices y grado a lo más $\Delta(G)$. Si $C_1 \cup \{v\}$ ó $C_2 \cup \{v\}$ son una gráfica completa ó un ciclo impar, el vértice de corte v tiene grado máximo en $C_1 \cup \{v\}$ ó en $C_2 \cup \{v\}$, siendo entonces que el grado máximo en $C_1 \cup \{v\}$ ó en $C_2 \cup \{v\}$ es a lo más $\Delta(G) - 1$, y por el Teorema 2.2.3 $C_1 \cup \{v\}$ es $(\Delta(C_1 \cup \{v\}) + 1)$ -coloreable ó $C_2 \cup \{v\}$ es $(\Delta(C_2 \cup \{v\}) + 1)$ -coloreable; esto es, en cualquier caso son a lo más $\Delta(G)$ coloreables. Y si $C_1 \cup \{v\}$ y $C_2 \cup \{v\}$ no son gráficas completas ni ciclos de longitud impar, por hipótesis de inducción son $\Delta(G)$ -coloreables. Sean c_1 y c_2 las coloraciones de $C_1 \cup \{v\}$ y $C_2 \cup \{v\}$ respectivamente; observemos que si $c_1(v) = c_2(v)$ entonces $c_1 \cup c_2$ es una coloración propia de G ; en caso contrario es posible permutar colores en $C_1 \cup \{v\}$ de manera que el color usado en v sea el mismo en ambas componentes obteniendo una coloración propia de G .

Por lo tanto supongamos que G es al menos 2-conexa, entonces tenemos dos casos de acuerdo a la conexidad de G .

Caso 1. G es 2-conexa pero no 3-conexa.

Supongamos que G contiene vértices con grado distinto de 2 ó $(n - 1)$, ya que si G contiene sólo vértices de grado 2 (es decir G es un ciclo par), entonces G es 2-coloreable, verificando con esto el teorema ($\Delta(G) = 2$). Sabemos que G no contiene sólo vértices de grado $(n - 1)$, ya que no es una gráfica completa. Si G contiene sólo vértices de grado 2 y de grado $(n - 1)$, entonces G debe contener 2 vértices de grado $(n - 1)$ y $(n - 2)$ vértices de grado 2, lo que implica que $\chi(G) = 3$, ya que los vértices de grado dos no son adyacentes entre sí y pueden colorearse con un mismo color, cumpliéndose el teorema.

Sea u un vértice de G tal que $2 < gr(u) < (n - 1)$; y $a, b \in V(G)$, entonces tenemos dos situaciones:

Si $G - u$ sigue siendo 2-conexa; sea $a = u$ y b un vértice a distancia dos de u (este vértice b existe, ya que u no es adyacente a todos los vértices de $G - u$).

Si $G - u$ no es 2-conexa, es decir es 1-conexa, consideremos dos bloques finales B_1 y B_2 de $G - u$ y como G es 2-conexa, sea $a \in B_1$ y $b \in B_2$ dos vértices de corte vecinos de u no adyacentes entre sí.

En las dos situaciones se tiene que G tiene dos vértices a y b a distancia dos, tal que $G - \{a, b\}$ es conexa y por lo tanto se puede usar la misma coloración que se describe en el *Caso 2*.

Caso 2. G es 3-conexa.

Sean a y b vértices a distancia dos en G , es decir $d(a, b) = 2$; la existencia de estos vértices se sigue del hecho de que G no es completa.

Sea w un vértice adyacente a a y a b . Como $G - \{a, b\}$ es conexa podemos ordenar los vértices de G de manera sucesiva $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tal que $v_1 = a$, $v_2 = b$ y cada vértice v_i con $i \geq 3$ está ordenado de forma no creciente de acuerdo a su distancia al vértice w , designando al vértice $v_n = w$ y para $1 \leq i \leq n$, v_i es adyacente a algún v_j con $j > i$. Ahora definamos una $\Delta(G)$ -coloración como sigue:

A los vértices a y b se les asigna el color 1, pues no son adyacentes, y coloreamos v_3, v_4, \dots, v_{n-1} en orden, cada uno con el primer color disponible del siguiente conjunto: $\{1, \dots, \Delta(G)\}$, lo cual es siempre posible, ya que cada vértice tiene al menos un vecino con una etiqueta mayor (y por lo tanto no ha sido coloreado), así, cada vértice es adyacente a lo más a $\Delta - 1$ vértices que ya han sido coloreados, y por lo tanto, hay un color disponible para colorearlo. Finalmente, observemos que w ya no tiene un vecino con una

etiqueta mayor, porque es el último vértice, pero tiene dos vecinos que tienen asignado el mismo color (el color 1). Como tiene a lo más Δ vecinos pero dos tienen el mismo color, w es adyacente a lo más a vértices de $\Delta - 2$ colores distintos. Aunque w no puede usar el color 1, aún resta un color disponible para colorearlo. Obteniendo así una $\Delta(G)$ -coloración.

$$\therefore \chi(G) \leq \Delta(G).$$

■

2.3. r -cubos Q_r

El r -cubo Q_r ($r \geq 1$) es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todas las r -adas de 0's y 1's, donde dos r -adas son adyacentes si difieren en exactamente una coordenada.

Observemos que $|V(Q_r)| = 2^r$, pues para cada entrada de cada vértice se tienen dos opciones, 0 ó 1. Otra observación importante es que para todo $v \in V(Q_r)$, $gr(v) = r$, pues recordemos que dos vértices en Q_r son adyacentes si difieren en exactamente una coordenada.

Con lo anterior y usando el Teorema 1.3.1 obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{v \in V(Q_r)} gr(v) = 2|A(Q_r)| = r \cdot 2^r.$$

Por lo que concluimos que $|A(Q_r)| = 2^{r-1} \cdot r$.

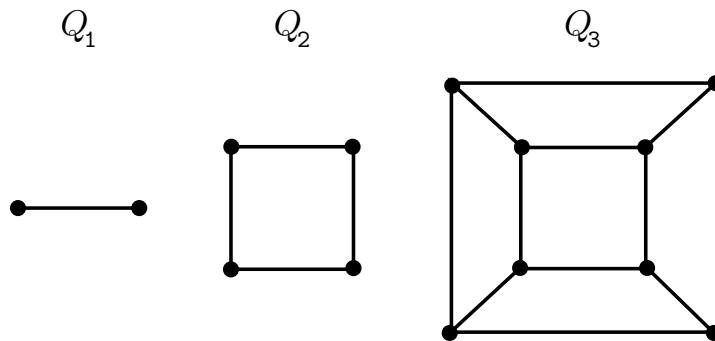


Figura 2.4: Se muestran Q_1 , Q_2 y Q_3 respectivamente.

Del Teorema 2.2.1 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.1. Sea $G = Q_r$, entonces $\chi(Q_r) = 2$.

Demostración. Demostraremos primero que Q_r es una gráfica bipartita.

Definamos dos subconjuntos de $V(Q_r)$, X y Y tales que:

$X = \{\text{vértices cuya representación binaria contiene un número par de 1's}\},$
 $Y = \{\text{vértices cuya representación binaria contiene un número impar de 1's}\}.$

La representación binaria de cualesquiera dos vértices adyacentes en Q_r cambia de 0 a 1 ó viceversa, cambiando con esto la paridad. Por lo tanto cualquier arista que incida en X , incide en Y y viceversa, además cualesquiera dos vértices en X ó en Y no pueden ser adyacentes pues difieren en más de una entrada. Por lo tanto Q_r es una gráfica bipartita.

Ahora haciendo uso del Teorema 2.2.1, obtenemos que $\chi(Q_r) = 2$. Por lo tanto, $\chi(Q_r) = 2$.

■

Capítulo 3

Coloración Estelar

En 1973 Branko Grünbaum [8], matemático croata actualmente profesor emérito de la Universidad de Washington en Seattle, consideró coloraciones propias de los vértices de una gráfica con la condición adicional de que las subgráficas inducidas por la unión de cualesquiera dos clases cromáticas fueran acíclicas. Grünbaum llamó a tales coloraciones, *coloraciones acíclicas*, y al mínimo r tal que G tiene una r -coloración acíclica, *número cromático acíclico de G* , denotado por $a(G)$.

Entre otros problemas, Grünbaum [8] sugirió requerir que la subgráfica inducida por la unión de cualesquiera dos clases cromáticas de una gráfica G fuera no sólo acíclica, sino también un bosque compuesto solamente de estrellas, es decir una coloración propia de los vértices evitando caminos de cuatro vértices 2-coloreados. Llamamos a tal coloración una *coloración estelar*.

Las coloraciones acíclicas y estelares han sido estudiadas principalmente para gráficas planas:

Grünbaum [8] conjeturó que cualquier gráfica plana podía ser coloreada acíclicamente con cinco colores, sin embargo demostró que podían ser coloreadas acíclicamente con nueve colores. La conjetura de Grünbaum fue demostrada posteriormente por Borodin [3] en 1979. Kostochka y Melnikov [10] muestran un ejemplo de una gráfica bipartita plana que requiere cinco colores para tener una coloración acíclica, demostrando con esto que el resultado de Borodin es óptimo.

En lo que a coloraciones estelares corresponde, en 2004 Albertson et al. [1] establecieron mediante una definición equivalente de coloración estelar para gráficas dirigidas que el mínimo número de colores necesarios para asignar arbitrariamente una coloración estelar a cualquier gráfica plana está entre 10

y 20. Sin embargo antes, en 2001 un corolario de un resultado de Nesetril y Ossona de Mendez [11] muestra que cualquier gráfica bipartita plana puede tener una coloración estelar con 18 colores, mientras que en 2009 Kierstead et al. [9] muestran una gráfica bipartita plana que requiere al menos 8 colores para tener una coloración estelar.

Las coloraciones estelares también han sido estudiadas para gráficas exteriormente planas (aquellas gráficas para las que existe una inmersión plana en \mathbb{R}^2 de tal manera que todos los vértices queden en la cara exterior) [7], de hecho Ramamurthi y Sanders [12] demuestran que si dichas gráficas son además bipartitas, entonces pueden tener una coloración estelar con cinco colores, y que además este resultado es óptimo.

Sin embargo es en [7] donde se presenta la mayor investigación en cuanto a cantidad de resultados sobre coloraciones estelares y números cromáticos estelares de varias familias de gráficas, pues Fertin et al. [7] dan cotas y valores exactos para el número cromático estelar de gráficas tales como: árboles, ciclos, gráficas bipartitas completas, rejillas, toros d -dimensionales, entre otras, es por eso que se tomo a dicho artículo como base para el presente trabajo.

3.1. Conceptos básicos

En otras palabras, una coloración estelar de una gráfica G no dirigida es una coloración propia de los vértices de G (es decir, a ninguna pareja de vecinos se les asigna el mismo color) tal que ningún camino de longitud 3 en G es bicolorado. El *número cromático estelar* de una gráfica G no dirigida, denotado por $\chi_s(G)$, es el entero positivo más pequeño k para el cual G admite una coloración estelar con k colores.

Todas las gráficas consideradas aquí son no dirigidas, en las siguientes definiciones (y en el resto del trabajo) el término coloración se referirá a coloración de gráficas por vértices. Una coloración propia de una gráfica G es una etiquetación de los vértices de G tal que a ninguna pareja de vecinos en G se les asigna la misma etiqueta. Usualmente, la etiquetación (o coloración) del vértice x es denotada por $c(x)$. De aquí en adelante todas las coloraciones que se definan y se usen serán coloraciones propias.

Definición. Una *coloración estelar* de una gráfica G es una coloración propia de G tal que ningún camino de longitud 3 en G es bicolorado.

Damos también la definición de coloración acíclica, la cual será útil para

nuestro propósito.

Definición. Una *coloración acíclica* de una gráfica G es una coloración propia de G tal que ningún ciclo en G es bicolorado.

Definimos por *número cromático estelar* (respectivamente *número cromático acíclico*) de una gráfica G al mínimo número de colores necesarios para que G tenga una coloración estelar (respectivamente acíclica). Se denota $\chi_s(G)$ para número cromático estelar y $a(G)$ para número cromático acíclico. La Figura 3.1 muestra un ejemplo de coloración estelar.

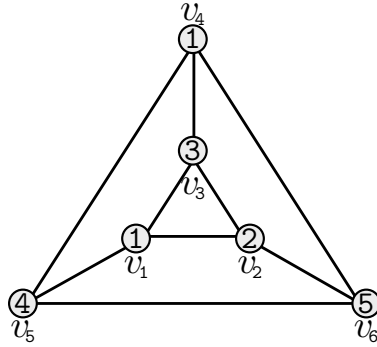


Figura 3.1: Se necesitan tres colores diferentes para colorear el triángulo interior, ahora el vértice v_4 puede recibir el color $\{1\}$ (sucede lo mismo si se le asigna el color $\{2\}$), forzando a v_5 a tener el color $\{4\}$, pues de otra forma obtendríamos al menos un camino bicolorado de longitud 3, y así v_6 recibe color $\{5\}$, ya que si recibiera el color $\{3\}$, obtendríamos un camino de longitud 3 bicolorado (v_1v_3, v_3v_4, v_4v_6) .

El *número cromático estelar* (respectivamente *acíclico*) de una familia \mathcal{F} de gráficas es el mínimo número de colores necesarios para que cualquier gráfica perteneciente a \mathcal{F} tenga una coloración estelar (respectivamente acíclica). Es denotada por $\chi_s(\mathcal{F})$ para número cromático estelar y $a(\mathcal{F})$ para número cromático acíclico.

3.2. Generalidades

Proposición 3.2.1. Para cualquier gráfica G $a(G) \leq \chi_s(G)$.

Demostración. Para cualquier gráfica G , cualquier coloración estelar de G es también una coloración acíclica de G , pues un ciclo de longitud mayor ó igual que 4 contiene una trayectoria de longitud mayor ó igual que 3, por lo que necesita al menos tres colores para tener una coloración propia; y el ciclo de longitud 3 sólo tiene coloraciones propias con tres colores, implicando así que toda coloración estelar de una gráfica G sea también una coloración acíclica. Además recordemos que un ciclo puede ser coloreado con dos colores si es de longitud par, o con tres colores si es de longitud impar, por lo cual un ciclo sólo puede ser bicolorado si es de longitud par.

$$\therefore a(G) \leq \chi_s(G).$$

■

Observemos que la cota de la Proposición 3.2.1 es justa, pues tanto el número cromático estelar, como el número cromático acíclico del ciclo de longitud 4 es 3, por lo que es un ejemplo de gráficas cumpliendo la igualdad de la cota anterior. Albertson et al. [1] en el Teorema 6.3 construyen una sucesión de gráficas $G_1, G_2, G_3 \dots$ tales que $a(G_t) = t$, mientras que $\chi_s(G_t) = t \frac{(t+1)}{2}$. Por lo tanto, el número cromático acíclico puede estar muy alejado del número cromático estelar.

Proposición 3.2.2. *Para cualquier gráfica G de orden n y tamaño m se tiene:*

$$\chi_s(G) \geq \frac{2n + 1 - \sqrt{\gamma}}{2}, \text{ donde } \gamma = 4n(n - 1) - 8m + 1.$$

Demostración. Encontremos primero una cota inferior para $a(G)$, el número cromático acíclico de una gráfica G , con n vértices y m aristas. Supongamos que coloreamos acíclicamente a G con k colores $1, 2, \dots, k$ ($a(G) = k$). Tomemos cualesquiera dos de esos colores, digamos i y j , y sea V_i (V_j respectivamente) la clase cromática del color i (respectivamente del color j). Y sea $G[V_i \cup V_j]$, la gráfica inducida por $V_i \cup V_j$, la cual es por definición acíclica, de hecho es un bosque. Sea e_{ij} el número de aristas de $G[V_i \cup V_j]$; entonces:

$$e_{ij} \leq |V_i| + |V_j| - 1 \quad (I_{ij}),$$

pues $G[V_i \cup V_j]$ es un bosque.

Ahora sumemos la desigualdad (I_{ij}) para todas las parejas distintas i, j con $1 \leq i \neq j \leq k$.

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq k} e_{ij} \leq \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} |V_i| + |V_j| - 1$$

Una manera de reacomodar los sumandos del miembro derecho de la desigualdad sin contemplar el -1 es la siguiente:

Empecemos apareando a $|V_1|$ con $|V_2|, |V_3|, \dots, |V_k|$ y continuemos de la misma manera con los demás:

$$k-1 \left\{ \begin{array}{cccccc} |V_1| + |V_2| & |V_2| + |V_3| & |V_3| + |V_4| & & |V_{k-2}| + |V_{k-1}| & |V_{k-1}| + |V_k| \\ |V_1| + |V_3| & |V_2| + |V_4| & |V_3| + |V_5| & & |V_{k-2}| + |V_k| & \\ |V_1| + |V_4| & |V_2| + |V_5| & |V_3| + |V_6| & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ |V_1| + |V_{k-2}| & |V_2| + |V_{k-1}| & |V_3| + |V_k| & + \dots + & & \\ |V_1| + |V_{k-1}| & |V_2| + |V_k| & & & & \\ |V_1| + |V_k| & & & & & \end{array} \right.$$

Observemos que $|V_1|$ aparece $k - 1$ veces en la primera columna, $|V_2|$ aparece $k - 2$ veces en la segunda columna y una más en la primera, dando un total de $k - 1$ veces. Observemos que $|V_s|$, con $s = 1, 2, 3 \dots k$, aparecerá $k - s$ veces en la columna donde se aparea, y $s - 1$ veces más en las columnas anteriores. Por lo que cada $|V_s|$ aparece exactamente $k - 1$ veces.

Por lo anterior podemos agrupar los sumandos de la siguiente forma:

$$k-1 \left\{ \begin{array}{l} |V_1| + |V_2| + |V_3| + \dots |V_{k-1}| + |V_k| \\ |V_1| + |V_2| + |V_3| + \dots |V_{k-1}| + |V_k| \\ \vdots \\ |V_1| + |V_2| + |V_3| + \dots |V_{k-1}| + |V_k| \end{array} \right.$$

Pero además $|V_1| + |V_2| + |V_3| + \dots |V_{k-1}| + |V_k| = n$, pues los V_i son las clases cromáticas, encontrando así que la suma anterior es igual a $n(k - 1)$.

Ahora observemos el término -1 , el cual no consideramos antes, dicho término aportará menos una unidad a la suma anterior por cada apareamiento de la forma $|V_i| + |V_j|$, por lo que al tener k colores será: $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$.

Obteniendo $\sum_{1 \leq i \neq j \leq k} e_{ij} \leq \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} (|V_i| + |V_j| - 1) = n(k - 1) - \frac{k(k-1)}{2}$, ahora $\sum_{1 \leq i \neq j \leq k} e_{ij} = m$, pues recordemos que e_{ij} es el número de aristas en la gráfica inducida correspondiente.

Entonces $m \leq n(k-1) - \frac{k(k-1)}{2}$, de donde $m - n(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} \leq 0$

$$\Rightarrow 2m - 2n(k-1) + k(k-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 2nk - k + 2n + 2m \leq 0$$

$$\Rightarrow k^2 - (2n+1)k + 2(n+m) \leq 0$$

Ahora utilizando: si $ax^2 + bx + c \leq 0$, entonces $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \leq x \leq \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Así,

$$k \leq \frac{2n+1+\sqrt{(2n+1)^2-4(2(n+m))}}{2}$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{2n+1+\sqrt{4n^2+4n+1-8n-8m}}{2}$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{2n+1+\sqrt{4n^2-4n-8m+1}}{2}$$

$$\therefore k \leq \frac{2n+1+\sqrt{4n(n-1)-8m+1}}{2}.$$

De igual manera obtenemos $k \geq \frac{2n+1-\sqrt{4n(n-1)-8m+1}}{2}$, y si llamamos a $\gamma = 4n(n-1) - 8m + 1$ tenemos:

$$\frac{2n+1-\sqrt{\gamma}}{2} \leq k \leq \frac{2n+1+\sqrt{\gamma}}{2}.$$

Sin embargo, el miembro derecho de la desigualdad anterior no ofrece información útil, ya que para cualquier gráfica con al menos una arista siempre se tiene $\gamma \geq 1$.

Efectivamente si $m = 1$, entonces $n = 2$ y sustituyendo en γ obtenemos:

$\gamma = 4(2)(2-1) - 8(1) + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$, de aquí que $k \leq \frac{2n+1+\sqrt{1}}{2} = \frac{2n+2}{2} = n+1$, por lo que $k \leq n+1$.

Finalmente, recordando que $a(G) = k$ obtenemos la siguiente ecuación:

$$a(G) = k \geq \frac{2n+1+\sqrt{\gamma}}{2}.$$

Ahora por la Proposición 3.2.1 concluimos que $\chi_s(G)$ también satisface la desigualdad:

$$\begin{aligned}\chi_s(G) &\geq a(G) = k \geq \frac{2n+1+\sqrt{\gamma}}{2} \\ \therefore \chi_s(G) &\geq \frac{2n+1+\sqrt{\gamma}}{2}.\end{aligned}$$

■

Observemos que la cota de la Proposición 3.2.2 es óptima para varias familias de gráficas, tales como árboles (en este caso $\Delta = (2n-3)^2$, y así $a(G) \geq 2$), ciclos (en este caso $2n-4 < \sqrt[2]{\Delta} < 2n-3$, y por lo tanto $a(G) \geq 3$), y gráficas completas (en este caso, $\Delta = 1$, y entonces $a(G) \geq n$).

Teorema 3.2.3. *(Relación entre coloración acíclica y coloración estelar)*
Para cualquier gráfica G , si el número cromático acíclico de G satisface $a(G) \leq k$, entonces el número cromático estelar de G satisface $\chi_s(G) \leq k \cdot 2^{k-1}$.

Para poder demostrar este teorema, usaremos el siguiente lema:

Lema 3.2.4. *Sea T un árbol y V_1, V_2 la bipartición de su conjunto de vértices, entonces existe una coloración estelar de T $c: V(T) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ tal que si $v \in V_1$ entonces $c(v) \in \{0, 2\}$ y si $v \in V_2$ entonces $c(v) \in \{1, 3\}$.*

Demostración. Sea v un vértice perteneciente a V_1 , damos la siguiente coloración c a los vértices de T : $c(v) = 0$ y para $x \in V(T) \setminus \{v\}$, $c(x) = d(v, x)$ (mód 4). Demostremoslo por reducción al absurdo, supongamos que existe un camino $C = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$ de longitud 3 bicoloreado con los colores m y n (con $m < n$) en T . Supongamos sin pérdida de generalidad que $c(v_1) = m$, $c(v_2) = n$, $c(v_3) = m$ y $c(v_4) = n$, entonces tendríamos que $d(v, v_1) \equiv m$ (mód 4) y $d(v, v_3) \equiv m$ (mód 4) (también que $d(v, v_2) \equiv n$ (mód 4) y $d(v, v_4) \equiv n$ (mód 4)), implicando que existen dos trayectorias distintas de v a v_3 (Figura 3.2), también de v a v_1 , contradiciendo con esto que T sea un árbol. Por lo tanto c es una coloración estelar. ■

Es claro que la coloración cumple los requerimientos de la proposición, pues como está definida, los vértices coloreados con el color $\{0\}$ serán adyacentes a vértices coloreados con el color $\{1\}$ ó $\{3\}$, vértices coloreados con

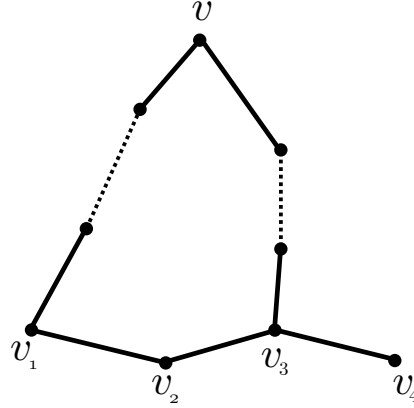


Figura 3.2: La existencia de dos trayectorias distintas de v a v_3 implica la existencia de un ciclo y contradice que T sea un árbol.

el color $\{2\}$ serán adyacentes a vértices coloreados con el color $\{3\}$ ó $\{1\}$, y análogamente para los vértices coloreados con los colores $\{1\}$ y $\{3\}$.

Ahora demostremos el resultado:

Demostración del Teorema 3.2.3 Sea $G = (V, A)$ una gráfica con $a(G) \leq k$ y sean V_1, V_2, \dots, V_k las clases cromáticas de una coloración acíclica de los vértices de G con k colores. Las clases cromáticas forman una partición del conjunto de los vértices de G y para cada $i \neq j$, perteneciente a $\{1, \dots, k\}$ la subgráfica inducida por $V_i \cup V_j$, denotada por $G[V_i \cup V_j]$, es un bosque. Para cada $G[V_i \cup V_j]$ ($i < j$), denotamos por $c_{i,j}$ una coloración estelar de los vértices con cuatro colores tal que si $v \in V_i$ entonces $c_{i,j}(v) \in \{0, 2\}$ y si $v \in V_j$ entonces $c_{i,j}(v) \in \{1, 3\}$.

Definamos la siguiente coloración c de los vértices de G : sea $u \in V$, entonces hay una única $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $u \in V_i$, sea:

$$c(u) = (c_{1,i}(u), \dots, c_{i-1,i}(u), *, c_{i,i+1}(u), \dots, c_{i,k}(u)).$$

Observemos que por la coloración definida antes, los términos que están antes de la estrella son coloreados con $\{1, 3\}$, mientras que los que están después son coloreados con $\{0, 2\}$, es decir para cada una de las $k-1$ entradas (pues no existe la entrada $c_{i,i}(u)$) de $c(u)$, existen dos posibilidades para colorear, y dado que se tienen k colores, se sigue inmediatamente que usamos

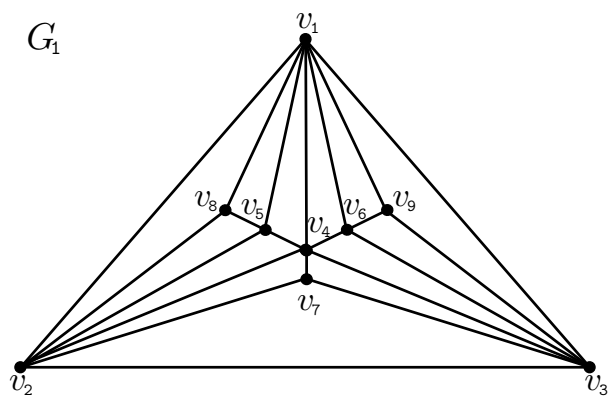
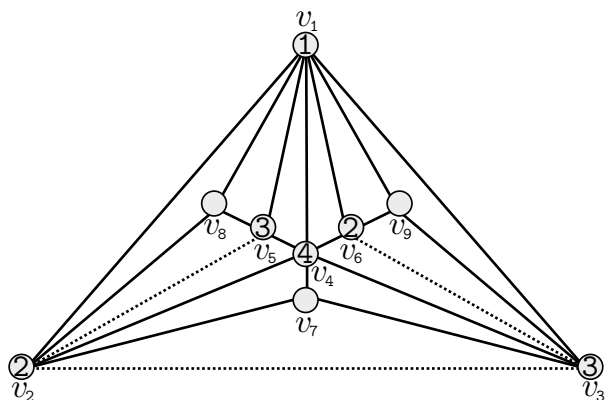
a lo más $k \cdot 2^{k-1}$ colores. Es claro que c es una coloración propia, pues si $xy \in A$ entonces x y y pertenecen a diferentes clases cromáticas, y por definición $c(x) \neq c(y)$. Ahora tenemos que demostrar que no contiene caminos de longitud 3 bicolorados. Hagámoslo por reducción al absurdo, supongamos que existe un camino C con $V(C) = \{u, v, w, t\}$ y $A(C) = \{uv, vw, wt\}$, por la forma en que está definida la coloración c , tenemos que los vértices de C están contenidos en $V_i \cup V_j$ para algunos $i < j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $u, w \in V_i$ y $v, t \in V_j$; si $c(u) = c(w)$ y $c(v) = c(t)$, entonces tenemos que $c_{i,j}(u) = c_{i,j}(w)$ y $c_{i,j}(v) = c_{i,j}(t)$, lo cual es imposible porque no hay caminos de longitud 3 bicolorados en $G[V_i \cup V_j]$ con la coloración $c_{i,j}$. Esto último completa la prueba. ■

Fue Branko Grünbaum [8] quien relacionó coloración estelar y coloración acíclica, demostrando que cualquier gráfica plana tiene número cromático acíclico menor o igual a 9, implicando por el Teorema 3.2.3 que cualquier gráfica plana tiene número cromático estelar menor o igual a $9(2^8) = 2304$. Sin embargo esta propiedad puede ser generalizada para cualquier gráfica G .

Como corolario del Teorema 3.2.3, podemos determinar una cota superior para $\chi_s(\mathcal{P})$, donde \mathcal{P} denota la familia de gráficas planas. Borodin [3] demostró que cualquier gráfica plana tiene una coloración acíclica con a lo más 5 colores. Por lo tanto por el Teorema 3.2.3 deducimos que $\chi_s(\mathcal{P}) \leq 80$. Sin embargo, un resultado de [11] aplicado a la familia \mathcal{P} sostiene que $\chi_s(\mathcal{P}) \leq 30$, y este resultado fue después mejorado en [1], donde fue demostrado que $\chi_s(\mathcal{P}) \leq 20$. Sobre cotas inferiores, existe una gráfica plana G_1 para la cual cualquier coloración estelar necesita seis colores (esta gráfica es mostrada en la Figura 3.3).

De hecho notemos que necesitamos al menos cuatro colores para asignar una coloración estelar a los vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 , ya que la subgráfica inducida por esos cuatro vértices es isomorfa a K_4 , y $\chi_s(K_4) = 4$, por lo cual usemos los colores 1, 2, 3 y 4 para colorear a v_1, v_2, v_3 y v_4 respectivamente. Sin embargo cuatro colores no son suficientes para asignar una coloración estelar a G_1 , pues al colorear a G_1 con cuatro colores tendríamos que $c(v_5) = 3$, ya que v_5 es adyacente a vértices coloreados con $\{1, 2, 4\}$, dejando a v_6 sin color a asignar (Figura 3.4), pues v_6 es adyacente a vértices coloreados con $\{1, 3, 4\}$, siendo $\{2\}$ el único color que podría tomar, pero de esta forma obtendríamos al menos un camino de longitud 3 bicolorado, el camino formado por las aristas $\{v_5v_2, v_2v_3, v_3v_6\}$. Por lo tanto, $\chi_s(G_1) \geq 5$.

Usemos entonces cinco colores. Si $c(v_5) = 3$, entonces $c(v_6) = 5$ y $c(v_7) =$

Figura 3.3: La gráfica G_1 Figura 3.4: Caso $c(v_6) = 2$.

5; pero de esta forma es imposible asignar un color a v_9 (Figura 3.5), pues al ser adyacente a vértices coloreados con $\{1, 3, 5\}$, sólo podría ser coloreado con $\{2\}$ ó $\{4\}$, pero si $c(v_9) = 2$ entonces el camino formado por las aristas $\{v_9v_3, v_3v_2, v_2v_5\}$ sería un camino de longitud 3 bicolorado, de igual manera si $c(v_9) = 4$ obtendríamos el camino de longitud 3 bicolorado formado por las aristas $\{v_7v_4, v_4v_6, v_6v_9\}$.

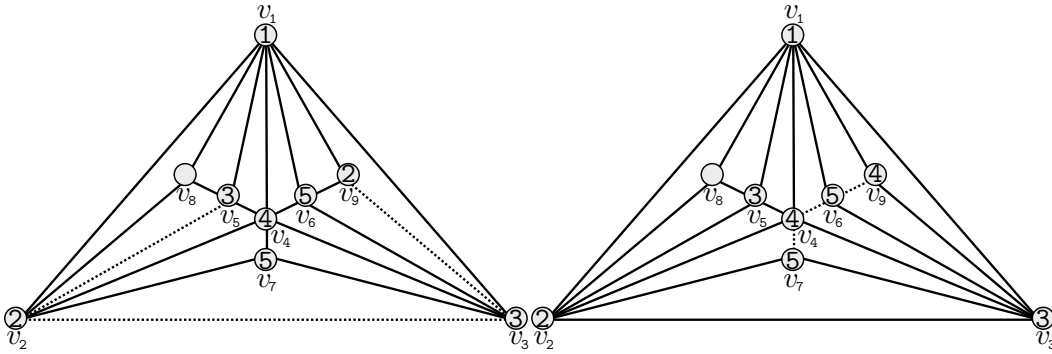


Figura 3.5: Casos $c(v_9) = 2$ y $c(v_9) = 4$, respectivamente.

Por lo tanto $c(v_5) = 5$. Ahora si $c(v_6) = 2$, entonces $c(v_7) = 5$ y de esta forma no se le puede asignar color a v_8 (Figura 3.6), pues v_8 es adyacente a vértices coloreados con $\{1, 2, 5\}$, por lo que sólo se le podrían asignar los colores $\{3, 4\}$, pero si $c(v_8) = 3$ obtendríamos al menos un camino de longitud 3 bicolorado, el camino formado por las aristas $\{v_8v_2, v_2v_3, v_3v_6\}$, y si $c(v_8) = 4$ el camino de longitud 3 formado por las aristas $\{v_8v_5, v_5v_4, v_4v_7\}$ sería bicolorado.

Finalmente analicemos los casos $c(v_6) = 5$ y $c(v_7) = 1$ ó $c(v_7) = 5$. En el primer caso es imposible colorear a $c(v_8)$ (Figura 3.7), pues al ser adyacente a vértices coloreados con $\{1, 2, 5\}$ sólo puede tomar los colores $\{3, 4\}$, pero si $c(v_8) = 3$, el camino de longitud 3 formado por las aristas $\{v_8v_1, v_1v_3, v_3v_7\}$ sería bicolorado, lo mismo sucede si $c(v_8) = 4$ pues el camino de longitud 3 formado por las aristas $\{v_8v_5, v_5v_4, v_4v_6\}$ sería bicolorado en este caso.

El segundo caso implica que $c(v_8) = 3$ pues a v_8 sólo se le pueden asignar los colores $\{3, 4\}$, pero si $c(v_8) = 4$, el mismo camino de longitud 3 mencionado en el caso anterior sería bicolorado, y en este caso v_9 no puede ser coloreado (Figura 3.8), ya que v_9 es adyacente a vértices coloreados con los colores $\{1, 3, 5\}$, por lo que sólo se le podría asignar algún color en el

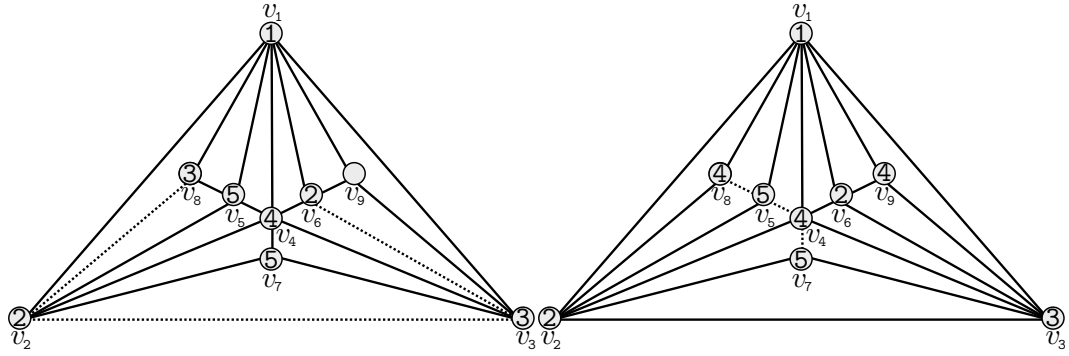


Figura 3.6: Casos $c(v_8) = 3$ y $c(v_8) = 4$, respectivamente.

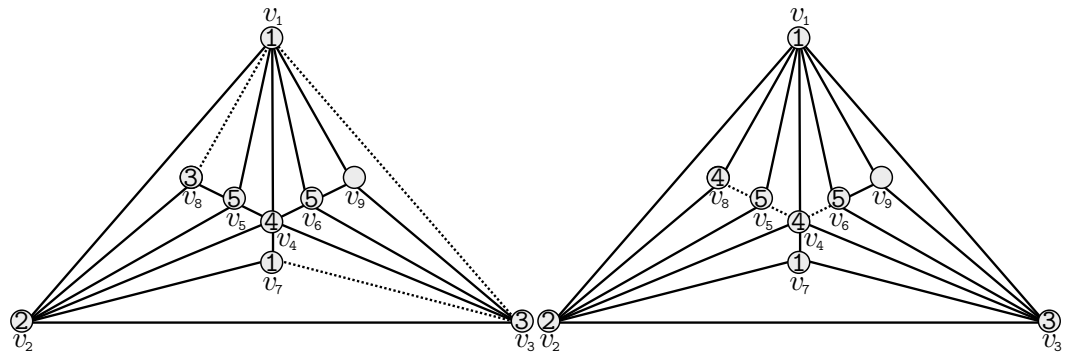


Figura 3.7: Casos $c(v_8) = 3$ y $c(v_8) = 4$, respectivamente.

conjunto $\{2, 4\}$, pero si $c(v_9) = 2$, el camino de longitud 3 formado por las aristas $\{v_9v_3, v_3v_2, v_2v_8\}$ sería bicolorado, de igual manera si $c(v_9) = 4$, pues el camino formado por las aristas $\{v_9v_6, v_6v_4, v_4v_5\}$ también sería bicolorado. Por lo tanto 5 colores no son suficientes para asignar una coloración estelar a G_1 , por lo que $\chi_s(G_1) \geq 6$, de hecho basta asignar en la coloración anterior el color $\{6\}$ al vértice v_9 para que G_1 tenga una coloración estelar con 6 colores.

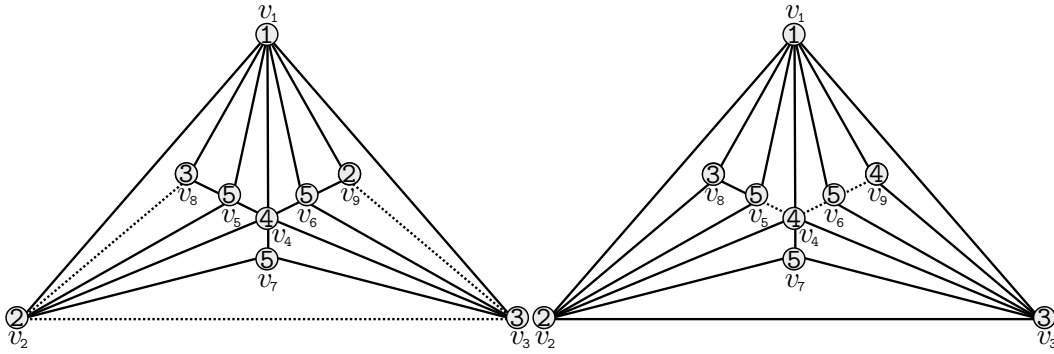


Figura 3.8: Casos $c(v_9) = 2$ y $c(v_9) = 4$, respectivamente.

El *cuello* ó *cintura* g de una gráfica G es la longitud de su ciclo más corto. En [4], es demostrado que si G es plana con cuello $g \geq 5$ (respectivamente ≥ 7), entonces $a(G) \leq 4$ (respectivamente ≤ 3). De esto último, junto con el Teorema 3.2.3, deducimos lo siguiente:

Corolario 3.2.5. *Si G es una gráfica plana con cuello $g \geq 5$, entonces $\chi_s(G) \leq 32$. Si G es una gráfica plana con cuello $g \geq 7$, entonces $\chi_s(G) \leq 12$.*

Demostración. Para el primer resultado:

Sea g el cuello de una gráfica G , si $g \geq 5$, entonces $a(G) \leq 4$ y por el Teorema 3.2.3 si $a(G) \leq 4$, entonces $\chi_s(G) \leq 4(2)^{3-1} = 32$.

$$\therefore \chi_s(G) \leq 32.$$

Para el segundo resultado:

Sea g el cuello de una gráfica G , si $g \geq 7$, entonces $a(G) \leq 3$ y por el Teorema 3.2.3 si $a(G) \leq 3$, entonces $\chi_s(G) \leq 3(2)^{3-1} = 12$.

$$\therefore \chi_s(G) \leq 12.$$



Sin embargo, un resultado de [11] implica que $\chi_s(G) \leq 14$ para cualquier gráfica G de cuello $g \geq 5$. Cuando el cuello g satisface $g \geq 7$, entonces el Teorema 1 en [11] implica que $\chi_s(G) \leq 14$, lo cual no mejora la cota del Corolario 3.2.5.

Muchas gráficas son productos cartesianos de otras gráficas (r -cubos, rejillas, toros), por lo que es útil tener una cota superior para el número cromático estelar de un producto cartesiano de gráficas. Recordemos que el *producto cartesiano* de dos gráficas $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ denotado por $G \square G'$, es la gráfica tal que el conjunto de vértices es $V \times V'$ y dos vértices (x, x') y (y, y') están unidos por una arista si y sólo si $x = y$ y $x'y'$ es una arista de G' ó $x' = y'$ y xy es una arista de G .

Teorema 3.2.6. *Para cualesquiera dos gráficas G y H , $\chi_s(G \square H) \leq \chi_s(G) \cdot \chi_s(H)$.*

Demostración. Supongamos que $\chi_s(G) = g$ y $\chi_s(H) = h$, y sea C_G (respectivamente C_H) una coloración estelar de G (respectivamente de H) usando g (respectivamente h) colores. En este caso, asignamos a cualquier vértice (u, v) de $G \square H$ el color $(C_g(u), C_h(v))$. Esta coloración usa gh colores y define una coloración estelar. Supongamos que existe un camino C de longitud 3 que es bicolorado en $G \square H$, con $V(C) = \{x, y, z, t\}$ y $A(C) = \{xy, yz, zt\}$. Dependiendo de la composición de los pares ordenados correspondientes a los vértices del camino, tenemos ocho posibles caminos. Consideraremos sólo cuatro de ellos pues al permutar la primer componente por la segunda componente de cada pareja ordenada obtenemos los demás casos. Los cuatro posibles caminos son:

- (1) $x = (u, v), y = (u, v_1), z = (u, v_2), t = (u, v_3)$
- (2) $x = (u, v), y = (u, v_1), z = (u, v_2), t = (u_4, v_2)$
- (3) $x = (u, v), y = (u, v_1), z = (u_2, v_1), t = (u_2, v_4)$
- (4) $x = (u, v), y = (u, v_1), z = (u_2, v_1), t = (u_5, v_1)$

En el primer caso, C no puede ser bicolorado, pues si así fuera implicaría que el camino formado por las aristas: $\{vv_1, v_1v_2, v_2v_3\}$ fuera bicolorado en H , y no lo es. Para el segundo caso basta observar que y y t tienen asignados colores diferentes, pues $v_1v_2 \in A(H)$. Para el tercer caso es suficiente notar

que x y z tienen asignados colores diferentes ya que $vv_1 \in A(H)$. Para el último caso funciona el mismo argumento del caso anterior. ■

Observemos que la igualdad en la cota del Teorema anterior se cumple si se considera el producto cartesiano de cualquier estrella de 2 o más picos con la gráfica completa de orden 2, pues el número cromático estelar de cualquier estrella, al igual que el de K_2 es 2, mientras que el del producto cartesiano de tales gráficas es 4. Sin embargo, si consideramos el producto cartesiano de la gráfica completa de orden 2 con el ciclo de longitud 5, son necesarios sólo 4 colores para asignar una coloración estelar a dicho producto, que es la misma cantidad necesaria para asignar una coloración estelar al ciclo de longitud 5. En este caso en particular, el número cromático estelar es la mitad de lo que muestra la cota del Teorema 3.2.6. Así que la cota es justa, pero en general puede estar bastante alejada del valor real.

Proposición 3.2.7. *Para cualquier gráfica G y para cualquier α , tal que $1 \leq \alpha \leq |V(G)|$ con G_1, \dots, G_p las p componentes conexas obtenidas al quitar α vértices a G , se tiene $\chi_s(G) \leq \max_i \chi_s(G_i) + \alpha$.*

Demostración. Asignemos una coloración estelar a cada G_i , después procedamos a reconectarlos agregando los α vértices antes eliminados, usando un nuevo color para cada uno de ellos. Cualquier camino de longitud 3 en cualquier G_i tiene una coloración estelar por construcción, y si dicho camino empieza en G_i y termina en G_j con $i \neq j$, entonces contiene al menos uno de los α vértices, los cuales tienen color único. Por lo tanto ningún camino de longitud 3 puede ser bicolorado, y tenemos una coloración estelar de G . ■

Nota 3.2.8. Para cualquier $\alpha \geq 1$, el resultado anterior es óptimo para gráficas completas bipartitas $K_{n,m}$. Efectivamente, sin pérdida de generalidad supongamos $n \leq m$ y sea $\alpha = n$ vértices de la partición V_n . Obtenemos entonces m vértices aislados, los cuales pueden ser coloreados individualmente con un sólo color. Después, asignemos un único color a los $\alpha = n$ vértices. Obtenemos entonces una coloración estelar con $n + 1$ colores.

Recordemos que el *número de independencia* de una gráfica G , $\alpha(G)$, es la cardinalidad del conjunto independiente más grande de G .

Proposición 3.2.9. *Para cualquier gráfica G , $\chi_s(G) \leq 1 + |V(G)| - \alpha(G)$, donde $\alpha(G)$ es el número de independencia de G .*

Demostración. Sea S un conjunto independiente máximo en G . Procedamos a colorear cada vértice de S con el color c , y asignemos colores distintos dos a dos a los demás vértices. Esta coloración tiene el número de colores deseado. Es claramente una coloración propia, y es también una coloración estelar, pues hay sólo un color que es usado a lo más dos veces. ■

Nota 3.2.10. El resultado anterior es óptimo para gráficas r -partitas completas K_{S_1, S_2, \dots, S_p} .

Capítulo 4

Número Cromático Estelar de Algunas Familias de Gráficas

4.1. Árboles y ciclos

Proposición 4.1.1. *Sea \mathcal{F}_r , la familia de bosques tal que r es el radio máximo sobre todos los árboles contenidos en \mathcal{F}_r . En este caso $\chi_s(\mathcal{F}_r) = \min\{3, r + 1\}$.*

Demostración. Sea F un bosque contenido en \mathcal{F}_r . Si $r = 0$, el resultado es trivial, pues F no contiene aristas, por lo cual podemos colorear a los vértices de F con solamente un color, obteniendo: $\chi_s(F) = \min\{3, 1\} = 1$. Si $r = 1$, F está compuesto de vértices aislados y/o de estrellas. Por lo tanto coloreamos cada vértice aislado, así como el centro de cada estrella de F con el color $\{1\}$, y a los vértices restantes con el color $\{2\}$, obteniendo $\chi_s(F) = \min\{3, 2\} = 2$. Esta coloración es propia, y dado que en este caso F no contiene caminos de longitud 3, se sigue de inmediato que es una coloración estelar. Ahora supongamos $r \geq 2$. Entonces arraiguemos arbitrariamente cada árbol de F , y asignemos un color a cada vértice v , de profundidad d_v en F , como sigue: $c(v) = d_v \pmod{3}$. Claramente $c(v)$ es una coloración propia, ahora demostraremos que $c(v)$ es una coloración estelar, procedamos por reducción al absurdo y supongamos que existe un camino bicolorado de longitud 3 en F , el camino bicolorado se vería como se muestra en la Figura 4.1, encontrando dos trayectorias distintas de r a v_3 , contradiciendo con esto que F es un árbol. Por lo tanto $c(v)$ es una coloración estelar. ■

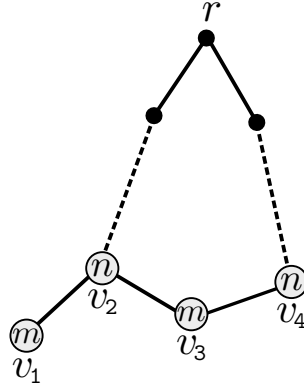


Figura 4.1: $c(v_1) = c(v_3) = m$, mientras que $c(v_2) = c(v_4) = n$.

En la Figura 4.2 observamos una coloración estelar para un árbol.

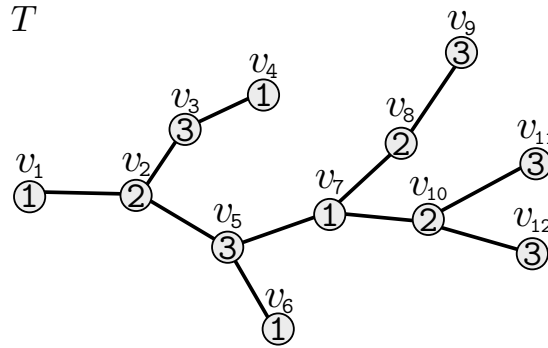


Figura 4.2: $r(T) = 3$, entonces por la Proposición 4.1.1 tenemos $\chi_s(T) = 3$.

Proposición 4.1.2. *Sea C_n un ciclo de n vértices, con $n \geq 3$. Entonces:*

$$\chi_s(C_n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n=5, \\ 3 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Observemos primero en la Figura 4.3, que $\chi_s(C_5) = 4$.

Ahora supongamos que $n \neq 5$, entonces son necesarios al menos tres colores para asignar una coloración estelar a C_n . Procedamos a demostrar por casos.

Caso 1. $n = 3k$.

En este caso, coloreamos alternadamente los vértices de C_n con los colores $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$. De esta forma, para cualquier vértice u sus dos vecinos tienen asignado distinto color, obteniendo así una coloración estelar. Por lo tanto $\chi_s(C_{3k}) \leq 3$.

Caso 2. $n = 3k + 1$.

En este caso, coloreamos $3k$ vértices consecutivos de C_n , repitiendo la secuencia de colores $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$, mientras que al vértice restante lo coloreamos con el color $\{2\}$, pues recordemos que el vértice consecutivo a este, tiene asignado el color $\{1\}$. Claramente obtenemos una coloración estelar. Por lo tanto $\chi_s(C_{3k+1}) \leq 3$.

Caso 3. $n = 3k + 2$.

Dado que el caso $n = 5$ fue excluido, supongamos $k \geq 2$. Entonces $n = 3(k - 1) + 5$, con $k - 1 \geq 1$. En este caso, asignemos una coloración a los $3(k - 1)$ vértices consecutivos de C_n , alternando los colores $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$, mientras que para los cinco vértices restantes, damos la siguiente coloración: $\{2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2\}$, pues recordemos que el vértice consecutivo al último en la coloración anterior tiene asignado el color $\{1\}$, obteniendo de esta forma una coloración estelar. Por lo tanto $\chi_s(C_{3k+2}) \leq 3$ para cualquier $k \geq 2$.

$$\therefore \chi_s(C_n) = 3 \text{ para cualquier } n \neq 5.$$

■

4.2. Ruedas

En esta sección se usará la Proposición 4.1.2, para dar el número cromático estelar de la familia de gráficas de ruedas R_n .

Una *rueda* R_n se define como la suma de C_n , un ciclo, con K_1 , la gráfica que consta de un sólo vértice.

Proposición 4.2.1. *Sea $R_n = C_n + K_1$, una rueda de $n + 1$ vértices, con $n \geq 3$. Entonces:*

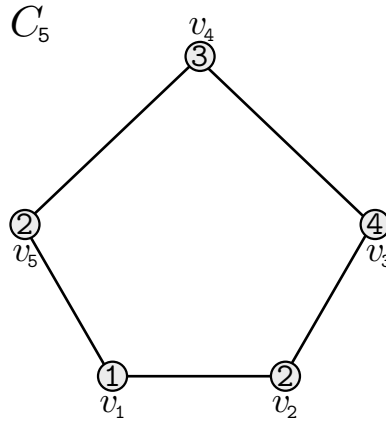


Figura 4.3: Al colorear a v_1 con el color $\{1\}$, podemos colorear los vértices v_2 y v_5 con el color $\{2\}$, obligando a v_3 a ser coloreado con el color $\{3\}$ y a v_4 con el color $\{4\}$, pues de otra manera se formarían caminos de longitud 3 bicolorados, por lo que $\chi(C_5) = 4$.

$$\chi_s(R_n) = \begin{cases} 5 & \text{si } n=5, \\ 4 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que $\chi_s(C_n) = 4$, si $n = 5$ y $\chi_s(C_n) = 3$, en otro caso. Entonces al hacer la suma con K_1 , el vértice que queda en el centro es adyacente a todos los demás, por lo que no se le puede asignar ninguno de los colores usados para colorear el ciclo. Así, coloreamos dicho vértice con un color adicional, obteniendo una coloración claramente propia y estelar con cinco colores para R_n si $n = 5$ y con cuatro colores en otro caso, terminando así la demostración. ■

La Figura 4.4 muestra una coloración estelar para $C_5 + K_1$.

4.3. Gráficas bipartitas completas

Proposición 4.3.1. Sea $K_{n,m}$ una gráfica bipartita completa con $n + m$ vértices, entonces $\chi_s(K_{n,m}) = \min\{m, n\} + 1$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos $n \leq m$, de la Proposición 3.2.7 y la Nota 3.2.8, obtenemos que $\chi_s(K_{n,m}) \leq n + 1$. Ahora

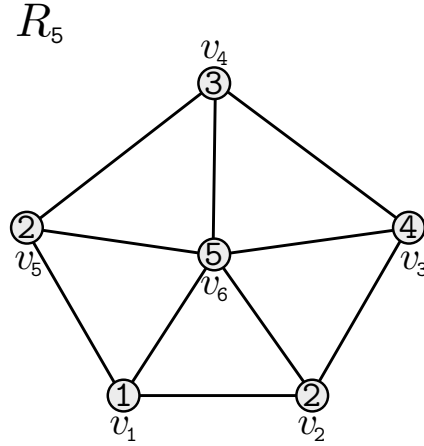


Figura 4.4: La rueda R_5 coloreada con cinco colores.

demostramos que $\chi_s(K_{n,m}) \geq n + 1$: si cada subconjunto de la bipartición contiene al menos dos vértices con el mismo color, entonces existe un ciclo de longitud 4 bicolorado (ver Figura 4.5) , y por lo tanto la coloración obtenida no es estelar. Si no, el número de colores usados es mayor ó igual que $n + 1$, terminando con esto la demostración. ■

En la Figura 4.6 se muestra una coloración estelar de $K_{3,3}$.

4.4. r -cubos

Teorema 4.4.1. (Coloración estelar de r -cubos, Q_r). Para cualquier r -cubo Q_r , $\lceil \frac{r+3}{2} \rceil \leq \chi_s(Q_r) \leq r + 1$.

Demostración. La cota inferior es una aplicación directa de la Proposición 3.2.2, donde $n = 2^r$ y $m = r \cdot 2^{r-1}$. Así, $\chi_s(Q_r) \geq \frac{2n+1+\sqrt{\gamma}}{2}$, con $\gamma = 4n(n-1) - 8m + 1$. Demostremos ahora que $\chi_s(Q_r) > \frac{r+2}{2}$, para esto, demostremos primero que $f(n, r) = \frac{2n+1+\sqrt{\gamma}}{2} - \frac{r+2}{2} > 0$. Observemos que $f(n, r) = \frac{(2n-1-r)+\sqrt{\gamma}}{2} = \frac{(2n-1-r)+\sqrt{\gamma}}{2} \cdot \frac{(2n-1-r)-\sqrt{\gamma}}{(2n-1-r)-\sqrt{\gamma}}$. Entonces, $f(n, r) = \frac{(2n-1-r)^2-\gamma}{2((2n-1-r)-\sqrt{\gamma})}$. Sin embargo, $D(n, r) = 2((2n-1-r) - \sqrt{\gamma})$ es positivo para cualquier $r \geq 1$, pues $\sqrt{\gamma} \geq 1$ siempre y $n = 2^r$. Por lo que, es

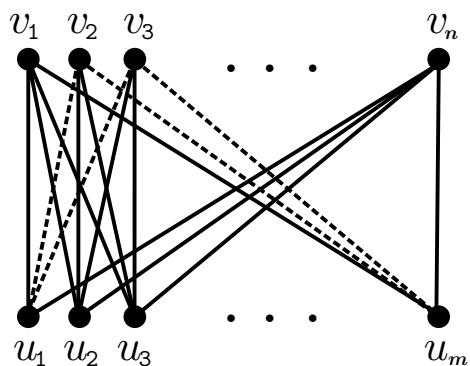


Figura 4.5: Observemos que si v_2 y v_3 tienen el mismo color en la primera partición y u_1 y u_m el mismo color en la segunda partición, obtenemos el ciclo $v_2u_1, u_1v_3, v_3u_m, u_mu_2$, el cual es bicolorado.

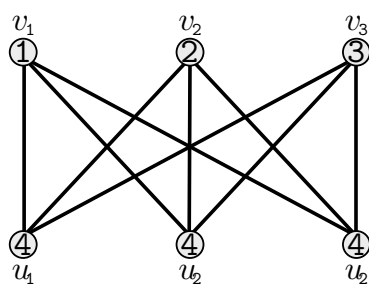


Figura 4.6: Por la Proposición 4.3.1 sabemos que $\chi_s(K_{3,3}) = 4$.

suficiente demostrar que $f'(n, r) = (2n - 1 - r)^2 - \gamma$ es positivo para demostrar la cota inferior. Tenemos que, $f'(n, r) = (2n - 1 - r)^2 - (4n^2 - 4n - 8m + 1) = r^2 - 4nr + 2r + 8m$. Ya que $m = (nr/2)$, concluimos que $f'(n, r) = r^2 - 4nr + 2r + 4nr = r^2 + 2r = r(r + 2) > 0$, para cualquier $r \geq 1$, por lo tanto tenemos $\chi_s(Q_r) > (r + 2/2)$, esto es, $\chi_s(Q_r) \geq \lceil \frac{r+3}{2} \rceil$.

Para la cota superior, la demostración es similar a una hecha en [6]. Supongamos que los vértices de Q_r están etiquetados acorde a su representación binaria, esto es, cada vértice $u \in V(Q_r)$ puede ser etiquetado como sigue: $u = (b_1, b_2, \dots, b_r)$, con cada $b_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq r$. Entonces definimos la siguiente coloración: cada vértice $u = (b_1, b_2, \dots, b_r)$, tiene asignado el color $c(u) = \sum_{i=1}^r i \cdot b_i \pmod{r+1}$, es claro que esta coloración utiliza a lo más $r + 1$ colores. Demostremos que esta coloración es propia. Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que dos vecinos u y u' tienen asignado el mismo color c . Supongamos también que difieren en la j -ésima coordenada de su representación binaria. Entonces $u = (b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_r)$ y $u' = (b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_j \pm 1, b_{j+1}, \dots, b_r)$, ahora por definición de $c(u)$ y $c(u')$ tenemos:

$$\begin{aligned} j \cdot b_j + \sum_{i=1, i \neq j}^r i \cdot b_i &\equiv j \cdot (b_j \pm 1) + \sum_{i=1, i \neq j}^r i \cdot b_i \pmod{r+1} \\ \Rightarrow j \cdot b_j + \sum_{i=1, i \neq j}^r i \cdot b_i - j \cdot (b_j \pm 1) - \sum_{i=1, i \neq j}^r i \cdot b_i &\equiv 0 \pmod{r+1} \\ \therefore \pm j &\equiv 0 \pmod{r+1}. \end{aligned}$$

Sin embargo, esto es una contradicción, pues $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, por lo tanto es una coloración propia.

Demostremos ahora que es una coloración estelar. Sean v_1 y v_2 dos vértices adyacentes en Q_r tales que tienen asignados los colores c_1 y c_2 respectivamente con la coloración anterior. Supongamos que v_1 y v_2 difieren en la j -ésima coordenada. Por la definición de la coloración, tenemos la siguiente igualdad: $c_2 - c_1 \equiv \pm j \pmod{r+1}$. Supongamos sin pérdida de generalidad $c_2 > c_1$. Entonces existe sólo un vecino v'_2 de v_1 , que no es v_2 , para el cual $c(v'_2) = c(v_2) = c_2$. Los vértices v_2 y v'_2 difieren exactamente en dos coordenadas, digamos j_1 y j_2 . Entonces tenemos $v_2 = (b_1, b_2, \dots, b_{j_1}, \dots, b_{j_2}, \dots, b_r)$

y $v'_2 = (b_1, b_2, \dots, b_{j_1} \pm 1, \dots, b_{j_2} \pm 1, \dots, b_r)$. Por la manera en que se definió la coloración, tenemos:

$$j_1 \cdot b_{j_1} + j_2 \cdot b_{j_2} + \sum_{i=1, i \neq j_1 \neq j_2}^r i \cdot b_i \equiv j_1(b_{j_1} \pm 1) + j_2(b_{j_2} \pm 1) + \sum_{i=1, i \neq j_1 \neq j_2}^r i \cdot b_i \pmod{r+1}$$

$$j_1 \cdot b_{j_1} + j_2 \cdot b_{j_2} + \sum_{i=1, i \neq j_1 \neq j_2}^r i \cdot b_i - j_1(b_{j_1} \pm 1) - j_2(b_{j_2} \pm 1) - \sum_{i=1, i \neq j_1 \neq j_2}^r i \cdot b_i \equiv 0 \pmod{r+1}$$

$$\therefore \pm j_1 \pm j_2 \equiv 0 \pmod{r+1}.$$

Dado que ambos vértices son adyacentes a v_1 , y recordando que en la representación binaria v_1 difiere con v_2 en la j -ésima coordenada, concluimos que v_2 y v'_2 difieren en las coordenadas j y $(r+1-j)$, donde además las j -ésima y $(r+1-j)$ -ésima coordenadas de v_2 tienen el mismo valor (ambas son cero o ambas son uno), al igual que las j -ésima y $(r+1-j)$ -ésima coordenadas de v'_2 . Esto se sigue de inmediato, pues en otro caso tendríamos que $j = 0(r+1-j) + 1(j) = 0(j) + 1(r+1-j) = r+1-j$, pero j y $(r+1-j)$ son coordenadas diferentes. Así, como las j -ésima y $(r+1-j)$ -ésima coordenadas de v_2 tienen el mismo valor, las j -ésima y $(r+1-j)$ -ésima coordenadas de v_1 tienen distinto valor. Ahora, si buscamos un vecino de v'_2 , digamos v'_1 , el cual tenga asignado el color c_1 , usando los mismos argumentos vemos que la representación binaria de v'_1 debe diferir en la j -ésima y $(r+1-j)$ -ésima coordenadas con v_1 , y las j -ésima y $(r+1-j)$ -ésimas coordenadas de v_1 deben tener el mismo valor, lo cual es falso. Por lo tanto ningún camino de longitud 3 bicolorado puede formarse en Q_r con la coloración dada, terminando con esto la demostración.

$$\therefore \chi_s(Q_r) \leq r+1$$

■

En la Figura 4.7 damos una coloración estelar para el 3-cubo.

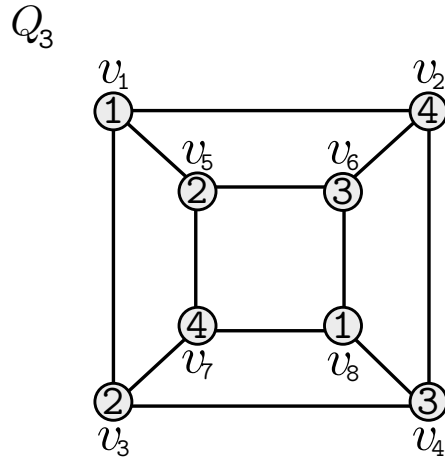


Figura 4.7: Se muestra una coloración estelar para el 3-cubo sabiendo que $\chi_s(Q_3) \leq 4$.

	$m = 2$	$m = 3$	$m \geq 4$
$n = 2$	3	4	4
$n = 3$	xxx	4	4
$n \geq 4$	xxx	xxx	5

Cuadro 4.1: Coloración estelar de rejillas 2-dimensionales $G(n, m)$, con $n \leq m$.

4.5. Rejillas d -dimensionales

En esta sección, estudiamos el número cromático estelar de rejillas. De hecho, damos el número cromático estelar de rejillas 2-dimensionales, y extendemos este resultado para obtener cotas para el número cromático estelar de rejillas de dimensión d .

Recordemos que la rejilla 2-dimensional $G(n, m)$ es el producto cartesiano de dos trayectorias de longitudes $n - 1$ y $m - 1$ respectivamente. Sin pérdida de generalidad siempre supondremos $m \geq n$. Un resumen de los siguientes resultados es dado en el Cuadro 4.1; donde son detallados.

Proposición 4.5.1. $\chi_s(G(2, 2)) = 3$, y para cualquier $m \geq 4$, $\chi_s(G(2, m)) = \chi_s(G(3, m)) = 4$.

Demostración. Para el primer resultado basta observar la Figura 4.8.

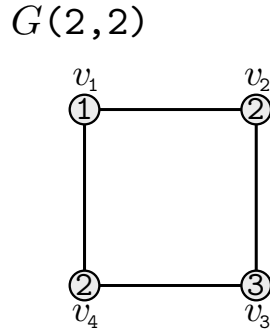


Figura 4.8: Asignamos el color $\{1\}$ al vértice v_1 , asignando así el color $\{2\}$ a los vértices v_2 y v_4 , dejando el color $\{3\}$ como única opción para el vértice v_3 .

Para el segundo resultado tenemos que cualquier coloración estelar de $G(2, 3)$ requiere al menos cuatro colores como observamos en la Figura 4.9, y al ser $G(2, 3)$ una subgráfica de $G(2, m)$ para cualquier $m \geq 3$, concluimos que $\chi_s(G(2, m)) \geq 4$ para cualquier $m \geq 3$. Ahora, como se puede observar en la Figura 4.10, es posible encontrar una coloración estelar para $G(2, m)$ con cuatro colores. Por lo tanto $\chi_s(G(2, m)) \leq 4$. Terminando con esto la demostración.

$$\therefore \chi_s(G(2, m)) = 4.$$

El hecho que $\chi_s(G(3, m)) \geq 4$ para cualquier $m \geq 3$ es trivial, ya que $G(2, 3)$ es una subgráfica de $G(3, m)$, la cual como vimos antes requiere al menos cuatro colores para tener una coloración estelar. La Figura 4.10 muestra una coloración estelar de $G(3, m)$ para cualquier $m \geq 3$ con cuatro colores, implicando con esto que $\chi_s(G(3, m)) \leq 4$.

$$\therefore \chi_s(G(3, m)) = 4.$$

■

Teorema 4.5.2. (*Coloración estelar de rejillas 2-dimensionales*). Para cualquier n y m tal que $\min\{n, m\} \geq 4$, se tiene que $\chi_s(G(n, m)) = 5$.

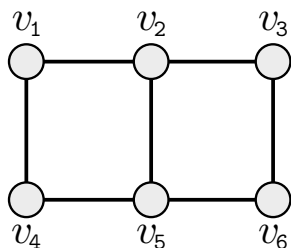
$G(2,3)$ 

Figura 4.9: Observamos que son necesarios al menos cuatro colores para asignar una coloración estelar a $G(2,3)$.

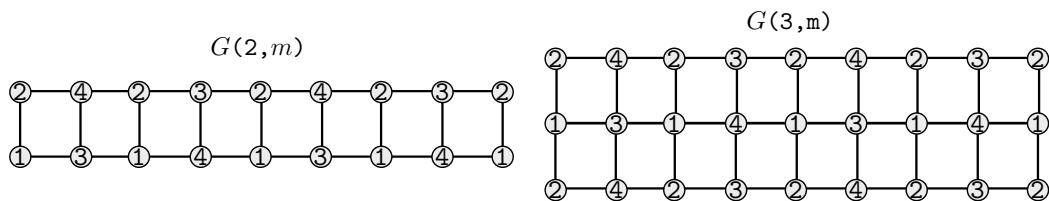


Figura 4.10: $G(2,m)$, la gráfica de la izquierda, $G(3,m)$, la gráfica de la derecha, ambas pueden tener una coloración estelar con al menos cuatro colores.

Demostración. Por un tedioso análisis de casos (confirmado por computadora) [7] es posible demostrar que se necesitan al menos cinco colores para asignar una coloración estelar a $G(4, 4)$. Por lo tanto, para cualquier n y m tal que $\min \{n, m\} \geq 4$, $\chi_s(G(n, m)) \geq 5$.

Que $\chi_s(G(n, m)) \leq 5$, se sigue del Teorema 4.5.3 (el cual se enuncia y demuestra en seguida), sustituyendo $d = 2$: $\chi_s(G_2) \leq 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

$$\therefore \chi_s(G(n, m)) = 5.$$

■

En la Figura 4.11 se da una coloración estelar a la rejilla 2-dimensional $G(2, 4)$.

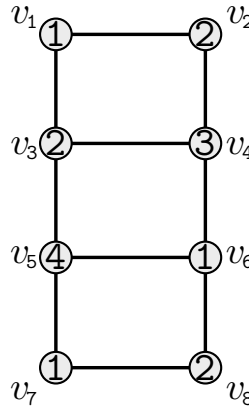


Figura 4.11: Por la Proposición 4.5.1, sabemos que $\chi_s(G(2, 4)) = 4$.

Es posible demostrar que el número cromático estelar de las rejillas d -dimensionales es lineal en d , esto es el proposito del siguiente teorema.

Teorema 4.5.3. (Coloración estelar de rejillas d -dimensionales G_d). Sea G_d cualquier rejilla d -dimensional, con $d \geq 1$, entonces $2 + \lfloor d - \sum_{i=1}^d \frac{1}{n_i} \rfloor \leq \chi_s(G_d) \leq 2d + 1$.

Demostración. La cota inferior es una aplicación de la Proposición 3.2.2, la cual sostiene que para cualquier gráfica $G = (V, A)$ con $|V| = n$ y $|A| = m$,

tenemos que $\chi_s(G) \geq \frac{2n+1-\sqrt{\gamma}}{2}$, con $\gamma = 4n(n-1) - 8m + 1$, lo cual puede ser escrito como sigue:

$$\begin{aligned}\chi_s(G) &\geq \frac{2n+1-\sqrt{\gamma}}{2} = \frac{2n+1-\sqrt{\gamma}}{2} \cdot \frac{2n+1+\sqrt{\gamma}}{2n+1+\sqrt{\gamma}} = \frac{(2n+1)^2 - \gamma}{2(2n+1+\sqrt{\gamma})} \\ \Rightarrow \chi_s(G) &\geq \frac{(2n+1)^2 - (4n(n-1) - 8m + 1)}{2(2n+1+\sqrt{\gamma})} = \frac{8n+8m}{2(2n+1+\sqrt{\gamma})} \\ \Rightarrow \chi_s(G) &\geq \frac{8(n+m)}{2(2n+1+\sqrt{\gamma})} = \frac{4(m+n)}{1+2n+\sqrt{\gamma}}.\end{aligned}$$

$$\text{Entonces tenemos que } \chi_s(G) \geq \frac{4(m+n)}{1+2n+\sqrt{\gamma}} = \frac{m+n}{n} \cdot \frac{4n}{1+2n+\sqrt{\gamma}}.$$

Sin embargo, $\gamma = (2n-1)^2 - 8m$, entonces $\gamma < (2n-1)^2$, esto es:

$$\sqrt{\gamma} < 2n-1$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{\gamma} < 2n$$

$$\Rightarrow 1 + 2n + \sqrt{\gamma} < 4n$$

$$\text{Por lo tanto tenemos que } \chi_s(G) > \frac{4(m+n)}{4n} = \frac{m+n}{n} = 1 + \frac{m}{n}.$$

Ahora, sabiendo que $|V(G_d)| = n = n_1 \times \dots \times n_d$ y $|A(G_d)| = m = n_1 \times \dots \times n_d \times (d - \sum_{i=1}^d \frac{1}{n_i})$ y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos el resultado.

$$\therefore 2 + \lfloor d - \sum_{i=1}^d \frac{1}{n_i} \rfloor \leq \chi_s(G_d).$$

Notemos que esto significa que para rejillas "suficientemente grandes", de entrada, cuando cada $n_i \geq d$, tenemos $\chi_s(G_d) \geq d+1$. El peor caso aparece cuando cada $n_i = 2$, con $1 \leq i \leq d$, en este caso G_d es isomorfa al r -cubo Q_r y podemos aplicar las cotas del Teorema 4.4.1.

Ahora continuamos a demostrar la cota superior. Representamos cada vértice u de $G_d = G(n_1, n_2, \dots, n_d)$ por sus coordenadas en cada dimensión, esto es, $u = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ donde cada x_i , con $1 \leq i \leq d$, satisface $0 \leq x_i \leq n_i - 1$. Ahora definimos una coloración para los vértices de G_d como sigue: para cada $u \in V(G_d)$ tal que $u = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, sea $c(u) = \sum_{i=1}^d i \cdot x_i$ (mód $2d+1$). Primero, demostremos que esta coloración es propia. Por

reducción al absurdo supongamos que dos vértices u y u' , que difieren en la j -ésima coordenada, con $1 \leq j \leq d$, tienen asignado el mismo color $c(u) = c(u')$. Entonces tenemos $u = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_d)$ y $u' = (x_1, x_2, \dots, x_j \pm 1, \dots, x_d)$. Dado que $c(u) = c(u')$, tenemos $j \cdot x_j + \sum_{i=1, i \neq j}^d i \cdot x_i \equiv j \cdot (x_j \pm 1) + \sum_{i=1, i \neq j}^d i \cdot x_i \pmod{2d+1}$, esto es, como vimos antes, $\pm j \equiv 0 \pmod{2d+1}$, lo cual es una contradicción, pues $1 \leq j \leq d$, por lo tanto la coloración es propia.

Ahora demostremos que esta coloración es estelar, más precisamente, demostremos que esta coloración es una *coloración 2-distancia*, esto es, ningún par de vértices a distancia menor o igual que 2 tienen asignado el mismo color, implicando con esto que ningún camino de longitud 3 en G_d sea bicolorado, y por lo tanto que esta coloración sea estelar. Demostremos que para cualesquiera dos vértices u y u'' que estén a distancia 2, no podemos tener $c(u) = c(u'')$. Si u y u'' están a distancia exactamente 2 en G_d , entonces sus coordenadas difieren (i) ya sea en dos dimensiones j_1 y j_2 , ó (ii) en una sola dimensión j . El caso (ii) puede ser demostrado fácilmente, pues tenemos $u = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_d)$ y $u'' = (x_1, x_2, \dots, x_j \pm 2, \dots, x_d)$, y por los mismos cálculos hechos antes, tenemos $\pm 2j \equiv 0 \pmod{2d+1}$, lo cual es imposible pues una vez más $1 \leq j \leq d$. Para el primer caso funcionan los mismos argumentos, ya que por los mismos cálculos hechos antes, tenemos $\pm j_1 \pm j_2 \equiv 0 \pmod{2d+1}$, lo cual también es imposible pues $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq d$. Por lo tanto esta coloración es una *coloración 2-distancia* de G_d , y consecuentemente una coloración estelar de G_d .

$$\therefore \chi_s(G_d) \leq 2d + 1.$$

■

Sabemos que las rejillas d -dimensionales G_d son isomorfas al producto cartesiano de d trayectorias. Por lo tanto, por el Teorema 3.2.6 y la Proposición 4.1.1, obtenemos una cota superior para $\chi_s(G_d)$:

De la Proposición 4.1.1 obtenemos $\chi_s(P) = 3$, con P una trayectoria.

Ahora por lo anterior y por el Teorema 3.2.6 tenemos:

$$\chi_s(P_1 \square P_2 \square \dots \square P_{d-1} \square P_d) \leq \chi(P_1) \cdot \chi_s(P_2) \cdot \dots \cdot \chi_s(P_{d-1}) \cdot \chi_s(P_d) = 3^d.$$

$$\therefore \chi_s(G_d) \leq 3^d, \text{ para cualquier } d \geq 1.$$

Nota 4.5.4. Para dimensiones 1 y 2, la cota superior dada en el Teorema 4.5.3 es justa para rejillas d -dimensionales (consultar Proposición 4.5.1 para $d = 1$ y Teorema 4.5.2 para $d = 2$).

4.6. Toros d -dimensionales

En esta sección, damos cotas para el número cromático estelar del toro d -dimensional para cualquier $d \geq 2$.

De aquí en adelante, para cualquier $n_i \geq 3$, $1 \leq i \leq d$, denotamos por $TG_d = TG(n_1, n_2, \dots, n_d)$ a la *rejilla toroidal d -dimensional* con n_i vértices en la dimensión i . Recordemos también que TG_d es el producto cartesiano de d ciclos de longitud n_i , $1 \leq i \leq d$.

Teorema 4.6.1. (*Coloración estelar del toro d -dimensional*)

$$d + 2 \leq \chi_s(TG_d) \leq \begin{cases} 2d + 1 & \text{cuando } 2d + 1 \text{ divide a cada } n_i, \\ 2d^2 + d + 4 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. La cota inferior es obtenida por la Proposición 3.2.2, usando argumentos similares a los desarrollados para r -cubos en la demostración del Teorema 4.4.1. Así pues, sabemos que $\chi_s(TG_d) \geq \frac{2|V|+1-\sqrt{\gamma}}{2}$, con $\gamma = 4|V|(|V| - 1) - 8|A| + 1$. Sea $N = |V|$; sabemos que $|A| = dN$, donde $N = \prod_{i=1}^d n_i$. Ahora, si demostramos que $\frac{2|V|+1-\sqrt{\gamma}}{2} - (d + 1) > 0$, esto implicaría que $\chi_s(TG_d) > d + 1$.

Sea $f(N, d) = \frac{2N+1-\sqrt{\gamma}}{2} - (d + 1)$. Notemos que $f(N, d) = \frac{(2N-1-2d)-\sqrt{\gamma}}{2} = \frac{(2N-1-2d)-\sqrt{\gamma}}{2} \cdot \frac{(2N-1-2d)+\sqrt{\gamma}}{(2N-1-2d)+\sqrt{\gamma}}$. Esto es, $f(N, d) = \frac{(2N-1-2d)^2-\gamma}{2(2N-1-2d)+\sqrt{\gamma}}$. Sin embargo, $D(N, d) = 2(2N-1-2d)+\sqrt{\gamma}$ es estrictamente positiva para cualquier $d \geq 1$, pues siempre se tiene $\sqrt{\gamma} \geq 1$ y $N \geq 3^d$ (para obtener un toro el número de vértices n_i en cada dimensión i debe ser al menos igual a 3). Entonces, es suficiente demostrar que $f'(N, d) = (2N-1-2d)^2-\gamma$ es positivo para demostrar la cota inferior. Así, $f'(N, d) = (2N-1-2d)^2 - (4N^2 - 4N - 8Nd + 1) = 4d^2 + 4d$. Por lo tanto, concluimos que $f'(N, d) > 0$ para cualquier $d \geq 1$. Así tenemos $\chi_s(TG_d) > d + 1$, ó lo que es lo mismo $\chi_s(TG_d) \geq d + 2$.

$$\therefore \chi_s(TG_d) \geq d + 2.$$

La cota superior en el caso en que $2d+1$ divide a cada n_i viene del estudio de la rejilla no toroidal G_d , y de la coloración dada en el Teorema 4.5.3, de donde se puede ver fácilmente que esta coloración, primero sigue siendo propia y segundo es una coloración estelar de TG_d cuando $2d + 1$ divide a cada n_i , con $1 \leq i \leq d$. Demostremos que la coloración es propia. Para hacer esto, debemos recordar que la diferencia entre la rejilla G_d d -dimensional y el toro TG_d d -dimensional, es que el primero es el producto cartesiano de d

trayectorias, mientras que el segundo es el producto cartesiano de d ciclos, por lo que $G_d(n_1, n_2, \dots, n_d)$ difiere con $TG_d(n_1, n_2, \dots, n_d)$, precisamente en el producto cartesiano de las aristas que completan los ciclos de longitud n_i , con $i \in \{1, \dots, d\}$. Así que veamos que aún con estas aristas la coloración del Teorema 4.5.3, sigue siendo propia para TG_d cuando $2d + 1$ divide a cada n_i . Dicha coloración es la siguiente: para cada $u \in V(TG_d)$ tal que $u = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $c(u) = \sum_{i=1}^d i \cdot x_i$ (mód $2d + 1$). Entonces procedamos a demostrar que dados dos vértices u y v unidos por una de las aristas mencionadas antes, $c(u) \neq c(v)$, con la coloración anterior. Observemos que dichas aristas unen vértices opuestos que se encuentran en la envoltura de TG_d , por lo que difieren en la i -ésima coordenada de la siguiente forma: $u = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d)$ y $v = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, n_i, x_{i+1}, \dots, x_d)$. Supongamos que $c(u) = c(v)$, entonces por los mismos cálculos hechos antes obtenemos: $1 - n_i \equiv 0$ (mód $2d + 1$), lo cual es una contradicción pues $n_i = k(2d + 1)$, para alguna $k \in \mathbb{Z}$, con lo que concluimos que la coloración es efectivamente propia.

Ahora demostremos que la coloración es estelar, para esto recordemos que la coloración es estelar para rejillas G_d d -dimensionales, por lo que basta demostrar que con las aristas que completan el toro TG_d d -dimensional la coloración sigue siendo estelar. Consideremos dos vértices u y v de TG_d que están unidos por una arista como las descritas antes, entonces $u = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d)$ y $v = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, n_i, x_{i+1}, \dots, x_d)$. Ahora consideremos el vértice w tal que es vecino de u ($w \neq v$), y demostremos que $c(w) \neq c(v)$, pues de esta manera demostraremos la inexistencia de caminos bicolorados de longitud 3 y consecuentemente que la coloración es estelar. El vértice $w = (x_1, x_2, \dots, x_j \pm 1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d)$, pues es vecino de u . Supongamos que $c(w) = c(v)$, entonces una vez más por cálculos hechos antes obtenemos: $i \cdot 1 + j(x_j \pm 1) \equiv i \cdot n_i + j \cdot x_j$ (mód $2d + 1$), entonces $i \pm j \equiv 0$ (mód $2d + 1$), lo cual es una contradicción pues $i, j \in \{1, \dots, d\}$. El procedimiento es análogo si se considera un vecino w' de v . Por lo tanto la coloración es estelar.

Cuando $2d + 1$ no divide a cada n_i , consideramos la subgráfica de TG_d que consiste en una rejilla d -dimensional (no toroidal) $G'_d = G(n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_d - 1)$. Sin pérdida de generalidad G'_d constará de aquellos vértices en los que ninguna coordenada es igual a 1. Podemos asignar una coloración estelar a G'_d con $2d + 1$ colores como se muestra en el Teorema 4.5.3. Ahora, para evitar un camino bicolorado de longitud 3 a causa de la envoltura en cada dimensión, basta usar nuevos colores para colorear los "bordes" de TG_d ,

esto es, los vértices de TG_d que no aparecen en G'_d (todos los vértices en los que al menos una coordenada es igual a 1). Dichos vértices para el toro 3-dimensional TG_3 se muestran en la Figura 4.12 y los podemos colorear como se describe a continuación:

Los vértices que aparecen de color negro (aquellos en los que al menos dos coordenadas son distintas de 1, sin olvidar que al menos una coordenada es igual a 1) pueden agruparse de tal manera que formen d rejillas no toroidales $(d-1)$ -dimensionales, de esta forma por el Teorema 4.5.3 podemos colorear cada una con $2(d-1) + 1$ colores.

Los vértices que aparecen de color blanco (aquellos que todas sus coordenadas son 1 excepto a lo más una) forman d ciclos los cuales como sabemos por el Teorema 4.1.2 pueden ser coloreados con 3 colores adicionales, teniendo cuidado de colorear los vértices que culminan los ciclos (dichos vértices aparecen con los colores $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ en la Figura 4.12) con d de los $2d+1$ colores usados para colorear G'_d , mientras que para los segundos vértices (dichos vértices aparecen con los colores $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ en la Figura 4.12) de cada uno de estos ciclos usamos d de los $2d+1$ colores usados para colorear G'_d que no sean los d usados antes, evitando de esta manera formar caminos de longitud 3 bicoloreados entre vértices finales y segundos vértices de cada ciclo. Cada rayo de vértices blancos se obtiene fijando 1's en todas las coordenadas excepto una y haciendo variar todos los posibles valores en la coordenada correspondiente.

Observemos que los vértices de G'_d no son adyacentes a los vértices blancos de la Figura 4.12, pues justo los vértices de G'_d quedan en las diagonales de los vértices blancos, además de que para $d > 2$ en la rejilla interior, como ninguna coordenada es 1, ningún vértice de G'_d puede ser adyacente a algún vértice blanco, pues en los vértices blancos todas sus coordenadas excepto una son 1's. De hecho un camino de longitud 3 entre vértices de G'_d y vértices blancos pasa por al menos dos rejillas G_{d_i}, G_{d_j} , las cuales usan cada una $2(d-1) + 1$ colores totalmente diferentes, por lo cual no puede haber caminos de longitud 3 bicoloreados entre los vértices blancos y G'_d .

Por construcción cualquier camino bicoloreado de longitud 3 que pudiera aparecer estaría (i) entre vértices de G'_d y la envoltura de TG_d , ó (ii) entre vértices de la envoltura. Sin embargo ya vimos que no hay caminos de longitud 3 bicoloreados entre vértices de G'_d y vértices blancos, mientras que para vértices que no sean uno de los vértices blancos tenemos lo siguiente: para cualquier vértice u de G'_d , existe sólo una arista entre u y algún vértice de la envoltura. Así pues, u no puede ser adyacente a dos vértices de la envoltura,

y de esta manera no puede ser adyacente a dos vértices que tengan asignado el mismo color c . Entonces concluimos que el caso (i) no puede ocurrir.

Para el caso (ii) observemos que un vértice en una rejilla es adyacente a a lo más un vértice en un rayo dado, así, un camino de longitud 3 en la envoltura que pase por al menos dos rejillas tiene que pasar por al menos un rayo, demostrando con esto que usa tres colores distintos.

Entre rayos compuestos de vértices blancos no se forman caminos de longitud 3 bicolorados, pues observemos primero que para pasar de un rayo a otro se necesita de algún vértice de alguna de las rejillas $(d-1)$ -dimensionales G_{d_i} y segundo que la única forma de obtener un camino de longitud 3 que pase por dos rayos distintos es usando los segundos o últimos vértices de los rayos, sin embargo tanto los segundos como los últimos vértices de los rayos tienen asignado una coloración única, al igual que cualquier vértice de cualquier rejilla $(d-1)$ -dimensional G_{d_i} , por lo cual no puede haber caminos de longitud 3 bicolorados. Por lo tanto la coloración es estelar.

La coloración sugerida usa en total $2d+1$ colores (para colorear G'_d), suma a la cual debemos agregar d veces $2(d-1)+1$ colores (usados para colorear las d rejillas $(d-1)$ -dimensionales), más 3 colores (usados para colorear los d ciclos formados por los vértices de color blanco de la Figura 4.12), esto es $2d^2+d+4$ colores, terminando con esto la demostración. ■

Cabe mencionar que la cota superior dada para el toro d dimensional TG_d cuando $2d+1$ no divide a cada n_i , es producto de la investigación y realización del presente trabajo, ya que el argumento de la cota dada en el artículo "Star coloring of graphs" de Guillaume Fertin et al. [7], es incorrecto, pues los vértices que más adelante se describirán como la "envoltura" de TG_d , son vistos como una gráfica G_0 cuyos vértices son divididos en d clases, tales que las gráficas inducidas por dichas clases forman d rejillas no toroidales $(d-1)$ -dimensionales, lo cual no es posible de hacer.

4.7. Gráficas cúbicas

Proposición 4.7.1. *Sea G una gráfica de orden n y G^2 , el cuadrado de la gráfica G , entonces $\chi_s(G) \leq \chi(G^2)$, donde $\chi(G)$ denota el número cromático usual de G .*

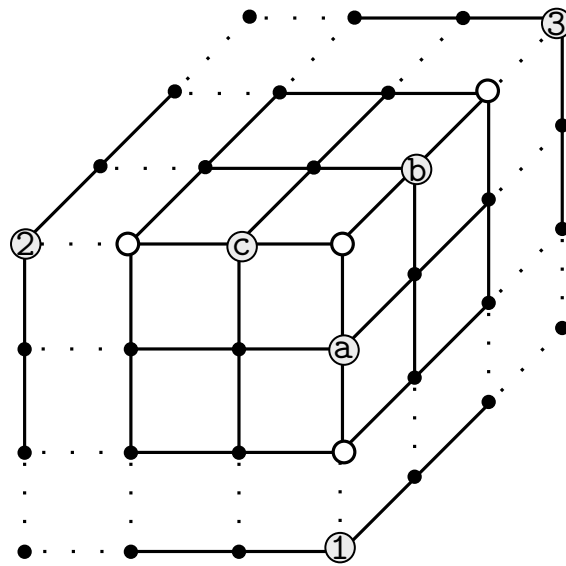


Figura 4.12: Se muestra el toro 3-dimensional TG_3 , en esta figura hacen falta las aristas que completan los ciclos, recordemos que para el toro d -dimensional TG_d hay d rayos compuestos de vértices blancos.

Demostración. Para cualquier gráfica $G = (V, A)$, tomemos el cuadrado $G^2 = (V, A \cup \mathcal{A})$, donde \mathcal{A} es el conjunto de aristas agregadas que unen dos vértices en G^2 si se encuentran a distancia 2 en G . Cualquier coloración propia C de G^2 es una coloración estelar de G . La coloración C es propia en G , pues G^2 contiene todas las aristas de G , así pues C es también una coloración propia en G . Ahora tomemos cualquier camino de longitud 2 en G , digamos (u, v, w) . En G^2 u, v y w tienen asignado tres colores distintos por la coloración C . Por lo tanto, ningún camino de longitud 2 en G puede ser bicolorado, consecuentemente, ningún camino de longitud 3 es bicolorado, y C es una coloración estelar de G . ■

Es un resultado bien sabido que cualquier gráfica de grado máximo Δ puede ser propiamente coloreada con a lo más $\Delta + 1$ colores (referirse a [13]). Usando esto demostramos el siguiente Corolario.

Corolario 4.7.2. *Sea G una gráfica de orden n y grado máximo Δ , entonces $\chi_s(G) \leq \Delta^2 + 1$.*

Demostración. Usando que si G es de grado máximo Δ , entonces G^2 tiene grado máximo a lo más Δ^2 , y que cualquier gráfica de grado máximo Δ puede ser propiamente coloreada con a lo más $\Delta + 1$ colores, tenemos que $\chi(G^2) \leq \Delta^2 + 1$, pero por la Proposición 4.7.1 sabemos que $\chi_s(G) \leq \chi(G^2)$, entonces $\chi_s(G) \leq \chi(G^2) \leq \Delta^2 + 1$.

$$\therefore \chi_s(G) \leq \Delta^2 + 1.$$

■

Ahora observamos el caso $\Delta = 3$, esto es gráficas cúbicas. Por el Corolario 4.7.2, deducimos que para cualquier gráfica cubica G , $\chi_s(G) \leq 3^2 + 1 = 10$. Sin embargo, es posible mejorar ligeramente esta cota a 9, usando una proposición más general, la cual es una mejora del Corolario 4.7.2 y se introduce a continuación.

Proposición 4.7.3. *Para cualquier gráfica G de grado máximo Δ , con $\Delta \geq 2$, tenemos $\chi_s(G) \leq \Delta^2$.*

Demostración. Tomemos G^2 , el cuadrado de la gráfica G . Dado que G es de grado máximo Δ , G^2 es de grado máximo a lo más Δ^2 . Si G^2 no es

isomorfa a la gráfica completa K_{Δ^2+1} , entonces por la Proposición 4.7.1 y el Teorema de Brooks, tenemos $\chi_s(G) \leq \chi(G^2) \leq \Delta^2$, es decir $\chi_s(G) \leq \Delta^2$.

Ahora, si G^2 es isomorfa a K_{Δ^2+1} , entonces el número de independencia de G , $\alpha(G)$, satisface $\alpha(G) \geq 2$ (ya que $2 \leq \Delta \leq \Delta^2$). Entonces, aplicando la Proposición 3.2.9, y dado que $|V(G)| = \Delta^2 + 1$, obtenemos $\chi_s(G) \leq 1 + (\Delta^2 + 1) - 2$, lo que es $\chi_s(G) \leq \Delta^2$.

$$\therefore \chi_s(G) \leq \Delta^2.$$

■

Proposición 4.7.4. *Sea \mathcal{C} , la familia de gráficas cúbicas, entonces tenemos $6 \leq \chi_s(\mathcal{C}) \leq 9$.*

Demostración. La cota superior es una consecuencia directa de la Proposición 4.7.3, aplicada al caso $\Delta = 3$, pues tenemos $\chi_s(G) \leq 3^2 = 9$.

$$\therefore \chi_s(G) \leq 9.$$

La cota inferior está dada por la gráfica cúbica G_s mostrada en la Figura 4.13 (notemos que esta gráfica resulta ser un snark, esto es una gráfica cúbica no trivial cuyas aristas no pueden ser coloreadas propiamente con tres colores). Ahora demostramos que su número cromático estelar es igual a 6. Supongamos que $\chi_s(G_s) \leq 5$. Entonces tomemos cinco vértices en G_s que induzcan a C_5 . Hay sólo dos opciones: cuatro ó cinco colores son usados para colorear esos cinco vértices (sabemos por la Proposición 4.1.2 que son necesarios al menos cuatro colores para colorear C_5). Detallemos cada uno de los dos casos.

Caso 4. Sólo cuatro colores son usados.

En este caso uno de esos colores, llamémoslo color 1, debe ser usado dos veces para colorear C_5 , y de esta forma asignarle dos vértices x y y no vecinos (así x y y están a distancia 2); los otros tres colores son usados exactamente una vez para cada uno de los tres vértices restantes en C_5 . Sin pérdida de generalidad, sean esos vértices coloreados como se muestra en la Figura 4.13. En este caso, a u se le puede asignar ya sea el color 4 ó el color 5. Si $c(u) = 4$, entonces $c(v) = 5$ y no se le puede asignar color a w . Si $c(u) = 5$, entonces a v se le puede asignar ya sea el color 3 ó el color 4, pero en ambos casos, no se le puede asignar color a w . Por lo tanto este caso no puede pasar.

Caso 5. Uso de cinco colores.

Que el *Caso 1* no pueda ocurrir significa que cualquier C_5 en G_s debe de estar coloreado con cinco colores diferentes. Por un análisis de casos un tanto tedioso, pero fácil, puede ser visto que no es posible asignar una coloración estelar a G_s con cinco colores satisfaciendo esta propiedad.

Concluimos que $\chi_s(G_s) \geq 6$, y la igualdad se sostiene asignando los siguientes colores al ciclo exterior: 1, 2, 3, 4, 5, 3, 1, y 6.

■

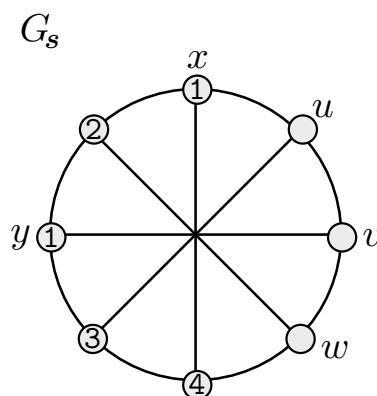


Figura 4.13: G_s , una gráfica cúbica tal que $\chi_s(G_s) = 6$.

4.8. El producto cartesiano de dos gráficas completas

En esta sección se dará el número cromático estelar de gráficas completas, el cual de hecho coincide con el número cromático usual, para de esta manera poder dar una cota para el número cromático estelar del producto cartesiano de dos gráficas completas $K_n \square K_n$, y después mediante una observación dar una cota para el número cromático estelar de $K_n \square K_m$, la cual mejora por mucho la existente.

Recordemos que $\chi(K_n) = n$, donde K_n representa la gráfica completa con n vértices, el número cromático usual coincide con el número cromático

estelar, pues claramente al tener cada vértice un color distinto, no se forman caminos bicolorados de longitud 3, concluyendo así que $\chi_s(K_n) = n$.

Una vez hecho la aclaración anterior procedamos a dar una coloración estelar para $K_2 \square K_2$ (Figura 4.14), la cual sabemos tiene número cromático estelar 3, pues $K_2 \square K_2 = C_4$.

$K_2 \square K_2$

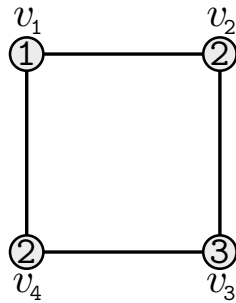


Figura 4.14: Una coloración estelar para $K_2 \square K_2$.

En la Figura 4.15 mostramos una coloración estelar para $K_3 \square K_3$ con seis colores, notemos que los vértices v_1, v_2, v_3, v_4 y v_7 están coloreados con tres colores, mientras que los demás (los cuales como subgráfica de $K_3 \square K_3$ forman a $K_2 \square K_2$) están coloreados con otros tres colores distintos, pero no sólo eso, sino que también tienen la misma coloración dada para $K_2 \square K_2$ en la Figura 4.14.

En general $K_n \square K_n$ se puede ver como en la Figura 4.16, observemos que la coloración usada es la misma con la que se coloreó $K_3 \square K_3$ en la Figura 4.15.

Observemos también que para colorear $K_n \square K_n$ la coloración de la Figura 4.16 usa tantos colores como la suma de $V(K_n)$ más el número de colores necesarios para colorear $K_{n-1} \square K_{n-1}$.

En el siguiente Teorema se demuestra que esta coloración es tanto propia, como estelar.

Teorema 4.8.1. *Si K_n es una gráfica completa con n vértices, entonces*

$$\chi_s(K_n \square K_n) \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

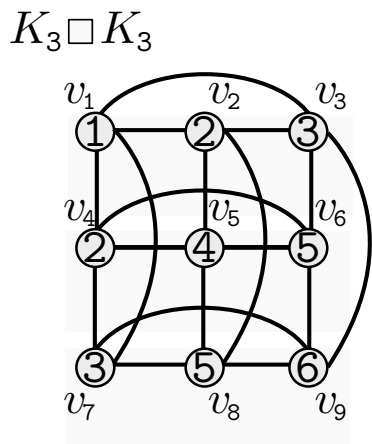


Figura 4.15: La coloración dada para $K_3 \square K_3$ es estelar, pues no existen caminos bicolorados de longitud 3.

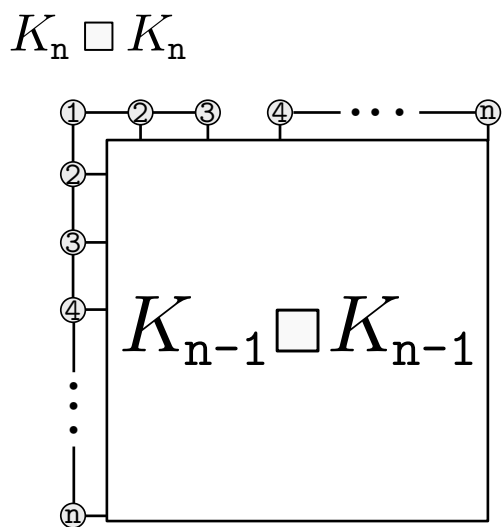


Figura 4.16: Se muestra una aproximación de $K_n \square K_n$, pues cada renglón tanto horizontal como vertical (los cuales contienen n vértices) genera la subgráfica K_n y en esta figura hacen falta las aristas que completan K_n tanto en el renglón como en la columna.

Demostración. Veamos primero que la coloración es propia, para esto observemos que los vértices coloreados con el mismo color son justamente los que están en las diagonales, y entre estos vértices nunca hay aristas, pues recordemos que en $K_n \square K_n$ cada renglón tanto horizontal como vertical (los cuales contienen n vértices) genera la subgráfica K_n , por lo tanto al no existir dichas aristas concluimos que la coloración es propia.

Notemos que por como está construida esta coloración, cada color es usado a lo más en dos vértices. Notemos también que cada camino que involucre dos vértices coloreados con el mismo color está (i) contenido, una parte en la columna y otra parte en el renglón mostrados en la Figura 4.16, donde no es bicolorado porque los colores en la diagonal aparecen una única vez, ó (ii) dichos vértices son extremos de un camino cuyos demás vértices se encuentran en $K_{n-1} \square K_{n-1}$, donde por como definimos la coloración, no se vuelven a usar los colores usados para colorear dichos vértices, por lo cual no puede existir ningún camino de longitud 3 bicolorado, y por lo tanto la coloración es estelar.

Ahora observemos que $\chi_s(K_1 \square K_1) = 1$, pues $K_1 \square K_1$ consta de un sólo vértice, y recordemos que $\chi_s(K_2 \square K_2) = 3$ y $\chi_s(K_3 \square K_3) = 6$, por lo que para $K_4 \square K_4$ usaremos $6 + 4 = 10$ colores y así sucesivamente, de esta forma el número total de colores necesarios para colorear $K_n \square K_n$ es el total de la siguiente suma: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\therefore \chi_s(K_n \square K_n) \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

■

Para obtener una cota para $\chi_s(K_n \square K_m)$ sólo debemos observar que:

$$\chi_s(K_n \square K_m) \leq \chi_s(K_{m'} \square K_{m'}) = \frac{m'(m'+1)}{2}, \text{ con } m' = \max\{m, n\}.$$

$$\therefore \chi_s(K_n \square K_m) \leq \frac{m'(m'+1)}{2}, \text{ con } m' = \max\{m, n\}.$$

Capítulo 5

Conclusiones

Uno de los principales objetivos en la realización de este trabajo fue la introducción del número cromático estelar y de las coloraciones estelares de gráficas a nuestro idioma, pues al ser un tema poco trabajado carece de fuentes escritas en español.

Otro objetivo principal fue proporcionar un trabajo lo más completo posible, lo cual se cumplió satisfactoriamente, pues en este trabajo se presentaron muchos resultados concernientes al número cromático estelar. En particular se presentaron resultados exactos para árboles, ciclos, ruedas, gráficas bipartitas completas y rejillas 2-dimensionales. También se determinaron cotas tanto superiores como inferiores para el número cromático estelar de otras familias de gráficas: los r -cubos, las rejillas d -dimensionales ($d \geq 3$), los toros d -dimensionales ($d \geq 2$) y las gráficas cúbicas, además de una cota superior para el producto cartesiano de dos gráficas completas, siendo este último junto con el número cromático estelar de la familia de gráficas conocidas como ruedas y la cota superior del toro d -dimensional cuando $2d + 1$ no divide a cada n_i , resultados originales producto de este trabajo de investigación.

Otro objetivo cumplido satisfactoriamente fue la realización de un trabajo con la mayor claridad posible, ya que para la elaboración de este se corrigieron varios errores encontrados en [7], además de agregarse varias demostraciones, ejemplos y diagramas con la misma intención.

Un gran número de problemas permanecen aún abiertos, tales como obtener resultados óptimos para otras familias de gráficas, o refinar las cotas aquí presentadas, encontrar un algoritmo eficiente para asignar una coloración estelar a una gráfica G dada, u obtener uno o varios metodos para encontrar buenas cotas inferiores para el número cromático estelar son también

problemas desafiantes.

Bibliografía

- [1] M. O. Albertson, G. Chappell, H. A. Kiersted, A. Kündgen, y R. Ramamurthi *Coloring with no 2-colored P_4 's*. Electronic Journal of Combinatorics (1)(2004) number R26.
- [2] J. A Bondy y U. S. R. Murty. *Graphs Theory with Applications*. North Holland. New York (1976).
- [3] O. V. Borodin, *On acyclic coloring of planar graphs*, Discrete Math 25 (1979), 211-236.
- [4] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, y D. R. Woodall *Acyclic colourings of planar graphs with large girth*. J Lond Math Soc 60(2) (1999), 344-352.
- [5] M. del C. Curc6. *Una Introducci6n a la Teor6a de Gr6ficas*. V6nculos Matem6ticos No. 48 (2006).
- [6] G. Fertin, E. Godard y A. Raspaud, *Acyclic and k-distance coloring of the grid*, Inform Process Lets 87(1) (2003), 51-58.
- [7] G. Fertin, A. Raspaud, B. Reed, *Star coloring of graphs*, Journal of Graph Theory 47(3) (2004), 163-182.
- [8] B. Gr6nbaum, *Acyclic colorings of planar graphs*, Israel J Math 14(3) (1973), 390-408.
- [9] H. A. Kierstead, Andr6 K6ndgen y Craig Timmons *Star coloring bipartite planar graphs*, Journal of Graph Theory, 60 (2009) 1-10.
- [10] A. V. Kostochka y L. S. Melnikov, *Note to the paper of Gr6nbaum on acyclic colorings*, Discrete Math 14(4) (1976), 403-406.

- [11] J. Nešetřil y P. Ossona de Mendez *Colorings and homomorphisms of minor closed classes*, Technicalreport 476, Centre de Recerca Matemàtica, 2001.
- [12] R. Ramamurthi y G. Sanders *Star coloring outerplanar bipartite graphs*, Journal of Graph Theory, manuscript.
- [13] V. G. Vizing *On an estimate of the chromatic class of a p -graph (in Russian)*, Diskrete Analiz 3 (1964), 25-30.