

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Posgrado en Ciencias Matemáticas  
Facultad de Ciencias



## La órbita de Schubart

Tesis para obtener el grado de  
**Maestra en Ciencias Matemáticas**

**Presenta: Adela Rodríguez Cruz**

Directora de Tesis: Dra. Martha Alvarez Ramírez

Agosto 2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Contenido

Introducción	1
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.0.1 Espacios normados. Espacios de Banach . . . . .	5
1.0.2 Topología débil $\sigma(X, X^*)$ . . . . .	8
1.0.3 Espacios reflexivos . . . . .	10
1.0.4 Espacios de Sobolev . . . . .	11
1.0.5 Variación de Gâteaux y Derivada de Frechet . . . . .	13
1.0.6 Lemas Fundamentales del Cálculo de Variaciones . . . . .	15
1.0.7 Ecuación de Euler-Lagrange . . . . .	17
1.1 Cálculo de variaciones en el problema de $n$ cuerpos . . . . .	20
1.1.1 Principio de Simetría de Palais . . . . .	21
1.2 Existencia de minimizadores . . . . .	23
1.2.1 Principio variacional . . . . .	23
1.2.2 Funcional débilmente semicontinuo inferiormente . . . . .	24
<b>2 Regularización de colisiones binarias</b>	<b>27</b>
2.1 Formulación general e integrales de movimiento . . . . .	27
2.2 El problema de 2 cuerpos . . . . .	30
2.2.1 Estudio del problema reducido . . . . .	31
2.2.2 Regularización de colisiones binarias . . . . .	33

2.2.3	Regularización tipo Sundman . . . . .	33
2.2.4	Regularización tipo Levi-Civita . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Existencia de la órbita de Schubart</b>	<b>43</b>
3.1	Planteamiento variacional del problema . . . . .	45
3.2	Regularidad de los mínimos . . . . .	55
3.3	Ausencia de colisiones triples . . . . .	61
3.4	Ausencia de colisiones dobles adicionales . . . . .	70
3.5	Demostración del Teorema 3.1 . . . . .	81
3.5.1	Parte final de la demostración del Teorema 3.1 . . . . .	87
	<b>Apéndices</b>	<b>90</b>
<b>A</b>	<b>Propiedades del Lagrangiano</b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Acción de las órbitas Keplerianas elípticas y colineales</b>	<b>95</b>
<b>C</b>	<b>Las ecuaciones de movimiento en términos de las coordenadas de Jacobi</b>	<b>101</b>
	<b>Referencias</b>	<b>107</b>

# Introducción

El problema central de la *Mecánica Celeste* conocido como el *problema de  $n$  cuerpos* consiste en describir el movimiento de  $n$  masas puntuales sujetas a la ley gravitatoria de Newton.

Las ecuaciones de movimiento de los  $n$  cuerpos son  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{g m_i m_j (x_i - x_j)}{|x_j - x_i|^3}, \quad i = 1, \dots, n, \quad x_i \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

donde  $g$  es la constante de gravitación y  $|\cdot|$  es la norma euclídeana en  $\mathbb{R}^3$ .

El problema de  $n$  cuerpos para  $n = 2$  es un problema integrable en el sentido de que se conocen todas sus curvas solución, ya que puede ser reducido al *problema de Kepler* el cual describe el movimiento relativo de una partícula moviéndose bajo la acción gravitatoria de la segunda partícula fija en el origen. El problema de  $n$  cuerpos para  $n \geq 3$  es un problema abierto.

Las órbitas periódicas son una clase especial de soluciones de ecuaciones diferenciales que satisfacen la condición  $x(t) = x(t+T)$ , para alguna  $T > 0$  llamada período y son importantes porque están definidas para todo tiempo  $t$ .

Para el problema de  $n$  cuerpos, las *configuraciones centrales* son una clase particular de órbitas periódicas éstas son configuraciones en las que el vector de aceleración es un múltiplo escalar del vector de posición, la propiedad mas simple que caracteriza una configuración central es que define un movimiento *homotético* si las velocidades son elegidas convenientemente, por ejemplo, si éstas se eligen todas cero. Decimos que el movimiento es *homotético* si durante el movimiento solamente cambia el tamaño de la configuración. Si aceptamos rotaciones de la configuración, decimos que el movimiento es *homográfico*. Por último, si existen rotaciones pero no cambia el tamaño decimos que el movimiento es un *equilibrio relativo*.

En el problema de 3 cuerpos existen exactamente tres configuraciones centrales colineales (Euler, 1765), y dos configuraciones centrales en forma de triángulo equilátero

(Lagrange, 1772).

El objetivo de esta tesis es demostrar la existencia de una solución periódica y simétrica del problema colineal de 3 cuerpos, la llamada *órbita de Schubart*, la cual fue encontrada numéricamente en 1956 por J. von Schubart, ver [18]. Esta órbita periódica y simétrica tiene dos colisiones binarias por período, y es tal que las masas de los cuerpos que están en los extremos son iguales  $m_1 = m_3$ , y diferentes a la masa  $m_2 > 0$  del cuerpo que está en medio. Las velocidades iniciales se eligen de tal forma que los cuerpos con masas  $m_1$  y  $m_2$  se aproximen a una colisión binaria, mientras que  $m_3$  se mueva en dirección opuesta.

Enfocamos este trabajo con el método directo de cálculo de variaciones, el cual consiste en demostrar la existencia de un mínimo sobre un conjunto de funciones donde el funcional de acción (o Lagrangiano) asociado al problema está definido.

El *espacio de configuraciones* para el problema colineal de 3 cuerpos es el conjunto

$$\mathcal{X} = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \sum_{i=1}^3 m_i x_i = 0 \right\},$$

un elemento de  $\mathcal{X}$  es una *configuración* con centro de masas en el origen. El potencial Newtoniano asociado es

$$U(x) = U(x_1, x_2, x_3) = - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|x_j - x_i|}. \quad (2)$$

y  $K(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \|\dot{x}\|^2$  es la energía cinética.

Una configuración  $(x_1, x_2, x_3)$  en el problema colineal de 3 cuerpos es llamada de *colisión binaria* si se cumple  $x_1 = x_2$  ó  $x_2 = x_3$  mientras que si  $x_1 = x_2 = x_3$  la configuración es llamada *colisión triple*. La función (2) está definida en todas partes, excepto en las colisiones binarias y triples. Las singularidades que se dan en el problema colineal de 3 cuerpos sólo son las debidas a colisión [16]. Sundman demostró [21] que las singularidades de las ecuaciones diferenciales debidas a colisión no son esenciales y pueden ser removidas con un cambio adecuado de variables tanto en las variables de posición y velocidad como del tiempo, éstas se expresan en forma paramétrica en términos de una nueva variable, este proceso se llama *regularización*.

Existe otro tipo de regularización, la de Levi-Civita, que consiste en efectuar un cambio de variable en el espacio de fases, y otro en el tiempo para hacer más lentas las órbitas que van a colisión, obteniendo ecuaciones sin singularidades. En el Capítulo 2 se presentan con más detalle estas dos regularizaciones.

Sea  $\mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathcal{X}) = W^{1,2}([0, T], \mathcal{X})$ , el espacio de Sobolev. El Lagrangiano  $L(x, \dot{x})$  de  $x \in \mathfrak{X}$

$$L(x, \dot{x}) = \frac{\|\dot{x}\|^2}{2} - U(x),$$

está definido casi en todas partes ya que  $x$  es absolutamente continua. Sea  $\widehat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \Delta$  donde  $\Delta$  es el conjunto de colisiones. Si  $x(t) \in \widehat{\mathcal{X}}$  para todo  $t \in [0, T]$  entonces tendremos una solución periódica sin colisiones del problema de 3 cuerpos.

El funcional de acción  $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  asociado a (1) en el intervalo de tiempo de  $[0, T]$  está definido por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt = \int_0^T \left( \frac{1}{2} \|\dot{x}\|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|x_j - x_i|} \right) dt.$$

Es natural elegir el espacio  $H^1([0, T], \mathcal{X})$  como el espacio de órbitas porque  $\|\dot{x}\|^2$  es un término de la integral.

Por el Lema de Du Bois Reymond, los puntos críticos del funcional  $\mathcal{A}(x)$  dan origen a las ecuaciones de Euler-Lagrange, y como consecuencia a las soluciones del problema de 3 cuerpos [1].

El teorema que describe las propiedades de la órbita de Schubart, parte central de esta tesis, se enuncia como sigue:

**Teorema.** Si  $m_1 = m_3$  entonces existe una solución  $T$  periódica  $x = (x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  del problema colineal de 3 cuerpos con las siguientes propiedades

- i)  $x_1(t) \leq x_2(t) \leq x_3(t)$  para toda  $t \in \mathbb{R}$  con  $x_1(t) = x_2(t)$  (resp.  $x_2(t) = x_3(t)$ ) si y sólo si  $t$  es un múltiplo de  $T$  (resp.  $t - T/2$ ).
- ii)  $x$  verifica las siguientes condiciones de simetría

$$\begin{cases} x_1(T/2 - t) = -x_3(t) \\ x_2(T/2 - t) = -x_2(t) \\ x_3(T/2 - t) = -x_1(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(T/2 + t) = -x_3(t) \\ x_2(T/2 + t) = -x_2(t) \\ x_3(T/2 + t) = -x_1(t) \end{cases}$$

- iii) Las funciones  $t \mapsto x_1(t)$  y  $t \mapsto x_3(t)$  son estrictamente decrecientes en  $[0, T/2]$ , mientras que  $t \mapsto x_2(t)$  es estrictamente creciente en el mismo intervalo.

Este teorema garantiza la existencia de la órbita de Schubart.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma. El Capítulo 1 contiene los elementos de análisis funcional y del cálculo de variaciones, para la presentación de los resultados se consultaron [2] y [8].

En el Capítulo 2 describiremos en qué consiste las *regularizaciones* de las colisiones binarias tipo Sundman y Levi-Civita. En el Capítulo 3 presentamos de forma detallada la demostración del Teorema 3.1 siguiendo el artículo de A. Venturelli [24]. La demostración consiste en aplicar un método directo del Cálculo de Variaciones

para garantizar la existencia de la órbita de Schubart como un mínimo local del funcional de acción  $\mathcal{A}(x)$  en el espacio de Sobolev  $\mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathcal{X})$ . Cabe recordar que el mínimo debe cumplir en particular con la propiedad de tener dos colisiones binarias por periodo sin tener colisiones dobles adicionales.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este Capítulo presentaremos algunos conceptos de Análisis Funcional así como algunos resultados básicos del Cálculo de Variaciones sin demostraciones. Éstos pueden ser consultados en [2], [6] y [8].

### 1.0.1 Espacios normados. Espacios de Banach

**Definición 1.1.** Un *espacio vectorial normado*  $(X, \|\cdot\|_X)$  es un espacio vectorial (sobre un campo  $K$ , que puede ser real o complejo), equipado con una función  $\|\cdot\|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  llamada *norma*, la cual cumple:

- i)  $\|x\|_X \geq 0$  donde  $x \in X$ , la igualdad se cumple si y sólo si  $x = 0$ ,
- ii)  $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X$  para toda  $x \in X$  y  $\lambda \in K$ ,
- iii)  $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$  para toda  $x, y \in X$ .

### Ejemplo 1.2. Espacios normados

1.  $C^0[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow K \mid f \text{ es continua en } [a, b]\}$  con

$$\|f\| = \|f\|_0 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

2.  $C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow K \mid f \text{ es continuamente diferenciable en } [a, b]\}$  con

$$\|f\| \equiv \|f\|_1 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

3.  $C^0[a, b]$  con

$$\|f\| \equiv \|f\|_0 = \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Definición 1.3.** Un *espacio de Banach*  $X$  es un espacio vectorial normado y completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge en  $X$ .

Veamos un ejemplo y un contraejemplo de espacios de Banach.

#### Ejemplo 1.4. Espacios de Banach

1. Los espacios de funciones  $C^1[a, b]$  con la norma  $\|f\|_0$ , y  $C^1[a, b]$  con la norma  $\|f\|_1$  son espacios de Banach.
2.  $C^0[a, b]$  equipado con la norma  $\|f\|_0$  no es un espacio de Banach.

En efecto, si  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2}, \\ nx - \frac{n(a+b)}{2} & \text{si } \frac{a+b}{2} < x < \frac{n(a+b)+2}{2n}, \\ 1 & \text{si } \frac{n(a+b)+2}{2n} < x < b. \end{cases}$$

Tenemos que  $\{f_n(x)\}$  es una sucesión de Cauchy que converge a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < x < \frac{b+a}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{b+a}{2} < x < b \end{cases}$$

la cual no pertenece a  $C^0[a, b]$ . En efecto, calculemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_0^2 &= \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \\
&\quad + \int_{\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}}^{\frac{a+b}{2} + \frac{1}{m}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{3(n-m)} \left[ (n-m)x - \frac{(a+b)(n-m)}{2} \right]^3 \Big|_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}} \\
&\quad + \frac{1}{-3m} \left[ 1 + \frac{m(a+b)}{2} - mx \right]^3 \Big|_{\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}}^{\frac{a+b}{2} + \frac{1}{m}} \\
&= \frac{1}{3(n-m)} \left[ \left( \frac{n-m}{n} \right)^3 \right] + \frac{1}{-3m} \left[ - \left( 1 - \frac{m}{n} \right)^3 \right] \\
&= \frac{(n-m)^2}{3n^2} + \frac{(n-m)^3}{3mn^3} \\
&= \frac{(n-m)^2(m+n-m)}{(n-m)^2(m+n-m)} \\
&= \frac{(n-m)^2 3mn^3}{3mn^2} \\
&= \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}.
\end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene de observar que si  $m < n$ , tenemos  $m^2 < mn$ , de donde

$$\begin{aligned}
m^2 &< 2mn - mn \\
m^2 - 2mn + n^2 &< n^2 - mn \\
(n-m)^2 &< (n-m)n \\
\frac{(n-m)^2}{n} &< n-m \\
\frac{(n-m)^2}{3mn^2} &< \frac{n-m}{3mn} \\
\frac{(n-m)^2}{3mn^2} &< \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $C^0[a, b]$  equipado con la norma  $\|f\|_0$  no es un espacio de Banach.

**Definición 1.5.** Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial con producto interno que es completo.

**Observación 1.6.** Cada espacio de Hilbert es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interior que tiene asociada el espacio de Hilbert.

**Ejemplo 1.7.** El espacio

$$L^2[a, b] = \left\{ f(x) \text{ con } \int_a^b f(x)^2 dx < \infty \right\}$$

donde la integral es tipo Lebesgue, equipado con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

es un espacio de Hilbert.

**Definición 1.8.** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios normados con normas  $\| \cdot \|_X$ ,  $\| \cdot \|_Y$ , respectivamente y  $T: X \rightarrow Y$ . El operador  $T$  es *acotado* si existe un número real  $c$  tal que para toda  $x \in X$

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

**Teorema 1.9.** (Representación de Fréchet-Riesz) *Todo funcional lineal acotado  $T$  en un espacio de Hilbert  $X$  puede ser representado en términos del producto interior, es decir,*

$$T(x) = \langle x, v \rangle$$

donde  $v$  es único, depende de  $T$ , y tiene norma  $\|v\| = \|T\|$ .

**Definición 1.10.** El espacio  $X^*$  *dual topológico* de  $X$  el espacio de las funciones lineales y continuas sobre  $X$ .  $X^*$  está equipado con la norma dual

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X, \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|.$$

Cuando  $f \in X^*$  y  $x \in X$  se denotará generalmente  $\langle f, x \rangle$  en lugar de  $f(x)$ ; se dice que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar en el dual  $X^*$ .

## 1.0.2 Topología débil $\sigma(X, X^*)$

**Definición 1.11.** La *topología débil* sobre  $X$ , denotada por  $\sigma(X, X^*)$  es la topología menos fina (con un número mínimo de abiertos) sobre  $X$ , tal que todas las aplicaciones  $\{\varphi_f\}_{f \in X^*}$  son continuas.

**Definición 1.12.** (Convergencia Fuerte) Una sucesión  $\{x_n\}$  en un espacio vectorial normado  $X$ , *converge fuertemente* si existe un elemento  $x \in X$  tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Se dice que  $x$  es el *límite fuerte* de  $\{x_n\}$  y se denota como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , o simplemente  $x_n \rightarrow x$ .

**Definición 1.13.** (Convergencia Débil) Una sucesión  $\{x_n\}$  en un espacio vectorial normado  $X$ , *converge débilmente* si existe un elemento  $x \in X$  tal que para cada  $f \in X^*$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

Se dice que  $x$  es el *límite débil* de  $\{x_n\}$  y se denota como  $x_n \rightharpoonup x$ .

**Definición 1.14.** Sea  $\Omega$  un subconjunto de  $X$ . Decimos que  $\Omega$  es *débilmente cerrado* si para toda  $\{x_n\} \subset \Omega$ , tal que  $x_n \rightharpoonup x$ , se cumple que  $x \in \Omega$ .

**Lema 1.15.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión débilmente convergente en un espacio normado  $X$ . Entonces:

- i) El límite débil  $x$  de  $\{x_n\}$  es único;
- ii) Toda subsucesión de  $\{x_n\}$  converge débilmente a  $x$ ;
- iii) La sucesión  $\{\|x_n\|\}$  es acotada.

**Proposición 1.16.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en  $X$ . Entonces  $x_n \rightharpoonup x$  si y sólo si  $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$  para toda  $f \in X^*$ .

**Lema 1.17.** (Convergencia fuerte y convergencia débil). Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en un espacio vectorial normado  $X$ , entonces se cumple lo siguiente:

- i) Si  $\{x_n\}$  converge fuertemente, entonces  $\{x_n\}$  converge débilmente al mismo límite  $x$ .
- ii) Si  $\dim X < \infty$ , entonces la convergencia débil implica la convergencia fuerte.

**Definición 1.18.** Sea  $X$  un espacio de Banach. Se dice que un funcional lineal  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  es *secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente* si dada una sucesión tal que  $x_n \rightharpoonup x$ , se cumple que  $F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ .

**Lema 1.19.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en  $X$ . Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:

- i) Si  $x_n \rightharpoonup x$  converge débilmente en  $\sigma(X, X^*)$ , entonces  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ , es decir, la norma es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente.
- ii) Si  $x_n \rightharpoonup x$  converge débilmente en  $\sigma(X, X^*)$  y  $f_n \rightarrow f$  converge fuertemente en  $X^*$ , es decir  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  entonces  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ .

Ahora, vamos a definir una topología particular sobre el espacio dual  $X^*$ , la cual es una topología débil\*, denotada por  $\sigma(X^*, X)$ . Para cada  $x \in X$  consideremos la aplicación  $\varphi_x: X^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi_x(f) = f(x)$ . Cuando  $x$  recorre todo  $X$ , obtenemos una familia de aplicaciones continuas  $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ .

**Definición 1.20.** La *topología débil\**, denotada por  $\sigma(X^*, X)$ , es la topología menos fina (con un número mínimo de abiertos) sobre  $X^*$  de tal forma que todas las aplicaciones  $\{\varphi_x\}_{x \in X}$  son continuas.

### 1.0.3 Espacios reflexivos

**Teorema 1.21.** Sea  $X$  un espacio vectorial real y  $p$  un funcional sublineal sobre  $X$ . Si  $f$  es un funcional lineal definido en un subespacio  $Z$  de  $X$  que satisface  $f(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in Z$ .

Entonces  $f$  tiene una extensión lineal  $\tilde{f}: Z \rightarrow X$  que satisface  $\tilde{f}(x) \leq p(x)$  para toda  $x \in X$ .

**Definición 1.22.** Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $i: X \rightarrow X^*$  la inyección canónica definida como  $\langle i(x), f \rangle = \langle f, x \rangle$  para todo  $x \in X$  y  $f \in X^*$ , como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, esta inyección es inyectiva y en caso de que  $i$  sea suprayectiva ( $i(X) = X^{**}$ ), entonces  $X$  es reflexivo.

**Definición 1.23.** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios de Banach. Un operador  $T: X \rightarrow Y$  es compacto si para todo subconjunto  $M$  acotado de  $X$ , la imagen  $T(M)$  es relativamente compacto, esto es,  $\overline{T(M)}$  es compacto.

**Lema 1.24.** Sea  $X$  un espacio de Banach, entonces  $X$  es un espacio reflexivo, si y sólo si,  $X^*$  es reflexivo.

**Teorema 1.25.** (Banach-Alaoglu-Bourbaki). La bola unitaria

$$B_{X^*} = \{f \in X^*: \|f\| \leq 1\}$$

es compacta en la topología débil\*  $\sigma(X^*, X)$ .

**Corolario 1.26.**  $X$  es reflexivo si y sólo la bola unitaria es compacta en la topología débil.

**Proposición 1.27.** Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo y  $Y$  un espacio de Banach. Entonces el operador  $T: X \rightarrow Y$  es compacto si y sólo si toda sucesión  $\{x_n\}$  que converge débilmente a  $x_0$  en  $X$ ,  $x_n \rightharpoonup x_0$ , entonces  $T(x_n)$  converge fuertemente a  $T(x_0)$ ,  $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ .

**Teorema 1.28.** (Eberlein-Šmulian). Sea  $X$  un espacio de Banach tal que toda sucesión acotada  $\{x_n\}$  en  $X$  tiene una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  en  $X$  convergente en la topología débil  $\sigma(X, X^*)$  entonces  $X$  es reflexivo.

## 1.0.4 Espacios de Sobolev

**Definición 1.29.** El *soporte de una función continua* es el complemento del mayor abierto sobre el que  $f$  se anula. Se dice que una función tiene *soporte compacto* si la cerradura del conjunto donde no se anula forma un conjunto acotado, es decir,

$$\text{sop } f = \overline{\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}}.$$

**Definición 1.30.** Denotemos por  $C_c^k(\Omega)$  el espacio de Banach de las funciones con soporte compacto y la  $k$ -ésima derivada continua y equipado con la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Ahora, consideremos  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p < \infty$  y  $I = (a, b)$ . Definimos

$$L^p(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es Lebesgue medible y } \int_a^b |f|^p < \infty\}$$

**Definición 1.31.** Definimos el espacio

$$L^\infty(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es Lebesgue medible y existe } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p.}^1 \text{ en } I\}$$

y

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C: |f(x)| \leq C \text{ c.p.t. en } I\}.$$

**Definición 1.32.** Denotaremos por  $C^\infty(I)$  al espacio de funciones con derivadas continuas de cualquier orden.

**Definición 1.33.** Sea  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $v = (v_1, \dots, v_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  funciones localmente integrables definidas en un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $v$  es la *derivada débil* de  $u$  si cumple:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} v_i \varphi$$

para todas las funciones  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  y para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Ejemplo 1.34.** Calculemos la derivada débil de una función.

Sean  $n = 1$  y  $\Omega = (0, 2)$ . Consideremos las funciones

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>casi en todas partes.

Demostraremos que  $\frac{du}{dx} = v$  en el sentido débil, es decir, para cada  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  debemos demostrar que

$$\int_0^2 u\varphi' dx = - \int_0^2 v\varphi dx.$$

Realizando la integral obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\varphi' dx &= \int_0^1 x\varphi' dx + \int_1^2 \varphi' dx \\ &= [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi dx + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi dx - \varphi(1) \\ &= - \int_0^1 \varphi dx \\ &= - \int_0^2 v\varphi dx. \end{aligned}$$

Lo cual demuestra lo deseado.

Ahora, usando el concepto de derivada débil vamos a definir los espacios con los que vamos a trabajar.

**Definición 1.35.** Sea  $I = (a, b)$  un intervalo acotado o no, y sea  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p \leq \infty$ , el *espacio de Sobolev*  $W^{1,p}(I)$  se define como

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) \mid \exists v \in L^p(I) \text{ tal que } \int u\varphi' = - \int v\varphi \forall \varphi \in C_c^1(I)\}.$$

En la definición de  $W^{1,p}$  se dice que  $\varphi$  es una función “de prueba”.

**Definición 1.36.** Supongamos que  $I$  es acotado. Las funciones en  $W^{1,1}$  son las funciones *absolutamente continuas* las cuales se caracterizan por la siguiente propiedad:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que para toda sucesión finita de intervalos disjuntos  $(a_k, b_k)$  de  $I$  tal que  $\sum |b_k - a_k| < \delta$ , se verifica  $\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$

El espacio  $W^{1,p}$  equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

(o a veces con la norma equivalente  $(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}$ ).

El espacio  $H^1$  está equipado con el producto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

y la norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

es equivalente a la norma  $W^{1,2}$ .

**Proposición 1.37.** *El espacio  $W^{1,p}$  es un espacio de Banach para  $1 \leq p \leq \infty$ . El espacio  $W^{1,p}$  es reflexivo para  $1 < p < \infty$  y separable para  $1 \leq p < \infty$ . El espacio  $H^1$  es un espacio de Hilbert separable.*

**Teorema 1.38.** (Densidad). *Sea  $u \in W^{1,p}(I)$  con  $1 \leq p < \infty$ . Entonces existe una sucesión  $\{u_n\}$  en  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $u_n|_I \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(I)$ .*

**Teorema 1.39.** *Existe una constante  $C$  (dependiente sólo de  $|I| \leq \infty$ ) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

para toda  $u \in W^{1,p}(I)$  con  $1 \leq p \leq \infty$ , dicho de otro modo  $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$  con inyección continua para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Además cuando  $I$  es acotado se verifica

a) *La inyección  $W^{1,p}(I) \subset C^0(\bar{I})$  es compacta para  $1 < p \leq \infty$ .*

b) *la inyección  $W^{1,1}(I) \subset L^q(\bar{I})$  es compacta para  $1 \leq q < \infty$ .*

## 1.0.5 Variación de Gâteaux y Derivada de Frechet

**Definición 1.40.** Sea  $\mathfrak{X}$  un espacio de Banach y  $F: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un funcional. Supongamos que  $F(x) < +\infty$ . Decimos que  $F$  es *Gâteaux diferenciable* en  $x$  en la dirección de  $h \in \mathfrak{X}$  si existe  $L \in \mathfrak{X}$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x + sh) - F(x)}{s} = L(h).$$

$L$  se llama la *derivada de Gâteaux* en  $x$  y se denota por  $\delta_x F(h) = L(h)$

$\delta_x F(h)$  es la *variación de Gâteaux* de  $F$  en  $x$  en la dirección de  $h$ . En caso de que el límite no esté definido en toda dirección  $h \in \mathfrak{X}$ , se considera el subconjunto  $\mathfrak{B}_x \subset \mathfrak{X}$  de direcciones donde el límite exista, llamado *espacio de variaciones admisibles*. La función  $\delta F(x): \mathfrak{B}_x \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada *variación de Gâteaux* ó *primera variación* de  $F$  en  $x$ .

Si  $F$  es Gâteaux diferenciable para todo  $x \in \mathfrak{X}$ , se dice que  $F$  es Gâteaux diferenciable.

**Observación 1.41.** Notemos que si  $s \in \mathbb{R}$  es suficientemente pequeño, podemos tomar  $s \rightarrow F(x + sh)$ , y como consecuencia, si existe la variación de Gâteaux de  $F$  en  $x$  en la dirección de  $h$ , debemos tener

$$\delta_x F(h) = \frac{d}{ds} F(x + sh) \Big|_{s=0}.$$

**Definición 1.42.** Sea  $F: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un funcional y supongamos que  $F(x) < +\infty$ . Decimos que  $F$  es *Fréchet diferenciable* en  $x$  si existe  $L \in \mathfrak{X}^*$  tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

$L$  se llama *derivada de Fréchet* de  $F$  en  $x$  y se denota por  $DF(x) = L$ .

Las relaciones entre la derivada de Gâteaux y la derivada de Fréchet son las siguientes:

- Si  $F$  es Fréchet diferenciable entonces  $F$  es Gâteaux diferenciable y ambas derivadas coinciden.
- Si  $F$  es Gâteaux diferenciable y la derivada de Gâteaux  $\delta F: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$  es continua, entonces  $F$  es Fréchet diferenciable.

Si se cumple la condición

$$DF(x) = F'(x) = 0$$

entonces  $x$  se llama *punto crítico* de  $F$ , y el correspondiente número  $F(x)$  se llama *valor crítico*.

Si  $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$  es un subespacio de  $\mathfrak{X}$  tal que  $x_0 \in \mathfrak{X}_0$  y  $DF(x_0) = 0$  como un funcional lineal en  $T_x \mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_0$ , entonces decimos que  $x_0$  es un *punto crítico* de  $F$  en  $\mathfrak{X}_0$ .

El teorema de representación de Fréchet-Riesz garantiza la siguiente definición.

**Definición 1.43.** Si  $\mathfrak{X}$  es un espacio de Hilbert con producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{X}}$  y  $F$  Gâteaux diferenciable entonces definimos el gradiente de  $F$  en  $x_0$ , como el único elemento  $\nabla F(x_0) \in \mathfrak{X}$  tal que

$$\langle \nabla F(x_0), h \rangle_{\mathfrak{X}} = DF(x_0)(h)$$

para todo  $h \in \mathfrak{X}$ .

**Definición 1.44.** Un conjunto  $C$  se dice *balanceado* si dado  $x \in C$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $|\lambda| < 1$  se tiene  $\lambda x \in C$ .

**Definición 1.45.**

**Proposición 1.46.** Sea  $F: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  un funcional. Supongamos que  $F$  restringido a un subconjunto  $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$  tiene un extremo relativo finito en  $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ . Si existe un conjunto balanceado no vacío  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_{x_0}$  tal que  $x_0 + \mathfrak{B} \subset \mathfrak{X}_0$ , entonces

$$\delta F(x_0)(v) = 0$$

para toda  $v \in \mathfrak{B}$ .

*Demostración.* Supongamos primero que  $x_0$  es un mínimo relativo de  $F|_{\mathfrak{X}_0}$ . Tenemos que  $x_0 + tv \in \mathfrak{X}_0$  para  $|t| < 1$  y  $v \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_{x_0}$ . Luego

$$\frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t} \geq 0$$

para  $0 < t < 1$  y

$$\frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t} \leq 0$$

para  $-1 < t < 0$ . Tomando los límites laterales respectivos en ambas desigualdades concluimos que  $\delta F(x_0)(v) \geq 0$  y  $\delta F(x_0)(v) \leq 0$ , por lo tanto  $\delta F(x_0)(v) = 0$  para toda  $v \in \mathfrak{B}$ .  $\square$

## 1.0.6 Lemas Fundamentales del Cálculo de Variaciones

Si el funcional

$$F(x) = \int_a^b F(t, x, x') dt$$

definido sobre  $C^1[a, b]$ , con  $F, F_x, F_{x'}$  continuas, tiene un extremo en  $x_0$  condicionado por  $x(a) = A, x(b) = B$ , entonces  $I(h) = F(x_0 + h)$  tiene un extremo en 0 para las funciones  $h$  en  $C^1[a, b]$ , con norma  $\|\cdot\|_1$  y  $h(a) = h(b) = 0$ . Tenemos entonces:

$$D(I)(0)h = \int_a^b (F_x(t, x_0, x'_0)h) + F_{x'}(t, x_0, x'_0)h' dx = 0$$

para todo  $h$ .

Si denotamos por

$$\alpha(t) = F_x(t, x_0(t), x'_0(t)), \quad \beta(t) = F_{x'}(t, x_0(t), x'_0(t)),$$

$\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  son continuas en  $[a, b]$ .

**Lema 1.47.** (Lagrange) *Sea  $\alpha(t)$  una función continua en  $[a, b]$  tal que:*

$$\int_a^b \alpha(t)h(t)dt = 0$$

para todo  $h$  en  $C_0[a, b] = \{h(t) \text{ continua en } [a, b], \text{ con } h(a) = h(b) = 0\}$ , entonces  $\alpha(t) \equiv 0$

*Demostración.* Supongamos  $\alpha(t_0) \neq 0$  para alguna  $x_0 \in [a, b]$ , entonces por continuidad,  $\alpha(t)$  será del mismo signo que  $\alpha(t_0)$  en una vecindad  $[t_1, t_2]$  alrededor de  $t_0$ , contenida en  $[a, b]$ . Sea  $h(t)$  definida como

$$h(t) = \begin{cases} (t - t_1)(t_2 - t) & \text{si } t \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_1, t_2] \end{cases}$$

$h$  está en  $C_0[a, b]$ , es positiva en  $[t_1, t_2]$ . Por lo tanto:

$$\int_a^b \alpha(t)h(t)dt = \int_{t_i}^{t_2} \alpha(t)h(t)dt$$

tiene el signo de  $\alpha(t)$ , por lo tanto tenemos una contradicción.  $\alpha(t)$  debe ser cero en el interior de  $[a, b]$  y, por continuidad, en  $a$  y  $b$ .  $\square$

**Lema 1.48.** (Du Bois-Reymond) Si  $H \in (C^0[0, T], \mathbb{R}^n)$  y

$$\int_0^T H(t)\dot{h}(t)dt = 0$$

para cualquier  $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$ , entonces existe  $c \in \mathbb{R}^n$  tal que  $H(t) = c$  para  $t \in [0, T]$ .

*Demostración.* Sea  $c = \frac{1}{T} \int_0^T H(t)dt$  y  $h(t) = \frac{1}{k} \int_0^t (H(\tau) - c)d\tau$ ,  $h$  es continuamente diferenciable cuya derivada es  $\dot{h}(t) = \frac{1}{k}(H(t) - c)$  y además  $h(0) = h(T) = 0$ . Escojamos  $K > 0$  tal que  $\sup_{[0, T]} |h| < \epsilon$ , entonces  $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$  y se cumple:

$$\begin{aligned} \int_0^T |H(t) - c|^2 dt &= \int_0^T (H(t) - c) \cdot (H(t) - c) dt \\ &= K \int_0^T (H(t) - c) \cdot \dot{h}(t) dt \\ &= -K \int_0^T c \cdot \dot{h}(t) dt \\ &= -K(c \cdot h(T) - c \cdot h(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $|H(t) - c|^2 = 0$  en  $[0, T]$ . Luego,  $H(t) = c$  para toda  $t \in [0, T]$ .  $\square$

**Proposición 1.49.** Si  $f, g \in C[a, b]$  y  $\int_a^b [g(x)v(x) + h(x)v'(x)]dx = 0$ , para todo  $v \in \mathcal{D}_0 = \{v \in C^1[a, b]: v(a) = v(b) = 0\}$ , entonces  $h \in C^1[a, b]$  y  $h' = g$ .

*Demostración.* Sea  $G(x) = \int_a^x g(t) dt$  para  $x \in [a, b]$ , usando el Teorema Fundamental del Cálculo  $G \in C^1[a, b]$  y  $G' = g$ . Integrando por partes el primer término de la integral tenemos

$$\int_a^b [g(x)v(x) + h(x)v'(x)]dx = \int_a^b [h(x) - G(x)]v'(x)dx + G(x)v(x)\Big|_a^b$$

así que

$$[h(x) - G(x)]v'(x)dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_0$$

y por el Lema 1.48

$$h(x) - G(x) = cte = c \quad c \in [a, b].$$

Se concluye que

$$h = G + c \in C^1[a, b]$$

y  $h' = G' = g$ . □

### 1.0.7 Ecuación de Euler-Lagrange

La ecuación de Euler-Lagrange en cálculo de variaciones es la condición necesaria para la existencia de un máximo o un mínimo, a lo largo de esta sección se darán los detalles de esta afirmación. Sea  $T > 0$ , un entero positivo y sea  $F$  un funcional definido como

$$F(x) = \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (1.1)$$

donde

$$x \in \mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathbb{R}^n) = W^{1,2}([0, T], \mathbb{R}^n)$$

y  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  es acotada inferiormente y de clase  $C^2$  en un conjunto abierto de la forma  $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Supongamos que se cumple lo siguiente

$$x \in H^1([0, T], \Omega) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x(t), \dot{x}(t), t) \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \quad (1.2)$$

donde  $x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  y por lo tanto  $f(x, \dot{x}, t)$  es  $C^1$  en  $\dot{x}$ , pues suponemos que  $f \in C^2$  en un abierto de la forma  $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Sea  $h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ . Para toda  $s$  con  $|s|$  suficientemente pequeña,  $x(t) + sh(t) \in \Omega$ , para todo  $t \in [0, T]$  y

$$f(x + sh, \dot{x} + \dot{sh}, t) = f(x, \dot{x}, t) + \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{h} \right) s + O(s^2)$$

Ya que  $x \in H^1$  y  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t)$  es continua tenemos que

$$\Phi_x(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau$$

está bien definida. Integrando por partes  $\int_0^T \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h dt$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{F(x + sh) - F(x)}{s} &= \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{h} \right) dt + O(s) \\ &= \Phi_x(T) \cdot h(T) + \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} dt + O(s). \end{aligned}$$

Notemos que la integral

$$\int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} dt$$

es una función continua. Además, considerando (1.2), tenemos que  $C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{D}_x = \{h \in X \text{ tal que } \delta_x F(h) \text{ existe}\}$  y

$$\delta_x F(h) = \Phi_x(T) \cdot h(T) + \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} dt.$$

Por otro lado, es conveniente considerar al conjunto de variaciones admisibles como un conjunto balanceado, es decir:

$$\mathfrak{B}_\epsilon = \{h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) : h(0) = h(T) = 0, \sup_{t \in [0, T]} |h(t)| < \epsilon\}. \quad (1.3)$$

Sea  $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$ , la variación de Gâteaux de  $F$  es

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} dt. \quad (1.4)$$

Integrando nuevamente por partes ahora  $\int_0^T \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \dot{h} dt$  tenemos que

$$\delta_x F(h) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot h \Big|_0^T + \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \right) \cdot h dt.$$

Luego si  $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$  entonces la fórmula para la variación de Gâteaux está dada por

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \right) \cdot h dt. \quad (1.5)$$

Ahora vamos a ejemplificar la variación de Gâteaux en algunos funcionales.

**Ejemplo 1.50.** Sea  $\mathcal{A}: \Omega \subset \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  un funcional definido como

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left( a(t)|\dot{x}(t)|^2 + b(t)|x(t)|^2 \right) dt, \quad a(t), b(t) \in C^1(\mathbb{R})$$

donde  $\Omega = \{x \in H^1([0, T], \mathbb{R}) : x(0) = x(T) = 0\}$  es el dominio de  $\mathcal{A}$ , vamos a calcular  $\delta_x \mathcal{A}(y)$ . Dados  $x, y \in \Omega$  tales que,  $x + sy \in \Omega$  para toda  $s \in \mathbb{R}$ . Tenemos

que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x + sy) &= \int_0^T \left[ a(t) \cdot (\dot{x}(t) + s\dot{y}(t))^2 + b(t) \cdot (x(t) + sy(t))^2 \right] dt \\
&= \int_0^T \left[ a(t) \cdot \dot{x}(t)^2 + b(t) \cdot (x(t))^2 \right] dt \\
&\quad + 2s \int_0^T \left[ a(t)\dot{x}(t)\dot{y}(t) + b(t)x(t)y(t) \right] dt \\
&\quad + s^2 \int_0^T \left[ a(t)(\dot{y}(t))^2 + b(t)(y(t))^2 \right] dt.
\end{aligned}$$

Por la observación (1.41) tenemos que

$$\delta_x \mathcal{A}(y) = \frac{d}{ds} \mathcal{A}(x + sy) \Big|_{s=0} = 2 \int_0^T \left[ a(t)\dot{x}(t)\dot{y}(t) + b(t)x(t)y(t) \right] dt.$$

Por último para obtener la derivada de Gâteaux, calculamos por partes la integral anterior,

$$\begin{aligned}
\delta_x \mathcal{A}(y) &= 2a(t)\dot{x}(t)y(t) \Big|_0^T - 2 \int_0^T \left[ \dot{a}(t)\dot{x}(t) + a\ddot{x}(t) \right] y(t) dt + 2 \int_0^T b(t)x(t)y(t) dt \\
&= 2a(T)\dot{x}(T)y(T) - 2a(0)\dot{x}(0)y(0) \\
&\quad + 2 \int_0^T \left[ -a(t)\ddot{x}(t) - \dot{a}(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) \right] y(t) dt \\
&= 2 \int_0^T \left[ -a(t)\ddot{x}(t) - \dot{a}(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) \right] y(t) dt
\end{aligned}$$

**Ejemplo 1.51.** Sea

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left( \frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{\alpha}{|x(t)|} \right) dt$$

con  $H^1([0, T], \mathbb{C})$ . Sea  $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$  dado por la variación de Gâteaux es:

$$\delta_x \mathcal{A}(h) = \int_0^T \left( m\ddot{x} - \alpha \frac{x(t)}{|x(t)|^3} \right) h dt.$$

**Teorema 1.52.** Sea  $F, f, \mathfrak{X}, \mathfrak{B}_\epsilon$  definidos como en (1.1), (1.2), (1.3). Supongamos que  $F$  restringido al subconjunto  $\mathfrak{X}_0$  de  $\mathfrak{X}$  tiene un extremo relativo en  $x, y$   $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$  para algún  $\epsilon > 0$ , entonces

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \tag{1.6}$$

donde  $t \in [0, T]$ .

La ecuación (1.6) es llamada ecuación de *Euler-Lagrange* del funcional  $F$ .

*Demostración.* Sea  $x$  el extremo relativo de  $F$  restringido a  $\mathfrak{X}_0$ . Por la Proposición 1.46 y la ecuación (1.4) tenemos que

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} dt$$

para cualquier  $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$ . Ahora por el Lema 1.48, existe  $c \in \mathbb{R}^n$  tal que para obtener  $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \phi_x(t) = c$ , o equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau = c$$

para cualquier  $t \in [0, T]$ . Luego  $\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau = c$  es diferenciable con respecto a la variable  $t$ , de donde  $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t)$  también. Por lo tanto, la ecuación de arriba implica la ecuación de Euler-Lagrange (1.6).  $\square$

## 1.1 Cálculo de variaciones en el problema de $n$ cuerpos

En esta sección vamos a estudiar el problema de  $n$  cuerpos desde el punto de vista variacional.

Sea  $\mathcal{X} = \{x \in (\mathbb{R}^3)^n : m_1 x_1 + \dots + m_n x_n = 0\}$  el espacio de configuraciones, es decir, el espacio de posiciones con el centro de masas en el origen de coordenadas, y sea

$$\mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathcal{X}) = W^{1,2}([0, T], \mathcal{X}). \quad (1.7)$$

El Lagrangiano  $L(x, \dot{x})$  de  $x \in \mathfrak{X}$  está definido por

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) + U(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k |\dot{x}_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|. \quad (1.8)$$

Notemos que el Lagrangiano está bien definido casi en todas partes, pues  $x$  es absolutamente continua. Sea  $\widehat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \Delta$ , donde

$$\Delta = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n \mid x_i = x_j \text{ para alguna } i \neq j\}$$

es el conjunto de colisiones. Sea  $x(t) \in \widehat{\mathcal{X}}$  para cualquier  $t \in [0, T]$  y supongamos que  $x$  satisface las condiciones dadas en (1.2).

El funcional de acción  $\mathcal{A}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  asociado a la ecuación de movimiento de  $n$  cuerpos en el intervalo  $[0, T]$  está definido por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt \quad (1.9)$$

Observemos que  $H^1([0, T], \mathcal{X})$  es el espacio natural de trayectorias, pues la integral contiene términos con la derivada al cuadrado. Además, notemos que  $L(x, y)$  como una función del haz tangente de  $\mathcal{X}$ ,  $(T\mathcal{X})$ , es diferenciable en  $(x, y)$  excepto para  $x \in \Delta$ . Si  $x \in \widehat{\mathcal{X}}$  para  $t \in [0, T]$ , entonces existe un  $\epsilon > 0$  tal que,  $x(t) + h(t) \in \widehat{\mathcal{X}}$  para todo  $t \in [0, T]$  y  $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$ , donde

$$\mathfrak{B}_\epsilon = \{h \in C^1([0, T], \mathcal{X}) : h(0) = h(T) = 0, \sup_{t \in [0, T]} |h(t)| < \epsilon\}. \quad (1.10)$$

Por el Teorema 1.52 se concluye el siguiente corolario

**Corolario 1.53.** *Sea  $\mathcal{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{B}_\epsilon$  definidas en (1.7), (1.9), (1.10). supongamos que existe un extremo relativo  $x$  de  $\mathcal{A}$  en el subconjunto  $\mathfrak{X}_0$  de  $\mathfrak{X}$ . Si  $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$  y  $x(t) \in \widehat{\mathcal{X}}$  para cualquier  $t \in [0, T]$ , entonces  $x(t)$  es una solución de la ecuación de movimiento del problema de  $n$  cuerpos.*

Supongamos que  $\mathfrak{X}_0$  es un subespacio de  $\mathfrak{X}$  y  $x$  es un punto crítico de  $\mathcal{A}$  en  $\mathfrak{X}_0$ . Si  $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ , entonces  $x(t)$  resuelve la ecuación de movimiento para el problema de los  $n$  cuerpos para todo  $x(t) \in \widehat{\mathcal{X}}$ .

### 1.1.1 Principio de Simetría de Palais

En esta sección relacionaremos los puntos críticos del funcional de acción (1.1) con la *simetría* de un subespacio  $\mathfrak{X}_0$  de  $\mathfrak{X}$ . Es decir, consideraremos elementos del subespacio  $\mathfrak{X}_0$  los cuales tienen cierta *simetría* y además son puntos críticos del funcional de acción en algún subespacio de  $\mathfrak{X}_0$ . El resultado principal de esta sección (Teorema 1.56) afirma que también son puntos críticos de  $\mathfrak{X}_0$ . Para esto es necesario introducir el concepto de *acción de un grupo* sobre un conjunto, en particular sobre una variedad diferenciable.

**Definición 1.54.** Sea  $G$  un grupo multiplicativo con elemento identidad  $e$ . Se dice que  $G$  *actúa* (por la izquierda) en una variedad diferenciable  $\mathfrak{X}$  cuando existe una función  $\theta : G \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ , llamada *acción de  $G$  en  $\mathfrak{X}$*  que satisface

1. Para cada  $g \in G$  la función  $\theta_g(x) : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  dada por  $\theta_g(x) = \theta(g, x)$  es un difeomorfismo y  $\theta_e = Id_{\mathfrak{X}}$

2. Si  $h, g \in G$  entonces  $\theta_{hg} = \theta_h \circ \theta_g$

Es común denotar a  $\theta(g, x)$  simplemente por  $gx$ , así tenemos que las propiedades 1 y 2 se pueden escribir como  $ex = x$  y  $(hg)x = h(gx)$ . Una consecuencia inmediata de las propiedades es  $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$ .

Sea  $\text{Diff}(\mathfrak{X})$  el grupo de difeomorfismos de  $\mathfrak{X}$  en  $\mathfrak{X}$  con la operación composición. La función  $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{X})$  dado por  $\rho(g) = \theta_g$  define un homomorfismo de grupos llamado *homomorfismo inducido por  $\theta$* .

Consideremos un funcional  $F$  sobre un espacio de Banach  $\mathfrak{X}_0$ . Supongamos que un grupo  $G$  actúa sobre  $\mathfrak{X}_0$  a través de la acción  $\theta$ . Consideremos al homomorfismo  $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{X}_0)$  inducido por la acción. Tenemos la siguiente definición

**Definición 1.55.** Un funcional  $F : \mathfrak{X}_0 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  es  $\rho$  *invariante* en  $\mathfrak{X}_0$  si  $F(\rho(g)x) = F(x)$  para cualquier  $x \in \mathfrak{X}_0$  y para cualquier  $g \in G$ . El conjunto

$$\mathfrak{X}_0^\rho := \{x \in \mathfrak{X}_0 : \rho(g)x = x \text{ para toda } g \in G\}$$

es llamado  $\rho$ -*invariante* en  $\mathfrak{X}_0$ . Los puntos críticos de la restricción  $F|_{\mathfrak{X}_0^\rho}$  son llamados *puntos  $\rho$  críticos* en  $\mathfrak{X}_0$ .

Si  $\rho$  es una representación lineal, es decir, si  $\rho(g)$  es un automorfismo lineal para toda  $g \in G$  y  $\mathfrak{X}_0^\rho$  es un subespacio de  $\mathfrak{X}_0$ , es natural preguntarse si los puntos  $\rho$  críticos son en realidad puntos críticos del funcional  $F$ . Una respuesta parcial a esta pregunta es el siguiente Teorema el cual es un caso especial del llamado *Principio de Simetría de Palais* ([17], pág. 23).

**Teorema 1.56.** Sea  $F$  el funcional definido como en (1.1) y  $\mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ . Consideremos a  $F|_{\mathfrak{X}_0}$ , donde  $\mathfrak{X}_0$  es un subespacio de  $\mathfrak{X}$ . Sea  $G$  un grupo que actúa sobre  $\mathfrak{X}_0$  a través de la representación ortogonal  $\rho : G \rightarrow GL(\mathfrak{X}_0)$  donde  $GL(\mathfrak{X}_0)$  denota el grupo de automorfismos lineales en  $\mathfrak{X}_0$ . Supongamos que  $F|_{\mathfrak{X}_0}$  es invariante bajo la representación  $\rho$  y es Fréchet diferenciable en  $x \in \mathfrak{X}_0$ .

- a) Sea  $x \in \mathfrak{X}_0^\rho$  un punto  $\rho$  crítico de  $F$  en  $\mathfrak{X}_0$  entonces  $x$  es un punto crítico de  $F$  en  $\mathfrak{X}_0$ .
- b) Sean  $f, \mathfrak{B}_\epsilon$  como en (1.2) y (1.10). Si  $\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{B}_\epsilon = \mathfrak{X}_0$  para algún  $\epsilon > 0$ , entonces un punto  $x, \rho$  crítico de  $F$  en  $\mathfrak{X}_0$  es solución de la ecuación de Euler-Lagrange (1.6).

*Demostración.* Por simplicidad denotaremos a la restricción de  $F$  en  $\mathfrak{X}_0$  por  $F$ .

Iniciemos por demostrar (a). Por ser  $F$   $\rho$  invariante, y haciendo uso de la regla de la cadena, tenemos que  $F$  es Fréchet diferenciable en  $\rho(g)x$  para cualquier  $g \in G$  y su derivada es

$$DF(x) = D(F \circ \rho(g))(x) = DF(\rho(g)x) \circ \rho(g).$$

Consideremos el gradiente  $\nabla F(x)$  de  $F$  en  $x$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle \nabla F(x), h \rangle_{H^1} &= DF(x)(h) \\ &= DF(\rho(g)x)(\rho(g)h) \\ &= \langle \nabla F(\rho(g)x), \rho(g)h \rangle_{H^1} \\ &= \langle \rho(g)^{-1} \nabla F(\rho(g)x), h \rangle_{H^1} \end{aligned}$$

para toda  $g \in G$ ,  $h \in \mathfrak{X}_0$ . Por lo tanto  $\rho(g)\nabla F(x) = \nabla F(\rho(g)x)$ . Por ser  $x$   $\rho$ -invariante,  $\rho(g)\nabla F(x) = \nabla F(x)$  para toda  $g \in G$ . Así  $\nabla F(x) \in \mathfrak{X}_0^\rho$ . Puesto que  $x$  es punto  $\rho$ -crítico de  $F$  en  $\mathfrak{X}_0$ ,  $\nabla F(x)h = \langle \nabla F(x), h \rangle = 0$  para cualquier  $h \in \mathfrak{X}_0^\rho$ , en particular para  $h = \nabla F(x)$ , luego  $\nabla F(x) = 0$ . De esta manera concluimos diciendo que los puntos críticos de  $F$  restringida a  $\mathfrak{X}_0^\rho$  son en realidad puntos críticos de  $F$  en  $\mathfrak{X}_0$ .

Ahora vamos a la demostración de (b). Por el inciso (a) todo punto  $\rho$  crítico de  $F|_{\mathfrak{X}_0}$  y del Teorema 1.52,  $x$  resuelve las ecuaciones de Euler-Lagrange.  $\square$

## 1.2 Existencia de minimizadores

### 1.2.1 Principio variacional

El funcional de acción  $\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x, \dot{x})dt$  (asociado al problema de  $n$  cuerpos) restringido al espacio  $\mathfrak{X} = H^1([0, T], V)$  ó  $H^1(S_T, V)$  con  $S_T := [0, T] \setminus \{0, T\}$ , no alcanza su mínimo. Tenemos que  $\mathcal{A}(x) > 0$  para toda  $x \in \mathfrak{X}$ . Consideremos la sucesión  $(x_1^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t)) \in (\mathbb{R}^3)^n$  definida por

$$x_i^{(k)}(t) \equiv \left( k \cos\left(\frac{2\pi i}{k}\right), k \sin\left(\frac{2\pi i}{k}\right), 0 \right).$$

Esta sucesión  $x^{(k)}$  es divergente y  $\mathcal{A}(x^{(k)}) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ . Luego  $\inf_{\mathfrak{X}} \mathcal{A} = 0$ , es decir, el ínfimo no se alcanza en  $\mathfrak{X}$ . Por otro lado el Teorema 1.52 y el Corolario 1.53 nos permite restringir el problema a un subespacio  $\mathfrak{X}_0$  de  $\mathfrak{X}$ . Para asegurar la existencia de mínimos, el subespacio a elegir debe ser de tal forma que las sucesiones convergentes puedan ser minimizantes. Una condición para garantizar esto es pedir que  $\mathcal{A}$  sea coercitivo en  $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ .

**Definición 1.57.** Un funcional  $F$  en un espacio normado  $\mathfrak{X}$  es llamado *coercitivo* en un subconjunto  $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$  si  $F(x) \rightarrow +\infty$ , cuando  $\|x\| \rightarrow +\infty$ ,  $x \in \mathfrak{X}_0$ .

**Teorema 1.58.** Sea  $\mathfrak{X}$  un espacio de Banach reflexivo y  $M$  un subconjunto débilmente cerrado de  $\mathfrak{X}$ . Dado un funcional  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  coercitivo y débilmente inferiormente semicontinuo en  $M$ . Entonces  $f|_M$  es acotado inferiormente y alcanza su ínfimo.

*Demostración.* Si  $f \equiv +\infty$  no hay nada que demostrar. Supongamos  $f \neq +\infty$ . Sean  $\alpha = \inf_M f < +\infty$  y  $\{x_n\}$  una sucesión minimizante en  $M$ , esto es,  $f(x_n) \rightarrow \alpha$ . Si  $\{x_n\}$  no estuviera acotada, entonces existiría una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  tal que  $\|x_{n_k}\| \rightarrow +\infty$  y por la coercitividad tendríamos que  $f(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$  lo cual es imposible ya que  $\alpha < +\infty$ , por lo tanto la sucesión  $\{x_n\}$  es acotada en  $\mathfrak{X}$ . Puesto que  $\mathfrak{X}$  es reflexivo, existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  de  $\{x_n\}$  tal que  $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$  para algún  $x_0 \in \mathfrak{X}$ . Pero  $M$  es débilmente cerrado, por lo tanto  $x_0 \in M$ . Por la semicontinuidad tenemos que

$$f(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \alpha$$

y así  $x_0$  es un mínimo de  $f$  en  $M$ . □

## 1.2.2 Funcional débilmente semicontinuo inferiormente

**Lema 1.59.** Sea  $\mathcal{A}$ ,  $L$ ,  $\mathfrak{X}$  definidos como en (1.7), (1.8) y (1.9). Entonces  $\mathcal{A}$  es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente en  $\mathfrak{X}$ .

*Demostración.* Sea  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  una sucesión en  $\mathfrak{X}$ , la cual converge débilmente a  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Basta considerar el caso  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}) = c < +\infty$ . Entonces, existe una subsucesión  $x^{(k_l)}$  de  $x^{(k)}$  tal que  $c = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k_l)}) < \infty$ . Sin pérdida de generalidad trabajaremos con la sucesión original  $x^{(k)}$ , es decir, supondremos que  $c = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)})$ . Por lo tanto, la sucesión  $\mathcal{A}(x^{(k)})$  es acotada,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}) = C < +\infty$ .

Sea  $r_{ij}^{(k)} := |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}|$ , entonces  $r_{ij}^{(k)}$  converge uniformemente a  $r_{ij}$  en  $C^0([0, T], V)$ , pues el encaje  $\mathfrak{X} \hookrightarrow C^0$  es compacto (Teorema 1.39).

Para cualquier par  $(i, j)$ , con  $1 \leq i < j \leq n$ , la sucesión  $\frac{1}{r_{ij}^{(k)}}$  es acotada en  $L^1[0, T]$ , pues  $\mathcal{A}(x^{(k)})$  es acotado.

Sea  $E_{ij} = \{t \in [0, T] : r_{ij}(t) \neq 0\}$ . Demostremos que  $E_{ij}$  tiene medida de Lebesgue  $\mu$  completa. Supongamos lo contrario, sea  $\kappa_{ij} = \mu([0, T] \setminus E_{ij}) > 0$ . Sea  $\epsilon_{ij} = \frac{m_i m_j \kappa_{ij}}{C}$  y

$N_{ij} \in \mathbb{N}$  tal que  $\|r_{ij}^{(k)} - r_{ij}\|_{C^0} < \epsilon_{ij}$  cuando  $k > N_{ij}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x^{(k)}) &= \int_0^T L(x^{(k)}, \dot{x}^{(k)}) dt \\ &\geq \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{(k)}} dt \\ &\geq m_i m_j \int_{[0, T] \setminus E_{ij}} \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} dt \\ &\geq \frac{m_i m_j \kappa_{ij}}{\epsilon_{ij}} = C, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Sobre  $E_{ij}$  la sucesión  $\frac{1}{r_{ij}^{(k)}}$  converge a  $\frac{1}{r_{ij}}$  puntualmente, por el Lema de Fatou

$$\int_0^T \frac{1}{r_{ij}} dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} dt.$$

Usando el hecho de que la norma en  $L^2$  es secuencialmente débilmente inferiormente semicontinua (Lema 1.19) tenemos

$$\|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 = \|x_j\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_j^{(k)}\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2.$$

Puesto que  $\|x^{(k)} - x\|_{L^2}^2 = \int_0^T (x^{(k)} - x) \cdot (x^{(k)} - x) dt$  y además por la convergencia uniforme,  $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$  y tenemos que  $x^{(k)}$  converge a  $x$  en  $L^2([0, T], V)$ . Entonces

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_j^{(k)}\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2 = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2.$$

Por lo tanto,

$$\|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \int_0^T \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j |\dot{x}_j|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{(k)}} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n m_j \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2 + \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{(k)}} dt \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}). \end{aligned}$$

Esto demuestra el lema.



# Capítulo 2

## Regularización de colisiones binarias

En este Capítulo mostraremos en que consiste el problema de  $n$  cuerpos. Describiremos en qué consisten las regularizaciones de Sundman y Levi Civita para colisiones binarias, éstas se utilizarán en el Capítulo 3 para demostrar parte del Teorema 3.1.

### 2.1 Formulación general e integrales de movimiento

Consideremos  $n$  masas puntuales  $m_1, \dots, m_n$  con posiciones  $x_1, \dots, x_n$  en el espacio ( $x_i \in \mathbb{R}^3$ ), con respecto a un sistema de coordenadas fijo y con el origen en el centro de masas, las cuales interactúan bajo la acción gravitatoria de Newton. El problema de los  $n$  cuerpos consiste en determinar las posiciones y las velocidades para todo tiempo  $t$  ó caracterizar la totalidad de los posibles movimientos, es lo que se conoce como el *problema de los  $n$  cuerpos*.

A partir de las leyes de la dinámica de Newton, las ecuaciones de movimiento de las  $n$  partículas son  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden definidas en  $\mathbb{R}^3$

$$m_i \ddot{x}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{gm_i m_j (x_i - x_j)}{|x_j - x_i|^3}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

donde  $g$  es la constante de gravitación y  $|\cdot|$  es la norma euclídeana en  $\mathbb{R}^3$ .

Definimos  $\Delta_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^{3n} : x_i = x_j \text{ para } i \neq j\}$  como el conjunto de órbitas donde existe colisión de  $m_i$  con  $m_j$ .

Observemos que el lado derecho de la ecuación (2.1) representa la fuerza total ejercida por las  $(n - 1)$  partículas sobre la  $i$ -ésima partícula.

Las ecuaciones de movimiento (2.1) las podemos escribir como un sistema de  $6n$  ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{x} &= M^{-1}y, \\ \dot{y} &= -\nabla U(x)\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}$  es el vector de posición,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{3n}$  es el vector de momentos, esto es  $y_i = m_i \dot{x}_i$ ,  $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$  es la matriz de masas, y  $\nabla U(x)$  es el vector gradiente del potencial  $U(x)$ , definido como

$$U(x) = U(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{gm_i m_j}{|x_j - x_i|}.$$

Las ecuaciones (2.2) no están definidas en el conjunto

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}$$

es decir, cuando hay alguna colisión. El dominio donde está definido en el sistema (2.2) es el *espacio de fases*  $\mathfrak{F} = \{(x, y) : (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3n}\}$ , el cual tiene  $\dim \mathfrak{F} = 6n$ . El *espacio de configuraciones* o el espacio de posiciones es  $V = \{x \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta\}$ . Las ecuaciones de movimiento del sistema (2.2) se pueden escribir como

$$\dot{x}_i = \frac{y_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i - \sum_{j \neq i} \frac{gm_i m_j (x_i - x_j)}{|x_j - x_i|^3} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\tag{2.3}$$

donde el *Hamiltoniano* es

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^2}{2m_i} + U(x).\tag{2.4}$$

Como  $H$  es independiente del tiempo  $t$ , las ecuaciones Hamiltonianas (2.3) son autónomas y por lo tanto el Hamiltoniano es conservativo. En este caso  $H$  es una integral primera, conocida como *energía* del sistema

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \left( -\frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0.$$

Los vectores  $x$  y  $y$  se llaman *variables conjugadas*.

El problema de los  $n$  cuerpos tiene 10 constantes de movimiento, o integrales primeras independientes, las cuales nos permiten reducir la dimensión del espacio de fases a  $6n - 10$ .

Estas integrales son: la *energía*  $H$ , y tres componentes del *momento lineal*

$$a = \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^3;$$

las tres componentes del *centro de masas*

$$at + b = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad \text{con } b \in \mathbb{R}^3;$$

y las tres componentes del *momento angular*

$$J = \sum_{i=1}^n x_i \times y_i \quad \text{con } J \in \mathbb{R}^3.$$

Para más detalles ver [1], páginas 44-49.

Ahora definimos la función *Lagrangiana* como

$$L(\dot{x}, x) = K(\dot{x}) - U(x)$$

donde  $K(\dot{x})$  es la energía cinética y  $U(x)$  es la energía potencial. Notemos que el potencial depende exclusivamente de las coordenadas de posición.

En términos de la Lagrangiana, las ecuaciones de movimiento están dadas a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

El formalismo de Euler-Lagrange es equivalente a la segunda ley de Newton. Para ver esto, notemos que

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0.$$

Las cuales son las ecuaciones de movimiento (2.1).

La equivalencia de las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones de Hamilton las obtenemos del siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** *El sistema de las ecuaciones de Lagrange es equivalente al sistema de ecuaciones de  $2n$  ecuaciones de primer orden (ecuaciones de Hamilton).*

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial H}{\partial x_i},\end{aligned}$$

donde  $H(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i y_i - L(x, \dot{x}, t)$  es la transformación de Legendre de la función Lagrangiana vista como una función de  $\dot{x}$ .

*Demostración.* Ver la demostración en [1] página 65. □

## 2.2 El problema de 2 cuerpos

El problema de 2 cuerpos estudia el movimiento de dos partículas que se mueven por su mutua atracción gravitacional; este problema puede ser reducido al *problema de Kepler*. Considerando el origen de coordenadas en una de las partículas, digamos  $m_1$ , de tal forma que la otra partícula  $m_2$  se mueve bajo la acción gravitacional de  $m_1$ .

Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$  los vectores de posición de dos partículas con masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, relativos a un sistema de coordenadas inercial. Utilizando la Ley de Gravitación de Newton, las ecuaciones que describen a este movimiento son:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 &= -\frac{gm_1 m_2 (x_1 - x_2)}{|x_2 - x_1|^3}, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\frac{gm_1 m_2 (x_2 - x_1)}{|x_2 - x_1|^3}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

El objetivo del problema de 2 cuerpos es encontrar las soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  para posiciones y velocidades iniciales dadas. Iniciaremos reduciendo el sistema (2.5) al *problema de fuerza central*, pues a partir de éste podremos encontrar las soluciones.

Dividiendo la primera ecuación del sistema (2.5) entre  $m_1$ , la segunda entre  $m_2$ , restamos y consideramos que  $x = x_2 - x_1$ , entonces

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{gm_1 x}{|x|^3} - \frac{gm_2 x}{|x|^3} \\ &= -\frac{g(m_1 + m_2)x}{|x|^3} \\ &= -\frac{\mu}{|x|^3} x\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $\mu = m_1 + m_2$ , y sin pérdida de generalidad consideremos de aquí en adelante que  $g = 1$ . El *problema de fuerza central* definido en (2.6) se conoce como *problema de Kepler*.

Las soluciones de la ecuación (2.6) se llaman órbitas Keplerianas.

### 2.2.1 Estudio del problema reducido

El problema de 2 cuerpos está definido por la ecuación diferencial

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad U = U(x) = -\frac{m_1 m_2}{|x_2 - x_1|}$$

cuyas soluciones son secciones cónicas.

Ya que el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central se realiza en el plano, es natural introducir coordenadas polares  $r = |x|$  y  $\theta$ . Sea  $e_r = (\cos \theta, \sin \theta)$  el vector unitario que apunta desde el origen la masa puntual y  $e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$  el vector unitario perpendicular a  $e_r$  y apunta en dirección de valores crecientes del ángulo  $\theta$ . Entonces los vectores de posición, velocidad y aceleración pueden escribirse en coordenadas polares como

$$\begin{aligned} x &= r e_r, \\ \dot{x} &= \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta, \\ \ddot{x} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) e_r + \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \right) e_\theta. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos  $x$  y  $\dot{x}$  en la ecuación de momento angular  $\mathbf{J} = x \times \dot{x}$ , obteniendo  $\mathbf{J} = r^2 \dot{\theta} u$ , donde  $u$  es el vector unitario perpendicular al plano que contiene a  $e_r$  y  $e_\theta$ . Luego el momento angular que es constante se puede escribir escalarmente como

$$J = r^2 \dot{\theta}.$$

Por otro lado, como la ecuación (2.6) define un campo de fuerza central se satisface

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) e_r + \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \right) e_\theta = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} e_r.$$

Luego la ecuación de movimiento en coordenadas polares es de la forma

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0.$$

Usando la relación  $\theta = J/r^2$ , determinada por las condiciones iniciales, tenemos

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r \frac{J^2}{r^4} \quad \text{ó} \quad \ddot{r} = -\frac{\partial W}{\partial r} \quad (2.7)$$

donde  $W = W(r) = \frac{J^2}{2r^2} + U = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}$  se llama *energía potencial efectiva* o *potencial efectivo*,  $W = U_{efec}$ .

El problema de Kepler se resume en resolver el sistema (2.7), es decir, saber cuál es el comportamiento de  $r$  como función del tiempo  $t$ .

**Observación 2.2.** La energía total del problema de dimensión uno (pues la única variable, es la variable radial  $r$ ) está dada por

$$h_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + W(r), \quad \text{esto es } h_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \quad (2.8)$$

y es la misma que la energía total del problema original

$$h = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

ya que

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{(\dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta)^2}{2} \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\theta}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{J^2}{2r^2}.$$

Abusando de la notación, a partir de aquí consideraremos que  $h_1 = h$ . Entonces la ecuación de la energía total es

$$\frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2} \right) = \frac{\mu}{r} + h$$

de donde

$$\frac{1}{2} \frac{J^2}{r^2} \leq \frac{\mu}{r} + h.$$

Multiplicando esta última ecuación por  $r^2$  tenemos

$$\frac{1}{2} J^2 \leq \mu r + hr^2.$$

Como consecuencia vemos que si  $r \rightarrow 0$ , entonces  $J = 0$ .

**Observación 2.3.** Por otro lado, si la ecuación de la energía (2.8) la multiplicamos por  $r$  tenemos

$$\dot{r}^2 r + \frac{J^2}{r} = 2\mu r + 2hr$$

y en particular si  $J = 0$  se cumple que

$$\dot{r}^2 r \leq 2\mu r + 2hr$$

entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \dot{r}^2 r \leq \lim_{r \rightarrow 0} (2\mu r + 2hr) = 2\mu.$$

Esto significa que a pesar de que  $\dot{r} \rightarrow \infty$  como lo indica la ecuación (2.8) cuando  $J = 0$ , la cantidad  $\dot{r}^2 r$  se conserva acotada en colisión.

El comportamiento asintótico de  $r(t)$  y  $\dot{r}(t)$  cerca de colisión, es el mismo para el cualquier valor de  $h$ , esto se logra regularizando la función  $r(t)$ . En la próxima sección se mostrará esta afirmación.

## 2.2.2 Regularización de colisiones binarias

La ecuación (2.7) tiene una singularidad cuando  $r = 0$  la cual corresponde a colisión. Notemos que cuando  $r \rightarrow 0$  el potencial  $W = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \rightarrow \infty$ . Sea  $t = t^*$  el tiempo en que ocurre la colisión. Una solución  $r(t), \dot{r}(t)$  de (2.7) se llama *órbita de colisión* si  $r(t) \rightarrow 0$  y  $\dot{r}(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow t^*$ . Si el intervalo máximo de definición de la solución  $r(t)$  es  $[t_1, t^*)$  con  $t^* < \infty$  decimos que la solución tiene una singularidad en  $t = t^*$ .

Las singularidades de las ecuaciones de movimiento (2.7) se puede remover bajo un cambio adecuado de variable para la posición, velocidad y tiempo, las cuales se expresan en forma paramétrica en términos de una nueva variable. Este proceso se llama *regularización de colisión*.

En esta sección estudiaremos las dos regularizaciones de colisión binaria más conocidas, la de *Sundman* y la de *Levi-Civita*.

## 2.2.3 Regularización tipo Sundman

La idea principal de este método es compensar el crecimiento infinito de la velocidad (pues cuando existe colisión,  $\dot{r} \rightarrow \infty$ ), multiplicando el vector velocidad  $\dot{r}$  por un factor escalar adecuado que se anule ahí. Esta regularización fue introducida por Sundman en 1902 para el problema general de los tres cuerpos en el plano, ver [22].

Multipliquemos la ecuación de la energía (2.8) por  $r^2$  para quitar la singularidad del denominador y como estamos en el caso de colisión  $J = 0$ , entonces

$$\frac{1}{2}(\dot{r}r)^2 = hr^2 + \mu r. \quad (2.9)$$

Sea  $k$  una constante, la cual nos permitirá normalizar. Consideremos el reescalamiento del tiempo dado por  $dt = \frac{r}{k}d\tau$ . Luego tenemos que

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{r}{k} \frac{dr}{dt}, \quad (2.10)$$

es decir,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{k}{r} \frac{dr}{d\tau} = \frac{k}{r} r'.$$

Si sustituimos  $\dot{r}$  en la ecuación (2.9) entonces obtenemos

$$\frac{1}{2}k^2(r')^2 = hr^2 + \mu r. \quad (2.11)$$

Derivamos esta ecuación con respecto a  $\tau$  y dividamos entre  $r'$ , de tal forma que llegamos a

$$k^2 r'' = 2hr + \mu. \quad (2.12)$$

Como nos interesa saber qué pasa con el movimiento en caso de colisión, realizaremos el análisis fijando la energía ( $h = 0$ ,  $h > 0$  y  $h < 0$ ) para saber qué sucede con  $m_2$  antes, durante y después de colisionar con  $m_1$ . Esta información la obtenemos a partir de las condiciones iniciales.

**Caso I:** Sea  $h = 0$  y consideremos que  $k^2 = \mu$ , entonces de (2.12), obtenemos

$$r'' = 1. \quad (2.13)$$

En este caso, analizaremos qué pasa cuando ocurre colisión ( $r_0 = 0$ ), y cerca de colisión ( $r_0 > 0$ ). Iniciemos por considerar  $r_0 = 0$ , en cuyo caso tomamos las condiciones iniciales  $r(0) = 0$  y  $r'(0) = 0$ , donde  $\tau(0) = \tau_0 = 0$  y  $t_0 = 0$ . Usando la reparametrización del tiempo dada en (2.10), obtenemos el vector posición  $r$  y el tiempo real  $t$  como funciones regulares de  $\tau$ , es decir

$$r(\tau) = \frac{\tau^2}{2}, \quad t(\tau) = \frac{1}{k} \int_0^\tau r d\tau = \frac{\tau^3}{6k}. \quad (2.14)$$

Ahora, a partir de (2.14) calculemos  $r(t)$ , de tal forma que obtenemos

$$r(t) = r(\tau(t)) = \frac{(6k)^{\frac{2}{3}}}{2} t^{\frac{2}{3}}. \quad (2.15)$$

La ecuación anterior tiene una singularidad en  $t = \tau = 0$ , que es justo cuando ocurre colisión.

Es importante notar que en (2.15),  $r$  no es diferenciable para todo  $t \in \mathbb{R}$ , mientras que en el tiempo ficticio  $r$  se transforma en una función diferenciable (2.14) para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ , ver la Figura 2.1

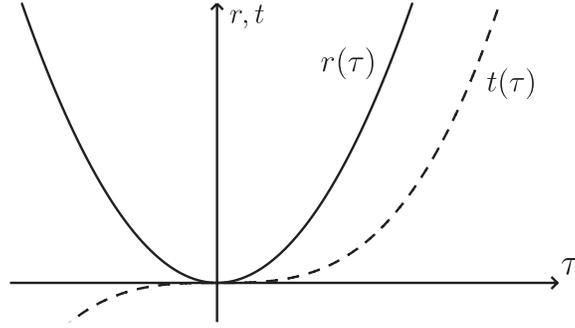


Figura 2.1: En  $r_0 = 0$  ocurre colisión

Ahora analizaremos qué pasa cerca de colisión, es decir, para  $r_0 > 0$ . Cuando las condiciones iniciales son  $r_0 > 0$  y  $r'(0) = \sqrt{2r_0}$  con  $\tau_0 = 0$ , tenemos que  $m_2$  después de colisionar diferenciablemente con  $m_1$  en el instante  $\tau = -\sqrt{2r_0}$ , la partícula se aleja a lo largo de una trayectoria parabólica, ver Figura 2.2.

$$r(\tau) = \left( \frac{\tau}{\sqrt{2}} + \sqrt{r_0} \right)^2, \quad t(\tau) = \frac{1}{k} \int_0^\tau r d\tau = \frac{\tau^3}{6k} + \sqrt{\frac{r_0}{2}} \frac{\tau^2}{k} + \frac{r_0^2}{k} \tau + t_0 \quad (2.16)$$

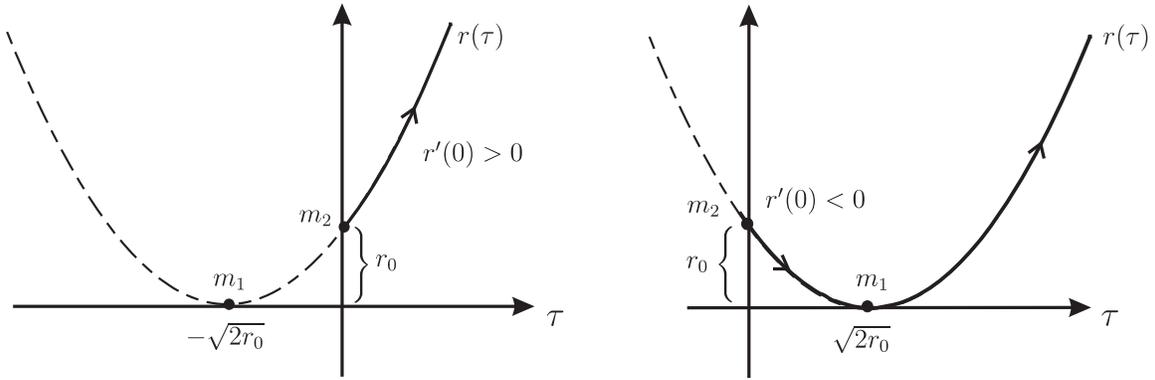


Figura 2.2: Regularización de la colisión binaria para  $r'(0) > 0$  y  $r'(0) < 0$

Por otro lado si las condiciones iniciales son  $r_0 > 0$  y  $r'(0) = -\sqrt{2r_0}$  y consideramos a  $\tau_0 = 0$ , obtenemos que  $m_2$  se aproxima a  $m_1$  parabólicamente, y sufre colisión en  $\tau = \sqrt{2r_0}$  y es expulsada a lo largo de la misma órbita, la cual queda descrita por  $r(\tau)$  diferenciable para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ , ver Figura 2.2.

$$r(\tau) = \left( \frac{\tau}{\sqrt{2}} - \sqrt{r_0} \right)^2, \quad t(\tau) = \frac{1}{k} \int_0^\tau r d\tau = \frac{\tau^3}{6k} - \sqrt{\frac{r_0}{2}} \frac{\tau^2}{k} + \frac{r_0^2}{k} \tau + t_0. \quad (2.17)$$

Queremos hacer notar que si en las ecuaciones (2.16) y (2.17), sustituimos  $r_0 = 0$  y  $t_0 = 0$ , recuperamos el sistema (2.14), como era de esperarse, pues éste es sólo un caso particular de cualquiera de los dos ya mencionados.

Por otro lado observemos que en las ecuaciones (2.16) y (2.17),  $t'(\tau) > 0$  para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ , de tal forma que  $t$  como función de  $\tau$  es monótona creciente y por lo tanto  $t(\tau)$  es un difeomorfismo, y las ecuaciones (2.16) y (2.17) definen a  $r$  de forma implícita como función regular de  $t$ . Como consecuencia hemos obtenido soluciones diferenciables de (2.13) para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ . Enseguida consideraremos el caso cuando la energía es positiva  $h > 0$ .

**Caso II:** Sea  $h > 0$  y elijamos a  $k^2 = 2h$ , entonces la ecuación (2.12) es equivalente a

$$r'' - r = \frac{\mu}{k^2}. \quad (2.18)$$

Como en el caso anterior consideraremos  $r_0 = 0$  y  $r_0 > 0$  con condiciones iniciales específicas.

Para el caso en que ocurre colisión al tiempo cero,  $r_0 = 0$ , tomamos en cuenta las condiciones iniciales  $r_0 = 0$  y  $r'(0) = 0$  con  $\tau = 0$  y  $t_0 = 0$ , y consideramos (2.10) para obtener las siguientes funciones regulares en el nuevo tiempo  $\tau$ :

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(\cosh \tau - 1), \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\sinh \tau - \tau). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ahora vamos a ver cuáles son las soluciones de (2.18), cuando  $r(\tau)$  está cerca de colisión. Primero consideraremos las condiciones iniciales  $r_0 > 0$  y  $r'(0) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}}$ , con  $\tau_0 = 0$ . Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(\cosh \tau - 1) + r_0 \cosh \tau + \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}} \sinh \tau, \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\sinh \tau - \tau) + \frac{r_0}{k} \sinh \tau + \frac{1}{k} \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}}(\cosh \tau - 1) + t_0. \end{aligned}$$

El sistema anterior se puede simplificar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2} [-1 + \cosh(\phi + \tau)], \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3} [-\tau + \sinh(\phi + \tau) - \sinh \phi] + t_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $\cosh \phi = \left(\frac{k^2 r_0}{\mu} + 1\right)$ ,  $\sinh \phi = \frac{k r_0}{\mu} \sqrt{\frac{2\mu}{r_0} + k^2}$  y  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Por otro lado cuando las condiciones iniciales son  $r_0 > 0$  y  $r'(0) = -\sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}}$  con  $\tau_0 = 0$ , las soluciones

son

$$\begin{aligned}
 r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(\cosh \tau - 1) + r_0 \cosh \tau + \sqrt{r_0^2 - \frac{2\mu r_0}{k^2}} \sinh \tau, \\
 t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\sinh \tau - \tau) + \frac{r_0}{k} \sinh \tau - \frac{1}{k} \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}}(\cosh \tau - 1) + t_0.
 \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos

$$\begin{aligned}
 r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2} [-1 + \cosh(\phi + \tau)], \\
 t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3} [-\tau - \sinh(\phi + \tau) + \sinh \phi] + t_0
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por lo tanto hemos obtenido soluciones regulares en el tiempo  $\tau$ , las cuales tienen un comportamiento hiperbólico.

**Caso III:** Sea  $h < 0$  y hacemos  $k^2 = -2h$ , entonces la ecuación (2.12) es equivalente a

$$r'' + r = \frac{\mu}{k^2},$$

la cual modela a un oscilador armónico al que se le aplica una fuerza externa constante.

Primero consideraremos el caso  $r_0 = 0$ , con condiciones iniciales  $r_0 = 0$  y  $r'(0) = 0$  y tomando en cuenta que  $\tau_0 = 0$  y  $t_0 = 0$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}
 r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(1 - \cos \tau), \\
 t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\tau - \sin \tau).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

En el caso de soluciones en que la colisión binaria ocurre al tiempo cero,  $r_0 = 0$ , estas ecuaciones describen una cicloide, ver la gráfica que se muestra en la Figura 2.3.

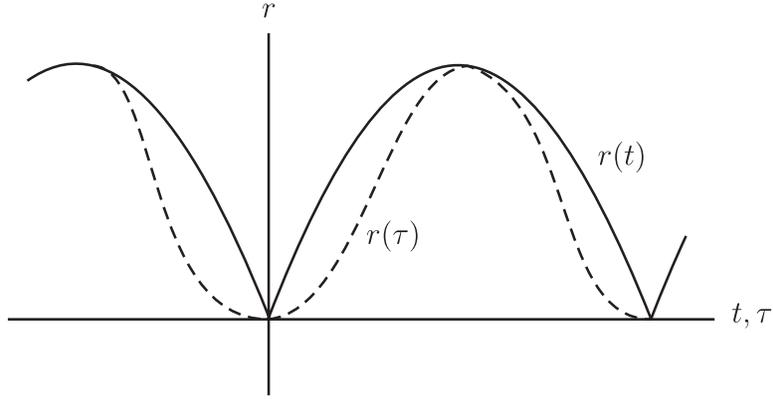


Figura 2.3: Cicloide en el caso de soluciones con colisión  $r_0 = 0$ .

Considerando las condiciones iniciales  $r_0 > 0$  y  $r'(0) = \pm\sqrt{\frac{2\mu r_0}{k^2} - r_0^2}$ ,  $\tau_0 = 0$ . La solución es

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(1 - \cos \tau) + r_0 \cos \tau \pm \sqrt{\frac{2\mu r_0}{k^2} - r_0^2} \sin \tau, \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\tau - \sin \tau) + \frac{r_0}{k} \sin \tau \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2\mu r_0}{k^2} - r_0^2}(1 - \cos \tau) + t_0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Si consideramos que  $\cos \phi = \left(\frac{k^2 r_0}{\mu} - 1\right)$  y  $\sin \phi = \frac{k r_0}{\mu} \sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - k^2}$ , con  $\phi \in [0, 2\pi)$ , entonces el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}[1 \pm \cos(\tau - \phi)], \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}[\tau \pm \sin(\tau - \phi) \pm \sin \phi] + t_0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Las funciones  $r(\tau)$  y  $t(\tau)$  son regulares en la variable  $\tau$ , y su comportamiento es periódico.

## 2.2.4 Regularización tipo Levi-Civita

La regularización de Levi-Civita, consiste en efectuar un cambio de variable en el espacio de fases, y otro en el tiempo para hacer más lentas las órbitas que van a colisión, obteniendo ecuaciones sin singularidades.

Consideremos a  $x$  y  $y = \dot{x}$  y realizamos el cambio de coordenadas  $x = \frac{\xi^2}{2}$ ,  $y = \frac{\eta}{\xi}$ .

El sistema de primer orden asociado a la ecuación de segundo orden del problema de Kepler es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{\mu}{|x|^2},\end{aligned}\tag{2.25}$$

y la energía como  $h = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{\mu}{|x|}$ . En coordenadas  $(\xi, \eta)$ , este último sistema toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{\eta}{|\xi|^2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{|\eta|^2 - 4\mu}{|\xi|^4}\xi.\end{aligned}$$

Ya que estas ecuaciones todavía tienen singularidad en  $\xi = 0$ , vamos a regularizarlas haciendo un reescalamiento del tiempo mediante  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{2}{|\xi|^2} = \frac{1}{|x|}$ , de tal forma que con este cambio se logra frenar las soluciones que van a colisión y eliminar la singularidad. Luego obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\xi' &= \frac{\eta}{2}, \\ \eta' &= h\xi,\end{aligned}\tag{2.26}$$

y

$$h = \frac{|\eta|^2 - 4\mu}{2|\xi|^2},\tag{2.27}$$

es la energía expresada en las nuevas coordenadas. A partir del sistema (2.26) obtenemos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\xi'' - \frac{h}{2}\xi = 0.\tag{2.28}$$

Ahora, veamos cuáles son las soluciones de (2.28) para los diferentes valores de la energía.

- $h < 0$

Aquí la ecuación (2.28) representa un oscilador armónico simple, cuyas curvas solución en el espacio de fases son curvas cerradas en el origen, es decir el origen es un centro.

- $h = 0$

En este caso la solución general de (2.28) es  $\xi = a(\tau - \tau_0)$  y sólo existen dos valores posibles para  $a$  que satisfacen la ecuación de la energía (2.27),

$$4|\xi'|^2 - 4\mu = 0$$

estos son  $a = \pm\sqrt{\mu}$ . Por lo tanto, en el plano fase las curvas son líneas rectas con  $\xi' = \pm\sqrt{\mu}$ . Luego en las variables originales tenemos

$$x = \xi^2 = \mu(\tau - \tau_0)^2, \quad t = \frac{\mu}{6}(\tau - \tau_0)^3.$$

- $h > 0$

En este caso la ecuación (2.28) con condiciones iniciales  $\xi_0 = \xi(0)$  y  $\xi'_0 = \xi'(0)$  tiene por solución

$$\xi = c_1 e^{\sqrt{h/2}\tau} + c_2 e^{-\sqrt{h/2}\tau}$$

donde  $c_1 = \frac{\xi_0}{2} + \frac{\xi'_0}{2}\sqrt{\frac{2}{h}}$ ,  $c_2 = \frac{\xi_0}{2} - \frac{\xi'_0}{2}\sqrt{\frac{2}{h}}$ .

Por otro lado, la relación de energía  $4|\xi|^2 - 2h|\xi'|^2 = 4\mu$  puede escribirse como

$$\frac{|\xi'|^2}{\mu} - h\frac{|\xi|^2}{2\mu} = 1,$$

la cual representa una hipérbola en el plano  $(\xi, \xi')$  cuyas hojas abren hacia el eje de las  $\xi'$ , teniendo por vértices los puntos con coordenadas  $(\xi, \xi') = (0, \pm\sqrt{\mu})$ , respectivamente.

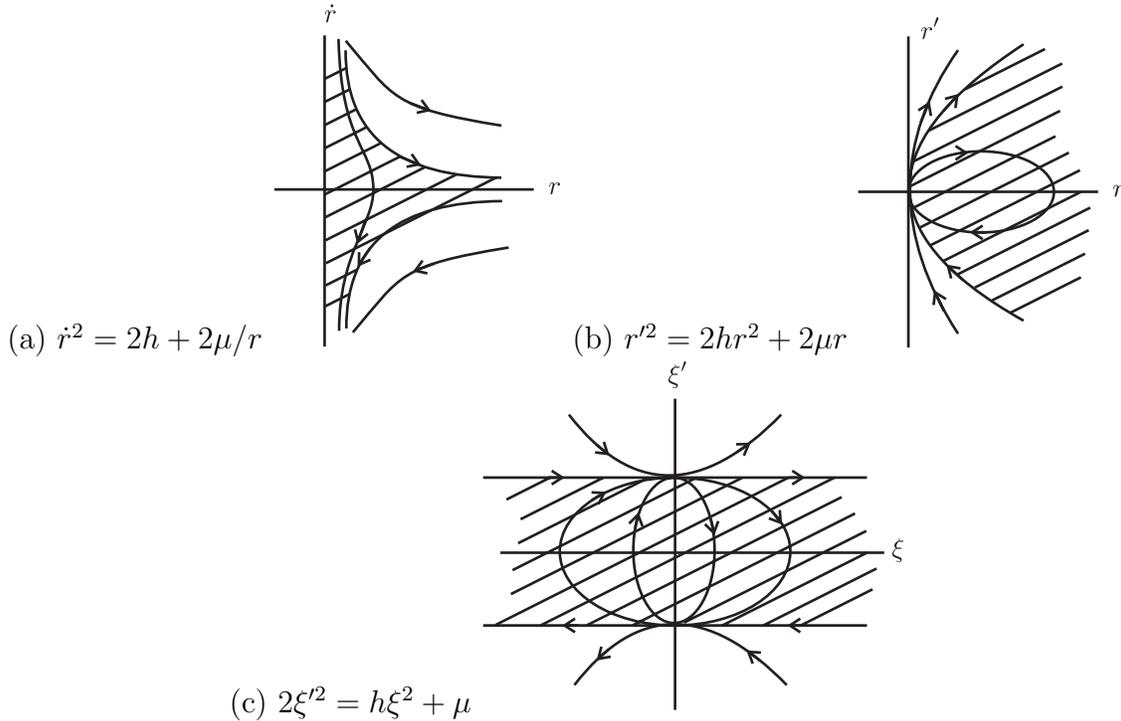


Figura 2.4: Retratos de fases en las coordenadas originales, de Sundman y Levi-Civita, respectivamente. Notemos que en (a)  $\dot{r} \rightarrow \infty$  si  $r \rightarrow 0$ ; (b)  $r' \rightarrow 0$  si  $r \rightarrow 0$ ; (c)  $\xi' \rightarrow \pm\sqrt{\mu}$  si  $\xi \rightarrow 0$ .

En la Figura 2.4 comparamos los espacios de fases para el problema colineal de fuerza central (con colisión) para las distintas variables consideradas.

En cada caso las curvas solución se obtienen como curvas de nivel de las ecuaciones de energía ahí mostradas para diversos valores de  $h$ . Las regiones sombreadas en la Figura 2.4 corresponden a  $h < 0$ .

La orientación de las órbitas pueden encontrarse usando las ecuaciones diferenciales, pero la forma más simple es a partir de que en cada caso una variable es derivada de la otra con respecto a su variable independiente (tiempo). Por lo tanto, en el primer y segundo cuadrante, por ejemplo, todas las soluciones van hacia la derecha puesto que la derivada es positiva y la  $r$  ó la  $\xi$  aumentan. La situación se invierte en el tercer y cuarto cuadrante.

Observemos que la descripción de las soluciones en las variables de Sundman y en las de Levi-Civita es estrictamente válida sólo para cada  $h$  fija; esto explica el aparente paso de diversas soluciones por un mismo punto (el origen y  $(0, \pm\sqrt{\mu})$ ), respectivamente, sin que éste sea punto de equilibrio para las ecuaciones diferenciales.



# Capítulo 3

## Existencia de la órbita de Schubart

Consideremos el problema colineal de 3 cuerpos en  $\mathbb{R}$  con masas  $m_1, m_2, m_3$ . Denotemos por  $x_1, x_2, x_3$  las coordenadas de los cuerpos y consideremos que  $g = 1$ , de tal forma que las ecuaciones de movimiento se escriben como

$$\ddot{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 m_j \frac{x_j - x_i}{|x_i - x_j|^3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

En [18] J. von Schubart estudió este problema con dos masas iguales  $m_1 = m_3$ ; y encontró numéricamente una solución periódica, simétrica y con dos colisiones binarias por período.

Para describir la órbita de Schubart fijemos el centro de masas en el origen y denotemos por  $T$  al período de la solución. Considerando que en el tiempo  $t = 0$  los cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  están en una configuración de colisión binaria en la parte negativa de la recta real ( $x_1(0) = x_2(0) < 0$ ) mientras que  $m_3$  está en la parte positiva de la recta real con velocidad cero ( $x_3(0) > 0, \dot{x}_3(0) = 0$ ). Si  $t \in [0, T/2]$  la posición de  $m_2$  se incrementa mientras que las posiciones de los otros dos cuerpos decrecen.

En el tiempo  $t = T/4$ , los tres cuerpos están en una configuración de Euler descrita por:

$$x_1(T/4) < 0, \quad x_2(T/4) = 0, \quad x_3(T/4) = -x_1(T/4) > 0.$$

Por otro lado, en el tiempo  $t = T/2$ ,  $m_2$  y  $m_3$  están en colisión binaria en la parte positiva de la recta real, mientras que  $m_1$  está en la parte negativa de la recta real. La configuración en  $t = T/2$  es obtenida de la inicial por la siguiente transformación

$$x_1(T/2) = -x_3(0), \quad x_2(T/2) = -x_2(0), \quad x_3(T/2) = -x_1(0).$$

Cuando  $t \in [T/2, T]$  la posición de  $m_2$  decrece, mientras las posiciones de los cuerpos  $m_1$  y  $m_3$  crecen. En el tiempo  $t = \frac{3}{4}T$  la configuración vuelve a ser de tipo Euler (la

misma que en el tiempo  $T/4$ ). En el tiempo  $t = T$  los tres cuerpos vuelven a estar como en la configuración inicial (ver Figura 3.1).

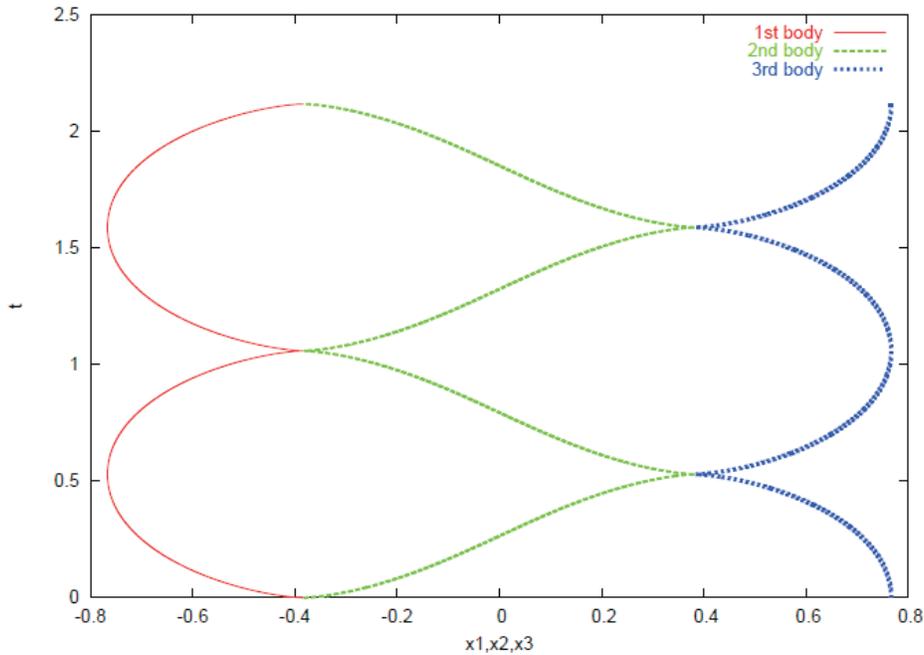


Figura 3.1: Diagrama de espacio tiempo de la órbita de Schubart con tres masas iguales, realizado por A. Chenciner. Figura tomada de [24].

En este Capítulo mostraremos en detalle la demostración que realizó A. Venturelli [25] de la existencia de la órbita de Schubart. La demostración está basada en el método directo de cálculo de variaciones, que consiste en demostrar la existencia de un mínimo sobre un conjunto de funciones donde el funcional de acción (o Lagrangiano) asociado al problema está definido.

El resultado principal por demostrar es el siguiente:

**Teorema 3.1.** *Si  $m_1 = m_3$  entonces existe una solución  $x = (x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  con periodo  $T$  del problema colineal de 3 cuerpos con las siguientes propiedades*

- i)  $x_1(t) \leq x_2(t) \leq x_3(t)$  para toda  $t \in \mathbb{R}$  con  $x_1(t) = x_2(t)$  (resp.  $x_2(t) = x_3(t)$ ) si y sólo si  $t$  es un múltiplo de  $T$  (resp.  $t - T/2$ ).*

ii)  $x$  verifica las siguientes condiciones de simetría

$$\begin{cases} x_1(T/2 - t) = -x_3(t), \\ x_2(T/2 - t) = -x_2(t), \\ x_3(T/2 - t) = -x_1(t). \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(T/2 + t) = -x_3(t), \\ x_2(T/2 + t) = -x_2(t), \\ x_3(T/2 + t) = -x_1(t). \end{cases}$$

iii) Las funciones  $t \mapsto x_1(t)$  y  $t \mapsto x_3(t)$  son estrictamente decrecientes en  $[0, T/2]$ , mientras que  $t \mapsto x_2(t)$  es estrictamente creciente en el mismo intervalo.

De ii) se deduce que las funciones  $t \mapsto x_1(t)$  y  $t \mapsto x_3(t)$  son estrictamente crecientes y  $t \mapsto x_2(t)$  es estrictamente decreciente en  $[T/2, T]$ . Además, en  $t = T/4$  y en  $t = \frac{3}{4}T$  la configuración verifica

$$x_2(t) = 0, \quad x_3(t) = -x_1(t) > 0,$$

la cual es una configuración central de Euler.

Al final del Capítulo demostraremos que  $\dot{x}_3(0) = \dot{x}_1(T/2) = 0$ .

En la demostración del Teorema 3.1 utilizaremos la estructura variacional del problema de 3 cuerpos, encontrando un mínimo del funcional de acción en un conjunto apropiado de curvas cerradas de período  $T$ , y demostraremos que el mínimo satisface las propiedades deseadas. Los métodos que se utilizan para demostrar i) fueron introducidos por R. Montgomery en [15] y desarrollados por A. Venturelli en su tesis doctoral [25].

### 3.1 Planteamiento variacional del problema

Ya que las ecuaciones (3.1) son invariantes bajo traslaciones, podemos fijar el centro de masas en el origen y definir el *espacio de configuraciones* para el problema colineal de 3 cuerpos como

$$\mathcal{X} = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \sum_{i=1}^3 m_i x_i = 0 \right\}.$$

Un elemento de  $\mathcal{X}$  es una *configuración*. Una configuración  $x = (x_1, x_2, x_3)$  donde  $x_i = x_j$  para algún  $i \neq j$  la llamaremos una *configuración con colisión* de  $m_i$  con  $m_j$  y la denotaremos por  $\Delta_{ij}$ . Luego

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}$$

es el conjunto de todas las configuraciones con colisión. Denotaremos por  $\widehat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \Delta$  al conjunto de *configuraciones sin colisión*.

Al espacio de configuraciones lo equipamos con el producto interno

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^3 m_i x_i y_i$$

donde  $x = (x_1, x_2, x_3)$  y  $y = (y_1, y_2, y_3)$  son dos configuraciones.

Introducimos la función potencial

$$U(x) = U(x_1, x_2, x_3) = - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|x_j - x_i|},$$

las ecuaciones de movimiento las podemos escribir como

$$\ddot{x} = \nabla U(x),$$

donde el gradiente es calculado con respecto al producto interno.

A partir de ahora supondremos que  $m_1 = m_3$  y que el movimiento de los tres cuerpos está restringido a una línea recta. Este problema es conocido como el *problema colineal de 3 cuerpos con dos masas iguales*. Como el espacio de configuraciones  $\mathcal{X}$  está equipado con un producto interno, el espacio de fases del sistema puede ser naturalmente identificado como  $\widehat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$ . Las siguientes funciones están definidas en  $\widehat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$ .

$$K(x, \dot{x}) = \|\dot{x}\|^2,$$

$$L(x, \dot{x}) = \frac{K(x, \dot{x})}{2} - U(x), \quad H(x, \dot{x}) = \frac{K(x, \dot{x})}{2} + U(x)$$

las cuales son dos veces la energía cinética, la función Lagrangiana y la función Hamiltoniana (o energía), respectivamente. También definimos el momento de inercia con respecto al centro de masas como

$$I(x) = \sum_{i=1}^3 m_i |x_i|^2.$$

Para poder trabajar con métodos variacionales vamos a introducir el espacio en el que trabajaremos, así como el funcional de acción.

El espacio de Sobolev  $\mathfrak{X} = H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$  es el espacio vectorial de los lazos  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$  absolutamente continuos<sup>1</sup> con período  $T$  para los cuales se cumple

$$\int_0^T \|\dot{x}\|^2 dt < +\infty.$$

---

<sup>1</sup> $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que para toda sucesión finita de intervalos disjuntos  $(a_k, b_k)$  de  $[0, T]$  tal que  $\sum |b_k - a_k| < \delta$ , se verifica  $\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$ .

El espacio  $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$  esta equipado con el producto escalar de Hilbert

$$\langle x, y \rangle = \int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{y} + x(t) \cdot y(t)) dt, \quad x, y \in H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X}).$$

Nosotros denotamos por  $\|\cdot\|_{H^1}$  a la norma asociada. El funcional de acción está definido por

$$\mathcal{A} : H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\},$$

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt = \int_0^T \left( \frac{1}{2} \|\dot{x}\|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|x_j - x_i|} \right) dt.$$

Si  $x$  es una configuración con colisión entonces definimos  $L(x, \dot{x}) = +\infty$ .

El funcional de acción es Gâteaux diferenciable en el conjunto abierto de lazos sin colisión (ver Proposición A.1) y a partir de la Proposición A.2, tenemos que los puntos críticos sin colisión de  $\mathcal{A}$  son las soluciones  $T$  periódicas del problema de 3 cuerpos. Por el Lema 1.59 el funcional de acción es semicontinuo inferiormente con respecto a la topología débil del espacio  $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ .

Sea  $G = \langle g, h \rangle$  un grupo con dos generadores que satisfacen

$$g^2 = h^2 = 1, \quad gh = hg$$

( $G$  es el grupo 4-Klein,  $D_2$ ). Las siguientes expresiones

$$g(x_1, x_2, x_3)(t) = (-x_3, -x_2, -x_1)(T/2 - t)$$

$$h(x_1, x_2, x_3)(t) = (-x_3, -x_2, -x_1)(T/2 + t)$$

definen la acción de  $G$  sobre  $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ . En la órbita de Schubart los generadores del grupo actúan sobre la configuración de la siguiente forma

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3)(0) &= (-x_3, -x_2, -x_1)(T/2) \\ h(x_1, x_2, x_3)(0) &= (-x_3, -x_2, -x_1)(T/2) \\ g(x_1, x_2, x_3)(T/2) &= (-x_3, -x_2, -x_1)(0) \\ h(x_1, x_2, x_3)(T/2) &= (-x_3, -x_2, -x_1)(0) \\ g(x_1, x_2, x_3)(T/4) &= (-x_3, -x_2, -x_1)(T/4) \\ h(x_1, x_2, x_3)(T/4) &= (-x_3, -x_2, -x_1)\left(\frac{3}{4}T\right) \\ g(x_1, x_2, x_3)\left(\frac{3}{2}T\right) &= (-x_3, -x_2, -x_1)(-T/4) \\ h(x_1, x_2, x_3)\left(\frac{3}{2}T\right) &= (-x_3, -x_2, -x_1)(T/4) \\ gh(x_1, x_2, x_3)(0) &= (x_1, x_2, x_3)(0). \end{aligned}$$

Además, ya que  $m_1 = m_3$ , el grupo  $G$  actúa por isometrías en  $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ . Ahora, denotamos por

$$\Lambda_G = \{x \in H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X}) : g(x) = x \text{ para toda } g \in G\}$$

el subespacio de lazos invariantes bajo la acción de  $G$ , de tal forma que por el principio de Palais (Teorema 1.56) un punto crítico de  $\mathcal{A}|_{\Lambda_G}$  es también un punto crítico de  $\mathcal{A}$ , por lo cual el punto crítico es una solución  $T$  periódica del problema colineal de 3 cuerpos.

**Proposición 3.2.** *Los lazos invariantes bajo la acción de  $G$  son los que satisfacen ii) del Teorema 3.1.*

*Demostración.* Sea  $x(t) = x(t+T) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  un lazo invariante, es decir para todo  $g \in G$  generador de  $G$  y  $t > 0$  se cumple  $g(x) = x$ , luego

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3)(T/2 - t) &= (-x_3, -x_2, -x_1)(t) \\ &= (x_1, x_2, x_3)(T/2 - t), \end{aligned}$$

así que se requiere

$$\begin{aligned} x_1(T/2 - t) &= -x_3(t), \\ x_2(T/2 - t) &= -x_2(t), \\ x_3(T/2 - t) &= -x_1(t). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3)(T/2 + t) &= (-x_3, x_2, x_1)(t+T) \\ &= (x_1, x_2, x_3)(T/2 + t). \end{aligned}$$

con lo que se cumpliría que

$$\begin{aligned} x_1(T/2 + t) &= -x_3(t), \\ x_2(T/2 + t) &= -x_2(t), \\ x_3(T/2 + t) &= -x_1(t). \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la proposición. □

La restricción  $\mathcal{A}|_{\Lambda_G}$  no es un funcional coercitivo, es decir, el conjunto de lazos que cumplen  $\mathcal{A}|_{\Lambda_G}(x) \leq C$  no son acotados para toda  $C > 0$ . Para ver ésto consideraremos el lazo constante  $x^{(n)} = (-n, 0, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  para toda  $t$ . Ya que  $x^{(n)}$  es

constante en particular se cumple  $x^{(n)} \in \Lambda_G$ . Luego al aplicarle los generadores de  $G$  tenemos

$$g(-n, 0, n)(t) = (-n, 0, n)(T/2 - t)$$

y

$$h(-n, 0, n)(t) = (-n, 0, n)(T/2 + t).$$

Ahora veamos que

$$\mathcal{A}(x^{(n)}) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Aplicando el funcional de acción a esta sucesión de lazos constantes tenemos

$$\mathcal{A}(x^{(n)}) = \int_0^T (\|\dot{x}^{(n)}\|^2 + U(x^{(n)}))dt = \int_0^T U(x^{(n)})dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

es decir, el mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Lambda_G}$  es cero y no se alcanza para  $n$  finito. Para evitar este fenómeno introduciremos una condición adicional. Sean  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$  y  $k$  tales que  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Denotamos por  $C_k$  al conjunto de configuraciones con colisión entre los cuerpos  $m_i$  y  $m_j$

$$C_k = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{X}, \quad x_i = x_j\}.$$

Observemos que  $\mathcal{X}$  es un espacio euclideo de dimensión dos y  $C_k$  con  $k = 1, 2, 3$  son líneas que pasan por el origen. Como  $m_1 = m_3$  y  $m_1x_1 + m_2x_2 + m_1x_3 = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x = (x_1, x_2, x_3), \quad m_1x_1 = -(m_1 + m_2)x_2\}, \\ C_2 &= \{x = (x_1, x_2, x_3), \quad 2m_1x_1 = -m_2x_2\}, \\ C_3 &= \{x = (x_1, x_2, x_3), \quad (m_1 + m_2)x_1 = -m_1x_3\}. \end{aligned}$$

El conjunto

$$S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{X}, \quad x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$$

es un sector angular convexo de  $\mathcal{X}$ . Para  $k = 1, 3$  denotamos por  $C_k^+$  la mitad de la línea de  $C_k$  contenida en  $S$ . En otras palabras,  $S$  es un sector angular convexo delimitado por  $C_3^+$  y  $C_1^+$ . Ver la Figura 3.1.

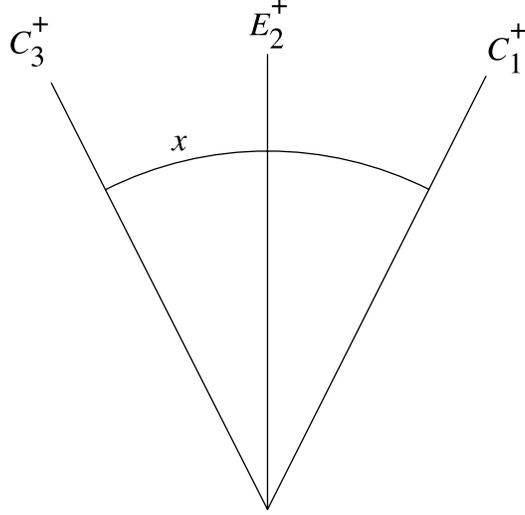


Figura 3.2: El sector  $S$ , el lazo  $x$  es un elemento de  $\Omega$ .

En esta sección denotaremos por  $g$  a cualquier elemento del grupo  $G$  y definiremos el conjunto

$$\Omega = \{x \in \Lambda_G, \quad x(0) \in C_3^+, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in S\}.$$

A partir del Teorema 1.27 tenemos que la convergencia débil en  $H^1$  implica la convergencia uniforme, luego se cumple lo siguiente:

**Proposición 3.3.**  $\Lambda_G$  y  $\Omega$  son subconjuntos cerrados en  $\mathfrak{X}$  con respecto a la topología débil.

*Demostración.* Sea  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), x_3^{(k)}(t)) \in \Lambda_G$  tal que  $x^{(k)} \rightharpoonup x$ . Luego habremos de demostrar que  $x \in \Lambda_G$ , es decir, debemos probar que  $g(x) = x$  para toda  $g \in G$ . Sea  $g \in G$ , entonces  $g(x) = g(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$ .  $\square$

Ahora, estamos en posibilidad de enunciar y probar la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.**  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  es un funcional coercitivo y tiene un mínimo.

Antes de demostrar ésto daremos algunos resultados previos.

**Proposición 3.5.** La función  $\tilde{U} = I^{\frac{1}{2}}U$  es homogénea de grado 0.

*Demostración.* Por definición  $I(x) = \sum_{i=1}^3 m_i |x_i|^2$ , luego

$$\tilde{U}(x) = I(x)^{\frac{1}{2}} U(x) = \left( \sum_{i=1}^3 m_i |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} U(x).$$

Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\tilde{U}(\lambda x) = \left( \sum_{i=1}^3 m_i |\lambda x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{m_i m_j}{|\lambda(x_i - x_j)|} = |\lambda| I(x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|\lambda|} U(x) = \tilde{U}(x).$$

□

Los puntos críticos de  $\tilde{U}$ , los cuales son también puntos críticos de  $U$  restringido al círculo  $I = \text{cte}$ , son llamadas *configuraciones centrales*,

Una configuración de  $n$  cuerpos  $x \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$  se dice que es *central* si

$$M^{-1} \nabla U(x) = 2\lambda x,$$

para alguna  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A partir de las ecuaciones de movimiento obtenemos

$$\nabla U(x) = \lambda \nabla I(x),$$

donde  $I(x) = \sum_{k=1}^n m_k |x_k|^2$  es el momento de inercia,  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange de  $U$  restringido a un nivel constante de  $I(x)$ . Ya que  $U$  es una función homogénea de grado  $-1$ , se tiene que  $\lambda = -\frac{U(x)}{2I(x)}$ . Luego se cumple

$$2I(x) \nabla U(x) + U(x) \nabla I(x) = 0,$$

por lo tanto  $x$  es una configuración central.

Las configuraciones centrales pueden ser caracterizadas como configuraciones que admiten un movimiento homotético. En el problema colineal de 3 cuerpos existen sólo tres configuraciones homotéticas. Éstas fueron encontradas por Euler y corresponden al mínimo de  $\tilde{U}$  en cada componente conexa de  $\widehat{\mathcal{X}}$  y son llamadas *configuraciones de Euler*.

Si  $k = 1, 2, 3$  denotamos por  $E_k$  a las configuraciones de Euler con el  $k$ -ésimo cuerpo en medio. Puesto que aquí estamos suponiendo que  $m_1 = m_3$  el cuerpo  $m_2$  está en el origen mientras que  $m_1$  y  $m_3$  están en una posición simétrica con respecto al origen. Denotamos por  $E_2^+$  la mitad de la línea de  $E_2$  contenida en  $S$ , que de hecho

es la bisectriz de  $C_1^+$  y  $C_3^+$ . Un lazo  $x \in \Omega$  está completamente contenido en  $S$ , si inicia en  $C_3^+$  en  $t = 0$  y cruza la línea  $E_2$  en  $t = T/4$ . La trayectoria  $x|_{[T/4, T/2]}$  es obtenida de  $x|_{[0, T/4]}$  por una reflexión con respecto a la línea de  $E_2$  de tal forma que en el tiempo  $t = T/2$  ésta cruza la mitad de la línea de  $C_1^+$ . La trayectoria  $x|_{[T/2, T]}$  no es otra cosa que  $x|_{[0, T/2]}$  en la dirección contraria (ver la Figura 3.2). Notemos que  $[0, T/4]$  es un intervalo fundamental de la acción de  $G$  en  $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ , es decir, la aplicación  $x \mapsto x|_{[0, T/4]}$  definida por

$$x: \Lambda_G \rightarrow H^1([0, T/4], \mathcal{X})$$

es inyectiva. Por lo tanto, la restricción sobre  $[0, T/4]$  define una biyección entre  $\Omega$  y el conjunto de trayectorias

$$\Omega_{\frac{1}{4}} = \{x \in H^1([0, T], S), \quad x(0) \in C_3^+, \quad x(T/4) \in E_2^+\} \quad (3.2)$$

donde  $H^1([0, T/4], S)$  denota el conjunto de trayectorias de  $H^1$  definidas en  $[0, T/4]$  con valores en  $S$ .

#### *Demostración de la Proposición 3.4*

Iniciemos por demostrar la coercitividad de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$ . Consideremos  $x \in \Omega$  y  $\bar{t} \in [0, T/4]$  un tiempo donde  $\|x(\bar{t})\|$  es máxima. Sea  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  la medida del ángulo convexo<sup>2</sup> medido desde  $C_3^+$  hacia  $x(\bar{t})$ . La longitud de la curva  $x|_{[0, T/4]}$  la denotaremos por  $L(x|_{[0, T/4]})$ . Véase la Figura 3.3

$$L(x|_{[0, T/4]}) \geq \|x(\bar{t})\| \operatorname{sen} \alpha. \quad (3.3)$$

---

<sup>2</sup>Un ángulo  $\alpha$  se dice que es *convexo* si  $0 < \alpha < \pi$  radianes.

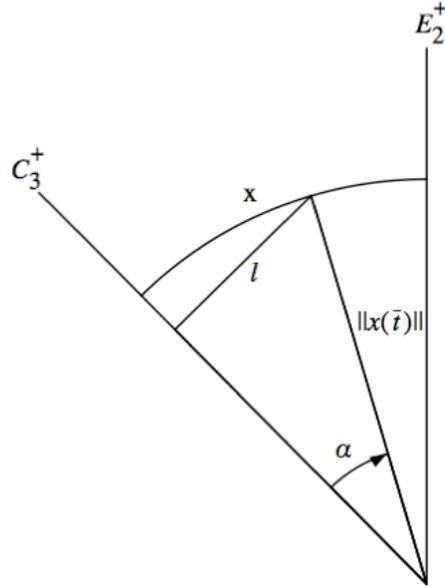


Figura 3.3: Longitud de la curva  $L(x|_{[0, T/4]})$ .

La invarianza de  $x$  bajo la acción de  $G$  nos permite afirmar que

$$\int_0^{T/4} \|\dot{x}(t)\| dt = \frac{1}{4} \int_0^T \|\dot{x}(t)\| dt,$$

y de la ecuación (3.3) tenemos

$$0 \leq \|x(\bar{t})\| \sin \alpha \leq \frac{1}{4} \int_0^T \|\dot{x}(t)\| dt \quad \text{para} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad, tenemos

$$\|x(\bar{t})\|^2 \sin^2 \alpha \leq \frac{1}{16} \left( \int_0^T \|\dot{x}(t)\| dt \right)^2. \quad (3.4)$$

Ahora aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz<sup>3</sup> con  $f(x) = \|\dot{x}(t)\|$  y  $g = 1$  tenemos

$$\frac{1}{16} \left( \int_0^T \|\dot{x}(t)\| dt \right)^2 \leq \frac{1}{16} \int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 dt \int_0^T dt \leq \frac{T}{16} \int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 dt,$$

---

<sup>3</sup>Si  $f, g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  entonces  $\left( \int_0^T (fg)(t) dt \right)^2 \leq \int_0^T f(t)^2 dt \int_0^T g(t)^2 dt$ .

utilizando la desigualdad (3.4) y recordando que  $\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 dt = \int_0^T K(x(t), \dot{x}(t)) dt$  obtenemos

$$\frac{16}{T} \|x(\bar{t})\|^2 \sin^2 \alpha \leq \int_0^T K(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (3.5)$$

Sabemos que

$$\|x(\bar{t})\| = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|,$$

entonces también se cumple

$$\|x(\bar{t})\|^2 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|^2,$$

por definición  $I(x(t)) = \|x(t)\|^2$ , luego de la ecuación anterior se tiene

$$\|x(\bar{t})\|^2 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|^2 = \max_{t \in [0, T]} I(x(t)), \quad (3.6)$$

y también se cumple que

$$\int_0^T I(x(t)) dt \leq T \max_{t \in [0, T]} I(x(t)). \quad (3.7)$$

De las desigualdades (3.5), (3.7) y la ecuación (3.6) obtenemos

$$\frac{16}{T^2} \sin^2 \alpha \int_0^T I(x(t)) dt \leq \frac{16}{T} \sin^2 \alpha \max_{t \in [0, T]} I(x(t)) \leq \int_0^T K(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (3.8)$$

Sea  $C$  un número real positivo. Para cada  $x \in \Omega$  tal que  $\mathcal{A}(x) \leq C$  tenemos

$$\int_0^T \frac{K(x(t), \dot{x}(t))}{2} dt \leq \int_0^T \left( \frac{K(x(t), \dot{x}(t))}{2} + U(x) \right) dt = \mathcal{A}(x) \leq C$$

por lo que

$$\int_0^T K(x(t), \dot{x}(t)) dt \leq 2C. \quad (3.9)$$

Ahora calculemos  $\|x\|_{H^1}^2$

$$\begin{aligned} \|x\|_{H^1}^2 &= \langle x, x \rangle_{H^1} \\ &= \int_0^T (\|\dot{x}(t)\|^2 + \|x(t)\|^2) dt \\ &= \int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 dt + \int_0^T \|x(t)\|^2 dt \\ &= \int_0^T K(x(t), \dot{x}(t)) dt + \int_0^T I(x(t)) dt \end{aligned}$$

y de las desigualdades (3.8) y (3.9) se sigue que

$$\|x\|_{H^1}^2 \leq 2C + 2C \frac{T^2}{16 \operatorname{sen}^2 \alpha} = 2C \left( 1 + \frac{T^2}{16 \operatorname{sen}^2 \alpha} \right),$$

por lo que el conjunto de lazos  $x \in \Omega$  los cuales verifican  $\mathcal{A}(x) \leq C$  son acotados con la norma  $H^1$ , es decir,  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  es un funcional coercitivo.

Siguiendo un razonamiento similar al dado por W. B. Gordon en [11] probaremos la existencia de un mínimo. Sea  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión decreciente de números reales positivos la cual converge al  $\inf \mathcal{A}|_{\Omega}$ . Por la coercitividad y la semicontinuidad inferior débil de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  cada conjunto

$$\Omega_n = \{x \in \Omega, \mathcal{A}(x) \leq c_n\},$$

es acotado en  $H^1$  y cerrado en la topología débil. Puesto que  $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$  es un espacio de Hilbert reflexivo, aplicando la Proposición 1.27 obtenemos que  $\Omega_n$  es compacto en la topología débil. Ya que la sucesión  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente se cumple  $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$  y definimos  $O = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ . Si  $x \in O$ , por definición de  $c_n$  tenemos

$$\mathcal{A}(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} c_n = \inf \mathcal{A}|_{\Omega},$$

en otras palabras cada elemento de  $O$  es un mínimo. □

En la siguiente sección demostraremos que los mínimos de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  son exactamente las soluciones que buscamos.

## 3.2 Regularidad de los mínimos

Las únicas singularidades que existen en la órbita de Schubart son debidas a colisión. En esta sección daremos una definición rigurosa de lo que aquí llamaremos una *solución con colisión* para el problema colineal de 3 cuerpos.

**Definición 3.6.** Una aplicación continua  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$  es una *solución con colisión* del problema colineal de 3 cuerpos si las siguientes condiciones se satisfacen.

- a) Sólo ocurren colisiones dobles.
- b) En cada intervalo acotado existe solamente un número finito de tiempos de colisión.
- c) Para toda  $i \in \{1, 2, 3\}$ , la aplicación  $t \rightarrow x_i(t)$  es una solución de (3.1) en todo intervalo de tiempo sin colisión involucrando al  $i$ -ésimo cuerpo.

d) Las colisiones dobles están regularizadas.

En la Sección 3.5 veremos la regularización de la colisión doble y demostraremos que el mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  es una solución con colisión del problema colineal de 3 cuerpos. Ahora, demostremos el siguiente resultado preliminar.

**Proposición 3.7.** *Si  $x$  es un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$ , entonces  $x$  es una solución del problema colineal de 3 cuerpos en cada intervalo de tiempo sin colisiones.*

*Demostración.* Denotemos por  $T_c(x) \subset \mathbb{R}$  al conjunto de tiempos  $t$  en donde ocurre colisión. Puesto que  $x$  es una trayectoria continua con acción finita  $T_c(x)$  es un conjunto cerrado con medida cero. Las componentes conexas de  $\mathbb{R} \setminus T_c(x)$  son intervalos abiertos. Sea  $(a, b)$  una de tales componentes conexas. Ya que  $t = 0$  y  $t = T/2$  son tiempos en los que ocurre colisión tenemos que  $b - a \leq T/2$ , y como  $x$  es invariante bajo la acción de  $G$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $(a, b) \subset (0, T/2)$ . Sea  $H_0^1([a, b], \mathcal{X})$  el espacio de trayectorias definidas de la siguiente forma

$$H_0^1([a, b], \mathcal{X}) = \{z \in H^1([a, b], \mathcal{X}), \quad \text{supp}(z) \subset (a, b)\}.$$

Demostremos que para todo  $z \in H_0^1([a, b], \mathcal{X})$  se cumple

$$\int_a^b (\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(t) + \nabla U(x(t)) \cdot z(t)) dt = 0, \quad (3.10)$$

ya que el soporte de  $z$  no contiene tiempos en donde ocurre colisión, esta integral está bien definida. Además, si la identidad (3.10) se verifica para todo  $z \in H_0^1([a, b], \mathcal{X})$ , por el Lema 1.48 se tiene  $\ddot{x}(t) = \nabla U(x)$ , y en consecuencia  $x(t)$  es solución del problema de 3 cuerpos en el intervalo  $(a, b)$ . Vamos a demostrar ahora la identidad (3.10). Sea

$$\sigma: \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}, \quad \sigma(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, -x_2, -x_1), \quad (3.11)$$

la reflexión con respecto a la línea  $E_2$ . Observemos que  $\sigma$  es una isometría de  $\mathcal{X}$  y ya que  $m_1 = m_3$  ésta deja invariante al potencial  $U$ . Si  $z \in H_0^1([a, b], \mathcal{X})$ , existe una única extensión de  $z$  (que la seguiremos denotando con  $z$ ) tal que  $z \in H^1(\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$  y  $z(t + T/2) = \sigma z(t)$  para toda  $t \in \mathbb{R}$ .

El lazo

$$\zeta(t) = \frac{z(t) + \sigma z(T/2 - t)}{2}$$

es un elemento de  $\Lambda_G$ , veamos que ésto se cumple.

Sean  $g, h$  los elementos generadores de  $G$ . Primero observemos que  $z(t + T/2) = \sigma z(t)$  y que  $z$  es periódica lo cual implica que

$$\begin{aligned} \sigma z(T/2 - t) &= z(T/2 - t + T/2) = z(T - t) = z(-t) \\ \sigma z(T/2 + t) &= z(T/2 + t + T/2) = z(T + t) = z(t) \end{aligned}$$

entonces

$$\zeta(t) = \frac{z(t) + \sigma z(T/2 - t)}{2} = \frac{z(t) + z(-t)}{2}.$$

Ahora veamos que  $\zeta$  es invariante con respecto a la acción de los generadores de  $G$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} g\zeta(t) &= \frac{gz(t) + gz(-t)}{2} \\ &= \frac{(-z_3, -z_2, -z_1)(T/2 - t) + (-z_3, -z_2, -z_1)(T/2 + t)}{2} \\ &= \frac{\sigma z(T/2 - t) + \sigma z(T/2 + t)}{2} \\ &= \frac{z(t) + z(-t)}{2} \\ &= \zeta(t). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} h\zeta(t) &= \frac{hz(t) + hz(-t)}{2} \\ &= \frac{(-z_3, -z_2, -z_1)(T/2 + t) + (-z_3, -z_2, -z_1)(T/2 - t)}{2} \\ &= \frac{\sigma z(T/2 + t) + \sigma z(T/2 - t)}{2} \\ &= \frac{z(-t) + z(t)}{2} \\ &= \frac{z(t) + z(-t)}{2} \\ &= \zeta(t). \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que  $\zeta(t) \in \Lambda_G$ .

Ahora vamos a estudiar el soporte del lazo  $\zeta$  en  $[0, T]$  para demostrar que el soporte de  $\zeta|_{[0, T]}$  está contenido en la unión de los siguientes intervalos

$$(a, b) \cup (T/2 - b, T/2 - a) \cup (a + T/2, b + T/2) \cup (T - b, T - a).$$

Ya que el soporte de  $z$  es el conjunto

$$\text{supp } z = \overline{\{t \in \mathbb{R} \mid z(t) \neq 0\}}$$

entonces el soporte de  $\zeta$  viene dado por

$$\text{supp } \zeta = \overline{\{t \in \mathbb{R} \mid \zeta(t) \neq 0\}} = \overline{\{t \in \mathbb{R} \mid z(t) + z(-t) \neq 0\}}.$$

Veamos quién es este conjunto.

Ya que  $\sigma z(T/2 - t) = z(-t)$  y  $\sigma z(T/2 + t) = z(t)$  entonces

$$-2\zeta(t) = (z_3, z_2, z_1)(T/2 + t) + (z_3, z_2, z_1)(T/2 - t).$$

Si  $z = (z_3, z_2, z_1)$ , entonces la ecuación anterior se puede escribir como

$$-2\zeta(t) = z(T/2 + t) + z(T/2 - t) \quad (3.12)$$

Calculemos  $\zeta(t)$  en los extremos del intervalo  $(T/2 + a, T/2 + b)$  utilizando la ecuación (3.12)

$$-2\zeta(a + T/2) = z(T/2 + a + T/2) + z(T/2 - a - T/2) = z(a) + z(-a),$$

y

$$-2\zeta(b + T/2) = z(T/2 + b + T/2) + z(T/2 - b - T/2) = z(b) + z(-b),$$

por lo que concluimos que el intervalo  $(a + T/2, b + T/2)$  forma parte del soporte de  $\zeta$ . Por otra parte calculemos ahora  $\zeta(t)$  en los extremos del intervalo  $(T/2 - b, T/2 - a)$ , nuevamente utilizando la ecuación (3.12), tenemos

$$-2\zeta(T/2 - b) = z(T/2 + T/2 - b) + z(T/2 - T/2 + b) = z(b) + z(-b),$$

y

$$-2\zeta(T/2 - a) = z(T/2 + T/2 - a) + z(T/2 - T/2 + a) = z(a) + z(-a),$$

lo cual nos dice que también el intervalo  $(T/2 - b, T/2 - a)$  forma parte del soporte de  $\zeta$ . Por último observemos que como  $z$  es un lazo periódico, tenemos que

$$z(-b) = z(T - b) \quad y \quad z(-a) = z(T - a)$$

Por lo tanto el soporte de  $\zeta$  está contenido en la unión de los intervalos

$$(a, b) \cup (T/2 - b, T/2 - a) \cup (a + T/2, b + T/2) \cup (T - b, T - a).$$

Cabe hacer notar que dos intervalos de esta familia son disjuntos o bien son iguales, pues cada uno es una componente conexa de  $\mathbb{R} \setminus T_c(x)$ , y podemos afirmar que la integral

$$\int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{\zeta} + \nabla U(x) \cdot \zeta)(t) dt,$$

está bien definida. Ya que el soporte de  $\zeta \in \Lambda_G$  está lejos de los tiempos de colisión, si consideramos un  $\epsilon$  suficientemente pequeño, obtenemos que  $x + \epsilon\zeta$  es un elemento de  $\Omega$ . Si  $x$  y  $\zeta \in \Omega$  entonces para los generadores  $g$  y  $h$  de  $G$ , se cumple

$$g(x + \epsilon\zeta) = x + \epsilon\zeta, \quad h(x + \epsilon\zeta) = x + \epsilon\zeta$$

además la función  $\epsilon \mapsto \mathcal{A}(x + \epsilon\zeta)$  es diferenciable, y la derivada de Gâteaux es cero, pues la trayectoria  $x$  es un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$ . Luego

$$0 = \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{A}(x + \epsilon\zeta) \Big|_{\epsilon=0} = \int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{\zeta} + \nabla U(x) \cdot \zeta)(t) dt. \quad (3.13)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \sigma z(T/2 - t) &= z(T - t), \\ \sigma \dot{z}(T/2 - t) &= -\dot{z}(T - t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como  $x \in \Omega$ , en particular  $x \in \Lambda_G$  y tenemos

$$(x_1, x_2, x_3)(t) = -(x_3, x_2, x_1)(T/2 - t),$$

$$(x_1, x_2, x_3)(t) = -(x_3, x_2, x_1)(T/2 + t),$$

y por lo tanto

$$(x_1, x_2, x_3)(-t) = -(x_3, x_2, x_1)(T/2 - (-t)) = -(x_3, x_2, x_1)(T/2 + t) = (x_1, x_2, x_3)(t),$$

lo cual implica que

$$x(t) = x(-t) \quad y \quad \dot{x}(t) = -\dot{x}(-t). \quad (3.15)$$

Por otro lado, ya que

$$\zeta(t) = \frac{z(t) + \sigma \zeta(T/2 - t)}{2} = \frac{z(t) + z(T - t)}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{\zeta} + \nabla U(x) \cdot \zeta)(t) dt &= \int_0^T \frac{\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(t) - \dot{x}(t) \cdot \dot{z}(T - t)}{2} dt \\ &\quad + \int_0^T \frac{\nabla U(x(t)) \cdot z(t) + \nabla U(x(t)) \cdot z(T - t)}{2} dt \\ &= \int_0^T \frac{\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(t)}{2} dt - \int_0^T \frac{\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(T - t)}{2} dt \\ &\quad + \int_0^T \frac{\nabla U(x(t)) \cdot z(t)}{2} dt + \int_0^T \frac{\nabla U(x(t)) \cdot z(T - t)}{2} dt. \end{aligned}$$

Si  $u = T - t$ , entonces  $du = -dt$ ,  $t = T - u$ ,  $u_0 = T$  y  $u_T = 0$ , además  $z(T - t) = z(-t)$  y utilizando (3.14) y (3.15) tenemos que

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \frac{\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(T - t)}{2} dt &= \int_T^0 \frac{\dot{x}(T - u) \cdot \dot{z}(u)}{2} du \\
&= \int_T^0 \frac{\dot{x}(T - t) \cdot \dot{z}(t)}{2} dt \\
&= -\int_0^T \frac{\dot{x}(-t) \cdot \dot{z}(t)}{2} dt \\
&= \int_0^T \frac{\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(t)}{2} dt,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{\nabla U(x(t)) \cdot z(T - t)}{2} dt &= -\int_T^0 \frac{\nabla U(x(T - u)) \cdot z(u)}{2} du \\
&= -\int_T^0 \frac{\nabla U(x(T - t)) \cdot z(t)}{2} dt \\
&= \int_0^T \frac{\nabla U(x(-t)) \cdot z(t)}{2} dt \\
&= \int_0^T \frac{\nabla U(x(t)) \cdot z(t)}{2} dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{\zeta} + \nabla U(x) \cdot \zeta)(t) dt &= \int_0^T \frac{\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(t)}{2} dt - \int_0^T \frac{\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(T - t)}{2} dt \\
&\quad + \int_0^T \frac{\nabla U(x(t)) \cdot z(t)}{2} dt + \int_0^T \frac{\nabla U(x(t)) \cdot z(T - t)}{2} dt \\
&= \int_0^T \frac{\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(t)}{2} dt + \int_0^T \frac{\dot{x}(t) \cdot \dot{z}(t)}{2} dt \\
&\quad + \int_0^T \frac{\nabla U(x(t)) \cdot z(t)}{2} dt + \int_0^T \frac{\nabla U(x(t)) \cdot z(t)}{2} dt \\
&= \int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{z} + \nabla U(x) \cdot z)(t) dt.
\end{aligned}$$

Notemos que el soporte de  $z$  en  $[0, T]$  es el intervalo  $(a, b) \subset (0, T/2)$ , y por simetría existe un intervalo de igual longitud en  $[T/2, T]$  de donde

$$\int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{z} + \nabla U(x) \cdot z)(t) dt = 2 \int_a^b (\dot{x} \cdot \dot{z} + \nabla U(x) \cdot z)(t) dt.$$

Ya que  $x$  es un mínimo y es solución del problema de  $n$  cuerpos, tenemos

$$\int_a^b (\dot{x} \cdot \dot{z} + \nabla U(x) \cdot z)(t) dt = 0.$$

Lo cual completa la demostración.

□

### 3.3 Ausencia de colisiones triples

Esta sección está dedicada a la demostración del siguiente resultado.

**Teorema 3.8.** *Un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  no tiene colisión triple.*

*Demostración.* Sea  $x$  un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$ . Como  $x \in \Omega$ , es invariante bajo la acción de  $G$ , es suficiente demostrar que  $x|_{[0, T/4]}$  no tiene colisión triple. La trayectoria  $x|_{[0, T/4]}$  es un mínimo de  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}|_{\Omega_{\frac{1}{4}}}$ , donde  $\Omega_{\frac{1}{4}}$  es la clase de trayectorias definidas en (3.2) tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\frac{1}{4}} &: H^1([0, T/4], \mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \\ \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(z) &= \int_0^{\frac{T}{4}} \left( \frac{K(z, \dot{z})}{2} + U(z) \right) (t) dt. \end{aligned}$$

Realizaremos la demostración por contradicción.

Iniciemos por suponer que  $x$  tiene una colisión triple en  $\bar{t} \in [0, T/4]$ , después construiremos una trayectoria en  $\Omega_{\frac{1}{4}}$  cuya acción es estrictamente más pequeña que la acción en la trayectoria  $x|_{[0, T/4]}$ . La demostración la haremos en dos etapas: en la primera encontraremos una trayectoria  $\bar{x} \in \Omega_{\frac{1}{4}}$  con una colisión triple tal que la acción sea mínima; en la segunda etapa demostraremos, vía una deformación local, que  $\bar{x}$  no es el mínimo de  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}|_{\Omega_{\frac{1}{4}}}$ .

Sea  $x_{E_2^+}$  una configuración de Euler normalizada, es decir con  $I = 1$  la cual pertenece a  $E_2^+$ . Notemos que  $x_{E_2^+} = (1, 0, -1)$  si  $m_1 = m_3 = 1$ .

Sea  $r(t) = \|x(t)\|$ . Observemos que

$$r = \|x\|, \quad r^2 = \|x\|^2, \quad \dot{r}^2 = \|\dot{x}\|^2, \quad r\dot{r} = \langle x, \dot{x} \rangle,$$

de tal forma que usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$r\dot{r} \leq \|x\| \|\dot{x}\|, \quad \text{entonces} \quad \dot{r}^2 \leq \|\dot{x}\|^2.$$

Por lo tanto

$$\dot{r}^2 \leq K. \tag{3.16}$$

Ahora, sea  $\mathcal{G} = \tilde{U}(x_{E_2^+})$ . Ya que una configuración central es un mínimo de  $\tilde{U}$ , (ver Apéndice ??) tenemos que  $\mathcal{G}$  es un mínimo de  $\tilde{U}$  en  $S$ , como consecuencia tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(rx_{E_2^+}) &= \int_0^{T/4} \left( \frac{\|\dot{r}x_{E_2^+}\|^2}{2} + U(rx_{E_2^+}) \right) (t) dt \\ &= \int_0^{T/4} \left( \frac{\|\dot{r}x_{E_2^+}\|^2}{2} + \frac{U(x_{E_2^+})}{r} \right) (t) dt \\ &= \int_0^{T/4} \left( \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\mathcal{G}}{r} \right) (t) dt, \end{aligned}$$

ya que  $\|\dot{r}x_{E_2^+}\|^2 = |\dot{r}|^2 \|x_{E_2^+}\|^2 = \dot{r}^2$  pues el momento de inercia de  $x_{E_2^+}$  es 1 y  $U$  es homogénea de grado  $-1$ , es decir, se cumple  $U(\lambda x) = \frac{U(x)}{\lambda}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , además  $U(x_{E_2^+}) = \tilde{U}(x_{E_2^+})$ .

Por la desigualdad (3.16) tenemos que  $\dot{r}^2 \leq K$  y como se cumple  $U(x_{E_2^+}) \leq U(x)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(rx_{E_2^+}) &= \int_0^{T/4} \left( \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\mathcal{G}}{r} \right) (t) dt \\ &\leq \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x|_{[0, T/4]}). \end{aligned}$$

El mínimo de  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(vx_{E_2^+})$  se toma en una de las trayectorias  $v \in H^1([0, T/4], \mathbb{R}^+)$  que habrá de satisfacer la restricción  $v(\bar{t}) = 0$ , y es alcanzado por una trayectoria  $t \mapsto v(t)x_{E_2^+}$  lo cual es realizado por una solución con colisión seguida por una solución de expulsión del problema de Kepler en dimensión uno. Para ver esto consideremos la ecuación

$$F = ma = \nabla U(x),$$

la cual se cumple para sistemas conservativos, en nuestro caso  $m = 1$ , de tal forma que al derivar la trayectoria  $vx_{E_2^+}$  se tiene  $a = \ddot{v}x_{E_2^+}$ , así

$$\ddot{v}x_{E_2^+} = \nabla U(vx_{E_2^+}),$$

y por la homogeneidad del potencial  $U$  obtenemos

$$\ddot{v}x_{E_2^+} = \nabla U(vx_{E_2^+}) = v^{-2} \nabla U(x_{E_2^+}),$$

de tal forma que multiplicando ambos lados por  $x_{E_2^+}^T$  y utilizando el Teorema de Euler

para funciones homogéneas<sup>4</sup> podemos concluir que

$$\ddot{v} = -\frac{U(x_{E_2^+})}{v^2},$$

y como consecuencia tenemos

$$\begin{aligned} \dot{v}x_{E_2^+} &= \nabla U(vx_{E_2^+}), \\ x_{E_2^+}\ddot{v} &= -\frac{\mathcal{G}}{v^2}\dot{v}, \\ \ddot{v} &= -\frac{\mathcal{G}}{v^2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Es decir,

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x|_{[0, T/4]}) \geq \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(vx_{E_2^+}),$$

donde  $vx_{E_2^+}|_{[0, \bar{t}]}$  es la mitad de una solución homotética de expulsión-colisión de período  $2\bar{t}$ , y  $vx_{E_2^+}|_{[\bar{t}, T/4]}$  es la mitad de una solución homotética de expulsión-colisión de período  $2(T/4 - \bar{t})$ . Observemos que esta trayectoria no está en  $\Omega_{\frac{1}{4}}$  a menos de que  $\bar{t} = 0$ . Ya que el funcional de acción de las órbitas de Kepler está dado por

$$\mathcal{A}(x) = 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{1/3} T^{1/3},$$

tenemos que  $\alpha = \mathcal{G}$  y por lo tanto

$$\mathcal{A}(\tau) = \alpha_0\tau^{\frac{1}{3}}, \quad \alpha_0 = \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}(\pi\mathcal{G})^{\frac{2}{3}}.$$

(ver [4]). Ahora vamos a usar los argumentos dados por W. B. Gordon en [11] para órbitas de Kepler con múltiples colisiones. A partir del Lema B.3 tenemos que se verifica la igualdad (B.3), de donde podemos afirmar que

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}(x(2\tau)) = \frac{3}{2}(m\alpha^2\pi^2)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}},$$

---

<sup>4</sup>Sea  $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $C$  tal que si  $(x_1, \dots, x_n) \in C$ , también  $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in C$  con  $\lambda$  positivo.  $f$  es homogénea de grado  $k$  si y sólo si

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = kf(x_1, \dots, x_n).$$

de donde

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(vx_{E_2^+}) &= \frac{1}{2}\mathcal{A}(vx_{E_2^+})(\bar{t}) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(vx_{E_2^+})(T/4 - \bar{t}) \\ &= \frac{3}{2}(\pi\mathcal{G})^{\frac{2}{3}}(\bar{t})^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}(\pi\mathcal{G})^{\frac{2}{3}}(T/4 - \bar{t})^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Usando el hecho de que la función  $s \mapsto s^{\frac{1}{3}}$  es convexa y la Observación B.6 tenemos que

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(vx_{E_2^+}) = \frac{\alpha_0}{2^{\frac{2}{3}}} \left( \bar{t}^{\frac{1}{3}} + (T/4 - \bar{t})^{\frac{1}{3}} \right) \geq \frac{\alpha_0}{2^{\frac{2}{3}}} (T/4)^{\frac{1}{3}} = \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(\bar{x}),$$

donde

$$\bar{x}: [0, T/4] \rightarrow S, \quad \bar{x}(t) = u(t)x_{E_2^+}$$

es una solución homotética de expulsión (la mitad de la solución homotética de expulsión-colisión de período  $T/2$ ). Notemos que  $\bar{x}$  es un elemento de  $\Omega_{\frac{1}{4}}$ , ya que  $u(0)$  está en colisión en  $\bar{t} = 0$  y  $\bar{x}(T/4) = u(T/4)x_{E_2^+}$  es una configuración de Euler.

En la siguiente etapa de la demostración construiremos una deformación explícita de  $\bar{x}$  en  $\Omega_{\frac{1}{4}}$  la cual hace decrecer la acción. Estos argumentos fueron usados por E. Serra, S. Terraccini, R. Montgomery y A. Venturelli en [19], [15], y [24], respectivamente. Sea  $z \in C_3^+$  una configuración normalizada. Por definición de  $E_2^+$  y  $C_3^+$  tenemos

$$\begin{aligned}x_{E_2^+} &= (x_1, x_2, x_3), & \text{con} & \quad x_2 = 0, \quad x_3 > 0, \quad x_1 = -x_3, \\ z &= (z_1, z_2, z_3), & \text{con} & \quad z_1 = z_2 < 0 < z_3.\end{aligned}$$

Dado un  $\epsilon > 0$ , definimos la función  $f_\epsilon: [0, T/4] \rightarrow \mathbb{R}^+$  por

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \epsilon^{\frac{3}{2}}] \\ \frac{\epsilon + \epsilon^{\frac{3}{2}} - t}{\epsilon} & \text{si } t \in [\epsilon^{\frac{3}{2}}, \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon] \\ 0 & \text{si } t \in [\epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon, T/4] \end{cases}$$

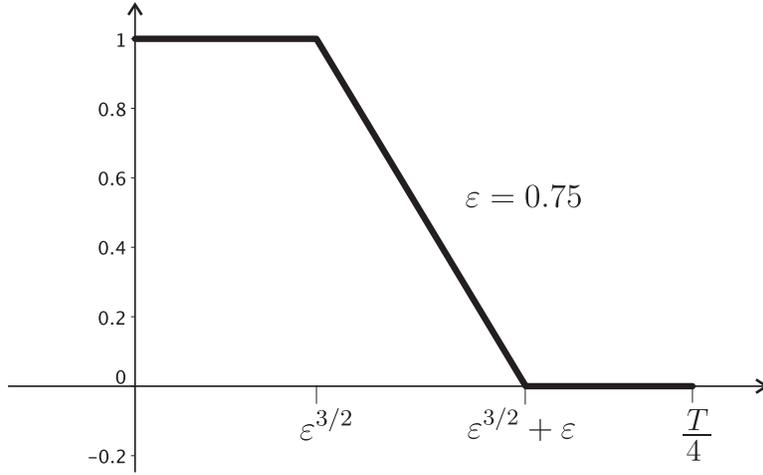


Figura 3.4: Gráfica de la función  $f_\epsilon$ , para  $\epsilon = 0.75$

y definimos  $\bar{x}_\epsilon = \bar{x} + \epsilon f_\epsilon z$ . Ya que  $S$  es convexo y  $f_\epsilon(t)$  es constante en el intervalo  $[0, \epsilon^{3/2}]$ , la trayectoria  $\bar{x}_\epsilon$  es un elemento de  $\Omega_{\frac{1}{4}}$ , pues  $\bar{x}_\epsilon(0) = \bar{x}(0) + \epsilon z$  donde  $x_1 = x_2$  y  $z_1 = z_2$  y  $\bar{x}_\epsilon(T/4) = \bar{x}(T/4)$  la cual es una configuración de Euler. Ahora consideremos, la diferencia entre la acción de  $\bar{x}_\epsilon$  y la de  $\bar{x}$  en el intervalo  $[0, T/4]$ , es decir

$$\int_0^{T/4} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}_\epsilon\|^2}{2} + U(\bar{x}_\epsilon) \right) dt - \int_0^{T/4} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}\|^2}{2} + U(\bar{x}) \right) dt.$$

Tomando en cuenta la definición de  $f_\epsilon(t)$  habremos de considerar que

$$\int_0^{T/4} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}_\epsilon\|^2}{2} + U(\bar{x}_\epsilon) \right) dt = \int_0^{\epsilon^{3/2}} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}_\epsilon\|^2}{2} + U(\bar{x}_\epsilon) \right) dt + \int_{\epsilon^{3/2}}^{\epsilon^{3/2} + \epsilon} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}_\epsilon\|^2}{2} + U(\bar{x}_\epsilon) \right) dt + \int_{\epsilon^{3/2} + \epsilon}^{T/4} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}_\epsilon\|^2}{2} + U(\bar{x}_\epsilon) \right) dt,$$

mientras que

$$\int_0^{T/4} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}\|^2}{2} + U(\bar{x}) \right) dt = \int_0^{\epsilon^{3/2}} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}\|^2}{2} + U(\bar{x}) \right) dt + \int_{\epsilon^{3/2}}^{\epsilon^{3/2} + \epsilon} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}\|^2}{2} + U(\bar{x}) \right) dt + \int_{\epsilon^{3/2} + \epsilon}^{T/4} \left( \frac{\|\dot{\bar{x}}\|^2}{2} + U(\bar{x}) \right) dt.$$

Para calcular estas integrales veamos cómo se comporta la función  $\bar{x}_\epsilon = \bar{x} + \epsilon f_\epsilon z$ ,

$$\bar{x}_\epsilon = \begin{cases} \bar{x} + \epsilon z & \text{si } t \in [0, \epsilon^{3/2}], \\ \bar{x} + \epsilon f_\epsilon z & \text{si } t \in [\epsilon^{3/2}, \epsilon^{3/2} + \epsilon], \\ \bar{x} & \text{si } t \in [\epsilon^{3/2} + \epsilon, T/4], \end{cases}$$

y dado que  $\epsilon$  y  $z$  son constantes con respecto de  $t$ , la derivada de  $\dot{\bar{x}}_\epsilon$  es dada por

$$\dot{\bar{x}}_\epsilon = \begin{cases} \dot{\bar{x}} & \text{si } t \in [0, \epsilon^{3/2}], \\ \dot{\bar{x}} - z & \text{si } t \in [\epsilon^{3/2}, \epsilon^{3/2} + \epsilon], \\ \dot{\bar{x}} & \text{si } t \in [\epsilon^{3/2} + \epsilon, T/4], \end{cases}$$

de donde concluimos que la diferencia de las acciones es la suma de tres integrales, es decir,

$$\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(\epsilon) = \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(\bar{x}_\epsilon) - \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(\bar{x}) = A_1(\epsilon) + A_2(\epsilon) + A_3(\epsilon)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(\epsilon) &= \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} (U(\bar{x}_\epsilon) - U(\bar{x}))(t) dt, \\ A_2(\epsilon) &= \int_{\epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} (U(\bar{x}_\epsilon) - U(\bar{x}))(t) dt, \\ A_3(\epsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} (K(\bar{x}_\epsilon, \dot{\bar{x}}_\epsilon) - K(\bar{x}, \dot{\bar{x}}))(t) dt. \end{aligned}$$

Aquí la energía de  $\bar{x}$  es  $h = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\mathcal{G}}{r}$ , y a partir de la igualdad de Sundman dada en (2.15) obtenemos que  $u(t) = \frac{(6\sqrt{\mathcal{G}})^{\frac{2}{3}}}{2} t^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \mathcal{G}^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}$  cuando  $t \rightarrow \bar{t}$ , es decir,

$$u(t) = u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t), \quad \dot{u}(t) = \frac{2}{3} u_0 t^{-\frac{1}{3}} + \mathcal{O}(1)$$

cuando  $t \rightarrow 0$  (ver [3] ó [26]), donde la constante  $u_0$  está dada por la relación

$$u_0 = \left(\frac{9\mathcal{G}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > 0.$$

Además la función  $u$  es estrictamente creciente en  $[0, T/4]$ . Ahora denotaremos por  $x_{ij} = x_j - x_i$  y  $z_{ij} = z_j - z_i$  para  $1 \leq i < j \leq 3$ , tal que

$$z_{12} = 0, \quad x_{i3} > 0, \quad z_{i3} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} (U(\bar{x}_\epsilon) - U(\bar{x}))(t) dt &= \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_2}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_1 + \epsilon z_1 - (u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_2 + \epsilon z_2} \right) dt \\
&+ \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_2 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_2 + \epsilon z_2 - (u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_3 + \epsilon z_3} \right) dt \\
&+ \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_1 + \epsilon z_1 - (u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_3 + \epsilon z_3} \right) dt \\
&- \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_2}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_1 - (u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_2} \right) dt \\
&- \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_2 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_2 - (u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_3} \right) dt \\
&- \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_1 - (u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))x_3} \right) dt
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} (U(\bar{x}_\epsilon) - U(\bar{x}))(t) dt &= \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_2}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))(x_1 - x_2) + \epsilon(z_1 - z_2)} \right) dt \\
&+ \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_2 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))(x_2 - x_3) + \epsilon(z_2 - z_3)} \right) dt \\
&+ \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))(x_1 - x_3) + \epsilon(z_1 - z_3)} \right) dt \\
&- \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_2}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))(x_1 - x_2)} \right) dt \\
&- \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_2 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))(x_2 - x_3)} \right) dt \\
&- \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t))(x_1 - x_3)} \right) dt
\end{aligned}$$

Como  $z_1 = z_2$  y  $\mathcal{O}(t)x_{i3} = \mathcal{O}(t)$  para  $i = 1, 2$ ; tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} (U(\bar{x}_\epsilon) - U(\bar{x}))(t) dt &= \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_2 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} x_{23} + \mathcal{O}(t) + \epsilon z_{23})} \right) dt \\ &+ \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} x_{13} + \mathcal{O}(t) + \epsilon z_{13})} \right) dt \\ &- \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_2 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} x_{23} + \mathcal{O}(t))} \right) dt \\ &- \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_1 m_3}{(u_0 t^{\frac{2}{3}} x_{13} + \mathcal{O}(t))} \right) dt \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que

$$\begin{aligned} A_1(\epsilon) &= \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} (U(\bar{x}_\epsilon) - U(\bar{x}))(t) dt \\ &= \sum_{i=1,2} m_i m_3 \int_0^{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{u_0 x_{i3} t^{\frac{2}{3}} + \epsilon z_{i3} + \mathcal{O}(t)} - \frac{1}{u_0 x_{i3} t^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(t)} \right) dt. \end{aligned}$$

Ahora, introducimos un reescalamiento del tiempo dado por  $t = (\epsilon\tau)^{\frac{3}{2}}$ , entonces  $dt = \frac{3}{2}\epsilon^{3/2}\tau^{1/2}d\tau$  y obtenemos

$$\begin{aligned} A_1(\epsilon) &= \frac{3}{2} \sum_{i=1,2} m_i m_3 \epsilon^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{u_0 x_{i3} \epsilon \tau + \epsilon z_{i3} + \mathcal{O}((\epsilon\tau)^{\frac{3}{2}})} - \frac{1}{u_0 x_{i3} \epsilon \tau + \mathcal{O}(\epsilon\tau)^{\frac{3}{2}}} \right) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \epsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1,2} m_i m_3 \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{u_0 x_{i3} \tau + z_{i3} + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{3}{2}})} - \frac{1}{u_0 x_{i3} \tau + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{3}{2}})} \right) d\tau \\ &= \frac{3}{2} \epsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1,2} m_i m_3 \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{u_0 x_{i3} \tau + z_{i3}} - \frac{1}{u_0 x_{i3} \tau} \right) d\tau + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

Para simplificar, definimos  $c = u_0 x_{i3}$  y  $b = z_{i3}$  y consideremos las siguientes integrales

$$\int_0^1 \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau + b + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{3}{2}})} d\tau, \quad (3.18)$$

$$\int_0^1 \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{3}{2}})} d\tau. \quad (3.19)$$

Notemos que

$$\frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}})} = \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau} \left( \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}})}{c\tau}} \right).$$

Si  $\alpha = \frac{\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}})}{c\tau}$ , al expandir en serie de Taylor a orden tres la función  $(1 + \alpha)^{-1}$  obtenemos  $(1 + \alpha)^{-1} = 1 - \alpha + \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)$ . Como consecuencia del integrando de (3.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau + b + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}} + \dots)} &= \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau + b} \left( 1 - \frac{\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}})}{c\tau + b} \right) \\ &= \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau + b} \left( 1 - \frac{\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}})}{c\tau} \left( \frac{1}{1 + \frac{b}{c\tau}} \right) + \dots \right) \\ &= \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau + b} \left( 1 - \frac{\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}})}{c\tau} \left( 1 - \mathcal{O}\left(\frac{b}{c\tau}\right) \right) + \dots \right) \\ &= \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau + b} \left( 1 - \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}) \right) \\ &= \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau + b} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

De forma equivalente del integrando de (3.19) tenemos

$$\begin{aligned} -\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c\tau + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}})} &= -\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c\tau} \left( 1 - \frac{\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}})}{c\tau} + \dots \right) \\ &= \frac{-\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau} + \frac{\mathcal{O}(\epsilon)}{c^2} \\ &= \frac{-\epsilon^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}{c\tau} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

Sea

$$C = \frac{3}{2} \sum_{i=1,2} m_i m_3 \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{u_0 x_{i3} \tau} - \frac{1}{u_0 x_{i3} \tau + z_{i3}} \right) d\tau > 0$$

entonces

$$A_1(\epsilon) = -C\epsilon^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Ahora consideremos el término  $A_2(\epsilon)$ . Ya que  $x_{i3} > 0$  y  $z_{i3} > 0$  para  $i = 1, 2$ , tenemos

$$\begin{aligned} A_2(\epsilon) &= \int_{\epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\epsilon^{\frac{3}{2}+\epsilon}} (U(\bar{x}_\epsilon) - U(\bar{x}))(t) dt \\ &= \sum_{i=1,2} m_i m_3 \int_{\epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\epsilon^{\frac{3}{2}+\epsilon}} \left( \frac{1}{u(t)x_{i3} + \epsilon f_\epsilon(t)z_{i3}} - \frac{1}{u(t)x_{i3}} \right) dt \leq 0 \end{aligned}$$

Ahora, consideremos el término  $A_3(\epsilon)$ . Por definición de  $\bar{x}_\epsilon$  tenemos

$$\begin{aligned} K(\bar{x}_\epsilon, \dot{\bar{x}}_\epsilon)(t) - K(\bar{x}, \dot{\bar{x}})(t) &= \|\dot{\bar{x}}_\epsilon\|^2 - \|\dot{\bar{x}}\|^2 \\ &= \|\dot{\bar{x}} - z\|^2 - \|\dot{\bar{x}}\|^2 \\ &= \|\dot{\bar{x}}\|^2 - 2\langle \dot{\bar{x}}, z \rangle + \|z\|^2 - \|\dot{\bar{x}}\|^2 \\ &= -2\langle \dot{\bar{x}}, z \rangle + \|z\|^2 \\ &= -2\langle \dot{u}x_{E_2^+}, z \rangle + \|z\|^2 \\ &= -2\dot{u}\langle x_{E_2^+}, z \rangle + \|z\|^2 \end{aligned}$$

de donde podemos concluir que

$$K(\bar{x}_\epsilon, \dot{\bar{x}}_\epsilon)(t) - K(\bar{x}, \dot{\bar{x}})(t) = -2\dot{u}\langle x_{E_2^+}, z \rangle + \|z\|^2.$$

Por otro lado, ya que  $t \mapsto u(t)$  es una función creciente en  $[0, T/4]$  y  $x_{E_2^+} \cdot z \geq 0$ , tenemos

$$\frac{1}{2} \int_{\epsilon^{3/2}}^{\epsilon^{3/2+\epsilon}} (K(\bar{x}_\epsilon, \dot{\bar{x}}_\epsilon)(t) - K(\bar{x}, \dot{\bar{x}})(t)) dt = -\frac{1}{2} \int_{\epsilon^{3/2}}^{\epsilon^{3/2+\epsilon}} 2\dot{u}(t)\langle x_{E_2^+}, z \rangle dt + \frac{1}{2} \int_{\epsilon^{3/2}}^{\epsilon^{3/2+\epsilon}} \|z\|^2 dt$$

y por lo tanto se cumple

$$A_3(\epsilon) \leq \frac{1}{2} \int_{\epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\epsilon^{\frac{3}{2}+\epsilon}} \|z\|^2 dt = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Luego hemos demostrado que

$$\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(\epsilon) \leq -C\epsilon^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Notemos que esta cantidad es negativa para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.  $\square$

### 3.4 Ausencia de colisiones dobles adicionales

A partir de la definición de  $\Omega$ , si  $x$  es un mínimo de  $\mathcal{A}|_\Omega$  éste tiene una colisión en  $t = 0$  y  $t = T/2$ . Una colisión que ocurre (necesariamente doble) para un tiempo que

no es un múltiplo entero de  $T/2$ , es llamada una *colisión doble adicional*. En esta sección demostraremos que un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  no tiene una colisión doble adicional. La invarianza por la acción del grupo  $G$  y el Teorema 3.8 implica que si  $x$  tiene una colisión doble adicional, ésta será una colisión doble adicional para un tiempo en el intervalo  $(0, T/4)$ . Primero demostraremos que las colisiones dobles adicionales son aisladas. Para demostrar lo anterior necesitamos demostrar que la energía de un cúmulo involucrado en una colisión doble es una función continua en el tiempo, en un entorno de un tiempo de colisión doble. Una vez que demostremos que las colisiones dobles son aisladas, haremos una variación explícita (similar a la hecha en el Teorema 3.8) cuando decrece la acción. El método que se aplicará fue usado por R. Montgomery [15] y A. Venturelli [24].

Dados dos índices diferentes  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , la pareja  $\{i, j\}$  es llamada un *cúmulo*. Sea  $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$ . Las *coordenadas de Jacobi* (ver el Apéndice C) asociadas al cúmulo  $\{i, j\}$  son definidas por

$$\xi = x_j - x_i, \quad \eta = x_k - \frac{m_i x_i + m_j x_j}{m_i + m_j}.$$

Notemos que las coordenadas de Jacobi caracterizan por completo una configuración. En estas coordenadas las funciones  $K$  y  $U$  se escriben como

$$\begin{aligned} K(x, \dot{x}) &= \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \dot{\xi}^2 + \frac{m_k (m_i + m_j)}{M} \dot{\eta}^2, \\ U(x) &= \frac{m_i m_j}{|\xi|} + U_0(x), \\ U_0(x) &= \frac{m_i m_k}{|\eta + \frac{m_j}{m_i + m_j} \xi|} + \frac{m_j m_k}{|\eta - \frac{m_i}{m_i + m_j} \xi|}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde  $M = m_1 + m_2 + m_3$  es la suma de las masas. Observemos que  $U_0$  es diferenciable en las colisiones dobles del tipo  $C_k$  (es decir, que involucran al cúmulo  $\{i, j\}$ ) el cual es caracterizado por las condiciones  $\xi = 0$ ,  $\eta \neq 0$ . Las ecuaciones de movimiento (3.1) toman la forma

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -(m_i + m_j) \frac{\xi}{|\xi|^3} + \frac{m_i + m_j}{m_i m_j} \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(\xi, \eta), \\ \ddot{\eta} &= \frac{M}{m_k (m_i + m_j)} \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{3.21}$$

mientras que la función

$$h_k(x, \dot{x}) = \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \dot{\xi}^2 - \frac{m_i m_j}{|\xi|},$$

es la energía del cúmulo  $\{i, j\}$ . Notemos que  $h_k$  está bien definida excepto para  $\xi \neq 0$ .

**Proposición 3.9.** Sea  $x$  un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  y  $\bar{t} \in (0, T/4)$  un tiempo en el que ocurre una colisión doble adicional del tipo  $C_k^+$ , con  $k \in \{1, 3\}$ . Entonces existe un intervalo  $[a, b]$  que satisface

$$\bar{t} \in (a, b) \subset [a, b] \subset (0, T/4) \quad (3.22)$$

tal que  $h_k(x(t), \dot{x}(t))$  es una función absolutamente continua en el intervalo  $[a, b]$

**Observación 3.10.** La función  $t \mapsto h_k(t)$  no está bien definida en los tiempos donde existe una colisión del tipo  $C_k$ . El significado de esta proposición es que  $t \mapsto h_k(t)$  puede ser extendida en los tiempos de colisión, de tal forma que sea una función absolutamente continua en el intervalo  $[a, b]$ .

Antes de entrar en los detalles de la demostración introducimos la siguiente notación. Sea  $f(t, \epsilon)$  una función de dos variables reales, y  $g(\epsilon)$  una función de  $\epsilon$ . La notación  $f(t, \epsilon) = \mathcal{O}_\epsilon(g(\epsilon))$ ,  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  significa que  $f(t, \epsilon) = \mathcal{O}(g(\epsilon))$ ,  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  uniformemente en  $t$ . La notación  $f(t, \epsilon) = o_\epsilon(g(\epsilon))$ ,  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  significa que  $f(t, \epsilon) = o(g(\epsilon))$ ,  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$  uniformemente en  $t$ .

#### *Demostración de la Proposición 3.9*

Puesto que  $x|_{[0, T/4]}$ , es un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega|_{\frac{1}{4}}}$  la función  $h_k(t)$  está bien definida en un subconjunto abierto de  $[0, T/4]$  con medida completa. Por la continuidad de  $t \mapsto x(t)$  existe un intervalo  $[a, b]$  donde se cumple (3.22) y tal que sólo existe una colisión doble del tipo  $C_k^+$  para  $t \in [a, b]$ . Sea  $\delta: [0, T/4] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  cuyo soporte está contenido en  $[a, b]$ . La función

$$t_\epsilon: [0, T/4] \rightarrow [0, T/4], \quad t_\epsilon(\tau) = \tau + \epsilon\delta(\tau)$$

es un difeomorfismo de clase  $C^1$  que preserva orientación para  $\epsilon \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeño. Esta correspondencia envía al intervalo  $[a, b]$  en él mismo. La función inversa de  $t_\epsilon(\tau)$  la cual denotaremos por  $\tau_\epsilon(t)$ , verifica la siguiente igualdad

$$\frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t) = \frac{1}{1 + \epsilon \frac{d\delta}{d\tau}(\tau_\epsilon(t))} = 1 - \epsilon \frac{d\delta}{d\tau}(\tau_\epsilon(t)) + \mathcal{O}_\epsilon\left(\epsilon \frac{d\delta}{d\tau}(\tau_\epsilon(t))\right). \quad (3.23)$$

Ya que  $\frac{d\delta}{d\tau}$  es una función acotada, entonces  $\mathcal{O}_\epsilon\left(\epsilon \frac{d\delta}{d\tau}(\tau_\epsilon(t))\right) = \mathcal{O}_\epsilon(\epsilon^2)$  y tenemos

$$\frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t) = 1 - \epsilon \frac{d\delta}{d\tau}(\tau_\epsilon(t)) + \mathcal{O}_\epsilon(\epsilon^2) \quad (3.24)$$

Como  $\frac{d\delta}{d\tau} = \frac{d\delta}{dt} \frac{dt}{d\tau}$  y  $\mathcal{O}_\epsilon(\epsilon^2) = \epsilon \mathcal{O}_\epsilon(\epsilon) = o_\epsilon(\epsilon)$  entonces

$$\frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t) = 1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt} \frac{dt}{d\tau}(\tau_\epsilon(t)) + o_\epsilon(\epsilon) \quad (3.25)$$

Observemos que  $t_\epsilon(\tau) = \tau + \epsilon\delta(\tau)$ , entonces  $\frac{dt}{d\tau} = \frac{d\tau}{d\tau} + \epsilon \frac{d\delta}{d\tau}$ , así  $\frac{dt}{d\tau} = 1 + \epsilon \frac{d\delta}{d\tau}$ .

Sustituyendo en (3.25), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t) &= 1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt} \left( 1 + \epsilon \frac{d\delta}{d\tau} \right) (\tau_\epsilon(t)) + o_\epsilon(\epsilon) \\ &= 1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt}(\tau_\epsilon(t)) - \epsilon^2 \frac{d\delta}{dt} \frac{d\delta}{d\tau}(\tau_\epsilon(t)) + o_\epsilon(\epsilon) \\ &= 1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt}(\tau_\epsilon(t)) + \mathcal{O}_\epsilon(\epsilon^2) + o_\epsilon(\epsilon) \\ &= 1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt}(\tau_\epsilon(t)) + o_\epsilon(\epsilon) \end{aligned}$$

por lo tanto concluimos

$$\frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t) = 1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt}(t) + o_\epsilon(\epsilon). \quad (3.26)$$

Sea  $(\xi, \eta)$  las coordenadas de Jacobi asociadas al cúmulo  $\{i, j\}$ . La trayectoria  $x_\epsilon: [0, T/4] \rightarrow S$  en las coordenadas de Jacobi está definida por

$$\xi_\epsilon(\tau) = \xi(t_\epsilon(\tau)), \quad \eta_\epsilon(\tau) = \eta(\tau)$$

la cual es una variación de  $x|_{[0, T/4]}$  en  $\Omega_{\frac{1}{4}}$ . La acción de  $x_\epsilon$  puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x_\epsilon) = \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^k(x_\epsilon) + \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^0(x_\epsilon)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^k(x_\epsilon) &= \int_0^{\frac{T}{4}} \left( \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} (\dot{\xi}_\epsilon(\tau))^2 + \frac{m_i m_j}{|\xi_\epsilon(\tau)|} \right) d\tau \\ \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^0(x_\epsilon) &= \int_0^{\frac{T}{4}} \left( \frac{m_k(m_i + m_j)}{2M} \dot{\eta}(\tau)^2 + U_0(x_\epsilon)(\tau) \right) d\tau. \end{aligned}$$

El cambio de variable  $\tau = \tau_\epsilon(t)$  en la integral  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^k(x_\epsilon)$  da como resultado

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^k(x_\epsilon) = \int_0^{\frac{T}{4}} \left( \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \frac{\dot{\xi}(t)^2}{\frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t)} + \frac{m_i m_j}{|\xi(t)|} \frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t) \right) dt. \quad (3.27)$$

Ya que  $\tau = \tau_\epsilon(t)$ , entonces  $d\tau = \dot{\tau}_\epsilon(t)dt = \frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t)dt$  y considerando  $\xi_\epsilon(\tau) = \xi_\epsilon(\tau_\epsilon(t))$  y  $\xi_\epsilon(\tau) = \xi(t_\epsilon(\tau_\epsilon(t))) = \xi(t)$ , entonces  $\dot{\xi}_\epsilon(\tau) = \frac{d\xi}{d\tau_\epsilon} \frac{d\tau_\epsilon}{dt}$ , por lo que  $\frac{d\xi}{d\tau_\epsilon} = \frac{\frac{d\xi}{dt}}{\frac{d\tau_\epsilon}{dt}}$  así

$(\dot{\xi}_\epsilon(\tau))^2 = \left(\frac{d\xi}{d\tau_\epsilon}\right)^2 = \frac{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\tau_\epsilon}{dt}\right)^2}$ . Por lo tanto

$$(\dot{\xi}_\epsilon(\tau))^2 d\tau = \frac{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 d\tau_\epsilon}{\left(\frac{d\tau_\epsilon}{dt}\right)^2 dt} = \frac{\dot{\xi}(t)^2}{\frac{d\tau_\epsilon}{dt}} dt$$

y

$$\frac{1}{|\xi(\tau)|} d\tau = \frac{1}{|\xi(t)|} \frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t) dt$$

y se verifica (3.27).

Ahora, usando (3.26) y (3.27) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^k(x_\epsilon) &= \int_0^{\frac{T}{4}} \left( \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \frac{\dot{\xi}(t)^2}{\frac{d\tau_\epsilon}{dt}} + \frac{m_i m_j}{|\xi(t)|} \frac{d\tau_\epsilon}{dt}(t) \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{4}} \left( \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \frac{\dot{\xi}(t)^2}{1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt}(t) + o_\epsilon(\epsilon)} + \frac{m_i m_j}{|\xi(t)|} (1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt}(t) + o_\epsilon(\epsilon)) \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{4}} \left( \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \dot{\xi}(t)^2 (1 + \epsilon \frac{d\delta}{dt}(t) + o_\epsilon(\epsilon)) + \frac{m_i m_j}{|\xi(t)|} (1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt}(t) + o_\epsilon(\epsilon)) \right) dt \end{aligned}$$

Notemos que la función  $\epsilon \mapsto \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x_\epsilon)$  es diferenciable en  $\epsilon = 0$  y la derivada de Gâteaux es 0, ya que  $x|_{[0, T/4]}$  es un mínimo de  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}|_{\Omega_{\frac{1}{4}}}$ . Con el fin de verificar ésto, iniciemos por calcular la derivada de Gâteaux de  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^k(x_\epsilon)$ , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^k(x_\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \dot{\xi}(t)^2 (1 + \epsilon \frac{d\delta}{dt}(t) + o_\epsilon(\epsilon)) + \frac{m_i m_j}{|\xi(t)|} (1 - \epsilon \frac{d\delta}{dt}(t) + o_\epsilon(\epsilon)) \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \left( \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \frac{d\delta}{dt}(t) + \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \frac{d o_\epsilon(\epsilon)}{d\epsilon} - \frac{m_i m_j}{|\xi(t)|} \frac{d\delta}{dt}(t) - \frac{m_i m_j}{|\xi(t)|} \frac{d o_\epsilon(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \frac{d\delta}{dt}(t) - \frac{m_i m_j}{|\xi(t)|} \frac{d\delta}{dt}(t) = h_k(t) \dot{\delta}(t) \end{aligned}$$

.

Ahora calculemos la derivada de Gâteaux de  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^0(x_\epsilon)$ . Ya que en este caso la energía cinética no depende de  $\epsilon$ , tenemos que

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^0(x_\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \int_0^{\frac{T}{4}} U_0(x_\epsilon)(\tau) d\tau \Big|_{\epsilon=0}$$

por lo cual al calcular concluimos

$$\frac{dU_0}{d\epsilon} = \frac{dU_0}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} \frac{dt}{d\epsilon}.$$

Por otro lado tenemos que la trayectoria  $x_\epsilon$  en las coordenadas de Jacobi está dada por

$$\xi_\epsilon(\tau) = \xi(t_\epsilon(\tau)), \quad \eta_\epsilon(\tau) = \eta(\tau),$$

de donde el potencial viene dado como

$$U_0(x_\epsilon)(\tau) = U_0(\xi_\epsilon(\tau), \eta_\epsilon(\tau)) = U_0(\xi(t_\epsilon(\tau)), \eta(\tau))$$

y usando el cambio de variable  $\tau = \tau_\epsilon(t)$ , tenemos que el potencial puede ser escrito como

$$U_0(\xi(t_\epsilon(\tau)), \eta(\tau)) = U_0(\xi(t_\epsilon(\tau_\epsilon(t))), \eta(\tau_\epsilon(t))) = U_0(\xi(t), \eta(\tau_\epsilon(t))).$$

Por lo cual

$$\frac{dU_0}{d\epsilon} = \frac{dU_0}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} \frac{dt}{d\epsilon} = \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(x(t)) \dot{\xi}(t) \delta(t)$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Como consecuencia

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left( h_k(t) \dot{\delta}(t) + \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(x(t)) \dot{\xi}(t) \delta(t) \right) dt = 0,$$

(en la Sección 4.1.3 de [24] se pueden consultar más detalles al respecto). Esta identidad es verdadera para cualquier función  $\delta$ , y a partir del Lema 1.48 tenemos que  $t \mapsto h_k(t)$  es una función absolutamente continua en  $[a, b]$  y cumple

$$\dot{h}_k(t) = \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(x(t)) \dot{\xi}(t)$$

para toda  $t \in [a, b]$ . Una consecuencia inmediata de esta proposición es que las colisiones dobles adicionales no son acumulables.  $\square$

**Corolario 3.11.** *Los tiempos en que ocurre una colisión doble adicional de un mínimo de  $\mathcal{A}|_\Omega$  son puntos aislados en el conjunto de tiempos de colisión.*

*Demostración.* Sea  $x$  un mínimo de  $\mathcal{A}|_\Omega$  y  $\bar{t}$  un tiempo de colisión doble adicional del tipo  $C_k^+$ . Sin pérdida de generalidad, podemos cambiar los índices  $k$  y podemos suponer que  $\bar{t} \in (0, T/4)$ . Para obtener una contradicción suponemos que  $\bar{t}$  no es un punto aislado en el conjunto de tiempos de colisión  $T_c(x)$ . Ya que  $x$  es continua, sólo colisiones del mismo cúmulo pueden acumularse en  $\bar{t}$ . Como el conjunto  $T_c(x)$  es

cerrado y tiene medida cero, existe una sucesión de intervalos cerrados  $([a_n, b_n])_{n=1}^{+\infty}$  tal que  $a_n \rightarrow \bar{t}$ ,  $b_n \rightarrow \bar{t}$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$  y

$$\xi(a_n) = \xi(b_n) = 0, \quad \xi(t) \neq 0 \quad \text{para } t \in (a_n, b_n)$$

donde  $(\xi, \eta)$  es el sistema de coordenadas de Jacobi de  $x$  asociadas al cúmulo de binarios que colisionan. La función

$$I_k(x) = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} |\xi|^2$$

es el momento de inercia del cúmulo  $\{i, j\}$  con respecto a su centro de masa. Ahora, introducimos la notación  $I_k(t) = I_k(x(t))$ . Ya que cada intervalo  $(a_n, b_n)$  no contiene tiempos de colisión, por la Proposición 3.7 la función  $t \mapsto I_k(t)$  es de clase  $C^2$  en  $(a_n, b_n)$ . Si  $s_n \in (a_n, b_n)$  denota el punto máximo de  $I_k(t)$  en el intervalo  $[a_n, b_n]$  tenemos que  $\dot{I}(s_n) \leq 0$ .

Calculando la segunda derivada de  $I_k$ , y utilizando el hecho de que

$$|\dot{\xi}(t)|^2 = 2\dot{\xi}(t)\xi(t) \quad y \quad |\ddot{\xi}(t)|^2 = 2(\ddot{\xi}(t)\xi(t) + \dot{\xi}(t)\dot{\xi}(t))$$

y usando las ecuaciones de movimiento (3.21), la identidad de Lagrange-Jacobi:

$$\begin{aligned} \ddot{I}_k(t) &= 2 \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \left( \dot{\xi}(t)^2 + \ddot{\xi}(t)\xi(t) \right) \\ &= 4h_k(t) + 2 \frac{m_i m_j}{|\xi(t)|} + 2 \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(x(t))\xi(t). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Analizando el término  $\frac{\partial U_0}{\partial \xi}(x(t))$ , tenemos que

$$2 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} = 2 \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2} \left( -\frac{1}{|\eta + \frac{m_2}{m_1+m_2}\xi|^2} + \frac{1}{|\eta - \frac{m_1}{m_1+m_2}\xi|^2} \right),$$

así que  $2 \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(x(t))\xi(t)$  está acotado en un entorno de una colisión del tipo  $C_k$ . Por la Proposición 3.9, la función  $t \mapsto h_k(t)$  es continua en un entorno de  $t = \bar{t}$  y usando la identidad (3.28) tenemos que  $\ddot{I}(s_n) \rightarrow +\infty$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Lo cual es una contradicción.  $\square$

**Teorema 3.12.** *Un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  no tiene colisiones dobles adicionales.*

*Demostración.* La demostración consiste en hacer una deformación local de la colisión del cúmulo, similar a lo que se hizo en el Teorema 3.8. La interacción entre el cúmulo que colisiona y el cuerpo que no está involucrado en la colisión es tratado como una perturbación regular. Para obtener una contradicción, supondremos que una colisión

doble adicional ocurre en el tiempo  $\bar{t}$ . Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $\bar{t} \in (0, T/4)$ . Trataremos el caso de una colisión del tipo  $C_3^+$  (la colisión del tipo  $C_1^+$  puede ser tratada de forma similar). Sea  $(\xi, \eta)$  un sistema de coordenadas de Jacobi asociado al cúmulo  $\{1, 2\}$  que colisiona.

Sabemos que la ecuación de movimiento para dos cuerpos colineales está dada por

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{x^2}$$

con  $\mu = m_1 + m_2$ , mientras que la relación de energía es

$$\dot{x}^2 = \frac{2\mu}{x} + 2h$$

de tal forma que al multiplicar por  $x$  tenemos

$$x\dot{x}^2 = 2\mu + 2hx \sim 2\mu,$$

de donde

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{2}}\dot{x} &\sim \sqrt{2\mu} \\ x^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{dt} &\sim \sqrt{2\mu} \\ x^{\frac{1}{2}}dx &\sim \sqrt{2\mu}dt. \end{aligned}$$

Integrando la última relación tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} &\sim \sqrt{2\mu}(t - \bar{t}) \\ x^{\frac{3}{2}} &\sim \frac{3}{2}\sqrt{2\mu}(t - \bar{t}). \end{aligned}$$

Por la igualdad de Sundman, ecuación (2.15) tenemos

$$\xi(t) = \xi_0|t - \bar{t}|^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(|t - \bar{t}|), \quad \dot{\xi}(t) = \frac{2}{3}\xi_0|t - \bar{t}|^{-\frac{1}{3}} + \mathcal{O}(1) \quad (3.29)$$

cuando  $t \mapsto \bar{t}$ , donde

$$\xi_0 = \left( \frac{9(m_1 + m_2)}{2} \right)^{\frac{1}{3}} > 0.$$

Como  $\xi_0$  es positivo entonces  $\xi_0$  está en  $S$ . Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $f_\epsilon : [0, T/4] \rightarrow \mathbb{R}^+$  la función definida por

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [\bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}}, \bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}], \\ \frac{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon - t}{\epsilon} & \text{si } t \in [\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}, \bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon], \\ \frac{t - \bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon}{\epsilon} & \text{si } t \in [\bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}} - \epsilon, \bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}}], \\ 0 & \text{si } t \in [0, \bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}} - \epsilon] \cup [\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon, T/4], \end{cases}$$

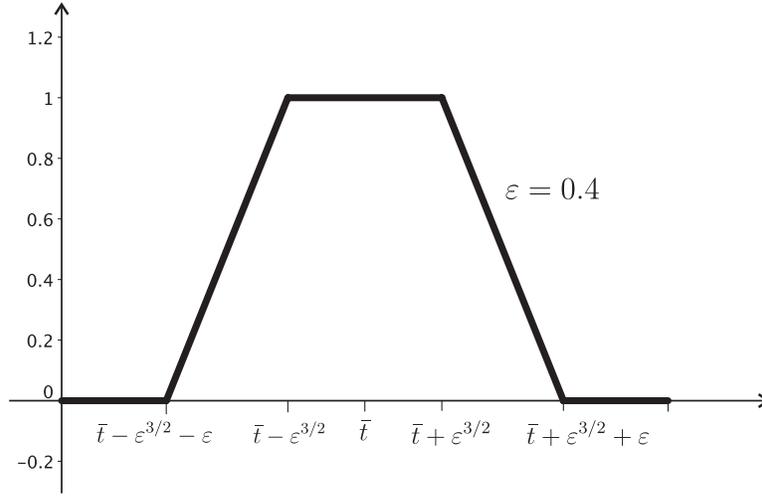


Figura 3.5: Gráfica de la función  $f_\epsilon$ , para  $\epsilon = 0.4$

y sea  $x_\epsilon : [0, T/4] \rightarrow S$  la trayectoria definida en coordenadas de Jacobi por

$$\xi_\epsilon(t) = \xi(t) + \epsilon f_\epsilon(t)c$$

$$\eta_\epsilon(t) = \eta(t),$$

donde  $c > 0$ . Notemos que  $x_\epsilon$  es un elemento de  $\Omega_{\frac{1}{4}}$ .

Antes de continuar hagamos las siguientes observaciones:

1. Si  $t \in [0, \bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}} - \epsilon] \cup [\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon, T/4]$ ;  $x_\epsilon$  tiene coordenadas  $\xi_\epsilon(t) = \xi(t)$  y  $\eta_\epsilon(t) = \eta(t)$  así que  $\dot{\xi}_\epsilon(t) = \dot{\xi}(t)$  y  $\dot{\eta}_\epsilon(t) = \dot{\eta}(t)$ .
2. Si  $t \in [\bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}}, \bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}]$ ;  $x_\epsilon$  tiene coordenadas  $\xi_\epsilon(t) = \xi(t) + \epsilon c$  y  $\eta_\epsilon(t) = \eta(t)$  por lo que  $\dot{\xi}_\epsilon(t) = \dot{\xi}(t) + c$  y  $\dot{\eta}_\epsilon(t) = \dot{\eta}(t)$ .
3. Si  $t \in [\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}, \bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon]$ ;  $x_\epsilon$  tiene coordenadas  $\xi_\epsilon(t) = \xi(t) + \epsilon f_\epsilon(t)c$  y  $\eta_\epsilon(t) = \eta(t)$ , de donde  $\dot{\xi}_\epsilon(t) = \dot{\xi}(t) - c$  y  $\dot{\eta}_\epsilon(t) = \dot{\eta}(t)$ .
4. Si  $t \in [\bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}} - \epsilon, \bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}}]$   $x_\epsilon$  tiene coordenadas  $\xi_\epsilon(t) = \xi(t) + \epsilon f_\epsilon(t)c$  y  $\eta_\epsilon(t) = \eta(t)$ , de donde  $\dot{\xi}_\epsilon(t) = \dot{\xi}(t) + c$  y  $\dot{\eta}_\epsilon(t) = \dot{\eta}(t)$ .

Además

$$[0, T/4] = [0, \bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}} - \epsilon] \cup [\bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}} - \epsilon, \bar{t}] \cup [\bar{t}, \bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon] \cup [\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon, T/4],$$

y en los intervalos

$$[0, \bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}} - \epsilon] \quad \text{y} \quad [\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon, T/4]$$

$x_\epsilon$  y  $x|_{[0, T/4]}$  son iguales y la diferencia entre la acción de  $x_\epsilon$  y la acción de  $x|_{[0, T/4]}$  puede ser escrita como la suma de los siguientes dos términos,

$$\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(\epsilon) = \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x_\epsilon) - \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x|_{[0, T/4]}) = \Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^+(\epsilon) + \Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^-(\epsilon),$$

donde

$$\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^+(\epsilon) = \int_{\bar{t}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} (L(x_\epsilon, \dot{x}_\epsilon) - L(x, \dot{x}))(t) dt$$

$$\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^-(\epsilon) = \int_{\bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}} - \epsilon}^{\bar{t}} (L(x_\epsilon, \dot{x}_\epsilon) - L(x, \dot{x}))(t) dt.$$

Como en la demostración del Teorema 3.8,  $\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^+(\epsilon)$  puede descomponerse en la suma de tres términos:

$$\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^+(\epsilon) = A_1^+(\epsilon) + A_2^+(\epsilon) + A_3^+(\epsilon),$$

donde

$$A_1^+(\epsilon) = \int_{\bar{t}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}} (U(x_\epsilon) - U(x))(t) dt$$

$$A_2^+(\epsilon) = \int_{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} (U(x_\epsilon) - U(x))(t) dt$$

$$A_3^+(\epsilon) = \frac{1}{2} \int_{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} (K(x_\epsilon, \dot{x}_\epsilon) - K(x, \dot{x}))(t) dt$$

Iniciamos por calcular  $A_1^+(\epsilon)$ .

$$\begin{aligned} A_1^+(\epsilon) &= m_1 m_2 \int_{\bar{t}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{\xi_0 |t - \bar{t}|^{\frac{2}{3}} + \epsilon c + \mathcal{O}(|t - \bar{t}|)} - \frac{1}{\xi_0 |t - \bar{t}|^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(|t - \bar{t}|)} \right) dt \\ &\quad + \int_{\bar{t}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}} (U_0(x_\epsilon(t)) - U_0(x(t))) dt \end{aligned}$$

La función  $U_0$  es diferenciable en un entorno de una colisión doble del tipo  $C_3^+$ . Introducimos el cambio de variable  $t = \bar{t} + (\epsilon \tau)^{\frac{3}{2}}$ , como en la demostración del Teorema 3.8 de tal forma que en la primera integral obtenemos,

$$A_1^+(\epsilon) = -C \epsilon^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad C = \frac{3}{2} m_1 m_2 \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\xi_0 \tau} - \frac{1}{\xi_0 \tau + c} \right) d\tau > 0.$$

Ya que  $\xi(t)$  y  $f_\epsilon(t)$  son positivos, tenemos

$$A_2^+(\epsilon) = m_1 m_2 \int_{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} \left( \frac{1}{\xi(t) + \epsilon f_\epsilon(t) c} - \frac{1}{\xi(t)} \right) dt$$

$$+ \int_{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} (U_0(x_\epsilon(t)) - U_0(x(t)))(t) dt \leq \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Por la definición de  $f_\epsilon(t)$  tenemos

$$\begin{aligned} A_3^+(\epsilon) &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \int_{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} (-2c\dot{\xi}(t) + c^2) dt \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \left( \int_{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} -2c\dot{\xi}(t) dt + \int_{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}}^{\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon} c^2 dt \right) \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \left( -2c \left( \xi(\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon) - \xi(\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}}) \right) + c^2 (\bar{t} + \epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon - \bar{t} - \epsilon^{\frac{3}{2}}) \right) \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \left( -2c \left( \xi_0 |\epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon|^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon) - \xi_0 |\epsilon^{\frac{3}{2}}|^{\frac{2}{3}} - \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{3}{2}}) \right) + c^2(\epsilon) \right) \\ &= -\frac{m_1 m_2 c \xi_0}{m_1 + m_2} \left( (\epsilon + \epsilon^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} - \epsilon \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \leq \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{3}{2}} + \epsilon) - \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{3}{2}}) + \frac{c\epsilon}{2} = \mathcal{O}(\epsilon).$$

A partir de estas tres aproximaciones podemos concluir

$$\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^+(\epsilon) \leq -C\epsilon^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

De forma similar, obtenemos la misma estimación para  $\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^-(\epsilon)$

$$\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}^-(\epsilon) \leq -C\epsilon^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\epsilon),$$

entonces

$$\Delta \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(\epsilon) \leq -2C\epsilon^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\epsilon),$$

la cual es negativa para  $\epsilon$  suficientemente pequeña. Ya que  $x|_{[0, T/4]}$  es un mínimo de  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}|_{\Omega_{\frac{1}{4}}}$  llegamos a una contradicción.  $\square$

### 3.5 Demostración del Teorema 3.1

En esta sección daremos una breve descripción de la regularización de Levi-Civita para colisiones dobles y así como la demostración del Teorema 3.1. En particular demostraremos que un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  es una solución periódica con colisión del problema colineal de 3 cuerpos (ver la Definición 3.6). Sea  $\{i, j\}$  un cúmulo binario y denotemos por  $(\xi, \eta)$  a las coordenadas de Jacobi asociadas. Ahora, introducimos las variables conjugadas de  $\xi$  y  $\eta$

$$\Xi = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \dot{\xi}, \quad \Phi = \frac{m_k(m_i + m_j)}{M} \dot{\eta}$$

de tal forma que las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\Xi}{\mu}, \\ \dot{\Xi} &= -m_i m_j \frac{\xi}{|\xi|^3} + \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} &= \frac{\Phi}{\rho}, \\ \dot{\Phi} &= \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde

$$\mu = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \quad \rho = \frac{m_k(m_i + m_j)}{M},$$

y  $M$  es la masa total del sistema. Para estudiar el comportamiento local de las soluciones con colisiones parciales, Levi-Civita introdujo en [12] el siguiente cambio de variables:

$$\xi = z^2 \quad \Xi = \frac{2\omega}{z} \tag{3.31}$$

y un reescalamiento del tiempo dado por

$$dt = |\xi| ds = z^2 ds, \tag{3.32}$$

donde  $t$  es el tiempo natural, mientras que  $s$  el tiempo ficticio (o tiempo de Levi-Civita). La transformación (3.31) aplica  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  y es una aplicación cubriente con dos hojas. Para ver como se transforman las ecuaciones (3.30), hagamos unos cálculos previos.

Ya que  $\dot{\xi} = 2z\dot{z}$ , entonces  $\dot{z} = \frac{\dot{\xi}}{2z} = \frac{\Xi}{2\mu z} = \frac{\Xi z}{2\mu z^2} = \frac{\Xi z}{2\mu} \frac{ds}{dt}$ , de donde tenemos

$$z' = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\Xi z}{2\mu} = \frac{\omega}{\mu}.$$

Además  $\dot{w} = \frac{dw}{dt} = \frac{1}{2}(z\dot{\Xi} + \dot{z}\Xi) = \left(\frac{z^3\dot{\Xi}}{2} + \frac{\dot{z}z^2\Xi}{2}\right)\frac{ds}{dt}$  entonces

$$\begin{aligned}
w' &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{ds} \\
&= \frac{1}{2}z^3 \left( -m_i m_j \frac{\xi}{|\xi|^3} + \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right) + \frac{\omega^2}{\mu z} \\
&= -\frac{1}{2}m_i m_j \frac{1}{z} + z^3 \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(z^2, \eta) + \frac{\omega^2}{\mu z} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} \left( \frac{2\omega^2}{\mu} - m_i m_j \right) z + z^3 \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(z^2, \eta) \\
&= \frac{1}{2}f(z, \omega)z + \frac{z^3}{2} \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(z^2, \eta).
\end{aligned}$$

Por otro lado,  $\frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta} = \frac{\Phi}{\rho} = \frac{\Phi z^2}{\rho z^2} = \frac{\Phi z^2}{\rho} \frac{ds}{dt}$  entonces

$$\eta' = \frac{d\eta}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\Phi z^2}{\rho}.$$

Como  $\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial U_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial U_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{z^2}{z^2} = \frac{\partial U_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} z^2 \frac{ds}{dt}$  entonces

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{ds} = z^2 \frac{\partial U_0(z^2, \eta)}{\partial \eta}.$$

Después de los cálculos previos concluimos que las ecuaciones de movimiento (3.30) toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{\omega}{\mu}, \\
\omega' &= \frac{1}{2}f(z, \omega)z + \frac{z^3}{2} \frac{\partial U_0}{\partial \xi}(z^2, \eta), \\
\eta' &= \frac{z^2 \Phi}{\rho}, \\
\Phi' &= z^2 \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(z^2, \eta),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

donde  $' = \frac{d}{ds}$  y

$$f(z, \omega) = \frac{1}{z^2} \left( \frac{2\omega^2}{\mu} - m_i m_j \right) = h - \frac{\Phi^2}{\rho} + U_0(z^2, \eta)$$

es la energía del cúmulo  $\{i, j\}$ , y  $h$  es la energía total del sistema. Notemos que para cualquier valor de  $h$ , las ecuaciones (3.33) están bien definidas y son regulares en la superficie de energía  $H = h$  incluso cuando  $z = 0$  y  $\eta \neq 0$ , es decir, colisiones parciales que involucran al cúmulo  $\{i, j\}$ . Ahora explicaremos el significado de  $d$ ) en la Definición 3.6.

**Definición 3.13.** *Sea  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$  una función continua que satisface las condiciones a) y b) y c) de la Definición 3.6. Supongamos que una colisión doble ocurre en el tiempo  $\bar{t}$  e involucra al cúmulo  $\{i, j\}$ . Denotamos por  $(\xi, \eta)$  las coordenadas de Jacobi asociadas al cúmulo  $\{i, j\}$  e identificamos  $x(t)$  con  $(\xi(t), \eta(t))$ . Decimos que la colisión está regularizada si y sólo si*

- i) *La energía total  $h$  es constante.*
- ii) *Después de la reparametrización, para  $t$  en un entorno de  $\bar{t}$ , la correspondencia  $t \mapsto (\xi(t), \eta(t), \Xi(t), \Phi(t))$  es la proyección de una solución del sistema (3.33).*

Para poder realizar la demostración del Teorema 3.1 requerimos demostrar la siguiente proposición

**Proposición 3.14.** *Los mínimos de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  son soluciones con colisión del problema colineal de 3 cuerpos.*

*Demostración.* Demostraremos que los mínimos de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  satisfacen la Definición 3.6. Sea  $x : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{X}$  un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$ . En esta demostración identificamos  $x(t)$  con  $(\xi(t), \eta(t))$ , donde  $(\xi, \eta)$  son las coordenadas de Jacobi asociadas al cúmulo  $\{1, 2\}$ . Por los Teoremas 3.8 y 3.12 la trayectoria  $x$  tiene dos colisiones dobles por período (sin colisión triple), es decir, a) y b) de la Definición 3.2 se cumplen. Vamos a demostrar que se satisface c). Por la Proposición 3.7,  $t \mapsto x(t)$  es una solución del problema de 3 cuerpos en el complemento de los tiempos de colisión. En  $t = 0$  una colisión doble ocurre e involucra al cúmulo  $\{1, 2\}$ . Demostremos que  $t \mapsto x_3(t)$  es una solución de (3.1) para  $t$  cercano a 0. Sea  $x_\epsilon(t) = (\xi_\epsilon(t), \eta_\epsilon(t))$  una variación de  $x|_{[0, T/4]}$  definida por

$$\xi_\epsilon(t) = \xi(t), \quad \eta_\epsilon(t) = \eta(t) + \epsilon \delta \eta(t),$$

donde  $\epsilon \in \mathbb{R}$  y  $\delta \eta \in H^1([0, T/4], \mathcal{X})$  es una función que satisface que  $\text{supp}(\delta \eta) \subset [0, T/4]$ . La trayectoria  $x_\epsilon$  pertenece a  $\Omega_{\frac{1}{4}}$ . Ya que  $x(t)$  no tiene colisiones que involucran al tercer cuerpo en el intervalo  $[0, T/4]$ , la aplicación  $\epsilon \rightarrow \mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x_\epsilon)$  es diferenciable en  $\epsilon = 0$ , más aun se satisface

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x_\epsilon) = \int_0^{\frac{T}{4}} \left( \frac{K(x_\epsilon, \dot{x}_\epsilon)}{2} + U(x_\epsilon(t)) \right) dt$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x_\epsilon) &= \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{1}{2} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\xi}_\epsilon(t)^2 + \frac{m_3(m_i + m_j)}{M} \dot{\eta}_\epsilon(t)^2 \right) + U(\xi_\epsilon(t), \eta_\epsilon(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{1}{2} \left( \mu \dot{\xi}(t)^2 + \rho(\dot{\eta}(t))^2 + 2\dot{\eta}\epsilon\delta\dot{\eta}(t) + (\epsilon\delta\dot{\eta}(t))^2 \right) + U(\xi_\epsilon(t), \eta_\epsilon(t)) dt\end{aligned}$$

de tal forma que

$$\left. \frac{d\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}(x_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_0^{\frac{T}{4}} \rho\dot{\eta}\delta\dot{\eta}(t) + \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi(t), \eta(t))(\delta\eta)(t) dt.$$

Por lo que concluimos que

$$\int_0^{T/4} \left( \rho\dot{\eta}(t)\delta\dot{\eta}(t) + \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi(t), \eta(t))(\delta\eta(t)) \right) dt = 0$$

para toda  $\delta\eta$ . Por el Teorema 1.48 (ver [24]) podemos establecer que la restricción  $\eta|_{[0, T/4]}$  es una solución clásica de la segunda ecuación de (3.21). Integrando por partes y considerando la relación

$$\rho\ddot{\eta}(t) = \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi(t), \eta(t)),$$

tenemos

$$\rho\dot{\eta}(0)\delta\eta(0) + \int_0^{T/4} \left( -\rho\ddot{\eta}(t) + \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi(t), \eta(t)) \right) \delta\eta(t) dt = \rho\dot{\eta}(0)\delta\eta(0) = 0$$

ya que  $\delta\eta(0)$  es arbitrario y  $\rho \neq 0$  entonces  $\dot{\eta}(0) = 0$ . La invarianza de  $x$  bajo la acción de  $G$  implica que  $t \mapsto \eta(t)$  es una solución de la segunda ecuación de (3.21) en un intervalo de tiempo que contiene a  $t = 0$  (de hecho es el intervalo  $(-T/2, T/2)$ ). Luego, en este intervalo,  $t \mapsto x_3(t)$  es una solución de (3.1). Un argumento similar demuestra que  $t \mapsto x_1(t)$  es una solución de (3.1) en el intervalo  $(0, T)$ , es decir, la condición *c*) de la Definición 3.2 se satisface. Ahora, requerimos demostrar la condición *d*); para lo cual necesitamos verificar que *i*) y *ii*) de la Definición 3.13 se satisfacen. La energía  $h(t) = H(x(t), \dot{x}(t))$  es constante en cada intervalo  $(-T/2, 0)$  y  $(0, T/2)$  pero *a priori* el valor de  $h$  sobre los dos intervalos podría ser diferente. Notemos que la energía  $h(t)$  puede descomponerse como

$$h(t) = h_3(t) + \frac{\rho\dot{\eta}(t)^2}{2} - U_0(\xi(t), \eta(t))$$

donde  $h_3(t) = h_3(x(t), \dot{x}(t))$  es la energía del cúmulo  $\{1, 2\}$ . Luego, tenemos que demostrar que  $t \mapsto \eta(t)$  es una función de clase  $C^2$  en  $(-T/2, T/2)$  y por la Proposición

3.9 la función  $t \mapsto h_3(T)$  es una función absolutamente continua en un entorno del 0. Observemos que

$$|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle, \text{ y } |\xi|^{-1} = \langle \xi, \xi \rangle^{-\frac{1}{2}},$$

además

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\xi|^{-1} &= -\frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle^{-\frac{3}{2}} \cdot [\xi \dot{\xi} + \dot{\xi} \xi] \\ &= -\frac{2}{2} \langle \xi, \xi \rangle^{-\frac{3}{2}} \xi \dot{\xi} \\ &= -|\xi|^{-3} \xi \dot{\xi} \\ &= -\frac{\xi \dot{\xi}}{|\xi|^3}. \end{aligned}$$

Por otro lado notemos que

$$h_3(t) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\xi}^2 - \frac{m_1 m_2}{|\xi|}$$

y

$$h(t) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\xi}^2 - \frac{m_1 m_2}{|\xi|} + \frac{\rho \dot{\eta}^2}{2} - U_0(\xi(t), \eta(t))$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} 2\dot{\xi} \ddot{\xi} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_1 m_2}{|\xi|} \right] + \frac{\rho}{2} 2\dot{\eta} \ddot{\eta} - \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \dot{\xi} - \frac{\partial U_0}{\partial \eta} \dot{\eta} \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\xi} \left[ -(m_1 + m_2) \frac{\xi}{|\xi|^3} + \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right] - \\ &\quad - \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_1 m_2}{|\xi|} \right] + \rho \dot{\eta} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_0}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \dot{\xi} - \frac{\partial U_0}{\partial \eta} \dot{\eta} \\ &= -m_1 m_2 \frac{\xi \dot{\xi}}{|\xi|^3} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_1 m_2}{|\xi|} \right] \\ &= -m_1 m_2 \frac{\xi \dot{\xi}}{|\xi|^3} + \frac{m_1 m_2}{|\xi|^3} \xi \dot{\xi} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto la energía total  $t \mapsto h(t)$  es constante en  $(-T/2, T/2)$ . Por periodicidad tenemos que  $h(t)$  es constante en  $\mathbb{R}$ . Ahora verifiquemos la condición *ii*) de la Definición 3.6. Haciendo uso de la simetría de  $x$  es suficiente verificar esta condición para una colisión doble que ocurre en  $t = 0$ . Sea  $\Xi(t) = \mu \dot{\xi}(t)$  y  $\Phi(t) = \rho \dot{\eta}(t)$ . La trayectoria  $t \mapsto (\xi(t), \Xi(t), \eta(t), \Phi(t))$  es una solución de (3.30) para  $t \in (0, T/2)$ . Definimos

$$s(t) = \int_0^t \frac{du}{\xi(u)}$$

y denotamos por  $t = t(s)$  a su inversa. Observemos que por la aproximación hecha por Sundman, esta integral es convergente. Si la trayectoria

$$s \mapsto (z(s), \omega(s), \eta(t(s)), \Phi(t(s))) \quad (3.34)$$

donde

$$z(s) = \sqrt{\xi(t(s))}, \quad \omega(s) = \frac{\Xi(t(s))z(s)}{2},$$

es una solución de (3.33) para  $s$  en un entorno del 0. En efecto, ésta es la extensión de  $(\xi(t), \Xi(t), \eta(t), \Phi(t))$  (con el tiempo reescalado). Ya que las ecuaciones (3.33) son regulares sobre la superficie de la energía, la solución (3.34) puede extenderse de forma continua para  $s \leq 0$ . Por definición tenemos  $z(0) = \sqrt{\xi(0)}$  y  $\Phi(0) = \rho\dot{\eta}(0) = 0$ . A partir de la simetría de las ecuaciones (3.33), es claro que las soluciones (3.34) satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} z(-s) &= -z(s), & \omega(-s) &= \omega(s), \\ \eta(t(-s)) &= \eta(t(s)), & \Phi(t(-s)) &= \Phi(t(s)), \end{aligned}$$

Esto en particular implica que  $t(-s) = -t(s)$ . Sea  $(\bar{\xi}, \bar{\Xi}, \bar{\eta}, \bar{\Phi}) : (-T/2, T/2) \rightarrow \mathbb{R}^4$  la proyección de la continuación de (3.34) después de volver al tiempo real  $t$ . Esta trayectoria coincide con  $(\xi, \Xi, \eta, \Phi)$  en el intervalo  $(0, T/2)$ . Por las consideraciones hechas previamente, las variables  $(\bar{\xi}(t), \bar{\eta}(t))$  satisfacen las siguientes condiciones de simetría

$$\bar{\xi}(-t) = \bar{\xi}(t), \quad \bar{\eta}(-t) = \bar{\eta}(t).$$

La invarianza de  $x$  por la acción del grupo  $G$  obliga a que  $x(t) = (\xi(t), \eta(t))$  tenga la misma simetría, por lo que podemos decir que la colisión doble que ocurre en  $t = 0$  está regularizada. El mismo argumento funciona para la colisión que ocurre en  $t = T/2$ .  $\square$

Para demostrar el Teorema 3.1 necesitamos el siguiente resultado.

**Lema 3.15.** *Un mínimo  $x = (x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$  satisface*

$$\forall t \in [0, T/4], \quad x_2(t) \leq 0,$$

con la igualdad si y sólo si  $t = T/4$ .

*Demostración.* El mismo argumento usado aquí se puede encontrar en [20] para el problema de  $2n$  cuerpos con masas iguales. A fin de obtener una contradicción supongamos que  $x_2(\bar{t}) = 0$  para algún  $\bar{t} \in (0, T/4)$ . El subconjunto  $E_2 \subset \mathcal{X}$  es invariante bajo el flujo de las ecuaciones 3.1. Ya que  $x$  no está contenido en  $E_2$ ,

tenemos que  $x(\bar{t}) \notin E_2$ , es decir,  $x(\bar{t}) \notin \sigma x(\bar{t})$ , donde  $\sigma$  es la reflexión respecto a  $E_2$  definida en (3.11). La trayectoria

$$\bar{x} : [0, T/4] \rightarrow S, \quad \bar{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0, \bar{t}] \\ \sigma x(t) & \text{si } t \in [\bar{t}, T/4] \end{cases}$$

es un elemento de  $\Omega_{\frac{1}{4}}$ . Ya que  $\sigma$  es una isometría de  $\mathcal{X}$  que deja invariante al potencial, la acción de  $\bar{x}$  y la acción de  $x|_{[0, T/4]}$  son iguales, y  $\bar{x}$  es un mínimo de  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}|_{\Omega_{\frac{1}{4}}}$ . Observemos que  $\bar{x}$  no es diferenciable en  $t = \bar{t}$ , ya que  $\bar{x}$  no es continua en  $\bar{t}$ . Por la Proposición 3.7, y los Teoremas 3.8 y 3.12, todo mínimo de  $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$  es diferenciable en  $(0, T/4)$ . Esto es una contradicción al hecho de que cualquier mínimo debe ser diferenciable.  $\square$

### 3.5.1 Parte final de la demostración del Teorema 3.1

Sea  $x = (x_1, x_2, x_3)$  un mínimo de  $\mathcal{A}|_{\Omega}$ . A partir de la Proposición 3.14 sabemos que  $x$  es una solución con colisión del problema colineal de 3 cuerpos. La invarianza de  $x$  bajo la acción de  $G$  implica el enunciado de *ii*) del Teorema 3.1. El enunciado en *i*) se sigue de los Teoremas 3.8 y 3.12. Luego sólo requerimos verificar la condición *iii*). Es suficiente demostrar que  $t \mapsto x_2(t)$  es una función estrictamente creciente mientras que  $t \mapsto x_1(t)$  y  $t \mapsto x_3(t)$  son funciones estrictamente decrecientes en  $[0, T/4]$ .

Por la igualdad de Sundman, ecuación (3.29), tenemos

$$\xi(t) = \xi_0 |t - \bar{t}|^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(|t - \bar{t}|), \quad \dot{\xi}(t) = \frac{2}{3} \xi_0 |t - \bar{t}|^{-\frac{1}{3}} + \mathcal{O}(1),$$

cuando  $t \mapsto \bar{t}$ , donde

$$\xi_0 = \left( \frac{9(m_1 + m_2)}{2} \right)^{\frac{1}{3}} > 0$$

y  $\bar{t}$  es el tiempo cuando colisionan  $m_1$  y  $m_2$ . Por otro lado sabemos que en  $t = 0$  las masas  $m_1$  y  $m_2$  están en colisión doble ya que  $\xi = x_2 - x_1$ . Entonces para  $t$  en un entorno del 0 tenemos que

$$\dot{\xi}(t) = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t) > 0,$$

así

$$\dot{x}_2(t) > \dot{x}_1(t).$$

Sin embargo después de colisionar las velocidades cambiarán, por lo que en un entorno del 0, se cumplirá

$$\dot{x}_1(t) < 0, \quad \dot{x}_2(t) > 0 \quad \text{y} \quad \dot{x}_3(t) < 0. \quad (3.35)$$

Demostremos que  $x_3(t)$  es una función estrictamente decreciente en  $[0, T/4]$ . Ya que  $\dot{x}_3(0) = 0$  y a partir de (3.35) tenemos que  $\dot{x}_3(t) < 0$ , por lo que  $\ddot{x}_3(t) < 0$  y podemos concluir que  $x_3(t)$  es una función estrictamente decreciente en  $[0, T/4]$ .

Ahora demostremos que  $x_2(t)$  es una función estrictamente creciente en  $[0, T/4]$ . Supongamos que  $x_2(t)$  es decreciente y por el Lema 3.15 tenemos que  $x_2(t) < 0$ . Ahora supongamos que  $\dot{x}_2(\bar{t}) = 0$  (ver Figura 3.6) para alguna  $\bar{t} \in (0, T/4)$ , por lo que la función podría ser decreciente en  $(\bar{t}, T/4)$  y la condición  $x_2(T/4) = 0$  no se cumpliría, de donde obtenemos que  $x_2(t)$  es estrictamente creciente.

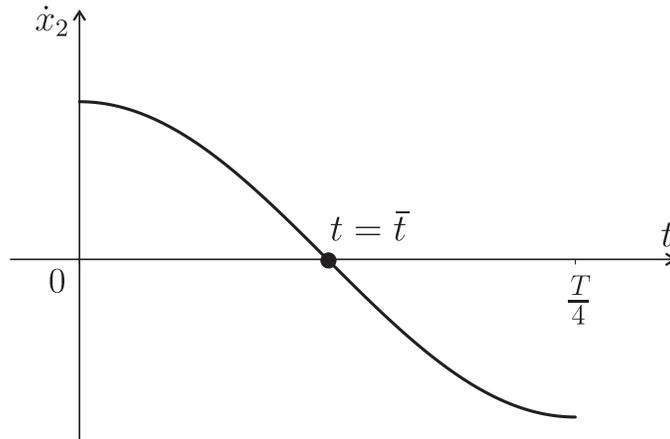


Figura 3.6: Gráfica de la función  $\dot{x}_2(t)$ .

Para el comportamiento de  $x_1(t)$  utilizaremos un argumento similar al anterior. A partir de (3.35) tenemos que en un entorno del 0 se cumple que  $\dot{x}_1(t) < 0$ . Supongamos que  $\dot{x}_1(\bar{t}) = 0$  (ver Figura 3.7) para alguna  $\bar{t} \in (0, T/4)$ , luego la función  $t \mapsto x_1(t)$  podría ser creciente en  $(\bar{t}, T/4)$ . Ya que el centro de masas está en el origen tenemos que  $-x_1(t) = m_2 x_2(t) + x_3(t)$ , de donde  $-x_1(\bar{t}) < x_3(\bar{t}) < x_3(0)$  ya que  $x_3$  es decreciente, y como  $-x_1(t)$  es decreciente tenemos  $-x_1(T/2) < -x_1(\bar{t}) < x_3(0)$ , y la condición  $x_1(T/2) = -x_3(0)$  no se cumpliría. Esto demuestra que  $t \mapsto x_1(t)$  es una función estrictamente decreciente en  $[0, T/4]$ .

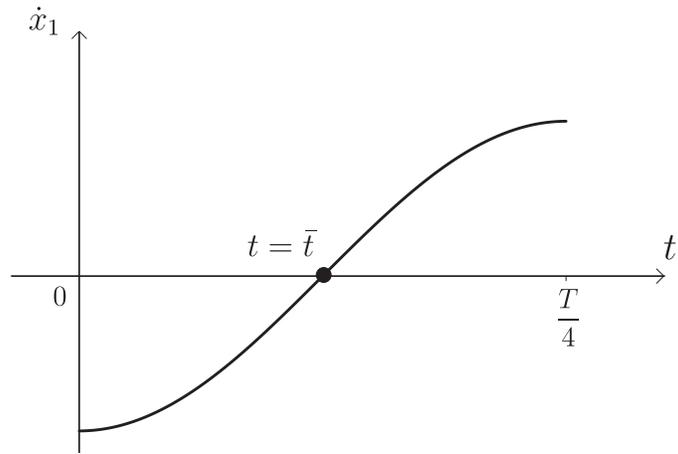


Figura 3.7: Gráfica de la función  $\dot{x}_1(t)$ .



# Apéndice A

## Propiedades del Lagrangiano

**Proposición A.1.** *La restricción  $\mathcal{A}|_{\hat{\mathcal{X}}}$  es de clase  $C^1$*

*Demostración.* Sea  $x \in H^1([0, T], \hat{\mathcal{X}})$  y  $\xi \in H^1([0, T], \mathcal{X})$  si  $s \in \mathbb{R}$  es pequeño, tenemos

$$\mathcal{A}(x + s\xi) = \int_0^T \left( \frac{1}{2} \|\dot{x} + s\dot{\xi}\|^2 + U(x + s\xi) \right) dt.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \|\dot{x} + s\dot{\xi}\|^2 &= \langle \dot{x} + s\dot{\xi}, \dot{x} + s\dot{\xi} \rangle \\ &= \langle \dot{x}, \dot{x} + s\dot{\xi} \rangle + s \langle \dot{\xi}, \dot{x} + s\dot{\xi} \rangle \\ &= \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + s \langle \dot{x}, \dot{\xi} \rangle + s \langle \dot{\xi}, \dot{x} \rangle + s^2 \langle \dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle \\ &= \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + 2s \langle \dot{x}, \dot{\xi} \rangle + s^2 \langle \dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle \\ &= \|\dot{x}\|^2 + 2s \langle \dot{x}, \dot{\xi} \rangle + s^2 \|\dot{\xi}\|^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{A}(x + s\xi) = \int_0^T \left( \frac{\|\dot{x}\|^2}{2} + s\dot{x} \cdot \dot{\xi} + \frac{s^2}{2} \|\dot{\xi}\|^2 + U(x + s\xi) \right) dt.$$

La trayectoria  $x$  es sin colisión, el término del potencial es derivable bajo el signo de la integral y

$$\frac{d}{ds} \mathcal{A}(x + s\xi) \Big|_{s=0} = \int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{\xi} + \nabla U(x) \cdot \xi) dt.$$

Denotemos provisionalmente por

$$F_x(\xi) = \int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{\xi} + \nabla U(x) \cdot \xi) dt$$

demostramos que  $F_x(\xi)$  es acotada, propiedad que para funcionales lineales equivale a la continuidad, puesto que el lazo  $x$  es sin colisión,  $\nabla U(x)$  es una función continua

y acotada para  $t$  en particular es de clase  $L^2$  como  $\xi$  es una función cualquiera en  $H^1([0, T], \mathcal{X})$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
|F_x(\xi)| &= \left| \int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{\xi} + \nabla U(x) \cdot \xi) dt \right| \\
&\leq \int_0^T |\dot{x} \cdot \dot{\xi}| dt + \int_0^T |\nabla U(x) \cdot \xi| dt \\
&\leq \int_0^T \|\dot{x}\| \|\dot{\xi}\| dt + \int_0^T \|\nabla U(x)\| \|\xi\| dt \\
&\leq \left( \int_0^T \|\dot{x}\|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|\dot{\xi}\|^2 dt \right)^{1/2} + \left( \int_0^T \|\nabla U(x)\|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|\xi\|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \|\dot{x}\|_{L^2} \|\dot{\xi}\|_{L^2} + \|\nabla U(x)\|_{L^2} \|\xi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

como

$$\|\xi\|_{H^1}^2 = \|\xi\|_{L^2}^2 + \|\dot{\xi}\|_{L^2}^2$$

entonces

$$|F_x(\xi)| \leq (\|\dot{x}\|_{L^2} + \|\nabla U(x)\|_{L^2}) \|\xi\|_{H^1}.$$

Así  $F_x(\xi)$  está acotada, entonces la acción Lagrangiana es derivable y la derivada de Gâteaux en  $x$  es el funcional lineal  $F_x$ , que en lo sucesivo denotaremos por  $\delta_x \mathcal{A}$ . Resta demostrar que la función  $x \mapsto \delta_x \mathcal{A}$  es continua. Definimos la norma  $\|\cdot\|_{H^1([0, T], \mathcal{X})}^*$  en el espacio dual de  $H^1([0, T], \mathcal{X})$  como

$$\|f\|_{H^1([0, T], \mathcal{X})}^* = \sup_{\substack{x \in H^1([0, T], \mathcal{X}) \\ \|x\|_{H^1} = 1}} |f(x)|$$

Sea  $x \in H^1([0, T], \hat{\mathcal{X}})$  y  $h \in H^1([0, T], \mathcal{X})$ , tales que el segmento  $[x, x + h]$  esté totalmente contenido en  $H^1([0, T], \hat{\mathcal{X}})$ . Observemos que:

$$\begin{aligned}
\|\delta_{x+h} \mathcal{A} - \delta_x \mathcal{A}\|_{H^1([0, T], \mathcal{X})}^* &= \sup_{\substack{\xi \in H^1([0, T], \mathcal{X}) \\ \|\xi\|_{H^1} = 1}} |\delta_{x+h} \mathcal{A}(\xi) - \delta_x \mathcal{A}(\xi)| \\
&= \sup_{\substack{\xi \in H^1([0, T], \mathcal{X}) \\ \|\xi\|_{H^1} = 1}} \int_0^T (\dot{h} \cdot \dot{\xi} + (\nabla U(x+h) - \nabla U(x)) \cdot \xi) dt \\
&= \sup_{\substack{\xi \in H^1([0, T], \mathcal{X}) \\ \|\xi\|_{H^1} = 1}} \left( \|\dot{h}\|_{L^2} + \|\nabla U(x+h) - \nabla U(x)\|_{L^2} \right) \cdot \|\xi\|_{H^1} \\
&\leq \|\dot{h}\|_{L^2} + \|\nabla U(x+h) - \nabla U(x)\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Si suponemos que  $\|h\|_{H^1} \rightarrow 0$  entonces  $\|\dot{h}\|_{L^2} \rightarrow 0$  y  $h$  converge uniformemente hacia 0. Por lo tanto

$$\|\nabla U(x+h) - \nabla U(x)\|_{L^2} \rightarrow 0$$

La aplicación  $x \mapsto \delta_x \mathcal{A}$  es continua y  $\mathcal{A}|_{H^1([0,T], \hat{\mathcal{X}})}$  es de clase  $C^1$ , lo que demuestra la proposición.  $\square$

**Proposición A.2.** *Los puntos críticos sin colisión de  $\mathcal{A}$  son las soluciones  $T$  periódicas del problema de  $n$  cuerpos y los puntos críticos sin colisión de  $\mathcal{A}_{p,q}$  son exactamente las soluciones  $x: [0, T] \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$  del problema de  $n$  cuerpos tales que  $x(0) = p$  y  $x(T) = q$*

*Demostración.* Un lazo en  $\hat{\mathcal{X}}$  es un punto crítico del sistema si y sólo si para cada  $y \in \mathfrak{X}$ :

$$\int_0^T (\dot{x} \cdot \dot{y} + \nabla U(x) \dot{y}) dt = 0, \quad (\text{A.1})$$

ésto es equivalente decir que  $\dot{x}(t)$  es absolutamente continua y

$$\ddot{x} = \nabla U(x) \quad (\text{A.2})$$

para casi todo  $t \in [0, T]$ . Pero el segundo miembro de esta ecuación es continua,  $x(t)$  es de clase  $C^2$ , y la ecuación (A.2) es válida para todo  $t \in [0, T]$ . con respecto a  $\mathcal{A}_{p,q}$  Una trayectoria  $x \in \mathcal{A}_{p,q}$  será un punto crítico de  $\mathcal{A}_{p,q}$  si y sólo si la identidad (A.1) se verifica para toda  $y \in H^1([0, T], \mathcal{X})$  tal que  $y(0) = y(T) = 0$  lo que es equivalente al hecho de que  $x(t)$  sea de clase  $C^2$  y que comprueba (A.2) para todo  $t \in [0, T]$ . La proposición es demostrada.  $\square$



# Apéndice B

## Acción de las órbitas Keplerianas elípticas y colineales

El problema de 2 cuerpos estudia el movimiento de dos partículas que se mueven por su mutua atracción gravitacional; este problema puede ser reducido al *problema de Kepler*. Considerando el origen de coordenadas en una de las partículas, digamos  $m_1$ , de tal forma que la otra partícula  $m_2$  se mueve bajo la acción gravitacional de  $m_1$ .

Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$  los vectores de posición de dos partículas con masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, relativos a un sistema de coordenadas inercial. Utilizando la Ley de Gravitación de Newton, las ecuaciones que describen a este movimiento son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -\frac{gm_1 m_2 (x_1 - x_2)}{|x_2 - x_1|^3}, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\frac{gm_1 m_2 (x_2 - x_1)}{|x_2 - x_1|^3}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

El objetivo del problema de 2 cuerpos es encontrar las soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  para posiciones y velocidades iniciales dadas. Iniciaremos reduciendo el sistema (B.1) al *problema de fuerza central*, pues a partir de éste podremos encontrar las soluciones.

Dividiendo la primera ecuación del sistema (B.1) entre  $m_1$ , la segunda entre  $m_2$ , restamos y consideramos que  $x = x_2 - x_1$ , entonces

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{gm_1 x}{|x|^3} - \frac{gm_2 x}{|x|^3} \\ &= -\frac{g(m_1 + m_2)x}{|x|^3} \\ &= -\frac{\mu}{|x|^3} x \end{aligned} \tag{B.2}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $\mu = m_1 + m_2$ , y sin pérdida de generalidad consideremos de aquí en adelante que  $g = 1$ . El *problema de fuerza central* definido en (B.2) se conoce como *problema de Kepler*.

A continuación enunciaremos algunas definiciones necesarias para algunos de los siguientes resultados .

**Definición B.1.** [7] Sea  $C$  una curva cerrada y orientada, definida por  $x(t)$  con  $t \in [a, b]$ , y sea  $p$  un punto del plano que no está en la curva. Entonces, la función  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por

$$\varphi = \frac{x(t) - p}{|x(t) - p|}, \quad t \in [a, b],$$

define la aplicación que da la posición de la curva relativa al punto  $p$ . Cuando un punto en  $C$  da vuelta alrededor de la curva una vez, su punto imagen  $\varphi(x(t))$  se moverá alrededor de  $\mathbb{S}^1$  un número de veces, este número es llamado el *grado de la curva* (número de vueltas)  $C$  relativo al punto  $p$ , y denotamos esto por  $\text{deg}(x, p)$ .

**Definición B.2.** Si  $x(t)$  es una órbita  $T$  periódica de grado  $k$ , definimos el *período mínimo* de la órbita como  $\frac{T}{k}$ . La órbita  $\frac{T}{k}$  periódica se dice *órbita de período mínimo*.

**Lema B.3.** Sea  $x$  una órbita Kepleriana de (B.2) con período mínimo  $T$ . Entonces el funcional de acción de  $x$  es

$$\mathcal{A}(x) = 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{1/3} T^{1/3}. \quad (\text{B.3})$$

*Demostración.* Consideremos una solución elíptica Kepleriana  $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$  de (B.2). Supongamos que tiene período mínimo  $T$ . El funcional de acción de esta solución es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \int_0^T L(x, \dot{x}) dt = \int_0^T K(\dot{x}) + U(x) dt \\ &= \int_0^T H(x, \dot{x}) + 2U(x) dt = HT + 2 \int_0^T U(x) dt, \end{aligned}$$

donde  $H(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) - U(x)$ .

Ahora, calculemos esta última integral, recordando que  $U(x) = \frac{\alpha}{|x|} = \frac{\alpha}{r}$ ,

$$\int_0^T U(x) dt = 2 \int_0^{T/2} U(x) dt = 2\alpha \int_0^{T/2} \frac{dt}{r(t)} = 2\alpha \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r\dot{r}}. \quad (\text{B.4})$$

Para terminar de calcular la integral es conveniente introducir una variable auxiliar  $\psi$ , llamada *anomalía excéntrica*, definida implícitamente por

$$r = a(1 - e \cos \psi). \quad (\text{B.5})$$

La variable  $\psi$  está bien definida ya que es conocido que  $r$  toma el valor mínimo en  $r = a(1 - e)$  y el valor máximo en  $r = a(1 + e)$ , en cuyo caso estamos.

Despejando a  $\dot{r}$  de la ecuación

$$H = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{\alpha}{r}$$

tenemos

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{2}{m} \left( H + \frac{\alpha}{r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}$$

Sustituyendo el Hamiltoniano  $H$  por  $-\frac{\alpha}{2a}$ , y recordando que  $a = \frac{p}{1-e^2}$  y  $p = \frac{J^2}{m\alpha}$  obtenemos

$$\begin{aligned} |\dot{r}| &= \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{-\frac{\alpha}{2a} + \frac{\alpha}{r} - \frac{p\alpha}{2r^2}}} \\ &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\alpha}{m} \sqrt{-\frac{r^2}{2a} + r - \frac{a(1-e^2)}{2}}} \end{aligned}$$

Por último, sustituyamos a  $r$  por  $a(1 - e \cos \psi)$ , y simplificando obtenemos

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{\alpha}{ma}} \left( \frac{e \sin \psi}{1 - e \cos \psi} \right),$$

de donde

$$\frac{1}{r|\dot{r}|} dr = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \frac{1}{e \sin \psi} e \sin \psi = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}}.$$

Por lo tanto, la integral (B.4) queda expresada como

$$\int_0^T U(x) dt = 2\alpha \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r\dot{r}} = 2\alpha \int_0^\pi \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} d\psi = 2\sqrt{ma\alpha}\pi.$$

De esta manera la acción de cualquier órbita Kepleriana  $x(t)$  de periodo mínimo  $T$  es

$$\mathcal{A}(x) = HT + 4\sqrt{ma\alpha}\pi$$

Finalmente, usando la tercera ley de Kepler, y  $H = -\frac{\alpha}{2a}$ , podemos escribir la acción en términos de  $m$ ,  $\alpha$  y  $T$ :

$$\mathcal{A}(x) = 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{1/3} T^{1/3}.$$

□

Notemos que la acción no depende de la excentricidad  $e$  de la órbita.

**Observación B.4.** Sea  $x = x(t)$  una órbita elíptica Kepleriana  $T$ -periódica con período mínimo  $\frac{T}{k}$ . Consideremos a  $y = y(t)$  la órbita  $T$ -periódica definida por  $y(t) = x(\frac{t}{k})$ , es decir, la órbita  $y$  tiene período mínimo  $T$  y además cumplen con

$$k\mathcal{A}(x) = 3k \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{T}{k} \right)^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{2}{3}} 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{2}{3}} \mathcal{A}(y) \geq \mathcal{A}(y).$$

Es decir, la acción de una órbita con período mínimo  $T$  no es mayor que la acción de una órbita con período  $T$ .

Ahora consideremos las órbitas Keplerianas colineales (es decir con  $J = 0$ ). Una *solución extendida*  $x(t)$  de la ecuación de movimiento (B.2), con  $t \in [0, T]$ , es una curva continua cuya trayectoria es la unión de órbitas Keplerianas y el origen. Sea  $E_x \subset [0, T]$  un conjunto cerrado en el cual  $x$  se anula. Por continuidad  $x(t)$  inicia ó termina en colisión en cada componente de  $[0, T] \setminus E_x$ , de tal forma que las componentes de  $x(t)$  son líneas rectas, pues las órbitas Keplerianas colisionan sólo en configuración colineal.

La figura B.1 muestra una solución extendida con una única componente, además de una solución extendida de dos componentes. Ésta última tiene componentes de períodos  $T_1$  y  $T_2$ , y el período total de la trayectoria es  $T = T_1 + T_2$ , la cual inicia en el punto de reposo  $q_1$ , luego la partícula va hacia el origen, emergiendo de aquí con un ángulo arbitrario para moverse hacia el punto  $q_2$ , donde toca la curva de velocidad cero; luego en  $q_2$  toma camino de reversa, y la trayectoria termina en  $q_1$ .

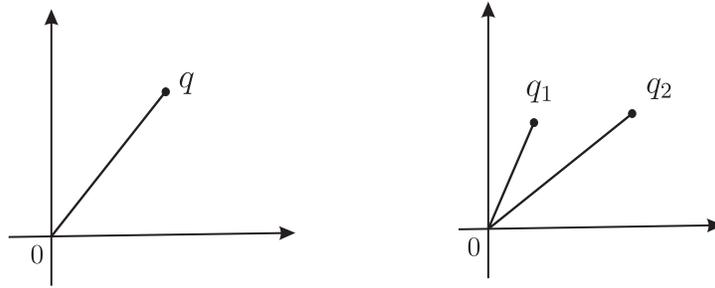


Figura B.1: Solución extendida con una y dos componentes, respectivamente.

En este contexto, consideremos el caso de órbitas de colisión-expulsión con una única colisión, es decir tomemos las órbitas Keplerianas que inician con velocidad cero y se mueven hacia el origen hasta que ocurre una colisión en  $t = \frac{T}{2}$ , entonces las masas después de colisionar regresan a su posición inicial en  $t = T$ . Éste es un caso

particular de las soluciones  $T$  periódicas extendidas para el problema de Kepler, las cuales pueden ser consideradas como órbitas elípticas degeneradas. En este caso el momento angular es cero y el eje mayor  $a = |x(0)|$ .

A partir de

$$T^2 = \frac{4m\pi^2}{\alpha} a^3 \quad (\text{B.6})$$

y (B.5), la fórmula del cuadrado del período (B.6) puede ser obtenida para una de las órbitas colineales. Notemos que ésta no depende de  $e$ . Los cálculos para la acción de  $x$  son similares, esto es, ya que la colisión ocurre al tiempo  $\frac{T}{2}$ , definimos  $\tau = \frac{T}{2}$  y por tanto  $T = 2\tau$ . Luego como un caso particular del Lema B.3 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{A}(x(2\tau)) &= \frac{1}{2}3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} (2\tau)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{3}} 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \tau^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} (m\alpha^2\pi^2)^{\frac{1}{3}} \tau^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

En [11], Gordon llama “piernas” a las componentes de las soluciones extendidas, por lo tanto éstas pueden ser órbitas de colisión-expulsión ó expulsión-colisión. Si una órbita extendida tiene  $k$  componentes con tiempos de colisión  $\tau_i$  entonces el periodo total  $T = \sum_{i=1}^k 2\tau_i$ .

Resumimos los últimos cálculos en el siguiente lema.

**Lema B.5.** *i) Sea  $x(t)$  una órbita Kepleriana colineal extendida con período mínimo  $T$ , tal que satisface*

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad x(t) = x(T - t), \quad \text{para todo } t \in [0, \frac{T}{2}], \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0. \quad (\text{B.8})$$

*Entonces el funcional de acción en  $x$  está dado por (B.3).*

*ii) Si  $\dot{x}(0) = 0$  y la órbita  $x(t)$  se mueve hacia el origen hasta que ocurre una colisión en  $x(\tau) = 0$ , entonces*

$$\int_0^\tau L(x, \dot{x}) dt = \frac{3}{2} (m\alpha^2\pi^2)^{\frac{1}{3}} \tau^{\frac{1}{3}}.$$

**Observación B.6.** Observemos que  $g(t) = t^{\frac{1}{3}}$  es una función convexa para  $t \in [0, \infty)$ . Sea  $x$  una órbita periódica extendida del problema de Kepler, y sean  $t_j$  las longitudes de los componentes de  $E_x$ . Si la acción de  $x$  es finita y consideramos  $\sum_j t_j = T$ , por convexidad se cumple

$$\sum_j t_j^{\frac{1}{3}} \geq \left( \sum_j t_j \right)^{\frac{1}{3}} = T^{\frac{1}{3}}.$$

Como consecuencia la acción total satisface

$$\begin{aligned}
3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \sum_j t_j^{\frac{1}{3}} &= 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} \sum_j \left( \frac{t_j}{T} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\geq 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} \left( \sum_j \left( \frac{t_j}{T} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

En particular si  $x$  es una órbita con una única colisión tenemos que  $t_1 = t_2 = \frac{T}{2}$ . Luego la igualdad se cumple en la ecuación anterior si y sólo si existe sólo una colisión. En otras palabras, la acción de las soluciones periódicas extendidas del problema de Kepler de la forma (B.8) tienen una acción menor que las órbitas extendidas con más de una colisión.

# Apéndice C

## Las ecuaciones de movimiento en términos de las coordenadas de Jacobi

En esta sección vamos a definir un sistema de coordenadas, el cual es ideal para estudiar el problema de  $n$  cuerpos. Primero, fijamos el centro de masa del sistema de los  $n$  cuerpos en el origen de coordenadas, de tal forma que una de las coordenadas es el vector que va de una partícula a otra, lo cual es muy útil cuando se estudia el caso en que dos partículas están próximas una de la otra. Por último, consideramos otra coordenada como el vector que va del centro de masa de las  $n - 1$  partículas a la  $n$ -ésima, lo cual es útil cuando se estudia el caso en que una partícula esta lejos de la otra.

Sean  $n$  masas puntuales moviéndose bajo la ley de atracción de Newton. Sean  $m_i$ ,  $q_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $p_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, \dots, n$ , la masa, el vector de posición y el vector de velocidad de la  $i$ -ésima partícula, respectivamente.

Definimos la sucesión de transformaciones iniciando con  $g_1 = q_1$  y  $\mu_1 = m_1$  y procedemos inductivamente de la siguiente forma:

$$T_k : \begin{cases} u_k = q_k - g_{k-1}, \\ g_k = (1/\mu_k)(m_k q_k + \mu_{k-1} g_{k-1}), \\ \mu_k = \mu_{k-1} + m_k \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

para  $k = 2, \dots, n$ .  $\mu_k$  es la masa total, y  $g_k$  es el vector posición del centro de masa del sistema con índices  $1, 2, \dots, k$ . El vector  $u_k$  es el vector de posición de la  $k$ -ésima partícula relativa al centro de masa de las otras  $k - 1$  partículas (ver la Figura C.1).

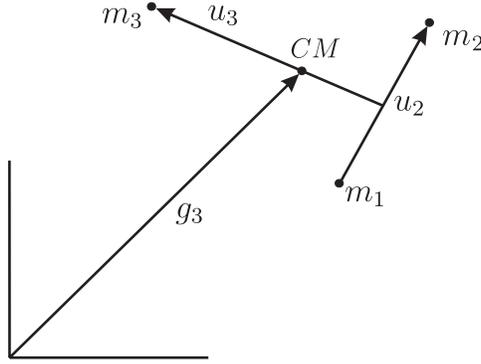


Figura C.1: Coordenadas de Jacobi para el problema de 3 cuerpos.

Consideremos  $T_k$  como el cambio de coordenadas de  $g_{k-1}, u_2, \dots, u_{k-1}, q_k, \dots, q_n$  a  $g_k, u_2, \dots, u_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n$ , o simplemente de  $g_{k-1}, q_k$  a  $g_k, u_{k+1}$ . La inversa de  $T_k$  es

$$T_k^{-1} : \begin{cases} q_k = (\mu_{k-1}/\mu_k)u_k + g_k, \\ g_{k-1} = (-m_k/\mu_k)u_k + g_k. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Esta es una transformación lineal sólo en las variables  $q$ , es decir, en el subespacio Lagrangiano; mientras que es una transformación simpléctica en las variables  $p$ , ver [9].

Para hacer de  $T_k$  una transformación simpléctica, definimos  $G_1 = p_1$  y

$$Q_k : \begin{cases} v_k = (\mu_{k-1}/\mu_k)p_k - (m_k/\mu_k)G_{k-1}, \\ G_k = p_k + G_{k-1}, \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

$$Q_k^{-1} : \begin{cases} p_k = v_k + (m_k/\mu_k)G_k, \\ G_{k-1} = v_k + (\mu_{k-1}/\mu_k)G_k. \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Si denotamos la matriz de coeficientes en (C.1) por  $A$ , entonces la matriz de coeficientes en (C.2), (C.3) y (C.4) son  $A^{-1}$ ,  $A^{-T}$  y  $A^T$ , respectivamente, tal que el par  $T_k, Q_k$  es un cambio simpléctico de variables. Entonces la composición de todos esos son cambios simplécticos de coordenadas, y el conjunto total  $g_n, u_2, \dots, u_n, G_n, v_2, \dots, v_n$  forman un sistema de coordenadas simpléctico el cual es conocido como *coordenadas de Jacobi*.

Ahora nos centraremos en escribir las ecuaciones de movimiento del problema de tres cuerpos en términos de las coordenadas de Jacobi. Iniciemos por definir lo que es un cúmulo.

Dados dos índices diferentes  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , la pareja  $\{i, j\}$  es llamado un *cúmulo*.

Sea  $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$ . Las *coordenadas de Jacobi* asociadas al cúmulo  $\{i, j\}$  están definidas de la siguiente manera.

$$\xi = x_j - x_i \quad (C.5)$$

$$\eta = x_k - \frac{m_i x_i + m_j x_j}{m_i + m_j} \quad (C.6)$$

Las funciones  $K$  y  $U$  se escriben

$$K(x, \dot{x}) = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \dot{\xi}^2 + \frac{m_k (m_i + m_j)}{M} \dot{\eta}^2 \quad (C.7)$$

$$U(x) = \frac{m_i m_j}{|\xi|} + U_0(x) \quad (C.8)$$

donde  $U_0 = \frac{m_i m_k}{|\eta + \frac{m_j}{m_i + m_j} \xi|} + \frac{m_j m_k}{|\eta - \frac{m_i}{m_i + m_j} \xi|}$ , y  $M = m_1 + m_2 + m_3$  es la suma de las masas.

Las ecuaciones de movimiento escriben de la siguiente forma

$$\ddot{\xi} = -(m_i + m_j) \frac{\xi}{|\xi|^3} + \frac{m_i + m_j}{m_i m_j} \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi, \eta) \quad (C.9)$$

$$\ddot{\eta} = \frac{M}{m_k (m_i + m_j)} \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi, \eta) \quad (C.10)$$

y la función

$$h_k(x, \dot{x}) = \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \dot{\xi}^2 - \frac{m_i m_j}{|\xi|} \quad (C.11)$$

es la energía del cúmulo  $\{i, j\}$ . La cual está bien definida para  $\xi \neq 0$ .

Ahora demostraremos la ecuación (C.7). En términos de  $\xi$  y  $\eta$  las coordenadas  $x_1, x_2$  y  $x_3$  quedan expresadas como

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi - \frac{m_3}{M} \eta,$$

$$x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi - \frac{m_3}{M} \eta,$$

$$x_3 = \frac{m_1 + m_2}{M} \eta.$$

La energía cinética en las coordenadas de  $x = (x_1, x_2, x_3)$  es

$$\begin{aligned} K(x, \dot{x}) &= \frac{1}{2}m_1|\dot{x}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{x}_2|^2 + \frac{1}{2}m_3|\dot{x}_3|^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\langle\dot{x}_1, \dot{x}_1\rangle + \frac{1}{2}m_2\langle\dot{x}_2, \dot{x}_2\rangle + \frac{1}{2}m_3\langle\dot{x}_3, \dot{x}_3\rangle \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  encontramos

$$\begin{aligned} K(x, \dot{x}) &= \frac{1}{2}m_1 \left\langle \frac{-m_2}{m_1m_2}\dot{\xi} - \frac{m_3}{M}, \frac{-m_2}{m_1m_2}\dot{\xi} - \frac{m_3}{M} \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2 \left\langle \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\xi} - \frac{m_3}{M}\dot{\eta}, \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\xi} - \frac{m_3}{M}\dot{\eta} \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}m_3 \left\langle \frac{m_1+m_2}{M}\dot{\eta}, \frac{m_1+m_2}{M}\dot{\eta} \right\rangle \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} K(x, \dot{x}) &= \frac{1}{2}m_1 \left( \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} \langle\dot{\xi}, \dot{\xi}\rangle + 2\frac{m_2m_3}{(m_1+m_2)M} \langle\dot{\xi}, \dot{\eta}\rangle + \frac{m_3^2}{M^2} \langle\dot{\eta}, \dot{\eta}\rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2 \left( \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \langle\dot{\xi}, \dot{\xi}\rangle - 2\frac{m_1m_3}{(m_1+m_2)M} \langle\dot{\xi}, \dot{\eta}\rangle + \frac{m_3^2}{M^2} \langle\dot{\eta}, \dot{\eta}\rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_3 \left( \frac{(m_1+m_2)^2}{M^2} \langle\dot{\eta}, \dot{\eta}\rangle \right) \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$K(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} |\dot{\xi}|^2 + \frac{m_3(m_1+m_2)}{M} |\dot{\eta}|^2 \right).$$

Así que podemos escribir la energía cinética del cúmulo  $\{i, j\}$  como

$$K(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} |\dot{\xi}|^2 + \frac{m_k(m_i + m_j)}{M} |\dot{\eta}|^2 \right).$$

Por otra parte, la energía potencial para el problema de tres cuerpos es

$$U(x) = U(x_1, x_2, x_3) = \frac{m_1m_2}{|x_1 - x_2|} + \frac{m_1m_3}{|x_1 - x_3|} + \frac{m_2m_3}{|x_2 - x_3|}.$$

Calculemos las distancias relativas en términos de las coordenadas de Jacobi

$$|x_1 - x_2| = |\xi|$$

$$|x_2 - x_3| = \left| \frac{m_1}{m_1+m_2}\xi - \frac{m_3}{M}\eta - \frac{m_1+m_2}{M}\eta \right| = \left| \eta - \frac{m_1}{m_1+m_2}\xi \right|$$

$$|x_1 - x_3| = \left| -\frac{m_2}{m_1+m_2}\xi - \frac{m_3}{M}\eta - \frac{m_1+m_2}{M}\eta \right| = \left| \eta + \frac{m_2}{m_1+m_2}\xi \right|$$

Por lo tanto, la energía potencial del cúmulo  $\{i, j\}$  es

$$U(x) = \frac{m_i m_j}{\xi} + U_0(x).$$

donde

$$U_0(x) = \frac{m_i m_k}{\left| \eta + \frac{m_j}{m_i + m_j} \xi \right|} + \frac{m_j m_k}{\left| \eta - \frac{m_i}{m_i + m_j} \xi \right|}. \quad (\text{C.12})$$

Ya que

$$\ddot{x}_i = - \sum_{\substack{j=1,2,3 \\ i \neq j}} \frac{m_j (x_i - x_j)}{|x_i - x_j|^3}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{|x_1 - x_2|^3} + \frac{m_3 (x_3 - x_1)}{|x_1 - x_3|^3}, \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{m_1 (x_2 - x_1)}{|x_2 - x_1|^3} - \frac{m_3 (x_2 - x_3)}{|x_2 - x_3|^3}, \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{m_1 (x_3 - x_1)}{|x_3 - x_1|^3} - \frac{m_2 (x_3 - x_2)}{|x_3 - x_2|^3}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Ahora calculemos  $\ddot{\xi}$

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}_j - \ddot{x}_i = -\frac{(m_i + m_j)}{|\xi|^3} + m_k \left( \frac{\eta - \frac{m_i}{m_i + m_j} \xi}{\left| \eta - \frac{m_i}{m_i + m_j} \xi \right|^3} - \frac{\eta + \frac{m_j}{m_i + m_j} \xi}{\left| \eta + \frac{m_j}{m_i + m_j} \xi \right|^3} \right) \quad (\text{C.14})$$

Por (C.12), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial \xi} &= \frac{-m_1 m_3 \left( \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right) \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)}{\left| \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right|^3} + \frac{m_2 m_3 \left( \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right) \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)}{\left| \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right|^3} \\ &= \frac{\frac{-m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2} \eta - \frac{m_1 m_2^2 m_3}{(m_1 + m_2)^2} \xi}{\left| \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right|^3} + \frac{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2} \eta - \frac{m_1^2 m_2 m_3}{(m_1 + m_2)^2} \xi}{\left| \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right|^3}. \end{aligned}$$

Multipliquemos la ecuación anterior por  $\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$  para obtener

$$m_3 \left( \frac{\eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi}{\left| \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right|^3} - \frac{\eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi}{\left| \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right|^3} \right) \quad (\text{C.15})$$

así la ecuación (C.14) se escribe como

$$\ddot{\xi} = -(m_i + m_j) \frac{\xi}{|\xi|^3} + \frac{m_i + m_j}{m_i m_j} \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi, \eta).$$

Lo siguiente es calcular  $\ddot{\eta}$ . A partir de las ecuaciones (C.13)

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= \ddot{x}_3 - \frac{m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2}{m_1 + m_2} \\ &= -\frac{m_1(x_3 - x_1)}{|x_3 - x_1|^3} - \frac{m_2(x_3 - x_2)}{|x_3 - x_2|^3} \\ &\quad - \frac{m_1 \left( \frac{m_2(x_2 - x_1)}{|x_1 - x_2|^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{|x_1 - x_3|^3} \right) + m_2 \left( \frac{-m_1(x_2 - x_1)}{|x_2 - x_1|^3} - \frac{m_3(x_2 - x_3)}{|x_2 - x_3|^3} \right)}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= \frac{(x_3 - x_1)}{|x_3 - x_1|^3} \left( \frac{-m_1 m_3}{m_1 + m_2} - m_1 \right) + \frac{(x_3 - x_2)}{|x_3 - x_2|^3} \left( \frac{-m_3 m_2}{(m_1 + m_2) - m_2} \right) \quad (C.16) \\ &= \frac{\left( \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right)}{\left| \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right|^3} \left( \frac{-M m_1}{m_1 + m_2} \right) + \frac{\left( \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right)}{\left| \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right|^3} \left( \frac{-M m_2}{m_1 + m_2} \right). \end{aligned}$$

De la expresión (C.12) para  $i = 1$ ,  $j = 2$  y  $k = 3$  calculemos,  $\frac{\partial U_0}{\partial \eta}$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{-m_1 m_3 \left( \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right)}{\left| \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right|^3} - \frac{m_2 m_3 \left( \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right)}{\left| \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right|^3}. \quad (C.17)$$

Multipliquemos la ecuación anterior por  $\frac{M}{m_3(m_1 + m_2)}$ , entonces

$$\frac{M}{m_3(m_1 + m_2)} \frac{\partial U_0}{\partial \eta} = \frac{\frac{-M m_1}{m_1 + m_2} \left( \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right)}{\left| \eta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi \right|^3} - \frac{\frac{M m_2}{m_1 m_2} \left( \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right)}{\left| \eta - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi \right|^3}. \quad (C.18)$$

De (C.16) y (C.18) concluimos

$$\ddot{\eta} = \frac{M}{m_3(m_1 + m_2)} \frac{\partial U_0}{\partial \eta}(\xi, \eta).$$

Sólo nos resta encontrar la energía del cúmulo  $\{i, j\}$  en términos de las coordenadas de Jacobi. En particular, encontraremos la energía del cúmulo  $\{1, 2\}$ , vamos a usar el mismo argumento que utilizamos en la sección 2.2 y obtenemos

$$h_k(x, \dot{x}) = \frac{m_i m_j}{2(m_i + m_j)} \dot{\xi}^2 - \frac{m_i m_j}{|\xi|}.$$

# Referencias

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag, 1978.
- [2] H. Brezis, *Análisis Funcional*. Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [3] A. Chenciner, *Collision totales, mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le problème des  $n$  corps*, Regular and Chaotic Dynamics, **3** (1998), 93-105.
- [4] A. Chenciner and N. Desolneux, *Minima de l'intégrale d'action et équilibres relatifs de  $n$  corps*, C.R.Acad.Sci. Paris, Série I, Math. **326** (1988), 1209-1212. Correction in C.R.Acad.Sci. Paris, Série I, Math. **327** (1998), 193-193.
- [5] A. Chenciner y R. Montgomery, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Ann. of Math. (2) **152** (2000), no. 3, 881-901.
- [6] J. Ize, *Cálculo de variaciones*, Edit. Fenomec, México, 2000.
- [7] C.C. Hsiung, *A first course in differential geometry* International Press, 1997.
- [8] E. Kreysig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, Inc. 1978.
- [9] K. R. Meyer, G. Hall y D. Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the  $N$ -Body Problem*, Applied Mathematical Sciences 90, Springer-Verlag, 2009.
- [10] D. Ferrario y S. Terracini, *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical  $n$ -body problem*, Invent. Math., **155** (2004), 305-362.
- [11] W. B. Gordon, *A minimizing Property of Keplerian Orbits*, American Journal of Math, **99** (1977), 961-971.

- [12] T. Levi-Civita, *Sur la régularisation du problème des trois corps*, Acta Math., **42** (1920), 99-144.
- [13] R. McGehee, *Triple collision in the collinear three-body problem*, Invent. Math. bf 2(12), 1910, 1-17.
- [14] R. Moeckel, *A Topological Existence Proof for the Schubart Orbits in the Collinear Three-body Problem*, por publicarse en Disc. Cont. Dyn. Syst.
- [15] R. Montgomery, *Figure 8s with 3 bodies*, publicación preliminar, (1999).
- [16] P. Painlevé, *Leçons sur le Théorie Analytique de Équations différentielles*, A. Hermann, Paris 1897.
- [17] R. S. Palais, *The principle of symmetric criticality*, Comm. Math. Phys. 69 (1979), no. 1, 19–30.
- [18] J. Schubart, *Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem*, Astronomische Nachrichten, **283** (1956), 305-325.
- [19] E. Serra y S. Terracini, *Collisionless periodic solutions to some three-body problems*, Arch. Rat. Mech. Anal., **120** (1992), 305-325.
- [20] M. Shibayama, *Multiple Symmetric Periodic Solutions to the 2n-body Problem with Equal Masses*, Nonlinearity, **19** (2006), 2441-2453.
- [21] K. E. Sundman, *Memoire sur le problème de trois corps*, Acta Mathematica **36** (1912), 105-179.
- [22] Stiefel E.L. y Scheifele G., *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, USA, 1971.
- [23] J.Tinsley Oden, Leszek F. Demkowicz, *Applied Functional Analysis*, CRC Press, 1996.
- [24] A. Venturelli, *A Variational Proof of the Existence of Von Schubart's Orbit*, por publicarse en Disc. Cont. Dyn. Syst.
- [25] A. Venturelli, *Aplication de la Minimisation de L'action au Problème des N corps dans le plan et dans L'espace*, Ph. D thesis, Université Denis Diderot in Paris, 2002.
- [26] A. Winter, *"The Analytical Foundations of Celestial Mechanics"*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.