



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**Espectros topológicos en mecánica clásica,
teoría de cuerdas y mapeos armónicos
generalizados**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Francisco Nettel Rueda

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Hernando Quevedo Cubillos

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. Miguel Alcubierre Moya

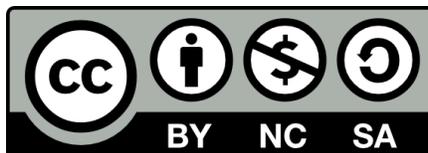
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. Michael P. Ryan



posgrado en ciencias físicas
u n a m

Ciudad Universitaria, México, D.F.

Julio , 2011



El autor, sin perjuicio de la legislación de la Universidad Nacional Autónoma de México, otorga a esta obra la siguiente licencia:

Esta obra está licenciada bajo una **Licencia Atribución-No Comercial-Licenciamiento Recíproco 2.5 México** de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/mx/>

o envíenos una carta a

Creative Commons
171 Second Street, Suite 300,
San Francisco, California,
94105, USA.

A mis papás Pepe y Lita
A Marusia
A mi sobrino ahijado Jorge Eduardo

RESUMEN

ESPECTROS TOPOLÓGICOS EN MECÁNICA CLÁSICA, TEORÍA DE CUERDAS Y MAPEOS ARMÓNICOS GENERALIZADOS

Francisco Nettel Rueda

Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México

Doctor en Ciencias (Física)

En esta tesis aplicamos la cuantización topológica para el cálculo del espectro topológico para algunos sistemas físicos. Explicamos las cuestiones básicas sobre este método. Primero describimos un panorama general sobre la cuantización topológica. Definimos la configuración clásica para un sistema físico, que básicamente es una variedad (pseudo)Riemanniana y una conexión asociada a la métrica. A continuación establecemos un teorema sobre la existencia y unicidad del haz fibrado principal que representa a dicho sistema. Finalmente definimos el espectro topológico y mostramos la forma de calcularlo a través de las clases características de los haces fibrados principales.

Aplicamos el formalismo a tres casos. Primero estudiamos los sistemas mecánicos conservativos con un número finito de grados de libertad a través del principio variacional de Maupertuis. Analizamos los ejemplos del oscilador armónico y del potencial central. A continuación nos concentramos en la teoría de la cuerda bosónica cuando esta se propaga sobre distintos espacios-tiempo de fondo. Se toman en cuenta el espacio-tiempo de Minkowski, así como espacios de curvatura constante. Finalmente utilizamos la cuantización topológica en el contexto de los mapeos armónicos generalizados. Definimos esta generalización y vemos que nos permite representar de esta forma los campos gravitacionales con dos

vectores de Killing que conmutan. Como ejemplo tratamos el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild y obtenemos su espectro topológico. Este espectro también lo obtenemos partiendo de la configuración clásica que se sigue de la acción de Einstein-Hilbert.

ABSTRACT

TOPOLOGICAL SPECTRA IN CLASSICAL MECHANICS, STRING THEORY AND GENERALIZED HARMONIC MAPS

Francisco Nettel Rueda

Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México

Doctor en Ciencias (Física)

We apply the topological quantization method to obtain the topological spectrum for some physical systems. We explain the basic features of this method. First we describe the general framework for the topological quantization. The classical configuration of a physical system is defined, which is basically a (pseudo)Riemannian manifold and a connection associated to its metric. Next, a theorem about the existence and unicity of a principal fibre bundle which represents the system under study is established. Finally, the topological spectrum is defined and the procedure to obtain it by means of the characteristic classes of the principal fiber bundles is described .

The formalism is considered for three cases. First we study mechanical conservative systems with a finite number of degrees of freedom using the variational principle of Maupertuis. We analyze the harmonic oscillator as well as the central potential. Next we focus on the bosonic string theory when different spacetime backgrounds are considered, namely the Minkowsky spacetime and spaces of constant curvature. Last, we use the topological quantization in the context of generalized harmonic maps. We define this generalization and find that is possible to use it to represent gravitational fields with a pair of commuting Killing vectors. As an example, we study the Schwarzschild spacetime and its topological spec-

trum is calculated. This spectrum can be obtained from the classical configuration which follows from the Einstein-Hilbert action.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a todos. A Hernando, tutor, maestro de física y de todo, amigo. Las enseñanzas siendo ejemplo de una persona íntegra. Siempre estaré agradecido y buscando la oportunidad de corresponder.

A los miembros del jurado, las doctoras Nora Bretón, Myriam Mondragón y los doctores Miguel Alcubierre, Alberto Güijosa, Hugo Morales, Leonardo Patiño, por todos los comentarios, correcciones y sugerencias. En verdad aprecio el tiempo que le dedicaron. A los miembros de mi comité tutoral los doctores Miguel Alcubierre y Michael Ryan.

A mi familia, Pepe, Lita, Bárbara, Úrsula, Peco y Jorgito por andar ahí cerca y lejos, pero siempre presentes. A la abuela Concha, apoyo fundamental desde que llegué a la Ciudad de México. A la tía Pato.

A Marusia por todo este tiempo que hemos compartido, amor y apoyo en días difíciles y compartiendo los buenos momentos.

A Trinidad, invaluable su ayuda, hace que todo funcione y bien, siempre con una palabra amable, ¡sobrevivimos al GR!. A Yanalté, siempre pendiente de nosotros, y a las personas que colaboran en el posgrado.

A todos los cuates que compartieron algo en este camino. Con el riesgo de olvidar a algunos intentaré una lista no muy larga: Nacho, Tiber, Teto, Roberto, Alexander,

Adolfo, Gustavo, Alberto, Belinka, William, Leticia, Jesús, Héctor...

A los amigos que desde antes han estado, algunos ya aparecen por ahí : Javier, Horacio, Martha, Gisela, Mario, Oscar, Sandra, Lorenzo, Adriana, Mariana, Rodrigo, Cruz, Alicia, Stella, Sergio, Dalila, Juan Manuel, Silvano, Elsa, Ernesto, Diana, Emiliano, Amelia, Rocio, Luis, Norma, Luis Ernesto, Mario s.j., Jorge, Pedro, Aida...

Al grupo del seminario de cuantización topológica que dio un impulso final a este trabajo entre risas y buenas ideas: Hernando, Leonardo y Gustavo.

A Polux por aparecer, aunque no entienda.

Algunos nombres habrán quedado fuera, pero a todos les agradezco el apoyo y la paciencia.

Al ICN por todos los recursos y ayuda, en especial al personal de la biblioteca y la unidad de cómputo.

Gracias al apoyo de CONACYT y al proyecto DGAPA IN106110

ÍNDICE GENERAL

Introducción	xv
1. Sobre la cuantización topológica	1
2. Espectro topológico de sistemas mecánicos	11
2.1. Configuración clásica de los sistemas físicos	14
2.2. El espectro topológico para la configuración clásica de un sistema .	29
2.3. El haz fibrado principal para sistemas mecánicos	31
2.4. Ejemplos	37
3. Espectro topológico de la cuerda bosónica	63
3.1. Elementos de la cuantización topológica	65
3.2. El haz fibrado principal para la cuerda bosónica	68
3.3. Espectro topológico para un fondo general	75
3.4. Espectro topológico en fondo plano	80
3.5. Espectro topológico en fondos curvos	105
3.6. Comentarios	157
4. Campos gravitacionales, mapeos armónicos y espectros topológicos	159
4.1. Campos gravitacionales axisimétricos estacionarios	162

4.2. Representación como mapeos armónicos	166
4.3. Mapeos armónicos generalizados	171
4.4. Extensión dimensional y el caso estático	185
4.5. Espectro topológico para los mapeos armónicos generalizados . . .	190

Lista de Apéndices

A. Retracciones por deformación	211
B. Mapeos armónicos	215
C. Cuantización canónica de la cuerda bosónica	217
D. Método de perturbaciones comóviles	221
Bibliografía	225

Registro de publicaciones

1. Topological spectrum of classical configurations, F. Nettel and H. Quevedo, *AIP Conf. Proc.* **956**, 9 (2007).
2. Gravitational fields as generalized string models, F. Hernández, F. Nettel and H. Quevedo, *Gravitation and Cosmology* **15(2)**, 109 (2009)
3. Topological spectrum of mechanical systems, F. Nettel, H. Quevedo and M. Rodríguez, *Rep. Math. Phys.* **64(3)**, 355 (2009)
4. Topological spectrum of the harmonic oscillator, F. Nettel and H. Quevedo, *Int. J. of Pure and Appl. Math.* **70(2)**, 117 (2009)

En preparación:

1. Topological discretization of Maupertuis' mechanics, F. Nettel and H. Quevedo, para ser sometido en *J. Math. Phys.* (2011)
2. Topological discretization of generalized harmonic maps, F. Nettel and H. Quevedo, para ser sometido en *Rep. Math. Phys.* (2011)
3. Topological discretization of bosonic strings on flat and curved backgrounds, G. Arciniega, F. Nettel, L. Patiño and H. Quevedo, para ser sometido en *J. Math. Phys.* (2011)
4. Topological spectrum of massive scalar fields, G. Arciniega, F. Nettel, L. Patiño and H. Quevedo, para ser sometido en *J. Math. Phys.* (2011)

INTRODUCCIÓN

La motivación original para desarrollar la cuantización topológica propuesta por Patiño y Quevedo en [54] fue buscar una alternativa diferente a las ideas que prevalecen acerca de la cuantización del campo gravitacional. Sin embargo, con el desarrollo del método, principalmente en lo que se refiere a los espectros topológicos, la cuantización topológica nos ha permitido explorar otras teorías clásicas que tienen bien establecida su versión cuántica, como son la mecánica cuántica no relativista (número finito de grados de libertad) y la teoría de la cuerda bosónica. Una razón para intentar un camino distinto al convencional es explorar la posibilidad de evitar algunos problemas que surgen cuando se trata de cuantizar la gravedad y que en algunos casos se han superado parcialmente. Para describir un sistema físico se necesitan tres elementos, observables, estados y su evolución dinámica. Es objetivo de la cuantización topológica dar estos elementos para un sistema físico dado. La idea básica de la cuantización topológica es extraer la naturaleza discreta de los sistemas físicos a partir de una representación geométrico-topológica, en la cual en principio no se impone ninguna estructura matemática ajena a la descripción clásica, ni se hacen suposiciones sobre el comportamiento de tales sistemas. Es decir, una vez que un sistema clásico se representa de ma-

nera geométrica apropiadamente, lo que sigue son consecuencias matemáticas de dicha representación; esto al menos en el primer tramo del desarrollo del método el cual expondremos a lo largo de este trabajo: el cálculo de espectros topológicos. En lo que se refiere a los estados y su evolución dinámica aún no hay resultados, pero se han empezado a explorar algunas ideas basadas en la estructura de haz fibrado principal que representa al sistema bajo estudio. En el primer capítulo expondremos los elementos generales de la cuantización topológica, concentrando la atención en los espectros topológicos.

La cuantización de la gravedad se planteó alrededor de 1930 [65] y se ha desarrollado hasta el presente sin haber alcanzado una respuesta final a pesar de los avances que se han logrado [12]. Incluso, a partir de las ideas de Penrose sobre el papel del campo gravitacional en la reducción de los estados cuánticos [55], se han propuesto intentar probar experimentalmente los efectos de la gravedad cuántica [12, 65]. Es a partir de este tipo de ideas que surge el cuestionamiento de si en realidad es necesario cuantizar la gravedad, dejando una parte importante de la respuesta a las pruebas experimentales, como por ejemplo si puede darse el colapso gravitacional de la función de onda de un sistema [13].

Basándonos en análisis hechos en [12, 31, 33] revisaremos de manera muy general algunos de los problemas a los que se han enfrentado los distintos acercamientos convencionales al tema de la cuantización de la gravedad y su relevancia en el contexto de la cuantización topológica. Para empezar, existe una amplia variedad de razones por las cuales se piensa que es necesaria la cuantización de la gravedad, pero ninguna ha surgido como una necesidad a hechos experimentales que requieren una nueva explicación fundamental. Básicamente existen razones que van desde la consistencia entre los principios de la Relatividad General y la Física cuántica, como evadir la contradicción del principio de incertidumbre con

la posibilidad de utilizar la gravedad clásica para hacer mediciones precisas de la posición y el momento de una partícula, hasta argumentos pragmáticos como la existencia de una escala mínima en la geometría del espacio-tiempo que remueva las divergencias presentes en la teoría cuántica de campos o el deseo de que la implementación de una teoría cuántica de la gravedad remueva las singularidades del espacio-tiempo que aparecen en el contexto de la Relatividad General. Desde luego que existen también razones de tipo estético en el sentido de incorporar en un solo marco teórico todas las interacciones físicas.

Todavía no es claro qué es lo que se entiende por cuantización del espacio-tiempo, pero casi todas las propuestas coinciden en que esta debe incluir una escala mínima en la geometría del espacio-tiempo. En este sentido la cuantización topológica tendrá algo que decir una vez que se hayan definido estados y su evolución dinámica, lo cual está fuera del alcance de esta tesis, aunque ya se encuentra bajo investigación.

Entre los problemas que se presentan al querer formular una teoría cuántica de la gravedad y en los cuales se ubica la dificultad de lograr dicha unificación, está el principio de covariancia general de la Relatividad General que exige que las observables de dicha teoría cuántica respeten el principio de la invariancia bajo difeomorfismos; lo cual lleva a que tales observables sean no locales.

Existe también el problema del tiempo, el cual surge a razón del papel que juega este parámetro en la teoría cuántica para definir los momentos conjugados, y su uso a un valor dado para normalizar las funciones de onda. En principio la descripción desde la Relatividad General es independiente de la elección de la coordenada temporal para describir el espacio-tiempo, es decir, de la foliación espacial que de éste se hace. Sin embargo, no es claro que la evolución cuántica de los sistemas sea equivalente cuando se hacen distintas elecciones para el tiempo. En

el contexto de la cuantización topológica, en particular en el cálculo de espectros topológicos, esto no representa problema alguno, debido a que la representación geométrica que se hace de los sistemas y su tratamiento para obtener resultados no necesita asignar un papel especial a la coordenada temporal. En lo que se refiere a estados y su evolución dinámica es probable que se repita esta situación ya que las ideas preliminares sobre estos elementos se basan en el mismo tipo de estructuras geométrico/topológicas que utilizamos para representar a los sistemas físicos y en las cuales no tiene un rol especial la coordenada temporal.

Otra situación relacionada es la de los problemas de causalidad que involucraría una métrica que está sujeta a fluctuaciones cuánticas. Para la cuantización topológica aún no es claro que esto vaya a ser un problema, pues hasta ahora, no hay indicación en el planteamiento sobre la afectación de la estructura causal.

Por otra parte, todavía no se tiene una definición de los estados para la cuantización topológica, por lo que hablar de su normalización resulta prematuro en este momento.

El problema de la reconstrucción o el límite clásico de las teorías cuánticas no estará presente, o al menos no es el caso en el estado que guarda actualmente la cuantización topológica, debido a que en principio no será necesario definir operadores que actúen sobre los estados en un espacio de Hilbert (incluso sin saber si requeriremos dicho espacio como tal, aunque sí por seguro algo equivalente dentro de este contexto). Existen ciertamente algunos problemas más que debe enfrentar una teoría cuántica de la gravitación como la estructura a pequeñas escalas; así se tiene que el estado base desde la perspectiva de la Relatividad General vista como una teoría cuántica de campo es una variedad continua (el espacio de Minkowski), mientras que por otra parte se espera que exista una escala mínima de longitud para la gravedad cuántica, que modifique incluso el principio de incertidumbre.

Asimismo, aun si se superan los problemas técnicos de formular una teoría consistente, existen cuestiones de interpretación, entre las cuales están poder decir qué significa la función de onda del universo, qué es y cómo se da el colapso de la función de onda de los grados de libertad gravitacionales, qué significa la superposición de dos estados gravitacionales y su implicación en términos de su evolución dinámica y la reconciliación de dicho principio con la no linealidad fundamental en la Relatividad General. La interpretación en términos físicos de los operadores, estados, espectros y evolución una vez que se formule una teoría de la gravedad cuántica consistente.

A pesar de los problemas que se encuentran han surgido varias propuestas para una teoría de la gravedad cuántica, las cuales han resuelto algunos problemas, pero ninguna ha alcanzado la meta final. Sin embargo, resulta notable el grado de avance que han alcanzado algunas de ellas. Principalmente, dos de ellas han tomado un rol principal: la teoría de cuerdas (o supercuerdas propiamente) y la gravedad cuántica de lazos. La primera en principio tiene como objetivo una descripción más amplia dentro de la cual se encierra a la gravedad, esto es, intenta ser una descripción de todas las interacciones conocidas y por ende de la gravedad. En el tratamiento perturbativo se ha logrado cuantizar lo que sería la partícula que media la interacción gravitacional sin que se tengan divergencias y no solamente eso sino que la teoría requiere para su consistencia que el fondo en que se propagan estas excitaciones de la cuerda satisfaga las ecuaciones de Einstein en un espacio de dimensión 10 en el caso supersimétrico. En este tratamiento se plantea que la teoría de la Relatividad General debe ser modificada y que en el límite de bajas energías se recupera la acción de Einstein-Hilbert. Es decir se modifica la Relatividad General y se mantiene la teoría cuántica como está establecida. En el régimen no perturbativo también se han hecho progresos como la

descripción en ciertos casos de la entropía de agujeros negros a nivel microscópico a través de la correspondencia norma/gravedad.

Por otra parte se ha desarrollado la gravedad cuántica de lazos que ha logrado exitosamente, dentro del formalismo canónico de primer orden, hacer una teoría cuántica de la geometría. Esto es, se han definido consistentemente estados invariantes ante difeomorfismos con un producto interior y operadores geométricos bien definidos que actúan sobre un espacio de Hilbert bien definido. Sin embargo, aún enfrenta algunos problemas como el de la reconstrucción, es decir, cómo emerge la descripción clásica a partir de *objetos geométricos* discretos (los estados de la teoría). Es claro que en esta visión los principios de la Relatividad General son la base de la misma. En ambos casos el formalismo canónico de cuantización se considera fundamental y como punto de partida de ambas teorías.

Cabe mencionar que no es el objetivo de esta tesis estudiar a fondo los problemas de la cuantización de la gravedad y mucho menos dar una respuesta puntual a ellos, sino explorar una idea distinta sobre cómo abordar el problema de la cuantización. En este sentido la cuantización topológica, no pretende (todavía) competir con estas teorías cuánticas que están muy desarrolladas, sino que pretende dar una visión alternativa que eventualmente sea una opción viable para la descripción de los fenómenos discretos que se observan en la naturaleza, incluyendo, de existir en un futuro, observaciones relacionadas con la gravedad cuántica. En el estado que se encuentra esta propuesta no se puede más que ofrecer algunos resultados que animan a seguir indagando sobre los alcances de una idea que es sencilla. Es evidente que debemos guiarnos por comparación con los resultados que se han obtenido hasta ahora dentro del formalismo de la cuantización canónica dado que es por mucho la mejor descripción que se tiene, sin embargo tratamos de evitar imponer postulados en el método, de manera que esto resulta en una visión

alternativa. Este acercamiento es radical, pero la necesidad de modificar la teoría cuántica ha sido considerado incluso por Penrose cuando se refiere al proceso de inducción gravitacional del colapso de onda [55]:

“Indeed, this author’s own expectations are that no fully satisfactory theory will be forthcoming until there is a revolution in the description of quantum phenomena that is of as great a magnitude as that which Einstein introduced (in the description of gravitational phenomena) with his general theory of relativity”

Cabe mencionar un importante ejemplo de una postura distinta a lo convencional llamada Teoría Topos aplicada a formular las teorías físicas [21]. De manera muy general, se plantea el uso de teoría de categorías (de un topos) para la descripción de las teorías físicas. Una categoría es básicamente una colección de objetos y una colección de morfismos (flechas), que en el caso particular de la categoría de conjuntos los objetos son los conjuntos mismos y los morfismos funciones entre estos. Estas estructuras generales permiten hacer una formulación de las teorías cuánticas susceptibles de generalizaciones radicales e incluso de cabida a la construcción de nuevas teorías. Uno de los objetivos es no asignar *a priori* un papel fundamental a las cantidades continuas, esto teniendo en mente que probablemente una teoría cuántica de la gravedad tenga como resultado un espacio-tiempo fundamentalmente discreto. Incluso el uso de estas estructuras más generales permite utilizar otro formalismo lógico para la evaluación de las proposiciones sobre los estados del sistema físico. Sin embargo, la aplicación concreta de este esquema no está exenta de dificultades ya que a fin de cuentas plantea nuevas estructuras matemáticas como lo describe C. J. Isham: “Consequently, by postulating that, for a given theory type, each physical system carries its own topos, we are also saying that to each physical system plus theory type, there is an associated framework for

mathematics itself! Thus, classical physics uses classical mathematics, and quantum theory uses “quantum mathematics” - the mathematics formulated in the topoi of quantum theory. To this, we might add the conjecture: Quantum gravity uses ‘quantum gravity’ mathematics!”

Esta tesis se compone de tres partes. Primero abordaremos el caso de sistemas mecánicos con un número finito de grados de libertad. Mediante una formulación alternativa del principio variacional de Hamilton haremos una representación geométrica de los sistemas físicos que nos permitirá encontrar su espectro topológico. Estudiaremos el caso del oscilador armónico y el potencial central. Después aplicaremos el método para encontrar el espectro topológico en la teoría de la cuerda bosónica. Lo haremos sobre un fondo de Minkowski y para soluciones perturbativas de cuerdas que se propagan en un fondo de curvatura constante. Es importante mencionar que en este caso las dificultades técnicas que encontramos nos han obligado a considerar solamente algunos casos particulares, pero aun así se han podido obtener algunas relaciones discretas entre los parámetros físicos. Finalmente aplicaremos la cuantización topológica a una generalización de los mapeos armónicos que hemos definido [29] con el fin de representar como cuerdas generalizadas campos gravitacionales con dos vectores de Killing que conmutan, en particular espacios-tiempo estacionarios con simetría axial. En este caso es posible extender esta generalización para incluir el caso estacionario y obtendremos el espectro topológico para la solución de Schwarzschild, tanto en esta representación como en la usual en cuatro dimensiones que se sigue de la acción de Einstein-Hilbert. Cada capítulo está prácticamente autocontenido y presenta sus propias conclusiones. Sin embargo cerraremos la tesis con un apartado para comentar en general los resultados y plantear trabajo a futuro.

CAPÍTULO 1

SOBRE LA CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA

En este capítulo expondremos de manera general algunos aspectos de la cuantización topológica y en específico del cálculo de espectros topológicos. La idea de Dirac [20] sobre la discretización de la relación entre la carga de un monopolo magnético y un electrón al moverse este último alrededor del campo generado por el primero, dió la pauta a Patiño y Quevedo [54] para proponer un camino distinto para entender la naturaleza discreta de los sistemas físicos, en particular se analizó el caso de campos gravitacionales. El nombre de cuantización topológica y la idea fundamental sobre este tipo de cálculos se ha usado en distintos contextos relacionados con condiciones de cuantización de la carga en teorías de Yang-Mills [19], respecto a configuraciones de instantones y monopolos [67, 71], en modelos topológicos del electromagnetismo [64], en tópicos relacionados con



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

cuantización de corrientes en nano-estructuras [10] y en teoría de superconductores [14, 42]. También se ha analizado el concepto de cuantización topológica en el contexto de la cohomología [2]. Incluso a nivel de un libro de texto aparece el concepto de cuantización topológica en una formulación puramente geométrica que después puede ser aplicada a sistemas físicos descritos por un haz de línea hermitiano [25].

A pesar de que las ideas sobre la cuantización topológica son fundamentalmente las mismas, en este caso su aplicación es sobre distintos sistemas físicos los cuales pueden ser representados por diferentes haces fibrados principales. Además se pretende describir de manera completa la naturaleza discreta de los sistemas físicos, es decir, eventualmente tener una definición para los estados y estudiar su evolución dinámica en términos de estructuras geométrico-topológicas y la aplicación de tales ideas en diferentes sistemas físicos. En la primera etapa de este programa hemos buscado establecer una representación geométrica de los sistemas físicos y con base en esta definir el espectro topológico.

De manera esquemática y general es posible dar un panorama sobre lo que se busca hacer. En primer lugar debemos mencionar que para tener una descripción completa de un sistema físico debemos poder definir tres aspectos: observables, estados y evolución. En lo que se refiere a los estados tomamos como punto de partida la definición clásica, esto es, funciones reales sobre el espacio de configuración o el espacio fase, $\mathcal{O} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ó $\mathcal{O} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. De tal forma, las observables pueden tener un patrón continuo o discreto, siendo esto descrito por el espectro topológico, el cual definiremos más adelante, y no excluye el caso de observables que tomen valores en un continuo, como la energía asociada a una partícula libre. En lo que toca a los estados, observando que en las teorías de norma los campos (de norma o de materia, cualquier forma diferencial que toma valores en el

álgebra de Lie del grupo de simetría) son secciones de un haz vectorial (un haz vectorial es un caso particular de un haz fibrado principal [30]) cuyo grupo de estructura G es el grupo de simetría interno (por ejemplo $U(1)$) e incluso que en la mecánica cuántica las funciones de onda son consideradas secciones de un haz fibrado principal, podemos plantear que los estados dentro de la cuantización topológica serán secciones locales en algún haz fibrado. Es decir, si tenemos un haz fibrado principal $\mathcal{P} = (E, B, G, \pi)$, donde E es el espacio total, B el espacio base, G el grupo de estructura y π el mapeo de proyección, entonces para un estado ψ_i en el haz fibrado principal tenemos que $\pi : \psi_i \rightarrow \psi_{U_i}$ da la proyección del estado en el espacio base, con $U_i \subset B$ y así $\mathcal{O} : \psi_i \rightarrow \mathbb{R}, \psi_i \mapsto O_i \in \mathbb{R}$ da el valor de la observable. Esta definición sigue bajo investigación actualmente y aquí simplemente presentamos esquemáticamente las ideas que se persiguen; falta mucho trabajo para lograr una definición con la cual se pueda operar. En lo que se refiere a la evolución las ideas son prematuras y no abordaremos tal cuestión; baste decir que existe la posibilidad de encontrar algún operador diferencial definido en el haz fibrado principal que actúa sobre las secciones el cual pueda describir la evolución dinámica del sistema bajo estudio.

A continuación nos concentraremos en la definición de espectro topológico. Para comenzar debemos establecer cómo construimos el haz fibrado principal que representa a los sistemas físicos. Primero definimos la configuración clásica de un sistema físico como el par que consiste de una variedad diferencial con una conexión, (\mathcal{M}, ω) , la cual es única en el sentido de que dos variedades diferenciales que son isomorfas con la misma conexión se consideran la misma configuración clásica. Por ejemplo, en el caso de teorías de norma la variedad diferencial es el espacio-tiempo de Minkowski M_η y la conexión es la uno-forma diferencial A que toma valores en el álgebra de Lie \mathcal{g} del grupo de norma G , a la cual se le

llama también el potencial. En el caso de los campos gravitacionales la variedad (pseudo)Riemanianna, es decir una variedad diferencial dotada de una métrica, que representa la solución a las ecuaciones de Einstein \mathcal{M}_g es la variedad diferencial del par, de manera que la configuración clásica es (\mathcal{M}_g, Γ) ó (\mathcal{M}_g, ω) con Γ la conexión de Levi-Civita en caso de que tengamos una descripción tensorial en términos de bases coordenadas y con ω la conexión de espín en caso de que utilicemos una base ortonormal.

A partir de la configuración clásica podemos construir el haz fibrado principal que representa al sistema físico utilizando como grupo de estructura G (idéntico a la fibra estándar) el grupo de simetría bajo el cual es invariante el contenido físico de la configuración clásica. Así, a partir de (\mathcal{M}, ω) y G encontramos el haz fibrado principal \mathcal{P} con conexión $\tilde{\omega}$ asociando a cada punto de la variedad base \mathcal{M} el grupo de estructura G . Dada una sección local s_i la cual da lugar a una trivialización local (U_i, ϕ_i) con $U_i \subset \mathcal{M}$ y $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ [47], podemos introducir una conexión $\tilde{\omega}$ sobre \mathcal{P} a través del pullback $s_i^* \tilde{\omega} = \omega_i$ donde ω_i es la conexión ω del espacio base M en el conjunto abierto U_i . Se puede mostrar a través de estos elementos y del teorema de la reconstrucción [46, 47] que existe un haz fibrado principal único que representa al sistema físico para el cual consideramos la configuración clásica. Esto se ha demostrado para el caso de los campos gravitacionales [54] y lo consideraremos más adelante para los sistemas físicos que estudiamos en este trabajo.

Una vez que hemos asociado a una configuración clásica (\mathcal{M}, ω) un haz fibrado principal \mathcal{P} , es posible utilizar las propiedades invariantes de \mathcal{P} para caracterizar al sistema físico. Esto lo hacemos a través de las clases características asociadas a \mathcal{P} , $C(\mathcal{P})$, debido a que la integral sobre la una subvariedad compacta de la variedad base (o un ciclo de \mathcal{M}) también es un invariante topológico del haz sobre el

cual está definida la clase característica [15]. Existe un teorema en que se establece [15, 37] que la clase característica $C(\mathcal{P})$ se puede normalizar de manera tal que,

$$\int C(\mathcal{P}) = n, \quad (1.1)$$

con n un número entero llamado el número característico. Veremos más adelante, para los casos que tratemos, que el grupo de simetría en cada caso se puede reducir al grupo ortogonal $SO(k)$ mediante la descripción en términos de una base ortonormal. En este caso tenemos que la clase característica asociada a este grupo de transformaciones es la clase de Pontrjagin $p(\mathcal{P})$ y en particular la clase de Euler $e(\mathcal{P})$ cuando k es un número par. Estas clases se pueden escribir en términos de la dos-forma de curvatura R del espacio base como polinomios invariantes bajo la acción del grupo de estructura, en este caso $SO(k)$ [48],

$$\det \left(It - \frac{R}{2\pi} \right) = \sum_{j=0}^k p_{k-j}(R) t^j, \quad (1.2)$$

mientras que la clase de Euler $e(\mathcal{P})$ solamente definida para el caso en que k es par, $k = 2m$, se puede expresar en términos de la dos-forma de curvatura R de una conexión (pseudo)Riemanianna en el espacio base [15, 48],

$$e(\mathcal{P}) = \frac{(-1)^m}{2^{2m} \pi^m m!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2m}} R_{i_2}^{i_1} \wedge R_{i_4}^{i_3} \wedge \dots \wedge R_{i_{2m}}^{i_{2m-1}}. \quad (1.3)$$

Es claro que, estando en función de la curvatura, las clases características dependerán de ciertos parámetros λ_i , $i = 1, \dots, s$, que determinan las propiedades del sistema. De tal manera que al integrar la clase característica obtendremos una

relación discreta entre los parámetros,

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = n, \quad (1.4)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Esta relación es lo que definimos como el espectro topológico y nos da una discretización de los parámetros que determinan las propiedades del sistema físico bajo estudio.

Dada la definición de espectro topológico, a través de la integral de una clase característica sobre una (sub)variedad compacta del espacio base del haz fibrado principal, hemos recibido algunos comentarios sobre la similitud con los postulados de Bohr-Sommerfeld-Wilson. En la llamada teoría cuántica vieja se establece que para sistemas multi-periódicos las variables de acción deben tomar valores discretos, limitando de esa forma el conjunto de órbitas permitidas en el espacio fase. Esto se expresa mediante una integral proveniente de la misma definición de variable de acción [27, 44],

$$J_\alpha = \oint p_\alpha dq^\alpha = 2\pi\hbar n, \quad (1.5)$$

donde α se refiere a un grado de libertad en particular y no a una suma sobre este índice. Estas variables de acción son consideradas las apropiadas si no expresan la degeneración en caso de existir alguna. Eventualmente estos postulados llevan a expresiones para los espectros de los parámetros físicos a través de las constantes de movimiento involucradas en la descripción mediante las variables apropiadas de ángulo acción ($w_\alpha = \frac{\partial H(J)}{\partial J_\alpha}$)

En nuestra opinión existen diferencias sustanciales entre este conjunto de postulados y la forma en que los espectros topológicos se encuentran en la cuantización

topológica. Principalmente, en la teoría cuántica antigua la relación discreta entre los parámetros que determinan el sistema físico se postula, mientras que para la cuantización topológica son resultado de las propiedades topológicas del haz fibrado principal mediante el cual se representa al sistema físico bajo estudio. Adicionalmente, la cuantización topológica tiene como objetivo completar los tres elementos que describen a un sistema físico: observables, estados y su evolución dinámica, mientras que la teoría cuántica antigua ha sido abandonada en parte por la falta de dos de estos elementos o su incompatibilidad con las nociones clásicas de trayectorias en el espacio fase respecto a la descripción ondulatoria de la mecánica cuántica.

Entre otras limitaciones se encuentran la restricción a sistemas periódicos o multi-periódicos, los fenómenos de colisiones se encuentran, en general, fuera de su alcance, y la falta de justificación para la cuantización de las trayectorias físicas.

La teoría cuántica antigua fue abandonada debido a que los resultados sobre el momento angular orbital, la descripción del átomo He , y la molécula ionizada H_2^+ , discrepaban con las medidas, en particular con la energía del estado base de estos sistemas [9]. Al mismo tiempo el desarrollo de la mecánica cuántica cerró el paso a las ideas de la teoría cuántica antigua [9, 44].

No obstante, los postulados para encontrar espectros se han seguido aplicando; en algunos casos, con algunas modificaciones, se han hecho descripciones más precisas del átomo H y de moléculas con un electrón como H_2^+ [9]. También se han aplicado para el cálculo de espectros para la masa de agujeros negros, como para el caso de Kerr (Newman) en [8]. En ambos casos las relaciones discretas se postulan y en nuestra opinión eso marca la principal diferencia con el método de la cuantización topológica.

El uso de números topológicos en la física teórica es algo común, como ocurre en el caso en un teoría de norma sobre un espacio-tiempo de Minkowski. La solución clásica para el vacío dada por una conexión plana puede ser descrita por el potencial $A = f^{-1}df$ con $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow G$, la cual se puede restringir a los mapeos $f : S^3 \rightarrow G$. Se sabe que estos campos identificados con el vacío se pueden definir sobre todo el espacio S^3 , de manera que los vacíos clásicos se pueden clasificar mediante los mapeos $f : S^3 \rightarrow G$, los cuales están dados por los elementos del grupo de homotopía $\pi_3(G)$, a los que se les llama “winding numbers”. Clásicamente no es posible pasar de un vacío a otro con “winding numbers” distintos solamente a través de estados de vacío, es decir, cada clase de equivalencia homotópica describe una situación dinámica distinta. Sin embargo, mediante una transformación de norma es posible relacionar dos vacíos con “winding numbers” distintos. Así se tiene una situación de equivalencia de estos vacíos etiquetados por estos números topológicos que es distinta, por una parte la equivalencia dada por el grupo de homotopía y por otro lado la correspondiente a la simetría de norma. Para evitar esto es que se introducen los vacíos θ en la teoría cuántica correspondiente. Si $|n\rangle$ es un vacío cuántico en el espacio de Hilbert de la teoría identificado con un vacío clásico con “winding number” n , se introduce un estado tal que sea invariante bajo las dos equivalencias (la de homotopía y la de norma) dado por [24],

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{in\theta} |n\rangle \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}.$$

A estos estados se les conoce como vacíos θ . Existen generalizaciones a esto cuando los espacios de dimensión tres son distintos a S^3 (por ejemplo $\mathbb{R}P^3$) en la que se utilizan aún otros números topológicos llamados “winding numbers” secundarios [32] dados por un grupo de cohomología. A nuestro entender, el origen y la forma en que se utilizan estos números topológicos para hacer esta clasificación

de estados de vacío, es distinto al de los números característicos que utilizamos para la definición del espectro topológico en el método de cuantización topológica.

En los siguientes capítulos consideraremos todos estos elementos para calcular el espectro topológico para distintas configuraciones clásicas en general y exponemos algunos ejemplos concretos. Cada capítulo fue diseñado con el propósito de estar autocontenido en lo que se refiere a la construcción del haz fibrado principal y el cálculo de las clases características y los espectros topológicos en general.

Cabe destacar que, mediante la definición de configuración clásica, la construcción del haz fibrado principal y la definición de espectro topológico, hemos logrado entender y sistematizar el formalismo en lo que se refiere a la discretización de las observables. No obstante, como se verá a lo largo del trabajo, los detalles técnicos de cálculo tienen todavía muchos aspectos que superar. También reconocemos que esta propuesta para describir la naturaleza discreta de los sistemas físicos aún se encuentra en sus primeros pasos y que tenemos por delante un difícil pero interesante camino.

CAPÍTULO 2

ESPECTRO TOPOLÓGICO DE SISTEMAS MECÁNICOS

En este capítulo estudiamos el espectro topológico de configuraciones clásicas con un número finito de grados de libertad correspondientes a sistemas conservativos. En el contexto de la cuantización topológica el espectro topológico es posiblemente la consecuencia más inmediata de formular la mecánica clásica de manera tal que el método de la cuantización topológica se pueda aplicar, o al menos los elementos de este método que están a nuestro alcance hasta el día de hoy.

La aplicación de la cuantización topológica en el caso de sistemas conservativos con un número finito de grados de libertad resulta ser de suma importancia para el desarrollo de este nuevo proceso mediante el cual pretendemos describir la naturaleza discreta de los sistemas físicos. Esto debido a que nos permite comparar,

desde los primeros resultados, con la mecánica cuántica (no relativista), que constituye la mejor teoría que tenemos en la actualidad para describir correctamente dichos sistemas en cierto régimen de escalas energéticas o de tamaños característicos, siendo que este tipo de comportamiento de los sistemas físicos escapa a las descripciones que pertenecen al ámbito de lo que se conoce como mecánica clásica o analítica. Este umbral que existe entre la descripción clásica y la cuántica no es del todo preciso en lo que respecta a un valor en la escala de longitud o la escala energética de los fenómenos a describir, pero en condiciones normales se puede ubicar alrededor de algunos ångstroms ($1\text{Å} = 10^{-10}m$), es decir alrededor del tamaño de los átomos y moléculas [44].

Las descripciones de los sistemas físicos que resultan ser las más utilizadas tienen en común que las distintas interacciones que intervienen entre las partículas que describen el contenido de materia, están representadas por campos clásicos. Resulta natural, desde el punto de vista de la física moderna, hacer una descripción de los sistemas físicos en el lenguaje de las variedades diferenciales, y más específicamente en términos de haces fibrados [26], estructura matemática que también constituye la base para abordar la cuantización topológica. Asimismo estos campos clásicos y el principio variacional del que emanan las ecuaciones de campo que dictan el comportamiento físico de dichos sistemas son el punto de partida para realizar la cuantización de forma canónica [56]. Existe también la posibilidad de utilizar el método de la integral de camino, pero aún este método no escapa a la noción de campo [56].

El primer objetivo para la cuantización topológica, en el caso de la mecánica clásica, es por una parte encontrar una descripción adecuada que represente sistemas con un número finito de grados de libertad en términos de una variedad diferencial Riemanniana que incluya toda la información acerca del sistema físico bajo

estudio. De tal manera se podrá construir el haz fibrado principal correspondiente, y a partir de éste, calcular el espectro topológico para los distintos sistemas, esto nos permitirá confrontar dichos resultados con los espectros canónicos obtenidos a través de la mecánica cuántica, los cuales constituyen resultados sumamente sólidos, incluso a un nivel puramente académico.

Existe más de una posibilidad de encontrar estructuras geométricas en la mecánica clásica, esto es, existen variedades Riemannianas o haces fibrados vectoriales, tales como el espacio de configuración y el espacio fase, que se emplean en la descripción de los sistemas físicos. Sin embargo, como veremos en el desarrollo de este capítulo, estas posibilidades no constituyen la configuración clásica adecuada para la cuantización topológica, ya que cuando son considerados respecto a su estructura como haces fibrados, el espacio base para dichos haces carece en uno u otro caso de parte de la información que determina la dinámica del sistema bajo estudio.

La configuración clásica que nos permitirá encontrar el espectro topológico está dada por la formulación que emana del llamado Principio de Maupertuis [5, 25]. Este principio nos permite encontrar una variedad Riemanniana que describe al sistema físico en cuestión, incluyendo toda la información en la correspondiente métrica. Es esta variedad junto con la conexión asociada a la métrica lo que llamaremos la configuración clásica del sistema, y es a partir de ella que podemos construir el haz fibrado principal que constituye el primer paso hacia la obtención del espectro topológico.

Dada esta configuración clásica construimos una estructura geométrica, específicamente un haz fibrado principal, el cual probaremos que es único, y a partir de esta estructura encontraremos la definición de espectro topológico, que en general, como ya hemos visto en el capítulo anterior, se puede definir para cualquier sistema

físico que sea susceptible de ser descrito dentro del contexto de la cuantización topológica. Analizaremos también algunos sencillos ejemplos que nos permitirán ver el alcance de la definición de espectro topológico y que darán lugar a comentar algunas conclusiones sobre su relación respecto al espectro canónico.

2.1. Configuración clásica de los sistemas físicos

La configuración clásica de un sistema físico la hemos definido como una estructura geométrica que consiste de una variedad diferencial y una conexión (\mathcal{M}, ω) , la cual es única en el sentido de que dos variedades diferenciales con la misma conexión que son isomorfas representan la misma configuración clásica para un sistema dado. En esta sección estableceremos dicha configuración clásica para los sistemas mecánicos con un número finito de grados de libertad, encontraremos que esto es posible gracias a una variedad diferencial Riemanniana, cuya métrica contiene toda la información relevante a la dinámica del sistema y cuya conexión se sigue a partir de dicha métrica. Como ya hemos mencionado, una vez establecida la configuración clásica podemos proceder a la construcción del haz fibrado principal y seguir con el cálculo del espectro topológico. Analizaremos primero algunos posibles escenarios para establecer la configuración clásica y a partir de uno de ellos construir el haz fibrado principal.

La mecánica clásica puede ser planteada de distintas formas, por una parte tenemos una formulación vectorial con base en las leyes de Newton, las cuales básicamente nos dicen cómo encontrar las ecuaciones de movimiento una vez que hemos podido expresar en forma vectorial cualquier fuerza o interacción que influya sobre el sistema físico. Por otro lado tenemos las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana, de las cuales la formulación Lagrangiana se caracteriza por ser

una formulación covariante. Es en estas últimas dos formulaciones que un principio variacional aparece como el fundamento que nos lleva a obtener las ecuaciones de movimiento, que en última instancia nos revelan, una vez resueltas, el comportamiento completo de los sistemas bajo estudio.

Así tenemos que el sistema físico se encuentra determinado cuando uno es capaz de encontrar el Lagrangiano o Hamiltoniano de dicho sistema, obviamente queda el importante paso de resolver las ecuaciones de movimiento, aunque en muchas ocasiones el simple hecho de conocer dichas funciones escalares resulta suficiente para determinar algunas características del comportamiento del sistema bajo estudio. Es en estas formulaciones, relativamente más recientes, que resulta fácil introducir el lenguaje de la geometría diferencial para su descripción.

Un sistema físico en la mecánica clásica queda completamente descrito una vez que resolvemos las ecuaciones de movimiento y proporcionamos un conjunto de condiciones iniciales o condiciones de frontera. Este sistema de ecuaciones de movimiento se puede obtener a través del principio variacional de Hamilton, el cual es una forma alterna de obtener una formulación equivalente de la mecánica clásica Newtoniana, al menos en el caso de sistemas no disipativos o con constricciones no holonómicas.

Para la formulación Lagrangiana consideremos un conjunto de coordenadas q^α , con $\alpha = 1, 2, \dots, k$ siendo k la dimensión del espacio de configuración. Estas coordenadas generalizadas son un conjunto de coordenadas independientes, es decir, la información sobre las posibles constricciones que pesan sobre el sistema ya está incorporada de manera que éstas son un conjunto de coordenadas independientes en el espacio de configuración o variedad de configuración \mathcal{M} .

La primera estructura geométrica que se encuentra en mecánica clásica es la varie-

dad de configuración \mathcal{M} , generalmente sobre esta variedad utilizamos el sistema de coordenadas generalizadas. Asociada a la variedad de configuración \mathcal{M} tenemos el haz tangente $T\mathcal{M}$, un haz vectorial que tiene como fibra en cada punto $x \in \mathcal{M}$ al espacio tangente $T_x\mathcal{M}$ en dicho punto. Un punto en el haz tangente se expresa como el par (x, v) , que en función de las coordenadas generalizadas podemos expresar como $x = (q^1, \dots, q^k)$, esto es, las coordenadas asignadas al punto x sobre \mathcal{M} y $v = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^k)$ las componentes de un vector en el espacio tangente $T_x\mathcal{M}$ a las cuales llamamos velocidades generalizadas. Hemos considerado que $\dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{dt}$ son las componentes en la base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^k}\}$ del vector tangente a una curva sobre la variedad de configuración \mathcal{M} , la cual está parametrizada por el tiempo t . Podemos introducir una métrica \mathbf{g} sobre la variedad de configuración, la cual está determinada por la energía cinética del sistema, $T = \frac{1}{2}\mathbf{g}(v, v)$, donde esta última expresión nos indica que la métrica es un tensor o función bilineal en cada punto de $x \in \mathcal{M}$, esto es, $\mathbf{g} : T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

La estructura geométrica que encontramos en la variedad de configuración y la métrica asociada a la energía cinética del sistema físico es incompleta en términos de la dinámica del sistema. Más aún, el haz tangente asociado a esta variedad $T\mathcal{M}$, tampoco contiene la información dinámica del sistema. Para lograr una descripción completa debemos introducir el Lagrangiano, que en el caso en que no existe dependencia temporal explícita, simplemente es una función sobre el haz tangente $L : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. En una buena parte de los casos esta función la podemos encontrar con la prescripción $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$, con T la expresión para la energía cinética del sistema y V la energía potencial. Esto lo consideramos en el caso de fuerzas que se pueden derivar de un potencial, es decir para fuerzas conservativas.

El formalismo Lagrangiano parte de los elementos geométricos que acabamos de

mencionar, en particular del haz tangente $T\mathcal{M}$. Tiene como objetivo hacer una formulación covariante de la mecánica clásica, esto es, la forma en que encontramos las ecuaciones de movimiento es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas, llamadas transformaciones de punto, $q'^{\alpha} = q'^{\alpha}(q^1, \dots, q^k, t)$. Como ya hemos mencionado, lo único que se tiene que determinar es el Lagrangiano del sistema, así de esta manera se encontrarán las ecuaciones que determinan el comportamiento dadas las condiciones iniciales o de frontera. Las ecuaciones de movimiento las encontramos a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales a su vez las podemos determinar ya sea a partir del principio de D'Alambert o del trabajo virtual, o a partir de un principio variacional, llamado principio de Hamilton [27], [35]. Nos concentraremos brevemente en revisar el principio variacional en el contexto de las variedades diferenciales y los haces fibrados.

Partimos del haz tangente extendido $T\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ para el caso más general en el que la función Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t) : T\mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ depende explícitamente del tiempo. Después trataremos con sistemas conservativos únicamente y no será necesario utilizar esta extensión. Describimos una curva $C(t) = \{q^1(t), \dots, q^k(t)\}$ en términos de las coordenadas generalizadas, parametrizada por t , sobre la variedad de configuración \mathcal{M} , así como un conjunto de curvas que son variaciones a partir de $C(t)$. Parametrizando las variaciones con λ , tenemos que el conjunto de curvas lo podemos expresar como $C(t, \lambda) = C(t) + \lambda \delta C(t)$, donde $\delta C(t) = \left. \frac{\partial C(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$ es llamada la variación de la curva. Debemos notar que al hacer $\lambda = 0$ recuperamos la curva original, $C(t, \lambda = 0)$. Considerando variaciones hasta el primer orden, podemos expresar en términos de las coordenadas generalizadas, tanto a la curva original como al conjunto de variaciones, $q^{\alpha}(t)$ con $\alpha = 1, \dots, k$ y $q^{\alpha}(t, \lambda) = q^{\alpha}(t) + \lambda \delta q^{\alpha}(t) = q^{\alpha}(t) + \lambda \left. \frac{\partial q^{\alpha}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$, respectivamente. A la curva $C(t)$ en el espacio de configuración le podemos asociar una curva en el haz tan-

gente mediante $\dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{dt}$. A esta curva $\{q^\alpha(t), \dot{q}^\alpha(t)\}$ le llamamos el levantamiento de $C(t)$, y resulta ser único sobre el haz tangente $T\mathcal{M}$. De la misma forma consideramos el levantamiento del conjunto de variaciones de la curva $C(t, \lambda)$ desde la variedad de configuración \mathcal{M} sobre el haz tangente. Las variaciones de las curvas levantadas no son independientes de las variaciones que existen sobre \mathcal{M} . Esto es, las variaciones de la curva $\{q^\alpha(t)\}$ producen una variación en las velocidades generalizadas la cual se construye a partir de las variaciones de la curva, lo cual expresamos como,

$$\delta \left(\frac{dq^\alpha}{dt} \right) = \frac{d \delta q^\alpha}{dt}. \quad (2.1)$$

La acción $S[C(t)]$ es un funcional definido por,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (2.2)$$

a partir de la cual podemos enunciar el principio de Hamilton. Entre todas las posibles curvas $C(t, \lambda)$ cuya variación es cero en los extremos, es decir, $\delta q^\alpha(t_1) = \delta q^\alpha(t_2) = 0$, la trayectorial física $C(t)$ del sistema bajo estudio es tal que la variación de la acción es cero. Esto es, la trayectoria física descrita por el sistema es un extremo de la acción S ,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = 0. \quad (2.3)$$

A partir de (2.1), de la condición de variación nula en los extremos e integrando por partes la expresión para la variación de la acción podemos obtener como consecuencia del principio de Hamilton las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L). Una vez dado el Lagrangiano podemos determinar las ecuaciones de movimiento que

obedece el sistema utilizando las ecuaciones de E-L,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \quad (2.4)$$

con $\alpha = 1, \dots, k$. Encontramos en esta ecuación la definición del momento canónico conjugado a la variable q^α , también llamado momento generalizado,

$$p_\alpha(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}, \quad (2.5)$$

el cual jugará un rol más notable en la formulación Hamiltoniana. Hacemos notar en la ecuación (2.5) que el momento conjugado es, en general, una función de todas las coordenadas generalizadas y sus respectivas velocidades generalizadas, y que en caso de tener un sistema regular o no singular, esto es,

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \right] \neq 0, \quad (2.6)$$

constituyen un conjunto de relaciones invertibles, esto es, podemos encontrar todas las velocidades generalizadas como función de los momentos y coordenadas generalizadas, $\dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha(q, p)$ para toda $\alpha = 1, \dots, k$. Es conveniente hacer notar que el momento generalizado constituye un vector covariante o covector, esto es, una vez que hemos impuesto un tensor métrico g sobre la variedad de configuración, p_α con $\alpha = 1, \dots, k$, constituyen las componentes del vector dual asociado al vector de velocidad generalizada con componentes \dot{q}^α . Esta estructura métrica sobre \mathcal{M} está dada a partir de la energía cinética T del sistema físico,

$$2T = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad (2.7)$$

con $g_{\alpha\beta}$ las componentes del tensor métrico respecto a las coordenadas generalizadas. De manera que cuando tenemos sistemas no disipativos en los cuales la función de energía potencial no depende de las velocidades generalizadas $V = V(q)$, la definición para el momento generalizado en (2.5) coincide con $p_\alpha = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta$.

Por otra parte la formulación Hamiltoniana tiene como estructura geométrica subyacente otro haz fibrado vectorial llamado el haz cotangente $T^*\mathcal{M}$. Este haz fibrado tiene como espacio base la misma variedad de configuración \mathcal{M} que existe en el caso del formalismo de Lagrange y las fibras las constituyen los espacios duales $T_x^*\mathcal{M}$, al espacio tangente $T_x\mathcal{M}$ en cada punto $x \in \mathcal{M}$. Sin embargo, el principio de Hamilton sobre $T^*\mathcal{M}$ se plantea de una manera un poco distinta respecto a la curva que representa la trayectoria física y las variaciones que de ella se consideran. Más aún, la formulación de la mecánica en el espacio fase tiene una estructura geométrica adicional llamada estructura simpléctica, de la cual carece la formulación Lagrangiana. Consideramos el haz cotangente extendido $T^*\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ con coordenadas (q^α, p_α, t) y una función Hamiltoniana sobre dicho espacio $H(q, p, t) : T^*\mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde las funciones p_α constituyen las componentes del campo de uno-formas sobre \mathcal{M} . Se puede definir una uno-forma sobre $T^*\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ como $p_\alpha dq^\alpha - Hdt$, llamada la uno-forma de Poincaré. Sea $\lambda(t) = (q(t), p(t))$ una curva en el espacio fase a la cual le imponemos que la variación en los extremos sea tal que $\delta q = 0$, $\delta t = 0$ y que representa la trayectoria física del sistema bajo estudio. A diferencia del principio de Hamilton formulado sobre el haz tangente en el cual las variaciones sobre el espacio de configuración inducen una variación en la curva sobre el haz tangente, las variaciones de q^α y p_α son independientes. De esta manera podemos formular el principio de Hamilton en el espacio fase: de todas las posibles curvas con puntos extremos fijos $\delta q = 0$ y

$\delta t = 0$, la integral de la uno-forma de Poincaré tiene un extremo en λ ,

$$\delta \int (p_\alpha dq^\alpha - H dt) = 0. \quad (2.8)$$

A partir de esto se obtienen las ecuaciones de Hamilton, $\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$ y $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. Cuando el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo tenemos un sistema conservativo, esto define una hipersuperficie en el espacio fase $H(q, p) = E$ y el principio variacional puede ser formulado para curvas que se encuentran sobre esta hipersuperficie a través de la acción reducida sobre el espacio fase $T^*\mathcal{M}$,

$$\int p_\alpha dq^\alpha. \quad (2.9)$$

La curva $\lambda(t) = (q(t), p(t))$ que describe el movimiento del sistema físico (que es solución a las ecuaciones de Hamilton y por lo tanto sigue el flujo Hamiltoniano) con condiciones iniciales sobre la hipersuperficie $H = E$ permanecerá sobre dicha hipersuperficie durante todo su trayecto. Al proyectar esta curva sobre el espacio de configuración \mathcal{M} obtenemos como es usual la trayectoria $q^\alpha = q^\alpha(t)$ que describe el movimiento en la variedad de configuración. El principio variacional se puede entonces reformular considerando variaciones sobre la curva en el espacio de configuración $C(t) = (q^\alpha(t))$, con extremos fijos $\delta q = 0$, parametrizada de manera que al ser levantada sobre el espacio fase se encuentre sobre la hipersuperficie $H = E$, de tal forma que la acción reducida es un extremo de la trayectoria física,

$$\delta \int p_\alpha dq^\alpha = 0. \quad (2.10)$$

Este es el principio de Maupertuis. Consideremos un Lagrangiano de la forma,

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - V(q), \quad (2.11)$$

con $g_{\alpha\beta}(q)$ las componentes de una métrica Riemanniana sobre \mathcal{M} determinada por la energía cinética del sistema bajo estudio (2.7) y a través de la cual podemos relacionar las velocidades generalizadas con las componentes de los momentos generalizados, $p_\alpha = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta$, lo cual coincide en este caso con (2.5). La uno-forma de Poincaré reducida se puede expresar de la siguiente manera,

$$p_\alpha dq^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dq^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{dq^\alpha}{dt} dt = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta dt = 2T dt, \quad (2.12)$$

y debido a la condición de estar en la hipersuperficie $H = E$ tenemos que la energía cinética se puede expresar como

$$T = E - V(q), \quad (2.13)$$

así entonces tenemos que

$$p_\alpha dq^\alpha = 2 [E - V(q)] dt. \quad (2.14)$$

Por otra parte la longitud de arco en la variedad de configuración \mathcal{M} expresada mediante el elemento de línea $ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$, puede expresarse en términos de la energía cinética parametrizada por el tiempo t ,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta dt^2 = 2T dt^2, \quad (2.15)$$

de manera que la uno-forma de Poincaré reducida se puede escribir como,

$$p_\alpha dq^\alpha = 2Tdt = \sqrt{2T}ds. \quad (2.16)$$

De esta forma podemos introducir una métrica h la cual es conforme a la métrica sobre \mathcal{M} determinada por la energía cinética g , $h = 2[E - V(q)]g$, y que expresada como elemento de línea es,

$$d\tilde{s}^2 = 2[E - V(q)]ds^2. \quad (2.17)$$

A la métrica asociada a este elemento de línea se le conoce como la métrica de Jacobi y como veremos nos permite expresar el principio de Maupertius desde una perspectiva geométrica, siendo que la trayectoria física que recorre el sistema en el espacio de configuración \mathcal{M} es una geodésica asociada a la métrica de Jacobi. Antes de mostrarlo consideremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano (2.11),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0, \quad (2.18)$$

a partir de las cuales obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$g_{\mu\beta} \ddot{q}^\beta + \partial_\sigma g_{\mu\beta} \dot{q}^\beta \dot{q}^\sigma - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \partial_\mu V(q) = 0, \quad (2.19)$$

con $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial q^\mu}$ y que puede reducirse a una forma tipo geodésica a partir de una breve manipulación algebraica,

$$\ddot{q}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} \dot{q}^\sigma \dot{q}^\beta + g^{\alpha\mu} \partial_\mu V(q) = 0, \quad (2.20)$$

con

$$\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu} (\partial_{\sigma}g_{\mu\beta} + \partial_{\beta}g_{\mu\sigma} - \partial_{\mu}g_{\sigma\beta}), \quad (2.21)$$

los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g sobre \mathcal{M} determinada por la energía cinética. Estas ecuaciones de movimiento pueden ser derivadas a partir del principio variacional formulado tanto en el espacio tangente $T\mathcal{M}$ a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, como en el espacio cotangente o fase $T^*\mathcal{M}$ utilizando las ecuaciones de Hamilton. La formulación geométrica del principio de Maupertuis la podemos enunciar mediante el siguiente:

Teorema 1. Las ecuaciones de movimiento (2.20) son equivalentes a las ecuaciones de las geodésicas de la variedad Riemanniana (\mathcal{M}, h) con h la métrica de Jacobi,

$$\frac{d^2q^{\alpha}}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\beta}^{\alpha} \frac{dq^{\sigma}}{d\tilde{s}} \frac{dq^{\beta}}{d\tilde{s}} = 0, \quad (2.22)$$

donde

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}h^{\alpha\lambda} (\partial_{\sigma}h_{\lambda\beta} + \partial_{\beta}h_{\sigma\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\sigma\beta}), \quad (2.23)$$

es la conexión de Levi-Civita asociada a h con elemento de línea,

$$d\tilde{s}^2 = h_{\alpha\beta}dq^{\alpha} \otimes dq^{\beta} = 2[E - V(q)]g_{\alpha\beta}dq^{\alpha} \otimes dq^{\beta}, \quad (2.24)$$

bajo la condición para los parámetros t y \tilde{s} dada por,

$$\frac{d\tilde{s}}{dt} = 2[E - V(q)]. \quad (2.25)$$

Dem. El conjunto de ecuaciones (2.22) se sigue de la variación de

$$\int d\tilde{s} = \int \sqrt{h_{\sigma\beta} \frac{dq^\sigma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}}} d\tilde{s}. \quad (2.26)$$

Suponiendo que \tilde{s} es un parámetro afín, en particular que es tal que $h_{\sigma\beta} \frac{dq^\sigma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} = 1$, tenemos entonces,

$$\begin{aligned} \delta \int d\tilde{s} &= \int d\tilde{s} \left[h_{\sigma\beta} \frac{d\delta q^\sigma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial q^\lambda} \delta q^\lambda \frac{dq^\sigma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} \right] \\ &= \int d\tilde{s} \left[\frac{d}{d\tilde{s}} \left(h_{\sigma\beta} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} \delta q^\sigma \right) - \frac{d}{d\tilde{s}} \left(h_{\sigma\beta} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} \right) \delta q^\sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial q^\lambda} \delta q^\lambda \frac{dq^\sigma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} \right], \\ &= \int \left[-\frac{d}{d\tilde{s}} \left(h_{\lambda\beta} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial q^\lambda} \frac{dq^\sigma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} \right] \delta q^\lambda, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde hemos utilizado que $\delta q^\lambda = 0$ en los puntos extremos. Como la variación es arbitraria tenemos que la expresión que multiplica a la variación δq^λ en el integrando tiene que anularse para todo λ ,

$$\begin{aligned} h_{\lambda\beta} \frac{d^2 q^\beta}{d\tilde{s}^2} + \frac{\partial h_{\lambda\beta}}{\partial q^\gamma} \frac{dq^\gamma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial q^\lambda} \frac{dq^\sigma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} &= 0, \\ h_{\lambda\beta} \frac{d^2 q^\beta}{d\tilde{s}^2} + \frac{1}{2} (\partial_\sigma h_{\lambda\beta} + \partial_\beta h_{\sigma\lambda} - \partial_\lambda h_{\sigma\beta}) \frac{dq^\sigma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

llegando finalmente a las ecuaciones de las geodésicas (2.22) para (\mathcal{M}, h) . A partir de la relación entre los parámetros t y \tilde{s} (2.25) encontramos que,

$$\begin{aligned} \frac{dq^\mu}{d\tilde{s}} &= \frac{dt}{d\tilde{s}} \frac{dq^\mu}{dt} = \frac{1}{2[E - V(q)]} \dot{q}^\mu, \\ \frac{d^2 q^\mu}{d\tilde{s}^2} &= \frac{1}{(2[E - V(q)])^2} \ddot{q}^\mu + 2 \frac{\partial_\nu V(q)}{(2[E - V(q)])^3} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu, \end{aligned} \quad (2.29)$$

mientras que las componentes de la métricas de Jacobi y de la correspondiente a

la energía cinética están relacionadas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= 2[E - V(q)] g_{\mu\nu} \\ h^{\mu\nu} &= \frac{1}{2[E - V(q)]} g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Utilizando (2.29) y (2.30) obtenemos que los símbolos de Christoffel asociados a las dos métricas guardan una relación que depende de la función de energía potencial,

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\sigma\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} - \frac{g^{\alpha\nu}}{2[E - V(q)]} (g_{\nu\beta}\partial_{\sigma}V + g_{\sigma\nu}\partial_{\beta}V - g_{\sigma\beta}\partial_{\nu}V). \quad (2.31)$$

Incorporando este último resultado y las expresiones (2.29, 2.30) en la ecuación de la geodésica (2.22),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2[E - V])^2} \ddot{q}^{\alpha} + \frac{2}{(2[E - V])^3} \partial_{\nu}V \dot{q}^{\nu} \dot{q}^{\alpha} + \\ &+ \left[\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} - \frac{g^{\alpha\nu}}{2[E - V(q)]} (g_{\nu\beta}\partial_{\sigma}V + g_{\sigma\nu}\partial_{\beta}V - g_{\sigma\beta}\partial_{\nu}V) \right] \frac{1}{(2[E - V])^2} \dot{q}^{\sigma} \dot{q}^{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} \dot{q}^{\sigma} \dot{q}^{\beta} + \frac{1}{E - V} \partial_{\nu}V \dot{q}^{\nu} \dot{q}^{\alpha} - \\ - \frac{1}{2[E - V]} \left[\delta^{\alpha}_{\beta} \partial_{\sigma}V + \delta^{\alpha}_{\sigma} \partial_{\beta}V - g^{\alpha\nu} g_{\sigma\beta} \partial_{\nu}V \right] \dot{q}^{\sigma} \dot{q}^{\beta} = 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

obtenemos la siguiente ecuación,

$$\ddot{q}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} \dot{q}^{\sigma} \dot{q}^{\beta} + g^{\alpha\nu} \partial_{\nu}V \frac{g_{\sigma\beta} \dot{q}^{\sigma} \dot{q}^{\beta}}{2[E - V]} = 0. \quad (2.34)$$

A partir de (2.24) y la relación de los parámetros (2.25), $d\tilde{s}^2 = (2[E - V])^2 dt^2$, tenemos que,

$$\frac{g_{\sigma\beta}\dot{q}^\sigma\dot{q}^\beta}{2[E - V]} = 1, \quad (2.35)$$

que incluido en la ecuación anterior, finalmente nos lleva al resultado que estábamos buscando,

$$\ddot{q}^\alpha + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \dot{q}^\sigma \dot{q}^\beta + g^{\alpha\nu} \partial_\nu V = 0, \quad (2.36)$$

con lo que concluimos la prueba de la equivalencia entre los sistemas de ecuaciones (2.22) y (2.20). \square

La forma de la métrica de Jacobi impone ciertas condiciones en cuanto se refiere a la región en la variedad de configuración en que es válido el principio de Maupertuis. Si la métrica \mathbf{g} y la función que describe la energía potencial $V(q)$ son funciones suaves, al menos C^2 (por aquello de la curvatura) tenemos que las trayectorias físicas descritas por geodésicas de la variedad $(\mathcal{M}, \mathbf{h})$ deben limitarse a la región,

$$\Sigma = \{q^\alpha \in \mathcal{M} | E - V(q) > 0\}, \quad (2.37)$$

donde hemos descrito los puntos en la variedad por sus coordenadas generalizadas q^α . La frontera de este espacio $\partial\Sigma = \{q^\alpha \in \mathcal{M} | E - V(q) = 0\}$ no será tomada en cuenta en este trabajo, esto es, los puntos de retorno de la trayectoria que describe el sistema $E = V(q_0)$ aquellos donde la velocidad se hace cero. Esto a pesar de que para una función $V(q)$ que no tenga singularidades las trayectorias físicas pueden alcanzar esta región fronteriza. Debido a la forma de la métrica de Jacobi, en particular del factor que acompaña a la métrica \mathbf{g} es necesario solamente tomar en cuenta la región Σ , ya que en la frontera la métrica \mathbf{h} es degenerada, siendo todas sus componentes cero. Un tratamiento riguroso del principio de Maupertuis

se puede encontrar en [1, 5, 25]. Una generalización del principio de Maupertuis en la cual es posible incluir la frontera de la región Σ puede encontrarse en [69].

Hemos revisado tres formulaciones equivalentes de la mecánica clásica para sistemas conservativos las cuales tienen distintas estructuras geométricas. En la búsqueda de una configuración clásica (\mathcal{M}, ω) que contenga toda la información del sistema bajo estudio, nos hemos encontrado, para las descripciones Lagrangiana y Hamiltoniana, que podemos tomar como espacio base la variedad Riemanniana (\mathcal{M}, g) de manera que podamos construir a partir de ella el haz tangente $T\mathcal{M}$ y el espacio fase $T^*\mathcal{M}$, donde estarán definidas las funciones Lagrangiana y Hamiltoniana respectivamente, las cuales determinan la dinámica del sistema. Notamos que la variedad (\mathcal{M}, g) no contiene la información acerca del potencial en el cual el sistema se está moviendo, por lo que resulta ser un candidato inadecuado para ser la configuración clásica del sistema. La tercera opción que hemos explorado, el principio de Maupertuis, ofrece una descripción geométrica adecuada para los propósitos de la cuantización topológica, debido a que la variedad (Σ, h) contiene toda la información física del sistema bajo estudio y a partir de ella podemos definir la configuración clásica del sistema (Σ_h, ω) con ω la conexión asociada a la métrica de Jacobi. Esta variedad Riemanniana será el espacio base con el cual se construirá el haz fibrado principal a partir del cual se calculará el espectro topológico.

2.2. El espectro topológico para la configuración clásica de un sistema

Habiendo establecido la configuración clásica apropiada para los sistemas clásicos conservativos con un número finito de grados de libertad mediante el par (Σ_h, ω) , expondremos de manera general y breve el método de la cuantización topológica para obtener el espectro topológico asociado a un sistema físico. Es común que las configuraciones clásicas sean invariantes bajo la acción de un grupo de transformaciones, lo que se puede entender como las simetrías que posee un sistema físico. Como veremos en la siguiente sección, este grupo de transformaciones puede ser reducido localmente a un grupo de Lie G . Usaremos este grupo más adelante como fibra estándar para construir el haz fibrado principal \mathcal{P} sobre la variedad base (Σ_h, ω) y a partir de esta estructura geométrica es que se puede calcular el espectro topológico del sistema físico bajo estudio.

Una vez que se ha establecido el haz fibrado principal \mathcal{P} para un sistema físico, este puede ser usado para caracterizar las configuraciones clásicas mediante los invariantes de \mathcal{P} , lo que nos llevará a obtener un espectro discreto que relaciona los parámetros que determinan a dicho sistema físico. Esto se lleva a cabo a través de las clases características pertenecientes al haz fibrado principal $C(\mathcal{P})$, las cuales integradas sobre una (sub)variedad compacta resultan ser un invariante topológico que propiamente normalizado es tal que [15, 37],

$$\int_{\mathcal{M}'} C(\mathcal{P}) = n, \quad (2.38)$$

con $n \in \mathbb{Z}$, llamado el número característico o topológico. Siendo un entero el número topológico con el cual etiquetamos los distintos niveles discretos, cabe

la posibilidad de que estos tomen valores negativos. Es convencional utilizar para este fin números enteros positivos y en ocasiones el cero, por lo que nuestra definición será por convención,

$$\left| \int_{\mathcal{M}'} C(\mathcal{P}) \right| = n, \quad (2.39)$$

con $n \geq 0 \in \mathbb{Z}$. Esta elección de signo puede llevarse a cabo cambiando la orientación del elemento de volumen o equivalentemente la orientación de la base ortonormal que se impone. Sin embargo, esto se tendría que especificar en cada caso y no resulta conveniente. De esta forma la elección del valor absoluto resuelve la convención dejando el elemento de volumen con la orientación usual de la mano derecha.

En la siguiente sección encontraremos que a la configuración clásica $(\Sigma_{\mathbf{h}}, \omega)$ que representa un sistema mecánico conservativo le podemos asociar un único haz fibrado principal que tiene como espacio base la variedad Riemanniana (Σ, \mathbf{h}) y como grupo de estructura el grupo de Lie $SO(k)$, donde $\dim(\Sigma) = k$. En este caso tenemos que la clase característica asociada a este grupo de transformaciones es la clase de Pontrjagin $p(\mathcal{P})$ y en particular la clase de Euler $e(\mathcal{P})$. Estas clases se pueden escribir en términos de la dos-forma de curvatura R del espacio base como polinomios invariantes bajo la acción del grupo de estructura, en este caso $SO(k)$ [48],

$$\det \left(It - \frac{R}{2\pi} \right) = \sum_{j=0}^k p_{k-j}(R) t^j, \quad (2.40)$$

mientras que la clase de Euler $e(\mathcal{P})$ solamente definida para el caso en que k es par, $k = 2m$, se puede expresar como,

$$e(\mathcal{P}) = \frac{(-1)^m}{2^{2m} \pi^m m!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2m}} R_{i_2}^{i_1} \wedge R_{i_4}^{i_3} \wedge \dots \wedge R_{i_{2m}}^{i_{2m-1}}. \quad (2.41)$$

Dado un sistema mecánico con configuración clásica (Σ_h, ω) la dos-forma de curvatura R tendrá en sus componentes funciones que dependan tanto de las coordenadas q^α que ayudan en la descripción de la variedad de configuración así como de un conjunto de parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ que determinan las propiedades del sistema bajo estudio. Las integrales que determinan los invariantes topológicos a través de las clases características $p(\mathcal{P})$ y $e(\mathcal{P})$ dependerán a su vez de tales parámetros debido a que estas formas diferenciales de Pontrjagin y Euler se expresan a través de la dos-forma de curvatura. Por esta razón es claro que dichas integrales darán como resultado una relación que podemos expresar de manera general como,

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = n, \quad (2.42)$$

con $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. A esta relación la llamamos el espectro topológico del sistema físico y en particular en el contexto de la mecánica clásica determina una relación discreta entre los parámetros que describen el sistema mecánico.

Una vez dada la definición y la descripción en términos generales del proceso para obtener el espectro topológico dedicaremos la siguiente sección a establecer en detalle el haz fibrado principal \mathcal{P} a partir de la configuración clásica que el principio de Maupertuis nos ofrece.

2.3. El haz fibrado principal para sistemas mecánicos

Hemos establecido en la sección 2.1 la configuración clásica para los sistemas físicos conservativos con un número finito de grados de libertad (Σ_h, ω) , es decir, para los sistemas que la mecánica clásica estudia. Principalmente hemos encontrado el espacio base sobre el cual construiremos el haz fibrado principal \mathcal{P} a través

del principio de Maupertuis, una variedad Riemanniana (Σ, \mathbf{h}) en la cual se encuentra toda la información física del sistema. Como podemos ver en (2.17) la métrica de Jacobi \mathbf{h} es conforme a la métrica determinada por la energía cinética del sistema \mathbf{g} ; en el caso de tener coordenadas cartesianas en las cuales la métrica \mathbf{g} es plana, $g_{\alpha\beta}(q) = \delta_{\alpha\beta}$ la métrica de Jacobi será conformalmente plana y toda la información relevante se encontrará en el factor conforme a través de la función de la energía potencial $V(q)$. En el caso en que la métrica \mathbf{g} no sea Euclidiana la métrica \mathbf{h} pudiera llegar a ser más complicada y desde el punto de vista técnico la descripción del sistema físico así como el cálculo del espectro topológico podría presentar una mayor dificultad, mas sin representar esto ningún cambio desde el punto de vista conceptual. En la construcción del haz fibrado principal tomaremos como base la variedad (Σ, \mathbf{h}) , mientras que la fibra estándar debe ser tal que describa las simetrías del sistema bajo estudio. Sabemos que la descripción en la mecánica clásica de los sistemas físicos es invariante bajo las transformaciones de Galileo, sin embargo este grupo de simetrías se pueden reducir localmente al grupo $SO(k)$ introduciendo una base ortonormal (no-coordenada) orientable sobre la variedad Σ . Consideremos un sistema $\{e_a\}$ con $a = 1, \dots, k$ tal que $\mathbf{h}(e_a, e_b) = \delta_{ab}$; así dos sistemas ortonormales con la misma orientación, $\{e_a\}$ y $\{e'_a\}$, están relacionados mediante una transformación ortogonal, $e'_a = (\Lambda^{-1})^b_a e_b$ con $\Lambda^b_a \in SO(k)$. Esta base ortonormal tiene asociada una base dual de uno-formas $\{\theta^a\}$ a través de la cual podemos expresar la métrica de Jacobi como,

$$\mathbf{h} = h_{\mu\nu} dq^\mu \otimes dq^\nu = \delta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b. \quad (2.43)$$

En una variedad sin torsión podemos obtener la uno-forma de conexión ω y la

dos-forma de curvatura R mediante las ecuaciones de estructura de Cartan,

$$d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = 0, \quad (2.44)$$

y

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b, \quad (2.45)$$

donde d es la derivada exterior. Las formas de conexión y curvatura caracterizan a la variedad Riemanniana (Σ, h) desde un punto de vista geométrico, y básicamente, como veremos más adelante, la dos-forma de curvatura desde un punto de vista topológico. Bajo un cambio de base ortonormal $\theta'^a = \Lambda^a_b \theta^b$ y exigiendo que la derivada exterior esté bien definida, tenemos que la uno-forma de conexión y la dos-forma de curvatura se transforman como,

$$\omega' = \Lambda \omega \Lambda^{-1} + \Lambda d\Lambda^{-1}, \quad (2.46)$$

y

$$R' = \Lambda R \Lambda^{-1}, \quad (2.47)$$

donde hemos omitido los índices que etiquetan los componentes de los distintos objetos geométricos. En el caso de una métrica de Jacobi conformalmente plana $h_{\mu\nu} = 2[E - V(q)] \delta_{\mu\nu}$ calculamos las componentes de la uno-forma de conexión y de la dos-forma de curvatura, los cuales usaremos más adelante. Escogiendo la base dual como $\theta^a = e^{\varphi/2} \delta^a_\alpha dq^\alpha$, con $\varphi = \ln [2(E - V)]$, obtenemos

$$\omega_{ab} = e^{-\varphi/2} \frac{\partial \varphi}{\partial q^\beta} \delta^\beta_{[b} \delta_{a]c} \theta^c, \quad (2.48)$$

$$R_{ab} = e^{-\varphi} \left[\delta_d^\alpha \delta_{[a}^\beta \delta_{b]c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + \delta^{ef} \delta_{[e}^\alpha \delta_{a]c} \delta_{[b}^\beta \delta_{f]d} \frac{\partial \varphi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial q^\beta} \right] \theta^c \wedge \theta^d. \quad (2.49)$$

Como podemos ver la ventaja de introducir una base ortonormal sobre la variedad Riemanniana (Σ, \mathbf{h}) consiste en poder reducir el grupo de simetría, en este caso el grupo de Galileo, a su subgrupo $SO(k)$, lo cual hace posible el cálculo de espectros topológicos de una forma concreta. Esto nos permite formular el siguiente teorema que establece el elemento esencial y punto de partida para la cuantización topológica.

Teorema 2. Un sistema mecánico conservativo con k grados de libertad puede ser representado por un haz fibrado principal \mathcal{P} único de dimensión $\frac{1}{2}k(k+1)$, con la variedad Riemanniana (Σ, \mathbf{h}) como espacio base, donde \mathbf{h} es la métrica de Jacobi y Σ su dominio en el espacio de configuración, el grupo $SO(k)$ como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar), y una conexión con valores en el álgebra de Lie $so(k)$.

Dem. A continuación daremos una síntesis de la prueba para este teorema. El teorema de reconstrucción de la geometría diferencial [37], [46] establece que un haz fibrado queda especificado de manera única al establecer los siguientes elementos: el espacio base, la fibra estándar, el grupo de estructura y una familia de funciones de transición que toman valores en el grupo de estructura y que satisfacen la condición de los cociclos (o de transitividad). Para el caso de la mecánica clásica mostraremos todos estos elementos a partir de la configuración clásica que hemos construido. Como espacio base tomaremos la región permitida en el espacio de configuración Σ con $\dim(\Sigma) = k$, que junto con la métrica de Jacobi \mathbf{h} constituyen una variedad Riemanniana. Consideramos en este caso al grupo de Lie $SO(k)$ como el grupo de estructura el cual es isomorfo a la fibra estándar debido a que tratamos con un haz fibrado principal. Para mostrar las funciones

de transición consideremos una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}$ que cubren la variedad base Σ . Sea (U_i, ϕ_i) una carta en Σ con $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^k$ un homeomorfismo y V_i un subconjunto abierto de \mathbb{R}^k . Este mapeo se utiliza normalmente para introducir coordenadas $\{q^i\}$ en $U_i \subset \Sigma$. Consideremos ahora una carta $(U_i, \tilde{\phi}_i)$ con $\tilde{\phi}_i : U_i \rightarrow \Lambda^1(U_i, so(k))$ el mapeo que nos permite introducir la base dual $\theta_i^a := \theta_i$ en cada conjunto abierto U_i y $\Lambda^1(U_i, so(k))$ es el espacio de las uno-formas que toman valores en $so(k)$ sobre U_i . Debemos notar que omitiremos el índice a que etiqueta a los elementos de la base dual y que el índice i se refiere al conjunto de las bases duales en U_i . Consideramos una intersección no vacía entre dos elementos de la cobertura $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y sus correspondientes bases duales θ_i y θ_j . Sabemos que dos bases duales están relacionadas mediante una transformación $\theta_i = \Lambda_{ij}\theta_j$ con $\Lambda_{ij} \in SO(k)$ por lo que podemos utilizar dichas transformaciones como las funciones de transición $\Lambda_{ij} = \tilde{\phi}_i \circ \tilde{\phi}_j^{-1}$ si estas satisfacen la condición de cociclo. Veamos, $\Lambda_{ij}^{-1} = \Lambda_{ji}$ y considerando una triple intersección no vacía $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ tenemos que las transformaciones que relacionan las bases duales en los distintos conjuntos abiertos son $\Lambda_{kj} = \tilde{\phi}_k \circ \tilde{\phi}_j^{-1}$ y $\Lambda_{ik} = \tilde{\phi}_i \circ \tilde{\phi}_k^{-1}$. De manera que la condición de cociclo se satisface, $\Lambda_{ik}\Lambda_{kj} = \Lambda_{ij}$, o bien, $\Lambda_{ik}\Lambda_{kj}\Lambda_{ji} = 1_{\Lambda^1(U_i, so(k))}$. De manera que hemos mostrado la existencia de los elementos requeridos por el teorema de la reconstrucción por lo que el haz fibrado \mathcal{P} con espacio base Σ y grupo de estructura $SO(k)$ resulta ser principal y único con dimensión $\dim(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}k(k+1)$, ya que $\dim(\Sigma) = k$ y $\dim(SO(k)) = \frac{1}{2}k(k-1)$. Ahora solamente queda demostrar la existencia de la conexión ω en \mathcal{P} . Para esto utilizamos un teorema conocido [26] que establece que dada una cobertura $\{U_i\}$ de Σ , una familia de uno-formas locales que toman valores en el álgebra $so(k)$, es decir, $\omega_i \in \Lambda^1(U_i, so(k))$ que cumplen con la condición de compatibilidad (sin

suma sobre los índices repetidos),

$$\omega_i = \Lambda_{ij}\omega_j\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ij}d\Lambda_{ij}^{-1}, \quad (2.50)$$

con $\Lambda_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow SO(k)$ elementos de $SO(k)$, y un conjunto de secciones locales $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ que satisfacen $\sigma_i = \sigma_j\Lambda_{ij}$ sobre $U_i \cap U_j$, entonces existe una única conexión ω sobre \mathcal{P} tal que $\omega_i = \sigma_i^*\omega$, donde σ_i^* es el pull-back inducido por la sección local σ_i . Si mostramos que todas las condiciones de este teorema se satisfacen entonces podemos asegurar que existe esta única conexión sobre el haz fibrado principal \mathcal{P} . El espacio base Σ es una variedad diferencial por lo que debe existir una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}$ que lo cubra. A través de la primera ecuación de Cartan (2.44) y utilizando la métrica de Jacobi h podemos encontrar para cada U_i la uno-forma de conexión ω_i la cual toma valores en el álgebra $so(k)$. Como hemos visto al pasar de una base dual a otra encontramos que estas están relacionadas por una transformación de la forma $\theta_i = \Lambda_{ij}\theta_j$, con $\Lambda_{ij} \in SO(k)$, y la ley de transformación para la uno-forma de conexión (2.46) nos lleva directamente a la condición de compatibilidad (2.50). En lo que respecta a las secciones locales, al ser \mathcal{P} un haz fibrado localmente es trivial, esto es existen mapeos $\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times SO(k)$ que definen localmente la trivialidad del haz. Así se puede definir una sección local canónica como $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, con $\sigma_i(q) = \Psi_i^{-1}(q, e)$, donde $e = \Lambda_{ii}(q)$ es la identidad en $SO(k)$ y $q \in U_i$. Esta sección canónica satisface la condición $\sigma_i = \sigma_j\Lambda_{ij}$ en $U_i \cap U_j$ debido a que todos los elementos Λ_{ij} son también funciones de transición [46]. Con esto concluye la prueba del teorema. \square

Habiendo establecido la existencia y unicidad del haz fibrado principal \mathcal{P} asociado a la configuración clásica (Σ, ω) continuaremos con la aplicación del procedi-

miento para el cálculo del espectro topológico para algunos ejemplos.

2.4. Ejemplos

En esta sección presentamos algunos ejemplos de sistemas físicos concretos para los cuales calcularemos el espectro topológico utilizando los resultados de las secciones anteriores. Una vez determinada la métrica Jacobi correspondiente al sistema bajo estudio solamente resta calcular la dos-forma de curvatura de manera que se pueda encontrar a partir de ella la clase característica e integrando esta última obtener el espectro topológico para dicho sistema físico.

2.4.1. La partícula libre

Como primer ejemplo tomamos el caso de la partícula libre en k dimensiones. Utilizando coordenadas cartesianas, sabemos que $g_{\alpha\beta}(q) = \delta_{\alpha\beta}$ con $\alpha, \beta = 1, \dots, k$, y como la función de la energía potencial es cero para cualquier punto en la variedad de configuración $V(q) = 0$, tenemos que $\Sigma = \mathcal{M}$ y que $h_{\alpha\beta} = E\delta_{\alpha\beta}$. Como consecuencia tenemos que la curvatura para este espacio se anula y por lo tanto la clase característica también, lo que significa que no existe ninguna condición sobre los parámetros que determinan el sistema, por lo tanto no existe espectro topológico discreto para este caso. Esto concuerda con el resultado para la partícula libre en el contexto de la cuantización canónica, el cual nos dice que no existe un espectro discreto para este sistema.

2.4.2. El oscilador armónico

A continuación consideramos el caso de un oscilador armónico [38] en dos dimensiones descrito por sus modos normales con masa m (o equivalentemente dos osciladores armónicos desacoplados con masa reducida m) con Lagrangiano,

$$L = \frac{1}{2}m \left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[k_1(q^1)^2 + k_2(q^2)^2 \right], \quad (2.51)$$

con k_1 y k_2 las constantes de restitución del sistema. Como podemos observar este Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo y por lo tanto tenemos un sistema conservativo, de manera que el Hamiltoniano $H = E$ es una constante de movimiento dada por,

$$E = \frac{1}{2}m \left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[k_1(q^1)^2 + k_2(q^2)^2 \right], \quad (2.52)$$

para la cual se tiene que,

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (2.53)$$

La métrica determinada por la energía cinética del sistema es plana $g = m \text{diag}(1, 1)$ y la métrica de Jacobi es a su vez conformalmente plana,

$$h = 2m [E - V(q)] \text{diag}(1, 1) \quad (2.54)$$

Tomando la base dual como,

$$\theta^1 = \sqrt{2m(E - V)} dq^1 \quad \theta^2 = \sqrt{2m(E - V)} dq^2, \quad (2.55)$$

tenemos que la simetría de esta configuración clásica se reduce localmente al

EJEMPLOS

grupo de transformaciones $SO(2)$, esto ya que $\mathbf{h} = \theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2$. Utilizando (2.48) podemos obtener la única componente independiente de la uno-forma de conexión,

$$\omega^1_2 = \frac{1}{2} \left(\partial_2 \varphi dq^1 - \partial_1 \varphi dq^2 \right), \quad (2.56)$$

donde $\varphi(q) = \ln [2m (E - V(q))]$ y $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$, que expresada en términos de la función $V(q^1, q^2)$ es,

$$\omega^1_2 = -\frac{\partial_2 V}{2(E - V)} dq^1 + \frac{\partial_1 V}{2(E - V)} dq^2. \quad (2.57)$$

De la misma forma a través de (2.49) obtenemos la única componente independiente de la dos-forma de curvatura,

$$R^1_2 = -\frac{1}{2} \left(\partial_1^2 \varphi + \partial_2^2 \varphi \right) dq^1 \wedge dq^2, \quad (2.58)$$

o como función de la energía potencial directamente,

$$R^1_2 = \frac{1}{2} \left[\partial_1 \left(\frac{\partial_1 V}{E - V} \right) + \partial_2 \left(\frac{\partial_2 V}{E - V} \right) \right] dq^1 \wedge dq^2. \quad (2.59)$$

De la expresión (2.41) encontramos que para el caso de dimensión dos $k = 2$ la forma de Euler está dada por la expresión,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2\pi} R_{12}, \quad (2.60)$$

de manera que tenemos,

$$e(\mathcal{P}) = \frac{1}{4\pi} \left(\partial_1^2 \varphi + \partial_2^2 \varphi \right) dq^1 \wedge dq^2, \quad (2.61)$$

y en términos de $V(q^1, q^2)$ explícitamente,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial_2^2 V}{E - V} + \frac{(\partial_2 V)^2}{(E - V)^2} + \frac{\partial_1^2 V}{E - V} + \frac{(\partial_1 V)^2}{(E - V)^2} \right] dq^1 \wedge dq^2. \quad (2.62)$$

Siendo $\varphi(q) = \ln [2m(E - V(q))]$ y la función que describe la energía potencial dada por $V(q) = \frac{1}{2} [k_1(q^1)^2 + k_2(q^2)^2]$ encontramos de manera explícita la dos-forma de Euler para el caso del oscilador armónico en dos dimensiones descrito por el Lagrangiano (2.51) es,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{E(k_1 + k_2) + \frac{1}{2}k_1^2(q^1)^2 + \frac{1}{2}k_2^2(q^2)^2 - \frac{1}{2}k_1k_2[(q^1)^2 + (q^2)^2]}{\left(E - \frac{1}{2}k_1(q^1)^2 - \frac{1}{2}k_2(q^2)^2\right)^2} \right] dq^1 \wedge dq^2. \quad (2.63)$$

A partir de esta expresión es posible abordar distintos casos y analizar los resultados que se obtienen para el espectro topológico.

El oscilador armónico en una dimensión

Podemos considerar el caso límite en el que $k_2 = 0$ y renombrando $k_1 = k$ y $q^1 = q$ tenemos que la integral de la forma de Euler para el caso del oscilador armónico simple en una dimensión se reduce a,

$$\left| \int e(\mathcal{P}) \right| = \left| -\frac{ak}{4} \int \frac{E + \frac{1}{2}kq^2}{\left(E - \frac{1}{2}kq^2\right)^2} dq \right| = n, \quad (2.64)$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y el intervalo de integración sobre q^2 es $[-\frac{a\pi}{2}, \frac{a\pi}{2}]$ con a una constante con unidades de distancia. Integrando a q en el intervalo $[-q_0, q_0]$

EJEMPLOS

obtenemos el espectro topológico para el oscilador armónico,

$$\frac{akq_0}{2E - kq_0^2} = n, \quad (2.65)$$

con q_0 un parámetro constante relacionado con el punto de retorno para el oscilador. El espectro topológico nos describe una relación discreta entre los parámetros que determinan el sistema E y k . Si escogemos el parámetro q_0 de la siguiente forma [50],

$$q_0 = \sqrt{\frac{2E}{k} + C^2} - C, \quad (2.66)$$

con

$$C = \frac{a\hbar\omega}{2E - \hbar\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.67)$$

de la expresión para el espectro topológico (2.65) se recupera la relación para el espectro canónico $E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Esto nos lleva a concluir que existe una relación directa entre el espectro topológico y el espectro canónico para el caso del oscilador armónico en una dimensión. Vemos que cuando $E \gg \hbar\omega$ (ó $\hbar \rightarrow 0$) este parámetro tiende al punto de retorno $q_0 \rightarrow \sqrt{\frac{2E}{k}}$, (a primer orden en la expansión tenemos $q_0 \approx \sqrt{\frac{2E}{k}} - \frac{a}{2E}\hbar\omega + O(\hbar^2)$) y el resultado de la integral sería divergente, de tal manera que no podemos aproximarnos arbitrariamente al punto de retorno en este contexto, lo cual también nos dice que hemos abandonado el régimen de comportamiento cuántico del sistema y es prácticamente imposible observar la estructura discreta que presentan las cantidades físicas. Por otra parte, cuando $E \rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega$ tenemos que $q_0 \rightarrow 0$ y que a su vez $n \rightarrow 0$.

El oscilador isotrópico en dos dimensiones

El caso de un oscilador isotrópico en dos dimensiones $k_1 = k_2 = k$ (o de dos osciladores desacoplados) [38] puede tratarse a partir de la expresión general (2.63), obteniendo la forma de Euler,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{kE}{\left(E - \frac{1}{2}k[(q^1)^2 + (q^2)^2]\right)^2} \right] dq^1 \wedge dq^2. \quad (2.68)$$

En este caso resulta conveniente utilizar coordenadas polares $\{r, \vartheta\}$, siendo la métrica asociada a la energía cinética $\mathbf{g} = m \text{diag}(1, r^2)$, de la cual obtenemos la métrica de Jacobi,

$$\mathbf{h} = 2m [E - V(r, \vartheta)] \text{diag}(1, r^2). \quad (2.69)$$

Se puede obtener la forma de Euler introduciendo la base ortonormal a través de las relaciones para las formas duales directamente en términos de las coordenadas polares,

$$\theta^1 = \sqrt{2m(E - V)} dr, \quad \text{y} \quad \theta^2 = \sqrt{2m(E - V)} r d\vartheta, \quad (2.70)$$

lo que nos lleva a la componente independiente de la conexión en términos de la base coordenada

$$\omega^1_2 = -\frac{\partial_\vartheta V}{2(E - V)r} dr + \left[\frac{r\partial_r V}{2(E - V)} - 1 \right] d\vartheta. \quad (2.71)$$

La componente independiente de la dos-forma de curvatura se encuentra a partir de $R^1_2 = d\omega^1_2$ y en términos de la base coordenada obtenemos,

$$R^1_2 = \left\{ \partial_\vartheta \left[\frac{\partial_\vartheta V}{2(E - V)r} \right] + \partial_r \left[\frac{r\partial_r V}{2(E - V)} - 1 \right] \right\} dr \wedge d\vartheta, \quad (2.72)$$

EJEMPLOS

y nos permite encontrar la forma de Euler para este caso en coordenadas polares,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial_\vartheta^2 V}{(E-V)r} + \frac{(\partial_\vartheta V)^2}{2(E-V)^2 r} + \frac{\partial_r V + r\partial_r^2 V}{E-V} + \frac{r(\partial_r V)^2}{(E-V)^2} \right\} dr \wedge d\vartheta. \quad (2.73)$$

En este caso que estamos tratando, el oscilador isotrópico en dos dimensiones $k_1 = k_2 = k$, la función de la energía potencial no depende de la coordenada angular ϑ , siendo esta $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. De tal manera que la forma de Euler se reduce a,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{kEr}{\left(E - \frac{1}{2}kr^2\right)^2} dr \wedge d\vartheta. \quad (2.74)$$

Cabe mencionar que esto se puede encontrar a partir de la expresión (2.68) considerando el cambio de coordenadas apropiadamente. El espectro topológico lo calculamos integrando como en (2.39) con un dominio de integración $[0, 2\pi]$ para ϑ y $[0, r_0]$ para la coordenada radial,

$$\frac{E}{E - \frac{1}{2}kr_0^2} - 1 = n, \quad (2.75)$$

con $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, lo que nos da una relación discreta entre los parámetros E y k que determinan al sistema. Si consideramos para el límite de integración a r_0 como,

$$r_0 = \sqrt{\frac{2E}{k} - \frac{2\hbar\omega}{k}} = \sqrt{\frac{2(E - \hbar\omega)}{k}}, \quad (2.76)$$

recuperamos el resultado canónico $E = \hbar\omega(n + 1)$, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Vemos que r_0 se expresa como la posición del punto de retorno menos el valor correspondiente a la energía del estado base (que en este caso particular coincide con el cuanto de energía). El espectro topológico no muestra de manera explícita la degeneración que se observa en el formalismo canónico, debido a que aún no tenemos definidos

estados dentro de este formalismo. En el caso canónico los espectros se obtienen una vez que se ha definido el espacio de Hilbert (de estados cuánticos) y se actúa sobre estos con los operadores que corresponden a las variables dinámicas, mientras que la cuantización topológica es capaz de entregar el espectro sin considerar algún estado topológico. Sin embargo, es de esperarse que exista una relación entre este tipo de espectros topológicos y los estados topológicos debido a que estos últimos se perfilan a ser definidos como secciones locales del haz fibrado principal, siendo posible que dicha relación aporte más información respecto a la discretización de las variables físicas del sistema bajo estudio.

De nueva cuenta vemos que el espectro canónico se logra reproducir si consideramos que nos podemos acercar hasta un valor correspondiente a la energía del estado base al punto de retorno. El límite de integración tiende al punto de retorno $r_0 \rightarrow \sqrt{\frac{2E}{k}}$ a la vez que $E \gg \hbar\omega$ (ó $\hbar \rightarrow 0$) y tiene como resultado $n \rightarrow \infty$, es decir, la discretización no es percibida. Por otra parte cuando la energía es comparable a la energía del estado base $E \rightarrow \hbar\omega$ el espectro topológico describe apropiadamente la situación ya que $n \rightarrow 0$.

Es posible reproducir de manera numérica este resultado si partimos de la expresión en coordenadas cartesianas para la clase característica de Euler (2.68). Esto nos permitirá explorar el camino a seguir en el caso de encontrarse con funciones de energía potencial más complicadas que den como resultado formas de Euler que no se pueden integrar analíticamente en ningún sistema de coordenadas. Para esto es necesario introducir algunos valores para constantes que consideramos están dadas para el sistema del oscilador armónico como la constante de restitución k y la masa m (o bien la frecuencia de oscilación) Sin el afán de reproducir espectros vibracionales de moléculas tomamos datos de la molécula de ácido clorhídrico HCl, a pesar de que esta molécula tiene un solo grado de libertad vibracional, lo

EJEMPLOS

cual hemos descrito en el caso $k_2 = 0$. De hecho no existen moléculas que tengan dos grados de libertad vibracionales [7], sin embargo, es interesante reproducir con estas cantidades el espectro topológico del oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones (o el caso de dos osciladores lineales no acoplados con la misma constante de restitución) ya que estos valores son válidos para moléculas lineales compuestas por dos átomos. Si bien es cierto que el modelo del oscilador armónico para describir el espectro vibracional no es suficientemente preciso, incluso en el caso más sencillo de moléculas diatómicas lineales, resulta ser una primera aproximación aceptable para entender los resultados obtenidos a través de la espectroscopía en el infrarrojo. Las principales deficiencias provienen de que el potencial cuadrático del oscilador armónico no ajusta al potencial en distancias pequeñas debido a la repulsión de los núcleos y la de los electrones, ni tampoco a distancias dos o tres veces la distancia de equilibrio ya que la energía de ligadura disminuye y se tiende a la disociación de los átomos que componen la molécula. Utilizamos una constante de restitución (o constante de fuerza) $k_1 = k_2 = k = 480 \frac{N}{m}$ y una masa (reducida) $m = 1.6 \times 10^{-27} kg$ [7, 28]. En la figura 2.1 podemos observar que la componente de la forma de Euler tiene una divergencia justo en la circunferencia que constituye los puntos de retorno del oscilador isotrópico dos dimensional, lo que delimita la región en la descripción de Maupertuis.

En la figura 2.2 observamos la parte de la componente de la forma de Euler que será integrada bajo la condición de acercarse al punto de retorno hasta un cuanto de energía.

La integración numérica arroja como resultado un conjunto de puntos $f(E)$ que se obtienen al integrar la forma de Euler para distintos valores de la energía total

ESPECTRO TOPOLÓGICO DE SISTEMAS MECÁNICOS

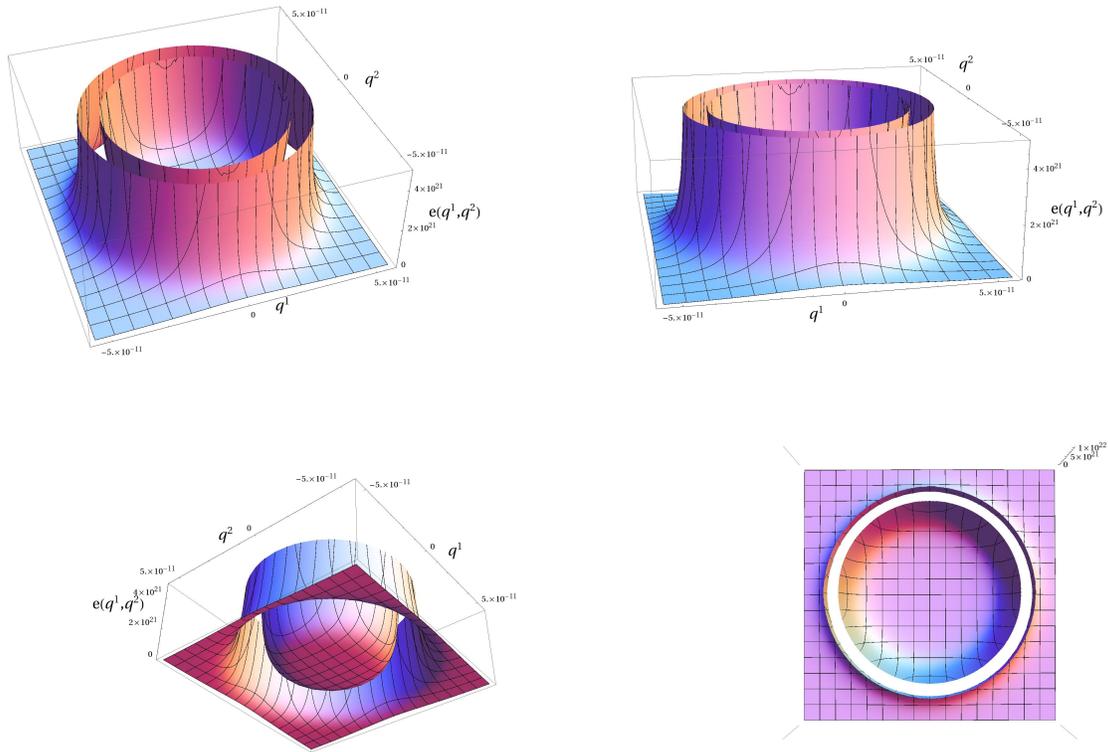


Figura 2.1: Distintas vistas de la gráfica de la componente de la forma de Euler para el oscilador isotrópico en dos dimensiones, con $k_1 = k_2 = k = 480 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $m = 1.6 \times 10^{-27} \text{kg}$, que corresponden a valores de la molécula HCl.

E considerando una región de integración delimitada por la condición

$$(q^1)^2 + (q^2)^2 \leq \frac{2(E - \hbar)}{k} \quad (2.77)$$

como se ilustra en la figura 2.3.

Debido a que el resultado de la integración debe ser un número entero es necesario hacer una interpolación de este conjunto de datos y encontrar los valores de la energía que son permitidos a partir de identificar los valores de E tales que $f(E) = n$, con n un número entero (ver figura 2.4)

Como era de esperarse el comportamiento lineal del oscilador doble isotrópico se

EJEMPLOS

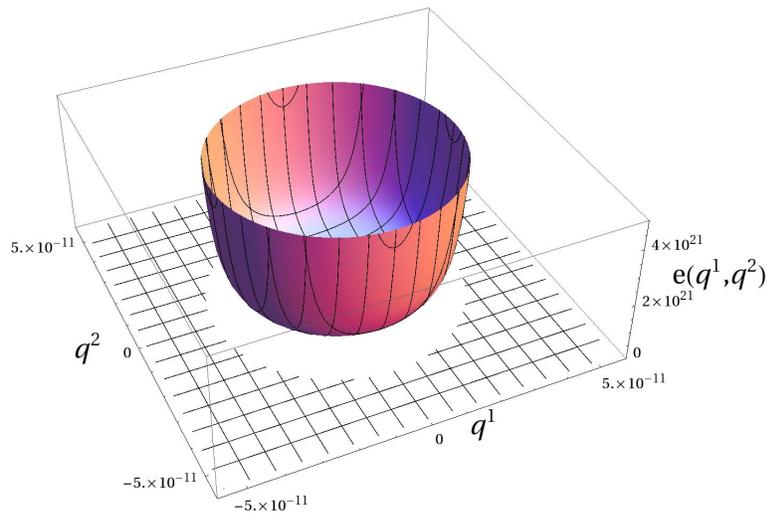


Figura 2.2: La región de integración en la cual consideramos acercarnos hasta un cuanto de energía al punto de retorno.

reproduce, y los valores de la energía correspondientes a cada nivel se pueden calcular de manera numérica a partir de la función interpolada como se aprecia en la siguiente tabla,

<i>número característico</i>	<i>Energía*</i>
0	5.67
1	11.34
2	17.01
3	22.68
4	28.35

*en 10^{-20} Joules

Estos valores coinciden con el resultado de calcular analíticamente y por consiguiente con los valores que arroja el espectro canónico. Hemos simplemente ilustrado la forma de proceder en el caso numérico con un caso extremadamente

ESPECTRO TOPOLÓGICO DE SISTEMAS MECÁNICOS

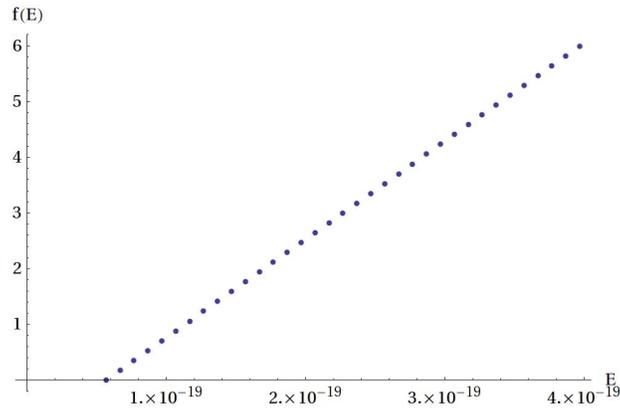


Figura 2.3: Resultado de la integración numérica para el caso del oscilador doble isotrópico.

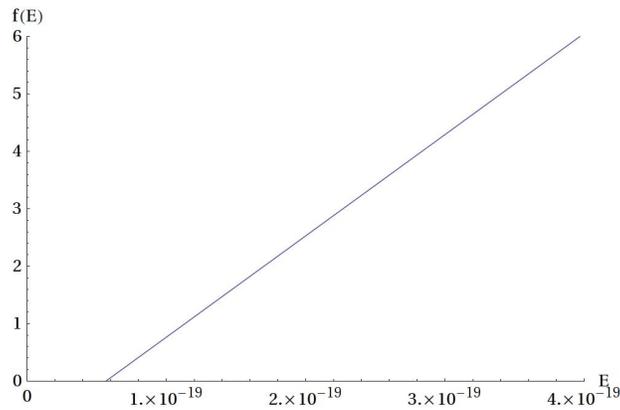


Figura 2.4: Interpolación de los datos producidos por la integración numérica para el caso del oscilador doble isotrópico.

simple, pero que resalta por la coincidencia con el caso canónico y el sentido físico del límite de integración, para el cual hay que considerar acercarse al punto de retorno dada una energía E hasta un cuanto de energía $\hbar\omega$, como hemos visto en (2.76). Es decir, para cualquier valor de la energía nos podemos acercar hasta un valor mínimo, por lo que el concepto de cuanto de energía surge de manera natural del cálculo del espectro topológico.

El oscilador anisotrópico en dos dimensiones

Para el caso en dos dimensiones para el cual las constantes de restitución o los modos normales de oscilación tienen distintos valores, $k_1 \neq k_2$, podemos proceder de igual forma. Resulta interesante que para el caso de un oscilador anisotrópico la forma de Euler (2.63) se puede integrar analíticamente. El resultado de la integración es la siguiente expresión,

$$\int_{\Sigma_0} e(\mathcal{P}) = \frac{(k_1 + k_2)(E - l_0)}{2\sqrt{k_1 k_2} l_0} = n, \quad (2.78)$$

con Σ_0 la región de integración limitada por la condición de Maupertuis y en la cual consideramos acercarnos a los puntos de retorno hasta una distancia correspondiente a la energía del estado base $l_0 = \frac{1}{2}(\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2)$, lo que expresamos así $k_1(q^1)^2 + k_2(q^2)^2 \leq 2(E - l_0)$. Podemos considerar la expresión para la energía del espectro topológico,

$$E_n = 2 \frac{l_0 \sqrt{k_1 k_2}}{k_1 + k_2} n + l_0, \quad (2.79)$$

y considerando $k_i = m\omega_i^2$ para $i = 1, 2$ tenemos,

$$E_n = 2 \frac{l_0 \omega_1 \omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} n + l_0, \quad (2.80)$$

Es posible proceder como en el caso anterior para obtener el espectro topológico de manera numérica. De manera análoga al caso isotrópico la forma de Euler diverge en una región elíptica que constituye el conjunto de los puntos de retorno, figura 2.5. Para este fin utilizamos los siguientes valores numéricos $k_1 = 480 \frac{N}{m}$, $k_2 = 1000 \frac{N}{m}$ y $m = 1.7 \times 10^{-27} \text{kg}$.

Realizamos la integración numérica sobre una región en la cual nos acercamos a

ESPECTRO TOPOLÓGICO DE SISTEMAS MECÁNICOS

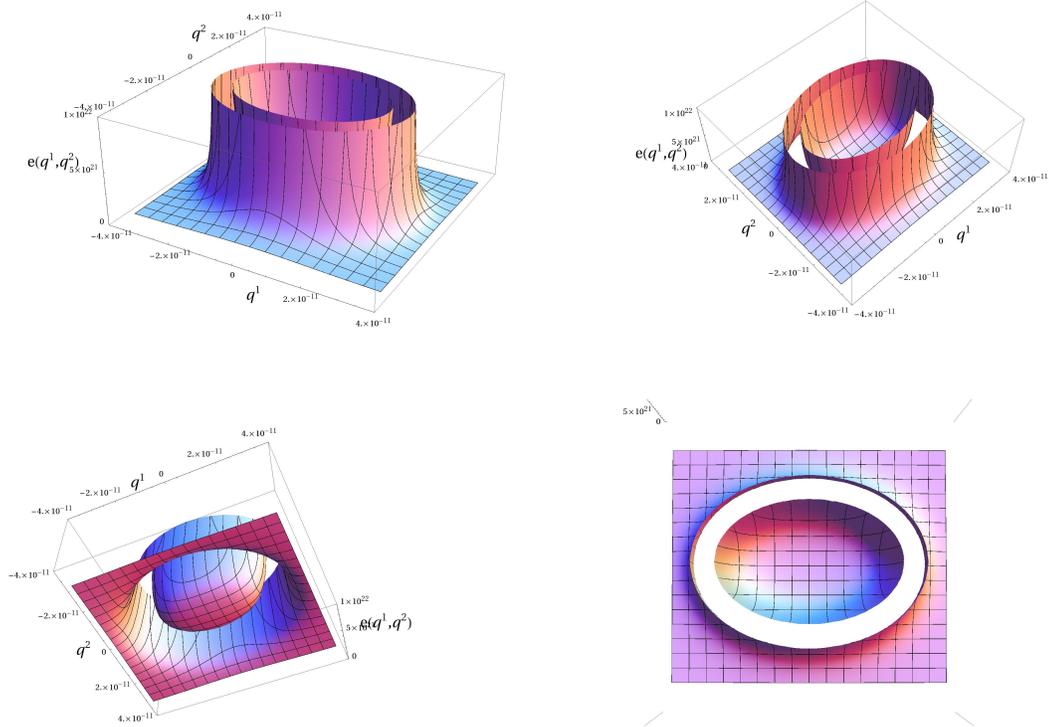


Figura 2.5: Distintas vistas de la gráfica de la forma de Euler para el oscilador anisotrópico en dos dimensiones.

los puntos de retorno hasta un cuanto de energía, $k_1(q^1)^2 + k_2(q^2)^2 \leq 2(E - l_0)$, como vemos en la figura 2.6.

Como resultado tenemos que el comportamiento lineal se repite, mas debido al proceso de obtención del espectro topológico, solamente existe un número entero para la discretización. Debido a esto, el espectro topológico no es comparable con el espectro canónico en los valores para la energía a cada nivel discreto.

No obstante, es posible reproducir el resultado canónico si tratamos cada uno de los dos osciladores desacoplados (o modos normales de oscilación) por separado, con dos configuraciones clásicas como en el caso del oscilador en una dimensión ($k_2 = 0$) y consideramos la suma de los dos espectros topológicos para cada oscilador. En el caso en que exista algún acoplamiento se trata el caso desde la

EJEMPLOS

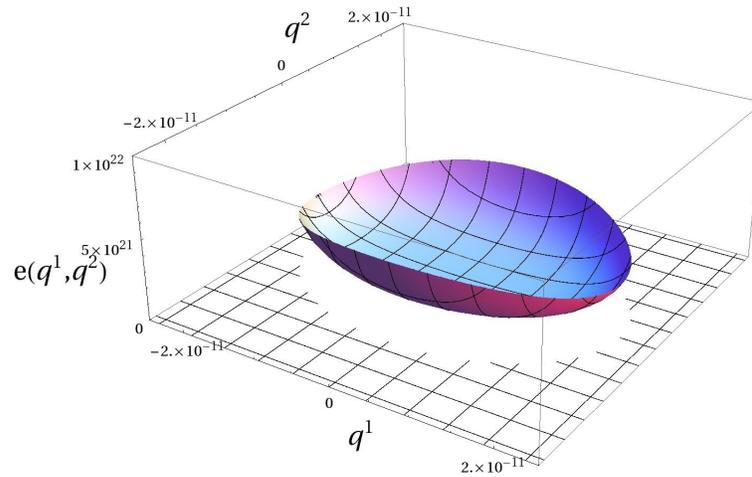


Figura 2.6: La región de integración en la cual consideramos acercarnos hasta un cuanto de energía al punto de retorno.

perspectiva de una sola configuración clásica.

El comportamiento de la integración numérica para obtener el espectro topológico lo podemos observar en la figura 2.7.

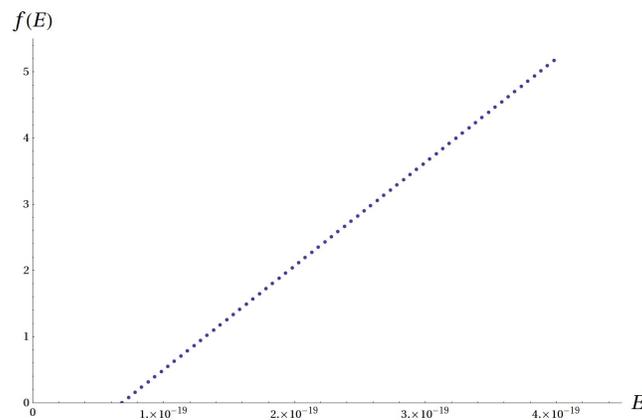


Figura 2.7: Resultado de la integración numérica para el caso del oscilador doble anisotrópico.

Al igual que en caso anterior debemos hacer una interpolación de los datos que nos permita identificar los valores de la energía permitidos $f(E) = n$ de acuerdo al resultado de la integración de la clase característica, figura 2.8.

ESPECTRO TOPOLÓGICO DE SISTEMAS MECÁNICOS

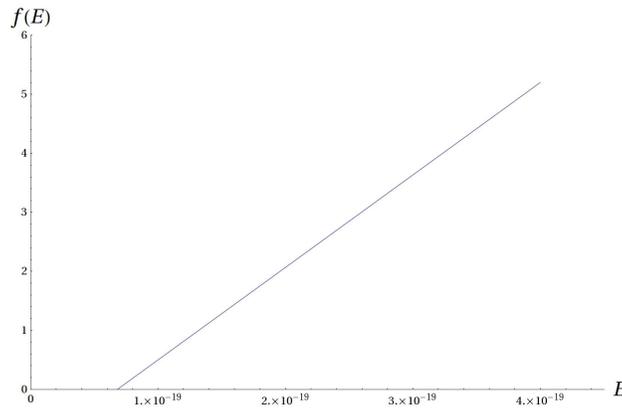


Figura 2.8: Interpolación de los datos producidos por la integración numérica para el caso del oscilador doble anisotrópico.

Podemos extraer algunos valores de la energía para los primeros números característicos, aunque cabe mencionar que fuera del valor para el estado base $n = 0$, los demás niveles pueden ser comparados con los valores del espectro canónico, para hacerlo tendremos que proceder, como hemos mencionado antes, con dos configuraciones clásicas para cada uno de los osciladores por separado (o modos normales de oscilación). Sin embargo, mostramos los resultados a partir del cálculo de una sola configuración clásica (y por ende solamente un haz fibrado principal) para resaltar el carácter lineal del espectro topológico,

número característico	Energía*
0	6.81
1	13.19
2	19.57
3	25.96
4	32.34

*en 10^{-20} Joules

Podemos graficar también el comportamiento del espectro topológico obtenido de forma analítica (2.79) con los valores utilizados para la integración numérica,

figura 2.9.

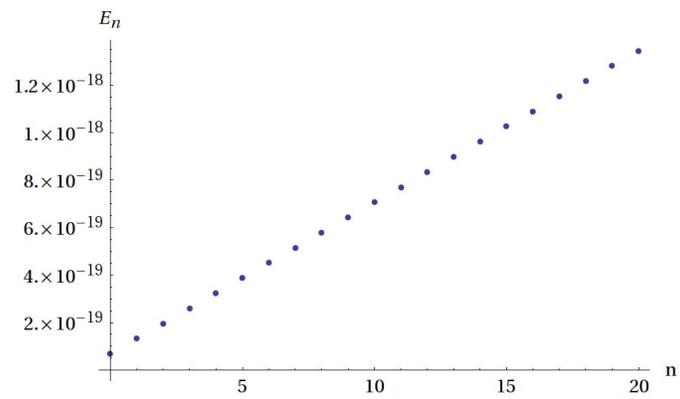


Figura 2.9: Espectro topológico para el oscilador anisotrópico en dos dimensiones obtenido de forma analítica.

2.4.3. El campo central

Ahora consideremos el caso de una partícula de masa m moviéndose en un campo central $V(r)$. Este sistema lo describimos de manera conveniente en un sistema de coordenadas esféricas polares mediante el Lagrangiano,

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \right) - V(r), \quad (2.81)$$

donde hemos considerado ya de una vez que el movimiento se lleva a cabo en un plano debido a la conservación del momento angular total. El Hamiltoniano es una cantidad conservada y representa la energía total del sistema,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r), \quad (2.82)$$

con l una constante de movimiento que identificamos con el momento angular. A partir de la forma del Lagrangiano (2.81) reconocemos que la métrica determinada por la energía cinética del sistema está dada por $g = m \operatorname{diag}(1, r^2)$, de manera que la métrica de Jacobi, siendo conforme a g queda expresada como,

$$h = 2m [E - V(r)] \operatorname{diag}(1, r^2). \quad (2.83)$$

Escogiendo la base dual como,

$$\theta^r = \sqrt{2m(E - V)} dr \quad \theta^\varphi = \sqrt{2m(E - V)} r d\varphi, \quad (2.84)$$

de manera que $h = \theta^r \otimes \theta^r + \theta^\varphi \otimes \theta^\varphi$, podemos a partir de la primera ecuación de estructura de Cartan (2.44) encontrar la única componente independiente de la

EJEMPLOS

uno-forma de conexión; utilizando (2.84) llegamos a las ecuaciones,

$$\begin{aligned} r\omega_\varphi^r \wedge d\varphi &= 0 \\ \left[1 + \frac{1}{2}r \frac{d}{dr} \ln [2m(E - V)] \right] dr \wedge d\varphi + \omega_r^r \wedge dr &= 0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Expresando a esta componente de la conexión como $\omega_\varphi^r = A_r(r, \varphi)dr + A_\varphi(r, \varphi)d\varphi$, obtenemos a partir de las ecuaciones anteriores que,

$$\begin{aligned} A_r(r, \varphi) &= 0, \\ A_\varphi(r, \varphi) &= - \left[1 + \frac{1}{2}r \frac{d}{dr} \ln [2m(E - V)] \right], \end{aligned} \quad (2.86)$$

de manera que la única componente independiente de la uno-forma de conexión es,

$$\omega_\varphi^r = \left[1 + \frac{1}{2}r \frac{d}{dr} \ln [2m(E - V)] \right] d\varphi. \quad (2.87)$$

A partir de la segunda ecuación de estructura de Cartan (2.45) calculamos la única componente independiente de la dos-forma de curvatura, $R_\varphi^r = d\omega_\varphi^r$,

$$R_\varphi^r = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{E - V(r)} \frac{dV}{dr} \right) dr \wedge d\varphi. \quad (2.88)$$

De esta forma podemos calcular la forma de Euler, $e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2\pi}R_\varphi^r$,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{E - V(r)} \frac{dV}{dr} \right) dr \wedge d\varphi, \quad (2.89)$$

que al ser integrada sobre la variedad Σ nos lleva al espectro topológico para esta

familia de sistemas físicos especificados por la función energía potencial $V(r)$,

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{E - V(r)} \frac{dV}{dr} \right) \Big|_{\Sigma_r} = n, \quad (2.90)$$

con Σ_r la región de integración de la coordenada r en el espacio base Σ y n un número entero. Vemos que esta expresión general nos permite calcular el espectro topológico para cualquier configuración dentro del contexto del campo central, simplemente basta conocer la forma de la función que determina la energía potencial $V(r)$. Tomemos el caso del potencial $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ con $\alpha > 0$, en el caso en que tenemos como solución a las ecuaciones de movimiento trayectorias cerradas. Sabemos que en este caso las trayectorias son elípticas y que suceden solamente si $E < 0$, con el caso extremo de la trayectoria circular cuando $E_c = -\frac{m\alpha^2}{2l^2}$, [27]. Así el espectro topológico para el caso $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, como puede ser el problema del átomo hidrogenoide, lo encontramos evaluando,

$$-\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + Er} \Big|_{\Sigma_r} = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\alpha + Er_+} - \frac{1}{\alpha + Er_-} \right) = n, \quad (2.91)$$

donde n es un número entero positivo y los valores del perihelio r_- y del afelio r_+ se pueden encontrar a partir de la condición de que en estos puntos la velocidad radial es cero $\dot{r} = 0$ y de la expresión para la energía total 2.82,

$$r_{\pm} = -\frac{\alpha}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}} \right). \quad (2.92)$$

El valor $n = 0$ queda excluido debido a que la única forma en que (2.91) es cero es cuando $r_+ = r_-$ y eso corresponde al caso de la órbita circular.

Introduciendo estos valores (2.92) en la expresión anterior (2.91) obtenemos el es-

EJEMPLOS

pectro topológico,

$$\frac{-\frac{El^2}{m\alpha^2}}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}} = \frac{1}{n}. \quad (2.93)$$

Podemos escribir la relación anterior (2.93) de forma tal que veamos cómo depende la energía del parámetro de discretización,

$$\frac{E}{E_0} = -\frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1 + n^2} - 1 \right), \quad (2.94)$$

donde $E_0 = \frac{m\alpha^2}{l^2}$ y hemos tomado el valor negativo de la raíz cuadrada que aparece en la expresión debido a que los valores para E deben de ser negativos ya que representa una energía de ligadura. La energía asociada al valor $n = 1$ resulta mayor que la energía de la órbita circular $0 > E_1 > E_c$, lo cual es necesario para que corresponda a una órbita elíptica. En el límite cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos que $E_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ lo que se puede interpretar como que el sistema queda desligado del centro de atracción, convirtiéndose el sistema en una partícula libre. Podemos graficar la expresión para el espectro topológico, figura 2.10.

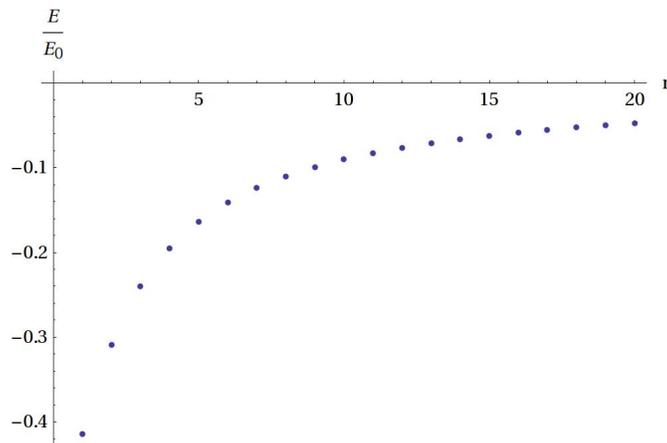


Figura 2.10: Espectro topológico para el potencial $V = -\frac{\alpha}{r}$ para $n = 1, \dots, 20$.

Esto nos muestra que la descripción de la discretización de la energía dada por el espectro topológico tiene sentido físico, a pesar de que no podemos comparar

con la relación canónica $|E| \sim \frac{1}{n^2}$ [44]. De manera que debemos considerar que no solamente la energía asociada al sistema tiene un rol en las dos expresiones anteriores, sino también el momento angular l , por lo que el espectro topológico no simplemente nos describe valores discretos para la energía, siendo en realidad una relación discreta entre los parámetros que describen al sistema físico.

Cabe mencionar que en el tratamiento relativista de la mecánica cuántica para el átomo de Hidrógeno (o Hidrogenoide) por medio de la ecuación de Dirac, el espectro para los valores de la energía depende del valor del momento angular orbital l a través del momento angular total $J = l \pm \frac{1}{2}$ [44],

$$E_{nJ} = m \left[1 + \frac{Z^2 e^4}{n - J + \frac{1}{2} - \sqrt{(J + \frac{1}{2})^2 - Z^2 e^4}} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.95)$$

con n el número cuántico principal, e la carga del electrón y Z el número de protones en el núcleo. Aun en este caso, no es posible comparar este espectro con el que resulta de la cuantización topológica, ya que hemos realizado el análisis de un sistema no relativista. En un futuro esperamos poder descifrar cómo tratar la información que concierne al momento angular y plantear una configuración clásica para el caso relativista.

2.4.4. Coordenadas complejas nulas

Terminamos esta sección calculando una expresión general para sistemas físicos con dos grados de libertad, la cual es posible obtener si se introduce un “sistema de coordenadas complejas nulas”. Consideremos un sistema físico con dos grados de libertad descrito por las coordenadas $\{q^1, q^2\}$ con la métrica de Jacobi dada por $h_{\mu\nu} = 2m(E - V)\delta_{\mu\nu}$ y el cambio de coordenadas $u = q^1 + iq^2$ y $v = q^1 - iq^2$, de

EJEMPLOS

manera que la métrica de Jacobi tiene como elemento de línea,,

$$d\tilde{s}^2 = e^{\phi(u,v)} du dv, \quad \text{con} \quad \phi(u,v) = \ln(2m [E - V(u,v)]). \quad (2.96)$$

Escogiendo la base dual de la siguiente forma,

$$\hat{\theta}^1 = \frac{1}{2} e^{\frac{\phi(u,v)}{2}} (du + dv) \quad (2.97)$$

$$\hat{\theta}^2 = \frac{i}{2} e^{\frac{\phi(u,v)}{2}} (du - dv), \quad (2.98)$$

encontramos que el elemento de línea se pueda expresar como,

$$ds'^2 = \hat{\theta}^1 \otimes \hat{\theta}^1 + \hat{\theta}^2 \otimes \hat{\theta}^2. \quad (2.99)$$

A través de la primera ecuación de estructura de Cartan (2.44) podemos encontrar la única componente independiente de la uno-forma de conexión,

$$\omega^1_2 = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} du - \frac{\partial \phi}{\partial v} dv \right), \quad (2.100)$$

y de la segunda ecuación de Cartan (2.45) obtenemos la única componente independiente de la dos-forma de curvatura,

$$R^1_2 = i \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} du \wedge dv. \quad (2.101)$$

La clase característica de Euler considerando un espacio base de dimensión dos $e(P) = -\frac{1}{2\pi} R^1_2$ es,

$$e(P) = -\frac{i}{2\pi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} du \wedge dv, \quad (2.102)$$

la cual al ser integrada sobre el subespacio permitido de la variedad de configuración,

$$\int e(P) = -\frac{i}{2\pi} \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} du \wedge dv = n, \quad (2.103)$$

nos da como resultado el espectro topológico en una expresión general para cualquier función de energía potencial,

$$-\frac{i}{2\pi} [\phi(u_2, v_2) - \phi(u_2, v_1) - \phi(u_1, v_2) + \phi(u_1, v_1)] = n, \quad (2.104)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, y los subíndices se refieren a los puntos extremos de la región permitida en el espacio de configuración. Hemos considerado que la componente de la forma de Euler es una función integrable en la región permitida. Así vemos que, en principio, para cualquier sistema con dos grados de libertad se puede obtener un espectro topológico expícito, a diferencia de la cuantización canónica donde resultados concretos solamente se pueden obtener para un número limitado de casos.

Comentarios

En este capítulo hemos abordado el estudio de sistemas físicos con un número finito de grados de libertad, los cuales se enmarcan en el contexto de la mecánica clásica, con el objetivo de obtener el espectro topológico asociado. Para esto se ha construido la estructura geométrica necesaria en el formalismo de la cuantización topológica, empezando por establecer la configuración clásica del sistema a través del principio de Maupertuis, para después construir el haz fibrado principal y mediante la introducción de bases ortonormales reducir el grupo de estructura a un grupo de Lie, el grupo ortogonal. Una vez establecido el haz fibrado principal del

EJEMPLOS

sistema se puede calcular el espectro topológico a través de los invariantes que en este caso están dados por las clases característica de Pontrjagin o de Euler dependiendo del número de grados de libertad. Se calcularon espectros para los dos ejemplos más representativos en la mecánica clásica y que constituyen a su vez los ejemplos de cuantización canónica más sencillos y completos (y los únicos que se pueden cuantizar de manera exacta) dentro de la mecánica cuántica no relativista. Los resultados apuntan a que es posible reproducir el comportamiento discreto que presentan las cantidades físicas que describen el sistema. Aprendemos que hay tenemos dos tipos de resultados, unos donde es posible comparar y otros para los cuales no cabe una comparación. En el primer caso es posible reproducir los resultados de los espectros canónicos y eso resulta alentador para seguir en la definición de los otros elementos del formalismo. Cabe mencionar que dentro del contexto de la cuantización topológica es posible calcular espectros en casos en los que el formalismo canónico no es capaz de hacerlo al menos de una forma exacta, teniendo que recurrir a un acercamiento perturbativo del problema.

Existen muchos caminos por explorar y detalles que ir clarificando, dentro de los cuales podemos mencionar algunos. En términos generales la definición de estados cuánticos topológicos, además de ser necesaria, esperamos que nos brinde información extra sobre los espectros topológicos y sobre los casos donde existe degeneración. En particular sobre la cuantización topológica para los sistemas con un número finito de grados de libertad queda por explorar las extensiones al principio de Maupertuis [69] que nos permitirán llegar a la región $E = V$ e ir más allá, pudiendo por ejemplo explorar fenómenos como el tunelaje en potenciales de barrera. También en este contexto de extensiones de Maupertuis se abre la pregunta si es posible plantear configuraciones clásicas para sistemas no conservativos. Como punto final podemos comentar que el método de obtención del espectro topológi-

co puede ser aplicado para el cálculo de espectros para moléculas con el número correcto de grados de libertad vibracionales e incluso tratar los grados de libertad rotacionales y el espectro electrónico [7], [28]. En conclusión falta camino por andar no solamente en el método para el cálculo de espectros topológicos para casos de sistemas no conservativos y las extensiones de Maupertuis, sino también en la aplicación práctica para el cálculo de espectros moleculares en la físicaquímica.

CAPÍTULO 3

ESPECTRO TOPOLÓGICO DE LA CUERDA BOSÓNICA

En este capítulo exploraremos los elementos de cuantización topológica en el contexto de la teoría de la cuerda bosónica con el objetivo de encontrar el espectro topológico para tales sistemas. Se plantea el mismo escenario que hemos abordado antes, es decir, encontrar la configuración clásica adecuada a partir de la cual se construirá el haz fibrado principal el cual constituye el elemento geométrico fundamental para la cuantización topológica y en particular para el espectro topológico.

A pesar de que la cuerda bosónica es una descripción física incompleta en el sentido de que no contiene un sector fermiónico, constituye un primer caso con el cual ilustrar la aplicación del método de la cuantización topológica a este tipo de

sistemas, esto es, encontrar la estructura geométrica y descubrir las dificultades que se presentan en el cálculo del espectro. No obstante, la teoría de la cuerda bosónica (cuántica) nos ilustra la existencia de estados que se pueden identificar con campos de norma en el caso de la cuerda abierta y con el gravitón en el caso de la cuerda cerrada. Además es una teoría que no presenta los problemas de no renormalización que se encuentran en la teoría cuántica de campos, genera dinámicamente su constante de acoplamiento y ciertas condiciones de consistencia a nivel cuántico fijan la dimensión del espacio-tiempo en que se propaga la cuerda y a bajas energías la métrica de este fondo debe cumplir las ecuaciones de Einstein (con algún tensor de energía momento determinado por otros campos no masivos) [34]. Todo esto entre algunas otras bondades en las que no abundaremos pues no es el objetivo en lo que se refiere a la cuantización topológica.

En la primer sección abordaremos algunos aspectos generales sobre la cuantización topológica, para después plantear en la segunda sección, el escenario geométrico en el contexto de la cuantización topológica correspondiente a la cuerda bosónica. Dentro de esta misma sección revisaremos algunas características sobre la teoría de la cuerda bosónica a nivel clásico que nos servirán para establecer la estructura geométrica que necesitamos y plantearemos el resultado que sirve de base y punto de partida para la cuantización topológica. En la tercer sección trataremos el caso en que la cuerda se propaga en un fondo general y en las secciones cuatro y cinco particularizaremos al fondo plano y al fondo con curvatura distinta de cero, respectivamente. En esta última sección trataremos el espectro topológico de manera perturbativa. En ambas expondremos ejemplos.

3.1. Elementos de la cuantización topológica

Como ya hemos mencionado en la introducción, el método de cuantización topológica puede ser aplicado a cualquier sistema físico que sea susceptible de ser representado como un haz fibrado principal. En esta sección analizaremos los elementos generales sobre la cuantización topológica, en específico sobre el cálculo del espectro topológico. Discutiremos brevemente la aplicabilidad al caso de la cuerda bosónica con la finalidad de obtener dichos espectros, tanto para el caso en que la cuerda se propaga en un fondo plano como para el caso de fondos con curvatura distinta de cero. En la siguiente sección profundizaremos en los detalles de la construcción del haz fibrado principal y analizaremos algunos aspectos de la teoría de la cuerda bosónica. La idea principal sobre la cuantización topológica para obtener el espectro topológico reside en la posibilidad de construir una estructura geométrica, en específico un haz fibrado principal, a partir de la configuración clásica que representa al sistema físico, la cual contiene toda la información necesaria para describirlo. Una vez que el haz fibrado principal de un sistema físico queda establecido solamente resta extraer la información a través del invariante topológico para obtener lo que llamamos el espectro topológico. Esta es una consecuencia directa de representar al sistema bajo estudio como un haz fibrado principal, que nos da una relación discreta entre los parámetros que juegan un rol en la descripción del sistema.

En la construcción del haz fibrado principal juega un papel fundamental el grupo de simetría del sistema descrito, el cual constituye el grupo de estructura que a su vez es isomorfo a la fibra estándar del haz. En los casos que se han estudiado hasta el momento, el caso de campos gravitacionales [54] y sistemas mecánicos conservativos con un número finito de grados de libertad [49, 50, 52], este grupo se

ha podido reducir al correspondiente grupo especial ortogonal, con la excepción del caso de campos gravitacionales acoplados a campos de norma, en cuyo caso la fibra resulta ser el grupo de norma. En el caso de la cuerda bosónica será suficiente considerar el grupo (pseudo)ortogonal. Si denotamos la configuración clásica del sistema por (\mathcal{M}_g, ω) , con \mathcal{M} la variedad que representa la hoja de mundo de la cuerda, g la métrica inducida en la hoja de mundo encajada en el espacio-tiempo \mathcal{N} y ω la conexión asociada a g , podemos a partir de ella construir el haz fibrado principal \mathcal{P} , con el grupo de estructura G constituido por el grupo de simetría e identificado con la fibra estándar. El haz fibrado principal \mathcal{P} tiene la propiedad de poseer un invariante topológico que lo caracteriza y este a su vez servirá como herramienta para calcular el espectro topológico. Una forma de encontrar dicho invariante topológico es a través de la clase característica $C(\mathcal{P})$ correspondiente al haz fibrado, la cual nos dice qué tan lejos de ser trivial está un haz fibrado. Esta es una forma diferencial invariante para \mathcal{P} ante la acción del grupo de estructura G . La integral de esta forma diferencial sobre una (sub)variedad compacta de la base \mathcal{M} constituye un invariante topológico del haz fibrado \mathcal{P} . Para ciertos grupos de estructura estas clases características se pueden expresar en términos de la dos-forma de curvatura y puede ser normalizada de manera que,

$$\int_{\mathcal{M}} C(\mathcal{P}) = n, \quad (3.1)$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

Para el caso particular en el que la fibra es el grupo ortogonal especial $SO(k)$, con k par, como en el caso de la cuerda bosónica, la clase característica se conoce como la forma de Euler $e(\mathcal{P})$ y está dada en términos de la dos-forma de curvatura R

por la siguiente expresión general [15, 48],

$$e(\mathcal{P}) = \frac{(-1)^m}{2^{2m} \pi^m m!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2m}} R_{i_2}^{i_1} \wedge R_{i_4}^{i_3} \wedge \dots \wedge R_{i_{2m}}^{i_{2m-1}}, \quad (3.2)$$

con $2m = k$. R_j^i denota la naturaleza matricial de la dos-forma de curvatura que toma valores en el álgebra de Lie $so(k)$. El resultado de la integración será una función de los parámetros que determinan el sistema físico (E_1, E_2, \dots, E_l) , y como resultado de la propiedad de invariancia (3.1) se puede escribir la siguiente relación,

$$F(E_1, E_2, \dots, E_l) = n, \quad (3.3)$$

donde F es una función que relaciona los parámetros E_i , $i = 1, \dots, l$ con el número entero n . Esta relación es lo que hemos definido como el *espectro topológico* de un sistema físico. Explicaremos con más detalle la construcción del haz fibrado principal en la siguiente sección, sin embargo, se puede adelantar que la hoja de mundo constituirá de manera natural el espacio base para el haz fibrado y que la simetría relevante en este caso serán los difeomorfismos en la hoja de mundo ya que representan las simetrías correspondientes a la variedad encajada en el espacio-tiempo, determinada por las soluciones a la dinámica de la cuerda en el espacio-tiempo. En cuanto a las otras simetrías que tiene la acción de Polyakov, una depende de la geometría del espacio de fondo donde se propaga la cuerda y la otra se debe a un campo extra que se incorpora en la descripción por conveniencia, pero que en términos de la acción física de Nambu-Goto no juega ningún papel en absoluto, ver 3.2.2, aunque en la acción de Polyakov es importante ya que fija la dimensión del espacio-tiempo $D = 26$.

3.2. El haz fibrado principal para la cuerda bosónica

En esta sección empezamos con un breve resumen sobre la teoría clásica de la cuerda bosónica sobre espacios de fondo curvos, tomando como punto de partida la acción de Polyakov. En este contexto analizamos las simetrías de la teoría las cuales nos permitirán más tarde construir el haz fibrado principal. Una vez hecha la construcción de \mathcal{P} podremos enunciar el teorema que nos garantiza la existencia y unicidad de dicho haz fibrado principal.

3.2.1. La cuerda bosónica

La acción para una cuerda bosónica libre moviéndose sobre un espacio-tiempo está dada por la bien conocida acción de Nambu-Goto [34, 57], la cual representa el área barrida por la cuerda propagándose sobre un fondo fijo. Consideremos una variedad de dimensión dos \mathcal{M} que representa la hoja de mundo de la cuerda descrita por dos parámetros x^a , $a = 1, 2$, junto con un variedad \mathcal{N} de dimensión D para el espacio-tiempo con métrica $G(X)$, con $\{X^\mu\}$, $\mu = 0, \dots, D - 1$, las coordenadas para \mathcal{N} . Sea $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un mapeo de la hoja de mundo al espacio-tiempo, a esto se le conoce como un encaje. Es importante tomar en cuenta que utilizamos la misma notación para las coordenadas del espacio-tiempo \mathcal{N} que para el mapeo de encaje. La métrica inducida está dada por el pullback de la métrica del espacio-tiempo $g = X^*G$, que en componentes se expresa,

$$g_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^b} G_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

con X^μ las componentes del mapeo de encaje que dan la localización de la cuerda en el espacio-tiempo en función de las coordenadas en la hoja de mundo, $X^\mu =$

$X^\mu(x)$. La acción de Nambu-Goto puede ser escrita como,

$$S_{NG} = -T \int d^2x \sqrt{|g|}, \quad (3.5)$$

con T para denotar la tensión de la cuerda y $g \equiv \det(g_{ab})$ el determinante de la métrica inducida. Esta acción tiene dos simetrías, la invariancia bajo difeomorfismos sobre la hoja de mundo o reparametrizaciones $x'^a = x'^a(x)$ y la invariancia ante difeomorfismos sobre el espacio-tiempo $X'^\mu = X'^\mu(X)$.

En la teoría de cuerdas es común encontrar como punto de partida la acción de Polyakov [34, 57]. Si se introduce una métrica auxiliar independiente γ sobre la hoja de mundo se puede escribir la siguiente integral de acción,

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} g_{ab}, \quad (3.6)$$

donde α' se relaciona con la tensión de la cuerda de acuerdo a $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$.

Esta acción es equivalente en el terreno clásico a la acción de Nambu-Goto, lo cual puede ser verificado fácilmente a partir de las ecuaciones de movimiento que se derivan de la variación respecto a γ^{ab} ,

$$g_{ab} - \frac{1}{2} \gamma^{cd} g_{cd} \gamma_{ab} = 0, \quad (3.7)$$

que a su vez pueden entenderse como el conjunto de constricciones,

$$T_{ab} = 0, \quad (3.8)$$

con $T_{ab} = \frac{4\pi}{\sqrt{|\gamma|}} \frac{\delta S_P}{\delta \gamma^{ab}}$ definiendo el tensor de energía-momento en dos dimensiones.

La introducción de un campo auxiliar, como lo es esta métrica independiente sobre la hoja de mundo, nos da la ventaja de no tener una raíz cuadrada en la acción en contraste con el caso de Nambu-Goto. Sin embargo, esta nos lleva al mismo conjunto de ecuaciones de movimiento ya que ambas acciones son clásicamente equivalentes. Haciendo la variación con respecto a X^μ obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones que determinan la dinámica de la cuerda al propagarse en el espacio-tiempo,

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma^{ab} \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta = 0, \quad (3.9)$$

con $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}$. Cuando el espacio de fondo es Minkowski, $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ las ecuaciones de campo se reducen a,

$$\partial_a \left(\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu \right) = 0. \quad (3.10)$$

La acción de Polyakov puede ser reconocida como un mapeo armónico o un modelo sigma no lineal cuando es presentada a través del mapeo $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ e identificando a \mathcal{M} como espacio base y a \mathcal{N} como el espacio de fondo (*target*), ver apéndice B. En gran parte de las ocasiones para la métrica del espacio de fondo se considera una métrica de Minkowski y lo que se obtiene es un modelo sigma lineal como es evidente de las ecuaciones (3.10). El estudio de la cuerda bosónica sobre fondo plano es en la mayoría de los textos el punto de partida para presentar la teoría de cuerdas, sin embargo existe un extenso trabajo dedicado al estudio de la cuerda bosónica sobre espacios-tiempo con curvatura distinta de cero, un resumen sobre los resultados se puede encontrar en [66]. En el próximo capítulo trataremos una generalización de los mapeos armónicos que permite obtener una representación de cualquier campo gravitacional con dos vectores de Killing que conmutan como un modelo de cuerdas moviéndose sobre un fondo curvo especial

[29].

La acción de Polyakov tiene tres simetrías, dos de ellas se presentan en la acción de Nambu-Goto de igual forma, siendo estas (1) la invariancia bajo difeomorfismos en la hoja de mundo \mathcal{M} o reparametrizaciones,

$$x^a \rightarrow x'^a = x'^a(x), \quad (3.11)$$

y (2) la invariancia bajo difeomorfismos en el espacio-tiempo \mathcal{N} ,

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = X'^\mu(X), \quad (3.12)$$

que en el caso $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ se reduce simplemente a invariancia bajo transformaciones del grupo de Poincaré. Y finalmente la simetría que solamente presenta la acción de Polyakov, (3) la invariancia ante transformaciones de Weyl,

$$\gamma' = e^{\omega(x)}\gamma. \quad (3.13)$$

Esta tercera simetría junto con la invariancia ante reparametrizaciones de la hoja de mundo permite generalizar la acción de Polyakov de manera que incluya un término topológico, el cual es la acción de Einstein-Hilbert para el espacio (\mathcal{M}, γ) , y un término de frontera relacionado con la curvatura extrínseca en la frontera de \mathcal{M} [34, 57]. En este trabajo no consideramos estos términos extra ya que no están relacionados con la dinámica de la cuerda y solamente son útiles en el tratamiento perturbativo para el proceso de cuantización. En la siguiente sección trataremos sobre las soluciones y las condiciones de frontera cuando hablemos del espectro topológico.

3.2.2. Construcción del haz fibrado principal

Para la construcción del haz fibrado principal \mathcal{P} consideramos, como punto de partida, dos de los elementos requeridos, tales como el espacio base y el grupo de estructura que en el caso de haces principales es isomorfo a la fibra estándar. El resto de los elementos requeridos (el mapeo de proyección, las funciones de transición) serán tomados en cuenta cuando revisemos la aplicabilidad de estas ideas y enunciemos el teorema sobre la existencia de \mathcal{P} .

Para el caso de la cuerda bosónica resulta natural tomar como espacio base la hoja de mundo \mathcal{M} encajada en el espacio-tiempo \mathcal{N} , junto con la métrica inducida sobre la variedad de dimensión dos a través de los mapeos $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, esto es, la variedad Riemanniana (\mathcal{M}, g) . La otra variedad diferencial que podemos considerar es el espacio de fondo (\mathcal{N}, G) donde la cuerda se mueve, sin embargo, este es en principio un fondo fijo. Más aún, la integral de acción que contiene toda la información física del sistema está planteada sobre la variedad de dimensión dos (\mathcal{M}, g) . En lo que se refiere al grupo de estructura tenemos distintas opciones dado que la acción de Polyakov es invariante bajo tres grupos de transformaciones. Tomando en cuenta que cada una de estas simetrías puede ser considerada como el grupo de estructura isomorfo a la fibra estándar tenemos la posibilidad de tener tres haces fibrados distintos. No obstante, observando el efecto de cada grupo de transformaciones sobre la integral de acción y su significado físico sobre la cuerda es fácil decidir qué fibra será utilizada para construir el haz principal. Las transformaciones de Weyl actúan sobre la métrica auxiliar requerida para construir la acción de Polyakov y no juegan ningún papel a nivel de la acción de Nambu-Goto, siendo además un cambio de escala sobre esta métrica independiente en la hoja de mundo no representan una simetría física en la dinámica de la cuerda al desplazarse sobre el espacio-tiempo de fondo. El grupo de difeomorfismos sobre el

espacio-tiempo ejerce su acción sobre un fondo fijo, el cual puede cambiar cada vez que describamos distintas situaciones respecto a la propagación de la cuerda en tal o cual espacio-tiempo, y por lo tanto no juega un papel fundamental en la descripción dinámica de la cuerda, a pesar de que es conveniente tener una teoría que no dependa de las coordenadas que utilizamos para describir el espacio-tiempo de fondo donde se mueve el sistema bajo estudio. Por último, el grupo de difeomorfismos sobre la hoja de mundo \mathcal{M} representa una simetría relacionada directamente con la dinámica de la cuerda al ser un grupo de transformaciones que actúa justamente sobre la variedad sobre la cual está planteada la integral de acción, tanto en el caso de Nambu-Goto como en el de Polyakov. Desde esta perspectiva, la invariancia ante reparametrizaciones resulta ser la adecuada para construir el haz fibrado principal. Además resulta fundamental que la dinámica de la cuerda no dependa de los parámetros que se usan para describir la hoja de mundo que representa la propagación de la cuerda en el espacio de fondo.

Para este caso de invariancia ante difeomorfismos sobre la hoja de mundo \mathcal{M} , podemos reducir el grupo de transformaciones de manera que sea posible obtener un haz fibrado principal que sea menos complicado de tratar. Este proceso para reducir el grupo de estructura se puede llevar a cabo introduciendo una base ortonormal local para describir la geometría de la variedad, y de esta manera reducir el grupo de transformaciones al correspondiente grupo ortogonal. Examinemos este procedimiento con más detalle. Tomemos sobre la variedad \mathcal{M} que describe la hoja de mundo una base ortonormal orientable $\{e_i\}$, con $i = 1, 2$. Siendo una base ortonormal para la variedad Riemanniana debe satisfacer que $g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$ y así dos distintas bases están relacionadas mediante una transformación ortogonal $e'_i = e_j(\Lambda^{-1})^j_i$, con $\Lambda \in SO(1,1)$. Junto con esta base local tenemos la base dual $\{\theta^i\}$ la cual nos permite expresar el tensor métrico como

$g = \eta_{ij} \theta^i \otimes \theta^j$. De esta forma hemos reducido la fibra del grupo de difeomorfismos sobre la hoja de mundo al grupo ortogonal $SO(1, 1)$ y podemos considerar la configuración clásica para el sistema de la cuerda bosónica como (\mathcal{M}_g, ω) , con ω la conexión asociada a la métrica g que toma valores en el algebra $so(1, 1)$. De manera que la tripleta $(\mathcal{M}, \omega, SO(1, 1))$ nos permite construir el haz fibrado principal \mathcal{P} , cuya dimensión es $\dim(\mathcal{P}) = 3$, ya que el espacio base es una variedad de dimensión dos y la fibra (grupo de estructura) tiene dimensión uno. Con estos elementos a la mano y observando que se puede construir un haz fibrado principal a partir de ellos enunciamos el teorema que nos asegura la representación de la cuerda bosónica como un haz fibrado principal único.

Teorema: Una cuerda bosónica propagándose sobre un fondo general (\mathcal{N}, G) descrita ya sea por la acción de Nambu-Goto o Polyakov puede ser representada por un haz fibrado principal único \mathcal{P} , con la variedad Riemanniana (\mathcal{M}, g) como el espacio base, donde \mathcal{M} es la hoja de mundo encajada en \mathcal{N} y g es la métrica inducida, $SO(1, 1)$ como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar) y ω la conexión que toma valores en el álgebra de Lie $so(1, 1)$.

La prueba de este teorema sigue las misma líneas de lo que hemos presentado en el capítulo 2, por lo que no abundaremos en ella. Básicamente se describen los elementos necesarios para reconstruir el haz fibrado principal y mostrar que la conexión ω es única.

Habiendo establecido la existencia del haz fibrado principal que representa el sistema de la cuerda bosónica podemos proceder a calcular el espectro topológico. Una vez que se tiene la métrica inducida y a partir de ella la uno-forma de conexión y la dos-forma de curvatura, podemos calcular la clase característica de Euler para el grupo ortogonal especial $SO(1, 1)$. Finalmente, se calcula el espectro topológico por medio del invariante topológico que resulta de integrar la forma

de Euler sobre la variedad base. La siguiente sección la dedicaremos a realizar este procedimiento para el caso de la cuerda bosónica sobre un fondo general y trataremos el caso particular en que tenemos un espacio-tiempo de Minkowski, tanto para la cuerda abierta con puntos extremos libres como para la cuerda cerrada.

3.3. Espectro topológico para un fondo general

Una vez establecido el haz fibrado principal para la cuerda bosónica $\mathcal{P}_{SO(1,1)}$, podemos continuar con la implementación de la cuantización topológica para encontrar el espectro topológico de la cuerda propagándose sobre un fondo general $(\mathcal{N}, \mathbf{G})$. Las ecuaciones de campo están dadas por el conjunto de ecuaciones (3.9). Podemos escoger un conjunto de coordenadas tales que la métrica auxiliar γ toma la siguiente forma,

$$\gamma = e^{\varphi(x)}\eta, \quad (3.14)$$

donde $\varphi(x)$ es la función que determina lo que llamamos el factor conforme, y $\{x\}$ es el conjunto de coordenadas para la hoja de mundo. Esta elección se conoce como la norma conforme [11, 34]. Esta norma junto con el conjunto de constricciones (3.8) que siguen de la invariancia de Weyl y la invariancia ante difeomorfismos sobre la hoja de mundo, implica que la métrica inducida debe ser conformalmente plana,

$$g = \phi(x)\eta, \quad (3.15)$$

con $\phi(x)$ determinada por las soluciones $X^\mu(x)$ a las ecuaciones de campo (3.9). Notemos que se ha tomado directamente la función $\phi(x)$ como el factor conforme, abriendo con esto la posibilidad de que la estructura causal de la métrica inducida

podiera cambiar (de $(-, +)$ a $(+, -)$), lo que nos dejaría con la posibilidad de tener una propagación de la cuerda en trayectorias tipo espacio. En caso de que este cambio de signatura tuviera lugar, siempre podemos tomar el valor absoluto de dicho factor de manera que podamos tener una propagación en el espacio-tiempo en trayectorias tipo tiempo. Sin embargo, como veremos más adelante esta posible disyuntiva no tendrá efecto en lo que se refiere al cálculo del espectro topológico.

Para obtener el espectro topológico para el sistema de la cuerda bosónica seguimos el procedimiento explicado en la sección 3.1. La clase característica que corresponde al haz $\mathcal{P}_{SO(1,1)}$ está dada por la forma de Euler (3.2), la cual, para el caso de dimensión dos, toma la siguiente forma,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2\pi}R^1_2. \quad (3.16)$$

Siendo la métrica inducida conformalmente plana y llamando a las coordenadas para esta norma $\{\tau, \sigma\}$, podemos usar las ecuaciones de estructura de Cartan,

$$d\theta^i + \omega^i_j \wedge \theta^j = 0, \quad (3.17)$$

$$R^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j, \quad (3.18)$$

que nos llevan a obtener una expresión general para la clase característica de Euler en términos de la función conforme $\phi(x)$. Si expresamos la métrica inducida como,

$$\mathbf{g} = g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma)\boldsymbol{\eta}, \quad (3.19)$$

con la signatura $(-, +)$, la expresión para la forma de Euler está dada por,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \left[\partial_\tau \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}} \partial_\tau g_{\sigma\sigma} \right) - \partial_\sigma \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}} \partial_\sigma g_{\sigma\sigma} \right) \right] d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.20)$$

Es claro que aun en el caso en que la función métrica tomara valores negativos la expresión puede ser puesta en términos de la función logarítmica del valor absoluto de la componente métrica $g_{\sigma\sigma}$,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\partial_\tau^2 \ln |g_{\sigma\sigma}| - \partial_\sigma^2 \ln |g_{\sigma\sigma}| \right) d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.21)$$

Introduciendo nuevas coordenadas el procedimiento para obtener el espectro topológico puede ofrecer algunas ventajas. Así para cualquier conjunto de coordenadas $\{\xi, \eta\}$, tal que la métrica inducida g tenga el elemento de línea,

$$ds^2 = 2g_{\xi\eta} d\xi d\eta, \quad (3.22)$$

podemos calcular la forma de Euler. A esta familia de conjuntos de coordenadas que tienen un elemento de línea expresado como en la ecuación anterior le llamaremos coordenadas tipo nulas o norma tipo nula. Un ejemplo puede ser un cambio de coordenadas lineal $\{\xi, \eta\}$, esto es, cambiando de la norma conforme a la norma nula, $\xi = \tau + \sigma$, $\eta = \tau - \sigma$. En general, si tenemos un cambio de coordenadas dado por

$$\begin{aligned} \xi &= f(\tau + \sigma), \\ \eta &= g(\tau - \sigma), \end{aligned} \quad (3.23)$$

con f y g funciones invertibles, es decir, que existen F y G tales que, $F(\xi) = \tau + \sigma$

y $G(\eta) = \tau - \sigma$, de manera que,

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2} [F(\xi) + G(\eta)], \\ \sigma &= \frac{1}{2} [F(\xi) - G(\eta)].\end{aligned}\tag{3.24}$$

Utilizaremos más adelante un cambio de coordenadas no lineal tipo nulo que nos permitirá calcular de manera analítica algunos espectros.

Entonces para cualquier conjunto de coordenadas que tenga esta característica podemos encontrar las expresiones correspondientes para el cálculo del espectro topológico. La base ortonormal dual $\{\theta^a\}$, $a = 1, 2$, tal que $ds^2 = -\theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2$ puede ser conectada con la base coordenada a través de las relaciones,

$$\theta^1 = \frac{1}{2} g_{\xi\eta} d\xi - d\eta\tag{3.25}$$

$$\theta^2 = \frac{1}{2} g_{\xi\eta} d\xi + d\eta,\tag{3.26}$$

con la función métrica $g_{\xi\eta} = g_{\xi\eta}(\xi, \eta)$. Omitiremos los índices correspondientes a la base coordenada. Esta elección para las formas duales no es única, sin embargo la dos-forma de curvatura es independiente de esta elección. No es difícil obtener la uno-forma de conexión ω , la cual tiene solamente una componente independiente,

$$\omega^1_2 = -\frac{1}{g_{\xi\eta}} \frac{\partial g_{\xi\eta}}{\partial \eta} d\eta.\tag{3.27}$$

De esta forma, calcular la componente independiente de la dos-forma de curvatura a partir de las ecuaciones de Cartan es directo,

$$R^1_2 = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{g_{\xi\eta}} \frac{\partial g_{\xi\eta}}{\partial \eta} \right] d\xi \wedge d\eta,\tag{3.28}$$

y a partir de esta expresión obtenemos finalmente la clase característica de Euler,

$$e(\mathcal{P}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{g_{\xi\eta}} \frac{\partial g_{\xi\eta}}{\partial \eta} \right] d\xi \wedge d\eta. \quad (3.29)$$

Nos gustaría enfatizar que hasta ahora no hemos especificado condición de frontera alguna, así el resultado se puede considerar general, esto es, podemos incluir tanto cuerdas cerradas como abiertas, y partiendo de esta última opción es posible particularizar a todas las condiciones de frontera distintas.

Para finalmente obtener el espectro topológico tenemos que integrar de acuerdo a (3.1),

$$\int_{\mathcal{M}} e(\mathcal{P}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{g_{\xi\eta}} \frac{\partial g_{\xi\eta}}{\partial \eta} \right] = n. \quad (3.30)$$

De acuerdo a la expresión anterior, si la función métrica es continua y diferenciable en toda la región de integración, la relación para el espectro topológico simplemente consistirá en evaluar dicha función en los extremos de los intervalos para las variables ξ y η . Sin embargo, en general este no es el caso, debido a que la función métrica presenta singularidades. No obstante, este norma tipo nula nos será de utilidad como veremos más adelante.

Es claro de la expresión anterior que el signo de la función métrica $g_{\xi\eta}$ no jugará un rol en la determinación del espectro topológico ya que aparece dos veces en el integrando. Podemos hacer notar este hecho usando el valor absoluto $|g_{\xi\eta}|$.

Es necesario hacer notar que esta relación para el espectro topológico así como la escrita en la norma conforme no hacen referencia explícita a la métrica de fondo, así que son válidas para cualquier espacio-tiempo curvo de fondo, estando esa información contenida en el factor $g_{\xi\eta}(\xi, \eta)$ o en $g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma)$ que aparecen en la métrica inducida.

3.4. Espectro topológico en fondo plano

Una vez que hemos discutido cómo obtener el espectro topológico para cualquier configuración de la cuerda podemos proceder al análisis de casos particulares. Empezaremos con la cuerda propagándose en un fondo plano con una métrica de Minkowski, esto es, $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ en (3.4). De esta forma las ecuaciones de campo se reducen a (3.10), y en la norma conforme la forma de la métrica $\gamma = e^{\varphi(x)}$ nos lleva a las siguientes ecuaciones de movimiento,

$$\left(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2\right) X^\mu(\tau, \sigma) = 0, \quad (3.31)$$

con solución general,

$$X^\mu(\tau, \sigma) = F^\mu(\tau + \sigma) + G^\mu(\tau - \sigma). \quad (3.32)$$

El conjunto de constricciones (3.8) se conocen como las constricciones de Virasoro, que a nivel clásico se deben imponer en su totalidad al contrario de lo que sucede en el caso cuántico donde una anomalía está presente y nos fuerza a imponer solamente la “mitad” del conjunto completo de constricciones [11, 72]. En esta norma conforme el conjunto de constricciones toma la siguiente forma explícita,

$$\begin{aligned} (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu) \eta_{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu \eta_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

y a partir de ellas es fácil observar que (3.15) es una consecuencia de imponer dichas constricciones (3.8).

El mismo conjunto de ecuaciones y constricciones se puede establecer de forma

distinta si hacemos un cambio de coordenadas a este tipo de sistemas de coordenadas tipo nulas, lo cual puede hacerse debido a la invariancia bajo difeomorfismos sobre la hoja de mundo. Las ecuaciones de campo son,

$$\partial_{\tilde{\xi}}\partial_{\eta}X^{\mu}(\tilde{\xi},\eta) = 0, \quad (3.34)$$

con la misma solución ahora escrita como,

$$X^{\mu}(\tilde{\xi},\eta) = F^{\mu}(\tilde{\xi}) + G^{\mu}(\eta). \quad (3.35)$$

El conjunto de constricciones en esta norma es,

$$\begin{aligned} T_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} &= \partial_{\tilde{\xi}}X^{\mu}\partial_{\tilde{\xi}}X^{\nu}G_{\mu\nu} = 0 \\ T_{\eta\eta} &= \partial_{\eta}X^{\mu}\partial_{\eta}X^{\nu}G_{\mu\nu} = 0, \\ T_{\tilde{\xi}\eta} &= 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde notamos que la tercera ecuación de restricción se satisface idénticamente. Para aplicar el procedimiento para obtener el espectro topológico es necesario seleccionar condiciones de frontera específicas para obtener expresiones concretas tanto para las soluciones como para las constricciones y a partir de eso calcular las componentes de la métrica inducida. Introduciendo condiciones de frontera periódicas obtenemos cuerdas cerradas, y para las cuerdas abiertas tenemos ya sea condiciones de Dirichlet o de Neumann para los puntos extremos de la cuerda [34, 57].

En lo que sigue fijaremos las libertades de norma que tiene la teoría trabajando ya sea en la norma conforme o en la norma tipo nula (3.22, 3.23) y escribire-

mos las soluciones en la norma del cono de luz, de manera tal que la libertad de reparametrización quede fija. Escogiendo la norma conforme utilizando un sistema de coordenadas $\{\tau, \sigma\}$ tal que (3.14) fijamos parcialmente la libertad de norma en la hoja de mundo, con la norma del cono de luz la fijamos por completo. Para esto podemos partir de una clase de normas en las cuales las ecuaciones de movimiento y de constricciones se ven igual,

$$\begin{aligned}
 n \cdot X(\tau, \sigma) &= \beta \alpha' (n \cdot p) \tau, \\
 (n \cdot p) \sigma &= \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} n \cdot P^\tau(\tau, \tilde{\sigma}),
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

con n un vector unitario que determinará la relación de los parámetros con las coordenadas del fondo y el punto denota la contracción respecto a la métrica de Minkowski para el fondo. La constante β se fija dependiendo de si es una cuerda cerrada o abierta y P^τ es la densidad de momento sobre la cuerda y p el cuadrimomento. En la coordenadas del cono de luz para el espacio de fondo ,

$$\begin{aligned}
 X^+ &= \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}}, \\
 X^- &= \frac{X^0 - X^1}{\sqrt{2}}, \\
 X^I &= X^I, \quad \text{con } I = 2, \dots, D-1,
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

tenemos que el elemento de línea es,

$$ds_G^2 = -2dX^+dX^- + dX^I dX^J \delta_{IJ}. \tag{3.39}$$

Para la norma del cono de luz escogemos,

$$n^\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right), \quad (3.40)$$

de manera que en coordenadas del cono de luz tenemos,

$$\begin{aligned} n \cdot X &= X^+ = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}}, \\ n \cdot p &= p^+ = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Así en la norma del cono de luz la parametrización es,

$$\begin{aligned} X^+(\tau, \sigma) &= \beta \alpha' p^+ \tau, \\ p^+ \sigma &= \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} P^{\tau+}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (3.42)$$

de donde vemos que $n \cdot P^\tau$ es una constante a lo largo de cuerda y por lo tanto p^+ también. De tal manera que tenemos que el parámetro σ toma los valores, $\sigma \in [0, \pi]$ y $\sigma \in [0, 2\pi]$, $\beta = 2$ y $\beta = 1$, para la cuerda abierta y la cerrada respectivamente. Con esta parametrización y las constricciones de la teoría veremos que X^- quedará determinado una vez que resolvamos las ecuaciones para el sector transversal $X^I(\tau, \sigma)$ con $I = 2, \dots, D-1$, por lo que no es un grado de libertad dinámico.

La acción en la norma conforme y la norma nula toma la siguiente forma,

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \left[2\partial_\tau X^+ \partial_\tau X^- - 2\partial_\sigma X^+ \partial_\sigma X^- - (\partial_\tau X^I \partial_\tau X^I - \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^I) \delta_{IJ} \right], \quad (3.43)$$

mientras que las ecuaciones de movimiento para X^μ con $\mu = +, -, I$ son,

$$-\partial_\tau^2 X^\mu + \partial_\sigma^2 X^\mu = 0. \quad (3.44)$$

En las ecuaciones de restricción encontramos que X^- no representa un grado de libertad dinámico,

$$\begin{aligned} \partial_\tau X^- &= \frac{1}{2\alpha' p^+} \left(\partial_\tau X^I \partial_\tau X^I + \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^I \right) \delta_{IJ}, \\ \partial_\sigma X^- &= \frac{1}{\alpha' p^+} \partial_\tau X^I \partial_\sigma X^I \delta_{IJ}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

De esta forma solamente tenemos que resolver para X^I ya que estos son los campos dinámicos de la teoría. Para el cálculo del espectro topológico será necesario obtener la componente $g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma)$ de la métrica inducida. Tomando en cuenta las restricciones (3.45) obtenemos, como era de esperarse, que $g_{\tau\sigma} = 0$ y que $g_{\tau\tau} = -g_{\sigma\sigma}$ con,

$$g_{\sigma\sigma} = \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^I \delta_{IJ}. \quad (3.46)$$

A partir de esta componente de la métrica podemos encontrar la forma de Euler (3.20) y calcular el espectro topológico.

3.4.1. Espectro topológico para la cuerda bosónica abierta con extremos libres

Como ya hemos visto en la sección anterior, se puede trabajar tanto en la norma conforme como en la norma tipo nula, utilizaremos uno u otro conjunto de coordenadas según sea conveniente, explotando la invariancia de la teoría ante

reparametrizaciones de la hoja de mundo. Para empezar trabajaremos en la norma conforme (3.14) con las coordenadas $\{\tau, \sigma\}$.

Para obtener el espectro topológico para la cuerda bosónica abierta con extremos libres observamos que se requiere calcular la componente $g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma)$ como se puede notar en (3.20). Para esto necesitamos las soluciones $X^\mu(\tau, \sigma)$. La condición de extremos libres para la cuerda se logra mediante la imposición de condiciones de frontera de Neumann. Si consideramos el parámetro σ en el intervalo $[0, \pi]$ podemos expresar dicha condición de borde como,

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma) = 0 \quad \text{para } \sigma = 0, \pi. \quad (3.47)$$

Se puede obtener la forma explícita para las soluciones a las ecuaciones de campo una vez que se han tomado en cuenta las condiciones de frontera [34, 72], y expresarlas de forma covariante, es decir, sin fijar completamente la libertad de norma,

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k}\alpha_k^\mu e^{-ik\tau} \cos k\sigma, \quad (3.48)$$

donde α_k^μ son los distintos modos de oscilación de la cuerda, x_0^μ indica la posición del centro de masa, y las componentes del momento del centro de masa están relacionadas con el modo cero por $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\mu$. Además consideramos unidades donde $c = 1$ y $\hbar = 1$. Con esta forma específica para las soluciones las constricciones (3.8, 3.33) se pueden escribir en términos de los modos de oscilación,

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-p}^\mu \alpha_p^\nu \eta_{\mu\nu} = 0. \quad (3.49)$$

En la norma del cono de luz los únicos campos dinámicos son los transversales

$X^I(\tau, \sigma)$, con $I = 2, \dots, D - 1$,

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\alpha_k^I e^{-ik(\tau-\sigma)} + \alpha_k^{I*} e^{ik(\tau-\sigma)} + \alpha_k^I e^{-ik(\tau+\sigma)} + \alpha_k^{I*} e^{ik(\tau+\sigma)} \right], \quad (3.50)$$

mientras que $X^-(\tau, \sigma)$ queda determinada por las ecuaciones de constricción (3.45) una vez que los campos transversales se encuentran, y $X^+ = 2\alpha'p^+\tau$. Podemos introducir la notación polar para los modos de oscilación $\alpha_k^I = r_k^I e^{-i\gamma_k^I}$ quedando la expresión para los campos como

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + \sqrt{2\alpha'} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k^I}{k} \left[\cos k(\tau - \sigma + \gamma_k^I) + \cos k(\tau + \sigma + \gamma_k^I) \right]. \quad (3.51)$$

Utilizando esta notación podemos calcular en forma general la forma de la función métrica $g_{\sigma\sigma}$,

$$g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma) = 2\alpha' \sum_{k,l=1}^{\infty} r_k^I r_l^I \left[\text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k^I) - \text{sen } k(\tau + \sigma + \gamma_k^I) \right] \times \left[\text{sen } l(\tau - \sigma + \gamma_l^I) - \text{sen } l(\tau + \sigma + \gamma_l^I) \right] \delta_{IJ}, \quad (3.52)$$

a partir de la cual es posible encontrar la forma de Euler. Al considerar la solución más general (3.50,3.51), esto es, con todos los coeficientes de la expansión en modos de oscilación distintos de cero, la integración de la forma de Euler llega a ser un problema bastante complicado técnicamente, el cual sigue bajo investigación. Por lo tanto, con el objetivo de indagar sobre los resultados para el espectro topológico y ganar alguna intuición sobre el procedimiento, haremos algunos cálculos para casos particulares, es decir, con algunos coeficientes de los modos de

oscilación distintos de cero. En el caso de la cuerda abierta las dificultades técnicas para el cálculo de espectros topológicos han sido tales que al día de hoy sigue en curso la investigación para lograr llevar a cabo tales cálculos y solamente podremos exponer casos mínimos. Por otra parte, en el caso de la cuerda cerrada será posible explorar un mayor número de casos.

Empezamos con el caso más simple en el cual solamente un coeficiente de los modos de oscilación es distinto de cero en una dirección transversal, $\alpha_k^J \neq 0$, donde consideramos al índice J como fijo. De esta forma tenemos que las demás direcciones transversales describen el movimiento del centro de masa y por lo tanto no estarán involucradas en el cálculo de la función métrica $g_{\sigma\sigma}$. La solución en la dirección $I = J$ la encontramos a partir de (3.51),

$$X^J(\tau, \sigma) = x_0^J + \sqrt{2\alpha'}\tau + \sqrt{2\alpha'} \frac{r_k^J}{k} \left[\cos k(\tau - \sigma + \gamma_k^J) + \cos k(\tau + \sigma + \gamma_k^J) \right]. \quad (3.53)$$

A partir de esta expresión y (3.46) determinamos la función métrica,

$$g_{\sigma\sigma} = 2\alpha' (r_k^J)^2 \left[\sin k(\tau - \sigma + \gamma_k^J) - \sin k(\tau + \sigma + \gamma_k^J) \right]^2, \quad (3.54)$$

y la forma de Euler (3.20),

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{2 \cos k(\tau - \sigma + \gamma_k^J) \cos k(\tau + \sigma + \gamma_k^J)}{\pi \left[\sin k(\tau - \sigma + \gamma_k^J) - \sin k(\tau + \sigma + \gamma_k^J) \right]^2} d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.55)$$

En la figura 3.1 podemos observar parte de la superficie descrita por la función a integrar para el valor $k = 4$, en la cual notamos la periodicidad en la dirección del parámetro τ .

La parametrización de τ es tal que puede tomar valores en todo el intervalo real,

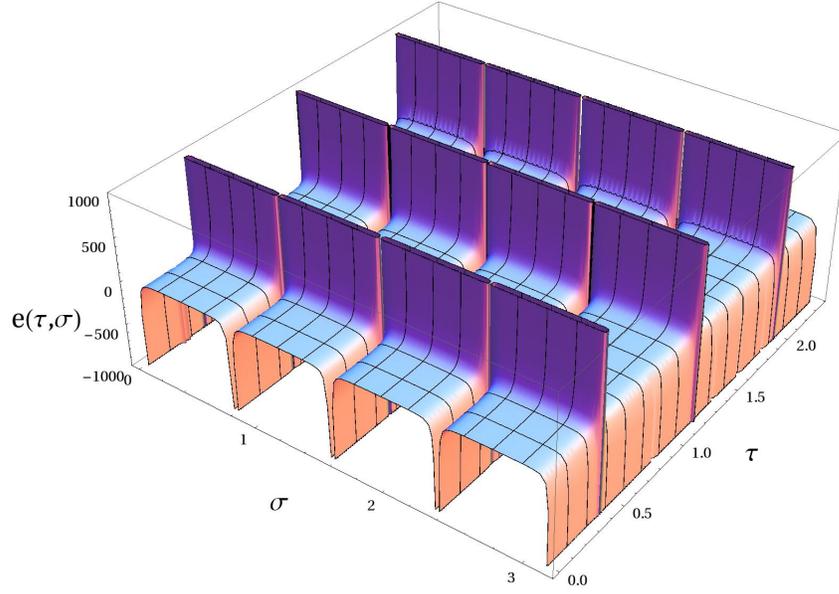


Figura 3.1: Gráfica de la superficie a integrar correspondiente a la forma de Euler en la norma conforme con $k = 4$. Debido a la periodicidad solamente es necesario realizar la integral sobre una de estas ramas.

pero dada la periodicidad en esta dirección es posible tomar cualquier intervalo donde se realice un periodo, calculando en esa región la integral sobre la forma de Euler. Se puede integrar en la norma conforme y basta hacerlo en el intervalo $\tau \in [0, \frac{\pi}{k}]$ y $\sigma \in [0, \pi]$, como se observa en la figura 3.2.

Debido a la periodicidad en τ el valor de la fase γ_k^J solamente tiene el efecto de desplazar de manera rígida la superficie en esta dirección, por lo que sin perder generalidad podemos tomar $\gamma_k^J = 0$.

Haciendo cambios de coordenadas a una norma tipo nula mediante $\eta = x_I = \text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k^J)$ y $\xi = y_I = \text{sen } k(\tau + \sigma + \gamma_k^J)$; $x_{II} = \text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k^J)$ y $y_{II} = -\text{sen } k(\tau + \sigma + \gamma_k^J)$; $x_{III} = -\text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k^J)$ y $y_{III} = \text{sen } k(\tau + \sigma + \gamma_k^J)$; ó $x_{IV} = -\text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k^J)$ y $y_{IV} = -\text{sen } k(\tau + \sigma + \gamma_k^J)$, también es posible calcular la integral. La región de integración que consideramos para la norma conforme se puede cubrir mediante cierto número de mapeos hechos con los cambios

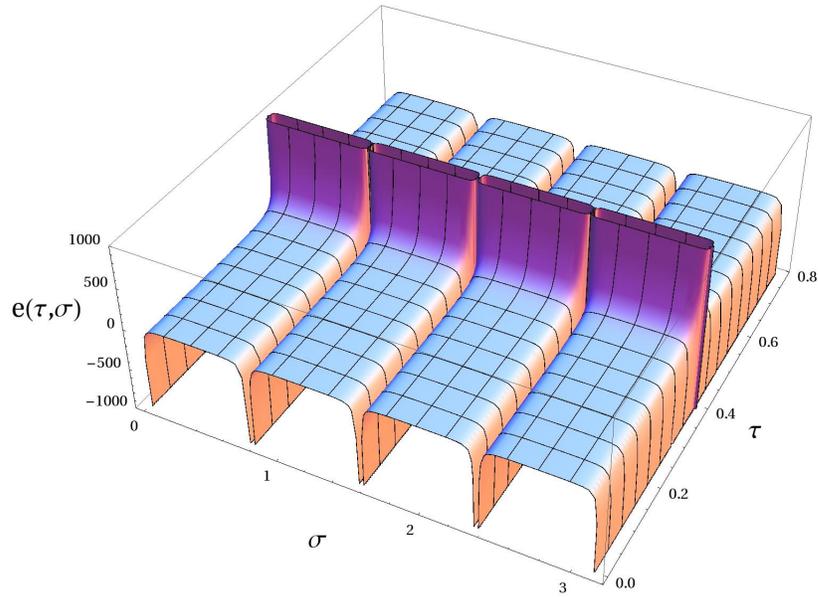


Figura 3.2: Gráfica de una las ramas de la superficie a integrar correspondiente a la forma de Euler en la norma conforme para $k = 4$.

de coordenadas anteriores, escogiendo apropiadamente el signo para cubrir distintas regiones que corresponden a la rama correcta para la función seno, esto dependiendo del valor que tomen $k(\tau + \sigma)$ y $k(\tau - \sigma)$, y en las cuales las variables x y y se reparametrizan como $x \in [-1, 1]$ y $y \in [-1, 1]$ y nos dan posibilidad de cubrir la totalidad de la región de integración $\sigma \in [0, \pi]$ y $\tau \in [0, \frac{\pi}{k}]$. En la figura 3.3 se muestra como se cubre la región de integración para τ y σ con los distintos cambios de coordenadas, donde las regiones I, II, III ó IV se repiten según sea el cambio de coordenadas.

Así a partir de (3.55) encontramos la forma de Euler simplemente haciendo el cambio de coordenadas apropiado $\{\tau, \sigma\} \rightarrow \{x, y\}$ para la forma diferencial (o a partir de (3.29) con la indentificación arriba mencionada),

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{\pi(x-y)^2} dx \wedge dy, \quad \text{regiones I, IV,} \quad (3.56)$$

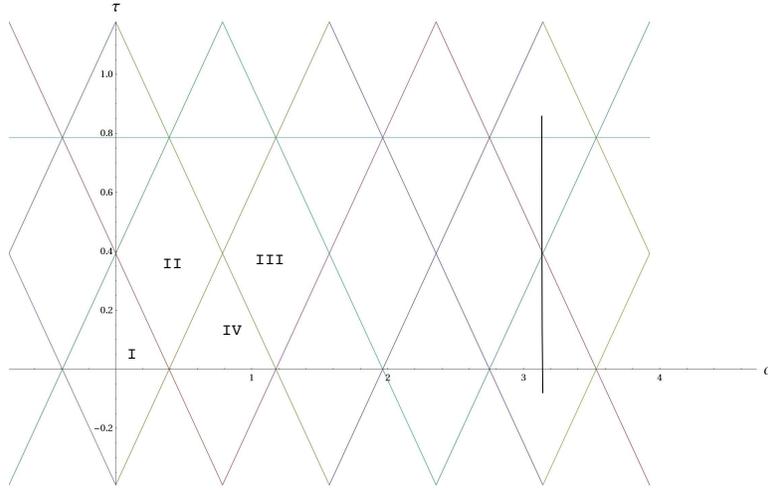


Figura 3.3: Región de integración para el caso de la cuerda abierta con un solo modo de oscilación, $k = 4$. Se muestran las distintas regiones en las cuales se consideran los cambios de coordenadas I, II, III ó IV. La línea vertical muestra el valor de $\sigma = \pi$.

si ambas variables describen la misma rama para la transformación seno y,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{\pi(x+y)^2} dx \wedge dy, \quad \text{regiones II, III,} \quad (3.57)$$

si las variables describen distintas ramas de la función seno.

El resultado de la integración de cada una de las regiones es,

$$\int_{-1+\delta}^{1-\delta} dy \int_{-1}^1 dx e(x, y) = \int_{-1+\delta}^{1-\delta} dx \int_{-1}^1 dy e(x, y) = \frac{1}{\pi} \ln \left[\frac{2}{\delta} - 1 \right], \quad (3.58)$$

con x y y cualquiera de las distintas opciones I a IV; y δ un parámetro que nos permite medir cuánto vamos a acercarnos a las singularidades, el cual es necesario para que el resultado de la primera integración sobre la variable x sea una integral sobre y en el intervalo $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ que converge y de igual manera con el otro orden de integración. De esta forma, considerando que la región de integración $\sigma \in [0, \pi]$, $\tau \in [0, \frac{\pi}{k}]$ se cubre con $\frac{1}{2}k^2$ regiones parametrizadas por x y y ,

obtenemos para el espectro topológico que,

$$\frac{k^2}{2\pi} \ln \left[\frac{2}{\delta} - 1 \right] = n, \quad (3.59)$$

con n un número entero. En este caso no se establecen condiciones de discretización (topológica) sobre los parámetros físicos que determinan el sistema. Sin embargo se establece una condición sobre el parámetro δ , siendo que este no puede llegar al valor cero, esto debido a que el número entero n no puede ser divergente [37]. Este procedimiento nos sirve para ilustrar el camino a seguir para los casos con condiciones de frontera de cuerda cerrada, en los cuales sí se establecen condiciones de discretización y de alguna forma presentan menos complicaciones en lo que se refiere al cálculo de los invariantes. Para casos que involucran un número mayor de coeficientes de los modos de oscilación distintos de cero se sigue hasta el momento trabajando para integrar la forma de Euler, lo que nos indica el grado de complejidad de este problema técnico. Por ejemplo, para el aparentemente sencillo caso de dos modos de oscilación en una sola dirección, $\alpha_k^I \neq 0$ y $\alpha_{2k}^I \neq 0$, la forma de Euler para $k = 4$ en la norma conforme tiene el aspecto mostrado en la figura 3.4.

Como ya hemos mencionado, los resultados para la cuerda abierta no son amplios debido a las complicaciones que presentan los cálculos. Por eso no continuamos considerando tales condiciones de frontera por ahora y seguimos con los resultados que conciernen a la cuerda cerrada, donde tendremos más posibilidades de explorar distintas configuraciones.

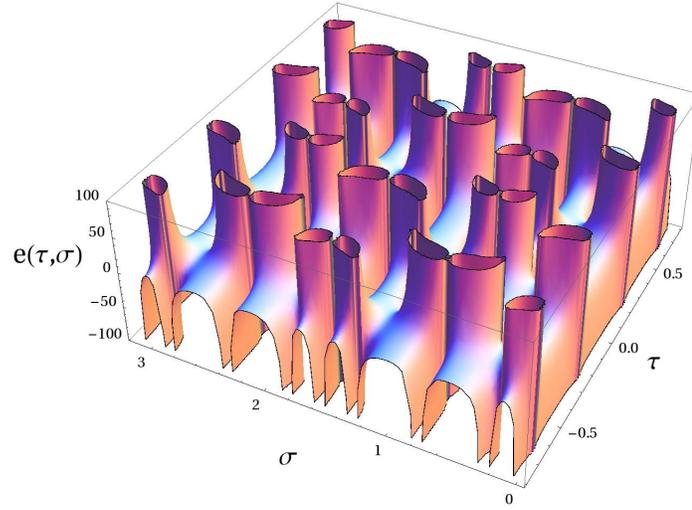


Figura 3.4: Gráfica de la función correspondiente a la forma de Euler para la cuerda abierta con dos modos de oscilación en una dirección, uno k -ésimo y otro $2k$ -ésimo, con valores $r_k^I = 2$, $r_{2k}^I = 2$ y $k = 4$.

3.4.2. Espectro topológico para la cuerda cerrada

Como hemos mencionado antes, es posible seleccionar condiciones de frontera periódicas para las soluciones que describen la cuerda cerrada X^μ [34],

$$X^\mu(\tau, \sigma_1) = X^\mu(\tau, \sigma_2) \quad (3.60)$$

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma_1) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma_2) \quad (3.61)$$

$$\gamma_{ab}(\tau, \sigma_1) = \gamma_{ab}(\tau, \sigma_2), \quad (3.62)$$

que con la parametrización escogida los valores extremos para σ son $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 = 2\pi$.

Esta elección para las funciones X^μ nos describe la cuerda cerrada con un conjunto de modos de oscilación en principio independientes, uno hacia la izquierda $\{\tilde{a}_k^\mu\}$ y otro hacia la derecha $\{a_k^\mu\}$. Las soluciones toman la siguiente forma una vez que

hemos fijado la norma conforme [34],

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\alpha_k^\mu e^{-ik(\tau-\sigma)} + \alpha_k^{\mu*} e^{ik(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_k^\mu e^{-ik(\tau+\sigma)} + \tilde{\alpha}_k^{\mu*} e^{ik(\tau+\sigma)} \right), \quad (3.63)$$

con $\mu = 0, \dots, D-1$ y donde hemos tomado en cuenta la periodicidad en la coordenada σ , dando como resultado que los modos de orden cero son iguales $\tilde{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$.

Ahora tenemos que las constricciones (3.8,3.33) se pueden expresar como dos conjuntos de constricciones independientes en términos de los modos de oscilación derechos e izquierdos que se resumen en,

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{p-k}^\mu \alpha_p^\nu \eta_{\mu\nu} = 0 \quad \tilde{L}_k = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_{p-k}^\mu \tilde{\alpha}_p^\nu \eta_{\mu\nu} = 0. \quad (3.64)$$

Consideramos el conjunto completo de constricciones, es decir para toda $k \in \mathbb{Z}$ y $L_{-k} = L_k^*$. Al utilizar la norma del cono de luz (3.42) tenemos que los campos dinámicos $X^I(\tau, \sigma)$ tienen la misma solución que hemos expuesto arriba (3.63), simplemente tomando $\mu = I = 2, \dots, D-1$; además el factor conforme $g_{\sigma\sigma}$ que determina el invariante de Euler se calcula de acuerdo a (3.46), donde solamente están involucrados los campos en las direcciones transversales $X^I(\tau, \sigma)$,

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\alpha_k^I e^{-ik(\tau-\sigma)} + \alpha_k^{I*} e^{ik(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_k^I e^{-ik(\tau+\sigma)} + \tilde{\alpha}_k^{I*} e^{ik(\tau+\sigma)} \right). \quad (3.65)$$

En la notación polar, $\alpha_k^I = r_k^I e^{-i\gamma_k^I}$ y $\tilde{\alpha}_k^I = \tilde{r}_k^I e^{-i\tilde{\gamma}_k^I}$ los campos transversales toman

la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 X^I(\tau, \sigma) = & x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau \\
 & + \sqrt{2\alpha'} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[r_k^I \cos k(\tau - \sigma + \gamma_k^I) + \tilde{r}_k^I \cos k(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_k^I) \right], \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

donde las tildes sobre la amplitud y la fase de los coeficientes indican que corresponden a los modos izquierdos de oscilación. La función métrica $g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma)$ que constituye el factor conforme en la métrica inducida y con la cual determinamos la clase característica de Euler está dada por (3.46),

$$\begin{aligned}
 g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma) = & 2\alpha' \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[r_k^I \sin k(\tau - \sigma + \gamma_k^I) - \tilde{r}_k^I \sin k(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_k^I) \right] \\
 & \times \left[r_l^J \sin l(\tau - \sigma + \gamma_l^J) - \tilde{r}_l^J \sin l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^J) \right] \delta_{IJ}. \quad (3.67)
 \end{aligned}$$

A partir de esta expresión es posible encontrar la forma de Euler. Al igual que con la cuerda abierta, el problema de integración de la clase característica para el caso general cuando se consideran todos los modos de oscilación, sigue bajo investigación debido a las dificultades que se presentan en el cálculo. Ahora es posible explorar distintos casos particulares en los cuales se obtendrá algún espectro topológico. En primer lugar tenemos un resultado trivial; si solamente se tienen modos derechos o izquierdos con coeficientes distintos de cero, entonces la forma de Euler es cero, $e = 0$, de manera que no se establece ninguna condición de discretización para los parámetros α_k^I ó $\tilde{\alpha}_k^I$ en esta situación.

El siguiente paso es considerar un modo de oscilación k -ésimo derecho en una dirección, sea $\alpha_k^{I_1} \neq 0$ y uno l -ésimo izquierdo en otra dirección, $\tilde{\alpha}_l^{I_2}$, en la notación

polar para los coeficientes,

$$\begin{aligned} X^{J_1} &= x_0^{J_1} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{J_1}\tau + \sqrt{2\alpha'}\frac{r_k^{J_1}}{k} \cos k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}), \\ X^{J_2} &= x_0^{J_2} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{J_2}\tau + \sqrt{2\alpha'}\frac{\tilde{r}_l^{J_2}}{l} \cos l(\tau + \sigma + \gamma_l^{J_2}). \end{aligned} \quad (3.68)$$

La función que determina el factor conforme de la métrica inducida en la norma conforme es,

$$g_{\sigma\sigma} = 2\alpha' \left[(r_k^{J_1})^2 \sin^2 k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) + (\tilde{r}_l^{J_2})^2 \sin^2 l(\tau + \sigma + \gamma_l^{J_2}) \right], \quad (3.69)$$

y la forma de Euler en esta norma,

$$e(\mathcal{P}) = \frac{kl(r_k^{J_1}\tilde{r}_l^{J_2})^2 \sin 2k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) \sin 2l(\tau + \sigma + \gamma_l^{J_2})}{\pi \left[(r_k^{J_1})^2 \sin^2 k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) + (\tilde{r}_l^{J_2})^2 \sin^2 l(\tau + \sigma + \gamma_l^{J_2}) \right]^2} d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.70)$$

En la figura 3.5 podemos ver la función que corresponde a la forma de Euler a integrar para encontrar el espectro topológico.

De la expresión para la forma de Euler (3.70) observamos que el periodo para el parámetro τ en general es 2π , mientras que para los casos particulares en que $k = l$ $\tau \in [0, \frac{\pi}{k}]$ y si k y l son múltiplos $\tau \in [0, \frac{\pi}{k}]$, con $k < l$. De tal forma que calculando la integral en la región que comprende un periodo en τ y $\sigma \in [0, 2\pi]$ obtenemos el espectro topológico.

Al igual que el caso de la cuerda abierta, cambiando a la norma tipo nula rela-

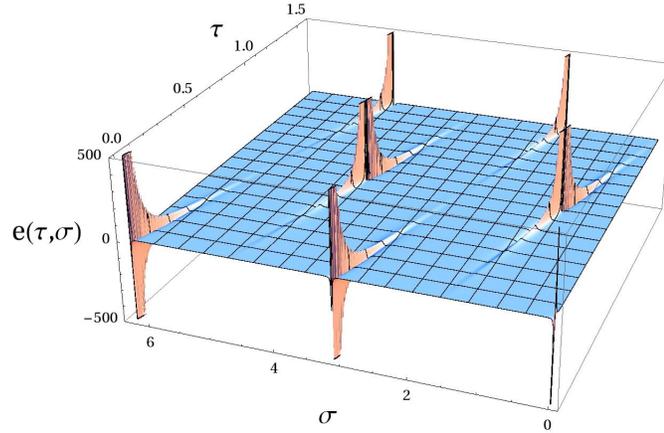


Figura 3.5: Gráfica de la superficie a integrar correspondiente a la forma de Euler para $k = 1$ y $l = 2$. Las fases se han puesto a cero y los valores para $r_k^{J_1} = 1$ y $r_l^{J_2} = 5$. Los parámetros toman los valores $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y $\sigma \in [0, 2\pi]$.

cionada con la norma conforme mediante el cambio de coordenadas siguiente,

$$\begin{aligned}
 \eta = x_I &= \text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) & \text{y} & \quad \xi = y_I = \text{sen } l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}), \\
 x_{II} &= \text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) & \text{y} & \quad y_{II} = -\text{sen } l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}), \\
 x_{III} &= -\text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) & \text{y} & \quad y_{III} = \text{sen } l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}), \\
 x_{IV} &= -\text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) & \text{y} & \quad y_{IV} = -\text{sen } l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}),
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

podemos integrar en cada una de las regiones que cubren el dominio de integración en σ y τ ; el elemento de línea de la métrica inducida toma la forma $ds_g^2 = 2g_{xy} dx dy$, y la clase característica de Euler está en términos de la función métrica $g_{xy}(x, y)$ como vemos en (3.29) haciendo la identificación correspondiente o haciendo el cambio de coordenadas para la forma de Euler ésta toma la siguiente forma,

$$e(\mathcal{P}) = \pm \frac{2}{\pi} \frac{(r_k^{J_1} \tilde{r}_l^{J_2})^2 xy}{\left[(r_k^{J_1})^2 x^2 + (\tilde{r}_l^{J_2})^2 y^2 \right]^2} dx \wedge dy, \tag{3.72}$$

con el signo positivo para las regiones tipo *I* y *IV* y el negativo para *II* y *III*.

Los parámetros toman los valores $x \in [-1, 1]$ y $y \in [-1, 1]$ y cubren la región por integrar si se consideran $2kl$ (para cualquier relación entre k y l) de las regiones tipo *I* y *IV* y otras $2kl$ para las regiones tipo *II* y *III* parametrizadas por las coordenadas tipo x y y correspondientes a las diferentes ramas de la función seno (3.71), tal como se muestra en la figura 3.6.

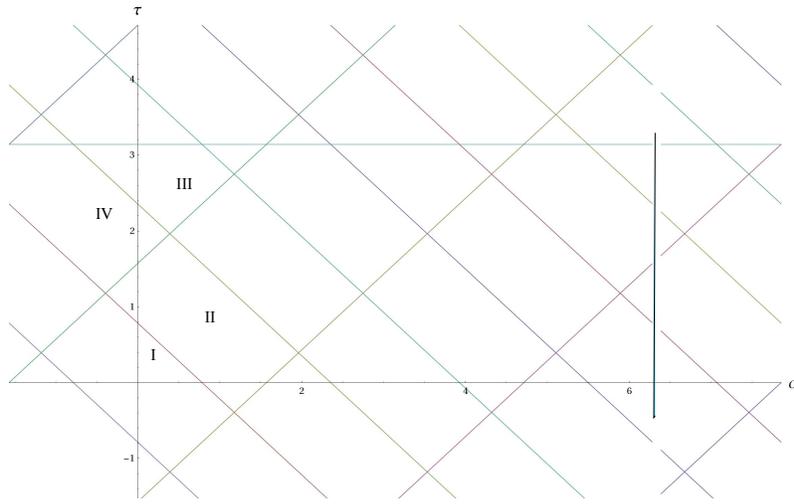


Figura 3.6: Región de integración para la cuerda cerrada para el caso con un modo de oscilación derecho $k = 1$ en una dirección y en otra dirección un modo izquierdo $l = 2$. Se muestran las distintas regiones en las cuales se consideran los cambios de coordenadas I a IV.

En la figura 3.7 mostramos una de las regiones de integración para las coordenadas x_I y y_I .

El resultado de integrar la expresión (3.72) para todos los tipos de región es cero,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy e(x, y) = 0, \quad (3.73)$$

de manera que no se establecen condiciones de discretización para los parámetros $r_k^{J_1}$ y $\tilde{r}_l^{J_2}$ en este caso. Esta integración se puede realizar de forma numérica en la

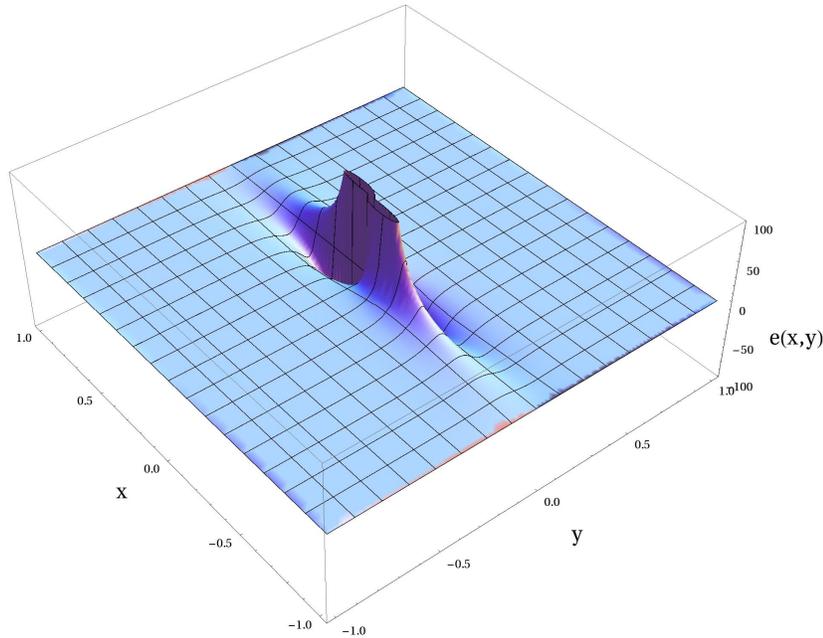


Figura 3.7: Gráfica de la superficie a integrar correspondiente a la forma de Euler. Las fases se han puesto a cero y los valores para $r_k^{J_1} = 1$ y $r_l^{J_2} = 5$. Los parámetros toman los valores $y \in [-1, 1]$ y $x \in [-1, 1]$.

norma conforme y el resultado coincide, salvo un poco de ruido numérico que se produce en el proceso, como se muestra en la figura 3.8.

Este resultado lo podemos entender como una consecuencia de la falta de interacción entre los modos, esto debido a que están sobre direcciones perpendiculares en el espacio-tiempo en el que están encajados. Es posible analizar esta interacción con un espacio de fondo con curvatura distinta de cero; más adelante encontraremos este caso y otros más para soluciones en el régimen perturbativo y se encuentra en preparación un trabajo para soluciones exactas [4].

El siguiente caso corresponde a considerar una cuerda con dos modos de oscilación con coeficientes distintos de cero en una misma dirección transversal. Esto es, un modo k -ésimo derecho α_k^J y uno l -ésimo $\tilde{\alpha}_l^J$ ambos en la dirección $I = J$, para los cuales la solución relevante que tiene un papel en la determinación de la

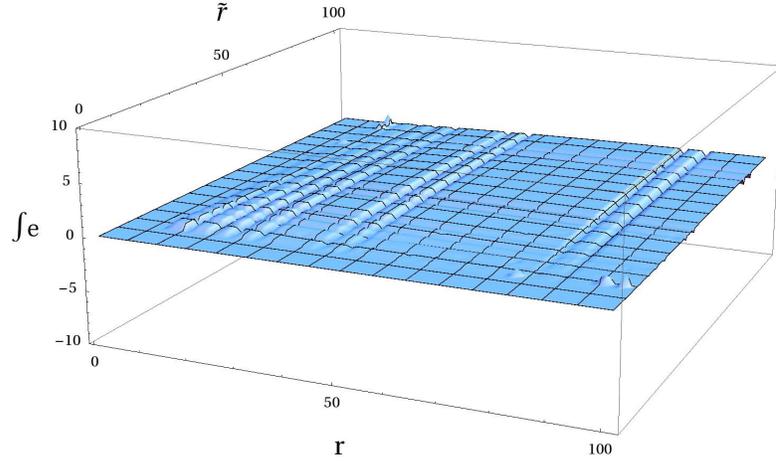


Figura 3.8: Resultado de la integración numérica para el caso $\alpha_k^{J_1} \neq 0$ y $\tilde{\alpha}_l^{J_2} \neq 0$. Las amplitudes están identificadas por $r_k^{J_1} = r$ y $\tilde{r}_l^{J_2} = \tilde{r}$. El resultado es cero, las perturbaciones que se observan son debido al cálculo numérico.

función métrica (3.46) toma la siguiente forma en la notación polar,

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^J + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^J \tau + \sqrt{2\alpha'} \left[\frac{r_k}{k} \cos k(\tau - \sigma + \gamma_k) + \frac{\tilde{r}_l}{l} \cos l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l) \right], \quad (3.74)$$

con $\alpha_k^J = r_k e^{-i\gamma_k}$ y $\tilde{\alpha}_l^J = \tilde{r}_l e^{-i\tilde{\gamma}_l}$; para $I \neq J$ las soluciones describen el movimiento del centro de masa y solamente dependen de τ ,

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau. \quad (3.75)$$

La función métrica $g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma)$ que constituye el factor conforme en la métrica in-

ducida es,

$$g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma) = 2\alpha [r_k \text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_r) - \tilde{r}_l \text{sen } l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l)]^2, \quad (3.76)$$

y la forma de Euler queda expresada como,

$$e(\tau, \sigma) = -\frac{2kl r_k \tilde{r}_l \cos k(\tau - \sigma + \gamma_k) \cos l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l)}{\pi [r_k \text{sen } k(\tau - \sigma + \gamma_k) - \tilde{r}_l \text{sen } l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l)]^2} d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.77)$$

Integrando esta dos-forma en la región $\sigma \in [0, 2\pi]$ y τ dentro de un periodo obtenemos el espectro topológico. En la figura 3.9 podemos ver la forma de la función que corresponde a la forma de Euler para valores particulares de k, l, r_k y \tilde{r}_l .

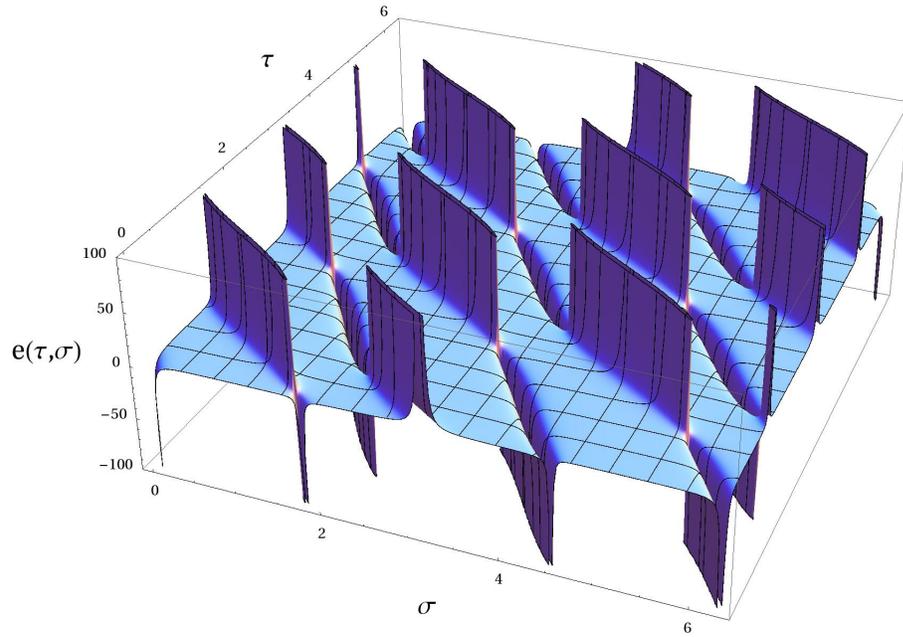


Figura 3.9: Forma de la función que corresponde a la clase característica de Euler en la norma conforme para el caso de dos modos de oscilación, derecho e izquierdo, en una misma dirección para los valores, $k = 1, l = 2, r_k = 2$ y $\tilde{r}_l = 5$.

Como hemos hecho antes introducimos coordenadas mediante las relaciones (3.71)

y la región de integración queda cubierta de forma similar que en caso anterior. La forma de Euler en esta norma tipo nula toma la siguiente forma para las regiones tipo *I* y *IV*,

$$e(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{r_k \tilde{r}_l}{(r_k x - \tilde{r}_l y)^2} dx \wedge dy, \quad (3.78)$$

y para las regiones tipo *II* y *III* tenemos,

$$e(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{r_k \tilde{r}_l}{(r_k x + \tilde{r}_l y)^2} dx \wedge dy. \quad (3.79)$$

El resultado de la integración para toda la región constituye el espectro topológico para este caso,

$$\int e(\mathcal{P}) = 4kl \frac{4}{\pi} \operatorname{arctanh} \left[\frac{r_k}{\tilde{r}_l} \right] = n, \quad (3.80)$$

con $n \in \mathbb{Z}$, y donde se han considerado $2kl$ regiones tipo *I* y *IV* y otras $2kl$ regiones tipo *II* y *III*. La relación es un número real solamente si $r_k < \tilde{r}_l$, es decir, si $\frac{r_k}{\tilde{r}_l} < 1$.

De esta manera observamos que se fija una condición de discretización para la amplitud de los coeficientes de los modos de oscilación y además se impone un orden en dicha relación, esto es, $r_k < \tilde{r}_l$ ó $r_k > \tilde{r}_l$. Cabe mencionar que en este caso el orden de integración juega un papel en el cálculo del espectro topológico. El resultado (3.80, 3.82) se obtuvo primero integrando sobre la variable y y posteriormente sobre x . En el caso contrario en el cual la relación entre los coeficientes de los modos de oscilación es $r_k > \tilde{r}_l$ también existe un espectro topológico similar, simplemente intercambiando los coeficientes,

$$\int e(\mathcal{P}) = 4kl \frac{4}{\pi} \operatorname{arctanh} \left[\frac{r_k}{\tilde{r}_l} \right] = n, \quad (3.81)$$

donde en esta ocasión la integración se hizo primero sobre la variable x y des-

pués sobre y . Esto no debe de sorprender pues existe la posibilidad de que la integración de una función respecto a dos variables tenga resultados distintos dependiendo del orden de integración [17], [3].

Estos dos resultados los podemos describir de manera general mediante una sola expresión de tal manera que sea válida para cualquier orden de las amplitudes de los modos de oscilación r_k y \tilde{r}_l ,

$$\frac{4}{\pi} kl \ln \left[\frac{(\tilde{r}_l + r_k)^2}{(\tilde{r}_l - r_k)^2} \right] = n. \quad (3.82)$$

Podemos localizar los valores de r_k y \tilde{r}_l que satisfacen la relación del espectro topológico, es decir, los valores permitidos que pueden tomar los coeficientes de la expansión, como se puede observar en la figura 3.10.

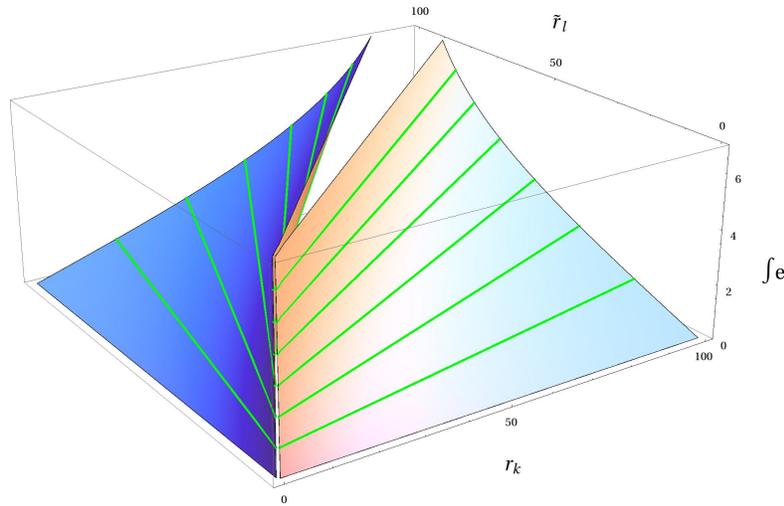


Figura 3.10: Gráfica que ilustra el espectro topológico para el caso de dos modos de oscilación, un k -ésimo derecho y l -ésimo izquierdo. Las líneas indican los valores de r_k y \tilde{r}_l que satisfacen la relación del espectro topológico. Se presenta la gráfica para el caso $k = 1$ y $l = 1$.

Como siguiente ejemplo podemos analizar el caso en que tenemos en una dirección, $I = J^1$, dos modos de oscilación, uno k -ésimo derecho $\alpha_k^{J^1}$ y uno l -ésimo

izquierdo $\tilde{\alpha}_l^{J_1}$, y en otra dirección $I = J_2$, un modo k-ésimo derecho $\alpha_k^{J_2}$, siendo estas las soluciones relevantes en las direcciones transversales en la notación polar,

$$X^{J_1}(\tau, \sigma) = x_0^{J_1} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{J_1} + \sqrt{2\alpha'} \left[\frac{r_k^{J_1}}{k} \cos k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) + \frac{\tilde{r}_l^{J_1}}{l} \cos l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_1}) \right], \quad (3.83)$$

$$X^{J_2}(\tau, \sigma) = x_0^{J_2} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{J_2} + \sqrt{2\alpha'}\frac{r_k^{J_2}}{k} \cos k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_2}). \quad (3.84)$$

La región de integración es $\sigma \in [0, 2\pi]$ y τ sobre un periodo, con las mismas condiciones de periodicidad que en el caso anterior. A partir de esto se calcula la función métrica $g_{\sigma\sigma}$ y la forma de Euler. El resultado de la integración introduciendo la norma tipo nula a través de los cambios de coordenadas que utilizamos en el caso anterior nos da el espectro topológico para este caso,

$$\frac{4}{\pi} kl \ln \left[\frac{(r_k^{J_2})^2 + (r_k^{J_1} + \tilde{r}_l^{J_1})^2}{(r_k^{J_2})^2 + (r_k^{J_1} - \tilde{r}_l^{J_1})^2} \right] = n. \quad (3.85)$$

En este caso el orden de integración no cambia el resultado para el espectro topológico.

De esta manera se establece, al igual que el caso anterior, una relación discreta entre las amplitudes de los modos de oscilación $r_k^{J_1}$, $\tilde{r}_l^{J_1}$, $r_k^{J_2}$. Si se considera además en la dirección $I = J_2$ un modo de oscilación l-ésimo izquierdo $\tilde{\alpha}_l^{J_2} = \tilde{r}_l^{J_2}$, el espectro topológico que se obtiene es,

$$\frac{4}{\pi} kl \ln \left[\frac{(r_k^{J_2} + \tilde{r}_l^{J_2})^2 + (r_k^{J_1} + \tilde{r}_l^{J_1})^2}{(r_k^{J_2} - \tilde{r}_l^{J_2})^2 + (r_k^{J_1} - \tilde{r}_l^{J_1})^2} \right] = n. \quad (3.86)$$

Se pueden seguir analizando distintos casos, sin embargo, como es de esperarse,

la complejidad de los cálculos aumenta. No obstante, es importante destacar que se logran encontrar relaciones discretas entre los parámetros que determinan la configuración física del sistema bajo estudio simplemente con el cálculo de los invariantes topológicos asociados al haz fibrado principal correspondiente. Esto sin que sea necesario definir un espacio de estados, como lo es en el procedimiento de cuantización canónica. Tales resultados los podemos entender como un primer acercamiento de la cuantización topológica a la teoría de cuerdas y aunque no es posible hacer una comparación con los resultados del formalismo canónico. Es de esperarse que con la eventual definición de estados y la descripción de la dinámica dentro del contexto de la cuantización topológica, estos espectros puedan ser entendidos con mayor profundidad. También esperamos que en un futuro sea posible calcular el espectro topológico para el caso general, ya que existe la posibilidad de usar cualquier sistema de coordenadas para realizar el cálculo y probablemente en alguno de ellos sea realizable la integración. Para este método estamos siguiendo un procedimiento completamente diferente, empezando por cómo se implementen las constricciones. En el método topológico no estamos obligados a tener una representación de Fock para los estados y a definir operadores que actúan sobre ellos. La única información que se requiere es el sistema físico representado como una configuración clásica y a partir de ahí construir el haz fibrado principal. Entonces el espectro topológico puede obtenerse construyendo estructuras geomético-topológicas a partir de las cuales se puede extraer la información, usando el marco clásico de la teoría sin añadir ingredientes extras que sean incompatibles, como son operadores, espacios de Hilbert o constricciones cuánticas.

3.5. Espectro topológico en fondos curvos

El procedimiento y las expresiones para la forma de Euler en general para el espectro topológico que se encontraron en la sección anterior permanecen sin ninguna alteración cuando se consideran espacios de curvatura distinta de cero, de manera que lo único que se necesita encontrar es la componente $g_{\xi\eta}$ de la métrica inducida en la norma tipo nula o $g_{\sigma\sigma}$ en la norma conforme. En particular en la sección 3.3 encontramos que el tratamiento incluye todos los casos para la cuerda bosónica, esto es, tanto cuerdas abiertas como cerradas propagándose en cualquier espacio-tiempo de fondo. Sin embargo, nos enfrentamos con la posibilidad de encontrar soluciones para las cuerdas propagándose en un fondo curvo. Para obtener el espectro topológico en cualquier caso debemos conocer la forma de la métrica inducida (3.4) la cual está dada a través de las soluciones a las ecuaciones de movimiento para $X^\mu(x^a)$. El problema de encontrar soluciones exactas para cuerdas propagándose en fondos generales ha recibido atención en el pasado [66], [11], pero el desarrollo de la teoría cuántica de cuerdas se ha hecho mayoritariamente considerando teoría de perturbaciones, ver [53] para un resumen. Los campos de fondo que son considerados en [53] son diferentes que los espacios-tiempo vistos como en [66]. Por una parte [53] se puede pensar que los campos de fondo son generados por estados coherentes de excitaciones de la cuerda que corresponde a estados sin masa, por ejemplo gravitones, y estos espacios de fondo pueden ser encontrados a partir de una acción efectiva y en algunos casos usando un modelo sigma donde el campo de fondo antisimétrico de Kalb-Ramond y el dilatón están incluidos, y el campo métrico simétrico puede tener asociada una curvatura distinta de cero. Mientras que por otro lado en [66] los espacios-tiempo de fondo donde la cuerdas se propagan son arbitrarios y no necesariamente corresponden a un estado coherente a partir de excitaciones de las cuerdas que corres-

ponden a estados sin masa, en lugar de esto, las cuerdas son vistas como objetos de prueba propagándose en un espacio de fondo que está fijo.

En esta sección discutiremos cómo calcular el espectro topológico para soluciones exactas, así como soluciones perturbativas. El caso de soluciones exactas, como ya hemos visto, puede tratarse sin mayor desarrollo del método ya que solamente necesitamos encontrar la métrica inducida una vez que tenemos las soluciones sobre el fondo no trivial. Este no es el caso para las soluciones perturbativas, debido a que es necesario analizar cómo se modifica el cálculo del espectro a cada orden cuando se introduce una solución que no es exacta.

3.5.1. Soluciones perturbativas

Para el caso perturbativo adoptamos el método que de Vega y Sánchez introdujeron en [18], y continuaron en varios trabajos durante los años siguientes, para un resumen ver [66]. Este método consiste en tomar en cuenta perturbaciones alrededor de una solución exacta a las ecuaciones de movimiento de orden cero; usando la norma conforme (3.14), proponen una solución perturbativa hasta segundo orden,

$$X^\mu(\tau, \sigma) = A^\mu(\tau) + \epsilon B^\mu(\tau, \sigma) + \epsilon^2 C^\mu(\tau, \sigma). \quad (3.87)$$

Para el cálculo de espectros topológicos es necesario ir hasta segundo orden en el desarrollo perturbativo a fin de encontrar la métrica inducida sobre la hoja de mundo. En [18] el primer orden describe la interacción de los modos de oscilación de la cuerda con el espacio de fondo y el segundo la interacción entre los modos de oscilación. La solución exacta para el orden cero la restringen a ser solución para el movimiento del centro de masa $A^\mu = A^\mu(\tau)$ (o para un modo izquierdo o derecho $A^\mu = A^\mu(\tau + \sigma)$ ó $A^\mu = A^\mu(\tau - \sigma)$ respectivamente). Usando tales

soluciones encuentran expresiones explícitas para las ecuaciones de constricción (relaciones de Virasoro) a cada orden correspondiente en la serie perturbativa. De tal manera encuentran los momentos canónicos conjugados Π_μ a los campos X^μ , se promueven a operadores y se postulan las relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales en la aproximación lineal,

$$[B^\mu(\tau, \sigma), \Pi_\nu(\tau, \sigma')] = \delta^\mu_\nu \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.88)$$

A partir de las constricciones de Virasoro, en particular del operador L_0 , se obtiene la fórmula para el cuadrado de la masa para las excitaciones físicas de la cuerda, tal y como se hace para el caso de un fondo plano. Encuentran una relación implícita para la masa al cuadrado para las excitaciones físicas de la cuerda en la aproximación de segundo orden, además de analizar en varios casos la dinámica de la cuerda sobre estos espacios-tiempo curvos. Este es un breve recuento del método general para encontrar soluciones perturbativas a las ecuaciones que describen la dinámica de las cuerdas propagándose sobre fondos curvos y que toma en cuenta los efectos de la curvatura [18].

Cabe mencionar que en estos trabajos se hace en primer lugar la variación de la acción y después se introduce la perturbación para encontrar las ecuaciones de movimiento a cada orden. Mostraremos a continuación que seguir tal orden o el inverso, es decir, introducir la perturbación a nivel de la acción y luego hacer la variación para encontrar las ecuaciones de movimiento a los distintos órdenes, lleva al mismo resultado. Haremos esto para los mapeos armónicos en general ya que, como mencionamos antes, la teoría de cuerdas resulta ser un caso particular de este tipo de modelos.

Sean (\mathcal{M}, γ) y (\mathcal{N}, G) dos variedades diferenciales (pseudo)-Riemannianas de

dimensión m y n respectivamente. Para la variedad base \mathcal{M} denotaremos las coordenadas mediante $\{x^a\}$, mientras que para la variedad de fondo (*target*) \mathcal{N} serán $\{X^\mu\}$; de manera que $\gamma_{ab} = \gamma_{ab}(x)$ y $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(X)$. Un mapeo armónico es un mapeo suave $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ($x \mapsto X$) de manera que las funciones X^μ están en términos de las coordenadas $\{x^a\}$ y satisfacen las ecuaciones de movimiento que resultan de la variación de la siguiente acción,

$$S = \int d^m x \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}, \quad (3.89)$$

las cuales son,

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma^{ab} \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta = 0. \quad (3.90)$$

donde $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica del espacio de fondo $(\mathcal{N}, \mathbf{G})$.

Utilizando la solución perturbativa hasta segundo orden,

$$X^\mu(x^a) \approx A^\mu(x^a) + \epsilon B^\mu(x^a) + \epsilon^2 C^\mu(x^a), \quad (3.91)$$

podemos encontrar la expresión a segundo orden para la métrica del espacio-tiempo de fondo,

$$G_{\mu\nu}(X) \approx G_{\mu\nu}(A) + \epsilon \partial_\sigma G_{\mu\nu} B^\sigma + \epsilon^2 \left[\partial_\sigma G_{\mu\nu} C^\sigma + \frac{1}{2} \partial_{\sigma\gamma} G_{\mu\nu} B^\sigma B^\gamma \right], \quad (3.92)$$

y los símbolos de Christoffel al mismo orden,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(X) \approx \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(A) + \epsilon \partial_{\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} B^{\sigma} + \epsilon^2 \left[\partial_{\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} C^{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_{\sigma\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} B^{\sigma} B^{\gamma} \right], \quad (3.93)$$

donde $\partial_{\sigma} \equiv \frac{\partial}{\partial X^{\sigma}}$ y tanto las derivadas de $G_{\mu\nu}$ como de $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ están evaluadas en $\epsilon = 0$,

$$\partial_{\rho} G_{\mu\nu} = \partial_{\rho} G_{\mu\nu}(X)|_{\epsilon=0} \quad \partial_{\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \partial_{\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(X)|_{\epsilon=0}.$$

Utilizando los desarrollos perturbativos de estas dos expresiones podemos encontrar las ecuaciones de movimiento a cada orden introduciéndolas en (3.9),

$$\epsilon^0 : \quad \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b A^{\mu} \right] + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \gamma^{ab} \partial_a A^{\alpha} \partial_b A^{\beta} = 0, \quad (3.94)$$

mientras que para el primer orden tenemos,

$$\epsilon^1 : \quad \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b B^{\mu} \right] + 2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \gamma^{ab} \partial_a A^{\alpha} \partial_b B^{\beta} + \partial_{\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} B^{\sigma} \gamma^{ab} \partial_a A^{\alpha} \partial_b A^{\beta}, \quad (3.95)$$

y para el segundo,

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : \quad & \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b C^{\mu} \right] + 2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \gamma^{ab} \partial_a A^{\alpha} \partial_b C^{\beta} \\ & + 2 \partial_{\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} B^{\sigma} \gamma^{ab} \partial_a A^{\alpha} \partial_b B^{\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \gamma^{ab} \partial_a B^{\alpha} \partial_b B^{\beta} \\ & + \left[\partial_{\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} C^{\sigma} + \frac{1}{2} \partial_{\sigma\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} B^{\sigma} B^{\gamma} \right] \gamma^{ab} \partial_a A^{\alpha} \partial_b A^{\beta} = 0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Ahora podemos proceder primero introduciendo la perturbación en la acción y después haciendo la variación correspondiente respecto a los distintos campos que forman la perturbación y encontrar el conjunto de ecuaciones a cada orden.

Partiendo de la acción para los mapeos armónicos (3.89) e introduciendo en ella las perturbaciones (3.91, 3.92) encontramos la acción a los distintos órdenes,

$$\epsilon^0 : \quad S^{(0)} = \int d^2x \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a A^\mu \partial A^\nu G_{\mu\nu} = 0, \quad (3.97)$$

donde podemos notar que la acción a orden cero tiene la misma forma que la acción sin perturbar, solamente que aparece el campo a orden cero A^μ en lugar de la solución completa X^μ . La acción a primer y segundo orden son,

$$\epsilon^1 : \quad S^{(1)} = \int d^2x \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} [2\partial_a A^\mu \partial_b B^\nu G_{\mu\nu} + \partial_a A^\mu \partial_b A^\nu \partial_\sigma G_{\mu\nu} B^\sigma], \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : \quad S^{(2)} = \int d^2x \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} & \left[(2\partial_a A^\mu \partial_b C^\nu + \partial_a B^\mu \partial_b B^\nu) G_{\mu\nu} \right. \\ & + 2\partial_a A^\mu \partial_b B^\nu \partial_\sigma G_{\mu\nu} B^\sigma \\ & \left. + \partial_a A^\mu \partial_b A^\nu \left(\partial_\sigma G_{\mu\nu} C^\sigma + \frac{1}{2} \partial_{\sigma\gamma} G_{\mu\nu} B^\sigma B^\gamma \right) \right]. \quad (3.99) \end{aligned}$$

Es fácil observar que la variación de la acción de orden cero en la perturbación arrojará la ecuación (3.94) debido a que la forma de la acción es la misma que la acción sin perturbar. En la acción a primer orden aparecen contribuciones tanto de la variable a orden cero A^μ como de la de primer orden B^μ , por lo tanto debemos tomar variaciones respecto a ambos campos y consideralas como variaciones independientes. Los $G_{\mu\nu}$ y sus derivadas están evaluados en $\epsilon = 0$, por lo tanto son cantidades de orden cero, de manera que solamente dependen del campo a dicho orden. De la variación de la acción a primer orden respecto al campo a orden cero, $\frac{\delta S^{(1)}}{\delta A^\beta}$, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento después de algún manejo

algebraico,

$$\begin{aligned}
 \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b B^\beta \right] + G^{\beta\alpha} \partial_\sigma G_{\alpha\nu} B^\sigma \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b A^\nu \right] \\
 + \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \left[\Gamma_{\mu\nu}^\beta \partial_a A^\mu \partial_b B^\nu \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} G^{\beta\alpha} (\partial_{\mu\sigma} G_{\alpha\nu} + \partial_{\nu\sigma} G_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha\sigma} G_{\mu\nu}) B^\sigma \partial_a A^\mu \partial_b A^\nu \right] = 0, \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

mientras que de la variación respecto al campo de primer orden, $\frac{\delta S^{(1)}}{\delta B^\nu}$ se sigue,

$$\begin{aligned}
 \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b A^\nu \right] \\
 - \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \left[G_{\rho\delta} (\partial_\gamma G^{\nu\rho}) + \frac{1}{2} G^{\nu\rho} (\partial_\rho G_{\gamma\delta}) \right] \partial_a A^\gamma \partial_b A^\delta = 0, \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $(\partial_\gamma G_{\rho\delta}) G^{\nu\rho} = -G_{\rho\delta} (\partial_\gamma G^{\nu\rho})$. Sustituyendo esta última expresión (3.101) en la anterior (3.100) y realizando algún manejo algebraico simple, obtenemos la ecuación de movimiento para el primer orden en la expansión perturbativa (3.95). Así mostramos que, a primer orden, el variar la acción y luego introducir la expansión perturbativa y proceder en orden inverso perturbando la acción y luego variando, tienen como resultado las mismas ecuaciones de movimiento. Para el segundo orden procedemos de manera análoga, teniendo en cuenta que se requiere variar $S^{(2)}$ respecto a los campos de orden cero, primero y segundo. De la variación de la acción a segundo orden (3.99) respecto al campo de orden cero,

$\frac{\delta S^{(2)}}{\delta A^\beta} = 0$ obtenemos las ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b C^\beta \right] + \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b B^\nu \right] G^{\beta\alpha} \partial_\sigma G_{\alpha\nu} B^\sigma \\
 & + \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b A^\nu \right] G^{\beta\alpha} \left[\partial_\sigma G_{\alpha\nu} C^\sigma + \frac{1}{2} \partial_{\sigma\gamma} G_{\alpha\nu} B^\sigma B^\gamma \right] \\
 & + G^{\beta\alpha} \left[\left(\partial_{\sigma\mu} G_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\sigma\alpha} G_{\mu\nu} \right) C^\sigma \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\partial_{\sigma\mu\gamma} G_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\sigma\gamma\alpha} G_{\mu\nu} \right) B^\sigma B^\gamma \left. \right] \gamma^{ab} \partial_a A^\mu \partial_b A^\nu \\
 & + G^{\beta\alpha} \left[\partial_\mu G_{\alpha\nu} - \partial_\alpha G_{\mu\nu} \right] \gamma^{ab} \partial_a A^\mu \partial_b C^\nu \\
 & + G^{\beta\alpha} \left[\partial_{\sigma\mu} G_{\alpha\nu} - \partial_{\sigma\alpha} G_{\mu\nu} \right] B^\sigma \gamma^{ab} \partial_a A^\mu \partial_b B^\nu \\
 & + G^{\beta\alpha} \left[\partial_\mu G_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_\alpha G_{\mu\nu} \right] \gamma^{ab} \partial_a B^\mu \partial_b B^\nu = 0. \quad (3.102)
 \end{aligned}$$

La variación de la acción de segundo orden respecto al campo de primer orden,

$\frac{\delta S^{(2)}}{\delta B^\nu} = 0$ arroja el conjunto de ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b B^\nu \right] + \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b A^\lambda \right] G^{\nu\rho} \partial_\epsilon G_{\rho\lambda} B^\epsilon \\
 & + G^{\nu\rho} \left[\partial_{\epsilon\delta} G_{\rho\lambda} - \frac{1}{2} \partial_{\epsilon\rho} G_{\delta\lambda} \right] B^\epsilon \gamma^{ab} \partial_a A^\delta \partial_b A^\lambda + 2\Gamma_{\delta\lambda}^\nu \gamma^{ab} \partial_a A^\delta \partial_b B^\lambda = 0, \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

mientras que respecto al campo de segundo orden, $\frac{\delta S^{(2)}}{\delta C^\lambda} = 0$, obtenemos,

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left[\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b A^\lambda \right] + \Gamma_{\delta\zeta}^\lambda \gamma^{ab} \partial_a A^\delta \partial_b A^\zeta = 0. \quad (3.104)$$

De manera que sustituyendo (3.104) y (3.103) en la ecuación (3.102) y considerando de nueva cuenta que $(\partial_\gamma G_{\rho\delta}) G^{\nu\rho} = -G_{\rho\delta} (\partial_\gamma G^{\nu\rho})$, obtenemos finalmente la ecuación de movimiento para el segundo orden en la expansión perturbativa (3.96).

Por lo tanto, hemos mostrado que hasta el segundo orden en la expansión pertur-

bativa (3.91) el variar la acción y luego introducir la perturbación arroja el mismo conjunto de ecuaciones a cada orden que siguiendo el orden inverso, es decir, introducir la perturbación a nivel de la acción para después encontrar las ecuaciones mediante la variación de cada una de dichas acciones a cada orden.

Esto nos asegura que la teoría perturbativa de los mapeos armónicos conserva la invariancia ante difeomorfismos en el espacio base \mathcal{M} , como se puede observar a partir de la forma de cada una de las acciones a los distintos órdenes en la expansión perturbativa (3.97, 3.98 y 3.99) y del hecho de que ambas rutas para obtener las ecuaciones de movimiento nos llevan al mismo resultado. Esta propiedad se puede traducir en el contexto de la teoría de la cuerda bosónica en que aun en el régimen perturbativo existe la invariancia bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo.

Como ya vimos en la sección 3.2.1 al variar la acción respecto a la métrica auxiliar $\frac{\delta S_P}{\delta \gamma^{ab}} = 0$ obtenemos las ecuaciones de constricción $T_{ab} = 0$. De la misma forma que hemos hecho para las ecuaciones de movimiento, se puede mostrar que para el tensor de energía momento dos dimensional T_{ab} no causa efecto el introducir la expansión perturbativa antes o después de hacer la variación de la acción. De esta manera a partir de (3.7),

$$T_{ab} = G_{\mu\nu} \left(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \right) = 0, \quad (3.105)$$

al introducir la expresión para la solución perturbativa (3.91), podemos encontrar las ecuaciones de constricción a los distintos órdenes, para el orden cero tenemos,

$$\epsilon^0 : \quad T_{ab}^{(0)} = G_{\mu\nu} \left[\partial_a A^\mu \partial_b A^\nu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c A^\mu \partial_d A^\nu \right] = 0, \quad (3.106)$$

para el primer orden,

$$\begin{aligned} \epsilon^1 : \quad T_{ab}^{(1)} = G_{\mu\nu} & \left[\partial_a A^\mu \partial_b B^\nu + \partial_a B^\mu \partial_b A^\nu - \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c A^\mu \partial_d B^\nu \right] \\ & + \partial_\sigma G_{\mu\nu} B^\sigma \left[\partial_a A^\mu \partial_b A^\nu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c A^\mu \partial_d A^\nu \right] = 0, \quad (3.107) \end{aligned}$$

y finalmente para el segundo orden encontramos,

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : \quad T_{ab}^{(2)} = G_{\mu\nu} & \left[\partial_a A^\mu \partial_b C^\nu + \partial_a C^\mu \partial_b A^\nu + \partial_a B^\mu \partial_b B^\nu \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} (2\partial_c A^\mu \partial_d C^\nu + \partial_c B^\mu \partial_d B^\nu) \right] \\ & + \partial_\sigma G_{\mu\nu} B^\sigma \left[\partial_a A^\mu \partial_b B^\nu + \partial_a B^\mu \partial_b A^\nu - \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c A^\mu \partial_d B^\nu \right] \\ & + \left(\partial_\sigma G_{\mu\nu} C^\sigma + \frac{1}{2} \partial_{\sigma\gamma} G_{\mu\nu} B^\sigma B^\gamma \right) \left[\partial_a A^\mu \partial_b A^\nu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c A^\mu \partial_d A^\nu \right] = 0. \quad (3.108) \end{aligned}$$

De la misma forma la métrica inducida puede ser expresada para cada uno de los distintos órdenes en la expansión perturbativa,

$$\epsilon^0 : \quad g_{ab}^{(0)} = \partial_a A^\mu \partial_b A^\nu G_{\mu\nu}, \quad (3.109)$$

$$\epsilon^1 : \quad g_{ab}^{(1)} = (\partial_a A^\mu \partial_b B^\nu + \partial_a B^\mu \partial_b A^\nu) G_{\mu\nu} + \partial_a A^\mu \partial_b A^\nu \partial_\sigma G_{\mu\nu} B^\sigma, \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon^2 : \quad g_{ab}^{(2)} = & (\partial_a A^\mu \partial_b C^\nu + \partial_a C^\mu \partial_b A^\nu + \partial_a B^\mu \partial_b B^\nu) G_{\mu\nu} \\
 & + (\partial_a A^\mu \partial_b B^\nu + \partial_a B^\mu \partial_b A^\nu) \partial_\sigma G_{\mu\nu} B^\sigma \\
 & + \partial_a A^\mu \partial_b A^\nu \left(\partial_\sigma G_{\mu\nu} C^\sigma + \frac{1}{2} \partial_{\sigma\alpha} G_{\mu\nu} B^\sigma B^\alpha \right) \quad (3.111)
 \end{aligned}$$

Tanto el conjunto de ecuaciones de movimiento, el de constricciones y las componentes de la métrica inducida se pueden particularizar a las distintas normas en las que escogemos trabajar, de manera que a continuación presentamos los resultados en ambos sistemas de coordenadas que llevan a la norma conforme y a una norma tipo nula. Además encontraremos que al tomar la solución del centro de masa $A^\mu = A^\mu(\tau)$ como respuesta exacta al orden cero y considerar las constricciones a primer orden, resulta necesario ir hasta el segundo orden en la expansión perturbativa a fin de encontrar la métrica inducida sobre la hoja de mundo. Sin embargo, al analizar las constricciones a segundo orden veremos que solamente se requiere conocer las soluciones hasta primer orden en la perturbación.

La norma conforme

En la norma conforme denotamos los parámetros como $\{\tau, \sigma\}$, siendo la métrica auxiliar conformalmente (pseudo-)plana,

$$\gamma = e^{\varphi(\tau, \sigma)} \eta.$$

La expansión perturbativa alrededor de la solución exacta del centro de masa se

expresa mediante,

$$X^\mu(\tau, \sigma) \approx A^\mu(\tau) + \epsilon B^\mu(\tau, \sigma) + \epsilon^2 C^\mu(\tau, \sigma), \quad \eta = \text{diag}(-1, 1), \quad (3.112)$$

donde ϵ es el parámetro que indica el orden en la expansión. De manera que las ecuaciones de movimiento para cada orden a partir de (3.94, 3.95, 3.96) escritas en la norma conforme son,

$$\epsilon^0 : \quad \partial_\tau^2 A^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau A^\beta = 0, \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^1 : \quad & \left(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2 \right) B^\mu \\ & - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau B^\beta - \partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B^\rho \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau A^\beta = 0, \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : \quad & \left(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2 \right) C^\mu - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau C^\beta \\ & - 2\partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B^\rho \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau B^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \left(-\partial_\tau B^\alpha \partial_\tau B^\beta + \partial_\sigma B^\alpha \partial_\sigma B^\beta \right) \\ & - \left[\partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu C^\rho + \frac{1}{2} \partial_{\rho\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B^\rho B^\gamma \right] \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau A^\beta = 0. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Las ecuaciones de constricción podemos encontrarlas en esta norma a partir de las ecuaciones (3.107, 3.108), tomando en cuenta que debido a que la solución para el orden cero es una solución para el centro de masa, no la podemos considerar una constricción y carece de significado como tal, esto debido a que ni siquiera tenemos una variedad de dimensión dos que describa el movimiento del centro de

masa, lo que resulta en una ausencia del concepto de tensor de energía momento. La solución a orden cero $A^\mu = A^\mu(\tau)$ además de (3.113) cumple con la ecuación,

$$-m^2 = \partial_\tau A^\mu \partial_\tau A^\nu G_{\mu\nu}, \quad (3.116)$$

mientras que para el primer y segundo orden se deben de satisfacer las siguientes constricciones,

$$\begin{aligned} T_{\tau\tau}^{(1)} = T_{\sigma\sigma}^{(1)} &= \partial_\tau A^\mu \partial_\tau B^\nu G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\tau A^\mu \partial_\tau A^\nu \partial_\rho G_{\mu\nu} B^\rho = 0, \\ T_{\tau\sigma}^{(1)} &= \partial_\tau A^\mu \partial_\sigma B^\nu G_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (3.117)$$

y en lo que concierne al segundo orden,

$$\begin{aligned} T_{\tau\tau}^{(2)} = T_{\sigma\sigma}^{(2)} &= \partial_\tau A^\mu \partial_\tau C^\nu G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} [\partial_\tau B^\mu \partial_\tau B^\nu + \partial_\sigma B^\mu \partial_\sigma B^\nu] G_{\mu\nu} \\ &+ \partial_\tau A^\mu \partial_\tau B^\nu \partial_\rho G_{\mu\nu} B^\rho + \frac{1}{2} \partial_\tau A^\mu \partial_\tau A^\nu \left[\partial_\rho G_{\mu\nu} C^\rho + \frac{1}{2} \partial_{\rho\alpha} G_{\mu\nu} B^\rho B^\alpha \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$T_{\tau\sigma}^{(2)} = [\partial_\tau A^\mu \partial_\sigma C^\nu + \partial_\tau B^\mu \partial_\sigma B^\nu] G_{\mu\nu} + \partial_\tau A^\mu \partial_\sigma B^\nu \partial_\rho G_{\mu\nu} B^\rho = 0. \quad (3.119)$$

Las componentes de la métrica inducida a los distintos órdenes antes de aplicar las constricciones pueden obtenerse a partir de (3.109, 3.110, 3.111) y considerando que $\partial_\sigma A^\mu = 0$ tenemos a cada orden,

$$\begin{aligned} g_{\tau\tau}^{(0)} &= \partial_\tau A^\mu \partial_\tau A^\nu G_{\mu\nu}, \\ g_{\sigma\sigma}^{(0)} &= 0, \\ g_{\tau\sigma}^{(0)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.120)$$

para el primer orden se encuentra,

$$\begin{aligned}
 g_{\tau\tau}^{(1)} &= [2\partial_\tau A^\mu \partial_\tau B^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\tau A^\mu \partial_\tau A^\nu \partial_\rho G_{\mu\nu} B^\rho], \\
 g_{\sigma\sigma}^{(1)} &= 0, \\
 g_{\tau\sigma}^{(1)} &= \partial_\tau A^\mu \partial_\sigma B^\nu G_{\mu\nu},
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

mientras que para el segundo orden,

$$\begin{aligned}
 g_{\tau\tau}^{(2)} &= [2\partial_\tau A^\mu \partial_\tau C^\nu + \partial_\tau B^\mu \partial_\tau B^\nu] G_{\mu\nu} + 2\partial_\tau A^\mu \partial_\tau B^\nu \partial_\rho G_{\mu\nu} B^\rho \\
 &\quad + \partial_\tau A^\mu \partial_\tau A^\nu \left[\partial_\rho G_{\mu\nu} C^\rho + \frac{1}{2} \partial_{\rho\alpha} G_{\mu\nu} B^\rho B^\alpha \right], \\
 g_{\sigma\sigma}^{(2)} &= \partial_\tau B^\mu \partial_\tau B^\nu G_{\mu\nu}, \\
 g_{\tau\sigma}^{(2)} &= [\partial_\tau A^\mu \partial_\sigma C^\nu + \partial_\tau B^\mu \partial_\sigma B^\nu] G_{\mu\nu} + \partial_\tau A^\mu \partial_\sigma B^\nu \partial_\rho G_{\mu\nu} B^\rho.
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

Como podemos observar a primer orden no tenemos una métrica inducida definida ya que después de aplicar las constricciones que corresponden (3.117), las componentes de la métrica (3.121) se hacen cero,

$$g_{ab}^{(1)} = 0. \tag{3.123}$$

De manera que es necesario ir hasta el siguiente orden para obtener una expresión válida para la métrica inducida. A partir de la constricción (3.119) encontramos que,

$$g_{\tau\sigma}^{(2)} = 0 \tag{3.124}$$

y por otra parte de la ecuación (3.118) obtenemos que,

$$-g_{\tau\tau}^{(2)} = g_{\sigma\sigma}^{(2)} = \partial_\sigma B^\mu \partial_\sigma B^\nu G_{\mu\nu}. \quad (3.125)$$

Este es el factor conforme para la métrica inducida, la cual al imponer las constricciones se torna conformalmente plana $g = g_{\sigma\sigma}\eta$. Como mencionamos antes, no es necesario conocer la solución a segundo orden $C^\mu = C^\mu(\tau, \sigma)$ ya que la implementación de las constricciones elimina todos los términos donde se encontraba involucrada dicha solución.

Es importante notar que esta relación es válida para cualquier espacio-tiempo de fondo G usando la solución exacta del centro de masa y trabajando en esta norma.

La norma nula

Siendo la teoría invariante bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo, incluso en el régimen perturbativo, podemos expresar todo el contenido en una norma tipo nula, es decir, denotando las coordenadas como $\{\xi, \eta\}$ tenemos,

$$\gamma = \Omega(\xi, \eta)\chi, \quad (3.126)$$

donde,

$$\chi_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.127)$$

Tomando como punto de partida la expansión perturbativa en las coordenadas $\{\xi, \eta\}$,

$$X^\mu(\xi, \eta) \approx A^\mu(\xi, \eta) + \epsilon B^\mu(\xi, \eta) + \epsilon^2 C^\mu(\xi, \eta), \quad (3.128)$$

y utilizando las expresiones (3.94, 3.95 y 3.96) podemos encontrar las ecuaciones de movimiento correspondientes a esta norma; para el orden cero,

$$\epsilon^0 : \quad \partial_{\bar{\zeta}\eta} A^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_{\bar{\zeta}} A^\alpha \partial_\eta A^\beta = 0, \quad (3.129)$$

el primer orden,

$$\epsilon^1 : \quad \partial_{\bar{\zeta}\eta} B^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \left(\partial_{\bar{\zeta}} A^\alpha \partial_\eta B^\beta + \partial_{\bar{\zeta}} B^\alpha \partial_\eta A^\beta \right) + \partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B^\rho \partial_{\bar{\zeta}} A^\alpha \partial_\eta A^\beta = 0, \quad (3.130)$$

y al segundo orden corresponde,

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : \quad & \partial_{\bar{\zeta}\eta} C^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \left(\partial_{\bar{\zeta}} A^\alpha \partial_\eta C^\beta + \partial_\eta A^\alpha \partial_{\bar{\zeta}} C^\beta \right) \\ & + \partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B^\rho \left(\partial_{\bar{\zeta}} A^\alpha \partial_\eta B^\beta + \partial_\eta A^\alpha \partial_{\bar{\zeta}} B^\beta \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_{\bar{\zeta}} B^\alpha \partial_\eta B^\beta \\ & + \left[\partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu C^\rho + \partial_{\rho\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B^\rho B^\gamma \right] \partial_{\bar{\zeta}} A^\alpha \partial_\eta A^\beta = 0. \quad (3.131) \end{aligned}$$

De forma similar al caso de la norma conforme, las ecuaciones de constricción no juegan ningún papel para el orden cero de la perturbación ya que este representa la solución de un objeto puntual moviéndose sobre un espacio-tiempo de fondo. Debido a esto concentramos nuestra atención a las constricciones para el primer y segundo orden. De las expresiones generales (3.107, 3.108) y recordando que la ecuación de constricción $T_{\bar{\zeta}\eta} = 0$ se satisface idénticamente (3.36) tenemos que,

$$T_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}^{(1)} = 2\partial_{\bar{\zeta}} A^\mu \partial_{\bar{\zeta}} B^\nu G_{\mu\nu} + \partial_{\bar{\zeta}} A^\mu \partial_{\bar{\zeta}} A^\nu \partial_\rho G_{\mu\nu} B^\rho = 0, \quad (3.132)$$

$$T_{\eta\eta}^{(1)} = 2\partial_\eta A^\mu \partial_\eta B^\nu G_{\mu\nu} + \partial_\eta A^\mu \partial_\eta A^\nu \partial_\rho G_{\mu\nu} B^\rho = 0, \quad (3.133)$$

y para el segundo orden,

$$\begin{aligned}
 T_{\xi\xi}^{(2)} &= 2\partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\xi}C^{\nu}G_{\mu\nu} + \partial_{\xi}B^{\mu}\partial_{\xi}B^{\nu}G_{\mu\nu} \\
 &\quad + 2\partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\xi}B^{\nu}\partial_{\rho}G_{\mu\nu}B^{\rho} \\
 &\quad + \partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\xi}A^{\nu}\left[\partial_{\rho}G_{\mu\nu}C^{\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\rho\alpha}G_{\mu\nu}B^{\rho}B^{\alpha}\right], \quad (3.134)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\eta\eta}^{(2)} &= 2\partial_{\eta}A^{\mu}\partial_{\eta}C^{\nu}G_{\mu\nu} + \partial_{\eta}B^{\mu}\partial_{\eta}B^{\nu}G_{\mu\nu} \\
 &\quad + 2\partial_{\eta}A^{\mu}\partial_{\eta}B^{\nu}\partial_{\rho}G_{\mu\nu}B^{\rho} \\
 &\quad + \partial_{\eta}A^{\mu}\partial_{\eta}A^{\nu}\left[\partial_{\rho}G_{\mu\nu}C^{\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\rho\alpha}G_{\mu\nu}B^{\rho}B^{\alpha}\right]. \quad (3.135)
 \end{aligned}$$

Las componentes de la métrica inducida las podemos encontrar a cada orden a partir de las expresiones (3.109, 3.110 y 3.111),

$$\begin{aligned}
 g_{\xi\xi}^{(0)} &= \partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\xi}A^{\nu}G_{\mu\nu}, \\
 g_{\eta\eta}^{(0)} &= \partial_{\eta}A^{\mu}\partial_{\eta}A^{\nu}G_{\mu\nu}, \\
 g_{\xi\eta}^{(0)} &= \partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\eta}A^{\nu}G_{\mu\nu}. \quad (3.136)
 \end{aligned}$$

Al ser la solución de orden cero la que describe el movimiento del centro de masa $A^{\mu} = A^{\mu}(\tau)$. En una norma tipo nula las coordenadas están relacionadas con las coordenadas de la norma conforme mediante (3.24), de manera que para la solución a orden cero tenemos que,

$$A^{\mu} = A^{\mu}\left(\frac{1}{2}[F(\xi) + G(\eta)]\right),$$

de manera que existe la relación entre las derivadas respecto a los parámetros de la norma nula,

$$\partial_{\xi} A^{\mu} = \frac{d_{\xi} F}{d_{\eta} G} \partial_{\eta} A^{\nu}, \quad (3.137)$$

donde $d_{x^a} F = \frac{dF}{dx^a}$. Usando esta condición es fácil ver que el determinante de la métrica al orden cero se anula, por lo que tenemos una métrica degenerada.

En lo que respecta al primer orden tenemos,

$$g_{\xi\xi}^{(1)} = 2\partial_{\xi} A^{\mu} \partial_{\xi} B^{\nu} G_{\mu\nu} + \partial_{\xi} A^{\mu} \partial_{\xi} A^{\nu} \partial_{\rho} G_{\mu\nu} B^{\rho}, \quad (3.138)$$

$$g_{\eta\eta}^{(1)} = 2\partial_{\eta} A^{\mu} \partial_{\eta} B^{\nu} G_{\mu\nu} + \partial_{\eta} A^{\mu} \partial_{\eta} A^{\nu} \partial_{\rho} G_{\mu\nu} B^{\rho}, \quad (3.139)$$

$$g_{\xi\eta}^{(1)} = (\partial_{\xi} A^{\mu} \partial_{\eta} B^{\nu} + \partial_{\xi} B^{\mu} \partial_{\eta} A^{\nu}) G_{\mu\nu} + \partial_{\xi} A^{\mu} \partial_{\eta} A^{\nu} \partial_{\rho} G_{\mu\nu} B^{\rho}. \quad (3.140)$$

Observamos que las dos primeras componentes son cero, $g_{\xi\xi}^{(1)} = 0$ y $g_{\eta\eta}^{(1)} = 0$ una vez que aplicamos las constricciones (3.132 y 3.133). Utilizando la relación (3.137) en las constricciones (3.132 y 3.133) obtenemos que,

$$2 [(\partial_{\xi} A^{\mu} \partial_{\eta} B^{\nu} + \partial_{\xi} B^{\mu} \partial_{\eta} A^{\nu}) G_{\mu\nu} + \partial_{\xi} A^{\mu} \partial_{\eta} A^{\nu} \partial_{\rho} G_{\mu\nu} B^{\rho}] = 0, \quad (3.141)$$

lo que nos indica que también la componente fuera de la diagonal de la métrica inducida se hace cero,

$$g_{\xi\eta}^{(1)} = 0. \quad (3.142)$$

Esto nos obliga a considerar los términos de segundo orden en la expansión per-

turbativa para las componentes de la métrica,

$$\begin{aligned}
 g_{\xi\xi}^{(2)} = & 2\partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\xi}C^{\nu}G_{\mu\nu} + \partial_{\xi}B^{\mu}\partial_{\xi}B^{\nu}G_{\mu\nu} \\
 & + 2\partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\xi}B^{\nu}\partial_{\rho}G_{\mu\nu}B^{\rho} \\
 & + \partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\xi}A^{\nu}\left[\partial_{\rho}G_{\mu\nu}C^{\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\rho\alpha}G_{\mu\nu}B^{\rho}B^{\alpha}\right], \quad (3.143)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{\eta\eta}^{(2)} = & 2\partial_{\eta}A^{\mu}\partial_{\eta}C^{\nu}G_{\mu\nu} + \partial_{\eta}B^{\mu}\partial_{\eta}B^{\nu}G_{\mu\nu} \\
 & + 2\partial_{\eta}A^{\mu}\partial_{\eta}B^{\nu}\partial_{\rho}G_{\mu\nu}B^{\rho} \\
 & + \partial_{\eta}A^{\mu}\partial_{\eta}A^{\nu}\left[\partial_{\rho}G_{\mu\nu}C^{\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\rho\alpha}G_{\mu\nu}B^{\rho}B^{\alpha}\right], \quad (3.144)
 \end{aligned}$$

y finalmente,

$$\begin{aligned}
 g_{\xi\eta}^{(2)} = & (\partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\eta}C^{\nu} + \partial_{\xi}C^{\mu}\partial_{\eta}A^{\nu})G_{\mu\nu} + \partial_{\xi}B^{\mu}\partial_{\eta}B^{\nu}G_{\mu\nu} \\
 & + (\partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\eta}B^{\nu} + \partial_{\xi}B^{\mu}\partial_{\eta}A^{\nu})\partial_{\rho}G_{\mu\nu}B^{\rho} \\
 & + \partial_{\xi}A^{\mu}\partial_{\eta}A^{\nu}\left[\partial_{\rho}G_{\mu\nu}C^{\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\rho\alpha}G_{\mu\nu}B^{\rho}B^{\alpha}\right]. \quad (3.145)
 \end{aligned}$$

Examinando las ecuaciones de constricción (3.134 y 3.135) vemos que las componentes de la diagonal se anulan $g_{\xi\xi}^{(2)} = g_{\eta\eta}^{(2)} = 0$, mientras que de forma similar al primer orden, considerando la relación (3.137) en las ecuaciones de constricción

(3.134 y 3.135) obtenemos,

$$\begin{aligned}
 & (\partial_{\xi} A^{\mu} \partial_{\eta} C^{\nu} + \partial_{\xi} C^{\mu} \partial_{\eta} A^{\nu}) G_{\mu\nu} + (\partial_{\xi} A^{\mu} \partial_{\eta} B^{\nu} + \partial_{\xi} B^{\mu} \partial_{\eta} A^{\nu}) \partial_{\rho} G_{\mu\nu} B^{\rho} \\
 & \quad + \partial_{\xi} A^{\mu} \partial_{\eta} A^{\nu} \left[\partial_{\rho} G_{\mu\nu} C^{\rho} + \frac{1}{2} \partial_{\rho\alpha} G_{\mu\nu} B^{\rho} B^{\alpha} \right] \\
 & = -\frac{1}{2} \left(\frac{d_{\eta} G}{d_{\xi} F} \partial_{\xi} B^{\mu} \partial_{\xi} B^{\nu} + \frac{d_{\xi} F}{d_{\eta} G} \partial_{\eta} B^{\mu} \partial_{\eta} B^{\nu} \right) G_{\mu\nu}. \quad (3.146)
 \end{aligned}$$

Aplicando este resultado sobre la componente $g_{\xi\eta}^{(2)}$ (3.145) obtenemos,

$$g_{\xi\eta}^{(2)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d_{\eta} G}{d_{\xi} F} \partial_{\xi} B^{\mu} \partial_{\xi} B^{\nu} + \frac{d_{\xi} F}{d_{\eta} G} \partial_{\eta} B^{\mu} \partial_{\eta} B^{\nu} \right) G_{\mu\nu} + \partial_{\xi} B^{\mu} \partial_{\eta} B^{\nu} G_{\mu\nu}, \quad (3.147)$$

que es la componente fuera de la diagonal de la métrica inducida después de aplicar las constricciones. Este resultado coincide con el de la norma conforme (3.125) considerando la transformación entre componentes de las métricas,

$$g_{\xi\eta} = \frac{\partial x^a}{\partial \xi} \frac{\partial x^b}{\partial \eta} g_{ab}, \quad a, b = \tau, \sigma \quad (3.148)$$

debido al cambio de coordenadas general (3.24), y considerando el resultado de las constricciones $g_{\tau\tau} = -g_{\sigma\sigma}$. De manera que podemos calcular en la norma conforme la componente $g_{\sigma\sigma}$ y luego aplicar la transformación de coordenadas para tener,

$$g_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} d_{\xi} F d_{\eta} G g_{\sigma\sigma}(\tau(\xi, \eta), \sigma(\xi, \eta)). \quad (3.149)$$

Como hemos visto, se puede trabajar tanto en la norma conforme como en la nula y pasar de una descripción a otra con los debidos cambios de coordenadas según sea conveniente, esto como consecuencia de la invariancia ante reparametrizaciones que la teoría en su régimen perturbativo posee. A continuación trabajare-

mos sobre el espectro topológico en el caso de soluciones perturbativas utilizando la norma tipo nula.

3.5.2. El espectro topológico para soluciones perturbativas

Con la forma general de la métrica inducida para el caso de soluciones perturbativas ya calculada, podemos abordar el análisis sobre el procedimiento para obtener el espectro topológico en esta situación. Como hemos visto en la sección anterior para el caso de un espacio de fondo de Minkowski, es posible trabajar en una norma tipo nula para realizar el cálculo del espectro topológico. Trabajaremos en la norma nula a lo largo de esta sección y al final expondremos el mismo resultado para la norma conforme; además supondremos que la solución a orden cero es en general una función que depende tanto de τ como de σ y que la métrica inducida a cada orden existe y es no degenerada. Considerando hasta el segundo orden en la expansión perturbativa, el elemento de línea para la métrica inducida puede ser escrito como,

$$ds^2 \approx 2 \left[g_{\xi\eta}^{(0)} + \epsilon g_{\xi\eta}^{(1)} + \epsilon^2 g_{\xi\eta}^{(2)} \right] d\xi d\eta. \quad (3.150)$$

De manera similar al caso de soluciones exactas, buscamos una base ortogonal dual $\{\theta^a\}$, $a = 1, 2$, tal que el elemento de línea se pueda expresar como $ds^2 = -\theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2$. Pero esta vez una expansión perturbativa para la base dual debe ser tomada en cuenta,

$$\begin{aligned} \theta^1 &\approx \theta_{(0)}^1 + \epsilon \theta_{(1)}^1 + \epsilon^2 \theta_{(2)}^1, \\ \theta^2 &\approx \theta_{(0)}^2 + \epsilon \theta_{(1)}^2 + \epsilon^2 \theta_{(2)}^2, \end{aligned} \quad (3.151)$$

y el elemento de línea hasta el segundo orden toma la forma siguiente,

$$ds^2 \approx -\theta_{(0)}^1 \otimes \theta_{(0)}^1 + \theta_{(0)}^2 \otimes \theta_{(0)}^2 + \epsilon \left[2 \left(-\theta_{(0)}^1 \otimes \theta_{(1)}^1 + \theta_{(0)}^2 \otimes \theta_{(1)}^2 \right) \right] \\ + \epsilon^2 \left[2 \left(-\theta_{(0)}^1 \otimes \theta_{(2)}^1 + 2\theta_{(0)}^2 \otimes \theta_{(2)}^2 \right) - \theta_{(1)}^1 \otimes \theta_{(1)}^1 + \theta_{(1)}^2 \otimes \theta_{(1)}^2 \right]. \quad (3.152)$$

Las primeras ecuaciones de estructura de Cartan para la uno-forma de conexión son, para el orden cero,

$$\epsilon^0 : \quad d\theta_{(0)}^a + \omega_b^a{}^{(0)} \wedge \theta_{(0)}^b = 0, \quad (3.153)$$

primer orden,

$$\epsilon^1 : \quad d\theta_{(1)}^a + \omega_b^a{}^{(0)} \wedge \theta_{(1)}^b + \omega_b^a{}^{(1)} \wedge \theta_{(0)}^b = 0, \quad (3.154)$$

y para el segundo orden,

$$\epsilon^2 : \quad d\theta_{(2)}^a + \omega_b^a{}^{(0)} \wedge \theta_{(2)}^b + \omega_b^a{}^{(2)} \wedge \theta_{(0)}^b + \omega_b^a{}^{(1)} \wedge \theta_{(1)}^b = 0. \quad (3.155)$$

Las segundas ecuaciones de Cartan para la dos-forma de curvatura en todos los órdenes son,

$$\epsilon^0 : \quad R_b^a{}^{(0)} = d\omega_b^a{}^{(0)} + \omega_c^a{}^{(0)} \wedge \omega_b^c{}^{(0)}, \quad (3.156)$$

$$\epsilon^1 : \quad R_b^a{}^{(1)} = d\omega_b^a{}^{(1)} + \omega_c^a{}^{(0)} \wedge \omega_b^c{}^{(1)} + \omega_c^a{}^{(1)} \wedge \omega_b^c{}^{(0)}. \quad (3.157)$$

$$\epsilon^2 : \quad R_b^a{}^{(2)} = d\omega_b^a{}^{(2)} + \omega_c^a{}^{(0)} \wedge \omega_b^c{}^{(2)} + \omega_c^a{}^{(2)} \wedge \omega_b^c{}^{(0)} + \omega_c^a{}^{(1)} \wedge \omega_b^c{}^{(1)}. \quad (3.158)$$

A partir de estas expresiones para la base dual, la uno-forma de conexión, la dos-forma de curvatura y la métrica inducida, podemos deducir la expresión general para la clase característica de Euler a cada orden. El análisis a orden cero es exactamente el mismo que para el caso de soluciones exactas, solamente basta reemplazar las cantidades de orden cero en lugar de $g_{\bar{\zeta}\eta}$ en (3.27-3.29). De manera que escogiendo la base dual como,

$$\begin{aligned}\theta_{(0)}^1 &= \frac{1}{2}g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}d\bar{\zeta} - d\eta, \\ \theta_{(0)}^2 &= \frac{1}{2}g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}d\bar{\zeta} + d\eta,\end{aligned}\tag{3.159}$$

la única componente independiente de la uno-forma de conexión es,

$$\omega_2^{1(0)} = -\frac{1}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}}\frac{\partial g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}}{\partial \eta}d\eta.\tag{3.160}$$

Y de esta conexión se sigue la única componente independiente para la dos-forma de curvatura,

$$R_2^{1(0)} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\left[\frac{1}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}}\frac{\partial g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}}{\partial \eta}\right]d\bar{\zeta} \wedge d\eta.\tag{3.161}$$

Así de la dos-forma de curvatura (3.161) la clase característica de Euler (3.16) está dada por,

$$e^{(0)}(P) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\left[\frac{1}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}}\frac{\partial g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}}{\partial \eta}\right]d\bar{\zeta} \wedge d\eta,\tag{3.162}$$

la cual integrada sobre la variedad base nos da como resultado el espectro topológico a orden cero en la expansión perturbativa; claramente, lo único que se requiere es la componente de la métrica inducida a orden cero $g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}$.

La parte del elemento de línea (3.150) que se refiere al primer orden debe ser expre-

sada en términos de la base dual para los órdenes cero y primero, como se puede observar de (3.152). Proponiendo para la base dual a primer orden,

$$\begin{aligned}\theta_{(1)}^1 &= A'(\xi, \eta)d\xi + B'(\xi, \eta)d\eta, \\ \theta_{(1)}^2 &= C'(\xi, \eta)d\xi + D'(\xi, \eta)d\eta,\end{aligned}\tag{3.163}$$

y usando (3.159) llegamos a las condiciones $A' = C'$ y $B' = -D'$. De manera que para expresar la parte de primer orden del elemento de línea en términos de la base dual se requiere que A' y B' cumplan,

$$g_{\xi\eta}^{(1)} = -g_{\xi\eta}^{(0)}B' + 2A'.\tag{3.164}$$

Existen muchas posibilidades para escoger las funciones A' y B' , pero todas ellas llevan al mismo resultado final para la dos-forma de curvatura, a pesar de provenir de distintas uno-formas de conexión. Esta independencia de la conexión al obtener la dos-forma de curvatura es un caso especial para variedades de dimensión dos. Esto se debe a que la cantidad que realmente es independiente de la conexión para cualquier número de dimensiones par es la clase característica de Euler, la cual es un polinomio invariante bajo la acción del grupo ortogonal especial y que puede ser expresada como un polinomio en la curvatura [48]; así en el caso de una variedad de dimensión dos la forma de Euler es proporcional a la única componente independiente de la curvatura (3.16). Para ser concretos seleccionamos $B' = 1$ y $A' = \frac{1}{2}(g_{\xi\eta}^{(0)} + g_{\xi\eta}^{(1)})$, obteniendo para la base dual de primer orden,

$$\begin{aligned}\theta_{(1)}^1 &= \frac{1}{2} \left(g_{\xi\eta}^{(0)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) d\xi + d\eta, \\ \theta_{(1)}^2 &= \frac{1}{2} \left(g_{\xi\eta}^{(0)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) d\xi - d\eta.\end{aligned}\tag{3.165}$$

A partir de la primera ecuación de Cartan a primer orden (3.154) y escribiendo la componente independiente de la conexión como $\omega_2^{1(1)} = a'(\xi, \eta)d\xi + b'(\xi, \eta)d\eta$ llegamos a las ecuaciones que determinan el valor de las funciones a' y b' ,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(g_{\xi\eta}^{(0)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(0)}}{\partial \eta} \left(g_{\xi\eta}^{(0)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) + a' - \frac{1}{2} g_{\xi\eta}^{(0)} b' &= 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(g_{\xi\eta}^{(0)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(0)}}{\partial \eta} \left(g_{\xi\eta}^{(0)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) - a' - \frac{1}{2} g_{\xi\eta}^{(0)} b' &= 0, \end{aligned} \quad (3.166)$$

donde (3.159, 3.160) fueron consideradas. La solución para el conjunto de ecuaciones arriba expuesto es,

$$\begin{aligned} a' &= 0, \\ b' &= \frac{g_{\xi\eta}^{(1)}}{g_{\xi\eta}^{(0)2}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(1)}}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (3.167)$$

obteniendo finalmente para la parte de primer orden la única componente independiente de la uno-forma de conexión,

$$\omega_2^{1(1)} = \left[\frac{g_{\xi\eta}^{(1)}}{g_{\xi\eta}^{(0)2}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(1)}}{\partial \eta} \right] d\eta. \quad (3.168)$$

A partir de $R_2^{1(1)} = d\omega_2^{1(1)}$ la componente independiente a primer orden de la dos-forma de curvatura toma la forma,

$$R_2^{1(1)} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left[\frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} g_{\xi\eta}^{(1)} \right] d\xi \wedge d\eta, \quad (3.169)$$

y a partir de esto determinamos la clase característica de Euler (3.16),

$$e^{(1)}(P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left[\frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} g_{\xi\eta}^{(1)} \right] d\xi \wedge d\eta. \quad (3.170)$$

Para el segundo orden podemos hacer un análisis similar a partir de que el elemento de línea correspondiente al segundo orden en la métrica inducida en la norma nula (3.150) $ds_{(2)}^2 = 2g_{\xi\eta}^{(2)} d\xi d\eta$, debe poder expresarse en términos de la base ortonormal involucrando hasta el segundo orden (3.152),

$$ds_{(2)}^2 = 2 \left(-\theta_{(0)}^1 \otimes \theta_{(2)}^1 + 2\theta_{(0)}^2 \otimes \theta_{(2)}^2 \right) - \theta_{(1)}^1 \otimes \theta_{(1)}^1 + \theta_{(1)}^2 \otimes \theta_{(1)}^2. \quad (3.171)$$

Utilizando los resultados previos para los órdenes cero y primero (3.159, 3.165) y proponiendo la base dual a segundo orden como,

$$\begin{aligned} \theta_{(2)}^1 &= A(\xi, \eta) d\xi + B(\xi, \eta) d\eta, \\ \theta_{(2)}^2 &= C(\xi, \eta) d\xi + D(\xi, \eta) d\eta, \end{aligned}$$

encontramos las condiciones $C = A$ y $D = -B$; a su vez las funciones A y B deben cumplir,

$$g_{\xi\eta}^{(2)} = 2A - (B + 1)g_{\xi\eta}^{(0)} - g_{\xi\eta}^{(1)}. \quad (3.172)$$

Escogiendo $B = -1$ la otra función se reduce a $A = \frac{1}{2} \left(g_{\xi\eta}^{(2)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right)$. Cabe mencionar una vez más que en este caso en particular de dos dimensiones la dos-forma de curvatura es independiente de esta elección. Finalmente obtenemos para

la base dual a segundo orden,

$$\begin{aligned}\theta_{(2)}^1 &= \frac{1}{2} \left(g_{\xi\eta}^{(2)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) d\xi - d\eta, \\ \theta_{(2)}^2 &= \frac{1}{2} \left(g_{\xi\eta}^{(2)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) d\xi + d\eta.\end{aligned}\quad (3.173)$$

A través de la primera ecuación de Cartan correspondiente (3.155), utilizando (3.160, 3.168) y proponiendo la conexión a segundo orden como $\omega_{\frac{1}{2}}^{1(2)} = a(\xi, \eta)d\xi + b(\xi, \eta)d\eta$ podemos encontrar las ecuaciones que determinan la uno-forma de conexión,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(g_{\xi\eta}^{(2)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \left(g_{\xi\eta}^{(2)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(0)}}{\partial \eta} \\ + a - \frac{1}{2} b g_{\xi\eta}^{(0)} + \frac{1}{2} \left(g_{\xi\eta}^{(1)} + g_{\xi\eta}^{(0)} \right) \left[\frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(1)}}{\partial \eta} - \frac{g_{\xi\eta}^{(1)}}{g_{\xi\eta}^{(0)2}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(0)}}{\partial \eta} \right] = 0,\end{aligned}\quad (3.174)$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(g_{\xi\eta}^{(2)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \left(g_{\xi\eta}^{(2)} + g_{\xi\eta}^{(1)} \right) \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(0)}}{\partial \eta} \\ - a - \frac{1}{2} b g_{\xi\eta}^{(0)} + \frac{1}{2} \left(g_{\xi\eta}^{(1)} + g_{\xi\eta}^{(0)} \right) \left[\frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(1)}}{\partial \eta} - \frac{g_{\xi\eta}^{(1)}}{g_{\xi\eta}^{(0)2}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(0)}}{\partial \eta} \right] = 0.\end{aligned}\quad (3.175)$$

Solucionando este par de ecuaciones obtenemos,

$$\begin{aligned}a &= 0, \\ b &= -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{g_{\xi\eta}^{(2)}}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)2}} \frac{\partial g_{\xi\eta}^{(1)2}}{\partial \eta} + \frac{1}{2} g_{\xi\eta}^{(1)2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{g_{\xi\eta}^{(0)2}} \right),\end{aligned}\quad (3.176)$$

de manera que la única componente independiente de la uno-forma de conexión para el segundo orden es,

$$\omega_2^{1(2)} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{g_{\xi\eta}^{(1)}}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \right)^2 - \frac{g_{\xi\eta}^{(2)}}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \right] d\eta. \quad (3.177)$$

De la segunda ecuación de estructura de Cartan para el orden correspondiente encontramos la única componente independiente de la dos-forma de curvatura para el segundo orden en la expansión perturbativa,

$$R_2^{1(2)} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left[\frac{g_{\xi\eta}^{(2)}}{g_{\xi\eta}^{(0)}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{\xi\eta}^{(1)}}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \right)^2 \right] d\xi \wedge d\eta. \quad (3.178)$$

Habiendo calculado la componente de la dos-forma de curvatura es inmediato encontrar la forma de Euler correspondiente al segundo orden,

$$e^{(2)}(P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left[\frac{g_{\xi\eta}^{(2)}}{g_{\xi\eta}^{(0)}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{\xi\eta}^{(1)}}{g_{\xi\eta}^{(0)}} \right)^2 \right] d\xi \wedge d\eta. \quad (3.179)$$

Vale la pena mencionar que se puede lograr el mismo resultado empezando por la expresión para la dos-forma de curvatura para el caso de soluciones exactas (3.28) y considerando la expansión perturbativa de la métrica inducida g_{ab} hasta el segundo orden,

$$g_{ab} \approx g_{ab}^{(0)} + \epsilon g_{ab}^{(1)} + \epsilon^2 g_{ab}^{(2)}, \quad (3.180)$$

mientras que la versión contravariante es,

$$g^{ab} \approx g_{(0)}^{ab} - \epsilon g_{(1)}^{ab} - \epsilon^2 g_{(2)}^{ab} + \epsilon^2 g_c^a (1) g_{(1)}^{cb}. \quad (3.181)$$

Introduciendo esta expansión (3.180) en la expresión para la dos-forma de curvatura (3.28) tenemos,

$$R^1_2 \approx -\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{1}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)} + \epsilon g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)} + \epsilon^2 g_{\bar{\zeta}\eta}^{(2)}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)} + \epsilon g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)} + \epsilon^2 g_{\bar{\zeta}\eta}^{(2)} \right) \right] d\bar{\zeta} \wedge d\eta, \quad (3.182)$$

y considerando la expansión de Taylor del primer término en los paréntesis cuadrados hasta el segundo orden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)} + \epsilon g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)} + \epsilon^2 g_{\bar{\zeta}\eta}^{(2)}} &= \frac{1}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)} \left[1 + \left(\epsilon \frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} + \epsilon^2 \frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(2)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} \right) \right]} \\ &\approx \frac{1}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} \left[1 - \left(\epsilon \frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} + \epsilon^2 \frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(2)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} \right) + \left(\epsilon \frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} + \epsilon^2 \frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(2)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} \right)^2 \right] \\ &\approx \frac{1}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} - \epsilon \frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)2}} - \epsilon^2 \frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(2)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)2}} + \epsilon^2 \frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)2}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)3}}, \end{aligned} \quad (3.183)$$

encontramos la dos-forma de curvatura hasta el segundo orden en la expansión perturbativa de la métrica inducida,

$$\begin{aligned} R^1_2 \approx -\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{1}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} \frac{\partial g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}}{\partial \eta} \right] d\bar{\zeta} \wedge d\eta - \epsilon \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta} \partial \eta} \left[\frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} \right] d\bar{\zeta} \wedge d\eta \\ - \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta} \partial \eta} \left[\frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(2)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(1)}}{g_{\bar{\zeta}\eta}^{(0)}} \right)^2 \right] d\bar{\zeta} \wedge d\eta. \end{aligned} \quad (3.184)$$

Esta expresión coincide con las expresiones para la dos-forma de curvatura para cada orden en la perturbación (3.161, 3.169, 3.178), siendo así que perturbar la base ortonormal desde un principio y calcular la dos-forma de curvatura es equi-

valente a introducir la perturbación de la métrica inducida en la expresión final para la curvatura. El mismo tratamiento se puede utilizar en la norma conforme de manera que obtenemos para la clase característica de Euler hasta el segundo orden,

$$e^{(0)}(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \left[\partial_\tau \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}^{(0)}} \partial_\tau g_{\sigma\sigma}^{(0)} \right) - \partial_\sigma \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}^{(0)}} \partial_\sigma g_{\sigma\sigma}^{(0)} \right) \right] d\tau \wedge d\sigma, \quad (3.185)$$

$$e^{(1)}(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \epsilon \left[\partial_\tau \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}^{(0)}} \partial_\tau g_{\sigma\sigma}^{(1)} - \frac{g_{\sigma\sigma}^{(1)}}{g_{\sigma\sigma}^{(0)2}} \partial_\tau g_{\sigma\sigma}^{(0)} \right) - \partial_\sigma \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}^{(0)}} \partial_\sigma g_{\sigma\sigma}^{(1)} - \frac{g_{\sigma\sigma}^{(1)}}{g_{\sigma\sigma}^{(0)2}} \partial_\sigma g_{\sigma\sigma}^{(0)} \right) \right] d\tau \wedge d\sigma, \quad (3.186)$$

$$e^{(2)}(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \epsilon^2 \left\{ \partial_\tau \left[\frac{1}{g_{\sigma\sigma}^{(0)}} \partial_\tau g_{\sigma\sigma}^{(2)} - \frac{g_{\sigma\sigma}^{(1)}}{g_{\sigma\sigma}^{(0)2}} \partial_\tau g_{\sigma\sigma}^{(1)} - \left(\frac{g_{\sigma\sigma}^{(2)}}{g_{\sigma\sigma}^{(0)2}} - \frac{g_{\sigma\sigma}^{(1)2}}{g_{\sigma\sigma}^{(0)3}} \right) \partial_\tau g_{\sigma\sigma}^{(0)} \right] - \partial_\sigma \left[\frac{1}{g_{\sigma\sigma}^{(0)}} \partial_\sigma g_{\sigma\sigma}^{(2)} - \frac{g_{\sigma\sigma}^{(1)}}{g_{\sigma\sigma}^{(0)2}} \partial_\sigma g_{\sigma\sigma}^{(1)} - \left(\frac{g_{\sigma\sigma}^{(2)}}{g_{\sigma\sigma}^{(0)2}} - \frac{g_{\sigma\sigma}^{(1)2}}{g_{\sigma\sigma}^{(0)3}} \right) \partial_\sigma g_{\sigma\sigma}^{(0)} \right] \right\} d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.187)$$

Con la forma de Euler para cada orden en la expansión perturbativa (3.162, 3.170 y 3.179) podemos calcular la expresión para el espectro topológico al orden correspondiente.

Habiendo desarrollado el formalismo para encontrar la forma de Euler para cada orden en la expansión perturbativa de la solución a las ecuaciones de movimiento de la cuerda, podemos seguir con el cálculo del espectro topológico para algunos ejemplos. El espectro topológico, como hemos visto, se obtiene a cada orden integrando la forma de Euler sobre la variedad base, de manera similar al caso de

las soluciones exactas. Así las cantidades relevantes que debemos encontrar son la función métrica $g_{\sigma\sigma}$ ó $g_{\xi\eta}$ a los distintos órdenes.

3.5.3. Ejemplos

Como hemos visto hacia el final de la sección 3.5.1, en el caso en que la solución a orden cero representa el movimiento del centro de masa, la métrica inducida a orden cero no existe y a primer orden es degenerada. De manera que es necesario ir hasta el segundo orden para calcular la métrica inducida; encontramos que una vez que se han considerado las constricciones la métrica inducida a segundo orden es conformalmente plana y el factor conforme está en función de las soluciones a primer orden solamente (3.125),

$$g_{\sigma\sigma}^{(2)} = \partial_\sigma B^\mu \partial_\sigma B^\nu G_{\mu\nu}. \quad (3.188)$$

En el desarrollo que hicimos al principio de la subsección 3.5.2 para encontrar la clase característica de Euler en el régimen perturbativo se consideraron soluciones generales para el orden cero de la expansión perturbativa, $A^\mu = A^\mu(\tau, \sigma)$; de tal forma que las métricas inducidas a cada orden en principio existen y no están degeneradas. En el método de perturbaciones alrededor de la solución del centro de masa no se cumplen estas suposiciones y por lo tanto la primer contribución a la métrica inducida en la expansión perturbativa que se obtiene es la correspondiente al segundo orden. Debido a esto la forma de Euler no la podemos calcular a partir de (3.187), sin embargo a través de la métrica inducida a segundo orden

podemos calcular la clase característica,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \left[\partial_\tau \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}^{(2)}} \partial_\tau g_{\sigma\sigma}^{(2)} \right) - \partial_\sigma \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}^{(2)}} \partial_\sigma g_{\sigma\sigma}^{(2)} \right) \right] d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.189)$$

Al igual que cuando la cuerda se propaga sobre un fondo de Minkowski, obtener una expresión para el espectro topológico para el caso general en que todos los coeficientes de los modos de oscilación son distintos de cero resulta sumamente complicado. Por lo tanto se abordarán algunos casos en que solamente algunos modos de oscilación tienen coeficientes distintos de cero.

Espacio-tiempo de de Sitter

Como primer ejemplo de cómo calcular el espectro topológico para algún caso específico consideramos una cuerda propagándose sobre un espacio-tiempo de de Sitter. Utilizamos el formalismo hasta el segundo orden y las soluciones de primer orden expuestas en [18], ya que como hemos visto, no es necesario conocer las soluciones a segundo orden debido a las constricciones. Además se considera el formalismo que en trabajos posteriores Larsen y Sánchez [40, 66] adoptan para la construcción de soluciones hasta primer orden expresado de manera covariante e introduciendo lo que llaman perturbaciones comóviles (ver apéndice D); es decir, perturbaciones como si fueran vistas por un observador que viaja con el centro de masa de la cuerda. Para esto se introducen $D - 1$ vectores normales v_R^μ que cumplen las ecuaciones,

$$G_{\mu\nu} v_R^\mu \partial_\tau A^\nu = 0 \quad G_{\mu\nu} v_R^\mu v_S^\nu = \delta_{RS}, \quad (3.190)$$

y que una vez fijas, estas condiciones en un punto son transportados paralela-

mente a lo largo de las geodésicas,

$$\partial_\tau A^\mu \nabla_\mu v_R^\nu = 0. \quad (3.191)$$

De esta forma las soluciones a primer orden se escriben como

$$B^\mu = \delta x^R v_R^\mu, \quad (3.192)$$

donde δx^R son las perturbaciones comóviles que se expresan como una expansión de Fourier en σ , $\delta_R(\tau, \sigma) = \sum_k D_{kR}(\tau) e^{-ik\sigma}$.

Se trabaja en unidades tales que $G = 1$, $c = 1$ y para estos casos en particular $\frac{1}{2\pi\alpha'} = 1$. El espacio de fondo que se considera es la solución de de Sitter en D dimensiones, esto es la solución con constante cosmológica positiva con elemento de línea,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r^2}{l^2}} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (3.193)$$

con $d\Omega_{D-2}^2$ el elemento de línea para una $D - 2$ esfera

$$d\Omega_{D-2}^2 = r^2 \left[d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \cdots + \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{D-3} d\theta_{D-2}^2 \right]. \quad (3.194)$$

El escalar de curvatura para D dimensiones resulta ser constante y positivo,

$$R = \frac{D(D-1)}{l^2} = \frac{2D}{(D-2)} \Lambda, \quad (3.195)$$

de manera que la constante cosmológica Λ y l están relacionados de la siguiente manera,

$$l^2 = \frac{(D-1)(D-2)}{2\Lambda}. \quad (3.196)$$

Ahora escribimos las soluciones en la norma conforme para después calcular el espectro topológico para algunos casos particulares.

Las soluciones para las ecuaciones de orden cero (3.113) y considerando una cuerda que cae radialmente en el espacio-tiempo están dadas por,

$$\begin{aligned}
 A^t(\tau) = t(\tau) &= -\frac{l}{2} \ln \left| \frac{1 - \frac{E}{m} \operatorname{tgh} \frac{m}{l} \tau}{1 + \frac{E}{m} \operatorname{tgh} \frac{m}{l} \tau} \right|, \\
 A^r(\tau) = r(\tau) &= \frac{l}{m} \sqrt{E^2 - m^2} \operatorname{senh} \frac{m}{l} \tau, \\
 A^{\theta_{R-1}} &= \text{cte} \quad \text{para} \quad R = 2, \dots, D-1.
 \end{aligned} \tag{3.197}$$

Las soluciones para las ecuaciones de primer orden (3.114) son,

$$\begin{aligned}
 B^t(\tau, \sigma) = -\frac{\partial_\tau r}{m \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k^1 e^{-i(\omega_k \tau - k\sigma)} + \gamma_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau - k\sigma)} \right. \\
 \left. + \tilde{\gamma}_k^1 e^{-i(\omega_k \tau + k\sigma)} + \tilde{\gamma}_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau + k\sigma)} \right], \tag{3.198}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^r(\tau, \sigma) = -\frac{E}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k^1 e^{-i(\omega_k \tau - k\sigma)} + \gamma_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau - k\sigma)} \right. \\
 \left. + \tilde{\gamma}_k^1 e^{-i(\omega_k \tau + k\sigma)} + \tilde{\gamma}_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau + k\sigma)} \right], \tag{3.199}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^{\theta_{R-1}}(\tau, \sigma) = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cdots \operatorname{sen} \theta_{R-2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k^R e^{-i(\omega_k \tau - k\sigma)} + \gamma_k^{R*} e^{i(\omega_k \tau - k\sigma)} \right. \\
 \left. + \tilde{\gamma}_k^R e^{-i(\omega_k \tau + k\sigma)} + \tilde{\gamma}_k^{R*} e^{i(\omega_k \tau + k\sigma)} \right], \tag{3.200}
 \end{aligned}$$

para $R = 2, \dots, D - 1$ y donde la frecuencia de oscilación está dada por,

$$\omega_k = \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{l^2}} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}. \quad (3.201)$$

Podemos expresar estas soluciones en la notación polar, $\gamma_k^R = r_k^R e^{-i\beta_k^R}$, $\tilde{\gamma}_k^R = \tilde{r}_k^R e^{-i\tilde{\beta}_k^R}$,

$$B^t(\tau, \sigma) = -\frac{2\partial_\tau r}{m\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) + \tilde{r}_k^1 \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^1) \right], \quad (3.202)$$

$$B^r(\tau, \sigma) = -\frac{2E}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) + \tilde{r}_k^1 \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^1) \right], \quad (3.203)$$

$$B^{\theta_{R-1}}(\tau, \sigma) = \frac{2}{r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{R-2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_k^{R-1} \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^{R-1}) + \tilde{r}_k^{R-1} \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^{R-1}) \right]. \quad (3.204)$$

Las soluciones a primer orden para este caso presentan inestabilidades debido a la que la frecuencia puede tomar valores puramente imaginarios, esto en contraste con el caso de un fondo plano y los que veremos más adelante sobre un fondo BTZ y AdS, en los cuales las frecuencias siempre son reales.

En este caso la expresión general para el factor conforme de la métrica inducida a

segundo orden está dada por,

$$g_{\sigma\sigma}^{(2)}(\tau, \sigma) = 4 \sum_{R=1}^{D-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(r_k^R \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^R) + \tilde{r}_k^R \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^R) \right) \right. \\ \left. \times \sum_{s=1}^{\infty} s^2 \left(r_s^R \cos(\omega_s \tau - s\sigma + \beta_s^R) + \tilde{r}_s^R \cos(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^R) \right) \right]. \quad (3.205)$$

Debemos notar que esta expresión no depende de las soluciones a orden cero, pues estas se eliminan al contraer las parciales respecto de σ de las soluciones a primer orden con la métrica de fondo (3.188). De manera que toda la información sobre la propagación sobre un fondo de de Sitter está en la frecuencia de oscilación de los modos ω_k .

Como primer caso consideramos solamente un modo de oscilación, ya sea derecho o izquierdo en las direcciones t, r , es decir, $R = 1$, consideremos un modo k -ésimo derecho en particular, la solución correspondiente es,

$$B^t(\tau, \sigma) = -\frac{2\partial_\tau r}{m \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \right], \\ B^r(\tau, \sigma) = -\frac{2E}{m} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \right], \quad (3.206)$$

y en todas las direcciones angulares cero, $B^{\theta_{R-1}}(\tau, \sigma) = 0$. El factor conforme de la métrica inducida es,

$$g_{\sigma\sigma}^{(2)} = 4k^2 r_k^2 \text{sen}^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k), \quad (3.207)$$

y la forma de Euler toma la forma

$$e^{(2)} = \frac{\omega_k^2 - k^2}{2\pi \text{sen}^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k)} d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.208)$$

Integrando sobre la región delimitada por $\sigma \in [0, 2\pi]$ y τ sobre un periodo, que en este caso es $\frac{2\pi}{\omega_k}$ obtenemos que el resultado es cero. De tal forma que no obtenemos condiciones de discretización para los parámetros, en particular en lo que se refiere a r_k . Para el modo izquierdo tenemos la misma situación, así como para el caso análogo en otras direcciones θ_{R-1} , $R = 2, \dots, D - 1$.

Ahora consideramos la situación de dos modos de oscilación, uno k -ésimo derecho en las direcciones t, r , esto es $R = 1$ y uno s -ésimo izquierdo en dirección θ_1 , $R = 2$. Cabe mencionar que el resultado es equivalente si encedemos el modo izquierdo en cualquiera de las direcciones angulares. Las soluciones son,

$$\begin{aligned}
 B^t(\tau, \sigma) &= -\frac{2\partial_{\tau r}}{m \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \right], \\
 B^r(\tau, \sigma) &= -\frac{2E}{m} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \right], \\
 B^{\theta_1}(\tau, \sigma) &= \frac{2}{r} \left[\tilde{r}_s^2 \cos(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \right], \tag{3.209}
 \end{aligned}$$

y cero en las direcciones restantes. La expresión para la función métrica es,

$$g_{\sigma\sigma}^{(2)} = 4 \left[k^2 r_k^2 \sin^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_s^2) + s^2 \tilde{r}_s^2 \sin^2(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \right]. \tag{3.210}$$

La forma de Euler resulta ser una expresión extensa,

$$\begin{aligned}
 e^{(2)} = & - \left[k^4 (r_k^1)^4 (k^2 - \omega_k^2) \operatorname{sen}^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \right. \\
 & + s^4 (\tilde{r}_s^2)^2 (s^2 - \omega_s^2) \operatorname{sen}^2(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \\
 & + k^2 s^2 (r_k^1)^2 (\tilde{r}_s^2)^2 \left(-4(ks + \omega_k \omega_s) \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \cos(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \right. \\
 & \quad \times \operatorname{sen}(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \operatorname{sen}(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \\
 & \quad + k^2 \operatorname{sen}^2(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \left[\operatorname{sen}^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) - \cos^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \right] \\
 & \quad + s^2 \operatorname{sen}^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \left[\operatorname{sen}^2(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) - \cos^2(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \right] \\
 & \quad + \left(\cos^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) - \operatorname{sen}^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \right) \operatorname{sen}^2(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \omega_k^2 \\
 & \quad \left. + \left(\cos^2(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) - \operatorname{sen}^2(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \right) \operatorname{sen}^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \omega_s^2 \right) \\
 & \left. \right] \\
 & / 2\pi \left[k^2 (r_k^1)^2 \operatorname{sen}^2(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) + s^2 (\tilde{r}_s^2)^2 \operatorname{sen}^2(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^2) \right]^2 d\tau \wedge d\sigma.
 \end{aligned}
 \tag{3.211}$$

Se puede observar que, siendo la frecuencia $\omega_k = \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{l^2}}$, en general no existe un periodo común en τ para las frecuencias ω_k y ω_s . De modo que la región de integración en τ no puede ser realizada en un periodo, aun así el dominio de integración puede ser cubierto por regiones tipo *I*, *IV* y tipo *II*, *III*, tal como se hizo en el caso de un fondo plano. Sin embargo, no es posible determinar el número exacto de estas; por lo que tenemos que será una combinación lineal del resultado sobre las regiones tipo *I*, *IV* y del tipo *II*, *III*. Utilizando las coordenadas

tipo nulo para cada región tenemos que la clase característica es,

$$\begin{aligned}
 e^{(2)} = \pm \left\{ k^4 (r_k^1)^4 (k^2 - \omega_k^2) x^2 + s^4 (\tilde{r}_s^2)^4 (s^2 - \omega_s^2) y^2 + \right. \\
 \left. + k^2 s^2 (r_k^1)^2 (\tilde{r}_s^2)^2 \left[y^2 (1 - 2x^2) (\omega_k^2 - k^2) + x^2 (1 - 2y^2) (\omega_s^2 - s^2) \right. \right. \\
 \left. \left. - 4xy \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} (ks + \omega_k \omega_s) \right] \right\} \\
 / \left[2\pi (s\omega_k + k\omega_s) \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} \left(k^2 (r_k^1)^2 x^2 + s^2 (\tilde{r}_s^2)^2 y^2 \right)^2 \right] dx \wedge dy, \quad (3.212)
 \end{aligned}$$

donde el signo negativo corresponde a las regiones tipo *I* y *IV* mientras que el positivo a las regiones tipo *III*, *IV*. El resultado de integrar sobre $x \in [-1, 1]$ y $y \in [-1, 1]$ depende de nueva cuenta del orden de integración, si primero integramos respecto a y y luego respecto a x tenemos,

$$\int_{I,IV} e^{(2)} dx dy = -\frac{kr_k^1 (k^2 - \omega_k^2)}{s\tilde{r}_s^2 (s\omega_k + k\omega_s)}, \quad (3.213)$$

mientras que integrando en el orden inverso,

$$\int_{I,IV} e^{(2)} dy dx = -\frac{s\tilde{r}_s^2 (s^2 - \omega_s^2)}{kr_k^1 (s\omega_k + k\omega_s)}, \quad (3.214)$$

en las regiones tipo *I* y *IV*. Para *II* y *III* encontramos que,

$$\int_{II,III} e^{(2)} dx dy = \frac{kr_k^1 (k^2 - \omega_k^2)}{s\tilde{r}_s^2 (s\omega_k + k\omega_s)}, \quad (3.215)$$

y en el orden inverso,

$$\int_{II,III} e^{(2)} dy dx = \frac{s\tilde{r}_s^2 (s^2 - \omega_s^2)}{kr_k^1 (s\omega_k + k\omega_s)}. \quad (3.216)$$

Para cada orden de integración debemos considerar una combinación lineal de los resultados para las regiones tipo *I* y *IV* y de los correspondientes a *II* y *III*, de manera que tenemos un espectro para el orden de integración “ $dxdy$ ”,

$$\mu \frac{kr_k^1(\omega_k^2 - k^2)}{s\tilde{r}_s^2(s\omega_k + k\omega_s)} = n_1, \quad (3.217)$$

con μ una constante que depende del número de regiones de cada tipo que se consideran y $n_1 \in \mathbb{Z}$. Y para el orden “ $dydx$ ” obtenemos en principio un espectro distinto,

$$\mu \frac{s\tilde{r}_s^2(\omega_s^2 - s^2)}{kr_k(s\omega_k + k\omega_s)} = n_2, \quad (3.218)$$

con $n_2 \in \mathbb{Z}$. Así tenemos un espectro para cada orden de integración. En caso de que $k = s$ tenemos que para cualquier tipo de región el resultado para el orden “ $dxdy$ ” es,

$$2k \frac{r_k^1(\omega_k^2 - k^2)}{\omega_k \tilde{r}_k^2} = n, \quad (3.219)$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y donde se han considerado $2k$ regiones tipo *I*, *IV* y otras $2k$ tipo *II*, *III*. Para el orden inverso basta intercambiar r_k^1 con \tilde{r}_k^2 . Esto es consistente con el resultado de considerar el cociente entre (3.217) y (3.218),

$$\frac{r_k^1}{\tilde{r}_s^2} = \frac{s}{k} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}, \quad (3.220)$$

y exigir que el resultado de la integración sea el mismo para los dos órdenes de integración, $n_1 = n_2$; de tal forma que

$$\frac{r_k^1}{\tilde{r}_s^2} = \frac{s}{k}, \quad (3.221)$$

esto es, el cociente de las amplitudes de los modos de oscilación debe ser un número racional, y en particular se cumple para $k = s$. Debemos notar que en el caso de que las frecuencias de oscilación sean las del caso de un fondo de Minkowski, $\omega_k = k$ y $\omega_s = s$, el resultado coincide con el que obtuvimos (3.68-3.73), es decir, no hay una condición de discretización para los parámetros r_k^1 y \tilde{r}_s^2 .

A continuación consideramos tener un modo de oscilación k -ésimo derecho γ_k^1 y uno s -ésimo izquierdo $\tilde{\gamma}_s^1$ en las direcciones t, r , esto es $R = 1$. Las soluciones son,

$$B^t(\tau, \sigma) = -\frac{2\partial_\tau r}{m\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) + \tilde{r}_s^1 \cos(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^1) \right], \quad (3.222)$$

$$B^r(\tau, \sigma) = -\frac{2E}{m} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) + \tilde{r}_s^1 \cos(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^1) \right], \quad (3.223)$$

con $B^{\theta_{R-1}}(\tau, \sigma) = 0$, para toda $R = 2, \dots, D - 1$. La función métrica factor conforme de la métrica inducida a segundo orden es,

$$g_{\sigma\sigma}^{(2)} = 4 \left[kr_k^1 \sin(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) - s\tilde{r}_s^1 \sin(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^1) \right], \quad (3.224)$$

a partir de la cual podemos calcular la clase característica de Euler a segundo

orden, $e^{(2)}$,

$$\begin{aligned}
 e^{(2)} = & \left\{ k^2 (r_k^1)^2 (\omega_k^2 - k^2) + s^2 (\tilde{r}_s^1)^2 (\omega_s^2 - s^2) \right. \\
 & - ks r_k^1 \tilde{r}_s^1 \left[2(ks + \omega_k \omega_s) \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \cos(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^1) \right. \\
 & \left. \left. + (\omega_k^2 - k^2 + \omega_s^2 - s^2) \sin(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \sin(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^1) \right] \right\} \\
 & / 2\pi \left[kr_k^1 \sin(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) - s\tilde{r}_s^1 \sin(\omega_s \tau + s\sigma + \tilde{\beta}_s^1) \right]^2 d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.225)
 \end{aligned}$$

La situación es similar al caso anterior en cuanto a que no podemos encontrar un periodo comun en τ para las frecuencias ω_k y ω_s . Utilizando el mismo procedimiento de cambiar de variables a las coordenadas tipo *I*, *II*, *III* y *IV* encontramos que la forma de Euler se expresa como,

$$\begin{aligned}
 e^{(2)} = & \pm \left\{ k^2 (r_k^1)^2 (\omega_k^2 - k^2) + s^2 (\tilde{r}_s^1)^2 (\omega_s^2 - s^2) \right. \\
 & \left. - ks r_k^1 \tilde{r}_s^1 \left[(\omega_k^2 - k^2 + \omega_s^2 - s^2) xy + 2(ks + \omega_k \omega_s) \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \right] \right\} \\
 & / 2\pi (s\omega_k + k\omega_s) \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} (kr_k^1 x - s\tilde{r}_s^1 y)^2 dx \wedge dy, \quad (3.226)
 \end{aligned}$$

con el signo positivo correspondiendo a las regiones tipo *I*, *IV* y el signo negativo para *II* y *III*. El resultado de la integración sobre todas las regiones sobre $x \in [-1, 1]$ y $y \in [-1, 1]$ depende, al igual que los casos que hemos visto, del orden de integración, de manera tal que tenemos para las regiones tipo *I* y *IV*,

$$\int_{I,IV} e^{(2)} dx dy = \frac{4}{\pi} \frac{ks + \omega_k \omega_s}{s\omega_k + k\omega_s} \operatorname{arctanh} \left(\frac{kr_k^1}{s\tilde{r}_s^1} \right) + i \frac{kr_k^1 (k^2 - \omega^2)}{s\tilde{r}_s^1 (s\omega_k + k\omega_s)}, \quad (3.227)$$

invirtiendo el orden de integración,

$$\int_{I,IV} e^{(2)} dydx = \frac{4 ks + \omega_k \omega_s}{\pi s \omega_k + k \omega_s} \operatorname{arctanh} \left(\frac{s \tilde{r}_s^1}{k r_k^1} \right) + i \frac{s \tilde{r}_s^1 (s^2 - \omega_s^2)}{k r_k^1 (s \omega_k + k \omega_s)}. \quad (3.228)$$

Mientras que para las regiones tipo *II* y *III* obtenemos,

$$\int_{I,IV} e^{(2)} dx dy = \frac{4 ks + \omega_k \omega_s}{\pi s \omega_k + k \omega_s} \operatorname{arctanh} \left(\frac{k r_k^1}{s \tilde{r}_s^1} \right) - i \frac{k r_k^1 (k^2 - \omega^2)}{s \tilde{r}_s^1 (s \omega_k + k \omega_s)}, \quad (3.229)$$

y

$$\int_{I,IV} e^{(2)} dy dx = \frac{4 ks + \omega_k \omega_s}{\pi s \omega_k + k \omega_s} \operatorname{arctanh} \left(\frac{s \tilde{r}_s^1}{k r_k^1} \right) - i \frac{s \tilde{r}_s^1 (s^2 - \omega_s^2)}{k r_k^1 (s \omega_k + k \omega_s)}. \quad (3.230)$$

Al no tener un periodo en común en τ consideramos una combinación lineal de los resultados de cada tipo de región, así para el orden de integración “ $dx dy$ ” se tiene un espectro,

$$\mu \left[\frac{4 ks + \omega_k \omega_s}{\pi s \omega_k + k \omega_s} \operatorname{arctanh} \left(\frac{k r_k^1}{s \tilde{r}_s^1} \right) + i \frac{k r_k^1 (k^2 - \omega^2)}{s \tilde{r}_s^1 (s \omega_k + k \omega_s)} \right] = n_1, \quad (3.231)$$

y cuando “ $dy dx$ ” se obtiene otro espectro topológico,

$$\mu \left[\frac{4 ks + \omega_k \omega_s}{\pi s \omega_k + k \omega_s} \operatorname{arctanh} \left(\frac{s \tilde{r}_s^1}{k r_k^1} \right) + i \frac{s \tilde{r}_s^1 (s^2 - \omega_s^2)}{k r_k^1 (s \omega_k + k \omega_s)} \right] = n_2, \quad (3.232)$$

con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Analizando estas expresiones vemos que el primer término en el lado izquierdo de la igualdad es principio un número que puede ser entero siempre y cuando $\frac{k r_k^1}{s \tilde{r}_s^1} < 1$ y $\frac{s \tilde{r}_s^1}{k r_k^1} < 1$, mientras que el segundo sumando es un número puramente imaginario. Al ser esta expresión un número entero, n_1 ó n_2 , necesariamente este segundo término imaginario tiene que ser cero. Esto implica

que tanto $\omega_k^2 = k^2$ y $\omega_s^2 = s^2$. Recordando que $\omega_k^2 = \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{l^2}}$ tenemos como consecuencia $\frac{m^2}{l^2} = 0$, de tal forma si consideramos que $m \neq 0$ debido a (3.116), entonces la constante cosmológica debe ser cero $\Lambda = 0$. Esto en el espacio de fondo (3.193) significa que recuperamos tanto el espacio de Minkowski como el espectro que encontramos anteriormente para tal caso. Podemos concluir que en este caso no existe espectro topológico sobre un fondo de de Sitter dada tal configuración de modos de oscilación con $\omega_k \neq \omega_s$. Si consideramos que $\omega_k = \omega_s$ tenemos que la región de integración en dirección τ tiene un comportamiento periódico con periodo $\frac{2\pi}{\omega_k}$. Esto significa que para cubrir la región de integración, $\sigma \in [0, 2\pi]$, $\tau \in [0, \frac{2\pi}{\omega_k}]$, necesitamos sumar el resultado de un número igual de regiones tipo *I*, *IV* y tipo *II*, *III*. El resultado, en este caso para las regiones tipo *I* y *IV* en ambos órdenes de integración,

$$\int_{I,IV} e^{(2)} dx dy = \frac{2}{\pi} \frac{(k^2 + \omega_k^2)}{k\omega_k} \operatorname{arctanh} \left(\frac{r_k^1}{\tilde{r}_k^1} \right) + i \frac{r_k^1(k^2 - \omega_k^2)}{2k\tilde{r}_k^1\omega_k}, \quad (3.233)$$

$$\int_{II,III} e^{(2)} dy dx = \frac{2}{\pi} \frac{(k^2 + \omega_k^2)}{k\omega_k} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\tilde{r}_k^1}{r_k^1} \right) + i \frac{\tilde{r}_k^1(k^2 - \omega_k^2)}{2kr_k^1\omega_k}, \quad (3.234)$$

mientras que para las regiones tipo *II*, *III*,

$$\int_{I,IV} e^{(2)} dx dy = \frac{2}{\pi} \frac{(k^2 + \omega_k^2)}{k\omega_k} \operatorname{arctanh} \left(\frac{r_k^1}{\tilde{r}_k^1} \right) - i \frac{r_k^1(k^2 - \omega_k^2)}{2k\tilde{r}_k^1\omega_k}, \quad (3.235)$$

$$\int_{II,III} e^{(2)} dy dx = \frac{2}{\pi} \frac{(k^2 + \omega_k^2)}{k\omega_k} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\tilde{r}_k^1}{r_k^1} \right) - i \frac{\tilde{r}_k^1(k^2 - \omega_k^2)}{2kr_k^1\omega_k}. \quad (3.236)$$

Al sumar los resultados de las regiones la parte imaginaria se anula y obtenemos

para el orden de integración “ $dx dy$ ”,

$$4k^2 \frac{2}{\pi} \frac{(k^2 + \omega_k^2)}{k\omega_k} \operatorname{arctanh} \left(\frac{r_k^1}{\tilde{r}_k^1} \right) = n \quad (3.237)$$

mientras que para el orden inverso “ $dy dx$ ”,

$$4k^2 \frac{2}{\pi} \frac{(k^2 + \omega_k^2)}{k\omega_k} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\tilde{r}_k^1}{r_k^1} \right) = n. \quad (3.238)$$

Vemos que se establece una relación discreta entre las amplitudes de los modos de oscilación r_k^1, \tilde{r}_k^1 y que estable un orden entre ellas, ya sea $r_k^1 < \tilde{r}_k^1$ ó $r_k^1 > \tilde{r}_k^1$; a diferencia del caso en que el fondo es de Minkowski, también participa en dicha relación de discretización la constante cosmológica debido a que $\omega_k = \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{l^2}}$. De manera similar al caso plano podemos considerar una expresión que sea válida para cualquier orden de las amplitudes de los modos de oscilación,

$$\frac{2k}{\pi} \frac{(k^2 + \omega_k^2)}{\omega_k} \ln \left[\frac{(r_k^1 + \tilde{r}_k^1)^2}{(r_k^1 - \tilde{r}_k^1)^2} \right] = n, \quad (3.239)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Estos resultados se reducen a los correspondientes que obtuvimos considerando un fondo plano (3.82), de tal forma que son consistentes en el límite en que la constante cosmológica tiende a cero, $\Lambda \rightarrow 0$.

A continuación estudiamos los casos en que la cuerda se propaga sobre un fondo BTZ con $J = 0$ y $Q = 0$ y un espacio-tiempo de anti de Sitter. Expondremos las soluciones y veremos que no es necesario repetir el análisis recién hecho y que basta simplemente con tomar los resultados que hemos obtenido para el fondo de de Sitter simplemente considerando que la expresión de la frecuencia de oscilación cambia para estos otros casos.

Espacio de fondo BTZ

Ahora se considera como espacio-tiempo de fondo la solución de Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ) en $2 + 1$ dimensiones con constante cosmológica negativa [6] para el caso particular en que se describe un agujero negro sin rotación $J = 0$ y neutro $Q = 0$, de manera que la métrica que describe dicho espacio-tiempo depende del parámetro de masa M y de la constante cosmológica $l^2 = -\frac{1}{\Lambda}$.

La métrica del espacio-tiempo de fondo G se expresa utilizando como coordenadas del espacio-tiempo $\{t, r, \phi\}$, y el elemento de línea tiene la siguiente forma,

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - M\right) dt^2 + \frac{1}{\left(\frac{r^2}{l^2} - M\right)} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (3.240)$$

con $l^2 = -\frac{1}{\Lambda}$ y $\Lambda < 0$ la constante cosmológica; podemos verificar que es un espacio de curvatura constante ya que el escalar de Ricci es,

$$R = -\frac{6}{l^2} = 6\Lambda, \quad (3.241)$$

donde vale la pena hacer notar que este escalar no depende del parámetro de masa M .

A continuación presentamos las soluciones a las ecuaciones de movimiento hasta el primer orden en la expansión perturbativa (3.113-3.115) en la norma conforme (3.112) para una cuerda que cae radialmente en el agujero negro $2 + 1$. Para el movimiento del centro de masa que describe el orden cero de la expansión perturbativa tenemos que se cumple la relación de dispersión (3.116) y a partir de ésta

se obtiene la solución [40],

$$\begin{aligned}
 A^t(\tau) &= t(\tau) = \frac{l}{2\sqrt{M}} \ln \left| \frac{1 - \frac{E}{m\sqrt{M}} \operatorname{tg} \frac{m}{l} \tau}{1 + \frac{E}{m\sqrt{M}} \operatorname{tg} \frac{m}{l} \tau} \right| \\
 A^r(\tau) &= r(\tau) = -\frac{l}{m} \sqrt{Mm^2 + E^2} \operatorname{sen} \frac{m}{l} \tau \\
 A^\phi(\tau) &= \phi(\tau) = \text{cte.}
 \end{aligned} \tag{3.242}$$

donde E es una constante de integración y m representa otra vez la masa asociada con el centro de masa de la cuerda. Mientras tanto, para el primer orden tenemos,

$$\begin{aligned}
 B^t(\tau, \sigma) &= -\frac{\partial_\tau r}{m \left(\frac{r^2}{l^2} - M \right)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k^1 e^{-i(\omega_k \tau - k\sigma)} + \gamma_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau - k\sigma)} \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{\gamma}_k^1 e^{-i(\omega_k \tau + k\sigma)} + \tilde{\gamma}_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau + k\sigma)} \right], \tag{3.243}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^r(\tau, \sigma) &= -\frac{E}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k^1 e^{-i(\omega_k \tau - k\sigma)} + \gamma_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau - k\sigma)} \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{\gamma}_k^1 e^{-i(\omega_k \tau + k\sigma)} + \tilde{\gamma}_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau + k\sigma)} \right], \tag{3.244}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^\phi(\tau, \sigma) &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k^2 e^{-i(\omega_k \tau - k\sigma)} + \gamma_k^{2*} e^{i(\omega_k \tau - k\sigma)} \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{\gamma}_k^2 e^{-i(\omega_k \tau + k\sigma)} + \tilde{\gamma}_k^{2*} e^{i(\omega_k \tau + k\sigma)} \right], \tag{3.245}
 \end{aligned}$$

donde la frecuencia de oscilación está dada por

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + \frac{m^2}{l^2}}. \tag{3.246}$$

Hemos de notar que la frecuencia en este caso siempre es real para cualquier valor de k , a diferencia del caso anterior (de Sitter) para el cual la frecuencia puede llegar a tomar valores imaginarios. En la notación polar para los modos de oscilación, $\gamma_k^R = r_k^R e^{-i\beta_k^R}$, $\tilde{\gamma}_k^R = \tilde{r}_k^R e^{-i\tilde{\beta}_k^R}$, la solución a primer orden es,

$$B^t(\tau, \sigma) = -\frac{2\partial_\tau r}{m\left(\frac{r^2}{l^2} - M\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) + \tilde{r}_k^1 \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^1) \right], \quad (3.247)$$

$$B^r(\tau, \sigma) = -\frac{2E}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) + \tilde{r}_k^1 \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^1) \right], \quad (3.248)$$

$$B^{\theta_{R-1}}(\tau, \sigma) = \frac{2}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_k^{R-1} \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^{R-1}) + \tilde{r}_k^{R-1} \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^{R-1}) \right]. \quad (3.249)$$

A partir de (3.188) calculamos la función métrica que es el factor conforme de la métrica inducida, necesaria para encontrar la forma de Euler a segundo orden. Vemos que al contraer las derivadas respecto a σ de las soluciones a primer orden con la métrica del espacio de fondo la expresión que obtenemos para el factor conforme es igual a (3.205) salvo que la frecuencia de oscilación en este caso está dada por (3.246). Siendo así los casos analizados para el espacio-tiempo de de Sitter son válidos para BTZ simplemente considerando que frecuencia de oscilación ω_k que corresponde. Presentamos a continuación las soluciones para AdS en D dimensiones, para el cual se tendrá una situación similar, para después hacer un recuento de los espectros para los tres espacios de fondo que encontramos.

Espacio-tiempo de anti de Sitter

Como un tercer ejemplo de soluciones perturbativas presentamos el caso de la cuerda propagándose en un espacio-tiempo de fondo de anti de Sitter de D dimensiones. Las soluciones se pueden encontrar a partir del caso BTZ con $J = 0$, $Q = 0$, simplemente sustituyendo $M = -1$ tanto en la expresión para la métrica de fondo como en las soluciones a los distintos órdenes, y considerando $D - 2$ coordenadas angulares. De esta forma la métrica para el espacio-tiempo es,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{r^2}{l^2}} dr^2 + d\Omega_{D-2}^2, \quad (3.250)$$

donde $d\Omega_{D-2}$ es el elemento de línea para una $D - 2$ esfera. En este caso la constante cosmológica está relacionada con l a través de,

$$l^2 = - \frac{(D-1)(D-2)}{2\Lambda}, \quad (3.251)$$

y el escalar de curvatura para D dimensiones resulta constante y negativo,

$$R = - \frac{D(D-1)}{l^2} = \frac{2D}{(D-2)}\Lambda. \quad (3.252)$$

De esta forma la solución a orden cero es [41],

$$\begin{aligned} A^t(\tau) = t(\tau) &= -\frac{l}{2i} \ln \left| \frac{1 - i\frac{E}{m} \operatorname{tg} \frac{m}{l}\tau}{1 + i\frac{E}{m} \operatorname{tg} \frac{m}{l}\tau} \right|, \\ A^r(\tau) = r(\tau) &= -\frac{l}{m} \sqrt{E^2 - m^2} \operatorname{sen} \frac{m}{l}\tau, \\ A^{\theta_{R-1}}(\tau) &= \text{cte}, \quad \text{para } R = 2, \dots, D-1. \end{aligned} \quad (3.253)$$

Mientras que para el primer orden,

$$B^t(\tau, \sigma) = -\frac{\partial_\tau r}{m \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k^1 e^{-i(\omega_k \tau - k\sigma)} + \gamma_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau - k\sigma)} \right. \\ \left. + \tilde{\gamma}_k^1 e^{-i(\omega_k \tau + k\sigma)} + \tilde{\gamma}_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau + k\sigma)} \right], \quad (3.254)$$

$$B^r(\tau, \sigma) = -\frac{E}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k^1 e^{-i(\omega_k \tau - k\sigma)} + \gamma_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau - k\sigma)} \right. \\ \left. + \tilde{\gamma}_k^1 e^{-i(\omega_k \tau + k\sigma)} + \tilde{\gamma}_k^{1*} e^{i(\omega_k \tau + k\sigma)} \right], \quad (3.255)$$

$$B^{\theta_{R-1}}(\tau, \sigma) = \frac{1}{r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{R-2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k^R e^{-i(\omega_k \tau - k\sigma)} + \gamma_k^{R*} e^{i(\omega_k \tau - k\sigma)} \right. \\ \left. + \tilde{\gamma}_k^R e^{-i(\omega_k \tau + k\sigma)} + \tilde{\gamma}_k^{R*} e^{i(\omega_k \tau + k\sigma)} \right], \quad (3.256)$$

con $R = 2, \dots, D - 1$, y cuando $R = 2$ el factor que acompaña a la expansión en B^{θ_1} es simplemente $\frac{1}{r}$. La frecuencia de oscilación para este caso es la misma que en el ejemplo anterior y los modos de oscilación cumplen la misma relación,

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + \frac{m^2}{l^2}}. \quad (3.257)$$

Las soluciones a primer orden en la notación polar

$$B^t(\tau, \sigma) = -\frac{2\partial_\tau r}{m \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) \right. \\ \left. + \tilde{r}_k^1 \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^1) \right], \quad (3.258)$$

$$B^r(\tau, \sigma) = -\frac{2E}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_k^1 \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^1) + \tilde{r}_k^1 \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^1) \right], \quad (3.259)$$

$$B^{\theta_{R-1}}(\tau, \sigma) = \frac{1}{r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{R-2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_k^R \cos(\omega_k \tau - k\sigma + \beta_k^R) + \tilde{r}_k^R \cos(\omega_k \tau + k\sigma + \tilde{\beta}_k^R) \right]. \quad (3.260)$$

Al igual que para BTZ las expresiones para los espectros encontradas en el caso de de Sitter se puede tomar para este caso considerando la frecuencia para AdS.

Recuento de los casos

Los resultados que se obtienen para el espectro topológico considerando algunas configuraciones particulares para los modos de oscilación que describen perturbativamente la cuerda propagándose sobre un espacio de fondo con curvatura distinta de cero expuestos para el espacio-tiempo de de Sitter, son los mismos para los otros dos casos, es decir, para el fondo BTZ y para AdS, esto debido a la forma del factor conforme de la métrica inducida a partir de la cual se calcula el espectro topológico. Simplemente lo que distingue un caso de otro es la frecuencia de oscilación de dichos modos, la cual está involucrada en las expresiones para dichos espectros. De tal manera que a partir de esos resultados podemos particularizar a cada situación, sustituyendo según el caso su correspondiente frecuencia.

La primera configuración es tener solamente un modo de oscilación ya sea derecho o izquierdo en las direcciones t, r , $R = 1$, $\alpha_k^1 = r_k^1 e^{-i\beta_k^1}$ y en las direcciones angulares solamente el movimiento del centro de masa. El resultado de la inte-

gración para los tres casos es cero independientemente de la frecuencia para cada situación.

El segundo caso es cuando tenemos un modo de oscilación derecho en las direcciones t, r , $R = 1$, $\alpha_k^1 = r_k^1 e^{-i\beta_k^1}$ y un modo de oscilación izquierdo en alguna dirección angular θ_R , sea $R = 2$, $\tilde{\alpha}_s^2 = \tilde{r}_s^2 e^{-i\tilde{\beta}_s^2}$. El resultado es que tenemos dos espectros dependiendo el orden de las variables en las que se realiza la integración, (3.217, 3.218),

$$\pm \mu \frac{m^2}{l^2} \frac{kr_k^1}{s\tilde{r}_s^2 \left(s\sqrt{s^2 \pm \frac{m^2}{l^2}} + k\sqrt{k^2 \pm \frac{m^2}{l^2}} \right)} = n_1, \quad (3.261)$$

$$\pm \mu \frac{m^2}{l^2} \frac{s\tilde{r}_s^2}{kr_k^1 \left(s\sqrt{s^2 \pm \frac{m^2}{l^2}} + k\sqrt{k^2 \pm \frac{m^2}{l^2}} \right)} = n_2, \quad (3.262)$$

donde el signo positivo (+) corresponde al caso BTZ y AdS con frecuencia ambos $\omega_k = \sqrt{k^2 + \frac{m^2}{l^2}}$, el negativo (-) para dS con frecuencia $\omega_k = \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{l^2}}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, μ es una constante debida a la combinación lineal de tipo de regiones de integración que consideramos y l^2 está relacionada con la constante cosmológica Λ mediante las expresiones dadas en (3.251) para el espacio-tiempo de AdS, (3.196) para dS, como $l^2 = -\frac{1}{\Lambda}$ para BTZ. En caso de que las frecuencias de oscilación sean iguales para estos dos modos $k = s$, tenemos de (3.219) el resultado,

$$\pm \frac{m^2}{l^2} \frac{2kr_k^1}{\tilde{r}_k^2 \sqrt{k^2 \pm \frac{m^2}{l^2}}} = n, \quad (3.263)$$

con el signo positivo (+) para BTZ y AdS, y el negativo (-) para dS. Este espectro lo podemos reescribir como,

$$\frac{r_k^1}{\tilde{r}_k^2} = \pm \frac{l^2}{m^2} \frac{\sqrt{k^2 \pm \frac{m^2}{l^2}}}{2k}. \quad (3.264)$$

El siguiente caso es un modo de oscilación derecho $\alpha_k^1 = r_k^1 e^{-i\beta_k^1}$ y uno izquierdo, $\tilde{\alpha}_s^1 = \tilde{r}_s^1 e^{-i\tilde{\beta}_s^1}$ en las direcciones $t, r, R = 1$. Concluimos en este caso que no se establece relación de discretización alguna a menos que las frecuencias de oscilación sean iguales, es decir, si $k = s$. A partir de (3.239) tenemos,

$$\pm \frac{2k}{\pi} \frac{m^2}{l^2 \sqrt{k^2 \pm \frac{m^2}{l^2}}} \ln \left[\frac{(r_k^1 + \tilde{r}_k^1)^2}{(r_k^1 - \tilde{r}_k^1)^2} \right] = n, \quad (3.265)$$

donde de nueva cuenta el signo positivo da cuenta de los casos en que el fondo es BTZ o AdS y el negativo de dS.

Es importante notar que para todos los casos cuando el fondo es BTZ o anti de Sitter el espectro topológico siempre existe sin importar el valor de la frecuencia, no así para el fondo de de Sitter donde la realización de discretización limita los valores de las frecuencias de oscilación a ser reales o lo que es lo mismo establece cotas para la constante cosmológica en función de la masa, el número de modo y la dimensión del espacio tiempo,

$$\Lambda > \frac{k(D-1)(D-2)}{2m^2}, \quad (3.266)$$

Lo que descarta frecuencias imaginarias en este escenario, las cuales llevarían a inestabilidades de las soluciones.

3.6. Comentarios

En este capítulo hemos expuesto de forma detallada todo el proceso para obtener espectros topológicos asociados a la teoría de la cuerda bosónica. Primero estudiamos en general el sistema y encontramos expresiones generales para cualquier

tipo de espacio-tiempo de fondo para la clase característica de Euler, como un primer acercamiento calculamos espectros cuando la cuerda se propaga sobre un fondo de Minkowski y lo hicimos para configuraciones particulares de los modos de oscilación; esto debido a la dificultad que presenta el caso general para su integración. Encontramos relaciones discretas entre las amplitudes de oscilación, siempre independientes de la fase que tienen asociada. Después encontramos espectros topológicos en una aproximación perturbativa para cuerdas propagándose sobre fondos de curvatura constante, tales relaciones de discretización dependen de la constante cosmológica y son consistentes con el caso plano cuando $\Lambda \rightarrow 0$. Además vimos que para el caso de un espacio-tiempo de de Sitter como fondo por el cual se propaga la cuerda, la constante cosmológica está acotada en el valor mínimo que puede tomar.

Estos espectros que presentamos son el resultado matemático sin hacer ninguna suposición sobre el sistema físico o sobre el método para obtener dichas relaciones de discretización. Aun en este caso, en el que no es posible la comparación con los resultados del formalismo canónico, encontramos consecuencias físicas sobre los parámetros que determinan el sistema. Es decir, de todos los posibles encajes de la hoja de mundo en el espacio de fondo, determinados por los modos de oscilación de la cuerda en estas configuraciones particulares, solamente son permitidos aquellos descritos por la relación discreta entre dichos modos. Falta mucho trabajo por hacer para entender el alcance de estos espectros y aún más para establecer un resultado general que involucre más información sobre los estados y su evolución dinámica. En trabajos posteriores presentaremos resultados para casos en que tenemos soluciones exactas para la cuerda bosónica en fondos con curvatura distinta de cero [4].

CAPÍTULO 4

CAMPOS GRAVITACIONALES, MAPEOS ARMÓNICOS Y ESPECTROS TOPOLÓGICOS

Las soluciones estacionarias con simetría axial a las ecuaciones de Einstein en el vacío juegan un papel muy importante en la descripción de objetos astrofísicos, debido a que representan el campo gravitacional exterior de fuentes que poseen un momento angular y dicha simetría. Podemos encontrar dentro de esta descripción agujeros negros que tienen tales simetrías en el vacío y también los casos en que se encuentran presentes campos electromagnéticos. Debido a las simetrías que posee esta familia de soluciones el problema se puede reducir a encontrar tres funciones métricas que dependen únicamente de dos parámetros del espacio-tiempo y a resolver cuatro ecuaciones diferenciales para dichas funciones métricas, sin embar-

go dos de estas ecuaciones se resuelven por cuadraturas una vez que las otras dos funciones métricas se conocen [70]. Esto se puede considerar como un problema donde se tienen dos funciones métricas que dependen de dos parámetros y que son solución de dos ecuaciones diferenciales, las que se consideran las ecuaciones diferenciales principales para los espacios axisimétricos estacionarios. Estas ecuaciones pueden determinarse a partir de un Lagrangiano para estos dos campos gravitacionales que dependen solamente de dos variables del espacio-tiempo. En dos trabajos Ernst [22], [23] encontró a partir de esta visión una representación en términos de un potencial que permite sistematizar el proceso para encontrar soluciones a dichas ecuaciones diferenciales, y dió lugar al desarrollo de técnicas de generación de soluciones para dichos espacios-tiempo [68]. En particular se encontraron soluciones con un número arbitrario de momentos multipolares [58, 59, 61–63] para la masa y el momento angular, siendo utilizadas para describir el campo gravitacional de distribuciones de masas con simetría axial y con rotación. La descripción a través de dicho Lagrangiano se puede identificar con los modelos sigma no lineales [45], siendo que se puede encontrar una relación entre los Lagrangianos de ambas representaciones [16], esto es, el Lagrangiano “reducido” de Einstein-Hilbert para campos gravitacionales con dos vectores de Killing que conmutan se puede identificar con el Lagrangiano canónico de un modelo sigma no lineal $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$. Esta descripción puede sugerir una interpretación de estas soluciones para el campo gravitacional como configuraciones en el contexto de la teoría de cuerdas, ya que la acción de Polyakov [34] a partir de la cual se puede describir este tipo de objetos es la acción de un modelo sigma no lineal (o lineal en algunos casos).

Sin embargo veremos que es imposible hacer una identificación de la acción reducida de los campos gravitacionales estacionarios con simetría axial con una

acción de teoría de cuerdas, la cual tiene como una característica principal que, dentro de su representación como modelo sigma no lineal, el espacio base es de dimensión dos. Para llevar a cabo tal identificación será necesario recurrir a una generalización de los mapeos armónicos cuyo principal distintivo será una interacción entre el espacio base y el espacio de fondo (target) del mapeo armónico generalizado, que queda reflejada en la dependencia explícita en las coordenadas del espacio base de la métrica para el espacio de fondo. El buscar la representación como modelo sigma no lineal ha tenido como motivación utilizar el proceso de cuantización canónica que se utiliza en la teoría de cuerdas, sin embargo esta búsqueda nos llevó a una nueva representación de estos campos gravitacionales como cuerdas bosónicas generalizadas para lo cual fue necesario definir los mapeos armónicos generalizados. Aún más, esta nueva forma de describir los campos gravitacionales estacionarios con simetría axial admite una extensión dimensional del espacio de fondo en el mapeo armónico generalizado que permite describir espacios-tiempo estáticos. Teniendo a mano esta representación de los campos gravitacionales estacionarios y estáticos resulta inmediato plantear la cuantización topológica para tales sistemas y a partir de esto obtener el espectro topológico desde esta descripción geométrica alternativa. La cuantización topológica de campos gravitacionales tiene como escenario natural la configuración clásica en cuatro dimensiones $(M_{\mathbf{g}}, \omega)$ que consiste en la variedad Riemanniana (M, \mathbf{g}) solución a las ecuaciones de Einstein y con ω la conexión de Levi-Civita. El caso de campos gravitacionales a partir de esta configuración clásica ha sido explorado en profundidad por Patiño y Quevedo en [54], con resultados alentadores. Esto debido a que se han encontrado relaciones de discretización para los parámetros físicos de agujeros negros y campos gravitacionales.

En este capítulo abordaremos esta nueva representación haciendo una revisión

de este tipo de soluciones y su representación como modelos sigma no lineales. Definiremos los mapeos armónicos generalizados y la extensión dimensional aplicable a estos y a partir de esta nueva representación plantearemos el escenario geométrico punto de partida para la cuantización topológica y calcularemos el espectro topológico para el caso estático asintóticamente plano, es decir, la solución de Schwarzschild. Además encontraremos el espectro topológico a partir de la configuración clásica natural $(M_{\mathbf{g}}, \omega)$ a fin de comparar con el resultado de utilizar la representación a partir de los mapeos armónicos generalizados.

4.1. Campos gravitacionales axisimétricos estacionarios

Un campo gravitacional estacionario es aquel que posee un campo vectorial de Killing \mathbf{K}_1 tipo tiempo cuyas órbitas corresponden a la existencia de un grupo uniparamétrico de isometrías, mientras que cuando las órbitas correspondientes a un grupo de un parámetro de isometrías son cerradas y tipo espacio lo que tenemos es un espacio-tiempo con simetría axial, es decir, posee un campo vectorial de Killing \mathbf{K}_2 tipo espacio asociado a dicha isometría. Un espacio-tiempo estacionario y con simetría axial es aquel que tiene simultáneamente estos dos campos vectoriales de Killing y además la acción de dichas isometrías conmuta, lo cual se puede expresar mediante el hecho de que los vectores de Killing asociados conmutan [70],

$$[\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2] = 0. \quad (4.1)$$

Podemos escoger coordenadas adaptadas a estas simetrías del espacio-tiempo de manera que la métrica no dependa explícitamente de ellas, es decir, si escogemos a t como la coordenada temporal tenemos que $\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} = 0$ y el vector de Killing tipo

tiempo tendrá coordenadas δ^a_i ; de igual forma si escogemos a φ como la coordenada azimutal entonces $\frac{\partial g_{ab}}{\partial \varphi} = 0$ y las componentes del vector de Killing tipo espacio son δ^a_φ . Haciendo algunas suposiciones que nos llevan a que los planos ortogonales a los vectores de Killing $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ son integrables, utilizando las ecuaciones de Einstein en el vacío y tomando coordenadas cilíndricas (t, ρ, z, φ) se puede llegar a una métrica $g_{ab} = g_{ab}(\rho, z)$ cuyo elemento de línea más general se puede expresar como,

$$ds^2 = f(dt - \omega d\varphi)^2 - \frac{1}{f} \left[e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2 \right], \quad (4.2)$$

con $f = f(\rho, z)$, $\omega = \omega(\rho, z)$ y $k = k(\rho, z)$. A la métrica asociada a este elemento de línea se le conoce como la métrica de Weyl-Lewis-Papapetrou [68, 70].

Introduciendo una nueva función $\Omega = \Omega(\rho, z)$ mediante las relaciones,

$$\rho \partial_\rho \Omega = f^2 \partial_z \omega, \quad \rho \partial_z \Omega = -f^2 \partial_\rho \omega, \quad (4.3)$$

y después de algunos desarrollos se puede encontrar que las ecuaciones de Einstein en el vacío se expresan de la siguiente manera,

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho f) + \partial_z^2 f + \frac{1}{f} \left[(\partial_\rho \Omega)^2 + (\partial_z \Omega)^2 - (\partial_\rho f)^2 - (\partial_z f)^2 \right] = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \Omega) + \partial_z^2 \Omega - \frac{2}{f} (\partial_\rho f \partial_\rho \Omega + \partial_z f \partial_z \Omega) = 0, \quad (4.5)$$

siendo estas las que llamaremos ecuaciones principales para las campos gravitacionales estacionarios con simetría axial; y además tenemos un par de ecuaciones

más para la otra función métrica $k(\rho, z)$,

$$\begin{aligned}\partial_\rho k &= \frac{\rho}{4f^2} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_\rho \Omega)^2 - (\partial_z f)^2 - (\partial_z \Omega)^2 \right] \\ \partial_z k &= \frac{\rho}{2f^2} (\partial_\rho f \partial_z f + \partial_\rho \Omega \partial_z \Omega) .\end{aligned}\quad (4.6)$$

Se puede notar que este último par de ecuaciones para k puede ser integrado por cuadraturas una vez que se han resuelto las ecuaciones para las funciones métricas f y Ω , razón por la cual estas son las funciones métricas relevantes y sus correspondiente ecuaciones (4.4, 4.5) son llamadas las ecuaciones principales. Podemos considerar a partir de estos resultados el caso particular en que el campo gravitacional es estático, lo que significa que no se puede distinguir en qué dirección rota el sistema, es decir, es invariante bajo la transformación $\varphi \rightarrow -\varphi$. Esto debe reflejarse en la métrica asociada al elemento de línea (4.2) en el hecho de que no deben existir términos fuera de la diagonal para la métrica en lo que se refiere a sus componentes asociadas a la coordenada t . El elemento de línea para el caso estático se puede obtener a partir de (4.2) considerando la función métrica $\omega = 0$,

$$ds^2 = f dt^2 - \frac{1}{f} \left[e^{2k} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2 \right], \quad (4.7)$$

mientras que con esa misma elección para dicha función métrica en las ecuaciones de campo (4.4, 4.6) nos lleva a las correspondientes ecuaciones del campo estático,

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho f) + \partial_z^2 f - \frac{1}{f} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_z f)^2 \right] = 0, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}\partial_\rho k &= \frac{\rho}{4f^2} \left[(\partial_\rho f)^2 - (\partial_z f)^2 \right] \\ \partial_z k &= \frac{\rho}{2f^2} (\partial_\rho f \partial_z f) .\end{aligned}\quad (4.9)$$

las cuales se pueden escribir de manera conveniente si introducimos una redefinición para la función métrica $f = e^{2\psi}$,

$$\partial_\rho^2 \psi + \frac{1}{\rho} \partial_\rho \psi + \partial_z^2 \psi = 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}\partial_\rho k &= \rho \left[(\partial_\rho \psi)^2 - (\partial_z \psi)^2 \right], \\ \partial_z k &= 2\rho \partial_\rho \psi \partial_z \psi.\end{aligned}\quad (4.11)$$

De manera que podemos reconocer la ecuación principal para el campo estático (4.10) como la ecuación lineal de Laplace en coordenadas cilíndricas para la función métrica ψ . Se puede encontrar la solución más general que cumpla la condición de ser asintóticamente plana [68],

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n(\cos \theta), \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad (4.12)$$

con P_n los polinomios de Legendre y a_n constantes arbitrarias, las cuales determinan los distintos espacios-tiempo dentro de esta familia de soluciones. La solución general para k es,

$$k = - \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{a_n a_m (m+1)(n+1)}{(n+m+2)(\rho^2 + z^2)^{\frac{n+m+2}{2}}} (P_n P_m - P_{n+1} P_{m+1}). \quad (4.13)$$

Estas coordenadas no son las más apropiadas para ciertas soluciones, particular-

mente aquellas que presentan un grado de simetría mayor como los casos en que existe simetría esférica, es decir, la solución de Schwarzschild. Trataremos más adelante este caso en coordenadas que explotan la simetría esférica dentro del contexto de los mapeos armónicos generalizados con el objetivo de aplicar el método de la cuantización topológica para encontrar el espectro topológico.

4.2. Representación como mapeos armónicos

En esta sección revisaremos brevemente la forma en que pueden representarse los campos gravitacionales estacionarios con simetría axial como mapeos armónicos y veremos que no es posible hacer una representación tal que el espacio base del mapeo armónico sea de dimensión dos. Esta imposibilidad no nos permite hacer una analogía con la teoría de cuerdas para representar dichos sistemas, por lo que será necesario hacer una generalización de los mapeos armónicos de manera que sea posible lograrlo. La acción de Einstein-Hilbert tiene como (densidad) Lagrangiano $\sqrt{|g|}R$ que calculado a partir de la métrica para los campos estacionarios con simetría axial \mathbf{g} contiene términos de segundo orden en las derivadas de la métrica con elemento de línea (4.2),

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|}R = \frac{e^{2k}\rho}{f} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2 f e^{2k}} \left(4f^2 \rho^2 (\partial_z^2 k + \partial_\rho^2 k) - 2f \rho^2 (\partial_\rho^2 f + \partial_z^2 f) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3\rho^2 [(\partial_\rho f)^2 + (\partial_z f)^2] - 2(\partial_\rho f)^2 - f^4 [(\partial_\rho \omega)^2 + (\partial_z^2 \omega)^2] \right) \right]. \quad (4.14) \end{aligned}$$

Estos términos de segundo orden en las derivadas de la métrica g_{ab} no deben aparecer en la acción para los campos gravitacionales debido a que las ecuaciones de campo son de segundo orden en las derivadas de g_{ab} . Sin embargo, estos términos son lineales y pueden ser eliminados al expresarlos como divergencias totales

obteniendo,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{st} = 2\partial_\rho k + \frac{1}{2} \frac{f^2}{\rho} \left[(\partial_\rho \omega)^2 + (\partial_z \omega)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_z f)^2 \right]. \quad (4.15)$$

Este procedimiento se puede hacer en general para cualquier caso de campo gravitacional, expresando todo en términos de las componentes de la métrica y de los símbolos de Christoffel los cuales contienen derivadas hasta de primer orden de g_{ab} [39], de manera que la expresión para el Lagrangiano “reducido” o de segundo orden es,

$$\sqrt{|g|} \Delta = \sqrt{|g|} g^{ab} \left(\Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c - \Gamma_{ab}^d \Gamma_{dc}^c \right). \quad (4.16)$$

Regresaremos más adelante a esta expresión cuando encontremos el Lagrangiano que describe el campo gravitacional de Schwarzschild.

Podemos observar que este Lagrangiano posee “coordenadas” ignorables en las funciones ω y k , por lo que es posible aplicar el procedimiento de Routh [27] de manera que $\partial_\rho k$ no aparecerá más en la acción,

$$\mathcal{L}'_{st} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{f^2} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_z f)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[(\partial_\rho \omega)^2 + (\partial_z \omega)^2 \right], \quad (4.17)$$

con lo que obtenemos un Lagrangiano que solamente depende de dos de las funciones métricas que a su vez solamente dependen de dos de las coordenadas del espacio-tiempo, $f = f(\rho, z)$ y $\omega = \omega(\rho, z)$. Introduciendo las redefiniciones (4.3) en el Lagrangiano que hemos encontrado (4.17), llegamos a una expresión para \mathcal{L}_{st} en términos de $\Omega(\rho, z)$,

$$\mathcal{L}_{st} = \frac{\rho}{2f^2} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_z f)^2 + (\partial_\rho \Omega)^2 + (\partial_z \Omega)^2 \right], \quad (4.18)$$

con lo cual la integral de acción se puede expresar como,

$$S_{st} = \int \mathcal{L}_{st} dt d\varphi d\rho dz. \quad (4.19)$$

Hemos definido los mapeos armónicos en el apéndice B y los encontramos en el capítulo anterior como la estructura matemática sobre la que descansa la acción de Polyakov como un caso especial de dichos mapeos. La acción para un mapeo armónico es,

$$S = \int d^m x \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab}(x) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}, \quad (4.20)$$

donde x^a , $a = 1, \dots, m$, son las coordenadas para la variedad base M con métrica $\gamma(x)$ y X^μ , $\mu = 1, \dots, n$, son las coordenadas para la variedad de fondo N con métrica $\mathbf{G}(X)$. Las ecuaciones para X^μ que se siguen de la variación de esta acción son,

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_b \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \right) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \gamma^{ab} \partial_a X^\nu \partial_b X^\lambda = 0, \quad (4.21)$$

con $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ los símbolos de Christoffel asociados a la métrica \mathbf{G} del espacio de fondo N . La acción "reducida" para campos gravitacionales estacionarios con simetría axial (4.19) se puede plantear utilizando estos mapeos armónicos haciendo las siguientes elecciones. Consideramos el espacio base M como el espacio-tiempo estacionario con simetría axial descrito por la métrica de Weyl-Lewis-Papapetrou (4.2),

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & -f\omega \\ 0 & -\frac{e^{2k}}{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{2k}}{f} & 0 \\ -f\omega & 0 & 0 & f\omega^2 - \frac{\rho^2}{f} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

mientras que para el espacio de fondo N consideramos un espacio de dimensión

dos con coordenadas $X^\mu = (f, \Omega)$ y con una métrica \mathbf{G} dada por,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2f^2} \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2. \quad (4.23)$$

Incluyendo esta información en la acción de los mapeos armónicos (4.20) se reproduce el Lagrangiano del campo estacionario con simetría axial (4.18) y en consecuencia también la acción (4.19). Las ecuaciones de campo principales (4.4, 4.5) se pueden obtener ya sea por variación directa de la acción, es decir, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos f y Ω con el Lagrangiano (4.18) o a partir de las ecuaciones que definen el mapeo armónico (4.21) con las métricas que recién hemos establecido tanto para el espacio base (4.22) como para el espacio de fondo (4.23). Este resultado fue primero obtenido por Ernst [22] dando lugar a lo que se conoce como la representación de Ernst, (mientras que Matzner y Misner llegan a un resultado similar en la reducción a un nuevo Lagrangiano para obtener las ecuaciones principales de los campos axisimétricos estacionarios aunque en un nuevo conjunto de funciones métricas [43]). Cabe mencionar que se puede entender esta representación como un modelo sigma no lineal en el que el espacio de fondo es el espacio cociente $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ y el Lagrangiano se puede expresar en términos de los generadores del grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ [16].

El Lagrangiano reducido (4.18) depende solamente de dos campos gravitacionales que a su vez dependen únicamente de dos de las coordenadas del espacio-tiempo ρ y z , esto sugiere buscar una representación como mapeo armónico en la cual el espacio base M sea una variedad de dimensión dos. Sin embargo, este Lagrangiano depende explícitamente de la coordenada del espacio-tiempo ρ , es decir, $\frac{\partial \mathcal{L}_{st}}{\partial \rho} \neq 0$, y es posible mostrar que no existe métrica de dos dimensiones para el espacio base M tal que aporte este factor de ρ al Lagrangiano. Veamos esto, si

consideramos una métrica general en dos dimensiones,

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

donde las tres funciones h_1 , h_2 y h_3 dependen de las coordenadas (ρ, z) ; busquemos la forma diagonal de la métrica, la cual queda determinada por la siguiente expresión en su versión contravariante,

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} (h_1 + h_3 + A)^{-1} & 0 \\ 0 & (h_1 + h_3 - A)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

con $A = \sqrt{(h_3 - h_1)^2 + h_2^2}$ y determinante $\det \gamma_{ab} = \gamma = (h_1 + h_3)^2 - A^2$. De manera que la combinación $\sqrt{|\gamma|}\gamma^{ab}$ que dentro del Lagrangiano del mapeo armónico podría proveer del factor ρ toma la siguiente forma,

$$\sqrt{|\gamma|}\gamma^{ab} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

donde $B = \frac{(h_1+h_3)-A}{(h_1+h_3)+A}$. Utilizando esta última expresión para $\sqrt{|\gamma|}\gamma^{ab}$ en la acción (4.20) y tomando como campos en el espacio de fondo $X^\mu = (f, \Omega)$ obtenemos un Lagrangiano con la siguiente forma,

$$L' = B(\partial_\rho f)^2 G_{ff} + B^{-1}(\partial_z f)^2 G_{ff} + B(\partial_\rho \Omega)^2 G_{\Omega\Omega} + B^{-1}(\partial_z \Omega)^2 G_{\Omega\Omega}, \quad (4.27)$$

a partir del cual podemos concluir que la única manera de reproducir la forma que tiene el Lagrangiano (4.18) en lo que se refiere a las derivadas de las funciones

métricas respecto a las coordenadas del espacio-tiempo es si $B = 1$, por lo que $\sqrt{|\gamma|}\gamma^{ab} = \delta^{ab}$. Esto nos muestra que es imposible incluir el factor de ρ mediante una métrica dos dimensional para el espacio base de manera que se reproduzca el Lagrangiano para los campos estacionarios con simetría axial. Esto es, no existe una representación $(2 \rightarrow n)$ como mapeo armónico que reproduzca este Lagrangiano. Sin embargo veremos que es posible, mediante la definición de los mapeos armónicos generalizados lograr tal representación, absorbiendo el factor ρ en la métrica del espacio de fondo \mathbf{G} , lo cual analizaremos en la siguiente sección.

4.3. Mapeos armónicos generalizados

Como mencionamos en la sección anterior, representar campos gravitacionales estacionarios con simetría axial mediante un mapeo armónico que tenga como espacio base una variedad de dimensión dos es imposible, por lo tanto es necesario definir lo que hemos llamado mapeos armónicos generalizados. En esta sección procederemos a dar tal definición, analizar sus propiedades y encontrar el caso particular que describe los campos axisimétricos estacionarios.

Consideremos dos variedades diferenciales \mathcal{M} y \mathcal{N} de dimensión m y n respectivamente y un mapeo suave entre ellas $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Asignemos coordenadas x^a con $a = 1, \dots, m$ para \mathcal{M} y X^μ con $\mu = 1, \dots, n$ para \mathcal{N} y las métricas $\gamma = \gamma(x)$ y $\mathbf{G} = \mathbf{G}(X, x)$ respectivamente. Un mapeo armónico generalizado $(m \rightarrow n)$ se define como aquel mapeo suave $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ que satisface las ecuaciones

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\partial_b \left(\sqrt{|\gamma|}\gamma^{ab}\partial_a X^\mu \right) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \gamma^{ab} \partial_a X^\nu \partial_b X^\lambda + G^{\mu\sigma}\gamma^{ab} \partial_a X^\nu \partial_b G_{\sigma\nu} = 0, \quad (4.28)$$

las cuales se obtienen a partir de la variación respecto a X^μ de la acción generali-

zada,

$$S_{gen} = \int d^m x \mathcal{L}_{gen}, \quad (4.29)$$

con \mathcal{L}_{gen} el (densidad) Lagrangiano dado por,

$$\mathcal{L}_{gen} = \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab}(x) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X, x). \quad (4.30)$$

La generalización consiste en que hemos introducido una dependencia explícita de las coordenadas del espacio base x^a en la métrica para el espacio de fondo $\mathbf{G} = \mathbf{G}(X, x)$, lo cual hace que las ecuaciones de campo (4.28) tengan un término extra respecto a las ecuaciones de los mapeos armónicos (4.21) y refleja la existencia de una “interacción” entre el espacio base \mathcal{M} y el espacio de fondo \mathcal{N} . Es importante mencionar que los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ asociados a la métrica del espacio de fondo $G_{\mu\nu}$ se calculan de la manera usual, es decir, sin tomar en cuenta la dependencia explícita en las coordenadas x^a . A diferencia del caso de los mapeos armónicos en el que basta tener como espacio de fondo $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, es decir, $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0$, para obtener un sistema lineal, para los mapeos armónicos generalizados esto no es válido pues se tendría que contradecir la suposición de que $\partial_b G_{\mu\nu} \neq 0$. Aunque también es posible obtener un sistema de ecuaciones lineales, las condiciones que se deben satisfacer son más complicadas,

$$\gamma^{ab} \left(\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \partial_b X^\lambda + G^{\mu\sigma} \partial_b G_{\sigma\nu} \right) \partial_a X^\nu = 0. \quad (4.31)$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden no lineal, cuyas soluciones nos darán como resultado mapeos armónicos generalizados lineales, sin embargo, el sistema es bastante complicado por lo que encontrar este tipo de mapeos no es inmediato.

4.3.1. Simetrías de la acción

A continuación analizaremos las propiedades de simetría que tiene la acción de los mapeos armónicos generalizados cuando consideramos transformaciones que involucran tanto al espacio base \mathcal{M} como al espacio de fondo \mathcal{N} y las transformaciones que se inducen en los correspondientes tensores métricos. Empezaremos con las transformaciones sobre el espacio de fondo \mathcal{N} , tomando en cuenta los difeomorfismos,

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = X'^\mu(X). \quad (4.32)$$

Estos no afectan la métrica del espacio base $\gamma_{ab}(x)$ debido a que esta no depende de dichas coordenadas, mientras que la métrica del espacio de fondo $G_{\mu\nu}(X, x)$ y las derivadas parciales de los campos X^μ se transforman de la manera usual, es decir, el tensor métrico \mathbf{G} se transforma como un tensor covariante de rango dos,

$$G'_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial X'^\nu} G_{\alpha\beta}, \quad (4.33)$$

y para las derivadas parciales de los campos X^μ ,

$$\partial_a X'^\mu = \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\alpha} \partial_a X^\alpha. \quad (4.34)$$

De manera que tomando en cuenta como se transforman estas cantidades podemos verificar que el Lagrangiano de los mapeos armónicos generalizados (4.30) es invariante bajo los difeomorfismos sobre el espacio de fondo \mathcal{N} .

Para la invariancia bajo difeomorfismos o reparametrización del espacio base \mathcal{M} , $x'^a = x'^a(x)$ dedicaremos un poco más de atención debido a la dependencia explícita de la métrica del espacio de fondo en las coordenadas del espacio base,

$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(X, x)$. El elemento de volumen $\sqrt{|\gamma|} d^m x$ es invariante bajo estas transformaciones por definición, es decir, así ha sido construido, de manera que nuestro análisis lo podemos enfocar al resto de los factores del Lagrangiano. Para este efecto introducimos la notación,

$$h_{ab}(X, x) = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X, x), \quad (4.35)$$

de manera que este elemento del integrando de la acción se puede expresar como $\gamma^{ab}(x)h_{ab}(X, x)$. Sabemos que la forma contravariante de la métrica del espacio base γ^{ab} transforma como un tensor de rango $(2, 0)$,

$$\gamma'^{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} \gamma^{cd}, \quad (4.36)$$

de manera que la expresión $\gamma^{ab}h_{ab}(X, x)$ se transformará como un escalar solamente si el objeto $h_{ab}(X, x)$ se transforma como un tensor de rango $(0, 2)$. Esto es, la acción de los mapeos armónicos generalizados será invariante bajo los difeomorfismos sobre el espacio base si $h_{ab}(X, x)$ son las componentes de un tensor $(0, 2)$, el cual corresponderá a la métrica inducida sobre el espacio base \mathcal{M} por el mapeo $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Entonces el tensor \mathbf{h} cuyas componentes están dadas por $h_{ab}(X, x)$ será $\mathbf{h} = X^* \mathbf{G}$, donde X^* es el pullback asociado al mapeo $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Consideremos la versión infinitesimal del difeomorfismo,

$$x^a \rightarrow x'^a = x^a + \epsilon \zeta^a(x), \quad (4.37)$$

con ϵ un parámetro infinitesimal, bajo el cual los tensores métricos se transforman

de la siguiente forma,

$$\gamma_{ab} \rightarrow \gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \epsilon \mathcal{L}_\xi \gamma_{ab} = \gamma_{ab} + \epsilon (\partial_c \gamma_{ab} \bar{\zeta}^c + \gamma_{cb} \partial_a \bar{\zeta}^c + \gamma_{ac} \partial_b \bar{\zeta}^c), \quad (4.38)$$

y

$$\gamma^{ab} \rightarrow \gamma'^{ab} = \gamma^{ab} + \epsilon \mathcal{L}_\xi \gamma^{ab} = \gamma^{ab} + \epsilon (\partial_c \gamma^{ab} \bar{\zeta}^c - \gamma^{cb} \partial_c \bar{\zeta}^a - \gamma^{ac} \partial_c \bar{\zeta}^b), \quad (4.39)$$

las cuales tienen como versión finita la expresión (4.36) para el tensor contravariante y

$$\gamma'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \gamma_{cd}, \quad (4.40)$$

para la versión covariante. Este difeomorfismo sobre el espacio base induce sobre los campos X^μ y la métrica $G_{\mu\nu}(X, x)$ las siguientes transformaciones hasta el primer orden en ϵ ,

$$X^\mu(x) \rightarrow X^\mu(x') = X^\mu(x) + \epsilon \partial_c X^\mu \bar{\zeta}^c(x), \quad (4.41)$$

y para la métrica del espacio de fondo,

$$G_{\mu\nu}(X(x), x) \rightarrow G_{\mu\nu}(X(x'), x')$$

$$G_{\mu\nu}(X(x'), x') = G_{\mu\nu}(X(x), x) + \epsilon \left[\partial_\lambda G_{\mu\nu} \partial_c X^\lambda \bar{\zeta}^c + \partial_c G_{\mu\nu} \bar{\zeta}^c \right]. \quad (4.42)$$

Con el objetivo de encontrar la manera en que se transforma (4.35) bajo los difeomorfismos (4.37) definimos el siguiente objeto geométrico,

$$h = h_{ab}(X, x) dx^a dx^b = G_{\mu\nu}(X(x), x) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu dx^a dx^b, \quad (4.43)$$

e identificando $dX^\mu(x) = \partial_a X^\mu dx^a$ podemos expresarlo también como,

$$h = G_{\mu\nu}(X(x), x) dX^\mu(x) dX^\nu(x). \quad (4.44)$$

Utilizando (4.41) y (4.42) en esta última expresión (4.44), encontramos el efecto del difeomorfismo (4.37),

$$\begin{aligned} h' &= G_{\mu\nu}(X(x'), x') dX^\mu(x') dX^\nu(x') \\ &= \left[G_{\mu\nu}(X(x), x) + \epsilon(\partial_\lambda \partial_c X^\lambda \zeta^c + \partial_c G_{\mu\nu} \zeta^c) \right] \times \\ &\quad \times d[X^\mu(x) + \epsilon \partial_c X^\mu \zeta^c] d[X^\nu(x) + \epsilon \partial_d X^\nu \zeta^d], \end{aligned}$$

y conservando términos hasta el primer orden en ϵ y después de alguna manipulación algebraica obtenemos,

$$\begin{aligned} h' &= \left\{ G_{\mu\nu}(X(x), x) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \epsilon \left[\partial_c [G_{\mu\nu}(X(x), x) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu] \zeta^c + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G_{\mu\nu}(X(x), x) \partial_c X^\mu \partial_b X^\nu \partial_a \zeta^c + G_{\mu\nu}(X(x), x) \partial_a X^\mu \partial_c X^\nu \partial_b \zeta^c \right] \right\} dx^a dx^b. \quad (4.45) \end{aligned}$$

En esta última expresión podemos identificar a las componentes h_{ab} (4.35), de manera que tenemos,

$$h' = [h_{ab}(X(x), x) + \epsilon(\partial_c h_{ab} \zeta^c + h_{cb} \partial_a \zeta^c + h_{ac} \partial_b \zeta^c)]. \quad (4.46)$$

Mediante (4.38) podemos reconocer que $h_{ab}(X(x), x)$ cambia bajo los difeomorfismos infinitesimales sobre el espacio base como,

$$h_{ab} \rightarrow h'_{ab} = h_{ab} + \epsilon \mathcal{L} h_{ab}, \quad (4.47)$$

de manera que podemos considerar que bajo un difeomorfismo finito las componentes $h_{ab}(X(x), x)$ se transforman como un tensor de rango (0,2) (4.40), es decir, h_{ab} (4.35) se pueden considerar las componentes de la métrica inducida \mathbf{h} sobre el espacio base \mathcal{M} debida al mapeo $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ a través del pullback X^* , $\mathbf{h} = X^*\mathbf{G}$. Con esto probamos la invariancia de la acción (4.29, 4.30) de los mapeos armónicos generalizados bajo los difeomorfismos o reparametrización del espacio base. Esta simetría de la acción de los mapeos armónicos generalizados es un reflejo de la invariancia bajo difeomorfismos presente en la acción de Einstein-Hilbert; esto es, la invariancia bajo difeomorfismos se reduce a la invariancia respecto a transformaciones de las coordenadas del espacio-tiempo.

Si el espacio base es de dimensión dos, existen otro tipo de transformaciones que involucran a la métrica γ llamadas transformaciones de Weyl las cuales dejan invariante la acción de los mapeos armónicos, y representan un reescalamiento hecho sobre el espacio base \mathcal{M} dado por,

$$\gamma_{ab} \rightarrow \gamma'_{ab} = e^{\sigma(x)} \gamma_{ab}, \quad (4.48)$$

mientras que para la versión contravariante tenemos,

$$\gamma'^{ab} = e^{-\sigma(x)} \gamma^{ab}, \quad (4.49)$$

y la raíz del determinante de la métrica $\gamma = \det(\gamma_{ab})$ es,

$$\sqrt{|\gamma'|} = e^{\sigma(x)} \sqrt{|\gamma|}. \quad (4.50)$$

Al igual que en el caso de los mapeos armónicos, en la acción de los mapeos armónicos generalizados el único elemento afectado por este tipo de transforma-

ciones es $\sqrt{|\gamma|}\gamma^{ab}$. De manera que, utilizando (4.49, 4.50) podemos determinar que dicho producto,

$$\sqrt{|\gamma|}\gamma^{ab} = \sqrt{|\gamma'|}\gamma'^{ab}, \quad (4.51)$$

es invariante bajo las transformaciones de Weyl, por lo que la acción (4.29) es invariante bajo transformaciones de Weyl sobre el espacio base en el caso de ser de dimensión dos. Vemos que estas tres simetrías están presentes tanto en los mapeos armónicos como en la generalización de ellos que hemos definido, y en particular son simetrías de la acción de Polyakov que describe la dinámica en la teoría de cuerdas [34].

4.3.2. Leyes de conservación

Tanto en la acción de los mapeos armónicos generalizados (4.29,4.30) como en las ecuaciones de movimiento que se siguen de ella (4.28) se ha hecho notar la dependencia explícita de la métrica del espacio de fondo $G_{\mu\nu}(X(x), x)$ en las coordenadas del espacio base x^a , que a fin de cuentas es lo que caracteriza a esta generalización. Esto da cuenta de una interacción entre el espacio base \mathcal{M} y el espacio de fondo \mathcal{N} y se hace evidente en tales expresiones y ecuaciones. Pero más allá de eso, tal interacción debe modificar las leyes de conservación para estos sistemas físicos descritos desde la perspectiva de los mapeos armónicos generalizados. A partir de la densidad Lagrangiana (4.30) y utilizando las ecuaciones de movimiento podemos expresar las leyes de conservación generalizadas como,

$$\nabla_b \tilde{T}_a^b = -\frac{\partial \mathcal{L}_{gen}}{\partial x^a}, \quad (4.52)$$

con \tilde{T}_a^b el tensor de energía momento canónico definido por la siguiente expresión,

$$\tilde{T}_a^b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b X^\mu)} \partial_a X^\mu - \delta_a^b \mathcal{L}, \quad (4.53)$$

que para el caso de los mapeos armónicos generalizados toma la siguiente forma,

$$\tilde{T}_a^b = 2\sqrt{|\gamma|} G_{\mu\nu} \left(\gamma^{bc} \partial_a X^\mu \partial_c X^\nu - \frac{1}{2} \delta_a^b \gamma^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \right). \quad (4.54)$$

De esta manera vemos que la ley de conservación usual se cumple cuando el Lagrangiano no depende explícitamente de las coordenadas del espacio base. Aun en el caso en que la métrica del espacio base sea plana $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$ o $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$, el Lagrangiano sigue teniendo una dependencia explícita en las coordenadas del espacio base a través de la métrica del espacio de fondo $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(X(x), x)$, lo cual constituye la característica que distingue los mapeos armónicos generalizados de los usuales y refleja la interacción entre el espacio base y de fondo. Podemos introducir una definición alternativa de tensor de energía momento, la cual es más general y se deriva a partir de la variación del Lagrangiano respecto de la métrica del espacio base en su versión contravariante,

$$T_{ab} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \gamma^{ab}}, \quad (4.55)$$

que para el caso de los mapeos armónicos generalizados toma la siguiente forma,

$$T_{ab} = \sqrt{|\gamma|} G_{\mu\nu} \left(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \right). \quad (4.56)$$

Para el caso de los mapeos armónicos generalizados se cumple que las definiciones para los tensores de energía momento difieren por un factor de dos, $T_{ab} =$

$2\tilde{T}_{ab}$, de manera que la ley de conservación generalizada se puede expresar también a través de,

$$\nabla_b T_a^b = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a}. \quad (4.57)$$

Como es usual en estas expresiones se ha incluido la información de las ecuaciones de movimiento para llegar a esta ley de conservación generalizada. Para el caso en que el espacio base es de dimensión dos es fácil mostrar que el tensor de energía momento tiene traza cero, $T_a^a = 0$, tal y como sucede en el caso particular de la acción de Polyakov para la teoría de cuerdas en el contexto de mapeos armónicos o modelos sigma.

4.3.3. Mapeos armónicos generalizados y campos estacionarios con simetría axial

Hemos visto que a través de los mapeos armónicos ($4 \rightarrow 2$) se pueden representar los campos gravitacionales estacionarios con simetría axial a partir de un espacio base de dimensión cuatro y con un espacio de fondo de dimensión dos, limitándonos solamente a las ecuaciones de campo principales. Sin embargo, a pesar de que las funciones métricas solamente dependen de dos variables del espacio-tiempo, a partir de los mapeos armónicos es imposible representar los campos axisimétricos estacionarios partiendo de un espacio base dos dimensional. Es a través de los mapeos armónicos generalizados que podemos lograr una representación de estos campos gravitacionales a partir de un espacio base de dimensión dos, de manera que tenemos una semejanza con la teoría de cuerdas. Para esto consideremos un mapeo armónico generalizado ($2 \rightarrow 2$), con coordenadas $x^a = (\rho, z)$ para el espacio base \mathcal{M} y $X^\mu = (f, \Omega)$ para el espacio de fondo \mathcal{N} . Escogiendo las

métricas de estos espacios como,

$$\gamma_{ab}(x) = \delta_{ab}, \quad a, b = \rho, z; \quad G_{\mu\nu}(X(x), x) = \frac{\rho}{2f^2} \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = f, \Omega, \quad (4.58)$$

el Lagrangiano de los mapeos armónicos generalizados (4.30) reproduce el Lagrangiano reducido de los campos estacionarios con simetría axial (4.18) y las ecuaciones de campo que se siguen a partir de las ecuaciones para los mapeos armónicos generalizados (4.28) coinciden con las ecuaciones principales para estos campos (4.4, 4.5). A partir de la definición del tensor de energía momento (4.56) podemos verificar la ley de conservación generalizada para este caso. Las componentes de T_{ab} son,

$$T_{\rho\rho} = -T_{zz} = \frac{\rho}{4f^2} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_\rho \Omega)^2 - (\partial_z f)^2 - (\partial_z \Omega)^2 \right], \quad (4.59)$$

$$T_{\rho z} = \frac{\rho}{2f^2} (\partial_\rho f \partial_z f + \partial_\rho \Omega \partial_z \Omega). \quad (4.60)$$

Para la coordenada ρ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\rho b}}{dx^b} &= \frac{dT_{\rho\rho}}{d\rho} + \frac{dT_{\rho z}}{dz} \\ &= \frac{\rho}{2f^2} \left(\partial_\rho^2 f \partial_\rho f + \partial_\rho^2 \Omega \partial_\rho \Omega + \partial_z^2 f \partial_\rho f + \partial_z^2 \Omega \partial_\rho \Omega \right) - \\ &\quad - \frac{\rho}{2f^3} \left[(\partial_\rho f)^3 + \partial_\rho f (\partial_\rho \Omega)^2 - \partial_\rho f (\partial_z f)^2 - \partial_\rho f (\partial_z \Omega)^3 + \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + 2\partial_\rho f (\partial_z f)^2 + 2\partial_z f \partial_\rho \Omega \partial_z \Omega \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4f^2} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_\rho \Omega)^2 - (\partial_z f)^2 - (\partial_z \Omega)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Tomando la ecuación de campo (4.4) multiplicándola por $\frac{\rho}{2f^2} \partial_\rho f$ y sumándola a la

ecuación de campo (4.5) multiplicada por $\frac{\rho}{2f^2}\partial_\rho\Omega$ obtenemos,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2f^2} \left[\partial_\rho^2 f \partial_\rho f + \partial_\rho^2 \Omega \partial_\rho \Omega + \partial_z^2 f \partial_\rho f + \partial_z^2 \Omega \partial_\rho \Omega \right] + \\ & - \frac{\rho}{2f^3} \left[(\partial_\rho f)^3 + (\partial_z f)^2 \partial_\rho f - (\partial_\rho \Omega)^2 \partial_\rho f - (\partial_z \Omega)^2 \partial_\rho f + \right. \\ & \quad \left. + 2 (\partial_\rho \Omega)^2 \partial_\rho f + 2 \partial_z f \partial_\rho \Omega \partial_z \Omega \right] + \\ & \quad + \frac{1}{2f^2} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_\rho \Omega)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Sustituyendo esta ecuación (4.62) en la relación (4.61) llegamos a la siguiente expresión,

$$\frac{dT_{\rho b}}{dx^b} = -\frac{1}{4f^2} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_\rho \Omega)^2 + (\partial_z f)^2 + (\partial_z \Omega)^2 \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}_{gen}}{\partial \rho}. \quad (4.63)$$

Mientras que para la coordenada z tenemos,

$$\frac{dT_{zb}}{dx^b} = \frac{dT_{z\rho}}{d\rho} - \frac{dT_{\rho\rho}}{dz}, \quad (4.64)$$

donde hemos utilizado que $T_{zz} = -T_{\rho\rho}$. Haciendo un desarrollo similar al anterior, simplemente sustituyendo en esta ocasión la suma de la ecuación (4.4) multiplicada por $\frac{\rho}{2f^2}\partial_z f$ y la ecuación (4.5) multiplicada por $\frac{\rho}{2f^2}\partial_z \Omega$ en la expresión anterior obtenemos que,

$$\frac{dT_{zb}}{dx^b} = \frac{dT_{\rho z}}{d\rho} - \frac{dT_{\rho\rho}}{dz} = 0. \quad (4.65)$$

Observando la expresiones (4.59) y (4.60) para las componentes del tensor de energía momento podemos reconocer que $T_{\rho\rho} = \partial_\rho k$ y que $T_{\rho z} = \partial_z k$, de forma que la ley de conservación para la coordenada z (4.65) se satisface idénticamente, siendo la condición de integrabilidad para la función métrica k . Así que, a pesar de

haber sido eliminada esta función métrica del Lagrangiano mediante una transformada de Legendre (procedimiento de Routh) la información sobre la función k permanece en el formalismo de los mapeos armónicos generalizados a través de la ley de conservación generalizada.

Hemos representado los campos gravitacionales estacionarios con simetría axial como mapeos armónicos generalizados ($2 \rightarrow 2$) escogiendo las métricas para el espacio base y de fondo como en (4.58). El hecho de tener un espacio base de dimensión dos nos sugiere cierta semejanza de esta representación con la teoría de cuerdas; sin embargo, existe esta característica de la interacción entre los dos espacios involucrados en el mapeo y además la métrica del espacio base es Euclidiana en contraposición a la métrica Minkowskiana que se tiene en el caso de teoría de cuerdas. Esto es posible disfrazarlo utilizando una rotación de Wick en alguna de las coordenadas, por ejemplo, $\tau \rightarrow i\rho$ de manera que podemos considerar el espacio base \mathcal{M} como la hoja de mundo parametrizada por un “tiempo” τ y con z la coordenada que recorre a la cuerda. El espacio de fondo \mathcal{N} jugará el papel de un espacio-tiempo generalizado sobre el cual se mueve la cuerda generalizada, y cuya métrica conformalmente plana depende explícitamente del tiempo. En la siguiente sección introduciremos el concepto de extensión dimensional aplicado al espacio de fondo \mathcal{N} , lo cual nos permitiera tener mapeos armónicos generalizados tipo ($2 \rightarrow D$) con D la dimensión del espacio de fondo sin afectar la estructura de las ecuaciones principales que determinan los campos gravitacionales, de manera que la semejanza será un poco mayor.

Dentro de la familia de los campos axisimétricos estacionarios aquellos que son asintóticamente planos tienen un interés físico pues representan soluciones externas de fuentes localizadas del campo gravitacional. Esta condición la podemos

escribir para las funciones métricas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x^a \rightarrow \infty} f &= 1 + O\left(\frac{1}{x^a}\right), \\
 \lim_{x^a \rightarrow \infty} \omega &= c_1 + O\left(\frac{1}{x^a}\right), \\
 \lim_{x^a \rightarrow \infty} \Omega &= O\left(\frac{1}{x^a}\right),
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

con c_1 una constante que se puede fijar convenientemente a cero. Esto deja a la expresión (4.2) en este límite como el elemento de línea de un espacio plano descrito en coordenadas tipo cilíndricas. Estas condiciones se pueden expresar en términos de condiciones de frontera para los campos X^μ del espacio de fondo \mathcal{N} a través de sus derivadas; si consideramos que las coordenadas del espacio-tiempo tienen el dominio, $\rho \in [0, \infty)$ y $z \in (-\infty, \infty)$, entonces tenemos,

$$\begin{aligned}
 \partial_\rho X^\mu(\rho, -\infty) &= 0 = \partial_\rho X^\mu(\rho, \infty), \\
 \partial_z X^\mu(\rho, -\infty) &= 0 = \partial_z X^\mu(\rho, \infty),
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Estas representan condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann para las cuerdas abiertas con puntos extremos situados en infinito. Así que se puede interpretar, si consideramos a ρ como un “tiempo” como una cuerda que se extiende desde menos infinito hasta infinito en la dirección z y cuyos extremos terminan en D -branas dependiendo de que tipo de condiciones se fijen para las distintas direcciones del espacio de fondo.

4.4. Extensión dimensional y el caso estático

En esta sección abordaremos la extensión dimensional para el espacio de fondo \mathcal{N} de los mapeos armónicos generalizados a la cual hemos hecho alusión anteriormente. Esta extensión dimensional tiene dos finalidades, la primera nos permite representar los campos gravitacionales axisimétricos estacionarios como mapeos armónicos generalizados ($2 \rightarrow D$) aumentando el contenido de campos en el espacio de fondo sin que esto afecte la dinámica de los campos f y Ω involucrados en las ecuaciones principales (4.4, 4.5), haciendo más clara la analogía con la teoría de cuerdas. La segunda razón para introducir este concepto es poder representar como mapeos armónicos generalizados a los campos gravitacionales estáticos, para los cuales tenemos que $\Omega = 0$ de manera que el espacio de fondo es de dimensión uno, dejándonos sin la posibilidad de tener una métrica asociada a \mathcal{N} . El introducir la extensión dimensional para describir campos estáticos es necesaria a pesar de que existen los mapeos armónicos *usuales* para el caso de un espacio de fondo de dimensión uno, $\dim N = 1$, debido a que estos tienen asociados ecuaciones lineales para el campo asociado al espacio de fondo N [45] y la ecuación de campo principal para f en el caso estático (4.8) es no lineal. En el caso de los mapeos armónicos generalizados un espacio de fondo \mathcal{N} de dimensión uno nos regresa al caso de los mapeos armónicos usuales, siendo obsoleta la generalización al no contar el espacio de fondo con una métrica que dependa explícitamente de las coordenadas del espacio base.

Al hacer una extensión dimensional en el espacio de fondo \mathcal{N} se debe considerar que es importante no afectar las ecuaciones de campo principales que describen el espacio-tiempo estacionario con simetría axial (4.4, 4.5), por lo cual el contenido de campos y las funciones métricas que serán parte de la extensión dimensio-

nal cumplirán ciertas condiciones de manera que los campos gravitacionales sean propiamente descritos, es decir, debe ser tal que las ecuaciones que satisfacen los campos f y Ω no sean modificadas por las dimensiones extras que se incluyen.

Para esto consideremos un mapeo armónico generalizado ($m \rightarrow D$) con x^a coordenadas para el espacio base \mathcal{M} y para el espacio de fondo \mathcal{N} denotaremos separadamente las coordenadas X^μ , $\mu = 1, 2$, para el sector de los campos físicos; y X^A , $A = 3, \dots, D$, para el sector que corresponde a la extensión dimensional. Las respectivas métricas serán $\gamma = \gamma(x)$ y $\mathbf{G} = \mathbf{G}(X^\mu, X^A, x)$, de manera que a partir de la estructura que hemos definido como mapeos armónicos generalizados, es decir de la acción (4.29) con la apropiada inclusión de los campos que componen la extensión, las ecuaciones de campo tienen la misma forma (4.28). El contenido de los campos gravitacionales estacionarios con simetría axial estará en el sector del espacio de fondo correspondiente a las componentes de la métrica $G_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2$, y las componentes de la métrica G_{AB} , $A, B = 3, \dots, D$ representarán el sector de la extensión dimensional. Considerando el conjunto de ecuaciones que describen los mapeos armónicos generalizados (4.28) es evidente que las ecuaciones para los campos X^μ contienen información del sector de la extensión dimensional a través de los campos extendidos X^A y sus derivadas $\partial_a X^A$. Para evitar esto y dejar el sector gravitacional intacto debemos imponer ciertas restricciones sobre las componentes de la métrica del espacio de fondo, siendo estas,

$$G_{\mu A} = 0, \quad \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X^A} = 0, \quad \frac{\partial G_{AB}}{\partial X^\mu} = 0. \quad (4.68)$$

Vemos que para que el sector gravitacional no se vea afectado por la extensión dimensional, las componentes de la métrica en el sector de la extensión no deben depender de los campos del sector gravitacional, las componentes del sector gra-

vitacional no pueden depender de los campos extendidos y que las componentes del sector mixto deben ser cero, es decir, las que tienen un índice del sector gravitacional y otro del sector extendido. De esta forma los campos del sector gravitacional X^μ seguirán satisfaciendo las ecuaciones de campo (4.28), mientras que los correspondientes al sector de la extensión dimensional cumplirán,

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_b \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^A \right) + \Gamma_{BC}^A \gamma^{ab} \partial_a X^B \partial_b X^C + G^{AB} \gamma^{ab} \partial_a X^C \partial_b G_{BC} = 0, \quad (4.69)$$

con Γ_{BC}^A los símbolos de Christoffel asociados al sector de la extensión dimensional de la métrica de fondo \mathbf{G} . De esta manera podemos extender los mapeos armónicos generalizados ($2 \rightarrow 2$) a mapeos tipo ($2 \rightarrow D$) sin afectar la descripción de los campos gravitacionales axisimétricos estacionarios. Cabe mencionar que debido a las condiciones impuestas sobre la métrica de fondo, el tensor de energía momento $T_{ab} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \gamma^{ab}}$ se puede separar en dos partes, una que corresponde al sector gravitacional y la otra al sector de la extensión dimensional, $T_{ab} = T_{ab}(X^\mu, x) + T_{ab}(X^A, x)$, mientras que la ley de conservación generalizada (4.57) se satisface para ambas partes.

En el caso de espacios-tiempo estacionarios con simetría axial podemos considerar la extensión dimensional. Tomamos al igual que en (4.58) salvo que para la métrica del espacio de fondo debemos considerar, además del sector gravitacional que aparecen en tales expresiones, el sector de la extensión dimensional. De acuerdo a

las condiciones que encontramos en (4.68) la métrica del espacio de fondo \mathcal{N} es,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2f^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{2f^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & G_{33}(X^A, x) & \cdots & G_{3D}(X^A, x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & G_{D3}(X^A, x) & \cdots & G_{DD}(X^A, x) \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

donde debemos exigir que el determinante de la submatriz que compone el sector de la extensión dimensional sea distinto de cero, $\det(G_{AB}) \neq 0$, para evitar que la matriz completa sea degenerada. De esta forma el Lagrangiano queda separado en dos partes, una correspondiente al sector gravitacional y otro al de la extensión dimensional,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{st} = \frac{\rho}{2f^2} \left[(\partial_\rho f)^2 + (\partial_z f)^2 + (\partial_\rho \Omega)^2 + (\partial_z \Omega)^2 \right] + \\ + \left[\partial_\rho X^A \partial_\rho X^B + \partial_z X^A \partial_z X^B \right] G_{AB}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

mientras que las ecuaciones principales para el campo gravitacional siguen siendo las mismas (4.4, 4.5) y tenemos un conjunto de ecuaciones que deben satisfacer los campos correspondientes a la extensión dimensional,

$$\begin{aligned} (\partial_\rho^2 + \partial_z^2) X^A + \Gamma_{BC}^A \left(\partial_\rho X^B \partial_\rho X^C + \partial_z X^B \partial_z X^C \right) + \\ + G^{AC} \left(\partial_\rho X^B \partial_\rho G_{BC} + \partial_z X^B \partial_z G_{BC} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

En el caso de que el sector de la extensión dimensional sea $G_{AB} = \eta_{AB}$ o $G_{AB} = \delta_{AB}$ tenemos, a partir de la expresión anterior, un conjunto de campos X^A armóni-

cos que satisfacen las siguientes ecuaciones,

$$\left(\partial_\rho^2 + \partial_z^2\right) X^A = 0. \quad (4.73)$$

Como ya hemos mencionado, el caso de los campos gravitacionales estáticos escapa de la representación tanto de mapeos armónicos ($4 \rightarrow 2$) así como de los mapeos armónicos generalizados ($2 \rightarrow 2$), debido a que para estos el límite $\Omega = 0$ hace del espacio de fondo \mathcal{N} un espacio de dimensión uno para el cual la métrica no está definida siquiera. La extensión dimensional nos permite representar mediante los mapeos armónicos generalizados a los campos estáticos, de forma que al introducir un campo extra X podemos recuperar la no linealidad de las ecuaciones. La mínima y más simple extensión dimensional que se puede hacer se logra escogiendo la métrica del espacio base como $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$ y la correspondiente al espacio de fondo como,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2f^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

Con esta elección recuperamos la ecuación para la función métrica f , (4.8) y tenemos una ecuación como (4.73) para el campo de la extensión dimensional X que resulta ser una función armónica. Hemos visto que para poder representar los campos gravitacionales axisimétricos estacionarios como mapeo armónico partiendo de una variedad de dimensión dos, es necesario definir los mapeos armónicos generalizados los cuales tienen como característica la interacción entre el espacio base \mathcal{M} y el espacio de fondo \mathcal{N} ; y para poder representar el caso de campo estáticos es necesario recurrir a lo que hemos llamado una extensión dimensional. Cabe mencionar que este formalismo se puede utilizar para representar los campos gravitacionales que posean dos vectores de Killing que no conmutan, en [29]

se presentan el caso de ondas gravitacionales de Einstein-Rosen y el caso de los modelos cosmológicos de Gowdy el caso no polarizado T^3 . En la siguiente sección retomaremos este tipo de representaciones y plantearemos la configuración clásica rumbo a la cuantización topológica y la obtención del espectro topológico. Estudiaremos el campo estático físico, esto es, la solución de Schwarzschild; la representaremos en coordenadas adaptadas a la simetría esférica que posee esta solución, estableceremos la configuración clásica de este sistema y calcularemos el espectro topológico. También abordaremos esta tarea utilizando como configuración clásica la variedad Riemanniana (M, \mathbf{g}) en cuatro dimensiones que constituye la solución a las ecuaciones de Einstein de la forma usual, es decir partiendo de la acción de Einstein-Hilbert.

4.5. Espectro topológico para los mapeos armónicos generalizados

En esta sección vamos a plantear la configuración clásica para la representación de los campos estacionarios con simetría axial como mapeos armónicos generalizados, esto con la finalidad de construir el haz fibrado principal correspondiente para establecer la estructura geométrica necesaria para la cuantización topológica, en particular para el cálculo del espectro topológico. Abordaremos en específico dentro de los casos de los campos estáticos, la solución de Schwarzschild. Al igual que en el caso de la teoría de la cuerda bosónica la cual tiene como punto de partida los mapeos armónicos, existen para los campos gravitacionales representados como mapeos armónicos generalizados distintas posibilidades para plantear la configuración clásica; sin embargo, veremos que en este caso las variedades Riemannianas involucradas carecen de significado físico, y más aun, el espacio de

fondo, debido a la generalización que hemos hecho, tiene una métrica peculiar. También calcularemos el espectro topológico para la solución de Schwarzschild a partir de la configuración clásica usual, es decir, utilizando la variedad Riemanniana en cuatro dimensiones que es solución a las ecuaciones de Einstein que se obtienen a partir de la acción de Einstein-Hilbert y con la conexión de Levi-Civita [54].

En la representación de los campos gravitacionales como mapeos armónicos generalizados existen básicamente tres variedades Riemannianas que podrían considerarse como punto de partida para la configuración clásica: el espacio base (\mathcal{M}, γ) , el espacio de fondo $(\mathcal{N}, \mathbf{G})$ y el espacio que resulta de encajar la variedad base en el espacio de fondo con la métrica inducida por el mapeo $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $(\mathcal{M}, \mathbf{h})$ con $\mathbf{h} = X^*\mathbf{G}$. En el contexto de los mapeos armónicos generalizados, las dos primeras variedades Riemannianas son totalmente artificiales, en el sentido de que sus métricas se ajustan de manera que las ecuaciones para el campo gravitacional sean aquellas que buscamos; por lo que no tienen ningún sentido físico y de la misma forma quedan descartadas para constituir la configuración clásica del sistema. La tercera variedad, encajada en el espacio de fondo mediante el mapeo $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y sobre la cual se tiene la métrica inducida por el pullback $\mathbf{h} = X^*\mathbf{G}$, contiene la información sobre la dinámica de los campos via la acción de los mapeos armónicos generalizados. Análogamente al caso de la cuerda bosónica que tratamos en el capítulo anterior, esta variedad Riemanniana resulta ser el escenario natural para plantear la configuración clásica. En lo que se refiere a las simetrías a considerar, resulta igualmente natural tomar los difeomorfismos sobre esta variedad encajada como el grupo de simetría de la teoría física; estos coinciden con la invariancia en la descripción de los campos gravitacionales bajo la acción de los difeomorfismos sobre la variedad del espacio-tiempo. De manera

similar podemos introducir una base ortonormal sobre la variedad de manera que el grupo de difeomorfismos se reduzca al grupo $SO(2)$. Así la configuración clásica para el caso de los campos gravitacionales axisimétricos estacionarios representados mediante los mapeos armónicos generalizados es el par $(\mathcal{M}_{\mathbf{g}}, \omega)$ donde $\mathcal{M}_{\mathbf{g}}$ es el espacio base encajado mediante el mapeo X en el espacio de fondo y ω es la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica \mathbf{h} que toma valores en el álgebra de Lie $so(2)$.

Una vez que hemos establecido la configuración clásica podemos construir el haz fibrado principal; reduciendo el grupo de simetría de los difeomorfismos sobre la variedad encajada al grupo ortogonal, podemos considerar a $SO(2)$ como el grupo de estructura que es isomorfo a la fibra estándar. Siendo así podemos plantear el siguiente teorema de manera que la construcción del haz fibrado quede bien establecida.

Teorema. Un campo gravitacional con dos vectores de Killing que conmutan descrito mediante un mapeo armónico generalizado $(2 \rightarrow D)$ se puede representar mediante un haz fibrado principal único \mathcal{P} , con el espacio base encajado en el espacio de fondo mediante el mapeo $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, con $(\mathcal{M}, \mathbf{h})$, $\mathbf{h} = X^*\mathbf{G}$ como variedad base, $SO(2)$ el grupo de estructura isomorfo a la fibra estándar, y ω la conexión que toma valores en el álgebra de Lie $so(2)$.

La prueba de este teorema sigue la misma línea que los casos que hemos presentado en los capítulos anteriores. Una vez establecida la existencia del haz fibrado principal que representa a los campos gravitacionales descritos mediante los mapeos armónicos generalizados podemos proceder al cálculo del espectro topológico para casos específicos. El tratamiento es similar al caso de la cuerda bosónica, de hecho hemos interpretado al campo gravitacional axisimétrico estacionario como una cuerda bosónica generalizada. De esta forma nos estaremos refiriendo

a los resultados del capítulo anterior.

También calcularemos el espectro topológico a partir de la configuración clásica en cuatro dimensiones usual, partiendo de la variedad Riemanniana (M, \mathbf{g}) que describe el espacio-tiempo y es solución a las ecuaciones de Einstein las cuales se siguen de la acción de Einstein-Hilbert. La configuración clásica en este caso es el par $(M_{\mathbf{g}}, \omega')$ con ω' la conexión asociada a la métrica \mathbf{g} que toma valores en el álgebra de Lie $so(1, 3)$. En este caso hemos reducido el grupo de difeomorfismos sobre el espacio-tiempo al grupo ortogonal $SO(1, 3)$ mediante la introducción de una base ortonormal. El teorema que establece el haz fibrado principal ha sido establecido en [54] y básicamente nos dice que el haz fibrado principal \mathcal{P}' se constituye de la variedad Riemanniana que representa el espacio-tiempo como espacio base y como grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar) el grupo ortogonal $SO(1, 3)$.

Siendo así los dos escenarios, el cálculo del espectro topológico será hecho a través de la clase característica de Euler. A continuación describiremos el caso de campos gravitacionales estáticos en coordenadas adaptadas a la simetría esférica con el objetivo de representar la solución de Schwarzschild como un mapeo armónico generalizado y a partir de ahí encontrar la métrica inducida y finalmente encontrar la forma de Euler para este caso. Haremos lo mismo para el caso en cuatro dimensiones partiendo de la solución de Schwarzschild, encontrando la forma de Euler correspondiente.

4.5.1. Configuración clásica en dos dimensiones para la solución de Schwarzschild

Hemos visto que a partir de la extensión dimensional es posible representar como mapeos armónicos generalizados los campos estáticos, en particular podemos estudiar la solución de Schwarzschild, la cual describe el campo gravitacional exterior de una fuente estática con simetría esférica. Hasta ahora se han descrito los campos gravitacionales estacionarios con simetría axial en las coordenadas de Weyl (4.2), sin embargo para finalmente abordar el caso de Schwarzschild será conveniente cambiar a un sistema de coordenadas que se adapte a la simetría esférica.

Con base a lo mencionado la configuración clásica para los mapeos armónicos generalizados y en particular para el caso de Schwarzschild será el par (\mathcal{M}_g, ω) , es decir, el espacio base dotado con la métrica inducida y la conexión asociada a ella. El caso de Schwarzschild no puede ser tratado como vimos en la sección 4.2 ya que si calculamos el escalar de curvatura a partir de la métrica encontramos, después de eliminar los términos de segundo orden, que la densidad Lagrangiana es de primer orden y lineal en las derivadas de los campos por lo que no es posible representarlo como un mapeo armónico. Sin embargo, es posible construir un Lagrangiano cuadrático en la derivada de primer orden a partir del cual se obtenga la ecuación de campo para el campo gravitacional que describe la solución de Schwarzschild,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (4.75)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

En principio debería considerarse el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (4.76)$$

que es la forma general a la que se puede reducir mediante consideraciones de simetría, esto es, espacio-tiempo estático con simetría esférica. Sin embargo, la densidad Lagrangiana que se obtiene al eliminar los términos de segundo orden en las derivadas de los campos resulta ser lineal en las derivadas de primer orden, por lo que es imposible establecer la representación como mapeo armónico a partir de dicha densidad Lagrangiana. Aunque cabe aclarar que tal densidad Lagrangiana da lugar a las ecuaciones que tienen como solución la métrica de Schwarzschild. Se podría a partir de las ecuaciones de segundo orden para f y h analizar las condiciones de Helmholtz adaptadas a campos para determinar si existe una densidad Lagrangiana cuadrática a primer orden.

De manera que para representar este caso como mapeo armónico generalizado se puede partir de la siguiente densidad Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = r^2 A^2 F^2(\vartheta) \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + r(\partial_r X)^2 + \frac{1}{r}(\partial_\vartheta X)^2, \quad (4.77)$$

donde X es el campo con unidades de longitud que se introduce mediante la extensión dimensional y la función $F(\vartheta)$ es una función que depende exclusivamente de ϑ mientras que A^2 es una constante con unidades de longitud, pero por lo demás estas dos últimas son arbitrarias. La presencia de la función arbitraria $F(\vartheta)$ no es necesaria para reproducir la ecuación de campo para f , sin embargo en lo que se refiere al cálculo del espectro topológico si se requiere tal función pues de lo contrario la uno-forma de conexión y por lo tanto la curvatura es cero o la métrica inducida es degenerada.

Las ecuaciones de campo para $f(r)$ y para $X(r, \vartheta)$ que siguen de la variación de la

acción con esta densidad Lagrangiana son,

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} = 0, \quad (4.78)$$

$$\partial_r^2 X + \frac{1}{r} \partial_r X + \frac{1}{r^2} \partial_\vartheta^2 X = 0, \quad (4.79)$$

como podemos observar X es un campo armónico.

La representación como mapeo armónico generalizado se obtiene con la métrica para el espacio base \mathcal{M} ,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

mientras que para el espacio de fondo \mathcal{N} tenemos,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} rA^2F^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.81)$$

Con estas métricas a nuestra disposición podemos encontrar la métrica inducida sobre la variedad base \mathcal{M} por el mapeo X , $\mathbf{h} = X^*\mathbf{G}$, cuyas componentes se encuentran de la siguiente manera,

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}, \quad (4.82)$$

siendo de manera explícita para este caso,

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} rA^2F^2(\vartheta)(df)^2 + (\partial_r X)^2 & \partial_r X \partial_\vartheta X \\ \partial_r X \partial_\vartheta X & (\partial_\vartheta X)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.83)$$

con $d_r f \equiv \frac{df}{dr}$.

Introduciendo una base ortonormal de manera que la métrica local sea plana δ_{ab} mediante una base dual dada por,

$$\begin{aligned}\theta^1 &= dX = \partial_r X dr + \partial_\vartheta X d\vartheta, \\ \theta^2 &= -\sqrt{r} A F(\vartheta) d_r f dr,\end{aligned}\tag{4.84}$$

es posible calcular la dos-forma de curvatura que finalmente nos permitirá calcular la clase característica de Euler. Mediante las ecuaciones de estructura de Cartan obtenemos que la única componente independiente de la uno-forma de conexión es,

$$\omega^1_2 = -\frac{\sqrt{r} A d_\vartheta F d_r f}{\partial_\vartheta X} dr,\tag{4.85}$$

y la componente de la dos-forma de curvatura es,

$$R^1_2 = \sqrt{r} A d_r f \left[\frac{d_\vartheta^2 F}{\partial_\vartheta X} - \frac{\partial_\vartheta^2 X d_\vartheta F}{(\partial_\vartheta X)^2} \right] dr \wedge d\vartheta.\tag{4.86}$$

La clase característica de Euler es básicamente esta dos-forma de curvatura en el caso de dos dimensiones,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2\pi} R^1_2,\tag{4.87}$$

que para este caso de acuerdo a (4.86) es,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{r} A d_r f \left[\frac{d_\vartheta^2 F}{\partial_\vartheta X} - \frac{\partial_\vartheta^2 X d_\vartheta F}{(\partial_\vartheta X)^2} \right] dr \wedge d\vartheta.\tag{4.88}$$

Es importante hacer notar el papel que juega la función $F(\vartheta)$ en esta representación de la solución de Schwarzschild. Siendo que la función depende solamente

de ϑ no tiene ningún efecto a nivel clásico pues reproduce la ecuación de campo para la función métrica $f(r)$, mientras que para la cuantización topológica cada elección de una forma particular de la función modifica el espectro topológico, aunque cabe mencionar que siempre y cuando sea una función integrable solamente modificará el resultado por una constante multiplicativa; de esta manera la elección de esta función no impone condición alguna sobre el resultado y se puede elegir a conveniencia.

En lo que respecta al campo de la extensión dimensional $X(r, \vartheta)$ encontramos que para la representación de la solución de Schwarzschild constituye un campo de norma. Esto en el sentido que es posible probar que a partir de la solución más general, cualquier caso particular que sea una serie convergente reproduce el mismo resultado para el espectro topológico [51]. De manera que uno puede escoger el campo X siempre y cuando satisfaga su ecuación (4.79). De tal forma que podemos interpretar esto como una libertad de norma en el sector de la extensión dimensional y podemos escoger convenientemente el campo de la extensión X sin afectar el resultado para el espectro topológico.

Es posible hacer una elección mínima de la función $F(\vartheta)$ y del campo X que nos permita calcular de manera inmediata un espectro. Sean $F(\vartheta) = \frac{1}{2}\vartheta^2$ y $X(r, \vartheta) = B\vartheta + C$ con B y C constantes con unidades de longitud. Con esta elección la forma de Euler es,

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{A}{2\pi B} \sqrt{r} d_r f dr \wedge d\vartheta, \quad (4.89)$$

mientras que $d_r f = \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{2M}{r^2}$ y así

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{A M}{B\pi} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} dr \wedge d\vartheta. \quad (4.90)$$

Integrando esta dos-forma sobre la variedad \mathcal{M} obtenemos el espectro topológico,

$$\int_{\mathcal{M}} e(\mathcal{P}) = \frac{4MA}{B} \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \Big|_{r_0}^{r_1} = n, \quad (4.91)$$

que tomando los límites $r_1 \rightarrow \infty$ y $r_0 \rightarrow 2M$ nos deja con la siguiente expresión,

$$-\frac{4MA}{B} \frac{1}{\sqrt{2M}} = n. \quad (4.92)$$

Las constantes A y B las podemos escoger de manera que el resultado coincida con el que se obtiene a partir de la configuración clásica en cuatro dimensiones y que a continuación presentaremos. Estas dos constantes deben cumplir la relación,

$$\frac{A}{B} = -\frac{\Delta t}{8\sqrt{2}M^{3/2}}. \quad (4.93)$$

Por ejemplo escogiendo dentro de todas las posibilidades $A = \frac{\Delta t}{4M^{\frac{1}{2}}}$ y $B = -2^{3/2}M$ obtenemos el siguiente espectro topológico,

$$\frac{\Delta t}{4M} = n. \quad (4.94)$$

Notamos que la constante M que aparece en la elección de A y B es la única opción que tenemos de manera que estas dos últimas tengan las unidades que les corresponden, siendo que para el caso de Schwarzschild M es el único parámetro físico a través del cual podemos asignar unidades a las constantes por determinar.

A continuación obtendremos el espectro topológico a partir de una configuración clásica en cuatro dimensiones y que consideramos es la configuración clásica apropiada para la cuantización topológica. Después discutiremos los resultados y exponaremos algunas conclusiones sobre los resultados para el espectro topológico

de Schwarzschild representado como mapeo armónico generalizado.

4.5.2. Configuración clásica en cuatro dimensiones

La configuración clásica en cuatro dimensiones es el par (M_g, ω') constituido por la variedad Riemanniana solución a las ecuaciones de Einstein y la conexión asociada a la métrica cuyo elemento de línea es,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.95)$$

A partir de esta configuración clásica se puede construir el haz fibrado principal el cual representa a este campo gravitacional. La fibra que representa la simetría de la teoría bajo estudio en este caso la constituye el grupo de difeomorfismos, el cual es posible reducir localmente al grupo de Lorentz $SO(1,3)$ al introducir para la descripción una tétrada ortonormal cuya métrica local sea la del espacio de Minkowski. En este caso es posible probar el siguiente teorema planteado por Patiño y Quevedo [54] el cual solamente citaremos,

Teorema. Una solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío puede ser representada por un único haz fibrado principal P de 10 dimensiones con el espacio-tiempo M como el espacio base, el grupo de Lorentz como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar) y una conexión con valores en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz.

A partir de este resultado es inmediato plantear el cálculo del espectro topológico como lo hemos venido haciendo mediante el invariante asociado al haz fibrado principal \mathcal{P}' . Considerando $SO(1,3)$ como el grupo de estructura para el haz fibrado principal, el espectro topológico se encuentra a partir de la integral de la

clase característica de Euler. Se puede encontrar una expresión en términos de la curvatura del espacio base dada por,

$$e(\mathcal{P}') = \frac{(-1)^m}{2^{2m} \pi^m m!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2m}} R^{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge R^{i_{2m-1} i_{2m}}, \quad (4.96)$$

donde se considera una métrica local de Minkowski con signatura 2 para el espacio base y $k = 2m$ para $SO(k)$. Partiendo del elemento de línea (4.95) y escogiendo la base dual para la métrica local como,

$$\theta^0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt, \quad \theta^1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr, \quad \theta^2 = rd\vartheta, \quad \theta^3 = rd\phi, \quad (4.97)$$

las componentes independientes de la curvatura que toma valores en el álgebra de lie $so(1,3)$ son,

$$\begin{aligned} R^{01} &= \frac{2M}{r^3} \theta^0 \wedge \theta^1, & R^{02} &= -\frac{M}{r^3} \theta^0 \wedge \theta^2, & R^{03} &= -\frac{M}{r^3} \theta^0 \wedge \theta^3 \\ R^{12} &= -\frac{M}{r^3} \theta^1 \wedge \theta^2, & R^{13} &= -\frac{M}{r^3} \theta^1 \wedge \theta^3, & R^{23} &= \frac{2M}{r^3} \theta^2 \wedge \theta^3. \end{aligned} \quad (4.98)$$

De manera que a partir de (4.96) tenemos que,

$$e(\mathcal{P}') = \frac{1}{4\pi^2} \left[R^{01} \wedge R^{23} - R^{02} \wedge R^{13} + R^{03} \wedge R^{12} \right], \quad (4.99)$$

y utilizando las expresiones (4.98) obtenemos,

$$e(\mathcal{P}') = \frac{3}{2\pi^2} \frac{M^2}{r^6} \theta^0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3, \quad (4.100)$$

que en términos de la base coordenada es,

$$e(\mathcal{P}') = \frac{3}{2\pi^2} \frac{M^2}{r^4} \operatorname{sen} \vartheta dt dr d\vartheta d\phi. \quad (4.101)$$

Integrando sobre una subvariedad compacta de \mathcal{M} obtenemos,

$$\begin{aligned} e(\mathcal{P}') &= \frac{3M^2}{2\pi^2} \int \frac{1}{r^4} \operatorname{sen} \vartheta dt dr d\vartheta d\phi \\ &= \frac{6M^2}{\pi} \int \frac{1}{r^4} dt dr \\ &= \frac{6M^2}{\pi} \int dt \left(-\frac{1}{3} r^{-3} \right) \Big|_{r_0}^{r_1} \\ &= -2M^2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$(4.103)$$

donde en el segundo renglón consideramos el factor 4π de la integración sobre ϑ y ϕ y en el último consideramos un intervalo de tiempo finito Δt , que representado el intervalo de tiempo considerado por este tipo de observador.

Tomando el límite cuando $r_1 \rightarrow \infty$ y $r_0 \rightarrow 2M$ tenemos finalmente la expresión para el espectro topológico,

$$\frac{1}{4M} \Delta t = n. \quad (4.104)$$

En lo que se refiere a la integración en estas coordenadas es necesario aclarar que hemos considerado solamente la región donde el sistema de coordenadas (t, r, ϑ, ϕ) tiene un buen comportamiento, de manera que utilizamos solamente una carta para cubrir la región de integración y no es necesario definir una partición de la unidad. Esto es posible si la región de integración en lo que respecta a la coordenada r se toma fuera del radio de Schwarzschild $r = 2M$. La posibi-

lidad de considerar así el dominio de integración reside en el hecho de que esta región no constituye una singularidad física y solamente es una consecuencia del sistema de coordenadas que se utiliza, caso contrario a la singularidad que tiene este espacio en $r = 0$. Este último punto sí es una singularidad física y debe ser removido para efectos de esta descripción. Por lo tanto, mediante una deformación por retracción (ver apéndice A) es posible considerar la región fuera del horizonte como la región de integración sin que esto tenga alguna consecuencia en el cálculo del espectro topológico, ya que las dos variedades topológicas son homeomorfas y como consecuencia sus grupos de cohomología son isomorfos.

Es importante mencionar que este resultado también se puede obtener a partir de exigir la condición de compatibilidad a la conexión en el traslape de las distintas cartas que se utilicen para cubrir la variedad M o en el caso de utilizar una sola carta el exigir que la conexión esté bien definida a lo largo de toda la variedad [60].

Es importante señalar que existe un espectro para la masa del agujero negro de Schwarzschild a partir del formalismo canónico complementado con una regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld [36]. Tal condición lleva al resultado de que el área del horizonte tiene un conjunto de eigenvalores equidistantes, $A \propto n$ para $n \in \mathbb{N}$ y por ende la masa tiene un espectro proporcional a la raíz cuadrada de n , $M_n \propto \sqrt{n}$.

Como hemos visto, el espectro topológico se puede reproducir a partir de la representación de los campos gravitacionales como mapeos armónicos generalizados, inclusive encontrando en el sector de la extensión dimensional una libertad de norma que nos da la flexibilidad de escoger este campo extra de manera que sea sencillo encontrar el resultado. Aunque en el caso de los campos gravitacionales axisimétricos estacionarios no es necesario recurrir a la extensión dimensional es

posible que incluyendo este sector podamos volver a encontrar una libertad de norma como para el caso de Schwarzschild. Esta cuestión y el cálculo de espectros topológicos mediante la representación de mapeos armónicos generalizados para casos más generales está bajo investigación en este momento [51].

El que las configuraciones clásicas mediante mapeos armónicos generalizados y la descripción natural en cuatro dimensiones no sean equivalentes, en el sentido de que no existe un isomorfismo entre ellas, no descarta la posibilidad de que esta representación sea válida clásicamente pues como vimos para el caso de los campos gravitacionales estacionarios con simetría axial (y en general los campos que poseen dos vectores de Killing que conmutan [29]) no solamente se recuperan las ecuaciones de campo principales sino que a través de las ecuaciones de conservación generalizadas también se recupera la información de la función métrica que se encuentra por cuadraturas y como hemos visto para el caso de Schwarzschild, no hay ambigüedad en la obtención del espectro topológico a pesar de la extensión dimensional.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos aplicado el formalismo de la cuantización topológica en lo que concierne al aspecto de los espectros topológicos. Para la construcción del haz fibrado principal se definió la configuración clásica de un sistema físico como el par (\mathcal{M}, ω) , con \mathcal{M} una variedad diferencial y ω una conexión, siendo único este par en el sentido de que dos variedades conectadas por un isomorfismo con la misma conexión se consideran la misma configuración clásica. A partir de esto se hace la construcción del haz fibrado principal que representa al sistema físico bajo estudio. Se establece la existencia y unicidad de tal representación mediante los correspondientes teoremas para cada caso. Una vez representado el sistema físico mediante un haz fibrado principal definimos el espectro topológico mediante sus clases características y el invariante topológico asociado llamado número característico. Con esto se tiene la base para aplicar el procedimiento para el cálculo del espectro topológico en distintos sistemas físicos.

Se han abordado tres casos principalmente. El primero es sobre los sistemas mecánicos con un número finito de grados de libertad, para el cual ha sido necesario

recurrir al principio variacional de Maupertuis para encontrar la configuración clásica apropiada. Se obtuvieron espectros topológicos para el caso del oscilador armónico en una y dos dimensiones. En el primer caso obtuvimos,

$$\frac{akq_0}{2E - kq_0^2} = n, \quad (4.105)$$

con $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, E la energía del sistema, k la constante de restitución, a una constante con unidades de distancia y q_0 un parámetro constante relacionado con el punto de retorno para el oscilador. Este último parámetro se puede escoger de forma que se reproduce el espectro canónico para la energía, $E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, con $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Para el oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones tenemos,

$$\frac{E}{E - \frac{1}{2}kr_0^2} - 1 = n, \quad (4.106)$$

con k la constante de restitución y r_0 el valor de la coordenada radial en el límite de integración. Si el límite de integración lo consideramos hasta el punto de retorno menos el valor correspondiente a la energía del estado base se reproduce el resultado canónico. Para el caso anisotrópico el espectro topológico a partir de una sola estructura geométrica/topológica es,

$$E_n = 2 \frac{l_0 \omega_1 \omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} n + l_0, \quad (4.107)$$

con constantes de restitución dadas por $k_i = m\omega_i^2$ para $i = 1, 2$ y donde hemos considerado acercarnos a los puntos de retorno hasta una distancia correspondiente a la energía del estado base $l_0 = \frac{1}{2} (\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2)$. De este espectro es de destacar el comportamiento lineal que presenta, aunque el resultado partiendo de esta única estructura geométrico/topológica no es comparable.

Es importante mencionar que el resultado canónico se puede reproducir para este caso si consideramos cada uno de los osciladores desacoplados (o modos normales de oscilación) por separado con dos configuraciones clásicas como en el caso de un solo oscilador.

Para el caso del potencial central para una partícula con masa m y energía de ligadura E el resultado es,

$$\frac{E}{E_0} = -\frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1+n^2} - 1 \right), \quad (4.108)$$

donde $E_0 = \frac{m\alpha^2}{l^2}$ y α la constante de proporcionalidad en la energía potencial y l una constante de movimiento que identificamos con el momento angular. Esta es una discretización de los parámetros que describen al sistema en la que consideramos también al momento angular l y no solamente a la energía E .

Dichos resultados nos indican que, en el caso en que es posible hacer una comparación con los resultados del formalismo canónico, se establece una relación uno a uno con el espectro canónico, y para el oscilador armónico es posible reproducir los resultados exactamente. Vemos que surge de manera un tanto natural la noción de cuanto de energía en el caso del oscilador armónico. Dentro de esta formulación variacional de la mecánica clásica nos hemos restringido al caso de sistemas conservativos, para lo cual se imponen restricciones en la geometría que representa los sistemas. Una de las líneas de investigación a futuro será contemplar extensiones del principio de Maupertuis que nos permitan ir más allá de dichas restricciones, así como explorar el caso de sistemas no conservativos.

El segundo caso se refiere a la teoría de la cuerda bosónica. Aquí hemos encontrado muchas más dificultades técnicas para el cálculo de los espectros. No obstante, se ha logrado encontrar relaciones discretas entre los parámetros físicos que deter-

minan el sistema para casos particulares. Se ha logrado plantear el método para el caso en que la cuerda se propaga en un fondo con curvatura distinta de cero para abordar el problema tanto de forma exacta como perturbativamente. En un futuro se planea aplicar estos procedimientos a sistemas dentro de la teoría de cuerdas que sean más interesantes y relevantes desde el punto de vista físico. Como un ejemplo consideramos el caso de una cuerda bosónica cerrada propagándose sobre un fondo curvo, en particular el caso en que solamente dos modos de oscilación, uno derecho y uno izquierdo, tienen coeficientes distintos de cero en una dirección. El resultado para el espectro topológico es,

$$\frac{2k}{\pi} \frac{(k^2 + \omega_k^2)}{\omega_k} \ln \left[\frac{(r_k^1 + \tilde{r}_k^1)^2}{(r_k^1 - \tilde{r}_k^1)^2} \right] = n, \quad (4.109)$$

con k en número entero que indica el modo de oscilación, r_k^R y \tilde{r}_k^R las amplitudes de los modos de oscilación derecho e izquierdo, respectivamente; $n \in \mathbb{Z}^+$ y ω_k la frecuencia de oscilación que depende del espacio-tiempo de fondo que se considerara.

Los resultados que se obtuvieron han sido expresados tal cual se obtienen desde un punto de vista matemático y un primer análisis nos revela que existen relaciones de discretización que son consistentes e interesantes debido a que restringen los mapeos de encaje a un cierto subconjunto determinado por la relación de discretización entre los modos de oscilación que describe el espectro topológico. No obstante, aún queda abierta la cuestión de su relación con los espectros originados a partir del formalismo canónico, esto una vez que sea posible integrar el caso general. Por otro lado, actualmente en un artículo que está en preparación [4], exploramos consecuencias físicas que se pueden extraer de tales espectros.

En el último capítulo se han definido los mapeos armónicos generalizados, los

cuales nos permiten representar campos gravitacionales con dos vectores de Killing que conmutan como cuerdas generalizadas. Se estudian las propiedades de estos modelos generalizados y se aplica el método de la cuantización topológica para encontrar espectros. En específico se trata el caso de un espacio-tiempo de Schwarzschild el cual se puede incluir en la representación de mapeos armónicos generalizados considerando una extensión apropiada. Vemos que existe una libertad de norma en tal representación y que independientemente de la elección de dicha norma el espectro topológico coincide con el resultante de aplicar la cuantización topológica a este campo gravitacional desde la descripción usual a partir de la acción de Einstein-Hilbert, siendo el resultado,

$$\frac{\Delta t}{4M} = n, \quad (4.110)$$

con $n \in \mathbb{Z}^+$, M la masa asociada a la fuente de campo gravitacional y Δt un intervalo de tiempo finito producto de la integración de esta variable.

Esto nos muestra, al menos en este caso, que a partir de descripciones geométrico-topológicas tan distintas de un mismo sistema físico se obtiene el mismo espectro para un sistema físico. En este caso queda a futuro investigar qué es lo que sucede con campos gravitacionales en esta representación para los que en principio no es necesario extender los mapeos armónicos generalizados y que además son soluciones con alguna relevancia física, como las soluciones estacionarias con simetría axial o los modelos cosmológicos de Gowdy.

En general los resultados que hemos obtenido nos alientan a seguir con la construcción completa de la cuantización topológica ya que, en el caso en que ha sido posible comparar los espectros topológicos con aquellos provenientes del formalismo canónico, encontramos una relación uno a uno. También nos muestran que

queda un largo camino por recorrer en lo que se refiere a entender los resultados que dan los espectros topológicos. Más aun, hemos entendido que es necesario avanzar hacia la definición de estados y su evolución dinámica, que eventualmente nos darán más información sobre los espectros y completará el formalismo. Esto para buscar la posibilidad de considerar la cuantización topológica una teoría alternativa para entender la naturaleza discreta de los sistemas físicos.

APÉNDICE A

RETRACCIONES POR DEFORMACIÓN

Este apéndice está basado en su totalidad en [48].

Definición Dos lazos α y β con punto base en x_0 son homotópicos, $\alpha \simeq \beta$, si existe un mapeo continuo H de $[0, 1] \times [0, 1]$ a X ,

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \tag{A.1}$$

y H satisface:

$$H(t, 0) = \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (\text{A.2})$$

$$H(t, 1) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (\text{A.3})$$

$$H(0, s) = H(1, s) = x_0 \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (\text{A.4})$$

El mapeo H se llama una homotopía entre α y β .

Definición Un subconjunto A de un espacio topológico X se llama una retracción de X si existe un mapeo continuo, llamado retracción:

$$r : X \rightarrow A, \quad (\text{A.5})$$

tal que $r(a) = a$, para cualquier $a \in A$.

Definición Un subconjunto A de un espacio topológico X es una retracción por deformación de X si existe una retracción $r : X \rightarrow A$ y una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$H(x, 0) = x, \quad (\text{A.6})$$

$$H(x, 1) = r(x), \quad (\text{A.7})$$

$$H(a, t) = a, \quad a \in A, t \in [0, 1]. \quad (\text{A.8})$$

Teorema Si X es un espacio topológico conexo (path connected) y A una retracción por deformación de X , entonces el grupo fundamental $\pi_1(X, a)$ es isomorfo a $\pi_1(A, a)$, $a \in A$.

Teorema Si X y Y son dos espacios topológicos del mismo tipo de homotopía

entonces $H_p(X)$ es isomorfo a $H_p(Y)$ para todo p . Escribimos:

$$H_p(X) \cong H_p(Y). \quad (\text{A.9})$$

Una implicación inmediata de este teorema es que los grupo de homología son invariantes topológicos. Esto es debido a que espacios homeomórficos son necesariamente del mismo tipo de homotopía [48]

APÉNDICE B

MAPEOS ARMÓNICOS

Sean (\mathcal{M}, γ) y (\mathcal{N}, G) dos variedades diferenciales (pseudo)-Riemannianas de dimensión m y n respectivamente. Para la variedad base \mathcal{M} denotaremos las coordenadas mediante $\{x^a\}$, mientras que para la variedad de fondo (*target*) \mathcal{N} serán $\{X^\mu\}$; de manera que $\gamma_{ab} = \gamma_{ab}(x)$ y $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(X)$. Un mapeo armónico es un mapeo suave $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ($x \mapsto X$) de manera que las funciones X^μ están en términos de las coordenadas $\{x^a\}$ y satisfacen las ecuaciones de movimiento que resultan de la variación de la siguiente acción [45],

$$S = \int d^m x \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}, \quad (\text{B.1})$$

las cuales son,

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \partial_a \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma^{ab} \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta = 0. \quad (\text{B.2})$$

donde $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica del espacio de fondo $(\mathcal{N}, \mathbf{G})$. Variando la acción respecto a la métrica γ del espacio base obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones las cuales se pueden entender como un tensor de energía momento para la variedad $X(\mathcal{M})$,

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma^{ab}} = T_{ab} = 0, \quad (\text{B.3})$$

que de manera explícita son,

$$T_{ab} = \left(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \right) G_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Este tensor de energía momento se conserva en el sentido de que $\nabla_b T^{ab} = 0$ una vez que las ecuaciones de movimiento (B.2) son consideradas.

APÉNDICE C

CUANTIZACIÓN CANÓNICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

En este apéndice presentamos brevemente algunos aspectos de la cuantización canónica de la cuerda bosónica. En el procedimiento canónico de cuantización se trabaja ya sea en la norma nula o de manera covariante. Básicamente se imponen las relaciones de conmutación usuales (a un mismo tiempo) sobre las soluciones de los campos X^μ y los momentos (densidades) conjugados $P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ y $P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$, ya promovidos a operadores en la norma del cono de luz la única relación distinta de cero es,

$$[X^I(\tau, \sigma), P^{IJ}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad \text{y} \quad [x_0^-, p^+] = -i, \quad (\text{C.1})$$

en donde $\hbar = 1$. De la solución escrita en términos de los modos de oscilación

podemos encontrar las relaciones de conmutación asociadas a tales modos promovidos a operadores como consecuencia de las relaciones fundamentales expuestas en la relación anterior,

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \quad (\text{C.2})$$

con $\alpha_{-n}^I = \alpha_n^{I*} \rightarrow \alpha_n^{I\dagger}$ y de manera adicional $[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}$. De aquí la analogía con los osciladores armónicos desacoplados. Los modos de Virasoro transversales

$$L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^J \delta_{IJ}, \quad (\text{C.3})$$

escritos en términos de los modos de oscilación transversales se convierten en operadores cuando estos últimos son promovidos a operadores. Cuando $n \neq 0$ no existe ambigüedad en el ordenamiento de los operadores que determinan L_n^\perp debido a las relaciones de conmutación (C.2), mientras que para $n = 0$ se tiene que ordenar normalmente y de esto surge la constante de ordenamiento que se fija en -1. El álgebra que satisfacen estos operadores define lo que se conoce como el álgebra de Virasoro con extensión central, $[L_n^\perp, L_m^\perp] = (m - n)L_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$,

A partir de la relación $p^2 = -M^2 = 2p^+ p^- - p^I p^J \delta_{IJ} = \frac{1}{\alpha'}(L_0^\perp - 1) - p^I p^J \delta_{IJ}$ y de la constricción $L_0^\perp - 1 = 0$ sobre los estados físicos, usando que el hecho de que $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$, se encuentra que el operador de masa \hat{M} cuya acción sobre los estados da la correspondiente masa, está dada por [34],

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} (\hat{N}^\perp - 1), \quad \text{and} \quad \hat{N}^\perp = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^{+I} a_k^J \delta_{IJ} = \sum_{k=1}^{\infty} k N_k^\perp, \quad (\text{C.4})$$

con \hat{N} el operador de número en términos de los operadores de creación y aniquilación para cada dirección en el espacio-tiempo, $\alpha_n^\mu = \sqrt{n}a_n^\mu$. Así N_k cuenta cuántas veces un modo de oscilación aparece actuando como operador de creación sobre el estado base para construir el estado en cuestión en que se encuentra la cuerda.

Cabe notar que el proceso de aplicar las constricciones en el caso cuántico cambia respecto al caso clásico, debido a una anomalía es necesario imponer solamente la mitad de las constricciones, y para que la teoría sea consistente con la invariancia de Lorentz se deben de modificar los operadores de Virasoro de orden cero [34]. Para ver el tratamiento de este caso en la norma conforme ir al apéndice 3.

En lo que concierne al procedimiento canónico para la cuerda cerrada, de forma similar al caso de la cuerda abierta, las constricciones para la cuerda cerrada se aplican parcialmente para evitar una anomalía, es decir, se toman en cuenta solamente la “mitad” del conjunto de constricciones. Como la cuerda cerrada puede ser considerada como dos copias de cuerdas abiertas unidas tenemos entonces dos conjuntos de operadores de Virasoro, los cuales son las contrapartes cuánticas de las ecuaciones (3.64) cuando estas son promovidas a operadores. Estos operadores llevan a las ecuaciones de restricción cuando son aplicados a un estado $|\psi\rangle$, [34],

$$\begin{aligned}
 (L_0^\perp - 1)|\psi\rangle &= 0, \\
 (\tilde{L}_0^\perp - 1)|\psi\rangle &= 0, \\
 L_k^\perp|\psi\rangle &= 0 \quad k > 0, \\
 \tilde{L}_k^\perp|\psi\rangle &= 0 \quad k > 0.
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

A partir de las constricciones para L_0^\perp y \tilde{L}_0^\perp encontramos que el operador de masa

para el caso de la cuerda cerrada es,

$$\hat{M}^2 = \frac{2}{\alpha'} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{-k}^I \alpha_k^J + \tilde{\alpha}_{-k}^I \tilde{\alpha}_k^J) \delta_{IJ} - 2 \right), \quad (\text{C.6})$$

con $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^I \alpha_k^J \delta_{IJ} = \hat{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-k}^I \tilde{\alpha}_k^J \delta_{IJ} = \hat{\tilde{N}}$ los operadores de número, similares a los del caso de la cuerda abierta (C.4). Otra característica que debemos considerar para el caso de la cuerda cerrada cuántica es la condición de emparejamiento de niveles [34] $\hat{N} = \hat{\tilde{N}}$. Debido al hecho de que la combinación $L_0^\perp - \tilde{L}_0^\perp$ genera translaciones en el parámetro σ , lo cual es físicamente irrelevante para la cuerda cerrada, pues no importa dónde empieza o termina, la condición impuesta sobre los estados $(L_0 - \tilde{L}_0^\perp)|\psi\rangle = 0$, lleva a la mencionada relación de emparejamiento de niveles.

APÉNDICE D

MÉTODO DE PERTURBACIONES COMÓVILES

En este apéndice damos un breve recuento sobre la formulación covariante del tratamiento perturbativo para obtener soluciones hasta el primer orden para la teoría de la cuerda bosónica planteado por Larsen y Sánchez en [40, 66]. Partiendo de las ecuaciones de movimiento en la norma conforme,

$$-\partial_\tau^2 X^\mu + \partial_\sigma^2 X^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\tau X^\alpha \partial_\tau X^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\sigma X^\alpha \partial_\sigma X^\beta = 0, \quad (\text{D.1})$$

donde $\mu = 0, \dots, D - 1$ y $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ son los coeficientes de la conexión respecto a la métrica de fondo G . Considerando la expansión perturbativa alrededor de una

solución del centro de masa,

$$X^\mu(\tau, \sigma) \approx A^\mu(\tau) + \epsilon B^\mu(\tau, \sigma) + \epsilon^2 C^\mu(\tau, \sigma), \quad (\text{D.2})$$

tenemos que a orden cero se debe satisfacer la siguiente ecuación para A^μ ,

$$\partial_\tau^2 A^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau A^\beta = 0, \quad (\text{D.3})$$

mientras que para el primer orden,

$$-\partial_\tau^2 B^\mu + \partial_\sigma^2 B^\mu - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau B^\beta - \partial_\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu B^\sigma \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau A^\beta = 0. \quad (\text{D.4})$$

Esta última ecuación se puede describir de forma covariante,

$$\partial_\tau A^\nu \nabla_\nu \left(\partial_\tau A^\beta \nabla_\beta B^\mu \right) - R_{\alpha\beta\nu}^\mu \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau A^\beta B^\nu - \partial_\sigma^2 B^\mu = 0. \quad (\text{D.5})$$

Para una cuerda que cumple la relación de dispersión para la solución del centro de masa a orden cero,

$$G_{\mu\nu}(A) \partial_\tau A^\mu \partial_\tau A^\nu = -m^2, \quad (\text{D.6})$$

se pueden introducir $D - 1$ vectores normales v_R^μ con $R = 1, \dots, D - 1$ que indiquen las direcciones de las polarizaciones físicas de la cuerda cuando se toman perturbaciones alrededor de la solución del centro de masa. Estos vectores deben de ser perpendiculares a la geodésica del centro de masa en algún punto y ser ortonormales entre sí :

$$G_{\mu\nu} v_R^\mu \partial_\tau A^\nu = 0 \quad G_{\mu\nu} v_R^\mu v_S^\nu = \delta_{RS}, \quad (\text{D.7})$$

de manera que las soluciones a primer orden se expresan como,

$$B^\mu = \delta x^R v_R^\mu, \quad (\text{D.8})$$

donde δ^R constituyen las llamadas perturbaciones comóviles, las que un observador moviéndose junto con el centro de masa observaría. Este conjunto de $D - 1$ vectores deben determinarse completamente exigiendo que sean transportados paralelamente a lo largo de las geodésicas del centro de masa,

$$\partial_\tau A^\nu \nabla_\nu v_R^\mu = 0. \quad (\text{D.9})$$

Introduciendo la forma para B^μ dada por (D.8) en la ecuación (D.5) y tomando en cuenta la relación de dispersión y las ecuaciones que determinan las características de los $D - 1$ vectores obtenemos,

$$-\partial_\tau^2 \delta x_R + \partial_\sigma^2 \delta x_R + R_{\mu\alpha\beta\gamma} v_R^\mu v_S^\gamma \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau A^\beta \delta x_R = 0. \quad (\text{D.10})$$

El segundo término solamente depende de σ a través de la perturbación comóvil, de manera que introduciendo una expansión en series de Fourier,

$$\delta x_R = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{kR}(\tau) e^{-ik\sigma}, \quad (\text{D.11})$$

obtenemos la ecuación para los coeficientes de la expansión,

$$\partial_\tau^2 C_{kR} + (k^2 \delta_{RS} - R_{\mu\alpha\beta\gamma} v_R^\mu v_R^\gamma \partial_\tau A^\alpha \partial_\tau A^\beta) C_k^S = 0. \quad (\text{D.12})$$

Para el caso de los espacios de curvatura constante tenemos la condición de que

APÉNDICE D

el tensor de Riemann es proporcional al producto de la métrica,

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = \pm \frac{1}{l^2} (G_{\mu\beta}G_{\gamma\alpha} - G_{\mu\gamma}G_{\beta\alpha}), \quad (\text{D.13})$$

lo cual reduce la ecuación para los coeficiente C_{kR} a,

$$\partial_{\bar{\tau}}^2 C_{kR} + \left(k^2 \mp \frac{m^2}{l^2} \right) C_{kR} = 0. \quad (\text{D.14})$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ABRAHAMS, R. y MARSDEN, J. E.: *Foundatios of Mechanics*. Addison-Wesley, second edición, 1987.
- [2] ALVAREZ, O.: «Topological quantization and cohomology». *Comm. Math. Phys.*, 1985, **100**, p. 279.
- [3] APOSTOL, T.: *Análisis Matemático*. Editorial Reverté, 1960.
- [4] ARCINIEGA, G.; NETTEL, F.; PATIÑO, L. y QUEVEDO, H.: «Topological spectrum of massive scalar fields». *In preparation*, 2011.
- [5] ARNOLD, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [6] BAÑADOS, M.; TEITELBOIM, C. y ZANELLI, J.: «The Black Hole in Three Dimensional Spacetime». *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **13**, pp. 1843–1851.
- [7] BARROW, G. M.: *The Structure of Molecules*. The Benjamin Cummings Publishing Company, 1964.

- [8] BEKENSTEIN, J. D.: «The Quantum Mass Spectrum of the Kerr Black Hole». *Lett. al Nuovo Cimento*, 1974, **11(9)**, p. 467.
- [9] BUCHER, M.: «Rise and fall of the old quantum theory». *arXiv:0802.1366v1*, 2008.
- [10] BULGADAEV, S. A.: «Topological quantization of current in quantum tunnel contacts». *Pis'ma v ZhETF*, 2006, **83**, p. 659.
- [11] CALLAN, C. G. y THORLACIUS, L.: «Sigma Models and String Theory». En: *Proceedings of the 1988 Theoretical Advance Study Institute*, World Scientific, 1989.
- [12] CARLIP, S.: «Quantum gravity: a progress report». *Rep. Prog. Phys.*, 2001, **64**, p. 885.
- [13] —: «Is quantum gravity necessary?» *Class. Quantum Grav.*, 2008, **25(15)**, p. 154010.
- [14] CHOI, M. Y.: «Bloch oscillation and topological quantization». *Phys. Rev. B*, 1994, **50**, p. 13875.
- [15] CHOQUET-BRUHAT, Y.; DEWITT-MORETTE, C. y DILLARD-BLEICK, M.: *Analysis, Manifolds and Physics*. Elsevier Science Publishers, 1982.
- [16] CORTEZ, J.; NÚÑEZ, D. y QUEVEDO, H.: «Gravitational Fields and Nonlinear σ -Models». *Int. J. Theor. Phys.*, 2001, **40**, p. 251.
- [17] COURANT, J.: *Introducción al cálculo y al análisis matemático, vol.2*. Limusa, Noriega Editores, 1993.
- [18] DE VEGA, H. J. y SÁNCHEZ, N.: «A new approach to string quantization in curved spacetimes». *Phys. Lett. B*, 1987, **197**, p. 320.

- [19] DEGUCHI, S.: «Atiyah-Singer Index Theorem in an SO(3) Yang-Mills-Higgs System and Derivation of a Charge Quantization Condition». *Prog. Theor. Phys.*, 2007, **118(4)**, p. 769.
- [20] DIRAC, P. A. M.: «Quantised Singularities in the Electromagnetic Field». *Proc. Roy. Soc.*, 1931, **A 133**, p. 1.
- [21] DÖRING, A. y ISHAM, C. J.: «A topos foundation for theories of physics: I. Formal languages for physics». *J. Math. Phys.*, 2008, **49**, p. 053515.
- [22] ERNST, F. J.: «New formulation of the axially symmetric gravitational field problem». *Phys. Rev.*, 1968, **167(5)**, p. 1175.
- [23] —: «New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. II». *Phys. Rev.*, 1968, **168(5)**, p. 1415.
- [24] ETESI, G.: «Homotopic classification of Yang-Mills vacua taking into account causality». *Int. Journal of Theor. Phys.*, 2007, **46(4)**, p. 832.
- [25] FRANKEL, T.: *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press, second edición, 2004.
- [26] GÖKELER, M. y SCHÜCHKER, T.: *Differential geometry, gauge theories, and gravity*. Cambridge University Press, 1995.
- [27] GOLDSTEIN, H.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, second edición, 1980.
- [28] HARRIS, D. C. y BERTOLUCCI, M. D.: *Symmetry and Spectroscopy. An introduction to vibrational and electronic spectroscopy*. Dover Publications, 1989.
- [29] HERNÁNDEZ, F.; NETTEL, F. y QUEVEDO, H.: «Gravitational fields as generalized string models». *Gravitation and Cosmology*, 2009, **15(2)**, pp. 109–120.

- [30] ISHAM, C. J.: *Modern Differential Geometry for Physicists*. World Scientific, 1989.
- [31] —: «Prima Facie Questions in Quantum Gravity». *arXiv:gr-qc/9310031v1*, 1993.
- [32] ISHAM, C. J. y KUNSTATTER, G.: «Yang-Mills canonical vacuum structure in a general three-space». *Phys. Lett. B*, 1981, **102(6)**, p. 417.
- [33] J. ISHAM, C.: «Structural Issues in Quantum Gravity». *Gen. Rel. Grav.*, 1997, **GR14**, p. 167.
- [34] JOHNSON, C. V.: *D-Branes*. Cambridge University Press, 2003.
- [35] JOSÉ, J. V. y SALETAN, E. J.: *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 1998.
- [36] KIEFER, C.: *Quantum Gravity*. Oxford University Press, 2006.
- [37] KOBAYASHI, S. y NOMIZU, K.: *Foundations of Differential Geometry*. Wiley Publishers, New York, 1963.
- [38] LANDAU, L. D. y LIFSHITZ, E. M.: *Mechanics*. Butterworth Heinemann, third edición, 1976.
- [39] —: *The Classical Theory of Fields*. Butterworth Heinemann, 1987.
- [40] LARSEN, A. L. y SÁNCHEZ, N.: «Strings propagating in the 2+1 dimensional black hole Anti de Sitter spacetime». *Phys. Rev. D*, 1994, **50**, pp. 7493–7518.
- [41] LARSEN, A. L. y SÁNCHEZ, N.: «Mass spectrum of strings in Anti de Sitter spacetime». *Phys. Rev. D*, 1995, **52**, p. 1051.

- [42] LEONE, R. y LÉVY, L.: «Topological quantization by controlled paths: Application to Cooper pairs pumps». *Phys. Rev. B*, 2008, **77**, p. 064524.
- [43] MATZNER, R. A. y MISNER, C. W.: «Gravitational Field Equations for Sources with Axial Symmetry and Angular Momentum». *Phys. Rev.*, 1967, **154**, p. 1229.
- [44] MESSIAH, A.: *Quantum Mechanics*. Dover Publications, Inc., 1999.
- [45] MISNER, C. W.: «Harmonic maps as models for physical theories». *Phys. Rev. D*, 1978, **18(12)**, p. 4510.
- [46] NABER, G. L.: *Topology, Geometry and Gauge Fields*. Springer Verlag, New York, 1997.
- [47] NAKAHARA, M.: *Geometry, Topology and Physics*. Taylor & Francis, second edición, 2003.
- [48] NASH, C. y SEN, S.: *Topology and Geometry for Physicists*. Academic Press, 1983.
- [49] NETTEL, F. y QUEVEDO, H.: «Topological spectrum of classical configurations». *AIP Conf. Proc.*, 2007, **956**, pp. 9–14.
- [50] —: «Topological quantization of the harmonic oscillator». *Int. J. of Pure and Appl. Math.*, 2011, **70(2)**, p. 117.
- [51] —: «Topological spectrum of gravitational fields represented as generalized harmonic maps». *In preparation*, 2011.
- [52] NETTEL, F.; QUEVEDO, H. y RODRÍGUEZ, M.: «Topological spectrum of mechanical systems». *Rep. Math. Phys.*, 2009, **64(3)**, p. 355.

- [53] ORLANDO, D. y PETROPOULOS, M.: «Strings on curved backgrounds». *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2006, **53**, pp. 551–566.
- [54] PATIÑO, L. y QUEVEDO, H.: «Topological quantization of gravitational fields». *J. Math. Phys.*, 2005, **46**, p. 22502.
- [55] PENROSE, R.: «On Gravity's Role in Quantum State Reduction». *Gen. Rel. Grav.*, 1996, **28(5)**, p. 581.
- [56] PESKIN, M. E. y SCHROEDER, D. V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [57] POLCHINSKI, J.: *String Theory Vols. 1 and 2*. Cambridge University Press, 1998.
- [58] QUEVEDO, H.: «Class of stationary axisymmetric solutions of Einstein's equations in empty space». *Phys. Rev. D*, 1986, **33**, p. 324.
- [59] —: «Multipole moments in General Relativity - Static and Stationary Solutions-». *Fort. Phys.*, 1990, **38**, p. 733.
- [60] —: «Private notes», 2011.
- [61] QUEVEDO, H. y MASHHOON, B.: «Exterior gravitational field of a rotating deformed mass». *Phys. Lett. A*, 1985, **109**, p. 13.
- [62] —: «Exterior gravitational field of a charged rotating mass with arbitrary quadrupole moment». *Phys. Lett. A*, 1990, **148**, p. 149.
- [63] —: «Generalization of Kerr spacetime». *Phys. Rev. D*, 1990, **43**, p. 3902.
- [64] RAÑADA, A. F. y TRUEBA, J. L.: «Topological quantization of the magnetic flux». *Found. Phys.*, 2006, **36**, p. 427.

- [65] ROVELLI, C.: «Notes for a brief history of quantum gravity». *arXiv:gr-qc/0006061v3*, 2008.
- [66] SÁNCHEZ, N.: «Advances in string theory in curved backgrounds: A synthesis report». *Int. J. Mod. Phys.*, 2003, **A18**, pp. 2011–2024.
- [67] SCHWARZ, A. S.: «On regular solutions of Euclidean Yang-Mills equations». *Phys. Lett. B*, 1977, **67**, p. 172.
- [68] STEPHANI, H.; KRAMER, D.; MACCALLUM, M.; HOENSELAERS, C. y HERLT, E.: *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, second edition edición, 2003.
- [69] SZYDLOWSKI, M.: «The generalized Maupertuis principle». *Regul. Chaotic Dyn.*, 1998, **3**, pp. 10–19.
- [70] WALD, R. M.: *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [71] ZHONG, W. J. y DUAN, Y. S.: «Topological quantization of instantons in SU(2) Yang-Mills theory». *Chin. Phys. Lett.*, 2008, **25**, p. 1534.
- [72] ZWIEBACH, B.: *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2004.