UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLAN

MAESTRIA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMATICAS)

La enseñanza aprendizaje de los conceptos de Congruencia y Semejanza

T E S I S

Que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MATEMATICAS

Presenta:

MARIA LUCINA ARIZA VARGAS

ASESOR DE TESIS: MAESTRO: JUAN B. RECIO ZUBIETA

MAYO 2011

DEDICATORIA:

A mi papá y mi mamá:

Crescenciano Ariza y Adela Vargas

A mi hija:

Zyanya Rhae Guadalupe

A mis herman@s:

Rosario, Isabel, Dora, Iván, José Luis, Víctor.

A mis sobrinos

Edgar, Louis y al pequeño.

AGRADECIMIENTOS:

A mi familia por ser tan maravillosos y darme su amor y comprensión

A mis compañer@s:

Alfonso Escoto, Pedro Zerendieta, Peña de la Rosa, Esther López, Emigdio Navarro, Guadalupe Susano, Emilio Vivar y Ricardo Díaz; por su apoyo.

A mis Maestros:

Juan B. Recio, Asela Carlón y Sergio Cruz; por su ejemplo.

INTEGRACIÓN DEL JURADO:

Mtro. Juan Bautista Recio Zubieta (Tutor)

Dra. Roció Quesada Castillo

Mtro. Alejandro Raúl Reyes Esparza

Dr. Carlos Hernández Garciadiego

Dr. Enrique Ruíz Velasco Sánchez

INDICE

Capítulo III

Introducción

El Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) surge como respuesta a la crisis económica, política y social que vivía el país hacia finales del siglo XX, cuyo contexto internacional fueron las múltiples críticas al sistema mundial.

Es considerado un proyecto educativo precursor que contribuye a la simbiosis enseñanza-aprendizaje, lo cual en mayor o menor medida ha cumplido con las expectativas planteadas en su nacimiento, aunque en su trayectoria se ha encontrado con algunas complicaciones.

Actualmente, uno de los mayores problemas que aquejan al CCH es el alto índice de reprobación y el bajo rendimiento de los alumnos en la asignatura de matemáticas, muestra de ello lo encontramos en el informe 2005-2009 del plantel Azcapotzalco. Aunque esta situación es general para todo el nivel bachillerato.

Por tanto, debe revisarse la problemática y soluciones planteadas por los especialistas para adaptarlas a la situación actual y, de cierta manera, contribuir a mejorar la enseñanza-aprendizaje.

De acuerdo con Ausubel (1984)[1], para los alumnos la asignatura carece de valor, con excepción que el contenido de la materia valga la pena, es decir, conduzca a conocimientos significativos y concuerde con la escolaridad contemporánea. Así, las normas deben aplicarse de modo que se exija a cada uno de los estudiantes lo que realmente puede hacer y de lo que es capaz.

Una parte considerable del presente trabajo expone la práctica docente a través de lecturas que invitan al contacto con la Geometría Euclidiana y los conceptos de congruencia y semejanza para la enseñanza en el nivel medio superior, en el cual se busca que los conocimientos sean significativos: objetivo del docente.

Uno de los ideales del docente es dar significado y reflejar amor por las matemáticas, esto para que los estudiantes se comprometan y vean su valor e importancia, así como que sientan inclinación hacia el conocimiento. Por tanto, será un arte que tiene como objetivo presentar a la asignatura con su carácter dual, es decir, como ciencia y herramienta. Como ciencia admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, a la par que acepta rigor, exactitud y formalidad, puesto que es el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos. En lo que respecta a su carácter de herramienta, contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías para obtener conocimientos y aplicaciones en diversos campos del saber tanto humanístico como científico y tecnológico.

Así pues, se considera a la geometría como el lugar del currículo escolar donde los estudiantes aprenden a razonar y a ver la estructura axiomática de las matemáticas.

No obstante, los alumnos no le dan a las matemáticas, y en particular a la Geometría euclidiana con los conceptos de congruencia y semejanza, el valor apropiado, pues las perciben como áridas. Entonces surge la pregunta: ¿qué sucede si se les presentan a partir de lecturas? Así, leer será una herramienta que motive el aprendizaje y la comprensión de dichos conceptos.

La lectura, según Ausubel (1984)[2], puede emplearse como instrumento para adquirir nuevos conocimientos, ya que con ella se perciben significados relacionados con la estructura cognoscitiva.

Por tanto, la práctica docente debe empaparse de lecturas y resolución de problemas que conlleven ambos conceptos, asimismo, debe exponer la importancia de la demostración en la geometría a través de algunos ejercicios, y en general, por fases.

De acuerdo con Van Hiele (1957)[3], en la primera fase se pone a discusión del alumno el material clarificador del contexto de trabajo; en la segunda se proporciona material de trabajo para aprender las principales nociones del conocimiento que se está explorando. Así, tanto el material como las nociones a trabajar se seleccionarán en función del nivel de razonamiento de los alumnos. En la tercera fase se conducen las discusiones de clase, pues se busca que el estudiante se apropie del lenguaje geométrico pertinente; en la cuarta se darán materiales con diversas posibilidades de uso, lo que permitirá formas de actuación por parte de los alumnos; en la quinta y última se invitará a reflexionar sobre sus acciones en las fases anteriores, por tanto, se accederá a un nuevo nivel de razonamiento.

El siguiente trabajo está conformado por la presente introducción, tres capítulos y una conclusión. En el primer capítulo se plantea la problemática en torno a la Geometría euclidiana y se establece la siguiente pregunta: ¿la lectura es una herramienta efectiva para resolver el problema que conlleva la enseñanza de los conceptos de congruencia y semejanza?

En el segundo capítulo se toma en cuenta la lectura en la práctica docente, resaltando las ventajas y cómo debe llevarse a cabo para que resulte eficaz, asimismo, se destaca el trabajo en pequeños grupos o equipos, así como el análisis, resolución, discusión y exposición de problemas, tomando en cuenta el modelo de Van Hiele en Geometría euclidiana.

En el tercero se revisan las lecturas más significativas respecto a ambos conceptos, es decir, como una justificación de por qué se toma en cuenta el *Menón* como el organizador para establecer qué conceptos se tienen y cómo deben ampliarse. Asimismo, se presenta al *Timeo* como la parte donde la forma sencilla se torna compleja y viceversa, así como lo visual y lo deductivo difieren de mostrar y demostrar, resaltando su importancia y, finalmente, se exponen los *Elementos* de Euclides.

Con lo anterior, se pretende que los estudiantes realicen algunas demostraciones por medio del formalismo requerido para el nivel bachillerato, cumpliendo así con los objetivos institucionales. Cabe destacar que durante la práctica se cuidó que se ejecutarán las siguientes actividades:

- En cada uno de los teoremas establecidos en la temática el alumno debía apoyarse en una construcción de la figura, así relacionando lo estipulado en dicho teorema establecería vínculos para obtener una argumentación válida.
- Resaltar la diferencia entre mostrar y demostrar, así como la necesidad de la deducción e identificación de los elementos de una demostración, las partes de un teorema y la forma de su recíproco.
- La nomenclatura utilizada debe resaltarse como especial, fomentando su uso, es decir, para ampliar el lenguaje de los alumnos.

- Poner énfasis en el método deductivo y no en la memorización de las demostraciones, así como en la argumentación oral y escrita, validando los resultados obtenidos.

- Para justificar la congruencia o semejanza de triángulos debe cuidarse la identificación de ángulos de lados homólogos.

- Para trabajar la suma de los ángulos interiores de un triángulo, los alumnos deben encontrar la expresión general para la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados.

- Para introducir el concepto de semejanza se tomaron en cuenta los modelos a escala: mapas, fotos, etcétera.

- Para estudiar el tema de semejanza el alumno debe leer los aspectos relacionados con la sección áurea y la importancia que le otorgaban los griegos.

- Presentar algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras, incluyendo la basada en la semejanza de triángulos.

CAPÍTULO I

> Este grandísimo libro que continuamente tenemos abierto ante los ojos (hablo del universo)… no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, y a conocer los caracteres en los cuales esta escrito. Está escrito en lengua matemática y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas…
>
> Galileo Galilei (1564-1642)

1.1.1 *La estructura*

A través del estudio de la geometría, los estudiantes aprenden las formas y estructuras geométricas, y cómo analizar sus características y relaciones, pues de acuerdo con Van Hiele (1957)[4], las estructuras generalmente determinan los conceptos geométricos, por lo que no deben quedar en un contexto global, puesto que no se adquiriría un concepto correcto.

Por tanto, la observación de estructuras geométricas y su análisis conlleva un cambio de pensamiento en los estudiantes, pues adquieren conceptos y patrones que les permiten alcanzar razonamientos que los llevan a la demostración.

Las características de los conceptos forman una teoría que posibilita la comprensión del sistema axiomático, entonces éste tiene un significado lógico, aunque la construcción del mismo comienza por el discernimiento y se hace intercambiable con otros, ya sea por el significado de los símbolos y el lenguaje, los cuales son un contenido importante que provee de habilidades al usar símbolos.

Para Ausubel (1983)[5], los conceptos son objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos y se designan mediante algún símbolo o signo, asimismo, en ocasiones se aprenden por repetición mas que por relacionar sus atributos con la estructura cognitiva del estudiante, esto ocurre igualmente con una parte del lenguaje como son las palabras.

Los conceptos liberan al pensamiento, al aprendizaje y a la comunicación del dominio del ambiente físico, pues hacen posible la adquisición de ideas abstractas, aunque son reales en el sentido de que pueden ser percibidas, entendidas y manipuladas; por tanto, la realidad objetiva denotada por un concepto determina, en gran medida, su utilidad tanto en la estructura del conocimiento como en actividades de aprendizaje, resolución de problemas y comunicación.

Conforme a Van Hiele (1957)[6], la geometría se basa en estructuras parciales, ya que al observar y analizar esquemas globales se corre el riesgo de perder detalles y sentido, así la existencia de estructuras al parecer simples es de gran importancia, debido a que son ampliadas, refinadas y tomadas como parte de estructura una más compleja.

El pensamiento lógico es considerado como el proceso de un aprendizaje de geometría, el cual no necesariamente debe ser un desarrollo biológico, aunque para Ausubel (1983)[7], la formación de conceptos para un individuo está determinada culturalmente y es producto de sus experiencias idiosincráticas, donde los conceptos son objetos, acontecimientos, situaciones o figuras que poseen propiedades comunes que están diseñadas en cualquier sociedad dada, mediante algún signo o símbolo aceptado.

De acuerdo con los estándares de la NCTM (2000)[8], el razonamiento y demostración matemáticos como parte de la geometría proporcionan modos eficaces para desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Las personas que razonan y piensan analíticamente tienden a percibir patrones, estructuras o regularidades, tanto en situaciones del mundo real como en objetos simbólicos, pues se preguntan si son accidentales o si existen razones para que aparezcan, es decir, conjeturan y demuestran. Así, una demostración matemática es una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y justificación.

Comenzar con la observación de estructuras proporciona una mejor introducción al método deductivo, a diferencia de iniciar con aparentes estructuras deductivas, ya que con la observación los estudiantes experimentan el conocimiento previo, del cual poseen una visión global.

Los estudiantes aprenden a ver a alguna estructura como la simetría y pueden cambiarla, pero esto no es fácil, debido a que la que seleccionen será apropiada para resolver un problema, por lo que debe existir una certeza de que la estructura inicial no contiene la solución al problema, alcanzado así una reestructuración que resolverá una situación.

La habilidad de pensar y actuar con una estructura dada garantiza cierta seguridad, pero el cambio de ésta desestabiliza la existente, lo que conlleva resistencia, aunado a las complicaciones de su adolescencia, ya que tienen conflictos, incluso con ellos mismos.

1.1.2 *La adolescencia*

La tasa de escolarización para la población de 15 a 19 años ha venido creciendo de un 10% en 1970 a un 50.6% en 2001. Actualmente, uno de cada dos pobladores del país está inscrito en la educación media superior. Ligado a esto, la Secretaría de Educación Pública (SEP) en sus datos estadísticos del ciclo 2000-2001 registró que la matrícula en este nivel fue de 2, 955, 783 estudiantes. De la cifra anterior, el bachillerato bivalente atendió el 12.2% y el general el 87.8%.

La población de estudiantes que se encuentran en el bachillerato está constituida por adolescentes, los cuales buscan defender su vida interior al mismo tiempo que perciben su amor por la naturaleza, así como el descubrimiento por el arte y la necesidad imperiosa del ensueño.

De acuerdo con Ponce (1978)[9], el adolescente se concibe sin fronteras e inconmensurable, lo seduce lo humano, pero no alcanza a valorarlo, además, pretende transformar en realidad sus sueños a pesar de que no ha desarrollado totalmente su habilidad de decisión, puesto que esto le significaría renunciar a algo y la perdida no se encuentra dentro de sus planes.

Para Knobel y Aberastury (1982)[10], existe una fuerte tendencia grupal, ya que buscan seguridad y estima personal para asumir su identidad como adulto, así por lo regular traslada el papel de padres a los líderes, por lo que es obediente con éstos, facilitando la conducta psicópata normal, aunque esta actitud cruel es difícil que se realice. Sin embargo, adquiere una postura de defensa frente a la culpa y el duelo por la infancia perdida. Por tanto, para entender a los alumnos es necesario analizar las realidades de este sector a partir del estudio de contextos sociales y culturales específicos.

La descripción de sus características socioeconómicas y demográficas permitirá construir su identidad como una condición heterogénea y diferenciada, lejos de la lógica que la piensa como una realidad homogénea con iguales problemáticas, necesidades y mismas soluciones, iguales maneras de ser, entender y vivir.

Su atemporalidad hace que no tengan claridad y referencia en cuanto al tiempo y espacio, debido a esto las modificaciones biológicas y el crecimiento son vividos como un fenómeno psicótico y psicotizante. De igual manera, las manifestaciones culturales y políticas son tomadas como una visión interior en los adolescentes.

Por otro lado, la soledad resulta necesaria para que quede fuera el pasado, presente y futuro, y se conviertan en objetos manejables (madurez) para su constante búsqueda de identidad adulta, la cual está vinculada con la capacidad de conceptualizar el tiempo y la perdida de la niñez, puesto que es la muerte de una parte del yo ubicado en el pasado.

La parte sexual del adolescente es importante debido a que comienza a despertar y su evolución sexual va desde el autoerotismo hasta la heterosexualidad, lo que los lleva a buscar pareja de forma tímida, pero acelerada. El enamoramiento a primera vista, que casi siempre es ignorado por la otra parte, no necesariamente llega a la frustración, aunque es un distractor. Así, resulta evidente que los adolescentes realizan el acto sexual para explorar más que para procrear, aunque la masturbación es un fenómeno normal para formar una identidad genital.

Aunque su vida interior presenta síntomas similares, las circunstancias en las que vive y se desenvuelve lo hacen tener distancias, las cuales pueden ser externas, por lo que la madurez llega en diferentes tiempos y en algunos evidentemente es más pausada.

El peligro que se corre al hacer caso omiso de estas inquietudes estriba en que los adolescentes tienden a perder interés en los estudios académicos al advertir que en la escuela se ven con indiferencia sus problemas.

De acuerdo con Ausubel (1983)[11], los adolescentes y los adultos están habituados para aprender más rápidamente ideas y temas al leer que al escuchar. La lectura, por tanto, forma parte del aprendizaje y del medio de enseñanza con el que se sienten más cómodos y confiados.

Para el adolescente la lectura es mejor, debido a que tiene la necesidad de intelectualizar y fantasear, tal como menciona Ponce (1978)[12], es la forma de pensamiento para escapar de la realidad, así un libro te puede llevar a un viaje con ideas accesibles a la conciencia y fáciles de controlar.

Atendiendo lo anterior, surgen dos preguntas: ¿la lectura es una herramienta efectiva para resolver el problema que plantea la enseñanza de los conceptos de congruencia y semejanza de la Geometría euclidiana? y ¿la discusión en clase, entre grupos pequeños (equipos), lleva a un aprendizaje?

1.1.3 *El problema*

Actualmente, el nivel escolar en matemáticas en el bachillerato no es el esperado, debido al índice de reprobación y deserción que existe, acentuándose más en los alumnos del turno vespertino, pues existen líderes que no se consideran del todo correctos, ya que logran manipular a otros estudiantes.

Las medidas para contrarrestar la reducción de alumnos en los grupos de los CCH conllevan mayor disciplina en los salones y que las clases sean más personalizadas, lo que requiere compromiso por parte de los docentes y alumnos, para lograr el óptimo aprovechamiento, el cual se reflejará en la disminución de los índices de reprobación y una tasa nula de deserción. No obstante, no ha habido el resultado esperado.

El problema de reprobación y deserción lamentablemente no es fácil, debido a la manipulación de los medios masivos de comunicación, a los mitos y creencias, aunado a los comentarios de familiares que expresan la dificultad de las matemáticas, por tanto, el alumno puede justificar que reprobó o que desertó, incluso evidenciar su desagrado por la asignatura.

Ante esta realidad, Hoffman menciona que las matemáticas son distorsionadas, pues las presentan como muertas o anticuadas, es decir, como una disciplina abrumadora. Asimismo, se plantea que se basan en un falso modelo de dominio, en el cual las habilidades están aisladas de las enseñanzas, esto con la esperanza que las puedan usar para resolver problemas, ya sea a largo plazo o en un tiempo que quizá no llegará.

Por tanto, se necesita revisar la comprensión, ya que es probable que no exista, y al tenerla como un conocimiento muerto carece de significado para el estudiante. Así pues, se requiere de una poderosa descripción, donde se transmita el sabor de la disciplina y se guíe en la manera de enseñarla.

Las matemáticas son la ciencia de los patrones, es por eso que resulta una herramienta útil para cualquier otra disciplina, siendo fundamental para la comprensión de saberes.

Sin duda, existen múltiples opciones para abordar el asunto y una de ellas es presentar a la materia bajo otra perspectiva, es decir, con problemas, ejercicios, material y lecturas, ya sea de forma visual, auditiva, o bien, a través de los demás sentidos, esto para que el aprendizaje sea significativo.

Por lo anterior, debe ser una prioridad que el alumno se sienta interesado y confiando al trabajar por curiosidad o reto, buscando que se involucre en la clase, dejando de lado el tabú de que las matemáticas son difíciles, o bien, que él no puede realizarlas porque son complicados.

Lo más importante deber ser el aprendizaje, la comprensión, la obtención y creación de una necesidad por saber para que de esta manera las clases recobren su valor, dejando de lado el pensamiento de abandonarlas porque a algunos no les gusta o no tienen interés.

De acuerdo con Kline, el trabajo del profesor es mostrar la importancia del tema y que las matemáticas tienen un valor intelectual, pues “Si no se da un significado a las matemáticas… estas diversas notaciones y técnicas… serán para ellos conocimientos aburridos y carentes de significado" (1999: 17)[13].

La Geometría euclidiana, la estrategia y los conceptos de congruencia y semejanza buscan mostrar a los jóvenes que a partir de la primera comienza y gira toda geometría o geometrías existentes. Así, lo que se puede percibir en el mundo es Geometría euclidiana, donde la sistematización que hizo Euclides es la base. Por tanto, lo primordial será convencer y mostrar que esta disciplina tiene significado en la vida real.

El presente trabajo pretende dar una visión de la geometría, ya que su objetivo es mostrar su atractivo, por ello se ocuparon lecturas de algunos géneros.

Las matemáticas son presentadas como parte de un problema que puede resolverse por cualquiera, pero esto no es fácil, aunque razonando se llega al resultado correcto, que es lo sucede con la lectura del *Menón*.

Con las lecturas se muestra la importancia de la argumentación, la diferencia entre mostrar y demostrar, se ejemplifica el uso de teoremas y se presenta la anécdota de un matemático, lo que humaniza la asignatura y muestra su utilidad, importancia y comprensión.

El significado y la importancia de las demostraciones deben adquirir sentido para los estudiantes, presentando la geometría de forma tal que encuentren relación y aplicación en su vida cotidiana, ya que son trazos importantes y visibles en cualquier parte donde posen la mirada, pasando así de la observación a la abstracción.

Sin embargo, es un hecho que la observación es una habilidad que se pierde con el paso del tiempo, por lo que a nivel bachillerato debe despertarse para tener más posibilidades de comprensión en las unidades de geometría.

La Geometría euclidiana se estudia después de un semestre de álgebra, lo que es un cambio radical, pues desubica a los estudiantes al acercarlos a la exposición de ecuaciones.

El cambio expuesto, aunado al desinterés, sino es detectado a tiempo da como resultado la deserción, generando un problema complejo.

Para Klein “El repentino cambio del álgebra mecánica a la geometría deductiva es verdaderamente molesto para la mayor parte de los alumnos” (1999: 10)[14], pues de la matemática algorítmica se pasa a la deductiva, donde tienen que demostrar sin hacer ningún tipo de relación, volviéndose incomodo. Entonces, el propósito de las lecturas es buscar que este cambio sea confortable.

La segunda unidad del programa de matemáticas II forma parte de la Geometría euclidiana, aquí los alumnos tienen la oportunidad de reconocer patrones de comportamiento geométrico para plantear conjeturas y proceder con una validación empírica.

Partir de la observación se inicia una clasificación que implica tener conocimientos a priori, pero lo más importante es poseer una representación mental de lo que se habla para tomar una decisión, clasificar y construir, y así obtener destreza manual, y finalmente explicar cómo se realizó, ya se de forma oral y por escrito, integrando lo que se sabía con lo nuevo.

La resolución de problemas es la base de un pensamiento lógico matemático que impacta de manera positiva la vida cotidiana de los alumnos, porque en un futuro dejarán la adolescencia para convertirse en adultos.

La actividad inicia con un problema del contenido temático, ésta debe realizarse en pequeños grupos para que la razonen y resuelvan, y dependiendo de lo complicado tendrán entre 5 y 15 minutos, durante este tiempo discutirán para después comenzar una plática grupal que los lleve a la solución.

Los ejercicios deben trabajarse coordinando los sentidos, no sólo como algoritmos o simple mecanización, ya que de esta manera perderán sentido, puesto que no se llega a la comprensión, lo que derivaría en un conflicto educativo, tal como lo plantea Rugarcía (1989)[15].

Por tanto, debe apoyárseles para que aprendan y sean independientes, teniendo en cuenta que deben ser solidarios, es decir, que aprendan a aprender autónomamente, según menciona Morín (2002)[16].

Dentro del plan de estudios de la segunda unidad de matemáticas II figura la Geometría euclidiana, donde se reconocen patrones de comportamiento geométrico que permiten plantear conjeturas para proceder a una validación empírica. Así pues, las matemáticas se vuelven deductivas, pues deben aprenderse algunos conceptos y la materia, por ello resulta importante mejorar las relaciones humanas.

La relación grupal ayuda a que se perfeccione cada uno de los miembros del grupo, sin olvidar emociones o sensaciones, logrando superar sus diferencias para formar algo en común, así como aprender y lograr los objetivos planteados al inicio del curso.

El planteamiento de situaciones a resolver debe ser novedoso, para pasar de ser un objeto a ser un proceso de pensamiento, y esto dará pauta para lograr el objetivo que es que los alumnos asuman los saberes como propios a la par que buscan una alternativa de solución.

El conocimiento que puede obtenerse a lo largo de un curso implica interés cuanto provecho, utilidad o ganancia, por tanto, es necesario motivar y darle el valor que merece, pues es un componente esencial en la formación integral del individuo y parte del aprendizaje.

Por lo anterior, es necesario plantear una serie de problemas y situaciones, con la finalidad de obtener las habilidades correspondientes y la mejor comprensión de la Geometría euclidiana. Entiéndase habilidad como un concepto dinámico, con el cual se adquiere rapidez y eficacia para dominar la información y la adquisición de destrezas (Krutetskii, 1967)[17].

Efectivamente, el propósito es apoyar a los alumnos para que obtengan habilidades, aprendan y sean independientes, teniendo en cuenta que deben ser solidarios, esto sin dejar de lado que el objetivo es que aprendan a aprender autónomamente, es decir, acercándose a la lectura.

Las lecturas, el planteamiento y las situaciones pretenden ser atractivas, lo que conduce al interés o a un reto, aunque no todos los problemas parecen ejercicios son novedosos, ya que se convierten en un objeto para pensar, lo que da pauta para que lo sientan como propio.

Definitivamente, el desarrollo de la observación, análisis, reflexión y discusión para que el alumno explore a la vez que obtiene una mayor comprensión y claridad en Geometría euclidiana, se verá reflejado en un pensamiento lógico y ordenado.

La geometría es el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, pues ofrece vías para interpretar y describir entornos físicos para la resolución de problemas (Principios y Estándares del NCTM, 2000: 43)[18].

Por tanto, aprender Geometría euclidiana debe ser importante para los estudiantes, por lo que debe llevarse a cabo en el salón de clases, ya que es un momento de interacción entre las matemáticas formales y las matemáticas como actividad humana, lo que conduce al aprendizaje: actividad del hombre para elaborar su propio conocimiento (Carraher, 1995: 12)[19].

En consecuencia y atendiendo el planteamiento de Ausubel (1984)[20], el docente debe asumir el cargo de presentar a los estudiantes los materiales, los cuales sean sustancialmente válidos y apropiados para el aprendizaje, así como los métodos de enseñanza que deben situarse en la continua repetición-significativo y recepción-descubrimiento.

1.1.4 ***Docencia***

La docencia no implica únicamente la enseñanza y el aprendizaje, sino que va más allá, por lo que debe reconocerse este trabajo, ya que tiene como ideal construir una mejor sociedad.

Así, ¿el docente será un constructor de la sociedad? Éste cubre necesidades de diferentes profesiones, pero lo importante es la calidad de dichos profesionales, debido a que deben poseer un juicio personal, puesto que el profesionalismo implica la toma de decisiones de diversa índole.

Para Altarejos “Todo educador debe sentir profundamente la grandeza de su profesión. No debe importarle que una sociedad miope no la reconozca”, puesto que el compromiso se tiene con la docencia o con la sociedad mas no con los individuos en particular, por tanto, “El deber no es sólo lo que se debe cumplir para realizar un ideal universal, sino lo que es menester hacer para mejorar un modo de ser particular o ethos” (2003: 50)[21].

El docente debe ir más allá de ser un profesional que hace profesionales, es decir, debe ser alguien que transforma y hace que los seres adquieran valores y compromiso con su profesión, con ellos mismos y con la sociedad.

Rousseau plantea que la educación es lo que endereza al infante, así el docente como adulto educa al futuro hombre para vivir y ser parte de la sociedad, por lo que debe enseñar no sólo conocimientos sino valores morales, tal como describe Aristóteles: es un tipo de amistad moral, [la relación entre el docente y el discente] no fundada en términos fijos: hace un regalo, o hace, como a un amigo (2007: 2).

Por lo anterior, la docencia es la enseñanza y el mostrar sabiduría y cómo vivir feliz, tal como señala Illich (1975)[22] “es un acto de amor, inventivo, creativo y exploratorio, por lo que es necesario en la sociedad, ya que es un educador profesional con propuestas para combatir la desescolarización”.

Entonces, si no existe esa ayuda en el desarrollo se está construyendo una sociedad de individuos sin principios, ya que sólo se proporciona una instrucción, tal como menciona Freire en la *Pedagogía del oprimido* (2005)[23]: “Educadores y educandos se archivan en la medida en que, en esta visión distorsionada de la educación, no existe creatividad alguna, no existe transformación ni saber.”

El docente como constructor de la sociedad debe auto-controlar su personalidad, tal como menciona Jordán (2003)[24]: “influir positivamente en la formación y educación de la dimensión moral de los alumnos… impartir una enseñanza de gran calidad”.

1.2 *La enseñanza de la geometría*

> La enseñanza está ligada intrínsecamente al tiempo, como transfusión deliberada y socialmente necesaria de una memoria colectivamente elaborada, de una imaginación creadora compartida (Fernando Savater, 1997: 40).

La enseñanza ha cambiado, pero no deja de ser un arte colectivo, producto de la sociedad, pues es una necesidad. Esto era más notorio en las sociedades primitivas, donde no existían docentes definidos, aunque la enseñanza de valores muchas veces se vinculaba con la manipulación o adoctrinamiento.

Ésta implica consciencia, el conocerse a uno mismo, sus actos y la capacidad de reflexión, por tanto, el docente no sólo desea transmitir conocimientos sino se muestra en todos los aspectos, hasta en los que el mismo desconoce o quisiera esconder.

Aunque el docente desconozca que es un código deontológico, es perceptible para los alumnos porque lo expresa y transmite en su enseñanza. Los alumnos son tan inconscientes que pueden aprender y notar las deficiencias sin que el maestro tenga claridad en estas limitantes, debido a que pocas veces existe una evaluación personal seria de éste y una reflexión con miras hacia el perfeccionamiento.

Algo elemental en la enseñanza es el aprendizaje, el cual debe aplicarse en diferentes contextos, ya que lo trascendental es su utilización en la cotidianidad, en lo cual no estamos del todo inmersos.

Para Durkheim (2001)[25] "la enseñanza se propone concientizar los procedimientos y formulas". En este sentido, el aprender conlleva una reflexión que implica ir más allá de la recepción de un mensaje.

La enseñanza es una herramienta para la vida, pues ayuda a dilucidar mejor un acontecimiento y un proceso. Por tanto, para enseñar se tiene que comprender y buscar como transmitir un conocimiento, de tal forma que sea perceptible. He aquí un problema de la enseñanza, pues una de las mayores fallas es no buscar la belleza de lo que se quiere enseñar o la falta de amor a la materia.

Entonces el papel del docente será ser una guía o apoyo para descubrir el conocimiento que no siempre es perceptible, así como la enseñanza de valores que contribuyan a su progreso personal y social.

Los valores que llevan a una actitud también se enseñan, aunque se adquieren más con la práctica que con el discurso, debido a la sensibilidad, así se descubre fácilmente si el docente está diciendo un discurso que no siente, pero que se escucha muy bien.

Se debe impulsar el desarrollo del aprendizaje como una forma de motivación. Así, si los estudiantes adquieren una visión de un todo conectado e integrado, disminuirá la tendencia a considerar por separado conceptos y destrezas.

El código deontológico es importante para el docente, ya que la enseñanza sólo es una parte de su misión, tal como lo expone Ponce:

> Una vez constituidas las clases sociales se vuelve un dogma pedagógico su conservación, y cuanto más la educación conserva lo establecido más se la juzga adecuada (1974: 121.)

Discernir lo que se va enseñar: ¿por qué? y ¿para qué? Esto debe realizarse de manera consciente, debido a que puede caer en la dependencia por comodidad y dejar de mostrar autonomía a los estudiantes, cuando en la sociedad se necesitan seres autónomos.

Por tanto, la manipulación es lo que deja ver a una sociedad con problemas, debido a que la mayoría está desmoralizada. Por ello, el docente no sólo debe de enfocarse en la enseñanza sino en llegar a la transformación de una comunidad con seres morales (auténticos), autónomos y felices.

La enseñanza adecuada será aquella que proporcione dicha experiencia conjuntamente con elevadas calificaciones por parte del estudiante, alcanzando conocimientos que reflejan motivación, donde se funde la adquisición permanente de cuerpos de conocimiento y facultades intelectuales válidas y útiles, así como el desarrollo de un pensamiento crítico, sistemático e independiente.

Serán más válidos, de acuerdo con Rizzolo (2005)[26], los métodos activos, inductivos, es decir, aquellos en los cuales el alumno sea más que un simple receptor pasivo de la información, frente a clases magistrales y el resto de los métodos de enseñanza deductivos en los que se presenta el producto final.

El método Van Hiele (1957)[27] proporciona una serie de niveles, los cuales conllevan un proceso donde los estudiantes pasan de uno a otro más avanzado por medio de fases, pues maduran cada concepto al experimentar, dejando atrás la pasividad y encontrando el significado de los saberes.

La maduración que lleva a un nivel superior tiene lugar de una forma especial, esto se lleva a cabo por medio de fases (éstas deben considerarse como un proceso de aprendizaje mas no biológico). Asimismo, es posible y deseable que el profesor contribuya para acelerarlas. El objetivo del arte de enseñar es precisamente enfrentarse a la cuestión de saber cómo se pasa a través de estas fases y cómo se puede ayudar al estudiante de manera eficaz.

1. 3 *El aprendizaje*

Debe quedar claro en todas las sesiones que el valor de gran parte del aprendizaje escolar, de acuerdo con Ausubel (1983)[28], sólo puede defenderse con un fundamento de mejora para los estudiantes, es decir, la comprensión de ideas de la cultura a la cual pertenecen, y no sólo porque tenga usos o implicaciones prácticas.

A través del estudio de la geometría, los alumnos aprenderán sobre formas y estructuras geométricas y cómo analizar sus características y relaciones por fases.

La visualización espacial, esto es, construir y manipular mentalmente representaciones de objetos de dos y tres dimensiones, y percibir un objeto desde perspectivas diferentes es un aspecto importante del pensamiento geométrico.

En la unidad de semejanza y congruencia, los estudiantes aprenden a utilizar el razonamiento deductivo y las técnicas de demostración más formales, para resolver problemas y probar conjeturas, aquí darán explicaciones convincentes para éstas, objetivo y último nivel.

De acuerdo con Ausubel (1983)[29], la razón para desarrollar el aprendizaje repetitivo es que se aprenden las respuestas sustancialmente correctas, pero éstas carecen de correspondencia literal con lo que les han enseñado otros profesores, cuestión por la cual no adquieren confianza en sus capacidades para aprender significativamente.

El razonamiento y demostración matemáticos proporcionan modos potentes para desarrollar y agrupar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos, siendo esto último diferente al aprendizaje repetitivo. Las personas que razonan y piensan analíticamente tienden a percibir patrones, estructuras o regularidades, tanto en situaciones del mundo real como en objetos simbólicos, pues se preguntan si esos patrones son accidentales o si hay razones para que aparezcan, por lo que conjeturan y demuestran. Una demostración matemática es una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y justificación.

Para los estándares de la NCTM (2000)[30], entender las matemáticas es esencial para poder razonar, puesto que se desarrollan ideas, se exploran fenómenos, a la vez que se justifican resultados y se usan conjeturas matemáticas en todas las áreas de contenido, esto con diferentes expectativas de complejidad en todos los niveles, por lo que los estudiantes ven que la asignatura tiene sentido.

Basándose en la considerable capacidad de razonamiento con que los estudiantes llegan a la escuela, los profesores pueden ayudarles a aprender lo que supone es el razonamiento matemático.

El objetivo es que al final de las sesiones, los estudiantes estén capacitados para comprender y elaborar demostraciones matemáticas, es decir, que a partir de hipótesis produzcan argumentos con deducciones o conclusiones lógicamente rigurosas.

El razonamiento y la demostración no pueden enseñarse con una simple justificación de geometría. Esto es un tema difícil para los estudiantes, ya que su experiencia en demostraciones escritas se limita a un curso de geometría en secundaria, por lo que su perspectiva está restringida. En lo que respecta a ambos, razonamiento y demostración, deben formar parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad. Por tanto, razonar matemáticamente es un hábito mental y, como tal, ha de desarrollarse mediante el uso coherente de diversos contextos.

De acuerdo con los estándares de matemáticas de la NCTM (2000)[31], hacer matemáticas implica descubrir, esto es, conjeturar. Los estudiantes pueden aprender a formular, perfeccionar y comprobar conjeturas en la escuela, pues desde los primeros años, los profesores contribuyen a este aprendizaje mediante preguntas como: ¿qué crees que ocurrirá ahora?, ¿cuál es el patrón?, ¿esto es siempre verdad?, ¿es verdad algunas veces? Por tanto, se utilizarán sencillos cambios en la propuesta de las actividades, los cuales apoyen la realización de conjeturas, ya que los alumnos necesitan múltiples oportunidades para formularlas, así como contextos de aprendizaje, los cuales sean diversos y atractivos.

CAPÍTULO II

> El comienzo de la sabiduría es un verdadero deseo de formarse: buscar la instrucción es amarla. El que, la ama observa sus leyes, el que obedece sus leyes se asegura la vida que no perece…
>
> Sabiduría

2.1 *Técnicas de educación*

De acuerdo con Ausubel (1983)[32], leer constituye una tarea cognoscitiva, lo que es una extensión en contexto de un código simbólico, equivalente escrito de uno hablado, cuyo vocabulario y sintaxis ya domina el estudiante.

Por tanto, este proceso depende del dominio previo del lenguaje hablado y de que éste sirva de medio para percibir el significado potencial de los mensajes escritos.

Partiendo de esta realidad, la lectura es una herramienta que nos ayuda a estudiar las matemáticas partiendo de una introducción, reflexión y mejor comprensión de éstas.

2.1.1 *Lectura*

La lectura ha sido definida, según Shoenfield (1990)[33], como agradable, es decir, "el proceso en el cual las notas pasan de la libreta del profesor a la libreta de los estudiantes sin haber pasado a través de las mentes de ninguno". Esto es sólo una postura, aunque también la lectura ha sido deliberadamente etiquetada como sermón o método de instrucción. No obstante, se busca que sea un instrumento para que los estudiantes vean los conceptos como significativos y, por tanto, perduren en la estructura cognitiva para que resuelvan situaciones complejas cuando lo necesiten. De acuerdo con los actuales alumnos de matemáticas, existe superioridad en comparación con otros métodos de aprendizaje.

Para Zúñiga (1992)[34], la lectura es un hecho complejo, ya que en principio constituye un proceso de construcción de significados y usos sociales que de manera permanente se inicia mucho antes de la escolarización, cuando el niño aprende a ser parte de un núcleo social primario (familia).

En este contexto se construyen los primeros significados del lenguaje, su uso y sus funciones con sus vertientes orales y escritas. Al construirse en familiar una idea de lo que es la expresión oral y escrita, su utilización e importancia, se establece un modelo de lectura, de sus funciones y valores.

Según Ausubel (1983), la lectura puede emplearse como un instrumento para adquirir nuevos conocimientos, ya que al leer se perciben significados de mensajes escritos y se relaciona lo percibido con la estructura cognoscitiva a fin de comprenderlo.

Por tanto, el estudiante posee hábitos de lectura que lo auxiliarán, o bien, en el peor de los casos lo limitarán, debido a que carece de práctica frecuente de lectura y de significados precisos, sin embargo, existen ventajas en este método.

2.1.1.1 *Las ventajas de la lectura*

Cuando la técnica de lectura se lleva a cabo correctamente se presentan las siguientes ventajas:

1.- La lectura permite una representación pública de la información total, más que cualquier otra técnica. No obstante, se corre el riesgo de que los estudiantes no lean cuidadosamente.

Ciertamente, se puede considerar la fascinación que raramente envuelve al material, pues una responsabilidad de las partes es ayudar a los alumnos no cubriéndolos o descubriéndolos.

2.- La lectura es más personal y puede adaptarse más fácilmente a las necesidades de una clase en particular, ya que puede apreciarse cuando una sesión no está siguiéndose con facilidad.

3.- Se puede utilizar el pizarrón u otro dispositivo para presentar e ilustrar puntos de un teorema, ejemplo, o bien, para compararlos. Así, se pueden mostrar importantes interconexiones de la lectura.

4.- Las lecturas tienen más niveles de emoción que los textos. Éstas pueden motivar a los estudiantes para trabajar con problemas que quizá no sean de su interés, e inducirlos a que el conocimiento se torne excitante; ya que se busca que con cada lectura haya motivación.

5.- Las lecturas presentan cómo los expertos abordan nuevos problemas en un determinado campo, lo que da a los estudiantes la oportunidad de ver el significado de los trabajos de eruditos, puesto que pueden proveerse de modelos para acercarse a las problemáticas.

De acuerdo con Shoenfield (1990), los matemáticos usan el método de la lectura casi exclusivamente por estas tres últimas razones:

6.- Es una forma menos cara de enseñar matemáticas, especialmente si las secciones de la lectura son usadas más de una vez, ya que se pueden retomar a lo largo del semestre para ampliar el propósito de la misma.

7.- La lectura no tiene grandes requerimientos con respecto al tiempo y energía.

8.- Es un método bien conocido, ya que todos sabemos leer y se puede aprender matemáticas por este medio.

Aunado a esto, el hacer las cosas de manera distinta proporciona seguridad, además, es un trabajo individual y colectivo, lo que conlleva una retroalimentación grupal.

En este sentido, es un método efectivo, sólo se debe planificar adecuadamente para aprender matemáticas con creatividad, ya que los estudiantes cuentan con imaginación, componente importante para el aprendizaje.

2.1.1.2 *El método de lectura*

A continuación se presentan algunas de las sugerencias que se fueron tomadas en cuenta:

1.- Se impidió que la lectura se llevara a cabo por un periodo prolongado, ya que no es recomendable, debido a que la concentración y motivación se pierden en un lapso de tiempo. Los estudiantes no deben realizar lecturas muy largas, puesto que resulta complicado seguirlas apropiadamente.

2.- Lo anterior tiene la finalidad de que la clase sea más animada al introducir nuevos materiales, los cuales se basan en respuestas y conjeturas de los alumnos, esto como punto de motivación.

3.- Una pausa después del texto puede dar a la clase la oportunidad de pensar lo que se ha leído. Asimismo, los estudiantes deben tener tiempo para ordenar y clarificar sus ideas, considerando cualquier pregunta que les surja, aspecto que invita a la reflexión.

4.- No deben ridiculizarse las preguntas o respuestas, ya que se puede aprender de los errores.

5.- Usualmente a los estudiantes se les dificulta leer matemáticas, hasta cuando las escriben bien. Actualmente, leyendo una página o dos en voz alta durante la clase genera comentarios con ideas importantes, detalles que necesitan anotar y estructurar para la exposición de sus argumentos, lo que conlleva un gran valor educativo, a la vez que quita fobias y miedos.

6.- No deben promoverse las discusiones entre estudiantes, puesto que parte de la tarea del docente es fomentar la charla sobre matemáticas, así como escuchar y leer sobre ellas. Una manera de hacer esto es permitir que los alumnos conversen sobre sus tareas con otro compañero mientras trabajan en ellas, así escribirán sus propias soluciones de manera independientemente.

7.- Cuando sea posible, debe evitarse el uso de exámenes con opción múltiple. Si bien el grado de algunos problemas se torna fácil, es difícil diseñar un examen que evalúe justamente el progreso de los estudiantes. Aunque esto no ofrece a los alumnos la oportunidad para extender su conocimiento.

8.- Al final de la lectura debe darse a los estudiantes un tiempo para una última vista comprensiva del curso, proporcionando un panorama general de los objetivos y porqué se persiguen.

Para contrarrestar la pasividad de los estudiantes se debe promover la discusión de la lectura. Cuando se esté leyendo se les formularán preguntas para mantenerlos involucrados, ya sea por medio de comentarios, incluso llamándolos individualmente o cuestionándolos en clase.

Cuando son individuales las lecturas no deben rebasar los 15 minutos, a menos que haya preguntas, sino se pierde la atención.

En el caso de que los estudiantes hayan perdido la atención, se deben hacer preguntas estratégicas para mantenerlos alerta y menos pasivos, entonces, éstas pueden ser discutidas en pequeños grupos (equipos) o de forma colectiva. Esto es natural en el progreso de la lectura, incluso incita a que hagan cuestionamientos y los expongan a los demás compañeros.

Utilizando mini-lecturas puntualizadas por equipo se pueden resolver problemas, los cuales tienen diferentes grados de dificultad, éstos los contesta el alumno en el pizarrón. Observando el trabajo y respondiendo preguntas con otras preguntas se contesta la que ellos formularon. Cuando la mayoría de los grupos lo ha hecho, se escriben las respuestas, finalmente, hay una discusión colectiva donde se cuestiona porqué se llego a éstas.

2.2 *Pequeños grupos (equipos)*

Shoenfield (1990) plantea que trabajar en pequeños grupos es algo que conlleva muchas bondades. Originalmente, en algún punto durante el periodo de una sesión, la clase se divide en grupos de 3 a 4 estudiantes para trabajar cuidadosamente resolviendo o discutiendo algunos problemas, analizando o conjeturando algunas situaciones; esto para que se tenga tiempo de proporcionar recomendaciones y guiar adecuadamente la solución de los problemas. Entre las pretensiones de este método encontramos las siguientes:

1.- El aprendizaje consiste en evaluar nueva información con relación a la información recién entendida, la cual se puede usar en situaciones nuevas. Las interacciones en equipo son más productivas que escuchando pasivamente la lectura.

2.- Se aprende mejor cuando se está entretenido, entonces los estudiantes aprenderán más si la clase es horizontal.

3.- Se aprende mejor cuando se enseña a alguien.

4.- Los pequeños grupos permiten intervenir directamente para saber cómo los estudiantes hacen su trabajo. El impacto de esa intervención es más efectivo que otras formas.

5.- Para sobreentender el caso, debe entenderse que las matemáticas no siempre son un esfuerzo solitario. Los estudiantes tienen una pequeña oportunidad de encajar en la colaboración, lo que es una motivación.

6.- Al trabajar en equipo los estudiantes se sienten más seguros de sus habilidades matemáticas, pues notan que los demás compañeros tienen dificultades similares y que también tienen que lidiar con los problemas presentados.

Los equipos se pueden usar de varios modos para corregir los malentendidos en clase; para generar una variedad de métodos menos rutinarios; para ayudar a los estudiantes a digerir un nuevo concepto, a la vez que trabajan con ejemplos.

La cantidad de integrantes de un equipo es fundamental para llevar a cabo algunas situaciones de aprendizaje fuera de clase o de tareas extra.

Debe tenerse la certeza de que los equipos están trabajando en el problema, asimismo, es necesario dar alguna explicación de los puntos difíciles, a la vez que se van corrigiendo malos entendidos de los estudiantes. Después de algún tiempo (quizá 10 min. o cerca del final de la clase, dependiendo de la naturaleza del problema) la discusión será en forma colectiva o grupal, y las conclusiones se compartirán con toda la clase.

Generalmente, los grupos son una mezcla de habilidades heterogéneas y se conforman de tres a cinco estudiantes. Éstos quizá se mantengan durante el semestre o varíen diario, dependiendo del tipo de material a cubrir y de la relación entre ellos.

Los grupos que se mantienen con los mismos integrantes harán que los estudiantes se sientan más cómodos, no obstante, no se genera una interacción con los demás compañeros.

Un tipo de motivación es nunca ridiculizar a los compañeros, aspecto que debe aclararse desde el comienzo del semestre.

Los grupos deben involucrarse en una aprendizaje activo para que se discuta sobre las matemáticas. El método es muy popular entre los estudiantes, quizá se deba al énfasis que se pone en la cooperación frente a la competencia, y particularmente, al crecimiento en el control de los estudiantes en el ritmo de aprendizaje. La mayor desventaja para el aprendizaje del pequeño grupo es que el contenido no se cubre como en el método de la lectura, aunque los conceptos como semejanza y congruencia sí se llevaron a cabo.

El argumento es que los estudiantes que aprenden por este método, lo hacen mucho más a fondo que aquellos que aprenderán de la lectura tradicional.

2.3 *Métodos de resolución de problemas*

Un cambio equilibrado en los cursos de lectura tradicional viene de ver a las matemáticas como el intento por resolver problemas y desarrollar cursos que correspondan a este panorama. Ante esto Holmos (1980) expresa que realmente las matemáticas consisten en axiomas (como el postulado de las paralelas), teoremas (como el teorema fundamental del Algebra), pruebas (como la prueba de que los ángulos internos de un triángulo suman 2 ángulos rectos), definiciones (como la definición de línea), teoría (como la de categoría), fórmulas (como la fórmula para obtener un binomio al cuadrado) y métodos (como el gráfico para resolver un sistema de ecuaciones).

Las matemáticas ciertamente no existirían sin estos ingredientes, ya que todos son esenciales. Sin embargo, ninguno de éstos es el corazón del sujeto, pues la razón principal para la existencia de los matemáticos es resolver problemas, por lo que éstas consisten éstos y sus soluciones.

De acuerdo con Shoenfield (1990)[37], los problemas son el centro de las matemáticas y es necesario enfatizar más y más, puesto que esto llevará a los estudiantes a ser mejores en la resolución de los mismos, ya que verán a la materia como una herramienta parar solucionar situaciones de la vida diaria, incluso asuntos no tan comunes o complejos.

La resolución de problemas significa comprometerse con una tarea. Para que este método funcione los estudiantes tienen que recurrir a sus conocimientos y, a través de este proceso, adquirirán nociones matemáticas nuevas, siendo esto último uno de los objetivos. Así pues, resolver problemas no es el único fin del aprendizaje de las matemáticas, ya que es también una de las principales maneras de hacerlo.

Los estudiantes tienen frecuentes oportunidades para formular problemas complejos, de enfrentarse a ellos y de resolver dificultades que requieren una cantidad considerable de esfuerzo, no obstante, debe estimularse la reflexión sobre su pensamiento.

Para aprender a resolver problemas en matemáticas, los alumnos deben adquirir formas de pensar, hábitos de perseverancia y curiosidad, así como confianza en situaciones no familiares, lo cual les servirá fuera de la clase.

Razonar y encontrar una buena respuesta proporciona grandes beneficios en la vida diaria, en el trabajo, en el ámbito escolar y personal, pues así lo expresan los estudiantes que solucionan sus problemas o sustentan sus hipótesis con argumentos sólidos.

Atendiendo a los estándares de la NCTM (2000)[38], la resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas, por lo que no es una parte aislada del programa de la disciplina, puesto que permea las cinco áreas de contenido descritas en dichos estándares.

El contexto de los problemas puede variar de experiencias familiares o escolares del estudiante a aplicaciones científicas o mundiales, por tanto, las situaciones a resolver son diversas. Así, los buenos problemas deberán integrar múltiples temas y buscar que las matemáticas sean significativas.

De las muchas descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas es el trabajo de Pólya (1957)[39].

Estas estrategias, generalmente puestas en práctica por los estudiantes, incluyen: el uso de diagramas, la búsqueda de patrones, el considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, así como crear un problema equivalente y uno más sencillo. Durante todas las sesiones los alumnos se expresan, clasifican y comparan sus estrategias, e incluso sus resultados.

Al plantear correctamente un problema se proporciona la oportunidad de solidificar y ampliar los conocimientos previos y, si se eligen bien, pueden estimular el aprendizaje de las matemáticas. Con esto los estudiantes pueden introducir los conceptos de congruencia y semejanza a través de situaciones que surjan de su propio mundo.

De acuerdo con los estándares de la NCTM (2000)[40], la comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación de éstas, ya que es un camino para compartir y aclarar las ideas. A través de ésta, los pensamientos llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. Asimismo, el proceso de comunicación ayuda a dar significado y permanencia a las ideas, pues estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de las matemáticas, así como a comunicar a otros los resultados de su pensamiento, ya sea de forma oral o por escrito, por lo que aprenden a ser claros y convincentes.

Escuchar las explicaciones de los demás les da la oportunidad de desarrollar su comprensión. Las conversaciones en las que se exploran las ideas matemáticas desde diversas perspectivas ayudan a los participantes a compartir lo que piensa y a hacer conexiones.

Los estudiantes que se involucran en discusiones para justificar soluciones, especialmente cuando hay desacuerdo, llegarán a una mejor comprensión matemática a medida que intentan convencer a sus compañeros sobre los diferentes puntos de vista.

Esta actividad contribuye también al desarrollo de un lenguaje para expresar las ideas matemáticas y para apreciar su importancia. Los estudiantes que tienen oportunidades, incentivos y apoyo para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas, se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas y aprenden a comunicar matemáticamente.

Debido a que las matemáticas se expresan frecuentemente mediante símbolos, la comunicación oral y escrita de las ideas matemáticas no es siempre reconocida como una parte importante de la educación.

Los estudiantes ganan perspicacia cuando presentan sus métodos al resolver problemas, justifican su razonamiento a un compañero, o bien, cuando hacen una pregunta sobre algo que es extraño para ellos.

Por tanto, la comunicación puede apoyar el aprendizaje de conceptos matemáticos nuevos, cuando escenifican una situación, la dibujan, utilizan diagramas, escriben y emplean símbolos matemáticos.

Los conceptos erróneos pueden identificarse y tratarse, lo que recuerda a los alumnos que ellos comparten la responsabilidad en el aprendizaje.

La reflexión y la comunicación son procesos entrelazados en el aprendizaje de las matemáticas. Con la atención explícita y la planificación de las clases, la comunicación con propósitos de reflexión puede llegar a ser una parte natural de dicho aprendizaje.

Los estudiantes pueden “pensar en voz alta”, meditar las preguntas propuestas por el profesor o que un compañero haga que reconsideren su razonamiento. Con la experiencia, los alumnos lograrán ser competentes para organizar y registrar su pensamiento.

Para que un resultado matemático se reconozca como correcto, la demostración que se proponga tiene que ser aceptada por la comunidad de matemáticos profesionales. Así, el exponer las ideas en clase es parte de un ensayo para demostrarse que pueden entender y hacer entender algún concepto.

Los estudiantes necesitan poner a prueba sus ideas sobre la base de un conocimiento compartido con la comunidad matemática de la clase, esto para ver si pueden ser entendidas y si ellos son suficientemente convincentes. Cuando éstas se exponen públicamente, los alumnos se benefician al participar en la discusión y el profesor puede controlar su aprendizaje. Aprender lo que es aceptable en matemáticas como prueba debería ser un objetivo educativo en todas las etapas.

Para apoyar con eficacia el discurso en el aula, es propicio que haya un ambiente de armonía y respeto, en el que los estudiantes se sientan libres para expresar sus opiniones.

El proceso de resolver problemas con otros estudiantes es beneficioso. Con frecuencia, un alumno que tiene una manera de ver un problema puede sacar provecho de los puntos de vista de los otros, ya que puede revelar un aspecto diferente, por tanto, se lleva a cabo una retroalimentación en ambos sentidos.

2.4 *El método Van Hiele*

Los esposos Van Hiele realizaron una investigación pensada en la comprensión de la geometría, ya que la memorización da lugar a la falta de conocimiento de dicha área.

El propósito de esta búsqueda fue investigar el pensamiento geométrico en los adolescentes en el interior de las escuelas de la ciudad. El sistema conceptual fue construido a partir de un modelo de 5 niveles del desarrollo en geometría, éste fue presentado en 1957. Este modelo ha motivado la investigación y ha cambiado resultados en el currículum de la geometría de los educadores soviéticos. En años recientes el interés ha crecido en los EEUU y en el resto del mundo.

Los Van Hiele estaban muy consternados por las dificultades que sus estudiantes encontraban en la geometría del nivel secundaria.

Ellos creían que estos problemas involucraban un alto nivel de pensamiento, por lo que los estudiantes no tenían la experiencia suficiente para verlos como pre-requisito en los niveles bajos. Su trabajo de investigación estaba enfocado en estándares de pensamiento en geometría y en la relación del conocimiento, esto para ayudar a los alumnos de un cierto grado y pasar así al siguiente.

Los esposos Van Hiele terminaron disertando en los niveles de pensamiento y en el rol de aprender geometría en la Universidad de Utrecht en 1957. Dina se enfocó en un experimento didáctico que aspiraba a elevar el nivel de los estudiantes; mientras que Pierre formuló la estructura a través de niveles y principios diseñados a ayudar a los alumnos a crecer en sus argumentos.

Si bien su investigación pertenece al siglo pasado, sigue vigente por sus aportaciones, esto en cuanto a los niveles de conocimiento en geometría, tales como las fases que proponen que el estudiante haga su aprendizaje de forma activa, es decir, haciendo suyo el conocimiento.

2.4.1 *Niveles*

Según los Van Hiele, el aprendizaje por experiencias educadoras pasa a través de los 5 niveles, donde el aprendiz no puede lograr un nivel de pensamiento más elevado sin haber pasado uno previo:

- Nivel 0: El estudiante identifica, nombra, compara y traza figuras geométricas (triángulos, ángulos, intersecciones y líneas paralelas) de acuerdo a su apariencia.
- Nivel 1: El estudiante analiza figuras en términos de sus componentes y los relaciona entre ellos, descubriendo propiedades y reglas empíricamente (midiendo, doblando, usando diagramas).
- Nivel 2: El alumno de manera lógica interrelaciona con las propiedades previamente descubiertas reglas dadas. O bien, siguiendo argumentos informales.
- Nivel 3: El estudiante deduce teoremas con pruebas y establece interrelaciones entre una red de éstos.
- Nivel 4: El estudiante establece teoremas en diferentes sistemas de razonamiento, analiza y compara dichos sistemas.

Los Van Hiele (1958)[41] notaron que el aprendizaje es un proceso discontinuo, en donde hay saltos en la curva de éste, la cual revela la presencia de "niveles". Asimismo, observaron que hay ciertos puntos.

El proceso de aprendizaje parece interrumpido, al mismo tiempo que los estudiantes parecen haber "madurado". El hablar un lenguaje de diferente nivel constituye una incomprensión, pues el alumno se siente incapaz, aunque quizá pueda imitar ciertas acciones, pero no ha visto su propia destreza hasta que alcance un nuevo nivel.

En resumen, los Van Hiele hicieron ciertas observaciones sobre la naturaleza general de estos niveles de pensamiento y sus relaciones para enseñar.

En el nivel cero las figuras eran determinadas por sus propiedades, pero se pensaba que en éste no había conciencia de las mismas.

Van Hiele (1959)[42] plantea que los niveles son "caracterizados por diferencias a través de objetivos", por ejemplo, en el cero los objetivos se llevan a cabo a través de figuras geométricas; en el nivel uno, las operaciones de los estudiantes se centran en objetivos al nombrarlos y al establecer la clase de las figuras, las cuales son producto de las actividades del nivel cero, asimismo, descubre propiedades para estas clases. En el segundo nivel estas propiedades se vuelven el objetivo, pues los estudiantes actúan sobre un orden lógico de las mismas. En el tercero las relaciones ordenadas se vuelven el objeto en el cual los alumnos operan; y en el cuatro se busca fundamentar con orden las relaciones. Al respecto Van Hiele (1959)[43] establece que cada nivel tiene su propio lenguaje y sistema de conectar estas relaciones con los símbolos. Una que es "correcta" en un nivel se puede observar como incorrecta en otro, por ejemplo, en la relación entre un cuadrado y un rectángulo. Asimismo, dos personas que se encuentran en diferentes niveles no se pueden entender entre ellas, mucho menos al manejar un proceso del otro.

La estructura del lenguaje es un factor importante en los niveles globales (concreto): estructuras (nivel cero), estructuras geométricas visuales (nivel uno-dos), estructuras abstractas (nivel tres-cuatro). Van Hiele se percata que muchas fallas en la enseñanza de la geometría son resultado de la barrera del lenguaje, pues el maestro emplea un lenguaje con un nivel más alto al entendido por los estudiantes.

2.4.2 *Fases*

Los Van Hiele proponen una secuencia de 5 fases de aprendizaje para promover el siguiente nivel. Básicamente, éstas constituyen un bosquejo para organizar la instrucción:

Fase 1 Información: trabajando con el material presentado, los estudiantes conocen la estructura del material. (examinan ejemplos y no ejemplos).

Fase 2 Orientación guiada: la investigación de los estudiantes se guiará por ciertas cuestiones o direcciones proporcionadas por el maestro (mediciones u observaciones de simetría).

Fase 3 Explicación los estudiantes expresan lo que han aprendido sobre el material, a través de un lenguaje correcto (exponen ideas sobre las propiedades de las figuras).

Fase 4 Orientación libre: los estudiantes aplican su nuevo lenguaje a nuevas investigaciones del material, haciendo tareas que pueden terminarse de diferentes maneras (conociendo propiedades de las figuras investigadas para una nueva figura y sus giros).

Fase 5 Integración: Los alumnos observan el material que han aprendido (suman las propiedades de una figura).

En el progreso de un nivel al otro, los Van Hiele afirman (1959)[44] que es más dependiente una instrucción que una edad o maduración biológica, por lo que las formas de instrucción pueden afectar el progreso.

Es posible que ciertos métodos de enseñanza no permitan la obtención de niveles más altos, por tanto, esos métodos no son accesibles para el estudiante.

Los Van Hiele (1958)[45] notan que es posible enseñar el material sobre su actual nivel, por ejemplo, las fracciones de aritmética significan una diferenciación sin conocer el cociente diferencial.

2.4.3 *El lenguaje: relación entre el modelo van hiele y los mapas conceptuales*

El lenguaje tiene un papel crucial dentro del proceso de formación de conceptos y en el aprendizaje significativo de los mismos, además, es el código que permite interpretar o relacionar lo captado, ya que sin éste sólo se podrían establecer relaciones mentales con lo que en determinado momento se estuviese percibiendo mas no se podrían evocar representaciones mentales e imaginar otras.

La palabra, como un tipo especial de lenguaje y por su capacidad de simbolizar, permite que el cerebro procese en forma integral la información que envía a cada uno de los sentidos, con ella se clasifican, ordenan y relacionan las imágenes o sensaciones percibidas.

Según Ausubel (1989)[46], la adquisición del lenguaje es lo que permite en gran parte el aprendizaje significativo de una vasta cantidad de conceptos y principios que, por sí solos, no podrían nunca descubrir a lo largo de sus vidas. Es por eso que es relevante el papel que juega el lenguaje dentro de la construcción de los mapas conceptuales, ya que según Novak y Gowin (1999) "es útil para traducir regularidades que reconocemos normalmente, en códigos que podemos utilizar para describir nuestros pensamientos, sentimientos y acciones". En concordancia con el modelo educativo de referencia, el lenguaje que el estudiante emplee para expresarse es de suma importancia, tal como apunta Gutiérrez (1990), las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de Van Hiele no sólo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la manera de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario.

Debido a esto, el lenguaje es esencial tanto para la creación de las experiencias de aprendizaje como para que el docente se haga comprender por sus alumnos, ya que lo contrario provocaría la incomprensión mutua, tal como lo describe Van Hiele (1957) "dos personas que razonan en diferentes niveles no podrán comprenderse".

CAPÍTULO III

> El rey Ptolomeo empezó a leer, pero se canso en seguida. Le costaba mucho trabajo seguir los largos y minuciosos razonamientos de Euclides. El rey mando entonces llamar al científico, y le pregunto si en Geometría existía alguna vía más corta y menos trabajosa que la de los Elementos. A lo que Euclides respondió que no, que "en matemáticas no hay caminos reales".

3.1 *Estrategia didáctica*

Las matemáticas pueden presentarse como teorías acabadas, pero le ha llevado a la humanidad muchos años comprenderlas, y en ocasiones, se pretende que el alumno las conceptualice en poco tiempo sin dar espacio a que sean maduradas. Un ejemplo claro es la enseñanza de la geometría, en donde el estudiante se limita a memorizar definiciones y teoremas, pero sin hacer conjeturas para intentar justificarlas o refutarlas. Esto último es la esencia de la geometría y de los conceptos como semejanza.

Esta práctica docente forma parte de la unidad II de congruencia y semejanza del segundo semestre del programa de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades, los conceptos son sólo el pretexto para hacer y la geometría es el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, lo cual culmina en la enseñanza que es el trabajo de demostraciones.

En la dinámica de trabajo, diseñada para las sesiones, el alumno va adquiriendo y madurando los conceptos a través de lecturas, actividades planeadas y dirigidas, a la par que resuelve problemas como un método para darle significado a éstos, ya que los ejercicios no resueltos crean inquietudes, lo que permite ampliar o crear conceptos nuevos.

De acuerdo con Ausubel (1984)[46], descubrir métodos de enseñanza eficaces por ensayo y error es también un procedimiento ciego y, por tanto, innecesariamente difícil y antieconómico. Por el contrario, si el profesor inicia con principios del aprendizaje en la enseñanza, en lugar de confiar en intuiciones vagas o en novedades y modas, ésta sólo será eficaz en la medida en que manipule eficientemente las variables psicológicas que gobiernan el aprendizaje.

Tomando en cuenta los estándares de la NCTM (2000)[47], un principio de aprendizaje de las matemáticas debe comprender y construir activamente los nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los saberes previos. Para ello, se necesita una estrategia que aborde los conceptos de congruencia y semejanza. Entiéndase estrategia como un proceso regulable o conjunto de las normas que aseguran una decisión óptima en cada momento de las sesiones.

Un método puede ser apropiado bajo un conjunto de condiciones educativas y según los rasgos de personalidad del maestro, mientras que otra técnica muy diferente puede ser igualmente adecuada en circunstancias educativas distintas o en manos de otro profesor.

Para Ausubel (1984)[48], los profesores deben decidir lo que es importante que aprendan los alumnos, averiguar si están listos para adquirir conocimientos, conducir la enseñanza a un ritmo apropiado, y decidir la magnitud y el nivel de dificultad propios de las tareas.

El aprendizaje en el salón de clases es una relación entre individuos que generan reacciones emocionales y sirve como representante impersonal de la cultura. Entendiendo esto como una parte de lo que se busca en la enseñanza media superior, es decir, que los alumnos adquieran cultura básica integrada por las capacidades de aprender a conocer (acceso a la información y su organización), aprender a hacer (la puesta en práctica de los conocimientos), aprender a ser (la adquisición y el ejercicio de los valores de la cultura), las cuales se sintetizan en el aprender a aprender (capacidad del alumno de seguir aprendiendo y asumirse como sujeto de su cultura y educación). Este tipo de cultura va más allá de los aprendizajes de datos y conceptos, ya que es la adquisición de las bases metodológicas para acceder y aplicar esos saberes. Asimismo, es la posesión de habilidades intelectuales que permiten un crecimiento intelectual autónomo, que consiste esencialmente en la posesión de un conjunto de principios de conocimiento.

Para desarrollar la capacidad de aprender a conocer es necesaria la lectura donde se lleva a cabo esto; y otro punto importante es que en la geometría se debe razonar, analizar, reflexionar, conjeturar y demostrar.

La Geometría euclidiana ayuda al alumno a percibir y describir los objetos y sus partes a partir de sus formas, dimensiones y propiedades, favoreciendo el pensamiento reflexivo, identificando propiedades y relaciones que pueden enunciarse en proposiciones generales, asimismo, construye y proporciona argumentos que las validan, y establece relaciones lógicas entre ellas sin llegar a un rigor axiomático, propio de estudios especializados.

No obstante, se busca que el alumno adquiera un pensamiento deductivo en donde se contemplan etapas de exploración, deducción y aplicación, mismas que permiten un conocimiento básico que lo introduce al aspecto deductivo y a la comprensión del porqué de sus demostraciones, incluso una de las lecturas de la segunda sesión (Torres, 2004) presenta la diferencia entre mostrar y demostrar.

De acuerdo con Ausubel (1984)[49], "Todo el aprendizaje en el salón de clases puede ser situado a lo largo de dos dimensiones independientes: la dimensión repetición-aprendizaje significativo y la dimensión recepción-descubrimiento"; pero en estas 9 sesiones de la unidad se contempla la primera dimensión.

En cada una de las 9 sesiones se pretende que los alumnos aprendan matemáticas alcanzando una etapa en la cual las produzcan por ellos mismos o en colaboración con otros, esto comenzando desde "una ciencia de patrones" hasta una visión diferente, donde puede ser inducida, para no limitar el aprendizaje. Esto es, hacer matemáticas no en el sentido de investigación, sino por medio de la experiencia (ser activo) en el salón de clases, por tanto, es importante tener esta claridad y hacerlo notar, puesto que de esto depende el entendimiento y buen desarrollo de cada sesión, tal como apunta Schoenfeld (1988)[50].

En el siguiente cuadro se observa brevemente que en las 9 sesiones se desarrollaron los conceptos de congruencia y semejanza, tomando en cuenta los conocimientos previos se les dieron 15 horas como lo marca el programa del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Cabe destacar que estos amplios conceptos que tardaron siglos en quedar plasmados de manera escrita; por ello, algunas lecturas fueron históricas o presentan diferentes perspectivas:

Cuadro 1

No.de sesión	Tema	Fase	Lectura	Tiempo
sesión 1	Introducción y diagnostico	Reconocimiento	Menón	2 horas
sesión 2	Rectas notables	Explicativa	De Euler	2 horas
sesión 3	Paralelismo	Orientación libre	El Timeo	1 hora
sesión 4	Demostración	Explicativa	Los Elementos	2 horas
sesión 5	Congruencia	Integración	Mostrar y Demostrar	2 horas
sesión 6	Semejanza	Orientación libre	Proporción dorada	1 hora
sesión 7	Teorema de Pitágoras	Explicativa	Cuento	2 horas
sesión 8	Continuación del Teorema	Integración	Picasso	2 horas
sesión 9	Examen	Integración	Sin lectura	1 hora

Para las primeras ocho sesiones se tomaron en cuenta las siguientes reglas:

- Se parte del hecho de que los estudiantes poseen un almacén significativo de concepciones y propiedades de los objetos materiales.
- Se inicia a partir de las experiencias previas de los alumnos, es decir, de la observación de figuras concretas que forman estructuras geométricas.

Asimismo, se pone en relación con estas observaciones una forma “geométrica" de verlas.

- La lectura se toma como una motivación y un acercamiento a la materia, debido a la aparición de dudas y al gusto por la geometría.
- Las actividades de enseñanza-aprendizaje se diseñan tomando en cuenta el nivel lingüístico y el razonamiento de los alumnos.
- Se debe conocer en qué forma los alumnos estructuran el espacio de manera espontánea, y a partir de esa percepción se deben diseñar actividades que le permitan construir visualmente estructuras geométricas y un razonamiento abstracto. Para esto se modifica progresivamente el contexto en el que aparecen los objetos, esto en una dirección matemática alejada del empirismo.
- El diálogo es una pieza clave dentro de la enseñanza, pues la motivación se toma como un punto importante para que los alumnos hablen acerca de los conceptos geométricos y desarrollen un lenguaje expresivo, respetando en un primer momento sus propias expresiones, para luego introducir un lenguaje geométrico.
- Debe conocerse el correlato mental de las palabras y conceptos que utilizan los alumnos, esto por medio de actividades diseñadas para tal fin y del uso continuo del diálogo en el aula.

Todas las sesiones tienen las actividades de expresión y complementación de dicho correlato mental, lo que permite que éste coincida con el significado de la palabra en la disciplina, aunque se expone su punto de vista partiendo de la lectura, ésta el pretexto para entrar de lleno en la geometría.

3.2 *Relación del lenguaje*

La comunicación es una parte esencial de cada una de las sesiones, de las matemáticas y de la educación matemática, por ello se considera un camino para compartir y aclarar las ideas. A través de ésta, los pensamientos llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación.

De acuerdo con los estándares de la NCTM (2000)[51], el proceso de comunicación también ayuda a dar significado y permanencia a las ideas. Así, cuando se estimula a los estudiantes a pensar, a razonar acerca de las matemáticas, y a comunicar a otros los resultados de su pensamiento, ya sea oralmente o por escrito, aprenden a ser claros y convincentes, lo que muestra que han adquirido la comprensión y, por tanto, pueden ayuda a los otros a obtenerla.

Para Ausubel (1984)[52], el lenguaje es un facilitador importante de los aprendizajes significativos, ya que desempeña una función integral y operativa en el pensamiento. Aunque en la sesión 3, en la lectura de las primeras dos demostraciones de Euclides los estudiantes pueden observar una claridad indiscutible en el lenguaje, no sucede lo mismo con las definiciones de palabras y términos, pues no son del todo fáciles de entender. Ante esto, Ausubel menciona:

> Al aprender un teorema de geometría cada palabra componente no sólo tiene ya significado, sino que toda la tarea de aprendizaje es potencialmente significativa pero es necesario que el alumno manifieste una actitud de aprendizaje significativo, ya que debe de relacionar elementos componentes con su estructura cognitiva e internaliza (1984: 56).

Van Hiele considera que en matemáticas se han hecho esfuerzos e intentos por construir un sistema de geometría usando únicamente un lenguaje, así como viendo las relaciones que existen entre lo hablado y el pensamiento de una figura:

> Un matemático construye axiomáticamente geometría. Si él dice “hay exactamente una línea que tiene dados dos puntos diferentes como elementos,” él no piensa en una línea visual y puntos visuales. Si usted dibuja dos líneas de intersección y dice que estas líneas son llamadas “puntos” y el punto que tienen en común “una línea” el podrá decir “esta concepción es posible de lo que he dicho pero no e intentado nada en particular acerca del mundo visual”. Pero no se puede mantener en primer lugar, tenemos que hacer varios acuerdos acerca del orden de palabras, como ya sabemos que una oración puede tener un significado diferente si nosotros cambiamos el orden de las palabras. Pero segundo nunca podríamos encontrar nuevas cosas para otras cosas requerimos nuevas palabras, y si éstas no están. Las únicas cosas que podemos encontrar son contradicciones, en las bases de las teorías que hemos pensado que son correctas y no lo son. Para ser claros de muchas dificultades de lenguaje los matemáticos usan signos con los cuales hacen fórmulas. Ellos han aprendido que el lenguaje ordinario es generalmente muy peligroso. He dado las posiciones anteriores porque esto nos enseña las fragilidades de las constituciones de cada ciencia. Porque estas constituciones son las últimas cosas que encontramos, como los altos niveles de pensamiento, después de discusiones y

> considerando cada transición de nivel a nivel. Las diferencias de opiniones en muchas ciencias que dichas discusiones permanecen sin decidirse. Y aún una comunidad de opinión se estableciera puede ser que sólo una persona importante exprese su propia idea y ser aceptada." (1986, pág. 236).

El lenguaje contribuye a la formación de conceptos y a la resolución de problemas, los cuales son actividades importantes y constantes durante las 8 sesiones de trabajo, ya que las palabras facilitan los procesos de transformación que intervienen en el pensamiento, aspecto que se observó a lo largo de la práctica, puesto que la verbalización mejora y perfeccionan sus significados, con ello aumenta su poder de transferencia, lo que capacita la adquisición del lenguaje y su desarrollo. A través de aprendizajes por recepción hay enormes recopilaciones de conceptos y principios que no podrían descubrir tan fácilmente durante toda su vida.

De acuerdo con Ausubel (1984)[53], el lenguaje interviene por lo menos de dos maneras, ya sea en los procesos de abstracción y en el pensamiento. Las abstracciones posean nombres y sus significados puedan representarse con palabras que desempeñan un papel muy importante en la generación de conceptos nuevos, aspecto que se busca a lo largo de la unidad

Durante cada clase se observa que la verbalización constituye una parte integral del proceso de adquirir nuevas ideas, lo que influye tanto en la naturaleza como en el producto de los procesos cognitivos que intervienen en la generación de nuevos conceptos. En cada exposición se muestran los cambios paulatinos donde se verbalizan pensamientos como un proceso de refinamiento, gracias a los cuales éstos se vuelven mucho más claros, explícitos y precisos.

Fomentando el trabajo consciente e intencional por medio de materiales manejables, se realizaron las siguientes actividades con un fundamento lógico de la geometría.

El material es auto-correctivo, lo que permite a los alumnos trabajar con herramientas concretas sólo cuando sea necesario construir la teoría, no obstante, esta característica no siempre se cumple. El periodo de acumulación de hechos se hace de forma inductiva, por lo que no debe ser demasiado prolongado; debido a que el estudiante debe y puede usar la deducción.

ACTIVIDAD	OBSERVACIÓN
Sesión 1	
1.- Lectura del *Menón*.	Esta actividad es extra clase en la sesión anterior, debido a su extensión.
2.- Discusión en equipo sobre el *Menón* ¿qué es geometría?, ¿qué es una figura?, ¿qué es superficie?	Como pocos realizaron la lectura completa, únicamente se platicó o relató a los demás compañeros.
3.- Discusión grupal sobre la lectura del *Menón*, anexo 1.	Se cuestionó cómo entendían la pregunta.
4.- Ejercicio individual del *Menón* ¿cómo se hace un cuadrado de superficie 2?	Sólo dos compañeros tenían una idea.
5.- Discusión grupal del ejercicio.	Fue agradable, ya que en la mayoría hubo comentarios correctos.
6.- Resolución de un problema de forma individual. Del carpintero.	Fue interesante cuando algunos tomaron otro problema, puesto que les agrado más.
Sesión 2	
7.- Verbalización de lo visto anteriormente.	Fue enriquecedor, ya que hubo algunas aclaraciones que ayudaron a algunos compañeros.
8.- Realizar un mapa conceptual de lo discutido en la sesión pasada.	
9.- Ejercicio. Hallar el centro de dos circunferencias, la primera es la ilusión de Silvanius Thompson, (Anexo 2)y la segunda es un círculo con un triángulo inscrito. La mitad se realizará de forma individual y la otra en equipo.	Localizan el centro de la circunferencia con el triángulo inscrito, hallando el circuncentro del triángulo. Después discuten un poco y hacen un triángulo en la primera figura al centro de la circunferencia.
10.- Discusión de cómo hallar el centro.	
11.- Lectura (Anexo 3) Un día en la vida de Euler, donde cuenta para qué le sirve la demostración.	El objetivo es que noten para qué y porqué se demuestra la importancia de tener sólidos argumentos en una justificación.
12.- Discusión A partir de la lectura los estudiantes rescatan la visión humana y matemática de un hombre que aporto mucho a la humanidad.	

Sesión 3	
13.- Verbalización de lo visto anteriormente.	Las conclusiones tienen un carácter más concreto.
14.- Despliegue de información. Revisión de una figura, en la cual se puede observar un cuadrado inscrito en un cuadrado mayor, pero en diferente posición: paralelismo y perpendicularidad. En un trapecio deben escribir todo lo que está a la vista.	Las observaciones se realizaron en forma grupal y con la participación de todos se elaboraron algunas conclusiones para que se dieran cuenta si las propias estaban correctas.
15.- Lectura y discusión. Fragmento de la visión filosófica sobre la geometría en el *Timeo* de Platón (Anexo 4). Se realizará individualmente y los comentarios serán por parejas. El objetivo es generar amor por la lectura y la geometría.	Aunque la lectura es rápida, no les interesó a todos. No obstante, hubo dos alumnos que hicieron preguntas para leer el libro completo.
Sesión 4	
16.- Elaboración de un cuadro sinóptico.	Se hizo de forma colectiva.
17.- Lectura de dos teoremas de Geometría euclidiana (Anexo 5).	La mayoría participó, aunque algunos comentarios fueron desequilibrados.
18.- Lectura y comentarios sobre algunas definiciones de los *Elementos* de Euclides, sus 5 postulados, algunas nociones comunes, y el teorema 1.4 de congruencia de triángulos. En la misma clase se verán los postulados de congruencia de triángulos, los cuales leerán cuidadosamente.	El diálogo no se centró en la lectura, ya que argumentaron la dificultad del lenguaje, específicamente en la parte de las definiciones. Lo demás les pareció interesante.
19.- Demostración de los ángulos externos e internos de un triángulo.	Dos compañeros tuvieron una participación brillante, otros no tuvieron una idea clara de cómo llegar al objetivo.
Sesión 5	
20.- Realización de un mapa conceptual.	A diferencia del primero, éste estuvo más completo.

21.- Encontrar el área del CCH Azcapotzalco (Anexo 6).	Concluyeron que la forma más sencilla es triangular, por lo que notaron la semejanza de triángulos.
22.- Lectura de *Mostrar y Demostrar* (Anexo 7). 23.- Discusión de la lectura.	A la mayoría le pareció digna de reflexión y enriquecedora, a la vez que hubo sencillez y belleza en los razonamientos expuestos.
Sesión 6	
24.- Recapitulación grupal.	Se les hizo notar que la parte más importante radica en razonar y llegar a las conclusiones.
25.- Lectura y discusión de la *Proporción Dorada* (Anexo 8).	Hubo preguntas generales, debido a que se interesaron por los datos de proporción del cuerpo humano.
26.- Criterios de semejanza.	Se retomo la triangulación del croquis del CCH y se observaron cuáles y porqué criterios son semejantes algunos triángulos.
Sesión 7	
27.- Recapitulación de las sesiones anteriores.	Hubo una participación general y activa.
28.- Hallar por semejanza el teorema de Pitágoras.	
29.- Resolución de problemas. Se presentaron dos problemas y un ejercicio: Un salón tiene la fórmula de prisma rectangular con una base de 8 y 6, y una altura de 3 m. ¿cuál es la distancia de la diagonal? ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado si su diagonal mide 10 cm?	Hubo complicaciones, ya que la aplicación se les dificultó, sólo pocos equipos llegan a resultados correctos y conclusiones concretas.
30.- Lectura y discusión de un cuento corto (Anexo 9).	La mayoría conoce que el objetivo es percatarse de la necesidad de la demostración.
Sesión 8	
31.- Recapitulación de lo visto anteriormente.	Obtuvieron el teorema de Pitágoras y algunos elementos que les faltaban para

	saber el área del plantel.
32.- Justificación de Teoremas. ¿Por qué en un triángulo la suma de sus ángulos internos es de 180°? y la justificación de la relación entre el ángulo central y el ángulo inscrito.	Aunque hicieron, la parte de la justificación aún les parece compleja.
33.- Lectura y discusión (Anexo 10).	La lectura de Picasso les pareció un vínculo entre las matemáticas y las artes, ya que pensaban que no estaban relacionadas.
Sesión 9 34.- Resolución de un examen (Anexo 11).	

3.3 ***Sesión uno***

El primer aprendizaje de la sesión uno es reconocer la importancia de la demostración para aceptar o rechazar conjeturas, para esto se utilizó la lectura del *Menón*. Ésta se realizó individualmente para que posteriormente se hicieran algunas conclusiones de forma grupal, a la vez que hubo participación individual.

La lectura del *Menón* funcionó como organizador Ausubel (1984)[54], ya que tiende un puente entre lo que el alumno sabe y lo que necesita saber, proporcionando una estructura o idea del nivel en que se encuentra la mayoría del grupo, para que con ello se adecue a la incorporación del material de aprendizaje, asimismo, se emplea para facilitar el establecimiento de una actitud favorable para que éste sea significativo.

En la introducción se verbaliza la lectura, la cual es una actividad donde hay una participación individual y grupal, donde se expone el contexto en el que Sócrates desarrolla su teoría de la reminiscencia. Tal contexto tiene como tema central el intentar averiguar si tiene sentido o no buscar algo que se desconoce, esto dentro del estudio general sobre la esencia de la virtud (¿qué es?) y la posibilidad de que sea enseñada (ciencia). La exposición que lleva a cabo Sócrates para demostrar, en primer lugar, si es posible buscar lo que se desconoce es magistral y todos están consientes de ello.

Entre las principales ideas que se resaltaron en la lectura figuran las siguientes:

1) Los sacerdotes y los poetas tradicionales defendían la inmortalidad del alma. Al estar de acuerdo con ellos parece evidente que el alma ha tenido que contemplar y conocer todo sobre la realidad y, por tanto, no nos debe extrañar que ésta sepa lo que es la virtud en sí, incluso que tenga recuerdos de que ella y lo demás realmente es.

2) Sócrates afirma que el saber no es otra cosa que reminiscencia. Así pues, llevando a cabo una investigación de tal teoría se puede saber sobre aquello que aparentemente desconocemos. Además, es muy posible que sobre la base esta teoría podamos averiguar lo que es la virtud.

3) El *Menón* no muestra la misma convicción que Sócrates, ya que pide la demostración. Ante esto, el filósofo utiliza el famoso discurso sobre el esclavo que no sabe matemáticas, y que al ser interrogado demuestra poseer conocimientos de geometría que nadie le había explicado. Entonces, Sócrates afirma que parece evidente, dado que los conocimientos que posee debió recibirlos en una vida anterior a la actual, que lo que sucedió fue que los olvidó y al ser interrogado los ha recordado.

En esta parte es donde se cuestiona la demostración: ¿qué es? y ¿para qué nos serviría? Aunque la participación no fue abundante, sí se logró visualizar lo que es importante.

En la siguiente actividad se comienza a vislumbrar lo que conocen y lo que deben aprender de forma significativa. Asimismo, una alumna narra el episodio de la siguiente manera: Sócrates comienza preguntando al esclavo si sabe que ¿el cuadrado es una figura con cuatro líneas iguales?. El esclavo responde que sí. Después, el filósofo dibuja mediatrices en el cuadrado y le cuestiona sin con ello no tendríamos una figura de 4 unidades, es decir, 4 cuadrados pequeños, a lo que responde afirmativamente.

El razonamiento continúa del siguiente modo: añadimos al cuadrado dibujado otro cuadrado, a continuación a éste se agrega otro igual. Asimismo, completamos el cuadrado anterior con otro. Parece evidente que el resultado nos lleva a los 4 cuadrados dibujados anteriormente.

Sócrates le pide al esclavo que se fije atentamente en el conjunto dibujado y le pregunta ¿cuántas veces el conjunto grande es mayor que el cuadrado dibujado al principio?, a lo que le responde que es 4 veces mayor.

A continuación, el filósofo dibuja una línea diagonal que abarca los cuatro cuadrados y le cuestiona ¿cuál es el tamaño de la figura? El esclavo le contesta que no lo sabe, entonces Sócrates le pide que recuerde, pues fijándose en los 4 cuadrados es evidente que la línea diagonal separa hacia dentro la mitad de cada uno de éstos. Aclarado esto, le pregunta ¿cuántas mitades hay?, y le contesta que cuatro. Después de tener claro que el primero tiene el doble de mitades que el segundo, Sócrates, le cuestiona ¿cuántas unidades tiene la figura? El esclavo responde que 8.

Después de la narración, se llega al resultado esperado por medio de trazos. Si bien no todos los alumnos llegaron a lo correcto, lo intentaron, pero al ver su complejidad, se juntaron en pequeños grupos, al término de la sesión notaron que sabían lo que es congruencia y semejanza; así como su importancia dentro de la demostración.

Asimismo, subsisten las siguientes interrogantes a manera de reflexión y como conclusión de clase quedó como tarea que analicen las siguientes preguntas:

a) ¿Saber es recordar? Parecen lo mismo, ya que se piensa que se sabía pero estaba olvidado.

b) ¿Cómo se aprenden los conocimientos sobre geometría? y ¿cómo se accede a tales conocimientos?

c) ¿Es necesario investigar sobre lo que se desconoce?

Para finalizar la sesión con el pequeño grupo que se formó se resolvió un problema similar al de la lectura, pero con un contexto diferente, lo que les resultó claro y fácil después de la discusión del problema del *Menón*.

A lo largo de esta sesión se hizo un diagnóstico acerca de los conocimientos con los que contaban los estudiantes y en que nivel estaban, así pues, se realizó una presentación con dichos elementos.

Descripciones de los niveles Van Hiele

Durante cada sesión se notará en que nivel se encuentran los estudiantes para poder avanzar al siguiente, así como la importancia de los aspectos que implica. Al respecto el modelo Van Hiele abarca dos:

a) Descriptivo: se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico y se valora el progreso de éstos.

b) Instructivo: se establecen los modelos que los profesores deben seguir para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, lo cual se refleja en una forma diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos y demostrarlos.

La idea central de la componente descriptiva es que a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría los estudiantes pasan por una serie de niveles de razonamiento, los cuales son secuenciales y ordenados, por lo que no se puede omitir ninguno, tal como se aprecia en la siguiente descripción.

El primer nivel fue dominado adecuadamente por todos los estudiantes, pues hubo compresión y habilidad en el nivel cero.

Nivel cero

En ambos problemas juzgan y operan en las figuras (cuadrados y triángulos), así como en las líneas, ángulos, intersecciones y líneas sin intersección, de acuerdo a su apariencia. Así, el estudiante:

1. Identifica partes de una figura por su apariencia como un todo:

a) En un simple dibujo, diagrama o conjunto de diseños (cuadrados, ángulos rectos).

b) En una forma u otra configuración más compleja (ángulos en un cuadrilátero o dos líneas de intersección; formas en un patrón o una red triangular; márgenes, caras, vértices de un cubo).

2. Reconoce formas y otras figuras geométricas en diferentes posiciones/orientaciones.

3. Copia formas.

4. Utiliza nombres o etiquetas, o bien, otras figuras geométricas. Asimismo, los emplea apropiadamente.

5. Compara y clasifica las formas basado en las apariencias como un todo.

6. Describe verbalmente formas por sus apariencias como un todo (un cuadrado “se ve como una ventana”; un triángulo “se ve con la forma de una montaña“; y un ángulo “se ve como unas manecillas de un reloj”).

7. Opera figuras doblándolas, midiéndolas, construyéndolas o manipulándolas.

8. Aplica otras nociones de geometría a las figuras como un todo (encuentra el área de una figura).

9. Resuelve problemas de rutina midiendo, contando, etcétera.

10. Identifica las partes de una figura, pero no la analiza en términos de sus componentes, asimismo, no piensa en sus propiedades como la característica de una clase de figura.

Nivel uno

No todos los estudiantes se encuentran en este nivel, ya que sus consideraciones y su lenguaje no son los correctos.

Analiza figuras en términos de sus componentes y los relaciona con éstos, asimismo, establece empíricamente propiedades de una clase de figura (midiendo o haciendo un modelo). Por tanto, el estudiante:

1.- Identifica y analiza las relaciones entre los componentes de una figura (congruencia de lados opuestos de un cuadrado; y de los ángulos en un patrón de registro).

2.- Remarca y usa vocabulario apropiado para sus componentes y relaciones (lados opuestos, ángulos correspondientes son congruentes, lados homólogos, diagonales).

3.- Compara dos formas de acuerdo a las relaciones entre sus componentes (nota como un cuadrado y un rectángulo tienen de la misma forma, pero diferentes lados).

Clasifica formas de acuerdo a sus propiedades, incluyendo las instancias de una clase, o bien, desde ninguna instancia.

4. Interpreta y usa descripciones verbales de figuras, en términos de sus propiedades. También usa descripciones: dibujo/construcción de la figura. De igual manera, demuestra verbalmente o con símbolos (A= b x h), o bien, explica reglas y las aplica.

5. Descubre empíricamente propiedades de figuras específicas y generaliza las de una clase (la suma de un triángulo es 180° por observación de diversos ejemplos).

6. Describe una clase de figuras (paralelogramos) en términos de sus propiedades. Asimismo, establece que forma es y proporciona sus propiedades.

7. Identifica cuales propiedades caracterizan una clase de figuras, aplica otra clase de figuras, y compara clases acordando sus propiedades (rectángulo y paralelogramos, ambos tienen lados paralelos, opuestos, iguales).

8. Descubre propiedades de una extraña clase de figuras.

9. Resuelve problemas de geometría utilizando las propiedades de las figuras que conoce por intuición.

10. Busca propiedades o relaciones (guiado por el profesor o por conocimiento espontáneo). Aunque no puede explicar ciertamente las propiedades de una figura como las interrelacionadas (como “los ángulos opuestos son iguales” se pueden decir “lados opuestos son paralelos” para los cuadriláteros); no saben exponer subclases de relaciones (todos los cuadrados son paralelogramos); y no ve una necesidad para probar las generalizaciones descubiertas empíricamente (porque la suma de los ángulos de cualquier triángulo debe ser 180°).

Nivel 2

Durante la sesión uno muy pocos estudiantes poseen estas habilidades para argumentar informalmente; pero los que llegan a la respuesta que da el esclavo lo hacen por medio del uso de diagramas, así como por el recorte y doblado de figuras de papel.

El estudiante formula, usa definiciones y da argumentos informales que ordena previamente al descubrir propiedades, asimismo, proporciona evidencias de manera deductiva. Por tanto, el estudiante es capaz de:

1. Identificar diferentes tipos de propiedades que caracterizan una clase de figuras; así como un mínimo de propiedades que pueden definir una figura.

2. Dar argumentos informales (usando diagramas, recortando figuras para doblar, u otros materiales), así pues, logra:

a) Formular correctamente conclusiones, a la par que justifica éstas (explica porqué los tres ángulos de dos triángulos son iguales o si los otros dos ángulos en cada triángulo son iguales).

b) Ordenar clases de figuras (explica porqué todos los cuadrados son paralelogramos).

c) Ordenar dos propiedades (la suma de los ángulos de un triángulo es "el ancestro" de la suma de los ángulos de un cuadrilátero; la regla del área para un paralelogramo es usada para derivar la regla del área de un triángulo).

d) Descubre nuevas propiedades por deducción (la suma de los ángulos de un pentágono deben ser 3 x 180° ó 540°).

e) Interrelaciona ciertas propiedades (hace un piso de mosaicos triangulares [árbol genealógico] mostrando como se ven los escalones, y éstos son usados para explicar porque la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°).

3. Seguir un argumento deductivo y suprimir partes del argumento (porque la diagonal de un paralelogramo se divide en dos triángulos congruentes y establece la regla bxh/2 por el área de un triángulo); también realiza la suma de un argumento deductivo.

4. Puede dar argumentos correctos para probar algo (compara dos explicaciones para el área de un trapezoide o suma de los ángulos de un cuadrilátero); y relatar diferentes explicaciones.

5. Reconocer diferencias entre una relación y su conversión, y probar su veracidad o falsedad.

6. Identificar y usar estrategias o razonamientos intuitivamente para resolver problemas.

7. Reconocer el rol de “probar”, aunque no comprende su significado en un sentido axiomático (no ve la necesidad para las definiciones); por otra parte, no puede establecer interrelaciones entre redes de teoremas.

Nivel tres

En la sesión uno, la mayoría está de acuerdo con el primer punto, pero los siguientes no quedan claros, debido a que el estudiante los establece sin un sistema de postulados, teoremas e interrelaciones entre redes de teoremas, por tanto:

1. Reconoce la necesidad de redefinir términos, definiciones y deducciones básicas (postulados).

2. Reconoce características de una definición formal y la equivalencia de definiciones.

3. Demuestra relaciones que fueron explicadas informalmente en el nivel 2.

4. Prueba y demuestra relaciones entre un teorema y relaciona afirmaciones (conversión, inversión, contraposiciones).

5. Establece interrelaciones entre redes de teoremas (reconoce roles ya vistos y examina en varias pruebas relacionando propiedades de cuadriláteros y de área).

6. Identifica un principio general que unifica a varios y diferentes teoremas.

7. Sigue y crea pruebas de un simple conjunto de axiomas, usando frecuentemente un modelo que avale sus argumentos.

8. Compara y contrasta diferentes pruebas de teoremas (los realiza usando Geometría euclidiana).

Nivel 4

Los estudiantes no han llegado a este nivel, pero se busca que más adelante puedan establecer rigurosamente teoremas en diferentes sistemas de postulados, los cuales analicen y comparen para que:

1. Investiguen las consecuencias de alterar un conjunto de axiomas (eliminando o modificando un axioma en la Geometría euclidiana en el quinto postulado, esto dirigido a otras geometrías).

Aunque esto lo realizan en otra sesión, la observación de las vías del tren sirve como ejemplo, igualmente, la parte de la demostración: ¿la suma de los ángulos de un triángulo pueden ser más o menos de dos rectos?

2. Expliquen el rol de los modelos de una teoría (reconoce que la geometría no es una descripción exacta del mundo físico, pero sí un sistema abstracto).

3. Establezcan consistencias en un conjunto de axiomas, así como la independencia de un axioma, y la diferencia de equivalencias de un conjunto de los mismos.

4. Reconozcan y comparen estrategias de prueba en variados contextos matemáticos (prueba por inducción y principios clasificados).

5. Descubran nuevos teoremas y métodos de prueba.

6. Identifiquen el amplio contexto en el cual un teorema se puede aplicar.

CARTA DESCRIPTIVA NO. 1

NOMBRE DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN: Matemáticas II, Unidad III Congruencia y Semejanza.

RESPONSABLE: María Lucina Ariza Vargas.

OBJETIVO GENERAL: Comprender y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza, descubrir el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al estudiante en el método deductivo.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Introducir al estudiante en los conceptos de Congruencia y Semejanza.

Sesión	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo	Forma de Evaluación	Observaciones
1	1.- Lectura del Menón.	Saludo inicial y como pregunta de motivación se les pregunta ¿qué les pareció el diálogo del Menón ?	Copias	20 min.		Esta actividad es extra clase debido a su extensión.
	2.- Discusión sobre el Menón que es geometría, que es una figura, que es superficie.	Se inicia una plática en donde en equipos se comienza a revisar lo que saben de geometría, tomando en cuenta la lectura.		20 min.	Se diagnostica o valora en que nivel de acuerdo con Van Hiele se encuentra en general el grupo y se da un panorama de forma personal.	Únicamente se platicó o relató a los demás compañeros.
	3.- Discusión sobre la lectura del Menón.	Se cierra con una plática grupal con el fin de retroalimentación.		20 min.	Se revisa o escucha si leyó o si comprendió la lectura.	Se cuestionó cómo entendían la pregunta.

	4.- Ejercicio del Menón ¿Cómo se hace un cuadrado de superficie 2? 5.- Discusión grupal del ejercicio. 6.- Resolución de un problema.	De forma individual se les pide resuelvan la situación que se presenta en la lectura. Se pregunta de forma aleatoria. De forma individual.	Cuaderno y lápiz. Cuaderno y lápiz.	20 min. 20 min. 20 min.	Se da una apreciación al trabajo que realice cada uno. Se valora como resuelve el ejercicio y se le hace una apreciación al termino, de la actividad para comprobar también se les pregunta como pueden justificar la respuesta.	Sólo dos compañeros tenían una idea. Los comentarios fueron correctos. Algunos tomaron otro problema, ya que les agrado más.

3.4 *Sesión 2*

Durante esta sesión y en las posteriores se logra recorrer la mayoría de las fases, ya que se inicia con un recordatorio de lo más significativo de la clase anterior, y con ello se maduran dichos conceptos.

Por tanto, se tiene en mente la información que se había manejado en las primeras dos fases, de acuerdo con el método Van Hiele (1957)[55].

Algunas de las fases pueden diferenciarse por el tipo de problemas que plantean. En la fase 1 se pretende que los estudiantes descubran el campo del conocimiento y, aunque deben ser sencillos, se espera que por sí solos los resuelvan, ya que tienen un nivel de complejidad apto para ellos. En segunda se delimitan los principales elementos (conceptos, definiciones, propiedades) que forma el sistema de relaciones con las cuales los alumnos deberán razonar. Es necesario que las fases 2, 3 y 4 se realicen en el orden establecido, para conseguir un buen aprendizaje y un adecuado desarrollo de la capacidad de razonamiento.

En las fases 4 y 5 los problemas deben ayudarlos a encontrar su propio camino en el sistema de relaciones y, por tanto, conviene que haya varias soluciones posibles:

Información: Mediante la discusión el profesor identifica lo que los estudiantes ya saben sobre un tema, así los alumnos se orientan a los nuevos.

Los estudiantes exploran los objetos de la enseñanza en atención y tareas estructuradas como doblar, de medida, o de construcción, exploran conceptos específicos.

En las siguientes fases se encuentran:

Los estudiantes describen con sus propias palabras lo que han aprendido sobre el tema. Propiciando el tránsito entre distintas formas de representación matemática y la expresión verbal.

Las precisiones teóricas se establecerán cuando los estudiantes dispongan de la experiencia y los ejemplos suficientes para garantizar la comprensión, con lo que introducirán de manera pertinente términos matemáticos.

Los alumnos aplican las relaciones que están aprendiendo para resolver problemas e investigar tareas abiertas.

La fase de explicitación es lo primero que se trata, ya que se expresa de forma verbal lo que se ha leído, discutido y manipulado en las clases anteriores, puesto que se ha tornado más significativo y la participación es voluntaria o se responde de acuerdo al lugar en que se encuentren en el salón, es decir, de forma aleatoria, lo que conlleva una retroalimentación colectiva.

De este modo, se fomenta el trabajo en equipo para explorar características, relaciones y propiedades tanto de conceptos como de procedimientos; así como la discusión razonada, y la comunicación oral y escrita de las observaciones o resultados encontrados.

Los estudiantes resumen e integran lo que han aprendido, el desarrollo de una nueva red de objetos y relaciones, para ello utilizan mapas conceptuales.

Los mapas conceptuales son una representación utilizada a lo largo de las siguientes sesiones y surgieron como una forma de instrumentalizar la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, en específico lo referente a la evolución de las ideas previas que poseen los estudiantes, las cuales fueron desarrolladas por J. D. Novak.

El objetivo central es liberar el potencial de aprendizaje en los estudiantes, el cual no se ha desarrollado, facilitando así el proceso. Según Novak (1999)[56], los mapas conceptuales "tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones. Una proposición consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica".

Otras formas de representar conceptos es por medio de diagramas de flujo, organigramas, redes semánticas, etcétera (aunque sólo se utilizan los mapas). Ninguno de éstos está basado en la teoría del aprendizaje significativo, ni en la del conocimiento, lo cual constituye la base de la elaboración de dichos mapas. Siguiendo con este autor, pueden emplearse como una técnica de estudio y herramienta para el aprendizaje, ya que permiten explorar los conocimientos previos frente al concepto semejanza o congruencia, además, su elaboración le permite organizar, interrelacionar y fijar el conocimiento adquirido, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad; asimismo, es una técnica de estudio, pues integra todos los conocimientos.

De igual manera, pueden emplearse como representación gráfica o esquemática de un concepto específico, ya que organiza y representa el conocimiento, situando los generales e inclusivos en la parte superior, y los menos inclusivos en la parte inferior. Con esto se enfatizan las conexiones entre diversos conceptos, procedimientos, métodos y ramas de la matemática.

Esta forma gráfica de representar los conceptos y sus relaciones provee a los estudiantes de una forma para organizar y comunicar su estructura mental sobre lo que se vio en la sesión anterior, puesto que lo recuerda y reafirma. De acuerdo a Ausubel (1984)[57], la estructura cognitiva de una persona es el factor que decide sobre la significación del material nuevo y de su adquisición y retención, por tanto, un concepto podrá o no ser incorporado en la estructura cognitiva que el alumno posea, así como en las tareas de aprendizaje que se le presenten.

La siguiente actividad consiste en la presentación de dos circunferencias, la primera es la ilusión de Silvanius Thompson; y la segunda es una circunferencia con un triángulo inscrito.

Cada estudiante tiene una copia de las dos circunferencias (ver anexo 2), a partir de éstas debe describir lo que observa (que es la fase de información), y debe contarlo al inicio. En la siguiente fase, de orientación dirigida, se les pide que encuentren el centro de cada circunferencia.

Con lo anterior, se introduce el estudio de contenidos, esto mediante el planteamiento de situaciones o problemas que no contemplen fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar, que en este caso son las rectas notables del triángulo y la intersección que existe entre ellas.

Para la mayoría resulta rápido encontrar el centro, ya que el triángulo los ayuda mediante la construcción del circuncentro, en este caso adquiere un significado debido a la aplicación. En la primera circunferencia la discusión es por parejas, llegando a la conclusión de construir un triángulo para encontrar la intersección de alguna recta notable.

Con esto se promueve la formación de significados tanto de los conceptos y procedimientos, cuidando que éstos surjan como necesidades del análisis de situaciones o de la resolución de problemas, lo que conlleva su sistematización y complementación, esto mediante una actividad práctica de aplicación en diversos contextos.

Analizando de manera conjunta las situaciones planteadas se busca que el estudiante adquiera paulatinamente la habilidad, y con el tiempo sea capaz de realizar de manera independiente cualquier problema que se le presente.

Parte de este análisis los constituye una discusión rápida de cómo hallaron el centro de la circunferencia, explicando a otra pareja su procedimiento, ya que no todos construyeron mediatrices, sino bisectrices, medianas y alturas, incluso hubo triángulos.

La comprobación de que efectivamente es el centro, lo hacen mostrando la construcción por medio del compás: la circunferencia descrita con centro en el punto encontrado.

Definitivamente, la comprobación anterior no tenía validez sin el trazo de alguna recta notable del triángulo, ya que lo importante era argumentar que obtenían el centro sin compás o regla graduada, y que así se adquirió una justificación de la existencia de las rectas y puntos notables del triángulo.

Para Ausubel (1984)[58], la adquisición de significados es un proceso cognitivo que surge como producto de una percepción en lugar de un aprendizaje, por esto el material de lectura debe ser significativo y fácil de leer, para que sea una herramienta útil en la percepción de conceptos.

En esta sesión se utiliza una lectura sobre Euler, ya que las situaciones expuestas dan paso a la recta, una de las múltiples aportaciones del matemático. Después de la lectura se mencionan algunos puntos importantes, donde deben aportar su punto de vista, entre los que destacan los siguientes:

Euler era un hombre preparado, que estudió anatomía, química y botánica. Asimismo, poseía grandes habilidades como repetir la *Eneida* del principio a fin, incluso podría recordar las primeras y las últimas líneas de cada página de la edición que solía utilizar. Esta capacidad parece resultado de su maravillosa concentración.

La dulzura de carácter, la moderación y la sencillez de las costumbres fueron sus características. Su hogar era su alegría y le gustaban los niños. Pese a su desgracia, era animoso y alegre, poseyó abundante energía, la cual se vio obstaculizada por una pérdida parcial de visión antes de los 30 años, y por una ceguera casi total al final de su vida. Euler produjo numerosas obras matemáticas, así como reseñas sobre éstas y de carácter científico. Ejerció gran influencia, incluso en la época en que la opinión continental dudaba sobre aceptar las opiniones de Newton.

Con lo anterior, se destaca la parte humana de las matemáticas, o más bien, que un matemático es un humano con habilidades prodigiosas, pero con debilidades grandes como la ceguera, que no impiden de ninguna forma limitar el trabajo matemático que desarrolla Euler.

Cabe aclarar que un punto medular es la demostración de la existencia de Dios sin entrar en detalles de índole religiosa. Asimismo, se representa una coyuntura para que la fase 4 de integración tenga sentido, y así llegar a un nivel 4, de acuerdo con Van Hiele (1957)[59].

Estas participaciones se llevan a cabo individualmente y se terminan con una discusión en pequeños grupos para relacionar la actividad (de encontrar el centro de la circunferencia) con la lectura, por tanto, se establece la pregunta: ¿cómo demostrar que realmente ese punto localizado es el centro de la circunferencia?

Partiendo de esta pregunta se hace necesaria la ampliación del lenguaje, por lo que se torna necesario el uso y comprensión de lo que en algún tiempo parecían términos abstractos, los cuales eran usados aunque no se comprendieran, sin embargo, para dar respuesta a la pregunta las palabras que parecían rebuscadas son obligatorios y tienen ahora un significado familiar. Tal es el caso de términos como axioma, teorema, hipótesis, los cuales dan precisión al lenguaje en la búsqueda de una demostración que justifique las construcciones hechas en sesiones de la unidad anterior, de acuerdo al plan de estudios del CCH.

CARTA DESCRIPTIVA NO. 2

NOMBRE DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN: Matemáticas II, Unidad III Congruencia y Semejanza.

RESPONSABLE: María Lucina Ariza Vargas.

OBJETIVO GENERAL: Comprender y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza, descubrir el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al estudiante en el método deductivo.

OBJETIVO ESPECÍFICO: El estudiante justificará las construcciones de: Mediatriz de un segmento, Bisectriz de un ángulo ,recta perpendicular a otra.

Sesión	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo	Forma de Evaluación	Observaciones
2	1.- Verbalización de lo antes visto. 2.- Realizar un mapa conceptual de lo discutido en la sesión pasada.	Saludo inicial y cordial, pregunta que fue que habíamos visto en la sesión anterior y si existe alguna duda de la sesión anterior para aclarar. De lo que mencionaron en la actividad anterior plasmarlo en su cuaderno y anotar algunos conceptos que quizás se olvido mencionar con ayuda de sus apuntes y la retroalimentación de sus compañeros.	 Cuaderno y lápiz.	15 min. 15 min.	 Se revisa y se hacen algunas observaciones de su mapa conceptual.	Hubo algunas aclaraciones que ayudaron a algunos compañeros. Localizan el centro de la circunferencia con el triángulo inscrito, hallando el circuncentro del triángulo.

	3.- Ejercicio. Hallar el centro de dos circunferencias, La primera es la ilusión de Silvanius Thompson y la segunda es un circulo con un triangulo inscrito.	Se les entrego una copia y se les pide encontrar el centro de dos circunferencias, la mitad del tiempo de forma individual y la otra mitad en equipo.	Copia.	20 min.	Se asigna una valoración de correcto o alguna pregunta a su trabajo, enfatizando la justificación de algunas rectas notables.	Encuentran el circuncentro y les parece interesante.
	4.- Discusión de cómo hallar el centro.	Los equipos que quieren pasar a explicar como encontraron el centro lo hacen para todo el grupo.		15 min.		
	5.- Lectura Es una fracción de día de la vida de Euler donde cuenta para que le sirviera la demostración.	La lectura es una pagina de la red, que se les pidió llevar por lo tanto lo hacen individualmente.	Copias.	25 min.		El objetivo es que noten la importancia de tener sólidos argumentos en una justificación.
	6.- Discusión De la lectura donde los estudiantes rescatan la visión humana y matemática de un hombre que aporto mucho a la humanidad.	Primero se pregunta ¿cuál es la idea principal? Y ¿qué opinión tienen de Euler? Se les induce de tal forma que noten la importancia de argumentar una respuesta.		30 min.		Observan la visión humana de un matemático.

3.5 *Sesión 3*

Para iniciar la sesión tres, se recurre a un saludo atento y cordial, lo que estimula la buena comunicación y un ambiente accesible que motive a los estudiantes para seguir aprendiendo. También se comienza el repaso estableciendo relaciones que reflejan una actitud de cooperación entre pequeños grupos.

La actividad consiste en desplegar individualmente la información (comenzando con el nombre que recibe cada elemento, si se puede descomponer, y en caso que se puedan agrupar dichos elementos de acuerdo al nombre, si se puede visualizar en algún lado a lo cual terminaran diciendo “se parece a”, y finalizando con las propiedades) que se les presenta en las figuras que se encuentran plasmadas en una hoja.

Las figuras geométricas actúan como premisas después que el estudiante se orienta con la ayuda de las propiedades de las mismas, y entonces la geometría puede practicarse como un tema razonable. El alumno está capacitado para reconocer las figuras y sus propiedades, aunque es improbable que a este nivel revisen el total de razonamientos, porque en las relaciones entre las figuras no se ha obtenido un símbolo y sus propiedades. Aunque surgen excepciones, pues en dos casos el grupo sorprendió con sus razonamientos.

La actividad se lleva a cabo en dos tiempos, individual y en pequeños grupos de 3 estudiantes, en esta parte se desarrollan las siguientes fases:

Información: Mediante la discusión se puede identificar lo que los estudiantes ya saben sobre un tema y orientarlos sobre nuevos, por medio de preguntas.

Los estudiantes exploran los objetos de la enseñanza en atención y tareas estructuradas como doblar, de medida, o de construcción. Con ello exploran conceptos específicos.

La explicitación: Los estudiantes describen con sus propias palabras lo que han aprendido sobre el tema. Las intervenciones introducen términos matemáticos que son pertinentes.

Orientación libre: Los estudiantes aplican las relaciones que están aprendiendo para resolver problemas e investigar tareas abiertas.

Integración: Los alumnos resumen e integran lo que han aprendido en el desarrollo de una nueva red de objetos y relaciones.

Un aspecto fundamental del plan de estudios es la búsqueda del desarrollo de habilidades de pensamiento que permitan a los estudiantes adquirir por su cuenta nuevos conocimientos, por lo que deben proporcionar diversos ejemplos, con la intención de presentar numerosas oportunidades para atiendan el desarrollo conceptual, practiquen los procedimientos básicos y entiendan la mecánica de los mismos a partir de ideas o estrategias unificadoras.

Posteriormente, se plantean algunos ejercicios de congruencia de complementos y suplementos de ángulos congruentes, así como congruencia de ángulos opuestos por el vértice y su justificación. Aquí, los estudiantes aplican los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre segmentos, ángulos y triángulos:

a) Bisectriz de un ángulo.
b) Mediatriz de un segmento.
c) Perpendicular a una recta.

En esta parte encuentran una aplicación a las construcciones que se ejecutaron y discutieron con anterioridad, para argumentar si existe congruencia entre dos triángulos y bajo que criterio se halla dicha congruencia.

Una vez concluida esa actividad individual, se comparte y compara para llegar a un acuerdo de criterios de congruencia, con base en sus objeciones se crea un diálogo fructífero, en donde se llega a convenios de criterios.

La siguiente actividad consiste en leer el *Timeo* de Platón, aquí adquiere significación la física platónica; aunque también lo hacen las figuras geométricas y la congruencia que existe entre ellas, esto con un tinte político y ético, aspecto que para algunos llama la atención, lo que hace que esto se mencione más (el *Critias* y el *Hermócrates*)[60]. Finalmente, el objetivo se logra, puesto que se interesan por la geometría y la lectura.

Por tanto, la doctrina física de Platón que se encuentra presente en el *Timeo* es la exposición escrita más acabada.

Aunque la lectura es sólo un análisis del *Timeo*, se logra ver la congruencia y semejanza de triángulos, ya que existen figuras geométricas como lo elementos geométricos de Platón y se ve la relación que hace con el mundo y las ideas.

Conceptualmente, la física nos remite a la opinión, juicio o relato del mundo fenoménico en contraposición al mundo de las ideas, eludiéndose por inaplicable aún nuestra moderna y contemporánea noción de ciencia. Pero los extensos balbuceos e intentos de aproximación temprana al lejano método científico no es lo que Platón nos quiere dar a entender a través del *Timeo*, sino más bien “la necesaria complementación entre la física y la metafísica”. Es decir, los principios físicos, aquellos que regulan el acontecer de lo sensible, sólo alcanzan su máximo entendimiento en aquel que conoce los principios de la metafísica, regidores universales de lo evidente, y que a diferencia de la física se caracterizan y definen como doctrina no escrita.

Se mencionó también que Platón lo escribió alrededor de los 70 años, y lo concibió para que formara parte de una trilogía constituida por el *Timeo*[61], el *Critias* y el *Hermócrates*. El *Timeo* relata la formación del mundo material y el origen del hombre y de los animales; el *Critias* refiere cómo derrota la Atenas primitiva a los invasores venidos de la mítica Atlántida, y cómo ésta fue destruida por una inundación y un terremoto; y el *Hermócrates* habría tratado sobre el renacer de la cultura griega, y finalizaría con las indicaciones de Platón para una futura reforma.

De este modo, en el *Critias* el Estado utópico o República ideal se presentaría como algo que tuvo realidad en el pasado, mientras que las reformas del presente se exhibirían en el *Hermócrates* como algo que se espera. Por tanto, el *Timeo* llegó a escribirse por entero, el *Critias* quedó interrumpido, y el *Hermócrates* no fue comenzado.

Por lo que al *Timeo* se refiere, parece que fue escrito como un prefacio para los otros dos diálogos de tipo ético-político, de modo que no sería muy exacto presentar a Platón con un repentino interés por las cuestiones físico-naturales.

Una vez hecha esta ampliación de la lectura, los estudiantes concluyeron sus comentarios y obviamente se invitó a que se aproximen a la misma ya con un enfoque integral de la representación de las matemáticas, para así darle una mejor forma y estructura.

Aunque no en todas las lecturas existen formas geométricas y no a todos les llegan a gustar, en muchos casos, particularmente en las figuras geométricas, hacen el despliegue de información, tanto de elementos simples como de conjunto y su relación, incluso llegan a mencionar las propiedades.

CARTA DESCRIPTIVA NO.3

NOMBRE DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN: Matemáticas II, Unidad III Congruencia y Semejanza.

RESPONSABLE: María Lucina Ariza Vargas.

OBJETIVO GENERAL: Comprender y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza, descubrir el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al estudiante en el método deductivo.

OBJETIVO ESPECÍFICO: El estudiante adquirirá la habilidad lógica para incluir un objeto en un concepto, así como la habilidad lógica para deducir las consecuencias del hecho de que un objeto pertenezca o no a un concepto.

Sesión	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo	Forma de Evaluación	Observaciones
3	1.- Verbalización de la sesión anterior.	Saludo y se pide un recuento de lo anteriormente visto.		10 min.		Las conclusiones son más concretas.
	2.- Despliegue de información. Revisión de una figura, en la cual se puede observar un cuadrado inscrito a un cuadrado mayor en diferente posición donde el paralelismo y la perpendicularidad. En otra figura es un trapecio, tienen que escribir todo lo que esta a su vista.	Se solicita observar y escribir lo que ven y relacionar, la primera parte es que mencionen que los tipos de rectas, ángulos y figuras geométricas además si existe relación entre ellas.	Copia.	20 min.	Se valora lo que saben y el lenguaje que utilizan debido a que las definiciones ya las habíamos revisado. Siendo esto un refuerzo y reflexión de las definiciones que aun no han quedado claras y se deben revisar y reforzar en las que no hay problema.	Las observaciones se realizaron en forma grupal y se elaboraron algunas conclusiones para que se dieran cuenta si las propias estaban correctas.

	3.- Lectura y su discusión. La lectura es un fragmento de la visión filosófica sobre la geometría en el Timeo de Platón y con otros filósofos griegos.	Las figuras que tiene esta lectura son un buen ejercicio para hacer despliegue de información y relación de elementos y figuras geométricas. La forma de trabajar es individual en cuanto la lectura y los comentarios son por parejas.	Copias.	30 min.	Uno de los objetivos es que tengan amor por la lectura y la geometría, por tanto se reflexiona que relación existe del ejercicio anterior con las figuras de la lectura y la visión de Platón.	La lectura es rápida, les interesó a algunos. Hubo dos alumnos que hicieron preguntas para leer el libro completo.

3.6 *Sesión 4*

Durante la sesión se reviso lo que se ha alcanzado a través de un cuadro sinóptico. De tal forma que se reconoce colectivamente lo que se ha mencionado, por tanto, el cuadro contiene elementos, figuras, propiedades, definiciones, las cuales únicamente se mencionan, pues sólo los importantes se escribieron en el pizarrón. Partiendo de esto se revisaron los logros obtenidos, los cuales fueron:

a) Utilizar correctamente la nomenclatura empleada por la geometría.
b) Explicar la diferencia entre igualdad y congruencia.
c) Usar los conocimientos adquiridos en esta unidad para resolver problemas.

La forma de expresarse al hacer referencia a algún elemento u objeto geométrico es notoria, debido a que los se mencionan con naturalidad, aunque no tan rápido como se espera, no obstante, la expresión corporal es eliminada para dar paso a una nueva herramienta: la definición. Ésta se encuentra en la primera fase del aprendizaje por descubrimiento e involucra un proceso muy diferente al de recepción.

El estudiante está reordenando la información adquirida con anterioridad, asimismo, la está integrando con la estructura cognitiva existente para reorganizar o transformar la combinación integrada, para después de realizado el aprendizaje por descubrimiento se haga significativo. Esta reestructuración de la que habla Ausubel (1983)[62], es un proceso no muy sencillo, pero necesario para logra un aprendizaje.

Con lo anterior, los estudiantes han obtenido el segundo nivel de geometría, ya que se orientan con la ayuda de las propiedades y de las figuras, puesto que saben relacionar las características de éstas, lo cual implica comprender dichas propiedades. De acuerdo con Van Hiele (1986)[63], el alumno puede comprender la imposibilidad de desarrollar un sistema deductivo en el comienzo de una cultura geométrica, pues para comprender dicho desarrollo es necesario que las secuencias de silogismos (argumento que consta de tres proposiciones, la última se deduce por las dos anteriores) sean vistas como totalidades y características.

La siguiente actividad consiste en la lectura de algunas definiciones, de los postulados y las primeras demostraciones que exhibe Euclides en los *Elementos.* Antes de esto se hizo una presentación breve en la que se menciona la importancia del libro, el papel que tuvo, así como su vigencia actual en las matemáticas y en las ciencias.

Los *Elementos* datan del año 300 a.C. y es un trabajo al que cabe dedicar atención, estudio y conocimiento. Su belleza radica en que colabora en el desarrollo lógico de la geometría y de otras ramas como las matemáticas y las ciencias exactas; asimismo, tiene valor universal que la distingue de otros intentos.

Esta obra se ha transmitido a lo largo de veinticuatro siglos, a través de mil ediciones y en diferentes lenguas. Está orientada a formar elementos de juicio en el lector.

De todos los libros de temas no religiosos, sin duda el más leído ha sido *Elementos* de Euclides, puesto que se ha mantenido como el texto de geometría más exitoso de la historia, incluso actualmente sigue usándose como referencia. Cabe aclarar que los estudiantes están ante el trabajo de un genio. Aunque no fue el primer libro de texto sobre geometría, éste mostró superioridad respecto a sus predecesores, los cuales desaparecieron y, por ende, no están a nuestro alcance.

Euclides nunca pretendió hacer un compendio de la geometría conocida en su tiempo, ya que algunos teoremas no figuran en dicho texto. Se supone que el autor escribió un libro sobre cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas), pero éstas no las menciona en los *Elementos*.

Utilizó un total de diez axiomas divididos en cinco postulados y cinco nociones comunes. La idea era que los postulados fueran peculiares de la geometría, mientras que las nociones comunes eran válidas para toda la matemática. Esta parte resultó complicada para los estudiantes, debido al lenguaje utilizado por el autor[65].

Se piensa que Euclides no aportó ningún resultado propio a la geometría griega, no obstante, poseía una gran habilidad expositiva, clave del éxito de su obra, la cual era una introducción a toda la matemática elemental de su tiempo: aritmética y geometría[66].

El libro consta de trece capítulos, los seis primeros tratan sobre geometría plana elemental; los siguientes tres sobre la teoría de números; el capítulo X aborda los inconmensurables; y los últimos tres versan sobre la geometría de sólidos. Ninguno tiene introducción, incluyen una serie de 23 definiciones, de las cuales sólo algunas se leen. Posteriormente, Euclides presenta una lista de 5 postulados y 5 axiomas, tanto los primeros como los segundos son verdades evidentes por si mismas.

Los axiomas son verdades generales a todas las ciencias, por ejemplo, se afirma que “el todo es mayor que la parte", aspecto que les parece razonable y obvio a todos los estudiantes.

Por su parte, los postulados son verdades que se refieren a la materia concreta de cada ciencia. En cualquier caso, para la matemática moderna no existe diferencia esencial entre ambos conceptos.

Aunque la geometría de los *Elementos* constituye un impresionante ejemplo de disciplina matemática desarrollada deductivamente, presenta varios defectos o debilidades, pues hay definiciones que no puntualizan nada. La mayoría de los estudiantes después de leer algunas explicaciones les parecieron complejas o poco claras, ya que no encontraron un significado específico, por lo que prefirieron buscarlo en el diccionario.

En definitiva, para los niveles modernos de rigor los axiomas de Euclides son inadecuados. En 1913, 2000 años después, se dio una formulación más cuidadosa, pues la obra *Fundamentos de Geometría* del alemán David Hilbert, uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos, estableció 20 axiomas que constituyen la fundamentación moderna de la geometría de Euclides[66].

Sin profundizar en las demás geometrías no euclidianas, se menciona su existencia, que no es un mundo plano en el que vivimos y nos movemos para nuestros fines.

Terminada esta actividad de lectura y la discusión sobre los *Elementos*, con la ayuda del despliegue de la información y orientando ésta se pide que intenten la demostración de ángulos internos y externos de un triangulo, así como la justificación de:

a) La relación entre el ángulo externo y el ángulo interno de un triángulo.

b) La suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono regular.

Aunque la mayoría no llega a una justificación completa de forma individual, en la etapa de pequeños grupos se esfuerzan elaborando un razonamiento de cómo Euclides realizó sus demostraciones y lo comparten en las conclusiones colectivas. En cierta manera llevan a cabo una buena observación donde hacen trazos auxiliares y dos de las justificaciones son sorprendentes, ya que relacionan bien sus observaciones con teoremas y axiomas que leyeron y recordaron.

Si bien no logran justificar los dos incisos, puesto que centran su atención en el segundo, pues les resulta más familiar, después se dieron cuenta que era más complejo de lo pensaban al principio, lo que dio paso a preguntas como: ¿qué hizo Euclides?, ¿qué puedo hacer yo? Por eso la observación de un nuevo elemento como es un trazo auxiliar mejora la integración de la información, así como la importancia de estar fuertes en elementos como teoremas, definiciones, axiomas y postulados de geometría, de tal manera que logren fundamentar una justificación.

Lo más trascendente es la información que poseen, pues deja de ser un conjunto de datos sin valor para tener un significado, debido a que la relación razonada de todos los elementos resulta en una justificación.

No obstante, se dejan estas conclusiones y las preguntas para retomar el tema y profundizar en él, con esto se pretende madurez por parte del estudiante para que obtenga el nivel deseado, ya que se partió de la visualización con la que contaba al inicio.

El análisis se logra con el despliegue de información, donde la mayoría se desarrolla bien y la abstracción comprende las definiciones que describen las relaciones entre figuras y sus partes.

En la deducción la mayoría desarrolla secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, sin lograr la rigidez matemática.

CARTA DESCRIPTIVA NO. 4

NOMBRE DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN: Matemáticas II, Unidad III Congruencia y Semejanza.

RESPONSABLE: María Lucina Ariza Vargas.

OBJETIVO GENERAL: Comprender y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza, descubrir el papel de la demostración en los resaultados de la geometría e iniciar al estudiante en el método deductivo.

OBJETIVO ESPECÍFICO: El estudiante tomará conciencia del papel de la demostración como el medio necesario en la validación de afirmaciones geométricas, sobre los objetos geométricos.

Sesión	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo	Forma de Evaluación	Observaciones
4	1.- Elaboración de un cuadro sinóptico.	Saludo y la pregunta es que llevamos hasta esa cuarta sesión y se solicita que elaboren un cuadro sinóptico.	Cuaderno y lápiz.	15 min.		Se hizo de forma colectiva.
	2.- Lectura del cuadro sinóptico.	La lectura es aleatoria de un compañero en voz alta mientras los demás escuchan y llegan a intervenir si es que hace falta.		15 min.	Se diagnóstica que se ha comprendido o claro.	La mayoría participó.
	3.- Lectura de dos teoremas.	Individualmente leen dos diferentes teoremas de Geometría Euclidiana y que los traten de analizar como los demuestran.	Libro o copias.	20 min.		Fue interesante.

	4.- Lectura de los 5 postulados, algunas nociones comunes, y el teorema 1.4 que es la congruencia de triángulos.	Si bien algunos tienen el libro o si carecen de el, hay algunas copias y es de forma individual con intervenciones de preguntas de establecer claridad en el teorema, como se argumenta que dos triángulos son congruentes.	Libro o copias.	20 min.		
	5.- Comentarios de la lectura.	Se pregunta de cómo aseguramos que dos triángulos son congruentes que se debe tener llegando a los postulados de congruencia como una consecuencia de la lectura. Se hace en forma grupal.		20 min.		El lenguaje, les pareció ya muy antiguo.
	6.- Justificación del teorema que relaciona el ángulo externo e internos opuestos de un triángulo.	Para resolver en pequeños grupos se presenta como un reto obtener la relación entre dos ángulos internos y un externo opuesto, y se pide su justificación. Se pasa a compartir con todo el grupo con el fin es que lo relacionen con una construcción de triángulos congruentes y argumentar posteriormente en el papel.de forma individual.	Cuaderno y lápiz.	30 min.	Se valoran los argumentos y participaciones que tiene cada equipo.	Dos compañeros tuvieron una participación brillante, otros no tuvieron una idea clara de cómo llegar al objetivo.

3.7 *Sesión 5*

Se comienza por la elaboración individual de un mapa conceptual.

Esta sesión tiene por objetivos:

a) La construcción de la recta paralela por un punto dado es postulado de las rectas paralelas.

b) La revisión de la congruencia de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

c) Conocer los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal, e identificar a partir de ello que son congruentes.

En esta primera actividad no llegan a obtener una justificación muy bien argumentada, pero adquieren un mayor lenguaje y una reestructuración de los conocimientos, lo que hace que la elaboración del mapa sea más grande.

Los estudiantes tienen claridad en cuanto a la geometría llegando a percibir más las definiciones, pues ésta es describir relaciones y razonar. Esto hace pensar que la construcción del conocimiento geométrico se lleva en niveles, desde el pensamiento informal al formal, tal como lo observaron en los *Elementos* de Euclides y la descripción de Van Hiele (1957)[67].

La geometría ha sido considerada durante mucho tiempo como el lugar del currículo escolar donde los estudiantes aprenden a razonar y a ver la estructura axiomática de las matemáticas. También incluye un enfoque intenso sobre el desarrollo cuidadoso del razonamiento y la demostración, utilizando definiciones y estableciendo hechos.

Por tanto, el objetivo principal al finalizar es que los estudiantes sean capaces de describir, representar e investigar relaciones dentro de un sistema geométrico, así como de expresar y justificar en cadenas lógicas.

Los alumnos comprenden el papel de las definiciones, axiomas y teoremas, y elaborarán sus propias demostraciones, pero esta última parte no es fácil, ya que implica un nivel alto que se puede visualizar porque existe una construcción y vislumbrar mentalmente una generalización de los *n* casos que pueden existir.

Por su parte, la geometría es el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, la cual culmina con la enseñanza a través del trabajo de demostraciones. Así pues, la construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial ofrecen accesos para interpretar y describir entornos físicos y poder construir herramientas importantes en la resolución de problemas.

De acuerdo con los estándares de la NCTM (1987)[68], las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de las matemáticas y en situaciones del mundo real, por eso la geometría debe integrarse cuando sea posible con otras áreas. Por tanto, las representaciones geometrías pueden servir para dar sentido a las nociones de área.

Por lo anterior, la siguiente actividad consiste en encontrar el área del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Azcapotzalco (ver anexo 6). En la fase individual los alumnos contaron con un plano y al momento de compartir cómo obtendrían el área, la respuesta fue triangulando a través de ejercicios de congruencia y de paralelismo.

Por congruencia porque al momento de triangular buscaban facilitarse el trabajo construyendo rectas paralelas para obtener con esto ángulos, los cuales no sabían con exactitud su nombre o su relación, esto conllevó una discusión que culminó en la unificación de la información.

En esta actividad se logró que relacionaran la sesión anterior con la actual, pues la justificación de la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo tenía un tapiz de triángulos congruentes, también se logró que conocieran la relación de los ángulos dada dicha justificación. Así, se concluyó la actividad para abordar la actual y continuar con la lectura.

La actividad de conclusión consistió en la discusión y lectura, ésta conllevo a reflexionar la diferencia entre éstas, ya que las figuras son una herramienta para alcanzar un conocimiento y ayudan a introducirse en la razón, puesto que ese es su objetivo, mas no la construcción.

CARTA DESCRIPTIVA NO. 5

NOMBRE DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN: Matemáticas II, Unidad III Congruencia y Semejanza.

RESPONSABLE: María Lucina Ariza Vargas.

OBJETIVO GENERAL: Comprender y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza, descubrir el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al estudiante en el método deductivo.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Aplicara los criterios de congruencia para justificar ciertas propiedades de los triángulos y también que el estudiante logre la habilidad para realizar un proceso de análisis-síntesis sencillo, compuesto de al menos una cadena de dos eslabones: deducción de las consecuencias de pertenecer a un concepto induciendo la inclusión en el concepto.

Sesión	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo	Forma de Evaluación	Observaciones
5	1.- Realización de un mapa conceptual.	Saludo inicial después, se solicita hacer un mapa conceptual de forma individual y compartir información con uno o dos compañeros que se encuentren próximos, de esta manera esta más completo, simultáneamente algunos contestan preguntas que hace la profesora, acerca de lo que han escrito.	Lápiz y papel.	30 min.	De acuerdo con las respuestas se observa en que nivel se encuentran.	Se observa un mapa más acabado.
	2.- Encontrar el área del CCH Azcapotzalco.	Se les entrega un plano tamaño carta del plantel, se les pide obtener el perímetro y	Plano con medidas del perímetro.	30 min.	Se aprecia como aplica los conceptos ya vistos.	Se involucran en la actividad. Triangulan, el

		el área del plantel, el objetivo es que apliquen y triangulen la figura que es irregular para obtener después el teorema de Pitágoras como una solución a un problema, por ello no se llega a la conclusión.				plano y notan la semejanza de triángulos.
	3.- Lectura de Mostrar y Demostrar.	Una vez que se opto por llegar a la solución en otro momento se les proporciono algunas copias para que leyeran en donde existen justificaciones visuales del teorema de Pitágoras para adentrarse a la congruencia.	Copias.	30 min.		La lectura les pareció digna de reflexión y enriquecedora, a la vez que hubo sencillez y belleza en los razonamientos expuestos.
	4.- Discusión de la lectura.	Un compañero de forma aleatoria parafrasea la lectura y otros dos agregan lo que falta para que sea más completa y clara.		30 min.	Se observa si existe un avance en cuanto al lenguaje.	

3.8 *Sesión 6*

Se inicio con una plática sobre la sesión anterior, ya que habían logrado aclarar sin llegar a completar las justificaciones que no se terminaron, aunque no se había identificado la solución al problema del área del CCH, por lo que se comenzó una etapa por pequeños grupos y se dieron cuenta que no todos tenían la triangulación de la misma manera, lo que dio pauta a la semejanza.

Aunque los ángulos eran congruentes y los lados diferentes, guardaban proporción, aspecto que debían notar, ya que ese era el objetivo de esta sesión: el teorema de Thales y los criterios de semejanza de triángulos.

Posteriormente, se hizo una intervención grupal en la que relacionaban fotografías respecto a sus ampliaciones o reducciones, así como que pasaba con los triángulos de algunos compañeros donde triangularon una ampliación o reducción.

Con ello se dio paso a la lectura *¿Qué es y cómo se llega a la proporción dorada?*, aquí se recordó a Thales y la sombra de la pirámide de Keops, es decir, cómo llega a deducir la proporción y cómo la semejanza. Esto resulta impresionante para la mayoría, pues vieron como intervienen las matemáticas en la estética, esto es, en cuanto a la proporción dorada del arte antiguo al actual.

Finalmente, resolvieron por pequeños grupos dos situaciones en donde deben aplicar el teorema de Thales y discutir los criterios para saber si los triángulos son semejantes: congruencia. En esta se retoman la equivalencia de números racionales y se mezcla el algebra para enriquecer la geometría.

Aparentemente no se logró mucho en la obtención del área, aunque se llegó a la conclusión de que es la semejanza y los criterios, así como que triángulos congruentes son semejantes y tienen una proporción especial, y que los triángulos semejantes no eran congruentes necesariamente, y el significado que tiene la proporcionalidad de un entero.

CARTA DESCRIPTIVA NO. 6

NOMBRE DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN: Matemáticas II, Unidad III Congruencia y Semejanza.

RESPONSABLE: María Lucina Ariza Vargas.

OBJETIVO GENERAL: Comprender y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza, descubrir el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al estudiante en el método deductivo.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Aplicara los criterios de semejanza para justificar ciertas propiedades de los triángulos.

Sesión	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo	Forma de Evaluación	Observaciones
6	1- Recapitulación de forma grupal.	De manera aleatoria se pregunta para que todos participen, además se pregunta de manera personal a los que no hubiesen aportado nada, para que con ello todos contribuyan, para hacer un buen resumen.		15 min.	Se valoran las respuestas y las participaciones, mencionando que es una excelente participación o que quizás es una aproximación pero falta un poco más.	Se hace notar que la parte más importante radica en razonar y llegar a conclusiones.
	2.- Lectura y discusión de la Proporción Dorada.	Leen una pequeña lectura de la proporción dorada, en la cual la semejanza se encuentra presente con la proporción que tienen las diferentes partes del cuerpo y la estética.	Copias.	15 min.		Hubo interés por los datos de proporción del cuerpo humano.
	3.- Criterios de Semejanza.	Como teníamos pendiente obtener el área del plantel, se siguió trabajando en ello,	Cuaderno y lápiz.	30 min.	Se revisa el avance y como han trabajado, de tal forma que apliquen los	Se retomo la triangulación del croquis del CCH

		preguntando si ya habían terminado que compararán sus resultados, como no habían terminado se dieron cuenta que algunos obtuvieron triángulos semejantes primero refiriéndose a ellos con forma y tamaño, para posteriormente hablar de congruencia en ángulos y proporcionalidad en lados; los triángulos son rectángulos para identificar base y altura, siendo más fácil obtener el área; se mencionan los criterios de semejanza mismos que se notan en los triángulos que han construido en el croquis.			criterios de semejanza correctamente.	y se observaron cuáles y porqué criterios son semejantes algunos triángulos.

3.9 *Sesión 7*

Se hizo un recuento grupal de lo visto, en éste participaron de manera aleatoria y de forma colectiva encontramos la solución a la cuestión del área del plantel.

Aunque ya se platicó en pequeños grupos y se ha realizado la triangulación a partir del teorema de Thales; así como aplicando los criterios de semejanza para justificar la que existe entre triángulos y la proporcionalidad entre sus lados respectivos.

Como la mayoría realizo trazos de triángulos equiláteros y algunos se disponían a aplicar la fórmula de base por altura sobre dos, se planteó la siguiente pregunta para que comenzaran a obtener conclusiones: ¿la altura?

No cabe duda que la altura de un triángulo equilátero es la mediatriz del mismo, la cual formaba dos triángulos congruentes, o bien, su razón de semejanza es igual a un todo, aspecto sabido y expuesto en un despliegue de información. Con esto se buscó llegar a los siguientes objetivos:

- Teorema de la altura de un triángulo rectángulo y su justificación.
- Teorema de Pitágoras y su justificación.

Por tanto, la siguiente actividad consistió en relacionar un triángulo rectángulo a partir de la altura de un triángulo equilátero, y así encontrar mediante análisis el teorema de Pitágoras. Entonces, trazando una altura al triángulo rectángulo relacionan los tres triángulos semejantes que se forman y con la observación se despliega la información y análisis, lo que conlleva la deducción del teorema de Pitágoras.

Este teorema ya era conocido y es un aprendizaje por recepción, el cual se convirtió en un rasgo sobresaliente, aunque sin experiencia empírica ni concreta, ni comprensión de conceptos y proposiciones expuestas verbalmente.

De acuerdo con Ausubel (1984)[69], al aprender un teorema de geometría cada palabra tiene significado y toda la tarea de aprendizaje es viablemente significativa, por lo que es necesario que el estudiante manifieste una actitud de aprendizaje, ya que debe de relacionar elementos con su estructura cognitiva e interna.

La expresión de sorpresa y satisfacción de los estudiantes al obtener el teorema de Pitágoras, involucró una etapa previa de resolución de problemas, ya que el único conocimiento que se posee y entiende realmente es aquel que uno descubre por si mismo y se lleva a cabo mediante una secuencia clara y lógica.

La actividad se concluyó parcialmente, porque el objetivo de obtener el área del plantel aún no se ha terminado. No obstante, de otra forma los estudiantes obtendrían lo que se busca inconscientemente, ya que logran aprenderse de memoria “problemas tipo” y procedimientos mecánicamente para manipular signos algebraicos.

Los estudiantes tienen los conocimientos previos relevantes y necesarios para hacer que la tarea de aprendizaje sea potencialmente significativa, ya que en este caso el teorema de Thales es el antecedente primordial, pues se está analizado e internalizado. De acuerdo con Ausubel (1984)[70], el aprendizaje verbal significativo constituye el medio principal para adquirir grandes cuerpos de conocimiento.

La siguiente actividad consiste en la lectura de dos cuentos cortos de Tahan Malba. En el primero se exponen las partes de la matemática, aritmética y los números, el algebra, las relaciones, la geometría y las formas, la mecánica y la astronomía; asimismo, se relaciona el arte con las matemáticas. En el segundo se explica el teorema de Pitágoras como una verdad eterna, la matemática hindú y se presenta un cuento, no obstante, no despierta el interés de los estudiantes.

Después de terminar la lectura, se prosigue con la siguiente actividad, en la cual se comentan los cuentos donde se dan detalles precisos en cuanto a la inequidad de género en el primero y la buena descripción de las matemáticas por su utilidad y belleza.

Por otra parte, queda ilustrado el teorema de Pitágoras y existe claridad en cuanto a que la matemática es la misma en cualquier cultura del mundo, al respecto se mencionó lo universal y útil, aunque algunos compartieron lo cargado de religión que están ambos cuentos, aun así fueron interesantes para todos.

CARTA DESCRIPTIVA NO. 7

NOMBRE DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN: Matemáticas II, Unidad III Congruencia y Semejanza.

RESPONSABLE: María Lucina Ariza Vargas.

OBJETIVO GENERAL: Comprender y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza, descubrir el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al estudiante en el método deductivo.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Utilizar correctamente la nomenclatura y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza en la resolución de algunos problemas.

Sesión	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo	Forma de Evaluación	Observaciones
7	1.- Recapitulación de las sesiones anteriores.	Se pregunto lo que se había hecho la sesión anterior y toma una retrospectiva de las anteriores para ver las relaciones o cual era la base de lo que llevábamos, la actividad es en forma grupal, con participaciones individuales.		15 min.	Se tiene una apreciación de lo que es lo que ha quedado claro y que compañeros deben ejercitarse un poco más para hacérselos notar.	Hubo una participación general y activa.
	2.- Hallar el teorema de Pitágoras de forma grupal por semejanza.	A partir de un triángulo rectángulo con la hipotenusa totalmente horizontal se traza la altura y se forman 3 triángulos rectángulos semejantes, son observaciones a las que deben llegar, de forma grupal se establece la relación en cuanto a proporción de los tres triángulo para concluir con el teorema de Pitágoras.	Pizarrón y plumón.	30 min.	Se pregunta la relación de proporción de lados de los triángulo y la congruencia de ángulos que existe, observando	La participación es activa.

	3.- Resolución de problemas. 4.- Lectura y Discusión de un cuento.	Son dos situaciones, Un salón tiene la formula de prisma rectangular con una base de 8 y 6 con una altura de 3 mts, cual es la distancia de la diagonal. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado si su diagonal mide 10 cm? Se tiene que resolver en forma individual para posteriormente pasar a la plenaria. La lectura es en forma individual y finalmente dos exponen un resumen, el segundo llega a ser más completo.	Cuaderno y lápiz. Copias.	40 min. 35 min.	Se valora la forma en que desarrollan cada situación.	Hubo dificultades, sólo pocos equipos llegan a resultados correctos y conclusiones concretas. El objetivo es percatarse de la necesidad de la demostración.

3.10 *Sesión 8*

Se comentaron algunas conclusiones de la sesión pasada, ya que a partir de éstas se podía obtener el área del plantel, trabajo que no habían podido concluir. También hubo comentarios relacionados con el teorema de Pitágoras, en los cuales se discutió y sostuvieron argumentos.

Con lo anterior, se comprueba lo dicho por Ausubel (1984)[71], el conocimiento puede aprenderse y retenerse mucho más si el estudiante asimila únicamente las sustancias de las ideas en lugar de las palabras exactas empleadas para expresarlas. Esto se deja ver en la expresión del teorema o en las argumentaciones de alguna justificación como la relación entre los ángulos central e inscrito en una circunferencia, y en la identificación del ángulo central correspondiente a uno inscrito en una circunferencia, que es la siguiente actividad a realizar.

Aunque la capacidad para el aprendizaje verbal significativo depende de cuestiones cognitivas como la representación simbólica, la abstracción, la categorización y la generalización, es la posesión de éstas lo que hace posible, a fin de cuentas, el descubrimiento original y el aprendizaje eficiente de conceptos, y con ello la adquisición de la información y las ideas más detalladas que constituyen el conocimiento.

Pasando por las diferentes fases como la observación y despliegue de información, se realizan actividades como hacer algunos trazos para obtener generalizaciones en las conclusiones expresadas individualmente, para posteriormente exponerlas al grupo y con ello integrar lo dicho por todos los pequeños equipos y enriquecer la justificación.

La actividad central de esta sesión es la justificación de algunos teoremas, aunque les resultó un poco complejo por ello se distraían, e incluso las conclusiones estaban fuera de contexto, no obstante, dejaban ver sus conocimientos en otros temas.

Por tanto, en algunos equipos se les pidió que se centraran en terminar la justificación y los ejercicios del teorema de Pitágoras. En estos últimos no tuvieron muchas dificultades, sin embargo, en la primera fue más tardado.

En esta sesión la mayoría se encuentra en el nivel 3, ya que su lenguaje es adecuado, incluso se hacen correcciones entre ellos para algunos conceptos, aunque no llegan al rigor.

Por otro lado, las etapas de acercamiento a los conceptos de congruencia y semejanza se han llevado a cabo con diferentes actividades orientadas a que el estudiante consiga aprendizajes, pero teniendo en cuenta discusiones para retroalimentar, incorporar o desechar las distintas intervenciones realizadas por los otros compañeros, con esto llegan a la generalización de estos aprendizajes para volver a empezar y llevarlos a una nueva situación del problema.

A partir de la resolución de distintos problemas, el estudiante se da cuenta que recurre al lenguaje matemático y a una representación gráfica, ya que esto le facilita llegar a una verbalización de lo que va descubriendo y trata de compartirlo con sus compañeros. En ese compartir expone sus ideas y las defiende, a lo que otro le podrá demostrar que su argumentación puede o no ser válida, lo que permite reforzar su argumentación o modificarla.

De acuerdo con Ausubel (1984)[72], el material de lectura debe ser significativo y fácil de leer para que sea una herramienta útil en la percepción de conceptos. La última actividad consiste en la lectura de un cuento con un contexto de Picasso, ya que un objetivo es mostrar que la matemática es una actividad humana que tiene relación con otras manifestaciones culturales.

El problema de ésta radica en que se analiza sin agotarlo, o bien, llegar a la solución queda de tarea. Existen diferentes puntos de vista respecto a la solución, pues la tienen que pensar y esto discutirá en una sesión posterior, que servirá como base para la siguiente unidad.

La siguiente sesión consiste en la aplicación de un examen, lo que significa que realizarán ejercicios y situaciones individualmente, y el número de aciertos que obtengan servirá para obtener su promedio del semestre.

CARTA DESCRIPTIVA NO. 8

NOMBRE DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN: Matemáticas II, Unidad III Congruencia y Semejanza.

RESPONSABLE: María Lucina Ariza Vargas.

OBJETIVO GENERAL: Comprender y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza, descubrir el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al estudiante en el método deductivo.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Que los estudiantes logren la habilidad para realizar un proceso de análisis-síntesis sencillo, compuesto de al menos una cadena de dos eslabones: deducción de las consecuencias de pertenecer a un concepto induciendo la inclusión en el concepto, para con ello logren una justificación clara, reconociendo la importancia de la demostración.

Sesión	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo	Forma de Evaluación	Observaciones
8	1.- Recapitulación de lo ya visto.	De manera grupal se revisan donde hay todavía, dudas y se menciona de forma un tanto general si no hay preguntas, se trata de aclarar todos los comentarios.		20 min.	Se valora su lenguaje y se les corrige de manera inmediatamente y las preguntas se las contesta otro compañero.	Obtuvieron los elementos que les faltaban para saber el área del plantel.
	2.-Justificación de Teoremas. Porque en un triángulo la suma de sus ángulos internos es de 180° y la justificación de la relación entre el ángulo central y el ángulo inscrito.	Se dibuja un triángulo en el pizarrón y se les pide justifiquen si la suma de los ángulos internos es 180° y se dibujan 3 casos donde el ángulo inscrito y el central, forman triángulos de tal forma que ´sea visible el	Pizarrón y plumón.	60 min.	Se aprecia como, realiza dicha actividad y la claridad con que cuenta para argumentar.	Aunque hicieron, la parte de la justificación aún les parece compleja.

		triángulo isósceles que se forma para que argumenten su justificación.				
	3.- Lectura y Discusión	La lectura de Picasso les pareció un vínculo de las matemáticas con las artes donde pensaban que las matemáticas nada tienen que ver.	Copias.	40 min.	Se corrige si existe error y las discusiones es en donde se aprecia que argumentos va hilando.	La lectura de Picasso les pareció un vínculo entre las matemáticas y las artes, ya que pensaban que no estaban relacionadas.

3.11 *Sesión 9*

En esta sesión los estudiantes se deben centrar en la fase de integración de todos los conocimientos previos y los que han adquirido, para expresarlo de forma escrita al contestar las preguntas.

De acuerdo con Ausubel (1984)[73], la escuela no puede asumir la completa responsabilidad de que el estudiante aprenda, ya que éste debe asumir su parte que es aprender activa y críticamente, buscando comprender, retener, e integrar nuevas tareas de aprendizaje con los conocimientos previos y la experiencia idiosincrática, traduciendo los nuevos enunciados a su propio lenguaje, esforzándose en dominar lo que parece difícil, a la vez que plantea preguntas significativas y emprende conscientemente los ejercicios de resolución de problemas que se le asignan.

Por tanto, esta apreciación inicio desde la primera sesión con el diagnóstico y termina con la valoración de los avances durante este proceso de aprendizaje.

En esta sesión se aplicará un examen que se calificará a partir de sus respuestas. Asimismo, habrá una evaluación sumativa.

Para Amengual (1984)[74], el concepto de evaluación es una forma de comprobar lo que se obtuvo en el proceso didáctico. Por tanto, es continuo y definido, enfocado una reflexión crítica sobre todos los factores que intervienen en dicho procedimiento, a fin de determinar cuáles pueden ser o han sido los resultados del aprendizaje.

Esta reflexión forma parte de la evaluación durante todo el proceso didáctico, teniendo diferentes momentos como la valoración diagnostica o inicial que sirve de partida para comenzar la siguiente.

La evaluación formativa se lleva a cabo durante todo el proceso y se caracteriza por aplicarse con el único objetivo de perfeccionarse, de detectar habilidades y errores del estudiante, y verificar el nivel del aprendizaje, por tanto, es cualitativa y correctiva una vez que detecta las limitaciones.

La evaluación sumativa se ubica en la parte final del proceso didáctico, en la última sesión, y tiene un aspecto cuantitativo, pues se caracteriza por ser un “juicio generalizado y global sobre el aprendizaje de los alumnos” (Lafourcade, 1969, pág. 150)[75].

La valoración puede tener referencias normativas, las cuales son objetivas, pues se basan en normas ya establecidas. Asimismo, pretende determinar la posición relativa del alumno en el grupo, calificarlo respecto a efectos de promoción o no promoción, situarlo en determinados niveles de eficacia a partir de una escala de amplitud variable: insuficiente, suficiente, bien, notable o sobresaliente.

No obstante, la asignación de calificaciones es una dificultad. Para Lafourcade (1969)[76] constituye un verdadero problema que el docente haga una máxima de ecuanimidad y precisión. Así pues, suele ser muy raro experimentar la sensación de haber actuado con justicia, cada vez que se adjudica una calificación por una prueba escrita, como es en esta sesión.

Por tanto, la tarea de medir o evaluar los rendimientos escolares es una cuestión sumamente delicada y compleja aún para el experto en mediciones. El docente se enfrenta a valorar conductas rebeldes con instrumentos de medida poco íntegros.

Lafourcade (1969)[77] comenta que los planteamientos sobre las calificaciones han sido una búsqueda de nuevas formas de calificar, ya que se pretende establecer estrategias y calificar clásicamente, y es quizá en cierta medida lo que no permite avanzar totalmente. Por lo que lejos de buscar nuevos sistemas en el estado actual de la evolución pedagógica lo más conveniente es aprovechar al máximo lo que está en vigor, reajustándolos en función a las críticas, las cuales en los últimos años están avaladas por investigaciones cada vez más precisas.

Nuevamente el autor apunta que la carencia de bases más o menos precisas que actúen como normas para la mayoría de los educadores ha determinado la pérdida de la confiabilidad en las notas escolares. La variabilidad de las pautas de adjudicación de calificaciones ha sido investigada por diversos especialistas y son evidencia clásica de la escasa fiabilidad de las notas escolares.

Por otro lado, están los que abogan por la abolición de las calificaciones, argumentando que lo más importante es lo que se aprende mas no la calificación obtenida, y que lo primordial es que hayan avanzado a otro nivel de conocimiento.

Para la obtención de la calificación de esta última sesión se tomaron en cuenta los siguientes aspectos:

- Normas de calificaciones absolutas y relativas.
- Esfuerzos y progresos del alumno en las mediciones y evaluaciones.
- Objetivos logrados y calificaciones que los traducen en confiabilidad.
- Contribución del alumno durante las discusiones en clase.
- Calidad y cumplimiento de las actividades de aprendizaje, las cuales desarrolló a lo largo de las 8 sesiones anteriores.
- La prueba de esta sesión.

Para Lafourcade (1969)[78] la calificación es una información valiosa para saber que necesita estudiar el alumno; un indicador para estimular lo que éste sabe hacer; y uno de los tantos sistemas de comunicación con la escuela.

Finalmente, esta calificación significa la estricta medición de lo que el estudiante sabe en función de los objetivos determinados para el curso; un procedimiento comprensible y consistente; un medio de información equitativo y un elemento de importancia para proporcionar mejores oportunidades a los intereses del alumno; un indicador de sus posibilidades y limitaciones; y una llamada de atención sobre su productividad real.

CARTA DESCRIPTIVA NO. 9

NOMBRE DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN: Matemáticas II, Unidad III Congruencia y Semejanza.

RESPONSABLE: María Lucina Ariza Vargas.

OBJETIVO GENERAL: Comprender y aplicar los conceptos de Congruencia y Semejanza, descubrir el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al estudiante en el método deductivo.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Obtener una evaluación sumativa un numero que refleje los conocimientos que alcanzo y lo nuevos aprendizajes, habilidades y destrezas adquirió; y la comprensión de los conceptos de Congruencia y Semejanza.

Sesión	Actividad	Procedimiento	Materiales	Tiempo	Forma de Evaluación	Observaciones
9	Resolución de un examen.	Se les entrega copias de algunos ejercicios que tienen que resolver de forma individual, aplicando lo aprendido en esta unidad.	Copias	1 hora.	Se valoran las respuestas dadas a cada ejercicio y se obtiene una calificación que es la de la unidad es la evaluación sumativa.	Esta valoración forma parte de una, para evaluar el semestre

Conclusión

> Si junto con los certificados y los títulos, la población escolarizada adquiriese la afición por la lectura, ciertamente tendríamos un país más prospero, más justo y más democrático.
>
> Angélica Zúñiga

Las derivaciones de la aplicación de la estrategia didáctica en el salón de clase respecto a las preguntas planteadas en el primer capítulo son:

- ¿La lectura es una herramienta efectiva para resolver el problema que plantea la enseñanza de los conceptos de congruencia y semejanza de la Geometría euclidiana? La observación de los estudiantes fue que con éstas podían apreciar el razonamiento y la demostración, aspectos fundamentales para las matemáticas; que ésta se basa en hipótesis y reglas específicas; y que el razonamiento sistemático es una de las características que define a la asignatura.

A pesar de que la experiencia de la lectura actual depende de la experiencia de lecturas anteriores, del humor de los estudiantes y del gusto literario, no deja de ser fundamental buscar una sociedad que tenga la capacidad de pensar y razonar; lo cual es la base para adquirir conocimientos y destrezas matemáticas.

Los conceptos de congruencia y semejanza son resultado de un análisis metódico, donde la lectura invita a iniciar una exploración para pasar posteriormente a un nivel (Van Hiele) de conocimiento superior. La mayoría logró avanzar, a pesar de que no se llegó a un rigor matemático algunos obtuvieron un nivel de deducción satisfactorio.

Los jóvenes que asumieron su responsabilidad como estudiantes lograron el objetivo de aprendizaje de forma crítica y activa. Otros no siempre estaban dispuestos a disfrutar de la lectura, por lo que no resultó una herramienta eficaz; asimismo, algunos requerían de más referencias para continuar, debido a que les interesaba saber más sobre la misma.

Cabe mencionar que existe un progreso en cuanto al lenguaje y una leve inquietud por alguna lectura relacionada con las matemáticas. Algunos estudiantes lograron demostraciones a partir del formalismo requerido para el nivel bachillerato, cumpliendo con los objetivos institucionales y teniendo un nivel superior de acuerdo con Van Hiele.

En lo que respecta a la segunda pregunta: ¿La discusión en clase entre grupos pequeños (equipos) lleva a un aprendizaje? En cada lectura hubo discusiones que llevaron una retroalimentación. Cabe resaltar que éstas invitaban al razonamiento crítico, el cual fue de lo individual a un nivel de equipo, y posteriormente, al grupo en general.

Aunque hubo argumentos admirables y deficientes, ambos aportaron la posibilidad de discusión, de tal forma que compararon sus ideas con las de los demás, lo que sirvió para modificar, consolidar o ampliar sus argumentos o su razonamiento.

En cada clase se estimuló a los estudiantes para que expusieran sus especulaciones y contribuyeran a evaluar el pensamiento de otros, propiciando un ambiente adecuado para el aprendizaje del razonamiento matemático.

Al principio los estudiantes se enfrentaron con sus ideas y desarrollaron sus propios medios informales para expresarlas, lo cual resultó efectivo para fomentar la participación y dominar el significado de los conceptos de congruencia y semejanza.

Asimismo, muchos estudiantes fueron capaces de presentar sus argumentos de forma aceptable, pues los explicaron manera clara y correcta, es decir, de acuerdo al nivel de los demás compañeros, de tal suerte que el lenguaje de las últimas sesiones era muy distinto al de las primeras, ya que el significado de los conceptos de congruencia y semejanza adquirió un nivel más elevado respecto del inicio.

La expresión tendió a compartir conocimientos y a la corrección entre equipos, buscando ser convincentes, comprensibles y coherentes. Aunque no se llego al rigor se contó con deducciones que apoyaron sus argumentos.

Definitivamente, la discusión cambio la estructura de pensamiento de cada estudiante por una con un significado, debido a que entre los equipos surgieron cuestiones de incredulidad hacia algún argumento, lo que dio pauta para que buscaran por su propia cuenta el resultado que conllevara un aprendizaje más acabado.

Asimismo, hubo un ambiente de respeto, aunque no siempre se concluyó el tema, punto donde casi todos quedaban convencidos, pues no siempre aceptaban que existía un pequeño error en su actividad.

Si bien no se logró una autonomía perfecta, al final su insistencia de pedir mi opinión como verdad absoluta fue mínima, ya que quedó claro que el conocimiento es la autoridad matemática y, por tanto, ellos lo podían tener. Así pues, hubo armonía, respeto y confianza durante todas las sesiones, incluso satisfacción por las discusiones que se volvían cada vez más placenteras.

Ahora bien los resultados del examen no fueron los esperados ya que de la primera pregunta un 75% fue correcto, de la segunda un 60% fue correcto, de la tercera un 70%, de la cuarta solo un 30% y de la quinta un 50%, aunque la mayoría logro avanzar un nivel de acuerdo con Van Hiele.

Desde mi punto de vista, las consecuencias que tiene el leer y discutir en el salón de clase, como herramientas para la enseñanza-aprendizaje, resultan satisfactorias para algunos, aunque no para toda la población, por tanto, es necesario continuar la búsqueda para mejorar y obtener alternativas más eficaces.

Aunado a esto, surgen inquietudes a lo largo de dicho trabajo: ¿qué tanto cumple con los objetivos institucionales el uso de la lectura como una herramienta de ayuda?, ¿qué lecturas son más idóneas para el aprendizaje de los conceptos de congruencia y semejanza? y ¿cómo se cumple con los adolescentes para motivarlos a tener un mejor acercamiento con las matemáticas, y en particular con la Geometría euclidiana?

Aunque las preguntas anteriores son intrínsecas a las que se tenían en un principio, no logran abarcarse del todo, ya que quedan como un punto de partida para continuar con la búsqueda de corregir y mejorar la enseñanza-aprendizaje.

Anexos

Anexo 1
MENON

MENÓN. ¿Podéis, Sócrates, decirme si la virtud puede enseñarse, o si no pudiendo enseñarse, se adquiere sólo con la práctica; o, en fin, si no dependiendo de la práctica ni de la enseñanza, se encuentra en el hombre naturalmente o de cualquiera otra manera?

SÓCRATES. Basta ahora, los tesalienses han tenido mucho renombre entre los helenos, y han sido muy admirados por su destreza para manejar un caballo, y también por sus riquezas; pero hoy día su nombradía descansa, a mi parecer, en su sabiduría, principalmente la de los conciudadanos de tu amigo Aristipo de Larisa. De esto sois deudores a Gorgias, porque, habiendo ido a esta ciudad, se atrajo por su saber a los principales aleuades, uno de los cuales es tu amigo Aristipo, y a los más distinguidos de los demás tesalienses. Os acostumbro a responder con seguridad y con un tono imponente a las preguntas que se os hacen, como responden naturalmente los hombres que saben; tanto más, cuanto que él mismo se espontánea a todos los helenos que quieren preguntarle, y ninguno, queda sin respuesta, cualquiera que sea la materia de que se trate. Pero aquí, mi querido Menón, las cosas han tornado la faz opuesta. No sé qué especie de aridez se ha apoderado de la ciencia, hasta el punto que parece haberse retirado de estos lugares para ir a animar los vuestros. Por lo m propusieras interrogar sobre esta cuestión a alguno de aquí, no habría uno que no se echara a reír, y que no te dijera: «Extranjero, sin duda me tienes por algún dichoso mortal, si crees que se yo si la virtud puede enseñarse, o si hay algún otro modo de adquirirla. Pero estoy tan distante de saber si la virtud, por su naturaleza, puede enseñarse, que hasta ignoro, absolutamente lo que es la virtud». En el mismo e idéntico caso, Menón, me hallo yo; tan falto de recursos como mis conciudadanos; y en verdad siento mucho no tener ningún conocimiento de la virtud. ¿Ni cómo podría conocer yo las cualidades de una cosa cuya naturaleza ignoro? ¿Te parece posible que uno que no conozca la persona de Menón, pueda saber si es hermosa, si es rico, noble, o si ¿es todo lo contrario? ¿Crees tú que esto sea posible?

MENÓN. No. Pero, ¿será cierto, Sócrates, que no sepas lo que es la virtud? ¿Es posible que, al volver a nuestro país tuviéramos que hacer pública allí tu ignorancia sobre este punto?

SÓCRATES. No sólo eso, mi querido amigo, sino que tienes que añadir que yo no he encontrado aún a nadie que lo sepa, a juicio mío.

MENÓN. ¿Cómo? ¿No viste a Gorgias cuando estuvo aquí?

SÓCRATES. Sí.

MENÓN. ¿Y crees que él no lo sabía?

SÓCRATES. No tengo mucha memoria, Menón; y así no puedo decirte en este momento qué juicio forme, entonces, de él. Pero, quizá sabe lo que es la virtud, y tú sabes lo que él decía. Recuerda, pues, sus discursos sobre este punto, y si no te prestas a esto, dime tú mismo lo que es la virtud, porque indudablemente en este.asunto tienes las mismas opiniones que él.

MENÓN. Sí.

SÓCRATES. Dejemos en paz a Gorgias, puesto que está ausente. Pero tú, Menón, en nombre de los dioses, ¿es qué haces consistir la virtud? Dímelo; no me prives de este conocimiento, a fin de que, si me convenzo de que Gorgias y tú sabeis lo que es la virtud, tenga que confesar que, por fortuna, he incurrido en una falsedad, cuando he dicho que aún no he encontrado a nadie que lo supiese.

MENÓN. La cosa no es difícil de explicar, Sócrates. ¿Quieres que te diga, por lo pronto, en qué consiste la virtud de hombre? Nada más sencillo: consiste en estar en posición de administrar los negocios de su patria; y administrando, hacer bien a sus amigos y mal a sus enemigos, procurando, por su parte, evitar todo sufrimiento. ¿Quieres conocer en qué consiste la virtud de una mujer? Es fácil definirla. El deber de una mujer consiste en gobernar bien su casa, vigilar todo lo interior, y estar sometida a su marido. También hay una virtud propia para los jóvenes, de uno y otro sexo, y para los ancianos; la que conviene al hombre libre, también es distinta de la que conviene a un esclavo, en una palabra, hay una infinidad de virtudes diversas. Ningún inconveniente hay en decir lo que es la virtud, porque cada profesión, cada edad, cada acción, tiene su virtud particular. Creo, Sócrates, que lo mismo sucede respecto al viejo.

SÓCRATES. Gran fortuna es la mía, Menón, porque, cuando sólo voy en busca de una sola virtud, me encuentro con todo un enjambre de ellas. Pero sirviéndome de esta imagen, tomada en los enjambres, si habiéndote preguntado cuál es la naturaleza de la abeja, y respondídome tú que hay muchas abejas y de muchas especies, que me hubieras contestado, si, entonces, te hubiera yo dicho: ¿es a causa de su calidad de abejas por lo que dices que existen en gran número, que son de muchas especies y diferentes entre sí? ¿O no difieren en nada, como abejas, y sí en razón de otros conceptos, por ejemplo, de la belleza, de la magnitud o de otras cualidades semejantes? Dime, ¿cuál hubiera sido tu respuesta a esta pregunta?

MENÓN. Diría que las abejas, como abejas, no difieren unas de otras.

SÓCRATES. Y si yo hubiera replicado: Menón, dime, te lo suplico, en qué consiste que las abejas no se diferencien entre sí y son todas una misma cosa, ¿Podrías satisfacerme?

MENÓN. Sin duda.

SÓCRATES. Pues lo mismo sucede con las virtudes. Aunque haya muchas y de muchas especies, todas tienen una esencia común, mediante la cual son virtudes; y el que ha de responder a la persona que sobre esto le pregunte, debe fijar sus miradas en esta esencia, para poder explicar lo que es la virtud. ¿No entiendes lo que quiero decir?

MENÓN. Se me figura que lo comprendo; sin embargo, no puedo penetrar, como yo querría, todo el sentido de la pregunta.

SÓCRATES. ¿Sólo respecto a la virtud, Menón, crees tú que es una para el hombre, otra para la mujer, y así para todos los demás? ¿O crees que lo mismo sucede respecto a la salud, a la magnitud, a la fuerza? ¿Te parece que la salud de un hombre sea distinta que la salud de una mujer? ¿O bien que la salud, donde quiera que se halle, ya sea en un hombre, ya en cualquiera otra cosa, en tanto que salud, es en todo caso de la misma naturaleza?

MENÓN. Me parece que la salud es lamisma para la mujer que para el hombre.

SÓCRATES. ¿No dirás otro tanto de la magnitud y de la fuerza; de suerte que la mujer que sea fuerte, lo será a causa de la misma fuerza que el hombre? Cuando digo la *misma fuerza*, entiendo que la fuerza, en tanto que fuerza, no difiere en nada en sí misma, ya se halle en el hombre, ya en la mujer. ¿Encuentras tú alguna diferencia?

MENÓN. Ninguna.

SÓCRATES. Y la virtud, ¿será diferente de sí misma en su cualidad de virtud, ya se encuentre en un joven o en un anciano, en una mujer o en un hombre?

MENÓN. No lo sé, Sócrates; me parece que con esto no sucede lo que con lo demás.

SÓCRATES. ¡Pero que! ¿No has dicho que la virtud de un hombre consiste en administrar bien los negocios públicos, y la de una mujer, en gobernar bien su casa?

MENÓN. Sí.

SÓCRATES. ¿Y es posible gobernar una ciudad, una casa, o cualquier otra cosa, si no se administra conforme alas reglas de la sabiduría y de la justicia?

MENÓN. No, verdaderamente.

SÓCRATES. –Pero, si la administra de una

manera justa y sabía, ¿no serán

gobernadas por la justicia y la sabiduría?

MENÓN. Necesariamente.

SÓCRATES. –Luego, la mujer y el hombre, para ser virtuosos, tienen necesidad de las mismas cosas, a saber:de la justicia y de la sabiduría.

MENÓN. Es evidente.

SÓCRATES. Y qué, ¿el joven y el anciano, si son desarreglados e injustos, serán nunca virtuosos?

MENÓN. No, ciertamente.

SÓCRATES. ¿Sólo respecto a la virtud, Menón, crees tú que es una para el hombre, otra para la mujer, y así para todos los demás? ¿O crees que lo mismo sucede respecto a la salud, a la magnitud, a la fuerza? ¿Te parece que la salud de un hombre sea distinta que la salud de una

mujer? ¿O bien que la salud, donde quiera que se halle, ya sea en un hombre, ya en cualquiera otra cosa, en tanto que salud, es en todo caso de la misma naturaleza?

MENÓN. Me parece que la salud es la misma para la mujer que para el hombre.

SÓCRATES. ¿No dirás otro tanto de la magnitud y de la fuerza; de suerte que la mujer que sea fuerte, lo será a causa de la misma fuerza que el hombre? Cuando digo

la *misma fuerza*, entiendo que la fuerza, en tanto que fuerza, no difiere en nada en sí

misma, ya se halle en el hombre, ya en la mujer. ¿Encuentras tú alguna diferencia?

MENÓN. Ninguna.

SÓCRATES. Y la virtud, ¿será diferente de sí misma en su cualidad de virtud, ya se encuentre en un joven o en un anciano, en una mujer o en un hombre?

MENÓN. No lo sé, Sócrates; me parece que con esto no sucede lo que con lo demás.

SÓCRATES. ¡Pero que! ¿No has dicho que la virtud de un hombre consiste en administrar bien los negocios públicos, y la de una mujer, en gobernar bien su casa?

MENÓN. Sí.

SÓCRATES. ¿Y es posible gobernar una ciudad, una casa, o cualquier otra cosa, si no se administra conforme alas reglas de la sabiduría y de la justicia?

MENÓN. No, verdaderamente.

SÓCRATES. –Pero, si la administra de una manera justa y sabía, ¿no serán gobernadas por la justicia y la sabiduría?

MENÓN. Necesariamente.

SÓCRATES. –Luego, la mujer y el hombre, para ser virtuosos, tienen necesidad de las mismas de la justicia y de la sabiduría.

MENÓN. Es evidente.

SÓCRATES. Y qué, ¿el joven y el anciano, si son desarreglados e injustos, serán nunca virtuosos?

MENÓN. No, ciertamente. cuanto a esta virtud única, cuya ideaabraza todas las demás, no podemos descubrirla.

MENÓN. No podré, Sócrates, en contraruna virtud tal como tú la buscas, una que convenga a todas las virtudes, como puedo hacerlo respecto de otras cosas.

SÓCRATES. No me sorprende nada de lo que dices. Pero voy a hacer los esfuerzos

posibles para que nos pongamos en camino de hacer este descubrimiento, si

soy capaz de ello. Ya comprendes, sin duda, que lo mismo sucede con todas las demás cosas. Si te dirigiese la pregunta que yo antes te hice: Menón, ¿qué es una figura? Y, en seguida, te preguntase, como ya antes lo hice, si la redondez es la figura o es una especie de figura, ¿no dirías probablemente que es una especie defigura? . . .

Cosas?” ¡Como Menòn! ¿No sabrías responder, si te preguntase que es lo que lo redondo, lo recto y las demás cosas que llamas figuras tienen de común? ¡Inténtalo! Te servirá de preparación para responderme luego sobre la virtud.

Menòn. – No; pero dilo tú mismo, Sócrates.

Sócrates. – ¿Tienen mucho empeño en que lo haga?

Menòn. – Mucho

Sócrates. – ¿Te prestarías, luego, en cambio, a hablar tu mismo de la virtud?

Menòn. – Sí.

Sócrates. – Pues, ¡ánimo! La cosa vale la pena.

Menòn. – Seguramente.

Sócrates. – Vamos; ensayemos una explicación de lo que es la figura. Mira si te parece aceptable esta definición: llamo figura a la cosa, que acompaña siempre al color. ¿Estás satisfecho, o quieres buscar otra definición? En cuanto a mí, si me respondiese acerca de la virtud, me daría por satisfecho.

Menòn. – Pero ¡tu definición es ingenua, Sócrates!

Sócrates. – ¿Por qué?

Menòn. – Según tu opinión, figura es lo que va siempre con el color. Pues bien; si tu interlocutor declarase ignorar que es el color, y tener respecto a él la misma dificultad que respecto a la figura, ¿Qué pensarías d tu respuesta?

Sócrates. – Que es verdadera. Y si tuviera que habérmelas con uno de eso hombres hábiles que no buscan sino disputas y contiendas, le diría: “he dado mi repuesta. Si es errónea, a ti te toca tomar la palabra y refutarme”. Pero tratándose de dos amigos, como nosotros, que quieren conversar, se debe replicar más suavemente y de una manera más conforme con las leyes de la dialéctica, según las cuales conviene, no solo responder la verdad, sino también fundar la respuesta únicamente en lo que el interlocutor reconoce saber. Y es de esta manera cómo voy a intentar explicarme. Dome: ¿hay algo que llamas “fin”? entiendo por ello el termino, el límite: todas las palabras expresan, o mismo. Pròdico tal vez discreparía; pero tú dices indiferentemente de una cosa que está terminada o acabada. Esto es lo que quiero decir y nada tiene de misterioso.

Menòn. – Ciertamente, empleo todas esas palabras, y creo comprenderte.

Sócrates. – ¿Llamas a alguna cosa *superficie* y a otra *sólido*, como se hace, por ejemplo, en geometría?

Menòn. – Sin duda.

Sócrates. – Entonces, podrías comprender lo que entiendo por figura. Digo, pues, que una figura es el límite donde termina un sólido, y esto vale para las figuras en general; de manera que resumiendo definiré la figura como “el límite del sólido”.

Menòn. – Y que es lo que llamas color, Sócrates?

Sócrates. – ¡Menòn te burlas de mi! Abrumas con tus embarazosas preguntas a un viejo como yo, y no quieres, en cambio, avivar tus recuerdos para decirme en qué consiste la virtud, según Gorgias.

Menòn. – Te lo diré, Sócrates, después que hayas respondido a mi pregunta.

Sócrates. – Aun con los ojos vendados, Menòn, se reconocería en tu lenguaje que eres hermoso y amado.

Menòn. – ¿Por qué?

Sócrates. – Porque tus discursos son ordenes. Si hablan los voluptuosos, los cuales ejercen una especie de tiranía mientras están en la flor de la edad. Tal vez has advertido, además, mi debilidad por la belleza. Pero, quiero complacerte y te responderé.

Menòn. – Sí, hazme ese favor.

Sócrates. – ¿Quieres que te responda como respondería Gorgias, de manera que puedas seguirme más fácilmente?

Menòn. – Consiento en ello. ¿Por qué no?

Sócrates. – ¿No decís, según el sistema de Empèdocles, que los cuerpos despiden emanaciones?

Menòn. – Sin duda.

Sócrates. – ¿…Y que hay en los cuerpos poros que reciben y dejan pasar esas emanaciones?

Menòn. – Seguramente.

Sócrates. – ¿…Y que algunas de esa emanaciones son proporcionadas a ciertos poros, mientras que otras son o más delgadas o más gruesas?

Menòn. – Es verdad.

Sócrates. – Por otra parte, ¿hay una cosa que se llama la vista?

Menòn. – Sí.

Sócrates. – Siendo así, comprende mis palabras, como dice Píndaro. El color es un flujo de figuras, proporcionado a la vista y sensible.

Menòn. – Tu respuesta. Sócrates, me parece admirable.

Sócrates. – Probablemente, porque no es extraña a vuestro modo de discurrir; además, proporciona un recurso como para explicar que seca la voz, el olfato y muchas otras cosas semejantes.

Menòn. – Sin duda.

Sócrates. – No sé que tiene del lenguaje del la tragedia mi respuesta, Menòn, para que la prefieras a la de la figura.

Menòn. – Lo confieso.

Sócrates. – Sin embargo, ¡oh, hijo de Alexidemo!, en mi opinión no es esa la mejor, sino la otra. Y creo que llegarías a pensar lo mismo, si no te vieras obligado a partir antes de los misterios, como enunciabas ayer, y pudieras permanecer y hacerte iniciar en ellos.

Menòn. – De buena gana me quedaría, Sócrates, si quisieras dedicarme muchas conversaciones como esta.

Sócrates. – Si de mi buena voluntad dependiese, no dejaría de seguir hablándote así, para beneficio de ambos; pero me temo que no voy a ser capaz de decirte cosas semejantes. Como quiera que sea, trata ahora de cumplir la promesa que me hiciste de definir la virtud en general, y cesa de hacer varias cosas de una sola, como se dice, bromeando, de los que rompen algo. Deja, pues, integra e intacta la virtud y dome en qué consiste, según los ejemplos que te he dado.

*Menòn. – Pues bien, Sócrates; me parece que la virtud consiste, como dice el poeta, en amar las cosas bellas y ser poderoso. Así, llamo virtud al deseo de las cosas bellas con mas el poder de procurárselas.

Sócrates. – Piensas que desear las cosas bellas implica desear las buenas?

Menòn. – Sin duda.

Sócrates. – ¿Hay hombres, por ventura, que desean las cosas malas, mientas que otros desean las buenas? ¿No te parece que todos desean lo que es bueno?

Menòn. – de ninguna manera.

Sócrates. – ¿Es que algunos apetecerían lo que es malo?

Menòn. – Sí.

Sócrates. – ¿Es que lo creen bueno o lo desearían aun sabiendo lo malo?

Menòn. – Juzgo posibles ambos casos.

Sócrates. – Pero, Menòn, ¿crees que se puede desear una cosa sabiendo que es mala?

Menòn. – Así lo creo.

Sócrates. – ¿Qué entiendes por desear una cosa? ¿es desear la adquisición en ella?

Menòn. – Seguramente; adquirirla.

Sócrates. – Pero el hombre que desea lo malo, ¿se imagina que el mal le sea ventajosos; o sabe acaso que es nocivo para quien lo acepta?

Menòn. – Unos piensan que el mal puede ser ventajosos, otros saben que es dañoso.

Sócrates. – ¿Crees que es tomar lo malo como útil sea conocerlo como malo?

Menòn. – En ese concepto no lo creo.

Sócrates. – ¿No es, pues, evidente que no desean el mal aquellos que lo ignoran como tal, y que el objeto de su deseo es algo que, aunque sea malo, creen lo bueno? Deseando el mal que desconocen y estiman por bueno ¿No es el bien lo que desean en realidad? ¿No es así?

Menòn. – Así parece, en efecto, para los tales.

Sócrates. – Pues ¡que! Los que desean el mal, sabiendo, según dices, que les era nocivo, ¿saben, sin duda, que les era nocivo?

Menòn. – Necesariamente.

Sócrates. – Pero, estos, ¿no saben acaso que lo nocivo hace sufrir en la medida en que es nocivo?

Menòn. – También es cierto.

Sócrates. – ¿Y en que en tanto que sufren son desgraciados?

Menòn. – Así lo pienso.

Sócrates. – ¿Hay alguien hombre que quiera sufrir y ser desdichado?

Menòn. – No lo creo, Sócrates.

Sócrates. – Si no hay quien lo quiera, Menòn nadie, tampoco, quería el mal. ¿Qué es sufrir, en efecto, sino querer el mal y procurárselo?

Menòn. – Parece que tienes razón, Sócrates, y que nadie quiere el mal.

Sócrates. – ¿No decías, hace un instante, que la virtud consiste en querer el bien y poder procurárselo?

Menòn. – Sí, lo he dicho.

Sócrates. – De estos dos términos, el querer es común a todos, y en este respecto ningún hombre es mejor que otro.

Menòn. – Convengo con ello.

Sócrates. – Es evidente que si unos valen más que los otros será en cuanto al poder.

Menòn. – Sin duda.

Sócrates. – De modo que, según tu definición, la virtud es el poder procurarse al bien.

Menòn. – Me parece, Sócrates, que es tal como tú lo concibes.

Sócrates. – Veamos si es así, porque a caso tengas razón. ¿Dices que la virtud consiste en el poder de adquirir el bien?

Menòn. – sí.

Sócrates. – ¿Y llamas bien, por ejemplo, a la salud y a la riqueza?

Menòn. – Entiendo por bien asimismo la adquisición de oro y plata, y de los cargos y honores en la ciudad.

Sócrates. – ¿No piensas en ninguna otra cosa cuando hablas del bien?

Menòn. – No pensaba sino en todas esas.

Sócrates. – enhorabuena. Así que, según Menòn, huésped, por su padre, del Gran Rey, la virtud consiste en procurarse justamente y sanamente, ¿o juzgas que ello sea indiferente? ¿Te parece que una adquisición injusta puede ser tenida por virtud?

Menòn. – nada de eso, Sócrates.

Sócrates. – ¿sería maldad?

Menòn. – sin género de duda.

Sócrates. – luego, la adquisición debe ir acompañada de justicia, templanza, santidad o cualquier otra parte de la virtud, sin lo cual, aunque procure el bien, no será una virtud.

Menòn. – ¿Cómo ha de ser virtud sin esa condiciones?

Sócrates. – renunciar al oro y la plata para sí mismo y los demás, cuando su adquisición fuese injusta, ¿no será igualmente virtud?

Menòn. – me parece que sí.

Sócrates. – de esta manera, procurarse esta clase de bienes no es mas virtud que no procurárselos, y llamaremos virtud a todo cuanto valla acompañado de justicia; y am lo que no, lo llamaremos maldad.

Menòn. – forzosamente ha de ser como dices.

Sócrates. – pero, ¿no dijimos antes que cada una de estas cualidades, la justicia, la templanza, y otras semejantes, son partes de la virtud?

Menòn. – si

Sócrates. – ¿en que te estás burlando de mi, Menòn?

Menòn. – ¿Por qué, Sócrates?

Sócrates. – porque habiéndote suplicado que no fragmentaras la virtud, y aunque te propuse modelos de la manera en que debe responder, no lo has tenido en cuenta, y dices, por un lado, que la virtud consiste en poder procurarse el bien con justicia es una parte de la virtud.

Menòn. – lo confieso.

Sócrates. – resulta de tus dichos que la virtud consiste en poner en las acciones una parte de la virtud; puesto que la justicia, como las otras cosas que hemos dicho, son en tu opinión partes de la virtud. ¿Qué donde voy a aparar? A que te he pedido una definición general de la virtud, y tu, lejos de satisfacerme, declaras que toda acción es virtud, como si ya me hubieras dicho lo que es la virtud en general, y yo pudiese reconocerla en los menudos trozos en que la has dividido. Es, pues, necesario, querido Menòn, que repita de nuevo mi pregunta acerca de la naturaleza de la virtud, si es cierto que toda acción es virtud cuando va acompañada de una parte de la virtud; puesto que no otra cosa se dice cuando se afirma que es virtuosa toda acción acompañada de justicia. ¿Qué te parece? ¿No juzgas conveniente mi insistencia sobre esta cuestión, o crees posible saber en qué consiste una aparte de la virtud sin conocer la virtud misma?

Menòn. – no lo pienso así.

Sócrates. – porque, si te acuerdas, cuando yo te respondía a propósito de la figura, rechazamos una definición por apoyarse en lo que era problema todavía y sobre lo que no estábamos aun de acuerdo.

Menòn. – hemos tenido razón para rechazarla, Sócrates.

Sócrates. – por lo tanto, mientras busquemos aun lo que es la virtud en general, no pienses que ha de ser posible explicar a nadie su naturaleza haciendo entrar en la respuesta las partes de la virtud, ni definir cualquier otra cosa utilizando semejante método. Es preciso plantear de nuevo la misma cuestión: ¿Qué es esa virtud de que hablas? ¿Juzgas que lo que digo no es cerio?

Menòn. – por el contrario, me parece muy sensato.

Sócrates. – empezando de nuevo, dime, pues, en que hacéis consistir, tú y tu amigo, la virtud.

Menòn. – había oído decir, Sócrates, antes de conversar contigo, que tu no sabias más que dudar y sumir a los demás en la duda. Ahora, en efecto, no se con que drogas o sortilegios me has hechizado, que estoy lleno de dudas. Y diré, si me permites una broma, que te asemeja perfectamente, por el aspecto y lo demás, a ese corpulento pez que se llama torpedo, el cual produce una especie de entorpecimiento a cuantos le tocan. Creo que me has hecho sufrir un efecto parecido, porque me siento verdaderamente embotado en alma y cuerpo, y soy incapaz de responderte. Sin embargo, he discurrido cien veces sobre la virtud ante muchas personas, y con acierto, a mi parecer. Pero en este momento ni siquiera puedo decir en qué consiste. Tienes razón, pienso, en resistirte a navegar y visitar a otros países. Porque si hicieras en otra cuidad estas cosas, no tardarías en ser arrestado como brujo.

Anexo 2

La ilusión de Silvanius Thompson. Si esta figura se hace girar (dándole vueltas al libo), todos los círculos y la blanca rueda dentada parecerá que giran, cada uno alrededor de su centro, en el mismo sentido y a la misma velocidad.

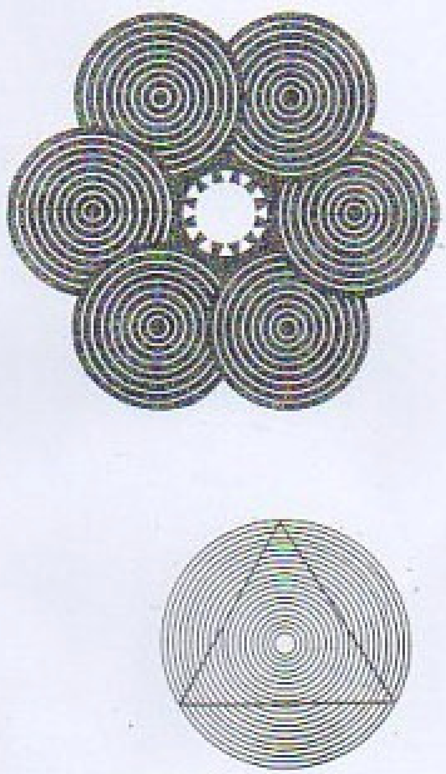


Figura 127

Anexo 3

EULER Y SU PROLE

Durante siglos se ha creído, y aún hoy se cree, que Suiza es un país cuya única aportación a la civilización occidental ha sido el reloj de cuco y el chocolate con leche (de ser los guardianes –léase banqueros- de lo que roban todos los ladrones que en el mundo han sido no hablemos, para evitar conflictos diplomáticos). Pero para los matemáticos y los amantes de las matemáticas, Suiza es el país en el que nació Leonhard Euler... y eso ya es suficiente como para redimir a un país, y más si a este nombre se une el del clan de los Bernoulli. Lo cierto es que se supone y se supone bien que la Madre Naturaleza hizo nacer a Euler en Suiza para dignificar al pequeño país centroeuropeo (...que se libra de todas las guerras precisamente porque todos los que las provocan tienen allí guardado su dinero o esperan guardar el que roben, también precisamente, mediante las guerras provocadas).

Aquella tarde de primavera del año 1780, Euler trabajaba en su estudio rodeado de sus 13 hijos, 29 nietos, 9 sobrinos, 34 amigos de los hijos y de los nietos y de unos cuantos vecinos – unos 24, aproximadamente- cuando su mujer, la paciente Madame Euler, entró para servir el té con pastas (12 litros de té y 16 kilos de pastas). En ese momento, al sentir el aroma de la infusión, Euler, dejando a un lado el trabajo en el que estaba inmerso y extendiendo la mano para que le dieran su taza de té, preguntó:

-¿Os he contado alguna vez el encontronazo que tuve con monsieur Diderot en San Petersburgo?

Y a pesar de que todos -hasta Willhem, el nieto más pequeño, que tenía 2 años- habían oído la historia cientos de veces, contestaron al unísono: Pues no, nunca nos la contaste (y la razón es que todos, familiares y amigos, adoraban al matemático por ser la persona más afable, familiar y generosa que conocían... y sabían que le encantaba contar historias sobre su pasado matemático).

-Pues estaba aquí, en San Petersburgo, hace ya unos cuantos años, cuando me enteré que visitaba la Corte Imperial Rusa el enciclopedista francés Denis Diderot. Me dijeron que me criticaba por ser yo un calvinista piadoso que tenía una sólida fe y creía en Dios, ya que él presumía de agnóstico, cuando no de ateo. Así que le cité en la Academia de Ciencias, ante la Emperatriz y toda la Corte, diciéndole que yo estaba en posesión de la demostración algebraica de la existencia de Dios. Cuando llegó, muy orgulloso él, después de los saludos de cortesía, le espeté en francés:

"Monsieur Diderot: $\frac{a+bn}{n} = x$ *, donc Dieu existe: répondez!"*

Que, más o menos, quiere decir: "Señor Diderot: $\frac{a+bn}{n} = x$, luego Dios existe, así que: ¡responda!"

Os podéis imaginar que se quedó de piedra, mudo de estupor, pues yo sabía que, a pesar de ser el padre de la Enciclopedia, no andaba muy fuerte en matemáticas. Así que aproveché para rematar la faena y le puse este sencillo problema: "Mi mujer escribe un número entero de menos de treinta cifras y que termina en 2. Yo borro el 2 del final y lo escribo al principio. El número que queda escrito es igual al doble del número que había escrito mi mujer. ¿Qué número escribió mi mujer?"

El caso es que no supo hacer ni siquiera este sencillo problema y se excusó, saliendo de inmediato de la Academia. La verdad es que no lo volví a ver por San Petersburgo, y me dijeron que hasta se había ido de Rusia.

Los 110 presentes –incluida su mujer- rieron por septuagésima quinta vez la anécdota y aplaudieron al final. Y siguieron disfrutando del té con pastas sin darse cuenta que Euler había vuelto a su trabajo, ayudado por uno de sus hijos que escribía lo que su padre le dictaba, con un nieto sentado en cada rodilla y otro encima de sus hombros que, además, se estaban peleando... y él totalmente ausente del caos que se desarrollaba a su alrededor, que ya tiene mérito. Euler tenía el don de la concentración y conseguía, a pesar de que a su alrededor estallara el mundo (y es de suponer que en un hogar con 13 hijos estallaría de vez en cuando) encerrarse en una intensa meditación de la que nada de lo que ocurría a su alrededor podía sacarle. Además, era un hombre de una inmensa curiosidad con interés no sólo en las matemáticas, sino que le apasionaba todo lo relativo a los diversos campos de la ciencia, pero también la teología, la medicina, la astronomía, la física y las lenguas antiguas, modernas y orientales (escribía normalmente en latín y en francés, a pesar de que su lengua materna era el alemán). Y abstraído estaba en sus cálculos cuando escuchó la palabra *Eneida*, a la vez que alguien lo zarandeaba violentamente para bajarlo de las nubes:

-¿Qué?

-Que dice este señor, que es el nuevo vecino, que es imposible que te sepas la *Eneida* de memoria –le dijo uno de sus hijos, señalando al recién llegado que ya estaba con su taza de té en la mano.

Y Euler, una vez más, sonriendo ante la expectación levantada a su alrededor, empezó a recitar la obra de Virgilio, hasta que a los tres cuartos de hora, convencido el vecino de que era cierto lo que le habían asegurado, se disculpó para volver a su casa (a tomarse tres medidas de ácido acetilsalicílico) acompañado de la risa de la familia del matemático que despedía así al incrédulo, mientras él volvía a sus cálculos ayudado por tres de sus hijos. (No creo necesario decir, pero lo digo, por si acaso, que en 1738 Euler perdió la vista de su ojo derecho, como consecuencia de su intenso trabajo sobre la realización de un mapa geográfico de Rusia. En 1741 aceptó la invitación de Federico el Grande de Prusia para incorporarse a la Academia de Berlín, ciudad en la que residiría veinticinco años durante los cuales fue perdiendo progresivamente la visión. Catalina la Grande lo llamó en 1766 para que volviese a ocupar su puesto en la Academia de San Petersburgo y ese mismo año supo que estaba perdiendo definitivamente la vista del único ojo sano, así que se preparó para la ceguera total escribiendo sus cálculos sobre una pizarra en grandes caracteres y dictando sus trabajos a sus hijos. A pesar de esta terrible limitación, a lo largo de su vida el matemático publicó mas de 500 libros y artículos. Y la lista de sus obras contiene 886 trabajos, pues produjo una media de unas 800 páginas anuales, lo que le ha convertido en el matemático más prolífico de la historia de esta ciencia.)

Media hora después de que se fuera el aturdido vecino, Euler salió de su meditación empujado esta vez por el ruido ya que, como cada día, 18 de sus 29 nietos y otros tantos amigos suyos hacían cola ante su mesa. El matemático les ayudaba a hacer los deberes escolares así que, dejando a un lado su artículo semanal para la revista de investigación *Commentari*

Academiae Scientiarum Imperiales Petropolitanae -el boletín de la Academia de San Petersburgo que el prolífico Euler, para alegría de sus editores, inundaba con un torrente de artículos matemáticos- y armándose de paciencia, empezó con el primero de la cola.

-A ver, ¿cuál es tu problema?... y nunca mejor dicho.

-Es muy difícil, abuelo –contestó el nieto número 22 en la escala de nietos - te cuento: "¿Qué número es 2/3 del doble del triple de 5?"

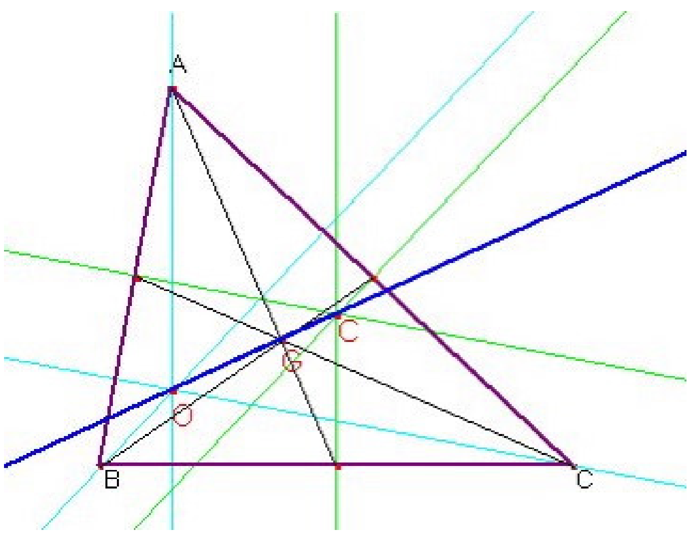
-Pero eso es un acertijo más que un problema. Intenta resolverlo tú, que una cosa es que os ayude con los problemas y otra muy distinta es que os los resuelva yo. Y si no lo sabes hacer, te ayudaré. A ver, el siguiente.

Otro de los nietos, el número 14, el que estudiaba el nivel equivalente a 2° del Bachillerato actual (que como aún no se había inventado ni la televisión ni la Play Station dedicaba su tiempo libre a estudiar), preguntó a su abuelo:

-¿Abuelo: es verdad que fuiste tú el que inventó el uso de las letras A, B y C para los ángulos de un triángulo, y de las minúsculas a, b y c para los lados respectivamente opuestos a ellos?

-Sí, ¿por qué?

-Pues porque el profesor de Geometría dice que está encantado con el invento y no para de ponernos problemas de triángulos. Como éste, sin ir más lejos:



"En la figura parece que la distancia del baricentro G, al ortocentro O es el doble que la distancia de G al circuncentro C. ¿Es cierto?, ¿será casualidad en este triángulo o se verifica en todos?"

-Pero éste problema es muy fácil.

-Será para ti, pero yo llevo una hora dándole vueltas y ni idea... y es que ya me sale humo del cráneo.

-Pues fíjate que curioso –dijo Euler- los griegos ya estudiaron las rectas y los puntos notables de un triángulo que, como sabes, son: el ortocentro, que es el punto de corte de las tres alturas y se le llama punto arquimediano del triángulo, y por algo será; el baricentro, formado por la intersección de las tres medianas y que fue estudiado por Arquímedes en la proposición 13 del primer libro de su obra *Sobre el equilibrio de los planos* hacia 225 a. de C; el circuncentro, situado en la intersección de las mediatrices y aparece en la proposición 5ª del libro IV de los Elementos del gran Euclides; y el incentro, punto de corte de las bisectrices, que también aparece en la proposición 4ª del mismo libro.

-¡Es increíble! –exclamó el nieto número 14.

-Pues más increíble es que desde los clásicos griegos hasta ahora nadie, absolutamente nadie, se hubiese dado cuenta de que tres de esos cuatro puntos, baricentro, ortocentro y circuncentro, estaban alineados... ¡en cualquier triángulo! El primero que se dio cuenta fui yo, y de paso lo demostré. Y bauticé a esa recta con mi nombre, que con él pasará a la posteridad: la Recta Euler. Bueno, ya está bien; a ver, el siguiente –dijo el matemático, después de resolverle las dudas a su nieto.

Ya había atendido a 12 nietos y a 9 amigos de nietos cuando su hijo mayor entró en el estudio para anunciarle:

-Padre, han llegado dos caballeros franceses que quieren hablar contigo.

Y entraron los dos caballeros que después de saludar cortésmente se sentaron ante el matemático. Euler percibió con toda intensidad el aroma del perfume que, siguiendo la moda de París, exhalaban los recién llegados ya que desde que se quedara totalmente ciego, el matemático había desarrollado notablemente el olfato. Así que, en broma, preguntó a su hijo:

-¿Dos caballeros o dos damas?

Los caballeros franceses rieron la broma, uno más que el otro, hasta que el que menos había reído que, además, era el mayor de los dos, dijo:

-Señor, soy Denis Diderot, al que recordaréis... y vengo a vengarme.

El silencio se cernió sobre el estudio del matemático ante lo que parecía una amenaza. Hasta que el más joven de los recién llegados añadió:

-Nada temáis nada de mi sanguíneo compañero, caballero, ya que habla solamente de venganza intelectual, pues dice que le ridiculizasteis hace unos cuantos años ante toda la corte. Y me ha traído para que le ayude en su venganza ya que yo soy matemático.

-¿Y quién sois vos? –preguntó Euler.

-Joseph Louis Lagrange, para servirle.

-¿Sois el joven Lagrange, el de la famosa Mécanique analityque, considerada por todos como un auténtico poema científico?, ¿el mismo que hace ya unos pocos años me envió una carta con la demostración del problema isoperimétrico? –preguntó Euler.

-El mismo, señor. ¿Y quién sois vos? Porque monsieur Diderot me convenció para que le acompañara pero sin decirme quien era usted.

-Joven Lagrange, soy Leonhard Euler, también para servirle.

-¡¡¡ Euler !!! ¿Sois el gran Euler? –exclamó Lagrange, y se volvió indignado hacia Diderot- ¿Pero cómo no me habíais advertido que me enfrentaría nada menos que al gran Euler?

Los dos matemáticos se levantaron de sus asientos para fundirse en un emotivo abrazo y comenzar a intercambiarse conocimientos hasta que, tres horas después, Diderot, para hacerse presente, carraspeó, tosió y hasta bailó un vals alrededor de los abstraídos matemáticos.

-Tenéis que zarandearlos –propuso el hijo mayor de Euler- Es la única manera de sacarlos de su mundo, por lo menos en lo que se refiere a mi padre, que así es como lo bajamos de las nubes.

Una vez de vuelta a este mundo, ambos matemáticos miraron a Diderot que, timidamente, insinuó:

-Monsieur Lagrange, se supone que habíais venido para ayudarme a vengarme del señor Euler.

-Sin saber que era el señor Euler, así que mi venganza será vengarme de vos... quedándome junto a este genio todo el tiempo que pueda, que no se si sabréis, aunque imagino que no, que mi compañero Pierre Simon Laplace dijo y muy bien dicho: “Leed a Euler, leed a Euler, es el maestro de todos nosotros” –dijo Lagrange dándose media vuelta para seguir hablando con Euler.

-¿Y yo qué hago? –preguntó, desconcertado, Diderot.

-Podéis ir haciendo este problema, que es más difícil que el que os puse hace años –dijo Euler sacando unos naipes y poniéndolos sobre la mesa- Vamos, tomad nota, que es un problema para tahúres, con perdón, y que se llama el “Juego del Trece” o “*Reencontré*” y estas son las reglas: “Un jugador baraja un paquete de 13 cartas de una baraja francesa desde el As hasta el Rey. Puestas boca abajo comienza a levantarlas de una en una diciendo *uno* al levantar la primera, *dos* al levantar la segunda, *tres* la tercera... y así hasta la décimo tercera carta. Se gana si la carta que se levanta coincide con el número cantado. En 1708, cuando yo tenía solo un año, Pierre Remond de Montmort estudió matemáticamente este juego. ¿A qué conclusión llegó? ¿Apostarías a acertar? ¿Cuál es la probabilidad de ganar?”

Y allí se quedó Diderot, en un extremo de la larga mesa, intentando resolver el nuevo problema, mientras Euler y Lagrange confraternizaban, afianzaban su amistad e intercambiaban conocimientos y problemas. Y la verdad es que les dio tiempo de sobra a confraternizar, a afianzar su amistad y a intercambiar de todo ya que, a los seis meses, Diderot aún seguía sentado al extremo de la mesa del estudio de Euler tratando, sin éxito, de resolver el problema de las 13 cartas boca abajo. Dicen que a su vuelta a París -sin haber resuelto el problema, por supuesto y aunque la Historia no haya dejado testimonio de ello- tuvo problemas con la Justicia ya que incendió todas las fábricas de naipes de la ciudad, sin que quisiera explicarle a los jueces el porqué de su actitud, pues se limitó a contestar: “Pregúntenles a Euler... y Lagrange”.

Autor:JoaquínCollantes

Anexo 4

PLATÓN

En la segunda mitad del siglo V se produjeron tres cambios que afectaron profundamente la evolución del pensamiento griego.

En primer término, ya me he referido a la expansión de la educación relacionada con el movimiento sofistico. Mientras la educación griega tradicional se reducía a la gramática, la música y la poesía, los sofistas estaban capacitados para disertar sobre cualquier tema ante quien les pagara por su enseñanza; en segundo lugar., y según la famosa frase de Cicerón *(Cuestiones Tusculanas, V, 4,10)*, Sócrates "hizo descender a la filosofía del cielo".

Mientras los filósofos anteriores atendieron más a la física y la cosmología que a la ética, ocurrió lo contrario no solo con el mismo Sócrates, sino con muchos sofistas. En tercer término, Atenas se transformó en el principal centro intelectual de Grecia. La mayoría de los filósofos precedentes vivieron y trabajaron en Jonia o en la Magna Grecia; a partir de la generación de Sócrates en adelante, cada vez más, los pensadores importantes nacen en Atenas o pasan por allí una parte considerable de su vida, y en el siglo IV, este desarrollo se acentúa cuando Platón, primero y luego Aristóteles fundan escuelas: la Academia y el Liceo, que atraen a los filósofos y científicos de toda Grecia.

Acertadamente se considera que Sócrates mismo señala un punto de inflexión en el pensamiento griego, pero su importancia y la de los sofistas como Protágoras se sitúan en el campo de filosofía moral más que en el científico. Como discípulo de Sócrates, Platón compartió el apasionado interés de su maestro por los problemas morales, pero, a diferencia de éste, fue también una figura de gran importancia en la evolución de la ciencia griega, no simplemente por haber sido el fundador de la Academia (a la que estuvieron vinculados en un momento dado muchos de los más brillantes científicos del siglo IV, aun cuando la intención de Platón, en principio, fue la formación se filósofos políticos), sino también y particularmente por sus opiniones sobre los fundamentos y objetivos de la investigación científica.

La importancia de Platón en nuestros estudios reside menos en las teorías científicas que formuló que en lo que podríamos llamar su filosofía de la ciencia, y de este aspecto nos ocuparemos principalmente en el presente capitulo. Por lo general, el punto de vista adoptando con respecto a esta faceta de su pensamiento es, no obstante, exagerado. Frecuentemente se lo ha representado como un archienemigo de la ciencia. La filosofía basada en la teoría de las formas fue, se argumenta, completamente opuesta a la ciencia e implicó un importante obstáculo para su desarrollo, y ciertos pasajes de *La República* y el *Timeo,* particularmente, se citan con frecuencia para demostrar cuán hostil fue a las disciplinas específicamente científicas. Para determinar el grado de veracidad de este punto de vista debemos remitirnos, en primer término, a la interpretación de algunos textos controvertidos de *La Republica.*

En el libro VII, Sócrates describe la educación de los reyes-filósofos, guardianes del Estado ideal, y considera sucesivamente el papel de la aritmética, de la geometría plana y del espacio y de la astronomía y acústica en la educación superior. Sus observaciones acerca de la astronomía son particularmente provocativas. Cuando por primera vez señala que la astronomía debería ser uno de sus estudios propedéuticos, induce a Glaucón a interpretarlo erróneamente en dos sentidos: primero, al suponer que recomienda el estudio de la Astronomía en razón de su utilidad.

> La habilidad para determinar las estaciones los meses y los años es útil no sólo a la agricultura y a la navegación, sino también al arte militar.

Pero Sócrates señala:

> Me divierte comprobar como pareces temer que el vulgo crea que recomiendas estudios inútiles.

Aunque el segundo intento de justificación de la astronomía, por parte de Glaucón, no es mejor que el anterior:

> En lugar de la trivial recomendación de la astronomía por la cual me has censurado, la alabaré ahora según tu estilo, pues pienso que es evidente para todos que su estudio, por

Formulando la sencilla y nada objetable observación de que dichos diagramas son necesariamente imprecisos; es imprescindible una regla para determinar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados más cortos miden tres y cuatro pulgadas, respectivamente. Pero dicho pasaje pude también interpretarse como el anunciado de una tesis mucho más avanzada: que el examen de dichos dibujos es completamente inútil. En este y otros pasajes parece existir una asimilación o confusión de dos ideas, cuya diferencia debería haberse destacado: la cierta y obvia afirmación de que no es posible observar las trayectorias matemáticas calculables de los cuerpos celestes como tales, y la discutible tesis de que la observación de dichos cuerpos es totalmente inútil. Platón, evidentemente, reconoció que su astronomía ideal implicaba una desviación radical del método de estudio de la astronomía vigente en sus días, pero invocando esta nueva astronomía se expresa como si considerarse necesario no sólo, distinguirla de la astronomía observacional, sino también menospreciar a esta última.

Objeciones similares pueden formularse con respecto a su explicación de la acústica; también allí, al defenderse la matematización de la ciencia, nuevamente arguye, con menor justificación aún que en el caso de la astronomía, contra los métodos basados en la observación, a los que en un punto dado (531ª) considera una tarea inútil.

La obra principal que debemos considerar, además de La República, para valorar la posición de Platón en la evolución de la ciencia griega, es el Timeo. Este incluye una detallada cosmología descrita como un *eikos myhos o un eikos logos* y nuestro primer problema es el de su significado. Sería erróneo equipar es te relato con lo que podríamos calificar de mito. Es cierto que en muchos pormenores, particularmente los relacionados con la obra del Artífice *(demiourgo),* son simbólicos y no deben interpretarse literalmente. Ni supondremos que el orden en que se describe la creación de las diferentes cosas concuerda con la secuencia histórica de dichos eventos. No obstante, la cosmología, más que un mito o ficción, es un relato o historia probable.

Platón nos deja pocas dudas acerca de sus intenciones. En 27d y siguientes, el principal interlocutor del diálogo, Timeo, al que debe considerarse como un portavoz del mismo Platón, explica de qué clase será su relato. Primero distingue entre las formas eternamente existentes y el mundo cambiante del acontecer; las primeras son los modelos y el segundo la copia, y seguidamente discierne los distintos tipos de descripción adecuados a cada una. Exige que los enunciados acerca de la realidad invariable, las Formas, sean irrefutables, por lo menos hasta donde sea posible; luego afirma acerca del mundo del acontecer:

Si es nuestra exposición sobre diversas cuestiones…

Somos capaces de explicar en forma perfectamente

Exacta y consistente, no nos sorprendamos: mas

Bien deberíamos sentirnos satisfechos si nuestras

Explicaciones no inferiores a otras en probabilidad (29c)

La cosmología del *Timeo* no es una interpretación rigurosa. En realidad, Platón cree que la naturaleza del tema excluye esta posibilidad. Por otra parte, afirma que es la *mejor explicación posible,* dando que la misma se refiere al mundo del acontecer.

PAGINA 116 Y 117

Cada cuerpo pueden combinarse de diferente manera para dar origen a distinto a “isotopos” de dicho cuerpo, como por ejemplo, los triángulos rectángulos isósceles pueden disponerse no sólo en grupos de cuatro, sino también de dos o de otras potencias de dos, para formar cubos de diversos tamaños correspondientes a las distintas formas del cuerpo simple tierra (véase el diagrama 3)

¿Puede compararse la teoría de Platón con sus principales rivales, la de Empédocles y la de los atomistas? En primer lugar, es más económica que la de Empédocles, que requiere cuatro tipos distintos de materia, y al admitir que se producen cambios ente el fuego, el aire

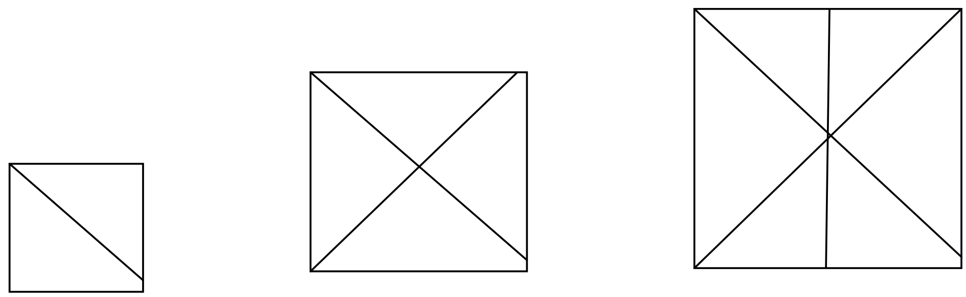


DIAGRAMA 3 muestra la disposición de dos, cuatro y ocho triángulos rectángulos isósceles para formar cuadrados de tres clases correspondientes a tres “grados” de la Tierra

Y el agua, por lo menos elude ciertas objeciones empíricas a las que aquella está expuesta.

Como hemos visto, Empédocles no permitía la transformación de una raíz en otra, a pesar de ser un hecho de la experiencia común; por ejemplo, que el agua, al ser calentada hasta el punto de ebullición, ser transforma en vapor es decir, según la concepción griega, en “aire” y que este aire puede recondensarse convirtiéndose nuevamente en agua.

Las diferencias entre la teoría de Platón y las de los atomistas son también instructivas.

Les debe a ellos la idea de que las variedades de los objetos sensibles pueden reducirse a las diferencias en forma y tamaño de las partículas, que son homogéneas en cuanto a su sustancia. Pero, mientras aquéllos consideraban sólidas a dichas partículas básicas materiales, Platón enseñaba que los sólidos primarios estaban a su vez compuestos por superficies planas formadas por dos tipos de triángulos básicos. En segundo lugar, mientras los atomistas postularon la existencia de un vacío, y evidentemente sabían que en un movimiento pleno éste es posible, dado que el mismo es 1) instantáneo y II) cíclico de acuerdo con su teoría del “impulso circular”, el movimiento de A empuja a B, que a su vez empuja a C y asi sucesivamente, y Z, el último término de la serie, empuja a A. La tercera y más importante: mientras los atomistas aparentemente postularon una variedad indefinida de formas y dimensiones atómicas y describieron las interacciones entre las mismas sólo en sus términos más generales, Platón intento una explicación concreta y específica de las formas de los cuerpos primarios, así como de las transformaciones que tienen lugar entre ellos. En 56d y siguientes formulas algunas sugerencias específicas acerca de, por ejemplo, cómo el agua puede descomponerse en fuego y aire. Así el icosaedro del agua se descompone en dos octaedros de aire y un tetraedro de fuego. El sólido original de veinte caras se divide en dos sólidos de ocho caras cada uno y uno de cuatro.

Muchos detalles de la teoría de Platón permanecen en la oscuridad. ¿Cómo pueden desintegrarse los cuerpos primarios y recombinarse formando otras figuras? ¿Cómo pueden describirse los sólidos primarios como cuerpos de

Señala repetidamente que no existe ninguna explicación posible del mundo del devenir y que ninguna formulación de este tipo es susceptible de ser demostrada, y en esto, podríamos decir, es mucho menos dogmático que la mayoría de los cosmólogos griegos anteriores, y, por cierto, que la mayoría de los posteriores. La razón de ello no era él que creyera que el juicio debería reservarse hasta que se reunieran más pruebas, sino más bien sustentaba en principio de que ninguna interpretación del mundo del acontecer podía ser cierta bajo ninguna circunstancia. El efecto de su cosmología no dogmática no fue indudablemente el de alentar más investigaciones empíricas, sino todo lo contrario. Así como en *La República* se subestima el papel de la observación en los estudios propedéuticos de los guardianes, también el *Timeo* manifiesta una impaciencia similar hacia los que esperan resolver los problemas de la física con métodos empíricos.

Pero si la primera preocupación del filósofo es el mundo de las Formas, ¿qué sentido tiene el estudio del mundo del acontecer? Un pasaje del *Timeo* indica que Platón consideraba este estudio más bien como un esparcimiento.

Cuando dejamos a un lado la discusión de las cosas externas podemos solazarnos con probables explicaciones del devenir, por lo que éste “es un apacible e inteligente pasatiempo” (59cd), aun cuando este “entretenimiento” no se lleve a cabo con frivolidad. En 68e y siguientes, se aducen buenas razones para el estudio de ambas causas, la llamada “divina” y la “necesaria”. Deberían buscarse las divinas en todas las cosas con objeto de lograr una vida tan feliz como nuestra naturaleza lo permita, pero también las causas necesarias, por consideración a lo divino, reconociendo que sin ellas es imposible aprehender, solamente, por sí mismas, las cosas divinas que constituyen el objeto de nuestro estudio.

La justificación última del estudio del mundo de la naturaleza es de carácter ético, pero aún podemos ser más precisos. Si nos preguntamos por qué Platón se embarcó en una exposición detallada del mundo del acontecer, la naturaleza de su cosmología proporciona la clave principal de la respuesta a esta pregunta. A lo largo de toda su relación enfatiza el papel de un agente inteligente e intencional en el universo. Esta teología-la creencia en la existencia de una causa final en la naturaleza- de lo omnipresente se menciona frecuentemente como uno de los rasgos no científicos o anticientíficos de la física de Platón, y en verdad, muchas de sus ideas, por ejemplo, sorprenden por lo artificiosas. Así, en un pasaje (70c) los pulmones se describen como paragolpes para mitigar los latidos del corazón, y en otro lugar (72c) se compara el bazo, cuya función se dice que es la de mantener al hígado libre de impurezas, con un lienzo colocado junto a un espejo para mantenerlo limpio. Sin embargo, paradójicamente, es en razón de las implicancias teológicas de su exposición que podemos estar seguros de que su cosmología fue concebida seriamente. El principal motivo de Platón para hacer lo que llamaríamos ciencia natural fue revelar las operaciones de la razón en el universo. Compara frecuentemente, en forma desfavorable, el mundo del devenir con las Formas, pero, sin embargo, afirma repetidamente que es el mejor posible de los mundos creados.

Es la más bella de las cosas que devienen (29ª); su creador es bueno (30ab); ha sido construido según el modelo más perfecto y es tan posible como éste

(30d, 39e). Es como lo expresa en la última frase del *Timeo*, “un dios perceptible, el más grande y mejor, el más hermoso y perfecto”.

Los tres principales elementos del esquema cosmológico e Platón son, entonces: primero, las Formas; segundo, lo particular, modelado a imagen de éstas; y tercero, el agente constructor del modelo: el Artífice, el cual no crea el mundo en el sentido de quien crea la materia que lo constituye, más bien se lo concibe como tomando la materia ya existente e imponiendo orden a los desordenados movimientos.

No es omnipotente, pero alcanza los mejores resultados posibles. Platón describe, por una parte, las obras de la Razón, y por otra, lo que deviene “por necesidad”, los efectos de la llamada “causa errante”. No es éste un principio activo que se opone al Artífice, como la fuerza del mal, sino más bien la resistencia pasiva que la materia desordenada opone a los designios de aquél. El papel de la necesidad se ilustra mejor por medio de un ejemplo: la creación de la cabeza. Los huesos y carne densos nos dice (74e), contribuyen a la insensibilidad.

Así para procurar una vida noble e inteligente al hombre, el dios-artífice decidió dejar su cerebro cubierto solamente por una delgada capa de hueso, aunque por este motivo la vida de ese hombre sea más corta de lo que habría sido si su cabeza hubiera estado protegida por una cubierta más gruesa de carne y hueso.

Evidentemente, una larga vida y una inteligencia sutil no se logran *simultáneamente*: por consiguiente, en este caso la razón sacrifica lo inferior en aras de una finalidad superior.

El ejemplo es extraño, pero ilustra cómo los resultados alcanzados por la razón no son los mejores en sentido absoluto, sino los mejores dadas las limitaciones que la naturaleza ha impuesto al material con que aquélla debe trabajar.

La cosmología del *Timeo* está encuadrada en una compleja y característica armazón filosófica. La reputación de Platón evidencia que el *Timeo* llegó a ser un documento que ejerció influencia, pero ahora debemos intentar una evaluación de las teorías específicas y explicaciones que anticipa. El primer problema que debemos considerar es, por cierto, en qué medida son éstas las propias teorías de Platón

Es evidente que tomó mucho de sus predecesores y contemporáneos, aun cuando no nombra ninguna de sus fuentes. Podemos identificar deudas específicas con Empédocles, con los pitagóricos y los atomistas, y las partes dedicadas a la biología deben mucho a los autores hipocráticos y a hombres como Alemeón, Diógenes de Apolonia y Filistón de Locri. Pero sería erróneo concluir, como lo han hecho algunos comentaristas, que las ciencias naturales del *Timeo* son simplemente una colección de ideas ajenas. Cualquier científico puede, en cierta medida, construir basándose en trabajos anteriores, y a pesar de que la deuda de Platón con los teóricos que lo precedieron es particularmente grande, no se limita simplemente a copiar o repetir sus doctrinas, sino que las modifica y adapta introduciendo en ocasiones importantes ideas, al parecer originales.

Su contribución más notable a la física de su tiempo la constituye su doctrina de los últimos componentes de la materia. En el *Timeo*

Alguna clase, cuando son entes geométricos construidos con superficies planas? Existen tambíen muchos elementos fantásticos y arbitrarios en la doctrina de Plantón. Así, luego de asignar cuatro de los cinco sólidos regulares a los cuatro cuerpos simples y no hallando ninguna otra función para el quinto, el dodecaendro, lo identificó con los doce signos del zodíaco, y nuevamente, cuando comprobamos que la tierra está excluida de las transformaciones que afectan a los demás sólidos primarios, la razón de ello no se funda en ningún dato empírico real o supuesto, sino que es una consecuencia directa de la geometría de la teoría, dado que se la ha identificado con el cubo. Mas lo que Plantón hizo y los mismosatomistas nunca intentaron, fue proponer una explicación geométrica precisa de las formas de los cuerpos primarios y reducir los cambios que tienen lugar entre ellos a fórmulas matemáticas. Muchas de sus ideas, como las de Leucipo y Demócrito, se basan aún en toscas analogías físicas - como, por ejemplo, la identificación del fuego con el tetraedo y de la tierra con el cubo -, pero intentó llevar la geometrización del atomismo mucho más allá de lo que lo hicieron los mismos atomistas.

El *Trimeo* es rico en detalladas doctrinas físicas y biológicas, entre las que se incluye, por ejemplo, una ingeniosa explicación acerca de las causas de las enfermedades, que, aunque están influidas por el aporte de autores anteriores, distan mucho de carecer por ompleto de originalidad. No obstante, como ya lo hemos advertido, a la larga no fueron las teorías y explicaciones específicas del *Timeo* las que probaron ser de mayor influencia, tanto como las concepciones filosóficas que caracterizan la posición general de Plantón con relación a la investigación de la naturaleza.

Las dos principales doctrinas que señalan el punto de vista de Plantón son su teleología y su evaluación relativa de la razón y la sensación, y cada una de ellas presenta a su vez aspectos positivos y negativos. En primer lugar, una de las consecuencias desafortunadas de su teleogía, podríamos afirmar, es que la excesiva atención que dedica a diferentes problemas refleja su noción de la extensión en la cual los fenómenos en cuestión manifiestan orden y racionalidad. Así, mientras dedica una larga exposición a la astronomía (véase pág. 130 y ss.), el *Timeo* demuestra sólo un interés pasajero en lo que describiríamos como problemas de la mecánica. Igualmente, mientras en sus pasajes sobre anatomía humana se formulan algunos elaborados argumentos acerca de las funciones que cumplen diversos órganos del cuerpo, se ignoran casi por completo la zoología y la botánica; aparte del hombre, hay escasas menciones a las demás especies animales hasta el mismo final del diálogo, donde se refiere muy brevemente a sus diferentes clases, principalmente para señalar que se han originado de seres humanos degenerados.

Sin embargo, la teleología de Plantón suministra el tema principal tanto a su cosmología como a sus ciencias naturales. Los fenómenos naturales ponen en evidencia un orden, de ahí el valor de su estudio. Además, mientras que el estudio de un designio en la naturaleza es el principal objeto, Plantón afirma que deben buscarse no sólo las causas “divinas”, sino también las “necesarias”, las últimas en razón de las primeras. De modo que emprende una elaborada y mucho mas detallada explicación de los fenómenos naturales de la que cabría esperar dada su estimación de la importancia relativa de ambos mundos, el del ser y el del devenir. No es la primera vez en la historia de la ciencia griega, y estaba muy lejos de ser la última, que una investigación realizada originalmente por lo que podríamos llamar, en términos generales, motivos éticos, condujera no sólo a la proposición de imágenes del cosmos moral y estéticamente satisfactorias, sino también a cierto desarrollo en el campo de las teorías físicas y biológicas.

En segundo lugar, puede también afirmarse que su preferencia por la razón sobre la sensación y observación tuvo resultados benéficos e infortunados, desde el punto de vista de la búsqueda e indagación de lo concerniente a la naturaleza. Sus métodos de investigación de los fenómenos naturales pueden, en ciertos aspectos, compararse desfavorablemente con los de algunos de sus contemporáneos más empíricos, particularmente entre los tratadistas médios. No era propio de la mortalidad de Plantón la realización de investigaciones empíricas minuciosas en la relación con sus descripciones de las causas y, a veces, por ejemplo, en anatomía, hubiera ganado mucho haciéndolas. Aunque sus afirmaciones más provocativas denigrado el empleo de los sentidos deben interpretarse como meras indicaciones de que la observación es inderior al pensamiento abstracto y no como una aserveración de que aquélla carece por completo de valor, su efecto en algunos círculos fue, no obstante, desalentador para las investigaciones empíricas.

Sin embargo, tampoco debemos ignorar los aspectos positivos de la posición de Plantón tiene razón al insitir en que el objeto de la búsqueda del científico es el descubrimiento de las leyes abstractas subyacentes en los hechos empíricos, Su creencia en la estrcutura matemática del universo – tomada y desarrollada a partir de la de los pitagóricos – y su concepción de una astronomía y una física matemáticas e ideales, constituyen sus dos ideas más importantes y fructíferas, y el hecho de que ambas nos resulten hoy evidentes no disminuye, sino más bien engrandece, la obra notable de Plantón, su más autorizado representante en la antigüedad.

Anexo 5

ELEMENTOS

EUCLIDES

TEOREMAS

TEOREMA 1.1

“Dada una recta delimitada construir sobre ella un triángulo equilátero”

La recta delimitada dada sea AB. (Hip)

Hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero. (Tes)

DEMOSTRACIÓN

Con centro en A y con el radio AB descríbase un circulo el BGD,

Y de nuevo con centro en B y con el radio BA descríbase el circulo AGE (PIII)

Y desde el punto G, en que se cortan uno a otro tales círculos, trácense hasta los puntos A, B las rectas GA y GB. (PI)

Y puesto que el punto A es centro del circulo GDB, la recta AG es igual a la AB

Y de nuevo, puesto que el punto B es centro del circulo GAE, la recta BG es igual a la BA (DI15)

Pero se demostró también que la GA es igual a la AB, (1.41)

Por tanto cada una de las rectas GA y GB es igual a AB (1.41, 1.42)

Mas cosas iguales a una y la misma son también iguales entre si (N 1)

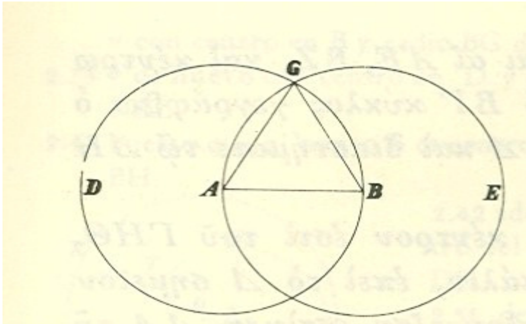
Luego la GA será igual a la GB (N 1 y II,R)

Por tanto: las tres rectas GA, BG, AB son iguales entre si. (N 1, II, 1.41, 1.54, 1.42)

Según esto, pues, el triangulo ABG es equilátero (D I 20)

Y esta además construido sobre la recta delimitada dada AB.

Que es lo que se había de hacer.



TEOREMA 1.2

"*En un punto dado construir una recta igual a otra recta dada*"

Sea A el punto dado, BG la recta dada. (Hip)

Por el punto A hay que construir una recta igual a la recta dada BG (Tes)

DEMOSTRACIÓN

Trácese pues, desde el punto A hasta el punto B la recta AB (PI)

Y constrúyase sobre esta recta el triángulo equilátero DAB (T11)

Y prolónguense sobre las rectas DA, DB las rectas AE, BZ (PII)

Y con centro en B y radio BG descríbase el circulo GHT (PIII)

Y de nuevo con centro en D y con radio DH descríbase el circulo HKL

Puesto que el punto B es centro GHT, la recta BG es igual a la BH (D115)

Además puesto que el punto D es centro del círculo HKL, es igual la DL a la DH (D1.15)

De las cuales la DA es igual a la DB (2.32)

Por tanto la recta restante AL es igual a la restante BH (NIII)

Empero quedo demostrado que la BG es igual a la BH (2.41)

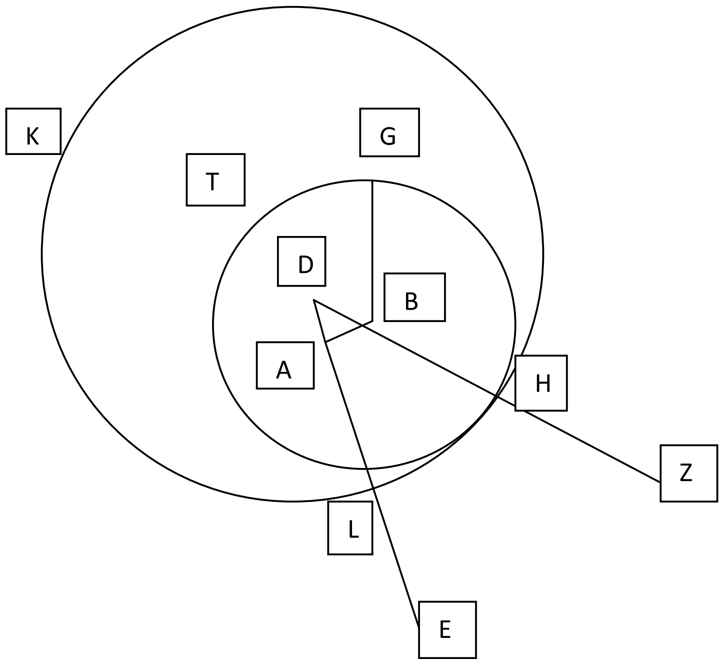
Por tanto cada una de las rectas AL, BG son iguales a la BH (2.52)

Más cosas iguales a una y la misma cosa son iguales entre sí (NI, 2.54)

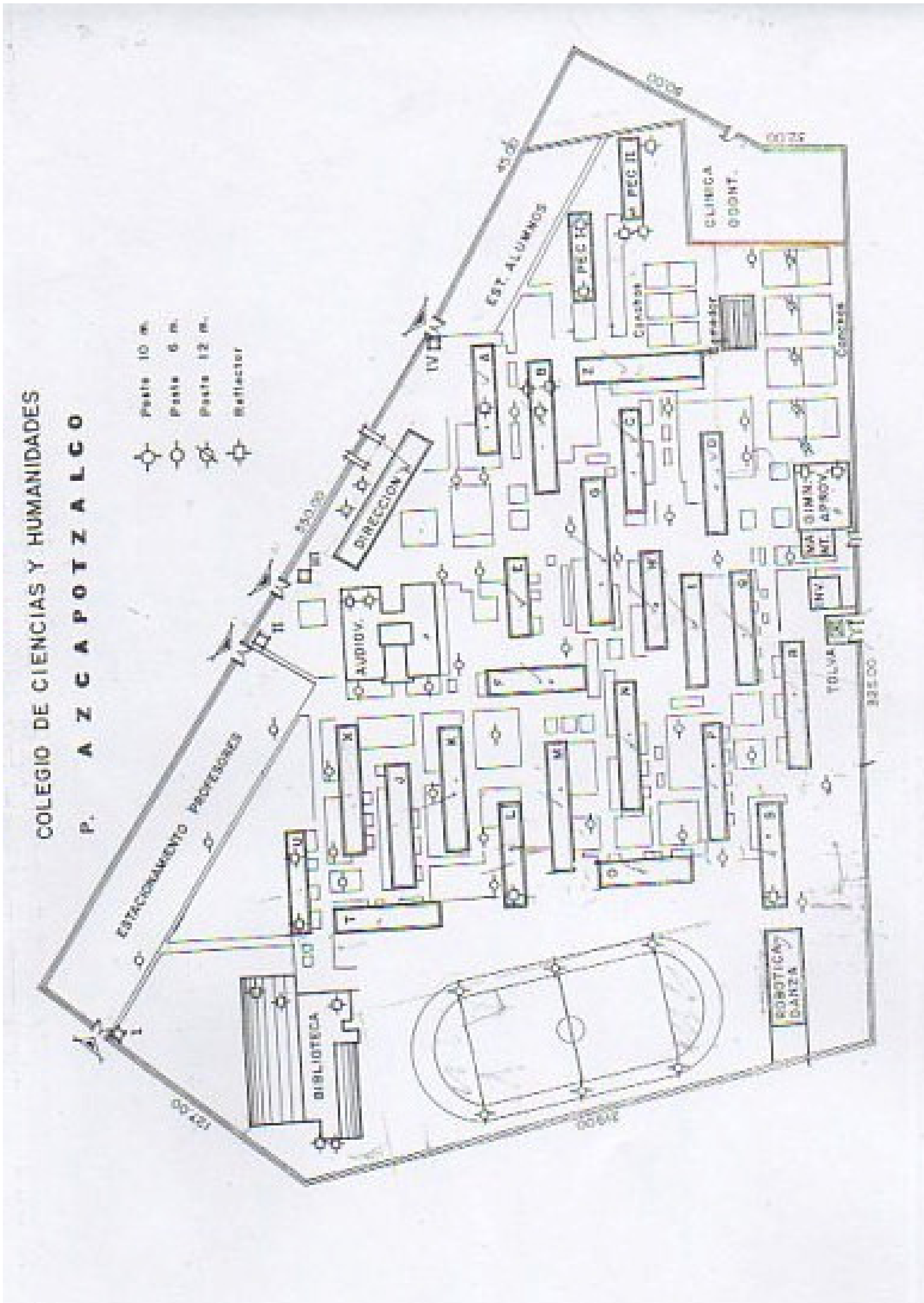
Luego también la AL es igual a BG (NI, 2.54)

Según esto, pues, en el punto A se halla una recta, la AL igual a la recta dada BG.

Que es lo que se había de hacer.



Anexo 6


COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
P. AZCAPOTZALCO
Poste 10 m.
Poste 6 m.
Poste 12 m.
Reflector
ESTACIONAMIENTO PROFESORES
EST. ALUMNOS
DIRECCION
AUDIOV.
BIBLIOTECA
CLINICA ODONT.
PEC I
PEC II
TOLVA
ROBOTICA DANZA

Anexo 7

Lo visual y lo deductivo en las matemáticas

Dr. Carlos Torres Alcaraz

Pruebas visuales

En cierta ocasión Juan Jose Rivaud presento el siguiente mosaico al referirse al origen de la demostración pitagórica del teorema de la suma de los ángulos de un triangulo. Una mirada atenta a la figura será suficiente para descubrir un interesante patrón geométrico:

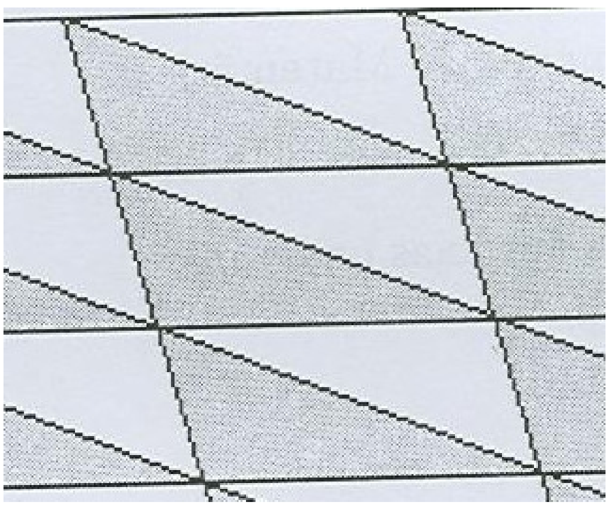
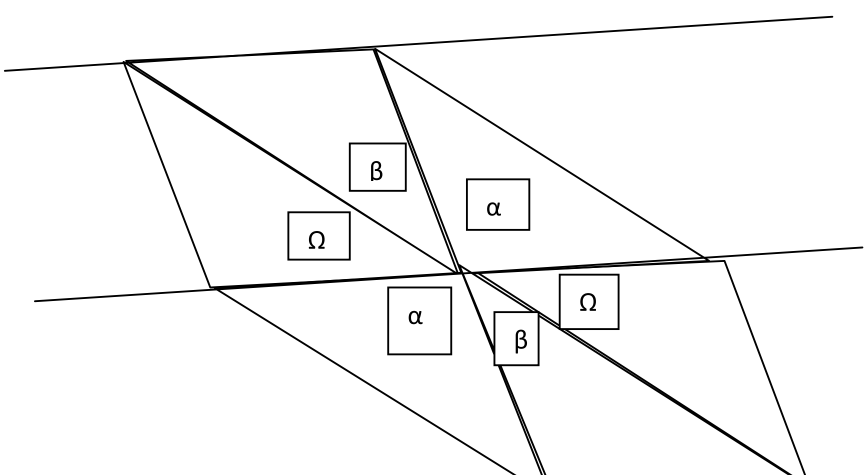


Fig.1

El mosaico se compone de múltiples copias del mismo triangulo. En cada vértice, cada ángulo del triangulo concurre dos veces, una como parte del triangulo de color y otra como parte del triangulo en blanco. Si denotamos los ángulos con letras, el teorema de la suma de los ángulos se hace aun mas evidente:

Fig. 2



Tenemos que 2 (α, β, Ω) = 360°. Por tanto, α, β, Ω = 180°. Lo sorprendente, como advierte Rivaud, es que la demostración atribuida a los pitagóricos resulta de eliminar en la figura anterior algunos elementos innecesarios.

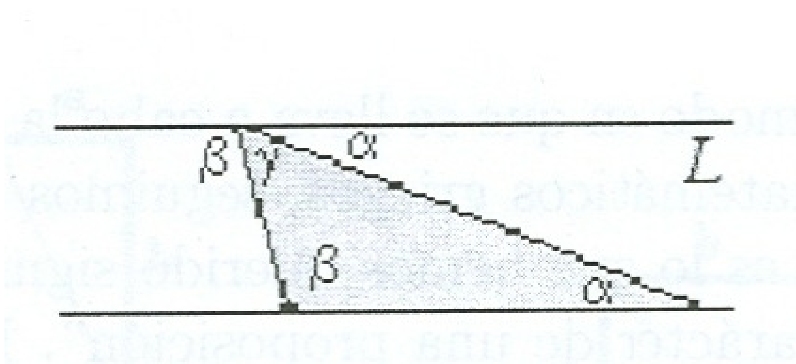


Fig.3

Lo anterior proyecta alguna luz sobre la naturaleza del conocimiento matemático. Lo que tenemos en la Fig. 1 no es en si una configuración geométrica. Un mosaico es un mosaico, no una proposición ni la prueba de una proposición. Para convertir el mosaico (o lo que hay en él) en un objeto matemático se requiere de la participación activa del observador (o si se quiere, de la mente). Es él quien lo convierte en una configuración geométrica; es él quien advierte las relaciones existentes entre los distintos elementos de la configuración; es él quien aplica las nociones de punto, línea, ángulo, triángulo, paralelismo, etc, a lo que le es dado en la intuición. La prueba visual reclama además ciertos experimentos mentales, como los requeridos en nuestro ejemplo para confirmar que se trata de múltiples copias de un mismo triángulo. Es entonces que la figura adquiere el carácter de una proposición.

Es indiscutible que la evidencia intuitiva no es una recepción pasiva de datos. Es más bien una elaboración mental, un modo activo de mirar hacia las figuras. Es un hecho ue los atributos aprehendidos a través de la evidencia intuitiva los consideramos como residentes en el objeto. Por ejemplo, un enunciado aritmético como $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ señala una relación entre objetos, en este caso configuraciones espaciales de puntos, como a continuación se muestra:

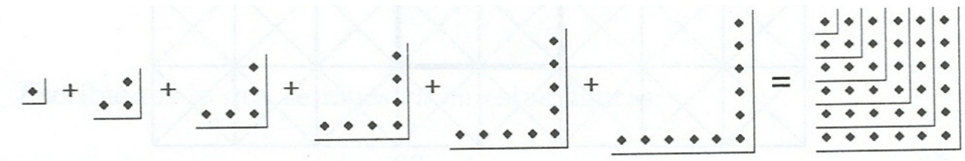
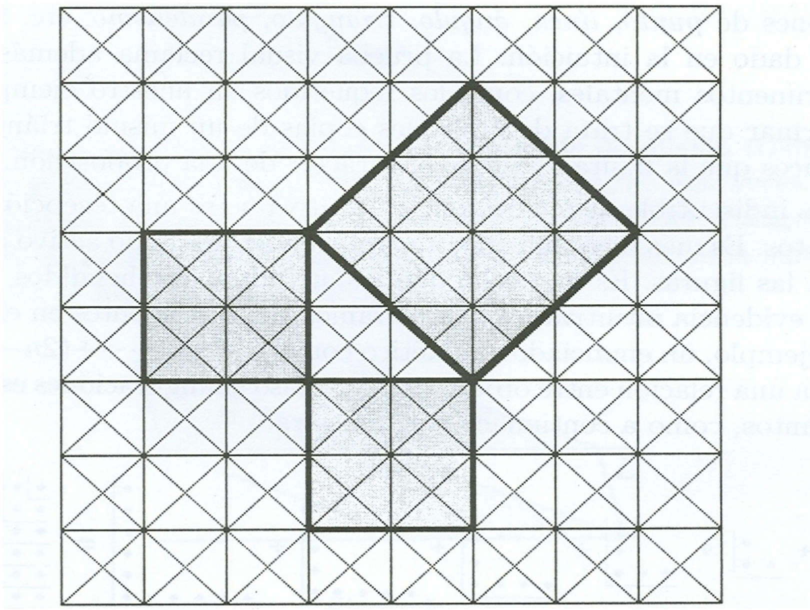


Fig. 4

En este caso tenemos un juego que conducimos mediante experimentos mentales con ciertas configuraciones. En él, la naturaleza especifica de los arreglos no importa mucho; lo principal son los patrones que podemos formar. Su fuerza radica en la claridad con que los hechos se manifiestan, en lo que de golpe se muestra. Hay ahí una verdad objetiva, independiente del sujeto. No se trata de una afirmación metafísica, sino la constatación del modo en que se lleva a cabo la práctica matemática. Cual si fuéramos matemáticos griegos, seguimos extrayendo la verdad de las figuras. Esto es lo que hemos querido significar al decir que “la figura adquiere el carácter de una proposición”. Es tarea de la epistemología de las matemáticas explicar esta noción de evidencia.

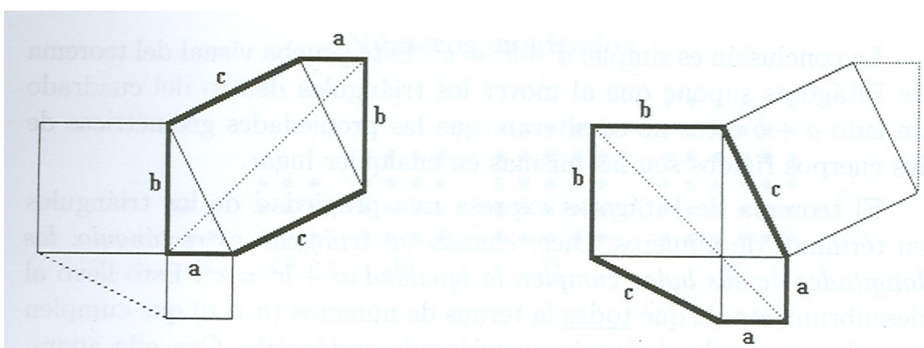
Mostrar y demostrar

Desde siempre, la observación y la evidencia han sido fuentes primarias del conocimiento matemático. En la geometría son múltiples los casos en los que la “verdad” se descubre por medio de la inspección directa de figuras, a través de la evidencia de los sentidos. Veamos, por ejemplo, el teorema de Pitágoras (el cual, por cierto, se especula que así fue descubierto):



Mosaico Árabe

La siguiente es una prueba visual del teorema:



Leonardo da Vinci (1452-1519)

Un juego muy frecuente en matemáticas, ya puesta en práctica en el ejemplo de Rivaud, consiste en combinar la escritura con la visualización, es decir, en “escribir” lo que se ve. Para ello se utilizan números y letras en relación a las figuras:

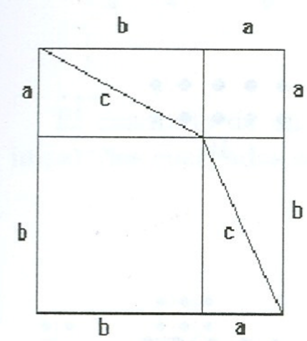


Fig. 5

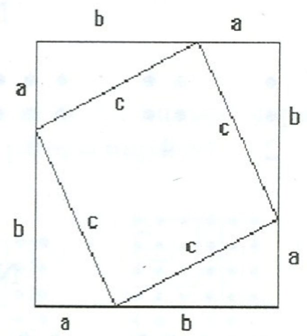


Fig. 6

Escribamos lo que se muestra en estas figuras:

Figura 5

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 4 (ab) / 2$$

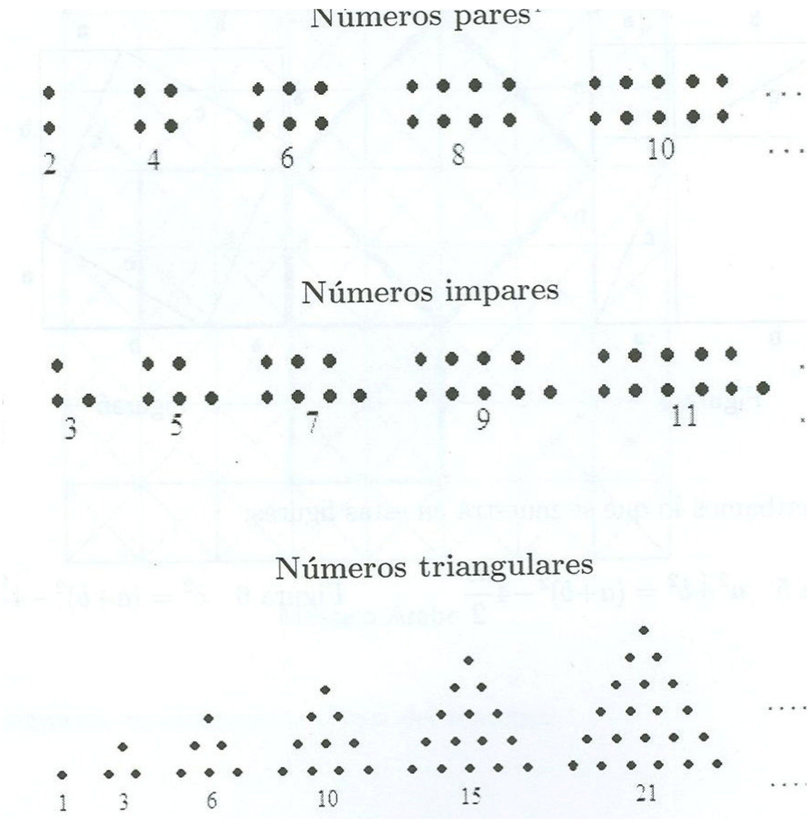
Figura 6

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 4 (ab) / 2$$

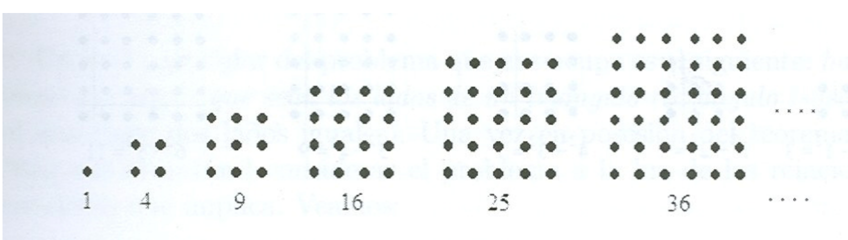
La conclusión es simple $a^2 + b^2 = c^2$. Esta prueba visual del teorema de Pitágoras supone que al mover los triángulos dentro del cuadrado de lado a + b éstos no se alteran, que las propiedades geométricas de los cuerpos rígidos son las mismas en cualquier lugar.

El teorema de Pitágoras expresa una propiedad de los triángulos en términos de números. Dice: *cuando un triangulo es rectángulo, las longitudes de sus lados cumplen la igualdad* $a^2 + b^2 = c^2$. Esto llevó al descubrimiento de que todas las ternas de números (*a, b, c*) que cumplen tal relación son los lados de un triángulo rectángulo. Con ello apareció un nuevo problema: el de hallar ternas *pitagóricas*. Como veremos este problema se puede resolver con base en ciertos conocimientos que podemos adquirir observando configuraciones que representan números, un artificio muy común entre los griegos.

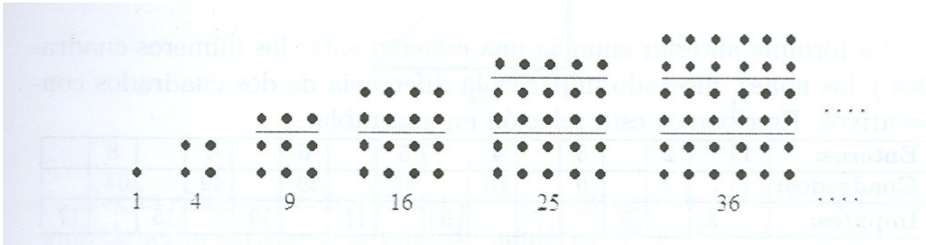
Un número figurado es un número que se puede representar en forma geométrica por medio de un arreglo de puntos. La noción queda expuesta en las siguientes figuras:



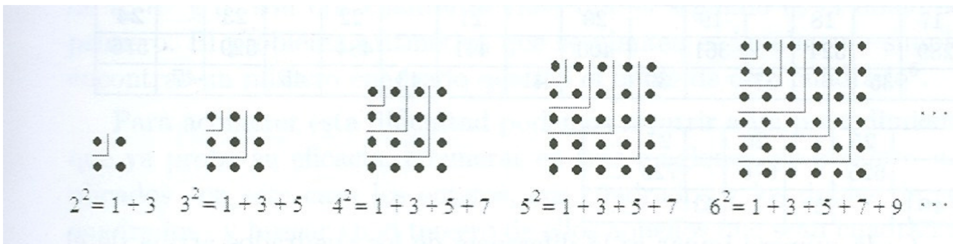
Números cuadrados:



Muchas propiedades de los números saltan a la vista en esta representación. Veamos:

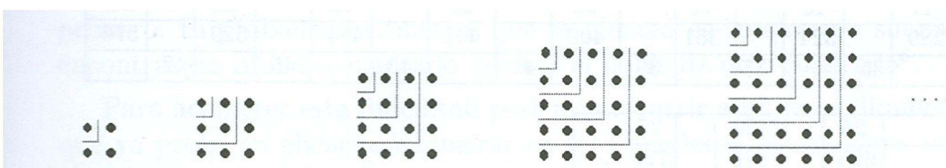


El cuadrado de un número par es par; el de un número impar es impar (los cuadrados son como sus raíces, pares o impares).



Todo número cuadrado es la suma de los números impares menores que el doble de su lado. Los cuadrados crecen como los impares:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1); \; (n + 1)^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$$



$2^2 - 1^2 = 3$ $\quad 3^2 - 2^2 = 5$ $\quad 4^2 - 3^2 = 7$ $\quad 5^2 - 4^2 = 9$ $\quad 6^2 - 5^2 = 11$

La diferencia entre dos cuadrados consecutivos es un número impar:

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1, \text{ o bien, } (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

La formula anterior enuncia una relación entre los números cuadrados y los nones, dice todo impar es la diferencia de dos cuadrados consecutivos. Escribamos esta relación en una tabla:

Enteros	1		2		3		4		5		6		7		8	
Cuadrados	1		4		9		16		25		36		49		64	
Impares		3		5		7		**9**		11		13		15		17

9		10		11		12		13		14		15		16	
81		100		121		144		169		196		225		256	

	19		21		23		**25**		27		29		31		33

17		18		19	. . .
289		324		361	. . .
	35		37		39…

Cada número impar es la diferencia de los cuadrados arriba de él. Para encontrar dos cuadrados cuya suma es un cuadrado basta con tomar del último renglón de la tabla aquellos nones que también son cuadrados. Así, por simple inspección, podemos hallar números enteros que sean los lados de un triangulo rectángulo. Por ejemplo, como 25 = 5^2 , el triángulo de lados 5,12, 13 es rectángulo y como 49 = 7^2 , el triángulo de lados 7, 24,25 también lo es. La regla es: cada número cuadrado e impar determina, junto con los cuadrados arriba de él, un triángulo rectángulo de lados enteros. El método, claro está, se apoya decididamente en un procedimiento visual

Anexo 8

Sección Aurea

Hacia 1850, Zeysig comprobó estadísticamente que el ombligo divide la altura del cuerpo humano en la proporción Aurea.

Arquitectos, escultores y pintores de todos los tiempos han utilizado la sección Aurea como método de composición de sus obras, al observar en ella la belleza una agradable impresión de armonía. Algunos ejemplos son el Partenón de Atenas, Las Hilanderas de Velázquez, La Sagrada Familia de Miguel Ángel y, más recientemente, en la obra del arquitecto francés Le Corbusier.

También aparece la Sección Aurea allá donde queramos buscarla dentro de la naturaleza: Asi, por ejemplo, en la forma y crecimiento de las plantas, en organismos marinos como la estrella de mar, etc.

Durante el Renacimiento diferentes artistas, como Leonardo da Vinci, estudiaron con profundidad las proporciones del cuerpo humano.

Anexo 9

CAPITULO XVIII

Que trata de nuestra vuelta al palacio del jeque Iezid.
Una reunión de poetas y letrados.
El homenaje al maharajá de Lahore.
La matemática en la India.
La hermosa leyenda sobre "la perla de Lilavati".
Los grandes letrados que los hindúes escribieron sobre las matemáticas.

Al día siguiente, a la primera hora de la sob, llego un egipcio con una carta de poeta Iezid a nuestra modesta hostería.

Aun es muy temprano para la clase, advirtió tranquilo Beremiz. Temo que mi paciente alumna no esté preparada.

El egipcio nos explico que el jeque, antes de la clase de Matemáticas, deseaba presentar el calculador persa a un grupo de amigos. Convenía, pues, llegar lo antes posible al palacio del poeta.

Esta vez, por precaución, nos acompañaron tres esclavos negros, fuertes y decididos, pues era muy posible que el terrible y envidioso Tara-Tir intentase asaltarnos en el camino para asesinar a Beremiz, en quien veía posiblemente un odioso rival.

Una hora después, sin que nada anormal sucediera, llegamos a la deslumbrante residencia del jeque Iezid. El siervo egipcio nos condujo a través de la interminable galería, hasta un rico salón azul adornado con frisos dorados.

La seguimos en silencio no sin cierta prevención mía por lo insólito de aquella llamada.

Allí se encontraba el padre de Telassim rodeado de varios letrados y poetas.

- ¡Salam Aleicum!
- ¡Massa al-quair!

- ¡Venda ezzaiac!

Cambiados los saludos, el dueño de la casa nos dirigió amistosas palabras y nos invitó a tomar asiento en aquella reunión.

Nos sentamos sobre mullidos cojines de seda, y una esclava negra de ojos vivos, nos trajo frutas, pasteles y agua de rosas.

Me di cuenta de que uno de los invitados, que parecía extranjero, llevaba un vestido de lujo excepcional.

Vestía una túnica de seda blanca de Génova, ceñida con un cinturón azul constelado de brillantes, colgaba un bello puñal con la empuñadura incrustada de lapislázuli y zafiros. Se cabria con un vistoso turbante de seda rosa sembrado de piedras preciosas y adornado con hilos negros. La mano, trigueña y fina. Estaba realzada por el brillo de los valiosos anillos que adornaban sus delgados dedos.

-Ilustre geómetra, dijo el jeque Iezid dirigiéndose al Calculador, bien sé que estarás sorprendido por la reunión que he organizado hoy en esta modestísima tienda. Me cabe, sin embargo, decir que esta reunión no tiene más finalidad que rendir homenaje a nuestro ilustre huésped, el príncipe Cluzir el din Mubarec Schá, señor de Lahore y Delhi.

Beremiz, con leve inclinación de cabeza hizo un saludo al gran maharajá de Lahore, que era el joven del cinturón adornado con brillantes.

Ya sabíamos, por las charlas habituales de los forasteros en la hostería, que el príncipe había dejado sus ricos dominios de la India para cumplir uno de los deberes del buen musulmán: hacer la peregrinación a La Meca, la Perla del Islam. Pocos días pasaría, pues, entre los muros de Bagdad. Muy pronto partiría con sus numerosos siervos y ayudantes hacia la Ciudad Santa.

-Deseamos, ¡Oh calculador!, prosiguió Iezid, que nos ayudes para poder aclarar una duda sugerida por el príncipe Cluzir Schá. ¿Cuál fue la contribución de los Hindúes al enriquecimiento de la Matemática? ¿Quiénes los principales geómetras que destacaron en la India por sus estudios e investigaciones?

-¡Jeque generoso! Respondió Beremiz. Siento que la tarea que acabáis de lanzar sobre mis hombros es de las que exigen erudición y serenidad. Erudición para conocer con todos los pormenores los hechos de la Historia de las Ciencias y serenidad para analizarlos y juzgarlos con elevación y discernimiento. Vuestros menores deseos ¡Oh jeque!, son sin embargo, ordenes para mí. Expondré, pues, en esta brillante reunión, como tímido homenaje al príncipe Cluzir Schá – a quien acabo de tener el honor de conocer -, las pequeñas nociones que aprendí en los libros sobre el desarrollo de la Matemática en el País del Ganges.

El hombre que Calculaba, empezó así:

-Nueve o diez siglos antes de Mahoma, vivió en la India un brahmán ilustre que se llamaba Apastamba. Con intención de ilustrar a los sacerdotes sobre los sistemas de construcción de altares y sobre la orientación de los templos, este sabio escribió una obra llamada "Suba Sutra" que contiene numerosas enseñanzas matemáticas. Es poco probable que esta obra pudiera recibir influencia de los pitagóricos, pues la geometría del sacerdote hindú no sigue el método de los investigadores griegos. Se encuentran sin embargo, en las páginas de "Suba Sutra" varios teoremas de matemáticas y pequeñas reglas sobre construcciones de figuras geométricas. Para enseñar la transformación conveniente de un altar, el sabio Apastamba propone la construcción de un triángulo rectángulo cuyos lados miden respectivamente 39, 36 y 15 pulgadas. Para la solución de este curioso problema aplicaba el brahmán un principio que era atribuido al griego Pitágoras:

El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, es equivalente a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Y volviéndose hacia el jeque Iezid, que escuchaba con la mayor atención, habló así:

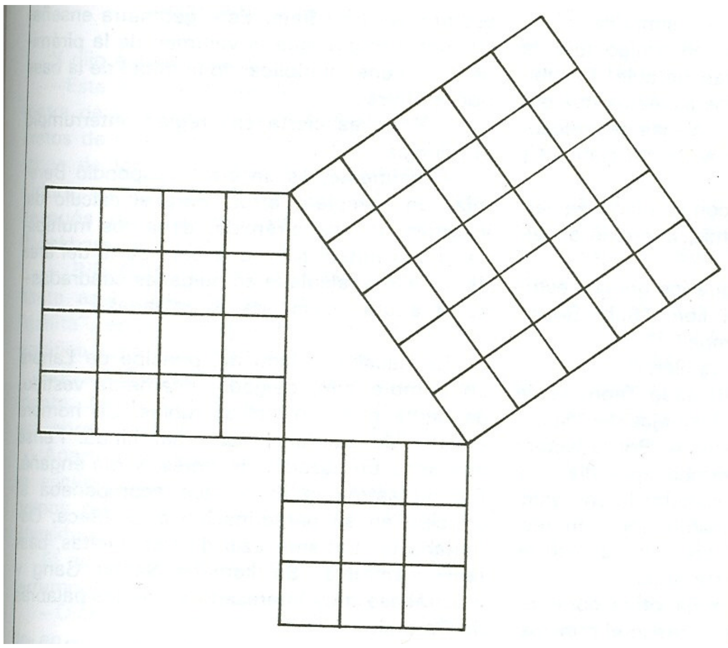
-Mejor sería explicar, por medio de figuras, esa proposición famosa que todos deben conocer.

El jeque Iezid alzó la mano e hizo una señal a sus auxiliares. Al cabo de un momento dos esclavos trajeron al salón una gran caja de arena. Sobre la superficie lisa podría Beremiz trazar figuras y esbozar cálculos y problemas a fin de aclarar sus problemas al príncipe Lahore.

-He aquí, explico Beremiz trazando en la arena las figuras con ayuda de una vara de bambú, un triángulo rectángulo. El lado mayor de éste se llamaba hipotenusa y los otros dos catetos.

Construyamos ahora, sobre cada uno de los lados de este triángulo, un cuadrado: uno sobre la hipotenusa, otro sobre el primer cateto y el tercero sobre el segundo cateto. Será fácil probar que el cuadrado mayor, construido sobre la hipotenusa, tiene una área exactamente igual a la suma de las áreas de los otros dos cuadrados construidos sobre los catetos.

Queda pues, demostrado la veracidad del principio enunciado de Pitágoras.



Los lados del triángulo miden respectivamente tres, cuatro y cinco centímetros.

La relación pitagórica se verifica con la igualdad:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

Pregunto el príncipe si aquella relación era válida para todos los triángulos.

Con aire grave, respondió Beremiz:

-Esta proposición es válida y constante para todos los triángulos rectángulos. Diré, sin temor a errar, que la ley de Pitágoras expresa una verdad eterna. Incluso antes de brillar el sol que no ilumina antes de existir el aire que respiramos, ya el cuadrado construido sobre la hipotenusa eran igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Se mostraba el príncipe interesadísimo las explicaciones que oía a Beremiz. Y hablando al poeta Iezid, observó con simpatía:

-¡ Cosa maravillosa es, oh amigo mío, la Geometría! ¡Que ciencia tan notable! Percibimos en sus enseñanzas dos aspectos que encantan al hombre más rudo o más despreocupado de las cosas del pensamiento: claridad y sencillez.

Y, tocando levemente con su mano izquierda en el hombro de Beremiz, interpeló al calculador con naturalidad:

-¿Y esa proposición que los griegos estudiaron, aparece ya en el libro "Suba-Sutra" del viejo brahmán Apastamba?

Beremiz respondió sin vacilar:

-¡Si, oh príncipe! El llamado Teorema de Pitágoras puede leerse en las hojas del "Suba-Sutra" en forma diferente. Por la lectura de los escritos de Apastamba aprendían los sacerdotes la manera de calcular la construcción de los oratorios, transformando un rectángulo en un cuadrado equivalente, eso es en un cuadrado de la misma área.

-¿Y surgieron en la India otras obras de cálculo dignas de destacar? Indagó el príncipe.

-Varias más, respondió prontamente Beremiz. Citaré la curiosa obra "Suna-Sidauta" obra de autor desconocido, pero de mucho valor, pues expone en forma muy sencilla las reglas de la numeración decimal y muestra que el cero es de gran importancia en el cálculo. No menos notables para la ciencia de los brahmanes fueron los escritos de dos sabios que gozan hoy de la admiración de los geómetras: Ari-Bata y Brahma-Gupta. El tratado de Ari-Bata estaba dividido en cuatro partes: "Armonías Celestes", "El tiempo y sus Medidas", "Las Esferas" y "Elementos de Cálculo". No pocos fueron los errores descubiertos en los escritos de Ari-Bata. Este geómetra enseñaba, por ejemplo, que el volumen de la pirámide se obtiene multiplicando la mitad de la base por la altura.

-¿Y no es cierta esa regla?, interrumpió el príncipe.

-Realmente, es un error, respondió Beremiz. Un completo error. Para el cálculo del volumen de una pirámide, debemos multiplicar, no la mitad, sino la tercera parte del área de la base –calculada en pulgadas cuadradas - por la altura- calculada en pulgadas –

Se hallaba al lado del príncipe de Lahore un hombre alto, delgado, ricamente vestido, de barba gris con hebras rubias. Un hombre extraño de apariencia para ser hindú. Pensé que seria un cazador de tigres, y me engañé. Era un astrólogo hindú que acompañaba al príncipe en su peregrinación a La Meca. Ostentaba un turbante azul de tres vueltas, bastante llamativo. Se llamaba Sadhu Gang y mostrábase muy interesado en oír las palabras de Beremiz.

En un momento dado, el astrólogo Sadhu Gang decidió intervenir en lo debates. Hablando mal, con acento extranjero, le pregunto a Beremiz:

-¿Es verdad que la Geometría, en la India, fue cultivada por un sabio que conocía los secretos de los astros y los altos misterios de los cielos?

Aquella pregunta no perturbó al calculador. Después de meditar durante unos instantes, tomó Beremiz su caña de bambú, borró todas las figuras trazadas en la caja de arena y escribió sólo un nombre:

Bhaskhara, el sabio.

Y dijo solemnemente:

-Este es el nombre del más famoso geómetra de la India. Conocía Bhaskhara, los secretos de los astros y estudiaba los altos misterios de los cielos. Nació ese astrónomo en Bidom, en la provincia del Decán, cinco siglos después de Mahoma. La primera obra de Bhaskhara se titulaba “Bija-Ganita”.

- ¿Bija-Ganita?, repitió el hombre del turbante azul, “Bija” quiere decir “simiente” y “ganita”, en uno de nuestros viajes dialectos significa “contar”, “calcular”, “medir”.

-Exactamente, confirmo Beremiz. Exactamente. La mejor traducción para el titulo de esa obra “El Arte de Contar Simientes”.

Aparte del “Bija-Ganita” el sabio “Bija-Ganita”. Bhaskhara escribió otra obra famosa: “Lilavati”. Sabemos que éste era el nombre de la hija de Bhaskhara.

El astrologo del turbante azul, volvió a interrumpir:

-Dicen que hay una novela o una leyenda en torno a Lilavati. ¿Conoces ¡oh calculador !, esa novela o leyenda de que te hablo?

-Desde luego, respondió Beremiz, la conozco perfectamente. y si fuera del agrado de nuestro príncipe podría contarla ahora . .

-¡Por Allah!, exclamó el príncipe de Lahore ¡Oigamos la leyenda de Lilavati ! ¡Con mucho gusto la escucharé! Estoy seguro que va ser muy interesante. . .

En este momento, a una señal del poeta Iezid, dueño de la casa, aparecieron en la sala cinco o seis esclavos que ofrecieron a los invitados carne de faisán, pasteles de leche, bebidas y frutas.

Cuando hubo terminado la deliciosa merienda –y hechas las abluciones de ritual-, le pidieron de nuevo al calculador que narrara la leyenda.

Beremiz se irguió, paseo la mirada por todos los presentes y empezó a hablar:

-¡En nombre de Allah, Clemente y Misericordioso! Se cuenta que el famoso geómetra Bhaskhara, el Sabio, tenía una hija llamada Lilavati.

Su origen es muy interesante. Voy a recordarlo. Al nacer, el astrólogo consultó las estrellas y, por la disposición de los astros, comprobó que estaba condenada a permanecer soltera toda la vida y que quedaría olvidada por el amor de los jóvenes patricios. No se conformó Bhaskhara con esa determinación del Destino y recurrió a las enseñanzas de los astrólogos más famosos de su tiempo. ¿Cómo hacer para que la graciosa Lilavati pudiera lograr marido y ser feliz en su matrimonio?

Un astrólogo consultado por Bhaskhara le aconsejo que llevara a su hija a la provincia de Dravira, junto al mar. Había en Dravira un templo excavado en la piedra donde se veneraba una imagen de Buda que llevaba en la mano una estrella. Sólo en Dravira, aseguró el astrólogo, podría Lilavati encontrar novio, pero el matrimonio sólo sería feliz si la ceremonia del enlace quedaba marcada en cierto día en el cilindro del tiempo.

Lilavati fue al fin, con agradable sorpresa, pedida en matrimonio por un joven rico, trabajador, honesto y de buena casta. Fijado el día y marcada la hora, se reunieron los amigos para asistir a la ceremonia.

Los hindúes median, calculaban y determinaban las horas del día con auxilio de un cilindro colocando en un vaso lleno de agua.

Dicho cilindro, abierto sólo en su parte más alta, presentaba un pequeño orificio en el centro de la superficie de la base. A medida que el agua, entrando por el orificio de la base, invadía lentamente el cilindro, éste se hundía en el vaso hasta que llegaba a desaparecer por completo, a una hora previamente determinada.

Colocó Bhaskhara el cilindro de las horas en posición adecuada con el mayor cuidado y esperó hasta que el agua llegará al nivel marcado. La novia, llevada por su incontenible curiosidad, verdaderamente femenina, quiso observar la subida del agua en el interior del vaso. Por una fatalidad, la perla, llevada por el agua, obstruyó el pequeño orificio del cilindro impidiendo que entrará en el él agua del vaso. El novio y los invitados esperaban con paciencia, pero pasó la hora propicia sin que el cilindro la indicará como había previsto el sabio astrólogo.

El novio y los invitados se retiraron para que, después de consultados los astros, se fijara otro día para la ceremonia. El joven brahmán que había pedido a Lilavati en matrimonio desapareció semanas después y la hija de Bhaskhara quedó soltera para siempre.

El sabio geómetra reconoció que es inútil luchar contra el Destino, y dijo a su hija:

-Escribiré un libro que perpetuará tu nombre y perdurarás en el recuerdo de los hombres durante un tiempo mucho más largo del que vivirián tus hijos que pudieron haber nacido de tu malograda unión.

La obra de Bhaskhara se hizo célebre y el nombre de "Lilavati", novia malograda, sigue inmortal en la historia de las Matemáticas.

Por lo que se refiere a las Matematicas el "Lilavati" es una exposición metódica de la numeración decimal y de las operaciones aritméticas entre números enteros. Estudia minuciosamente las cuatro operaciones, el problema de la elevación al cuadrado y al cubo, enseña la extracción de la raíz cuadrada y llega incluso al estudio de la raíz cubica de un numero cualquiera. Aborda después las operaciones sobre números fraccionarios, con la conocida regla de la reducción de las fracciones a un común denominador.

Para los problemas, adoptaba Bhaskhara enunciados graciosos e incluso romanticos:

He aquí uno de los problemas del libro de Bhaskhara:

> *Amable y querida Lilavati de ojos dulces*
> *como la tierna y delicada gacela, dime cuál*
> *es el numero que resulta de la multiplicación*
> *de 135 por 12.*

Otro problema igualmente interesante que figura en el libro de Bhaskhara, se refiere al cálculo de un enjambre de abejas:

> *La quinta parte de un enjambre de abejas se posó en la flor de kadamba, la tercera en una flor de Silinda, el triple de la diferencia entre estos dos números voló sobre una flor de krutaja, y una abeja quedó sola en el aire, atraída por el perfume de un jazmín y de un pandnus. Dime, bella niña, cuál es el numero de abejas que formaban el enjambre.*

Bhaskhara mostró en su libro que los problemas más complicados pueden ser presentados de una forma viva y hasta graciosa.

Y Beremiz, siempre trazando figuras en la arena, presento al príncipe de Lahore varios problemas curiosos recogidos del “Lilavati”.

¡Infeliz Lilabati!

Al repetir el nombre de la desdichada muchacha, recordé los versos del poeta:

Tal como el océano rodea a la Tierra, así
tú, mujer rodeas el corazón del mundo con
el abismo de tus lagrimas.

Anexo 10

PICASSO Y EL CUBISMO

París, 22 de noviembre de 1908.

Aquella mañana la place Ravignan (actualmente place Emile Goudeau) estaba más tranquila de lo que era habitual. Y la razón de este extraño hecho que sorprendería al vecindario era que “La bande à Picasso” descansaba de la juerga de la noche anterior.

En el número 13 de la plaza se levantaba un extraño edificio construido en madera conocido como Le Bateau Lavoir porque tenía forma de barco varado. Y en él se instalaría Picasso cuando se quedó a vivir en París, en aquel edificio -según la policía- “nido de anarquistas, nihilistas, simbolistas, bohemios y otras gentes de mal vivir”

Todos llamaban a Picasso y a sus ruidosos amigos “La banda de Picasso”. Y precisamente los componentes de dicha banda habían preparado el día anterior una de las fiestas más sonadas de que tenía memoria el Bateau Lavoir: la cena homenaje al pintor al que todos llamaban el Aduanero Rousseau, ya que antes de dedicarse de lleno a la pintura ya próximo a su jubilación, había trabajado en el servicio de aduanas francés.

Al homenaje asistieron treinta invitados que cantaron, recitaron poemas en honor al homenajeado, bebieron más de la cuenta y bailaron hasta la madrugada, riendo y bebiendo el vino peleón comprado en “Le Lapin Agile”, felices de ser jóvenes y de estar llenos de proyectos que, en el caso de Picasso, cambiarían la dirección a seguir en la pintura.

En este banquete, Rousseau pronunciaría una frase ingenua y absurda dirigida a Picasso: *“Usted y yo somos los pintores más grandes de esta era; usted en el estilo egipcio y yo en el moderno”*

El Bateau Lavoir despertó tarde y con resaca. Y Pablo Picasso se despertó en el mismo estado que el edificio, con la sensación de que el suelo se movía bajo sus pies como si el Bateau se hubiera convertido en un barco de verdad y navegara Sena abajo hacia el mar.

Los tres golpes que dieron en la puerta de su estudio estallaron en sus oídos como tres cañonazos.

-Buenos días, pequeño español –saludó el poeta Max Jacob, entrando en el estudio después de apartar a Picasso de un empujón, y añadió:

-A ver, atención: “6 amigos beben cerveza en la tasca de Azon y en total bebieron 21 vasos. Si cada uno de ellos ha bebido distinto número de vasos, ¿Cuántos vasos ha bebido cada uno?”

Picasso ni se molestó en contestar, acostumbrado como estaba a que cada vez que entrara en su estudio, su amigo Max le planteara un acertijo.

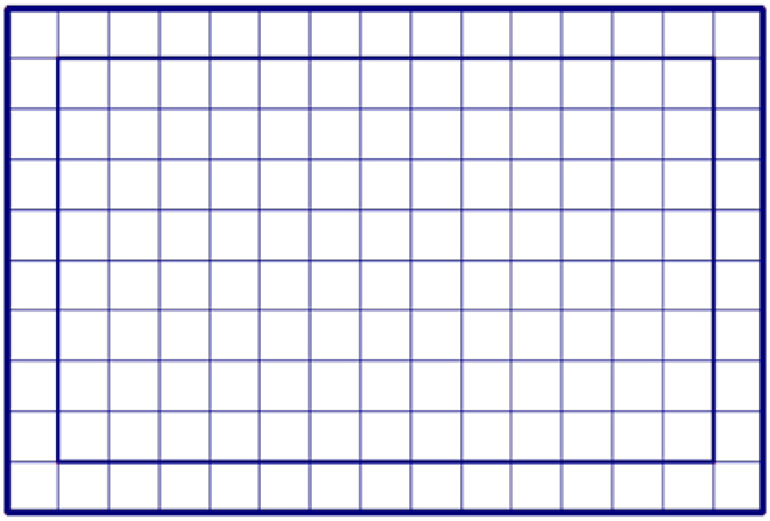
-Está bien, aquí tienes una botellita de absenta para que se te quite la resaca –dijo Max, acostumbrado a que su amigo español no le resolviera sus acertijos.

Aun no había cerrado Picasso la puerta cuando el poeta Guillaume Apollinaire la empujó para entrar; y tras el apareció el pintor Juan Gris y el Aduanero Rousseau con su violín y lo que era peor: dispuesto a tocarlo; y ocho o nueve amigos más dispuestos a incrementar el dolor de cabeza de Picasso. Y una vez más, para su desesperación, se pusieron a discutir a gritos ante el cuadro que Apollinaire ya había bautizado como “Las demoiselles d´Avignon”

Cubismo sí, cubismo no. Que así llevaban discutiendo desde que Picasso pintara el cuadro en la primavera-verano del año anterior. Picasso es un genio, gritaban los partidarios de “Cubismo sí”. Picasso se ha vuelto loco, gritaban aún más fuerte los partidarios de “Cubismo no”.

Picasso ya estaba harto, por eso se sorprendió cuando los dos bandos se calmaron para escuchar a Apollinaire que decía:

-Partiendo de la teoría de descomponer las figuras en formas geométricas, nuestro amigo ha inventado el Cubismo. Pues bien, yo os propongo lo siguiente: A ver si somos capaces de dibujar un rectángulo en un papel cuadriculado sombreando las casillas del contorno. Así, el número de casillas, es decir, de pequeños cuadrados que componen la cuadrícula, será menor, igual o mayor que el número de casillas del interior del rectángulo. Y ahora pregunto: ¿podremos dibujar un rectángulo de proporciones tales que el borde (de una casilla de anchura) contenga un número igual de casillas que el rectángulo blanco interior?



Aunque acostumbrados a que Apollinaire planteara siempre algún problema, sus amigos se quedaron paralizados ante la propuesta, hasta que el poeta los puso en marcha gritando:

-¡Vamos! Que el vino de anoche os ha embotado el cerebro.

Y todos se abalanzaron sobre un cuaderno de dibujo de papel cuadriculado que Picasso había comprado la tarde anterior, asistiendo ahora a la horrible escena de ver cómo sus amigos destrozaban su bloc arrancando las hojas a puñados con objeto de resolver el problema.

Nueva llamada a la puerta.

Ahora los que aparecieron fueron la hija y el hijo de la portera del Bateau Savoir entraron al estudio para ponerse a revolver más que a jugar, como hacían cada día.

Picasso, resignado, se dispuso a dibujar a los niños al ver que se sentaban en el suelopara jugar con un juego de construcciones, cuyas piezas eran cubos de madera teñidos con anilinas de colores.

Picasso observó que hacían construcciones muy sencillas, levantando muros de formas triangulares en las que en el último piso había un cubo, en el penúltimo 2, en el anterior 3, etc. Y que utilizando todos los cubos del juego el muro de la niña era un piso más alto que el del niño. Al darse cuenta, el niño, enfadado, derrumbó de un manotazo el muro levantado por la niña, y ella, también enfadada tiró de una patada el de su hermano. Y ya iban a empezar a pelearse cuando su madre entró en el estudio con una caja plana cuadrada en las manos, ordenando a sus hijos que dejaran tranquilo al señor Picasso y que guardaran todos los cubos en la caja cuadrada que traía. Entonces Picasso se preguntó: ¿Sería esto posible? ¿Podrían los niños guardar todos los cubos del juego en la caja plana cuadrada, sin dejar ningún hueco?

Y pensando en este problema estaba cuando se abrió de nuevo la puerta. Picassocerró los ojos pensando que esa misma tarde compraría tres cerraduras con cadena incorporada y tres cerrojos para asegurar su tranquilidad. Cuando a los tres segundos volvió a abrir los ojos se encontró con que habían llegado al estudio la coleccionista y por lo tanto rica norteamericana Gertrude Stein y su inseparable amiga Alice B. Toklas.

-Buenos días, mi querido pintor –saludó la primera sentando su contundente envergadura en la cama de Picasso.

-Buenos días, mi querida mecenas y sin embargo amiga –saludó el pintor, frotándose las manos, convencido de que la norteamericana le compraría alguno de los dibujos preparatorios de Las demoiselles d´Avignon que tanto le gustaban. Así que, dado que su economía estaba en las últimas, puso la carpeta de los dibujos abierta a los pies de la señora Stein dispuesto a enseñarle los dibujos. Y ya tenía el primer dibujo en la mano cuando el pequeño Max Jacob, que ya se había bebido media botella de absenta, apareció con su hoja cuadriculada con el problema del rectángulo resuelto.

-Observa, mi querido amigo y señoras presentes, ya he solucionado el problema. Como verás el número de de casillas que dibujan los lados del rectángulo es igual al número de casillas que tiene el rectángulo interiror. O sea que el rectángulo tiene…

Y ya iba a dar la solución del problema cuando Alice B. Toklas lo interrumpió para preguntar:

-¿Las caras de un cubo son cuadradas?

-Claro que sí, querida Alice –contestó Max Jacob- las seis caras de un cubo son 6 cuadrados perfectos. ¿Por qué lo preguntas?

-Porque esta mañana me encontré con un problema muy curioso pintado con tiza sobre la acera. Y como al que lo pintó le debía de temblar el pulso, pues los cuadrados eran muy poco cuadrados.

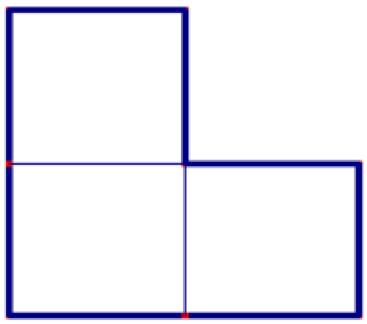
-¿Y cual era el problema? –preguntó Max Jacob.

-¡Pero vamos a ver! Aquí a qué hemos venido, ¿a resolver problemas callejeros o a comprar dibujos cubistas? –exclamó Picasso furioso, al ver que su amigo estaba distrayendo a las señoras de una posible venta.

-Hay tiempo para todo, señor pintor –le tranquilizó Gertrude Stein- Y para demostrarlo le compro estos 3 dibujos para que se quede usted tranquilo. Y ahora, a ver, ¿cómo era ese problema?

Y Alice, poniéndose en pie cogió un carboncillo y dibujó en el suelo tres cuadrados que formaban una figura en forma de L. Todos los componentes de la banda, al ver a la norteamericana dibujando en el suelo del estudio, dejaron de resolver el problema del rectángulo y se acercaron en bloque, justo cuando ella se levantaba y decía:

-Así estaban colocados los 3 cuadrados.



-¿Y que decía el enunciado del problema? –preguntaron todos a coro.

-No lo recuerdo.

El abucheo cayó sobre Alice por haber creado un misterio sin posible solución, hasta que Gertrude Stein preguntó:

-¿Y donde estaba dibujado el problema?

-A la puerta de nuestra casa, frente al nº 13 de la rue des Fleuris.

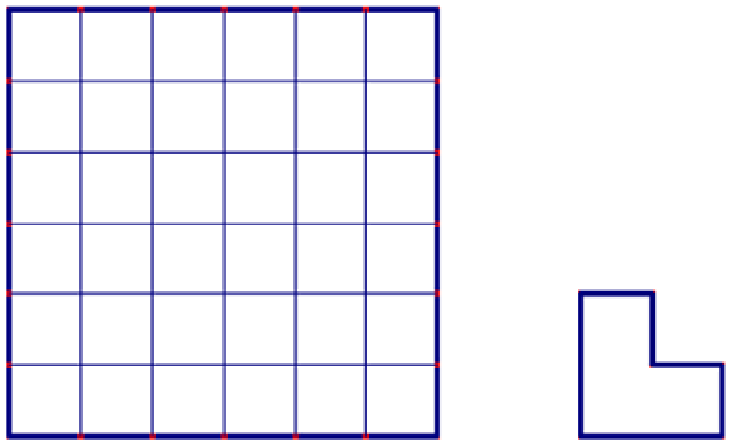
-Muy bien, pues vuelves allí con este papel y este lapicero y copias el enunciado del problema para que lo podamos resolver. Y el señor Jacob, que es muy amable, te acompañará. ¡Vamos, deprisa! –ordenó la mandona Gertrude dando dos sonoras palmadas y un paraguazo a Max Jacob, para convencerlo.

Mientras Alice y Max iban a la rue del Fleuris, Picasso y sus amigos se fueron a almorzar al restaurante Vernin, el mejor de la zona dado que la norteamericana, parapetada tras sus dólares, invitaba.

Cuando Alice y Max volvieron se encontraron con que no había nadie en el estudio, pero sí una nota en la puerta que decía “Os esperamos en Chez Vernin”.

Alice pensó que sería una buena idea sustituir la nota clavada con una chincheta sobre la puerta por el papel en el que había dibujado los 3 cuadrados y apuntado el enunciado del problema, que decía:

“¿Cuál es el número mínimo de casillas que se deben colorear en un tablero de 6 x 6 casillas cuadradas para que sea imposible recortar de la parte sin pintar un pedazo con la siguiente forma:”



Clavaron el papel en la puerta y cuando llegaron a Chez Vernin los comensales, que ya estaban en los postres, los recibieron con una gran ovación. Y Gertrude Stein preguntó:

-A ver, mi querida Alice y mi no menos querido y enteco señor Jacob, ¿Cuál es el enunciado del problema de los 3 cuadrados?

Alice y Max se miraron angustiados y respondieron, con un hilo de voz:

-No lo recordamos, ya se nos ha olvidado.

Los aplausos se transformaron en abucheo y bombardeo con migas de pan al que se unió el resto de los clientes del restaurante y una compañía de infantería que pasaba por la calle. A los agredidos, parapetados detrás del mostrador, no les dio tiempo a explicar que el enunciado del problema estaba esperando clavado en la puerta del estudio de Pablo Picasso.

Autor: Joaquín Collantes

Asesor matemático: Antonio Pérez

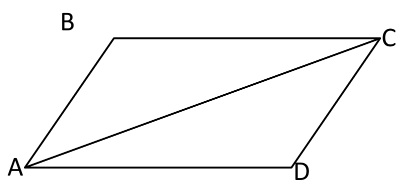
Anexo 11

EXAMEN “CONGRUENCIA Y SEMEJANZA”
UNIDAD 3
MATEMÁTICAS II

Nombre: ____________________________________ Grupo ____________
Fecha: _____________ Cal: ______________

Aprendizaje: Habilidad lógica para incluir un objeto en un concepto.

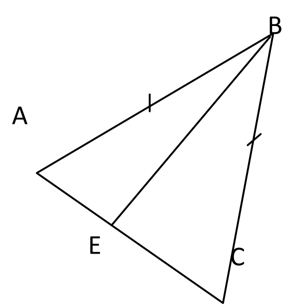
1.- En la figura siguiente ABCD es un paralelogramo y AC es una de sus diagonales, con AB paralelo a DC y AD paralelo a BC.



Enlista todas las consecuencias que se pueden derivar de tal situación, justificando cada una de tus afirmaciones

.

2.- En la siguiente figura el △ABC es isósceles y BE es una de sus alturas ¿Qué otros tres elementos geométricos representa BE?. Demuestra cada una de tus afirmaciones.



¡OJO¡ Intencionalmente la figura ha sido mal trazada.

Las marcas iguales indican los lados que miden lo mismo.

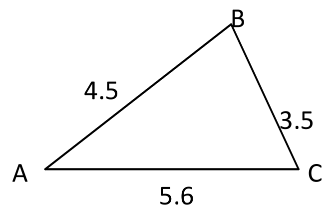
PREGUNTAS 3, 4 Y 5:

Aprendizajes: Habilidad lógica para deducir las consecuencias del hecho de que un objeto pertenezca a un concepto

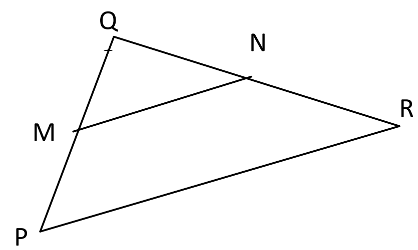
Utilizará los criterios de congruencia y semejanza de triángulos

Utilizará los teoremas de Thales y de Pitágoras.

3.- Dada la figura siguiente, construye un triangulo semejante a el con $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = 0.6$, utilizando el criterio L, L, L.



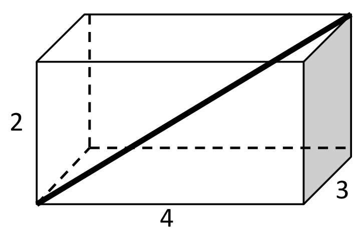
4.- En el $\triangle$ PQR, M y N son los puntos medios de los lados PQ y QR respectivamente.



Demuestra que PR = 2MN

Aprendizaje: Aplicara el teorema de Pitágoras.

5.-Cuanto mide la diagonal del prisma rectangular de la figura:



Referencias

AMENGUAL, B. R. (1984). *Ciencias de la Educación.* Madrid: Escuela Española

ALTAREJOS, F., Ibáñez Martín y Jordán Antonio. (2003). *Ética Docente*, España: Ariel.

AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas.

DURKHEIM, Ëmile. (2001). *Educación y Sociología*, México: Ediciones Coyoacan.

EUCLIDES. (1992). *Elementos de Geometría*, México: UNAM.

Estándares del 2000 de la NCTM. USA. (2000).

FREIRE, Paulo, (2005). *Pedagogía del Oprimido*, México: Siglo XXI.

FUYS, Geddes, y Tischler. (1984). *English translations of selected wirtings of van Hiele,* New York: School of Educ. Brooklyn College.

G. E. R., Lloyd. (1997). *De Tales a Aristóteles*, Buenos Aires: Editorial Universitaria de Argentina.

GARCÍA ARENAS. (1990). *Geometría y Experiencias*, México: Alhambra.

GUTIÉRREZ, Ángel, Jaime, Adela, Fortuny, José. *An Alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele Levels*, Jounal for Research in Mathematics Education, Vol. 22, Núm. 3, 1991, pp. 237-251.

HERNÁNDEZ, Gerardo. (2006). *Paradigmas en psicología de la educación*, México: Paidós Educador,

Hernández, Andrés, *Informe de gestión (2005-2009)*, Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Azcapotzalco.

ILLICH, Iván. (1975). *La sociedad desescolarizada*, Barcelona: Barrales editores,

KLINE, Morris. (1999). *El fracaso de la matemática moderna*, México: Siglo XXI.

KNOBEL y Aberastury. (1982).*Adolescencia Normal, Un enfoque psicoanalítico*, Buenos Aires: Paidós

LAFOURCADE, Pedro. (1973). *Evaluación de los aprendizajes*, Buenos Aires: Editorial Kapeluz.

MORIN, Edgar. (2002). *La mente bien ordenada*, España: Editorial Seix Barral.

NOVAK, J. D., y Gowin, D. B. (1999). *Aprendiendo a Aprender*, Barcelona: Martínez Roca.

NCTM. (1987). *Learning and Teaching Geometry*, K-12, Virginia: Yearbook.

PERELMAN. (1975). *Problemas y experimentos creativos*, URSS: Editorial Mir Moscú.

PLATÓN. (1996). *Diálogos*, México: Porrúa,

POLYA, G., (1970). *Como plantear y resolver problemas*, México: Trillas.

PONCE Aníbal, Fisher, E. y Corno. (1978). *Adolescencia, Educación y Sociedad*, México: Ediciones de Cultura Popular.

SAVATER, Fernando. (2004). *El valor de Educar*, Barcelona, Ariel,

SCHOENFELD, Alan. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. New Jersey: University of California Berkeley.

SCHOENFELD, Alan. (1990). *A Source book for College Mathematics Teaching,* New Jersey: University of California Berkeley.

SCHOENFELD, Alan. (1994). *Mathematical Thinking and problem Solving*, New Jersey: University of California Berkeley.

TAHAN, Malba. (2008). *El hombre que calculaba*, México: Editorial Noriega.

TORRES, Carlos. (2004). *Lo visual y lo deductivo en las matemáticas*. Sociedad Matemática Mexicana, Miscelánea Matemática, Núm. 40, diciembre.

VAN HIELE, Pierre. (1986). *Estructura and insigne. Una teoría de la educación matemática,* New York: Academy press inc.

ZÚÑIGA, Angélica. (1992). *Cero en conducta*, México, Año 7, Núm. 29-30, enero-abril.

Citas

[1] Las normas elevadas no deben usarse debido a que los estudiantes de bajo rendimiento quedan eliminados y más bien se debe aplicar normas incluyentes, y deben encontrarse nuevas maneras de motivación para los alumnos. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 42.

[2] El lector es capaz de percibir el significado potencial de los mensajes hablados debe adquirir habilidad en relación con los escritos. Como los significados denotativos y las funciones sintácticas de las palabras componentes que se encontrará en la lectura. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 73.

[3] Ver. FUYS, GEDDES, y TISCHLER. English translations of selected wirtings of van Hiele. School of Educ. Brooklyn College. City Univ, of N.York, N. York 1984.

[4] Ver. http://wwwcoopvgg.com.ar/sergiorizzolo/trabajo/trabajo_final.htm

[5] Debido a la influencia de los conceptos que se hallan en su estructura cognoscitiva, el hombre experimenta una representación conscientes de la realidad, muy simplificada esquemática, selectiva y generalizada. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 88.

[6] Ver. http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero-20/SERGIO_BALLESTER_SAMPE

[7] Es importante señalar que el concepto idiosincrático de "casa" lo que uno emplea como moldear la propia experiencia, y o el concepto cultural más genérico. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 88.

[8] De acuerdo al Estándar de razonamiento y demostración. Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas;

Formular e investigar conjeturas matemáticas;

Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones;

Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración.

Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA.

Virginia, 1987. Pág.59.

[9] La plétora de su propio organismo lo ha disparado como a un proyectil y antes de que vuelva a tocar suelo firme se imagina que al más simple de sus gestos, el mundo entero responderá. Ver. Ponce Aníbal, Fisher, E. y Corno. Adolescencia, Educación y Sociedad. Ediciones de Cultura Popular México. 1978. Pág. 13.

[10] Ver. KNOBEL y Aberastury. (1982).*Adolescencia Normal, Un enfoque psicoanalítico*, Buenos Aires: Paidós Pág.39.

[11] Debido a su madurez y a que son poseedores de habilidades intelectuales. Ver AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág.77.

[12] En la adolescencia el ensueño como reacción frente a un medio hostil lejos de desaparecer se intensifica: pero su vida interior responde a una necesidad de fuga para comprenderse y explicarse, por lo que se aleja de la realidad. Ver. PONCE Aníbal, Fisher, E. y Corno. (1978). *Adolescencia, Educación y Sociedad*, México: Ediciones de Cultura Popular. Pág. 12.

[13] Ver. Kline Morris, El fracaso de la matemática moderna, 19ª edición. Editorial Siglo XXI. México 1999. Pág. 17.

[14] Ver. Kline Morris, El fracaso de la matemática moderna, 19ª edición. Editorial Siglo XXI. México 1999. Pág. 10.

[15] Ver. Rugarcía.

[16] Ver. Morín La mente bien ordenada. . Cuarta Edición. Editorial Seix Barral España 2002. Pág. 83 – 88.

[17] En una habilidad se tienen en mente cualidades y rasgos de la persona que ejecuta una actividad; en cuanto a las destrezas, uno tiene en mente cualidades o hechos de la actividad llevada a cabo… Por habilidad para entender matemáticas significa las características psicológicas individuales que responden a los requerimientos de la actividad matemática incluyen hechos individuales del proceso mental de percepción, atención memoria imaginación, pensamiento, etc. Ver. Krutestkii 1967. Págs. 74 – 81.

[18] Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA. Virginia, 1987. Pág. 43.

[19] Ver. Carraher, 1995. Pág. 12.

[20] Aunque también los estudiantes deben asumir su responsabilidad de su propio aprendizaje, ya que depende también de su actividad. Ver AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág.18.

[21] Ver. Altarejos, F., Ibañez Martin Jordán Antonio, Ética Docente, segunda Edicion, Editorial Ariel, España 2003.Pág.50.

[22] Debemos construir primero una sociedad en la cual los actos personales mismos recuperen un valor más elevado que el hacer cosas y manipular gente. En una sociedad así, la enseñanza exploratoria, inventiva se contaría lógicamente entre las formas mas convenientes. Ver. Illich Ivan. La sociedad desescolarizada. Segunda edición. Barrales editores. Barcelona España 1975. Pág.131.

[23] La educación como libertad donde todos aprenden y se retroalimentan para, perpetuar la acción de recibir conocimientos que van del estudiante al profesor y viceversa. Ver. Freire Paulo, Pedagogía del Oprimido, Edición. Editorial siglo XXI, México D. F. 2005. Págs.77 – 81.

[24] Ver. http://www.emis.de/journals/DM/v14-2/art5.pdf

[25] Ver. Durkheim Ëmile, Educación y Sociología. Ediciones Coyoacán. Cuarta Edición México 2001. Pág. 30.

[26] Ver. http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted05_08arti.pdf

[27] Ver. . http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/CorGutOtr94.pdf

[28] Aunque algunos aspectos del formación académica constituye en términos generales, una preparación como la educación dirigida explícitamente hacia los ajustes vocacional y familiar. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 43.

[29] También por sus experiencias anteriores son tristes y generalmente tienen un elevada ansiedad por lo que se inclinan al aprendizaje repetitivo. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 48.

[30] Constituye una base útil de conocimientos y destrezas que sirven para la vida. Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA. Virginia, 1987. Pág. 31.

[31] Todas las preguntas contribuyen al aprendizaje y ayudan al estudiante para que piense y razone diferentes suposiciones con ello explore se imagine y compruebe. Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA. Virginia, 1987. Pág. 60.

[32] Por lo que el proceso de aprendizaje tiene que ver con el dominio del lenguaje, el cual en este nivel difícilmente se encuentran problemas. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 74.

[33] Algunas lecturas los estudiantes toman nota pasivamente. Por el tipo de ejercicio, el método de lectura falla: mostrando a los estudiantes un material, trabajando con problemas simples. Por ello se requiere de problemas de su nivel y lecturas que sean activas para que les interese. Ver. Schoenfeld Alan, A Source book for College Mathematics Teaching. 1990. Págs.22 – 23.

[34] Ver. Zúñiga Angélica. Cero en conducta año7 núm. 29-30 enero-abril, México, 1992. Pág. 6

[35] Es necesario ya que hay buenas razones para considerar métodos alternativos de conocimiento, como es el caso de la literatura. Ver. Schoenfeld Alan, A Source book for College Mathematics Teaching. 1990. Pág 23.

[36] Donde nota todas las bondades de los equipos. Ver. Schoenfeld Alan, A Source book for College Mathematics Teaching. 1990. Págs 26 - 29.

[37] El hacer de las matemáticas son un esfuerzo empírico que resuelve problemas como una parte de su naturaleza. Ver. Schoenfeld Alan, Mathematical Thinking and problem Solving. Primera edición. New Jersey 1994. Págs. 53 -63.

[38] Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA. Virginia, 1987. Pág. 55.

[39] Comprender el problema que implica la buena lectura, concebir el plan, ejecución del plan y hacer una visión retrospectiva. Ver. Polya, Como plantear y resolver problemas, Segunda edición. Editorial Trillas, México, 1970. Págs. 18 – 19.

[40] La reflexión y la comunicación son procesos entrelazados en el aprendizaje de las matemáticas. Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA. Virginia, 1987. Pág. 65.

[41] Ver. http:/www.sectormatematica.cl/artículos%20hiele.pdf

[42] Ver. http:/www.cepjerez.net/drupal/files/VanHiele.pdf.

[43] Ver. http:/www.emis.de/journals/Dm/v14-2/art5.pdf

[44] Ver. http://divulgamat.echu.es/weborriak/testukonline/04-05/pg-04-05-fouz.pdf

[45] Ver. Ver. http://divulgamat.echu.es/weborriak/testukonline/04-05/pg-04-05-fouz.pdf

[46] También hay que tomar en cuenta la personalidad del maestro ya que el método debe ser adecuado para obtener mejores resultados. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 20.

[47] El principio de aprendizaje, que deben comprender lo aprendido. Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA. Virginia, 1987. Pág. 20.

[48] Lo que se espera es una meticulosa organización de la materia de estudios para que la presenten clara y simple. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 23.

[49] En el pasado existió la confusión al considerar axiomáticamente a todo el aprendizaje por recepción como repetición, y a todo el aprendizaje por descubrimiento como significativo. En realidad, los dos tipos de aprendizaje pueden ser significativos. Ver. Ausubel, Novak, Hanesian, Psicología Educativa Editorial Trillas, México, 1984. Pág. 17.

[50] La sugerencia del proceso de pensamiento introduce una distinción fundamental: proceso contra producto. El enfoque de un proceso de análisis es un significado usado para obtener un resultado en particular; de análisis de

producto en los resultados obtenidos. Lo que se requiere es un buen proceso y el producto se vera reflejado. Ver. Schoenfeld Alan, Cognitive Science and Mathematics Education. University of California Berkeley, New Jersey 1987. Págs. 7 – 17.

[51] Estándar de comunicación. Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitor a todos los estudiantes para: Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación; comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas; analizar y evaluar las estrategias de pensamiento matemáticos de los demás y usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas. Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA. Virginia, 1987. Pág. 64.

[52] Ver AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 47.

[53] Las abstracciones poseen nombres que sus significados pueden representar con palabras. Ver AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 84.

[54] Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 111.

[55] Ver. El principio de aprendizaje, que deben comprender lo aprendido. Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA. Virginia, 1987. Pág. 58.

[56] Ver. http://cmc.ihmc.usl/peper/cmc.2004-234.pdf

[57] De la adquisición de conceptos. Ver AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 88.

[58] El surgimiento de nuevos significados en el alumno refleja la consumación de un nuevo aprendizaje. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 48.

[59] Ver. . http:/www.sectormatematica.cl/artículos%20hiele.pdf

[60] Ver. http://www.paginassobrefilosofia.com/html/timeo

[61] Ver. http://www.paginassobrefilosofia.com/html/timeo

[62] Cambio de estructura. Ver AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 35.

[63] Ver. Van Hiele Pierre. Estructura and insigne. Una teoría de la educación matemática Academy press inc, AP. EEUU. New. York, 1986. Pág. 22.

[64] Ver. http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/CorGutOtr94.pdf

[65] Ver. http://www.paginassobrefilosofia.com/html/Elementos

[66] Ver. http://www.paginassobrefilosofia.com/html/Elementos

[67] Ver. http:/www.cepjerez.net/drupal/files/VanHiele.pdf.

[68] Donde los alumnos aprender formas y estructuras. Ver. NCTM. Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook, USA. Virginia, 1987. Pág. 43.

[69] Ver AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 56.

[70] Facultades intelectuales validas y útiles, para desarrollar la habilidad de pensar crítica y sistemáticamente e independientemente. Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 43.

[71] Ver. AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 68.

[72] Para aumentar el interés, la confianza en si mismos y la motivación para con la materia. Ver AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 72.

[73] Ver AUSUBEL, Novak y Hanesian. (1984). *Psicología Educativa*, México: Trillas. Pág. 45.

[74] Ver. AMENGUAL, B. R. (1984). *Ciencias de la Educación.* Madrid: Escuela Española. Pág. 16.

[75] Radica en la justicia en la confiabilidad, validez y adecuación. Ver. Lafourcade Pedro (1973). *Evaluación de los aprendizajes*, Buenos Aires: Editorial Kapeluz. Pág. 224.

[76] Ver. Lafourcade Pedro(1973). *Evaluación de los aprendizajes*, Buenos Aires: Editorial Kapeluz. Págs. 22-25-

[77] Ver. Lafourcade Pedro. (1973). *Evaluación de los aprendizajes*, Buenos Aires: Editorial Kapeluz. pág. 244.

[78] Ver. Lafourcade Pedro. (1973). *Evaluación de los aprendizajes*, Buenos Aires: Editorial Kapeluz. págs. 245-246.