UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
FACULTAD DE CIENCIAS
POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

ESTRUCTURALISMO, TEORÍA DE CONJUNTOS Y TEOREMAS DE CATEGORICIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:
CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ

COTUTORES:
DR. JOSÉ ALFREDO AMOR Y MONTAÑO †
DR. MARIO GÓMEZ TORRENTE

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F. JUNIO DE 2011

Índice

A María y Nicté que son la razón de mi vida

A la memoria de José Alfredo Amor mi gran maestro y amigo

Agradecimientos:

Quiero agradecer en primer lugar a mi esposa María por apoyarme durante todos mis estudios de Maestría y en especial durante la redacción de este trabajo. María sin ti mi vida no tendría sentido. También quiero agradecer a Iztli Nicté, mi hija, por soportar el descuido durante la redacción de este trabajo y aun así seguir queriéndome.

También quiero agradecer a mis dos tutores José Alfredo Amor y Mario Gómez Torrente por su guía y apoyo en la redacción de este trabajo. Cada uno de ellos aportó mucho en la realización de este trabajo. Ellos, sin duda han sido (desde mis estudios de licenciatura) mis dos grandes maestros, las figuras más importantes en mi desarrollo profesional y académico. José Alfredo fue el que me introdujo en el mundo de la teoría de conjuntos y en general de las matemáticas. Fue él, quien me convirtió en un estudiante apasionado del universo de Cantor. Mario me ha guiado en mi desarrollo filosófico, me ha orientado en el análisis filosófico de las matemáticas y de la lógica. Siempre haciéndome observaciones agudas que terminan por hacerme cambiar de opinión. Gracias a ellos dos creo tener acceso a lo mejor de ambas disciplinas.

Hace poco tiempo José Alfredo falleció dejando un hueco en mi vida, sin embargo, su influencia perdurará en mí y en todos sus estudiantes, gracias maestro.

Agradezco a mis lectores Axel Barceló, Max Fernández de Castro, Elia Zardini y Eduardo García por sus oportunos comentarios que ayudaron a enriquecer esta investigación. Axel y Max fueron los que me introdujeron a la filosofía estructuralista de las matemáticas, sin ellos, esta tesis simplemente no hubiera sido posible. Gracias a Eduardo por sus clases y comentarios que me han ayudado a ver con otros ojos al estructuralismo, ojos que han permitido cuestionarlo y que sin duda influirán en mi desarrollo posterior como filósofo. Gracias Elia por todos los comentarios puntuales y sagaces a este trabajo, tus comentarios me han hecho replantear mi visión del papel de la teoría de conjuntos en la fundamentación de las matemáticas.

Agradezco al proyecto PAPIIT IN401909 “Lenguaje y comunicación”, a todos sus miembros y a su responsable, quien nuevamente es Mario Gómez Torrente, por su apoyo y por la confianza que tuvieron en mí.

Agradezco al seminario de filosofía de las matemáticas y a todos sus integrantes por su apoyo y por haber escuchado versiones previas de este trabajo, por hacerme comentarios y observaciones y por todo aquello que he aprendido gracias a ustedes. Gracias Axel, Max, Carlos, Carmen, Jacobo, Mauricio, Javier y Silvio.

Agradezco también a mis amigos del seminario “Metafísica del significado” por todas las buenas discusiones que he tenido con ustedes. Gracias Lourdes, Hugo, Chayo, Anaíd, Ricardo, Viorica, Aliosha, Diego, Felipe, Erick, Álvaro y Carlos.

Agradezco a los miembros del seminario informal de teoría de conjuntos, Carlos Romero y Moises Macías por todas esas tardes dedicadas a comprender los cardinales y los ordinales.

Agradezco a la Dra. Ivonne Pallares por enseñarme con paciencia, dedicación y desinterés, teoría de categorías, la cual me ha servido para ampliar mi perspectiva de cómo hacer filosofía de las matemáticas.

Agradezco al Dr. Agustín Rayo sus clases y sus textos que en buena medida me ayudaron a enfocar la discusión presentada en esta tesis.

Agradezco a todos los maestros que han acompañado en mi vida, en especial a la maestra Lourdes Ramírez quien me guió en mis primeros años de formación.

También agradezco a mis compañeros y amigos del Instituto de Investigaciones Filosóficas por todo lo que me han ayudado a aprender y por todo lo que hemos vivido juntos. En especial a Alejandro

Herrera, Guillermo Hurtado, Olbeth Hansberg, Gustavo Ortíz, Javier García, Héctor Hernández, Armando Lavalle, Ignacio Vilaró, Paloma Hernández, Martín Abreu y todos aquellos estudiantes asociados de otros tiempos que me ayudaron mucho cuando lo fueron.

Agradezco a mis amigos todas esas charlas que me han ayudado a no tirar la toalla Ana Márquez, María Márquez, Dayanira García, Moises Macías, Fernanda Mora, Leonel Castro, Paulina Raigosa, Fernando Flores, César López, Xóchitl Martínez, Esaú Ángeles, Rafael Peralta, Álvaro Enríquez, Genaro Wong, Manuel González, Abraham Sapien, Natalia Luna, Esperanza Zaragoza, Gabriel Ramos, Larry Jagüey, Paola, Adielisa Espinosa, Carlos Romero, Gaby Morales, Aberlardo Vela, Luis Cano, Ross Soriano, Ytzelt González, Federico Marulanda, Luis Estrada, Claudia Olmedo, Víctor Peralta, Mauricio Bieletto, Cristina Rosas, Héctor Conde, Mauricio Salinas, Osvaldo Guzmán, Juancho Ledezma, Manuel Zorrilla y especialmente a Aurora Quiterio por todo lo que hemos pasado juntos en los últimos tiempos.

Agradezco a mis padres Raquel y Juan y a mi hermano Ángel por todo el apoyo en los últimos tiempos.

Agradezco a toda mi familia por el apoyo en los momentos difíciles. A Guadalupe Ávila, Salvador Olvera, Juan Olvera, Gerardo Olvera, Paty Olvera, Orlando Salinas, Ximena Salinas, Paulina Salinas, Remedios Rangel, María de la Luz Negrete, Tere Ramírez, Martín Ramos, Diana Ramos, Erick Ramos, Alicia Ramírez, Rubén Hernández, Adán Hernández, Nataly Hernández, Ausencio Ramírez, Ángeles Ramírez, Miguel Zamora, Alejandro Zamora, Ivan Zamora y especialmente a la familia Zarate, Cristy Ramírez, Arturo Zarate, Arturo David Zarate y Luis Zarate.

Agradezco a mis compañeros y profesores del posgrado. Merecen una mención especial Fabiola, Noemi y Eli por toda la ayuda en los tramites, sin su apoyo seguramente no me hubiera titulado.

Agradezco también a todos mis alumnos de Lógica de la Facultad de Filosofía y Letras, de ellos he aprendido mucho y me han motivado a seguir trabajando.

Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico que me brindó durante dos años para la realización de mis estudios de Maestría.

Finalmente, quiero agradecer a todos aquellos que hicieron posible la realización de este trabajo, que aunque parezca imposible son muchos más de los aquí mencionados.

Introducción

Parece un hecho que los seres humanos tenemos conocimiento matemático, conocimiento acerca de números, funciones y figuras geométricas. Todo el tiempo utilizamos nuestro conocimiento de teoría de números para comprar cosas en la tienda, usamos análisis matemático y geometría para construir puentes y edificios. Pero, ¿qué es el conocimiento matemático? Una forma de intentar responder a esta pregunta es analizando otro tipo de conocimiento que nos resulte más claro y tratar de extrapolar dicho análisis al caso del conocimiento matemático.

Nuestro ejemplo paradigmático de conocimiento es nuestro conocimiento sobre objetos físicos, nuestro conocimiento sobre sillas, mesas, otros seres humanos, etc. Una característica de todos estos objetos es que nosotros (los que poseemos conocimiento) estamos relacionados con ellos mediante conexiones bien establecidas, en general, causales. Lo relevante de estas relaciones es que apoyándonos en ellas podemos explicar cómo tenemos acceso a los objetos físicos. Una vez que hemos establecido qué tipo de acceso tenemos a ellos, podemos explicar cómo es que podemos conocerlos. Dicho esto, parece natural sostener que si decimos conocer un objeto, hemos tenido algún tipo de acceso a él. Resulta extraño afirmar que sabemos algo sobre un objeto, si nunca hemos tenido ni siquiera un acceso indirecto a él.

Aceptado esto último, el caso de nuestro conocimiento sobre objetos matemáticos puede ser problemático, especialmente si consideramos que son objetos abstractos y, en consecuencia, que no tenemos un acceso a ellos similar al que tenemos a los objetos físicos, pues no tenemos relaciones causales con objetos abstractos. Pero entonces ¿cómo es que tenemos conocimiento matemático? ¿tenemos algún tipo de acceso a los objetos matemáticos? Estas son algunas de las preguntas que se planteó Paul Benacerraf en la década de los 60's del siglo pasado y que dieron origen al famoso Dilema de Benacerraf. Este filósofo hizo patente que nuestro análisis semántico estándar (tarskiano) de las oraciones de la matemática nos compromete con la existencia de objetos matemáticos. Sin embargo, la mayoría de las teorías epistemológicas, que existían en el tiempo en el que Benacerraf escribió su artículo, no podían dar cuenta del conocimiento matemático, en tanto que no podía explicar qué tipo de acceso tenemos a los objetos abstractos. Así que el dilema era: para explicar el conocimiento matemático o bien, cambiamos nuestra epistemología, o bien, cambiamos nuestra semántica (para evitar comprometernos con que los objetos matemáticos existen).

Pero, ¿qué pasa si abandonamos nuestra semántica estándar y rechazamos la existencia de objetos matemáticos? La respuesta es sencilla, ya no podríamos justificar la objetividad de las matemáticas (no por lo menos de una forma sencilla), ni podríamos hablar de verdades de la matemática en el sentido usual de verdad como correspondencia, pues ya no habría un reino de objetos matemáticos con el cual poder contrastar nuestras oraciones. Esto desde mi punto de vista hace muy poco atractiva la idea de rechazar la semántica estándar.

La otra opción es abandonar nuestras teorías epistemológicas o completarlas para poder explicar cómo es que tenemos acceso a los objetos abstractos. Un problema más relacionado es que en la actualidad esperamos que nuestras explicaciones epistemológicas estén sustentadas en, o por lo menos sean compatibles con, nuestro conocimiento científico. No podemos explicar y justificar que tenemos acceso a objetos abstractos mediante la intervención de Dios o algo por el estilo. Se espera que nuestras explicaciones sean razonables dado el estado actual de nuestro conocimiento científico sobre el mundo. Así, si es que optamos por este tipo de solución al dilema, nos enfrentamos con tener explicar de manera convincente, de acuerdo al resto del conocimiento científico, el acceso que tenemos a objetos abstractos. Como puede verse, el Dilema de Benacerraf es realmente un reto importante para el filósofo de las matemáticas.

Desde el surgimiento del dilema se han ofrecido una gran variedad de respuestas. Algunos filósofos han optando por cambiar nuestra semántica y otros han optando por ofrecer una epistemología que explique el conocimiento matemático sin sacrificar su objetividad. Entre aquellos que optaron por el abandono de la semántica estándar hubo algunos que negaron el conocimiento matemático y afirmaron que las matemáticas sólo eran un conjunto de ficciones útiles, pero falsas. Otros trataron de reducir nuestro conocimiento matemático a nuestra capacidad de demostrar teoremas, sin comprometerse con que estos teoremas describan una realidad independiente a nosotros (un reino de objetos matemático). Algunos defensores de este último punto de vista han tratado de reducir la noción de verdad matemática a la de demostrabilidad. Uno de los problemas más fuertes que enfrenta esta postura es la existencia de proposiciones indecidibles, proposiciones tales que ni ellas ni su negación son demostrables en un sistema dado. Además de los problemas que surgen de considerar a las proposiciones indecidibles, existen fuertes críticas a la idea de que algo es verdadero si y sólo si se puede demostrar.

La otra opción posible para intentar responder al Dilema de Benacerraf es tratar de dar una epistemología que nos explique cómo es que tenemos acceso a los objetos matemáticos. Existen por lo menos dos respuestas estándar, una que apela a una capacidad cognitiva llamada intuición y otra que apela a mecanismos cognitivos como la abstracción. En estas líneas de pensamiento se ubican las teorías neo-fregeanas y las estructuralistas. En este trabajo me concentraré en analizar la respuesta estructuralista.

El estructuralismo matemático es una teoría filosófica que sostiene que la matemática estudia estructuras y que el acceso a dichas estructuras se da mediante a procesos cognitivos como la abstracción de patrones y el uso de mecanismos lingüísticos. En realidad, no hay una única postura estructuralista. No hay consenso sobre algunos puntos, por ejemplo sobre si hay o no estructuras matemáticas, es decir, si hay objetos que son estructuras o si debemos entender que una estructura es lo que es común a todos los modelos de una teoría. No obstante, existen otros puntos importantes en donde la mayoría de los estructuralistas están de acuerdo, como por ejemplo en que el conocimiento matemático es objetivo, es decir que las oraciones de la matemática tienen un valor de verdad determinado, por lo menos las oraciones de teorías matemáticas que analizan una estructura particular (como la aritmética, el análisis real o la geometría euclidiana). Otro punto en común es que la mayoría de los estructuralistas aceptan que el acceso a las estructuras o a los objetos matemáticos se da mediante procesos cognitivos como la abstracción.

El estructuralismo ha ganado aceptación en los últimos años, pues da una explicación de las matemáticas que nos permita conservar las siguientes intuiciones: 1) las oraciones de la matemática se refieren a objetos abstractos (y que dichos objetos existen) y 2) el conocimiento matemático es objetivo. En realidad el punto más importante es 2), la objetividad. Al mismo tiempo, el estructuralismo nos ofrece una explicación plausible de cómo es posible que tengamos acceso a los objetos matemáticos y esta explicación es compatible con nuestro conocimiento científico, lo que nos permite explicar cómo es que tenemos conocimiento matemático y responder al reto planteado por el Dilema de Benacerraf. Sin embargo, esta postura ha sido criticada desde diversos puntos. Una de las críticas que planteadas al estructuraslimo parte del hecho de que la explicación epistemológica ofrecida por el estructuralista requiere que todas las teorías matematicas no-algebraicas (las que tienen un modelo pretendido, es decir, las que analizan una estructura particular) sean: 1) recursivamente axiomatizables, 2) satisfacibles y 3) categóricas (es decir, que tengan un único modelo salvo isomorfismo). La condición 1) se requiere para que una mente humana como la nuestra efectivamente puedan adquirir dichas teorías. La condición 2) es necesaria porque no parece razonable decir que nuestro conocimiento matemático es sobre verdades y al mismo tiempo decir que no se refiere a nada. La condición 3) se requiere puesto que sin ella tendríamos teorías en las cuales existirían fórmulas que son verdaderas en algunos modelos y falsas en otros.

Para lograr obtener teorías que cumplan con estas características, los estructuralistas han optado por expresar a las teorías matemáticas en el lenguaje de la lógica de segundo orden. Al hacer esto, ellos obtienen resultados que apoyan su propuesta, pues teorías como la aritmética, el análisis, la geometría euclidiana y prácticamente todas las teorías no-algebraicas cumplen con estos tres requisistos. Sin embargo, la teoría de conjuntos que es considerada normalmente como un teoría no-algebraica no es categórica, es decir, no cumple con el tercer requisito requerido por el estructuralista para conocer verdades de dicha teoría.

Mi objetivo en esta tesis es analizar esta objeción al proyecto estructuralista. Me apoyaré en una versión particular del estructuralismo, la de Shapiro, presentada en (Shapiro, 1997). Shapiro pretende defender un realismo tanto en ontología como en valor de verdad para las teorías matemáticas, él está comprometido con la existencia de las estructuras matemáticas (defiende que son una suerte de universales) es por eso que se conoce a su teoría como estructuralismo *Ante rem*. Con todo, espero mostrar a lo largo de la tesis que el análisis realizado no sólo se aplica al estructuralismo *Ante rem*, sino a toda versión del estructuralismo que se comprometa con el realismo en valor de verdad.

La epistemología propuesta por Shapiro supone que lo primero que hacemos es aprender a contar, medir, agrupar, etc. Pero sabemos que esto no es suficiente para entender cómo es que aprendemos matemáticas. Shapiro propone tres mecanismos que nos permiten tener acceso a las estructuras: 1) la abstracción por reconocimiento de patrones, 2) la abstracción lingüística y 3) el uso de definiciones implícitas. Este último mecanismo requiere que adquiramos una teoría matemática (cuerpo de enunciados matemáticos) para dar significado a las oraciones matemáticas y así poder tener acceso a las estructuras. En este corpus teórico, los axiomas funcionan como postulados de significado. Esperamos que los axiomas nos permitan determinar una clase de estructuras isomorfas, o una estructura como la define Shapiro, es decir, necesitamos que las teorías matemáticas sean categóricas. Para ello, Shapiro da formulaciones de las teorías matemáticas en lógica de segundo orden.

Utilizando versiones de las teorías matemáticas en segundo orden se pueden lograr pruebas de categoricidad. Por ejemplo, si tenemos una presentación de la aritmética de Peano en segundo orden, sabemos que esta teoría determina un único modelo salvo isomorfismo y que es precisamente la estructura de los números naturales, este resultado fue presentado originalmente por Dedekind en (Dedekind, 1901). Sin embargo, aún falta ver si todas las teorías matemáticas no-algebraicas son categóricas en su presentación en lógica de segundo orden. El problema es que esto no parece ser así. Si presentamos una versión de ZFC en segundo orden no podemos probar su categoricidad. La teoría de conjuntos ZFC en segundo orden es cuasi-categórica, es decir, que cualesquiera dos modelos con la misma base (que parte de la misma colección de urelementos) son isomorfos o uno es isomorfo con un segmento inicial del otro, esto lo demostró Zermelo, véase (Zermelo, 1996) Críticas a la posible utilidad de este resultado se pueden encontrar en (Weston, 1976).

Una posible salvación a la postura de Shapiro la ofrece un resultado de Vann McGee (McGee, 1997) que muestra que si aceptamos una teoría de conjuntos con urelementos, con el axioma de urelementos y damos una semántica con cuantificación irrestrica a los cuantificadores, tenemos que todos los modelos de la teoría de conjuntos son isomorfos en la parte pura de conjuntos. Sin embargo, se han presentado argumentos que cuestionan la utilidad de este resultado, especialmente en (Rayo & Uzquiano, 2003).

La hipótesis que defiendo en la tesis es que la no categoricidad de la teoría de conjuntos es causada por un doble rol que juega esta teoría en el estructuralismo, y en general en la mayoría de los proyectos de fundamentación de la matemática, 1) como una teoría matemática más y 2) como la teoría de fondo que sirve como marco de análisis de todas (o casi-todas) las teorías matemáticas. Este hecho parece dar un lugar especial a la teoría de conjuntos, lo que nos autoriza a retirar el requisito de categoricidad para la teoría de conjuntos y conformarnos con la cuasi-categoricidad, salvando así la objeción.

La discusión y defensa de la hipótesis es un poco complicada y requiere de conocimientos previos de teoría de conjuntos y lógica matemática, es por ello que dedicaré el primer capítulo a presentar las nociones básicas de ambas teorías que se requieren para seguir la discusión. Así, en ese primer capítulo explicare, *grosso modo*, que significa que una proposición sea indecidible en una teoría formal dada, en qué consisten los teoremas de incompleción de la aritmética de Gödel, qué afirma la hipótesis del continuo (HC), por qué la HC es indecidible en la teoría de conjuntos (TC) y la relevancia de la HC en el desarrollo de dicha teoría.

En el segundo capítulo presentaré el Dilema de Benacerraf y trataré de mostrar por qué es importante resolverlo para dar una teoría filosófica adecuada para las matemáticas. Después, presentaré una posición estructuralista particular, la posición de Shapiro, conocida como el estructuralismo *Ante Rem*. Hago esta aclaración pues si bien los argumentos que analizaré en el capítulo 3 pretenden afectar no sólo a esta posición sino al estructuralismo en general (o casi todas las posiciones estructuralistas), es muy complicado dar una caracterización adecuada que englobe a todos aquellos que han sido llamados estructuralistas matemáticos. Es por ello que me centraré en la posición de Shapiro, aunque hacia el final de capítulo hablaré un poco más de otros tipos de estructuralismo y trataré de dejar en claro que tienen algunos puntos en común con la propuesta de Shapiro. En particular, la mayoría de las posiciones estructuralistas defienden el realismo en valor de verdad y, en consecuencia, requieren que las teoría de las que hablan (teorías matemáticas) cumplan con tres requisitos expuestos arriba. Estos requisitos obligan al estructuralista a cambiar el lenguaje en que expresa las teorías matemáticas, tiene que abandonar el lenguaje de la lógica de primer orden. Una alternativa que resuelve el problema (es decir, que provee de teorías que cumplan ambos requisitos) consiste en expresar a las teorías matemáticas en el lenguaje de la lógica de segundo orden, esta es la estrategia que siguen la mayoría de los estructuralistas.

En el tercer capítulo tiene como propósito establecer una relación entre los capítulos anteriores, presentar y analizar una serie de argumentos que pretenden desacreditar a la postura estructuralista. La conexión se establece debido a que el requisito de categoricidad no se cumple en el caso de la teoría de conjuntos. Este hecho, unido a la existencia de diferentes modelos para ZFC y la ausencia de un modelo pretendido para dicha teoría, ha llevado a muchos filósofos de la matemática (incluso antes de la presentación del estructuralismo) a reflexionar sobre qué es un conjunto y si es que podemos aceptar que la teoría de conjuntos es una teoría no-algebraica. Y en caso de que aceptemos que la teoría de conjuntos es una teoría no-algebraica, si el hecho de que no es categórica puede ser un golpe definitivo contra el estructuralismo matemático.

Para responder a estos cuestionamientos presentaré: 1) el teorema de cuasi-categoricidad de ZFC (Zermelo 1930), 2) la postura de los filósofos y matemáticos que ven en las pruebas de la independencia de HC de ZFC suficiente evidencia para declarar a la teoría de conjuntos un teoría algebraica, 3) la crítica a esta última postura, que se sirve del teorema de Zermelo, 4) un intento por lograr la categoricidad (por lo menos en la parte pura de la teoría de conjuntos) que se sirve de una versión modificada de la teoría de conjuntos ZFC (McGee 1997), 5) las críticas presentadas por diversos autores a esta propuesta y 6) una propuesta de solución que apela al doble papel de la teoría de conjuntos en la filosofía de las matemáticas, como marco teórico y como un teoría matemática más.

Al final de la tesis se incluye un apéndice con la demostración completa del teorema de Zermelo para poder ver los detalles que se usan en la discusión del tercer capítulo.

Debo aclarar que esta investigación no pretende ser una defensa última para el estructuralismo, únicamente me ocupo de las críticas que surgen debido a que la teoría de conjuntos no cumple con el requisito de categoricidad y trato de mostrar que éstas pueden ser contestadas sin mayor problema. Sin embargo, existen otras críticas fuertes al estructuralismo, por ejemplo que en realidad el requisito que no se cumple es el de existencia, es decir, el que nos pide que las teorías tengan por lo menos un modelo, o en otras palabras, que no tenemos garantía de que existan las estructuras o sus instancias. Otra objeción sostiene si bien los mecanismo usados en la epistemología estructuralista son reconocidos por nuestra mejor ciencia como adecuados, el uso que les da el estructuralista es inadecuado. Otra objeción posible es que el estructuralismo matemático y en concreto su epistemología no puede garantizarnos que al percibir un conjunto de objetos nosotros percibamos su estructura y no más bien que nosotros se la impongamos, este es el reto de von Neumann. No me concentraré en ninguna de estas objeciones.

Capítulo 1: Proposiciones indecidibles y la hipótesis del continuo.

La discusión principal en este trabajo versa sobre una objeción muy concreta al estructuralismo matemático. Dicha objeción apela a resultados formales de la teoría de conjuntos, en particular a los teoremas que muestran que la teoría de conjuntos en su versión estándar no es categórica[1], incluso si se le presenta en el lenguaje de la lógica de segundo orden[2]. Para poder realizar un análisis detallado de la objeción e intentar darle respuesta es necesario tener un conocimiento mínimo de teoría de conjuntos y de lógica matemática. Es por esto que este primer capítulo está dedicado a ofrecer las nociones y resultados básicos de estas disciplinas necesarios para comprender la discusión.

Así, en este capítulo explicaremos, *grosso modo*, que significa que una proposición sea indecidible en una teoría formal dada, en qué consisten los teoremas de incompleción de la aritmética de Gödel, qué afirma la hipótesis del continuo (HC), por qué la HC es indecidible en la teoría de conjuntos (TC) y la relevancia de la HC en el desarrollo de dicha teoría[3].

Un objetivo más del capítulo es hacer un contraste entre dos proposiciones matemáticas indecidibles (o dos tipos de ellas) en las respectivas teorías en las que son formuladas, estás dos proposiciones son: 1) la oración G de Gödel en la Aritmética de Peano (PA) y 2) HC en TC. El contraste se hará principalmente en dos puntos: i) las diferencias en las demostraciones formales que prueban la indecidibilidad de ambas proposiciones y ii) la información sobre su valor de verdad que pueden darnos los modelos de las teorías en que son formuladas. Todo esto para presentar motivaciones para preguntas sobre si las oraciones de la TC tienen un valor de verdad determinado o no, en especial oraciones como HC. Como veremos en las primeras secciones del capítulo 3, estos puntos son relevantes para responder a la objeción presentada contra el estructuralista matemático.

1 Que una teoría sea categórica quiere decir que todos los modelos de la teoría son isomorfos.

2 Esto no es del todo preciso, como veremos más adelante existen resultados como los ofrecidos en (McGee, 1997) y (Uzquiano, 2003) que muestran que si se contempla la existencia de urelementos, se acepta cuantificación irrestricta y un axioma que nos garantice que los urelementos forman un conjunto, podemos garantizar que todos los modelos de la teoría de conjuntos son isomorfos en la parte pura de conjuntos. Los detalles de estos resultados son analizados en el capítulo 3 de este trabajo.

3 La teoría de conjuntos como tal surgió con los trabajos de Cantor y Dedekind a finales del siglo XIX, ellos aún no formulaban a TC como una teoría axiomática formal. Fue hasta principios del siglo XX que se presentaron las primeras axiomatizaciones formales de TC, entre las que destacan: Zermelo-Fraenkel + Axioma de Elección (ZFC, por sus siglas en inglés), la teoría de von Neumann, Bernays y Gödel (NBG), la teoría de clases de Morse-Kelley y los New Foundations de Quine (NF). En adelante trabajaré usando ZFC, la mayoría de las pruebas que presentaré se realizarán en este sistema formal. Cuando me refiera a un sistema formal de TC me referiré a ZFC, a menos que indique lo contrario.

1.1 ¿Qué es una proposición indecidible en una teoría formal?

A principios del siglo pasado, David Hilbert, uno de los matemáticos más importantes de su tiempo, planteó un programa para el desarrollo de las matemáticas que desde entonces se conoce como el programa de Hilbert. El objetivo del programa era librar a la matemática de todos los cuestionamientos sobre su objetividad y la necesidad de sus proposiciones. La mayoría de estos cuestionamientos surgieron en el campo del análisis matemático, pues cuando esta disciplina fue presentada originalmente por Newton y Leibniz contenía algunos conceptos que eran considerados por muchos como poco claros e incluso contradictorios, un ejemplo lo proporcionan los números infinitesimales. La solución final a estos problemas fue la aritmetización del análisis realizada por matemáticos prominentes del siglo XIX, como Weierstrass, Cauchy y Bolzano. Dentro de este programa de aritmetización o formalización del análisis se enmarcaron los trabajos de Cantor y Dedekind quienes desarrollaron una teoría matemática completamente nueva conocida como la teoría de conjuntos. La teoría de conjuntos prometía resolver una buena parte (o la totalidad) de los problemas en torno a la fundamentación del análisis y de la matemática completa. Sin embargo, pronto surgieron las llamadas paradojas de la teoría de conjuntos: la paradoja de Russell, la paradoja de Burali-Forti, etc. Esto puso de nueva cuenta el estatus de la matemática en entredicho.[4] Hilbert consideraba que la matemática era una disciplina claramente correcta, cuyos resultados pueden ser aplicados a múltiples disciplinas (pues muchas de ellas se sirven de los resultados matemáticos, aunque estén hablando de objetos muy diferentes), además creía que cualquier problema matemático planteado con la suficiente precisión debería poder ser resulto por un matemático con capacidades como las de cualquier ser humano. Con esto en mente, Hilbert propuso ver a la matemática como una disciplina completamente formal (que hablaba de fórmulas finitas y no de objetos particulares) y poder mostrar que en cuanto tal era una disciplina fuera de toda sospecha. Ante este panorama se presentaron diversas soluciones[5], una de ellas

4 En realidad las dudas sobre la certeza del conocimiento matemático tuvo un mayor impacto entre los filósofos de las matemáticas que entre los matemáticos. La mayoría de los matemáticos no tomaron el surgimiento de paradojas en la TC como un gran problema y continuaron su trabajo, no así aquellos que tenían interés en la fundamentación de las matemáticas como era el caso de Hilbert, Cantor, etc.

5 Hubo tres intentos de solución: 1) Brouwer y los intucionistas decidieron que el surgimiento de estas paradojas mostraban que considerar el infinito en acto era un error y optaron por rechazar la mayor parte de los resultados de la teoría de conjuntos. 2) Russell y algunos otros filósofos interesados en los fundamentos de la matemática culparon de las paradojas a la autoreferencia y construyeron la teoría de tipos que impedía la autoreferencia imponiendo una serie de restricciones que no fueron del agrado de la mayoría de los matemáticos (y que probablemente todavía no sean del agrado de éstos). 3) Un buen número de matemáticos trato de solucionar el problema axiomatizando a la teoría de conjuntos, lo cual se logro finalmente en los años 1920's con la axiomática de Zermelo-Fraenkel más axioma de Elección (ZFC), como mencionamos en la nota 3 no fue la única teoría formal de conjuntos propuesta.

fue el programa formalista de Hilbert.

> El objetivo que nos hemos propuesto es entonces el de dar un fundamento seguro a las matemáticas. Nuestra intención es devolver a nuestra disciplina el antiguo prestigio de consistir de verdades indiscutibles, del que las paradojas de la teoría de conjuntos parecieron despojarla. Tenemos la firme convicción de que esto es realizable y que no significa ningún tipo de renuncia a sus partes constitutivas. El método adecuado para la realización de estos fines es, por supuesto, el método axiomático. (Hilbert, 1993)

El método axiomático propuesto por Hilbert pretendía formalizar a la Matemática, es decir, convertirla en una disciplina preocupada por fórmulas (por supuesto matemáticas) y las relaciones inferenciales que existían entre ellas. Para lograr su objetivo, Hilbert requería dar un lenguaje formal (que no fuese ambiguo) y una teoría de la prueba que nos permitiese transformar fórmulas de dicho lenguaje en otras fórmulas del mismo. Con estos dos elementos se puede definir un sistema formal. En términos no muy formales podemos decir que un sistema formal para la matemática está dado por un lenguaje formal y su teoría de la prueba. El lenguaje formal está conformado por un vocabulario y reglas de formación. El vocabulario, de los sistemas formales más comunes para la matemática, consta de un conjunto de símbolos no lógicos (letras de predicado, letras de función, constantes individuales y variables), símbolos lógicos ($=$, $\sim$, $\&$, $\rightarrow$, $\vee$, $\equiv$, $\forall$, $\exists$) y símbolos auxiliares (los paréntesis). Las reglas de formación permiten determinar cuando una sucesión finita de símbolos del vocabulario es una fórmula, estás reglas son generalmente recursivas. Una vez que se ha determinado cuáles son las fórmulas del lenguaje formal, se necesita determinar cuándo una fórmula se sigue de otra(s) fórmula(s). Para ello, se requiere de una teoría de la prueba. La teoría de la prueba debe dar una definición de prueba, axiomas del sistema (fórmulas que servirán de base para hacer las demostraciones) y reglas de inferencia. Los axiomas pueden ser de dos tipos, en el caso de los sistemas formales matemáticos, axiomas lógicos y axiomas matemáticos. Los axiomas lógicos pretender ser principios básicos de razonamiento que carecen de contenido, mientras que los axiomas matemáticos son fórmulas que reflejan los principios básicos de la teoría matemática que se pretende formalizar. Las reglas de inferencia (o de transformación) permiten inferir una fórmula (o un tipo de fórmula) a partir de una o más fórmulas (o tipos de fórmulas). En general, se define una prueba como una sucesión finita de fórmulas en donde cada una es un axioma o se infiere de fórmulas anteriores en la sucesión por medio de reglas de transformación.

Ejemplo, Sistema formal para la Aritmética de Peano (PA)[6]

1) **Lenguaje de PA**

Vocabulario:

i) Símbolos lógicos: =, ~, →, ∀.

ii) Símbolos auxiliares: (,).

iii) Letras de predicado: ≤.

iv) Letras de función: S, +, ×, E.

v) Constantes individuales: 0.

vi) Variables: x', x'', x''', … (un cantidad numerable de ellas)

Reglas de formación:

Antes de definir qué es una fórmula, debemos definir qué es un término.

Definición recursiva de término:

i) Todas las variables y 0 son términos.

ii) Si α y β son términos, entonces Sα, (α+β), (α×β), (αEβ) son términos.

iii) Nada más es un término.

Definición de fórmula atómica:

i) Dados t_1 y t_2 términos, $t_1=t_2$ y $t_1 \leq t_2$ son fórmulas atómicas.

ii) Nada más es fórmula atómica.

Definición recursiva de fórmula:

i) Toda fórmula atómica es fórmula.

ii) Si α y β son fórmulas, entonces ~α, (α→β) son fórmulas.

iii) Si α es fórmula y x es una varible, entonces ∀xα es fórmula.

iv) Nada más es fórmula.

2) **Teoría de la prueba de PA:**

Axiomas lógicos:

L_1: (A → (B → A))

L_2: ((A → (B → C)) → ((A → B) → (A → C)))

6 La versión del sistema formal PA presentada a continuación retoma elementos de otras versiones, se presenta esta versión para poder distinguir mejor los elementos relevantes, especialmente los axiomas de Peano para la Aritmética. Incluyo este ejemplo porque será relevante en dos aspectos: 1) la aritmética de Peano es el sistema en donde se construye la oración G de Gödel, que será nuestro primer ejemplo de oración indecidible y 2) en el siguiente capítulo se presentará una versión de PA en lógica de segundo orden, que es categórica. Otras versiones más adecuadas para demostrar los teoremas de incompleción de PA pueden verse en (Enderton, 2001) y (Smullyan, 1992).

L_3: $((\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A))$

L_4: $(\forall xA \rightarrow A(t))$, donde A(t) es el resultado de sustituir todas las apariciones libres de x en A por el término t.[7]

L_5: $(\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xB \rightarrow \forall xA))$

L_6: $(A \rightarrow \forall xA)$, donde x no ocurre libre en A.

L_7: x=x

L_8: $x=y \rightarrow (A \rightarrow A')$, donde A es una fórmula atómica y A' se obtiene de reemplazar en A cero o más apariciones (no necesariamente todas) de la x por la y.

Axiomas de PA.

S_1: $\forall x\forall y(Sx=Sy \rightarrow x=y)$

S_2: $\forall x(\sim Sx=0)$

S_3: $\forall x(x + 0= x)$

S_4: $\forall x\forall y(x+Sy=S(x+y))$

S_5: $\forall x(x \times 0 = 0)$

S_6: $\forall x\forall y(x\times Sy=((x\times y)+x))$

S_7: $\forall x(x \leq 0 \equiv x = 0)$

S_8: $\forall x\forall y(x \leq Sy \equiv (x \leq y \vee x = Sy))$

S_9: $\forall x\forall y(x \leq y \vee y \leq x)$

S_{10}: $\forall x(x\ E\ 0 = S0)$

S_{11}: $\forall x\forall y(x\ E\ Sy = ((x\ E\ y) \times x))$

S_{12}: Para cualquier fórmula φ del lenguaje $(\varphi 0 \rightarrow (\forall x(\varphi x \rightarrow \varphi Sx) \rightarrow \forall x(\varphi x))$[8]

7 Si bien se puede entender intuitivamente cuándo una variable aparece libre en una fórmula, podemos definirlo de manera rigurosa como sigue:

i) Si A es una fórmula atómica, entonces x aparece libre en A, sii, x aparece en A.

ii) x aparece libre en ~A, sii, x aparece libre en A.

iii) x aparece libre en $(A \rightarrow B)$, sii, x aparece libre en A o en B.

iv) x aparece libre en $\forall yA$, sii, x aparece libre en A y $x \neq y$.

Váase, (Enderton, 2001) p. 76.

8 Este axioma, en realidad un esquema de axioma, es clave para comprender porque la versión de PA en un lenguaje lógico de primer orden no es categórico y versiones de PA en segundo orden sí lo son. Como veremos en el siguiente capítulo, este esquema de axioma al ser traducido a un lenguaje de segundo orden se convierte en un axioma que permite fijar el tamaño de los modelos admisibles para PA (Todos los modelos de PA en segundo orden deben tener como

Reglas de inferencia.

Modus Ponens: De A y $(A \rightarrow B)$ se infiere B.
Genralización: De A se infiere $\forall x A$.

Una vez que hemos visto un ejemplo de sistema formal, en este caso el sistema formal de PA, podemos definir de manera un poco más rigurosa la noción de prueba.

Definición de Prueba: Dado un sistema formal L y α una fórmula del lenguaje de L. Decimos que S es una prueba de α en L, sii, S es una sucesión finita de fórmulas de L, tal que todas las fórmulas de la sucesión o bien son axiomas o bien se siguen de fórmulas anteriores al aplicar reglas de inferencia y α es la última fórmula de la sucesión. En tal caso decimos que α es un teorema de L y lo denotamos $\vdash_L \alpha$.

Ya que hemos definido qué es una prueba y qué es un teorema en sistema formal dado, podemos definir la teoría generada por dicho sistema:

Def. Dado un sistema formal X, decimos que la teoría generada por X (o la teoría X) es el conjuntos de todas las fórmulas, tales que o son axiomas o se siguen de los axiomas por reglas de inferencia. En otras palabras la teoría generada por X es el conjunto de todos los teoremas del sistema formal X.[9]

Dado un sistema formal, se puede preguntar ¿si dicho sistema formal matemático (en este caso PA) tiene como teoremas sólo verdades de la aritmética (o lo que es lo mismo, si es correcta)? ¿Tendrá a todas las verdades (es decir, la teoría generada por dicho sistema incluye todas las fórmulas que son verdaderas en la teoría que se pretende formalizar)? Hilbert esperaba que las dos últimas preguntas tuviesen respuestas afirmativas, es decir, que todas y sólo las verdades de las matemáticas fuesen teoremas de los sistemas formales matemáticos, en particular para PA. Desafortunadamente, como veremos en la siguiente sección, sus expectativas no se cumplieron, pues si bien todos los teoremas de PA son verdades de la aritmética, existen verdades de la aritmética que no son teoremas de PA. Esto implica que existen proposiciones indecidibles, fórmulas tales que ni ellas ni su negación son teoremas del sistema PA. Definamos formalmente proposición indecidible en un sistema.

---

dominio un conjunto con cardinalidad $\aleph_0$.)

9 Una definición más usual es: Una teoría generada por un sistema formal X es el conjunto de los axiomas de X cerrados bajo consecuencia lógica. Más aún se puede definir en general a una teoría como un conjunto cualquiera de fórmulas cerrado bajo consecuencia lógica.

Definición de fórmula indecidible: Dado una sistema formal L y una fórmula del lenguaje de L, α. Decimos que α es indecidible en L sii $\nvdash_L \alpha$ y $\nvdash_L \sim\alpha$.

A continuación analizaremos una proposición indecidible muy particular, la oración G de Gödel para PA.

1.2 Gödel y los indecidibles en la Aritmética de Peano.

Los Teoremas de Incompleción de Gödel son probablemente dos de los resultados más importantes en la lógica del siglo XX. Esto por varias razones, entre ellas: 1) presentan serias objeciones al programa formalista de Hilbert que fue predominante en la forma de hacer matemáticas durante la primera mitad del siglo XX, 2) se presenta la prueba de que cualquier sistema matemático con características bien definidas (dichas características se dan más adelante) existen proposiciones indecidibles (primer teorema) y 3) se muestra que muchos sistemas matemáticos, en particular PA, no pueden demostrar su propia consistencia (segundo teorema). A continuación presentaré de manera informal dichos teoremas.

El primer teorema de incompleción de la aritmética de Gödel[10] está inspirado en la paradoja de Richard. La paradoja de Richard es una paradoja que genera un contradicción al considerar las frases de un lenguaje natural (por ejemplo, el español) que expresan propiedades de los números naturales.[11] El primer paso para generar la paradoja consiste en numerar todas las frases del lenguaje natural (en este caso el español) que expresan un propiedad de los números naturales, por ejemplo:

1. x es un número par.
2. x es un número divisible entre 7.
3. x es un número cuadrado.
4. x es múltiplo de 2.
5. …

una vez que hemos hecho esto podemos definir la siguiente propiedad:

Un número natural es *richardiano* sii no se le aplica la propiedad que numera en nuestra lista. Por

10 Este teorema demostró que existen proposiciones indecidibles en la aritmética de Peano y cualquier extención consistente y recursivamente numerable de ella. Dado que existen este tipo de proposiciones, entonces el sistema será incompleto en sentido fuerte (o incompleto para la negación), pues existe por lo menos una proposición ϕ tal que ni ella ni su negación son teoremas del sistema. Esto se aclarará más adelante.

11 La paradoja original no es presentada exactamente como lo hago aquí, presento está versión porque la considero más intuitiva y clara. En la versión original se apela a frases del español que definan a un número y para mostrar la paradoja se utiliza un argumento diagonal.

ejemplo, de acuerdo a nuestra lista, 1 es richardiano, pues numera la propiedad de ser par y él no es par. Mientras que 4 no es richardiano, pues numera la propiedad de ser múltiplo de 2 y él es múltiplo de 2. Ahora consideremos que 'x es un richardiano' es una propiedad de números naturales expresada en español, y por ello debe estar en nuestra lista, digamos que está en el lugar k:

k. x es un número richardiano.

Si nos preguntamos si k es richardiano llegamos a una contradicción, pues k es un richardiano sii k no es un richardiano.

Esta supuesta paradoja se puede objetar de diversas formas, por ejemplo, diciendo que la noción clave de ser una propiedad de los números naturales no está definida de manera rigurosa. Gödel era consciente de esto, pero pudo inspirarse en este razonamiento para dar la estructura general de la prueba de su primer teorema de incompleción. Él desarrolló la idea de construir en el lenguaje formal de PA una oración que dijese de ella misma que no era demostrable. Antes de ver, *grosso modo*, cómo se construye dicha fórmula veamos cuáles serían las consecuencias de la existencia de dicha oración.

Supongamos que tenemos dicha fórmula, llamémosla G. Si G es falsa, entonces lo que dice es falso, es decir, sería demostrable y nuestro sistema PA demostraría proposiciones falsas. Si G fuese verdadera, entonces lo que dice sería verdadero y no sería demostrable, lo que nos daría como resultado que existen fórmulas de PA verdaderas que no son demostrables. La primera opción convertiría a PA en un sistema poco interesante, pues demostraría cosas falsas. Más aún, si suponemos que nuestro sistemas es correcto, entonces G no puede ser demostrada. La segunda opción nos mostraría que el sistema PA es incompleto[12], en el sentido de que no demuestra todas las verdades de la aritmética.

En el siguiente apartado se presenta un esquema de prueba del teorema de Gödel.

1.2.1 Teoremas de Gödel

Antes de presentar propiamente el esquema de prueba del primer teorema de Gödel, hablaré un poco de las otras motivaciones de Gödel para desarrollar su teorema. Él tenía ideas realistas respecto a las entidades matemáticas, era un platonista convencido. Creía que las oraciones de la matemática hablaban de un reino de objetos matemáticos cuya existencia es independiente de los seres humanos y de las teorías que hablan de dicho reino. Las oraciones de las matemáticas que son verdaderas lo son porque refieren a los objetos de dicho reino y las relaciones que existen entre ellos, y por ello mismo no

12 Es incompleto para la negación (también llamada compleción fuerte), es decir, no es el caso que dada cualquier fórmula α del lenguaje de PA, sucede que α es demostrable o $\sim\alpha$ es demostrable. Pero sabemos que α es verdadera o que $\sim\alpha$ es verdadera, de ahí que existan proposiciones verdaderas pero no demostrables. Es importante no confundir este tipo de compleción con la compleción (débil) de la que habla el teorema de compleción para la Lógica de Primer Orden. Este último teorema prueba que toda fórmula del lenguaje de LPO que es universalmente válida es teorema de LPO (dado un sistema formal de esta teoría como el expuesto en (Enderton, 2001) o en (Smullyan, 1992)).

podía ser capturadas por sistemas puramente formales, como los propuestos por Hilbert. En un texto de 1947 Gödel deja muy claro su posición realista al referirse a la teoría de conjuntos, la HC y su indecidibilidad en los siguientes términos:

> Debe observarse, no obstante, que, desde el punto de vista aquí adoptado, una prueba de la indecidibilidad de la conjetura de Cantor a partir de los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos de ningún modo resolvería el problema. Pues si se acepta que el significado de los signos primitivos de la teoría de conjuntos como se explica en la página 346 y en la nota 15 es correcto[13], entonces los conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos describirían alguna realidad bien determinada en la cual la conjetura de Cantor debería ser cierta o falsa" (Gödel, 1981a, p. 348)

A pesar de que éstas eran sus ideas, Gödel estaba consciente de que si quería mostrar la incompleción de PA y que dicha prueba fuese aceptada por la comunidad matemática, necesitaba usar únicamente los recursos que un matemático promedio de su tiempo aceptaba (sin apelar a su propia posición filosófica), en este caso recursos que un formalista aceptaba. Es por ello que la prueba de su teorema sólo demuestra que ni G ni ~G son demostrables en el sistema, sin comprometerse con la verdad de ninguna de ellas (aunque alguna de las dos debía ser verdadera, si se acepta el realismo[14]), es decir, su prueba carece de compromisos con el realismo matemático y se limita a mostrar las restricciones deductivas del sistema PA (trabaja al nivel de la sintaxis). Esto queda claro en la formulación que Gödel da de su resultado. En sus propias palabras: "Los sistemas formales más amplios construidos hasta ahora son el sistema de *Principia Mathematica (PM)* y la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (desarrollada aún más por J. von Neumann). Estos dos sistemas son tan amplios que todos los métodos usados hoy en la matemática pueden ser formalizados en ellos, es decir, pueden ser reducidos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia. Resulta por tanto natural la conjetura de que estos axiomas y reglas basten para decidir *todas* las cuestiones matemáticas que puedan ser formuladas en dichos sistemas. En lo que sigue se muestra que esto no es así, sino que, por el contrario, en ambos sistemas hay problemas relativamente simples de la teoría de los números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas (y reglas)"(Gödel, 1981, p. 55-56) Como se puede ver él no apela a la noción de verdad, sino únicamente a la noción de deducibilidad.

---

13 Los signos primitivos de la teoría de conjuntos son explicados por Gödel, en las secciones referidas como conjuntos de números enteros y conjuntos de conjuntos de enteros, etc. Iterando la operación "conjunto de", que según Gödel ha mostrado hasta el momento generar una teoría que es autoconsistente.

14 Por realismo entiendo aquí la posición fuerte que sostiene que PA tiene un modelo pretendido y que las oraciones de PA son verdaderas o falsas respecto a dicho modelo. Existe otra clase de realismo que acepta la existencia de muchos modelos no isomorfos de PA, sin comprometerse con señalar uno como el modelo pretendido, en al caso, la oración G de Gödel sería verdadera en algunos modelos y falsa en otros. Para este último tipo de realismo G no tiene un valor de verdad último, sino que su valor de verdad se decide respecto al modelo en el que se le evalúe. En cualquier caso, la oración G de Gödel sera verdadera o falsa en cada uno de los modelo, pero no será verdadera o falsa a secas.

El primer paso para construir la prueba del teorema, consiste en elegir un sistema formal para la Aritmética. Gödel eligió una sistema similar al que describimos en la primera sección de este capítulo (él utilizó el sistema formal presentado en *Principia Mathematica*)[15]. Una vez hecho esto, él debía encontrar un mecanismo que le permitiera codificar las fórmulas del lenguaje de tal suerte que pudiera convertirlas en números y hablar sobre sus propiedades, esto lo logró con las numeraciones de Gödel.

Dado un lenguaje L, una numeración de Gödel de las fórmulas de dicho lenguaje es una función inyectiva que va de las expresiones de L (cadenas de símbolos de L) a los números naturales, de tal manera que a cada expresión del lenguaje L le corresponde un número natural. En otras palabras, una numeración de Gödel para L numera las expresiones de L (lo que, en consecuencia, también permite numerar las fórmulas, al ser éstas un subconjunto de las expresiones). Existen muchas formas de hacer una numeración de Gödel para el lenguaje de PA, una versión de la numeración puede ser como sigue. Asigna a cada símbolo del lenguaje un número natural, x, después elevaba el enésimo número primo a la potencia x, donde n era el lugar que ocupaba el símbolo en la expresión (la sucesión de símbolos del lenguaje). Un ejemplo sería:

Símbolo	Número que le corresponde.	Símbolo	Número que le corresponde.
$\forall$	1	$\exists$	2
$\rightarrow$	3	$\sim$	4
$\vee$	5	&	6
$\equiv$	7	0	8
$+$	9	$\times$	10
$\leq$	11	E	12
S	13	$=$	14
(	15	)	16
x_1	17	x_2	18
x_3	19	...	...

Así, a la fórmula $\forall x_1 \forall x_2 (Sx_1{=}Sx_2 \rightarrow x_1{=}x_2)$ le correspondería, de acuerdo con nuestra numeración, el número que resulta de computar $2^1 x 3^{17} x 5^1 x 7^{18} x 11^{15} x 13^{13} x 17^{17} x 19^{14} x 23^{13} x 29^{18} x 31^3 x 37^{17} x 41^{14} x 43^{18} x 47^{16}$, dicho número es muy grande, pero esto no es un problema pues el procedimiento nos garantiza que

15 No presentaré un esbozo de la prueba tal cual la dio Gödel, pues la prueba estaba dada en teoría de tipos y era un poco más complicada que las versiones contemporáneas. Esto no representará un gran problema pues el esbozo de prueba que presento a continuación es en lo esencial muy similar, aunque los detalles varían.

para cada fórmula existe un sólo número de Gödel, sin importar el tiempo que nos tardemos en computarlo.[16] También se garantiza que dado cualquier número se podría decodificar y ver si da como resultado una fórmula o una expresión y decir con precisión cuál es.[17]

El siguiente paso es ver qué propiedades y relaciones entre los números naturales se pueden definir con fórmulas del lenguaje, es decir, si dada una propiedad de los números naturales, A, podemos encontrar un fórmula de nuestro lenguaje, $\varphi(x)$, con x como única variable libre, que sea satisfecha por todos y sólo los números que tiene la propiedad A. Esto se puede hacer fácilmente para propiedades como ser un número par, podemos ver que la fórmula que define dicha propiedad es $\exists x_2(x_1=SS0\times x_2)$. Son muchas las propiedades que pueden ser definidas en este sentido. Con un poco de trabajo podemos demostrar que una propiedad definible de los números naturales es ser el número de Gödel de una fórmula (previamente debemos haber numerado las fórmulas del lenguaje). Como esta propiedad se pueden definir mucha otras. El siguiente paso crucial es decir, cuáles de las propiedades y relaciones definibles en nuestro sistema formal son además representables. Que una propiedad P sea representable quiere decir que para cualquier número n, si n tiene la propiedad P y ϕ es una fórmula del lenguaje de PA que define la propiedad P, entonces se debe poder probar que $\vdash_{PA} \phi(S^n0)$, es decir, que para que una propiedad P sea representable en un sistema, digamos PA, es necesario que P(n) sii es teorema de PA que $\phi(S^n0)$. Algo muy similar pasa con las relaciones, simplemente cambian el número de argumentos.

Una pregunta importante es si se puede representar la propiedad de ser el número de Gödel de una fórmula que es teorema, es decir, ser el número de Gödel de una fórmula que se puede probar en el sistema únicamente a partir de los axiomas y las reglas de inferencia. La pregunta es si podemos capturar mediante una fórmula todos y sólo los números naturales que son números de Gödel de un teorema del sistema y verificar que dicha propiedad es representable en PA. Es decir, si podemos representar mediante una fórmula la propiedad de ser demostrable.

Gödel logró representar en PA la propiedad de ser un enunciado demostrable en el sistema PA, no presentaré aquí la prueba pues no es el objetivo del trabajo. Sólo mencionaré que incluye los siguientes pasos: 1) presentar propiedad de ser un axioma de PA mediante una fórmula $Ax_{PA}(x)$ 2) representar los

---

16 Para ver una versión más sencilla de numeración de Gödel puede verse (Smullyan, 1992)

17 El teorema fundamental de la aritmética es el garante de que el mecanismo funciona adecuadamente. Este teorema nos garantiza que dado cualquier número natural n, n puede ser descompuesto en el producto de números primos y que la descomposición es única. Si al descomponer un número natural m en el producto de primos descubrimos que existe un número primo p que no aparece en la descomposición, pero que ésta hay un número primo q mayor que p, entonces tenemos la certeza de que tal número no es el número de Gödel de una expresión. En caso contrario, es decir, si en la descomposición tenemos no hay saltos en los números primos, entonces el número descompuesto es el número de Gödel de una expresión del lenguaje.

predicados correspondientes para las reglas de inferencia (ser el número de Gödel de una fórmula que se obtiene de otras mediante una regla de inferencia del sistema) y 3) representat secuencias de números, en donde cada número satisface $Ax_{PA}(x)$, o es el número de Gödel de una fórmula que se obtiene de anteriores por reglas de inferencia, así el último número de la sucesión es el número de Gödel de un teorema. Nótese que esta estrategia funcionaría en general para extensiones del sistema PA, con las mismas reglas de inferencia, simplemente definiendo un nuevo predicado Ax(x) que sea satisfecho sólo por los números de Gödel de los axiomas (los viejos y los nuevos) y verificando que es representable en el nuevo sistema formal. La estrategia también se puede extender para sistemas con más reglas de inferencia, siempre y cuando las reglas sean finitarias. Como resultado tenemos el predicado $Dem_{PA}(x)$ que es satisfecho por todos y sólo los números de Gödel de enunciados que son demostrables en el sistema PA, es decir, que son teoremas de PA y además que dado el número de Gödel de una fórmula, m, esa fórmula es demostrable sii $\vdash_{PA} Dem_{PA}(m)$.

Una vez que hemos definido el predicado $Dem_{PA}(x)$ y verificado que es representable, sólo nos falta encontrar un método para que una fórmula se refiera a sí misma, así podemos tener una fórmula que diga de sí misma que no es demostrable. Esto se logra mediante el método de la diagonalización[18]. Este proceso nos permite hacer fórmulas autoreferentes.

Veamos cómo se construye la diagonal del una fórmula dada α. Lo primero que debemos hacer es codificar la fórmula α para obtener su número de Gödel, de acuerdo a nuestra numeración, digamos que dicho número es n. A continuación construimos una fórmula $\forall x_1(x_1=0^{(n)} \supset \alpha)$, esta fórmula es la diagonal de la fórmula α. Podemos ver que a su vez esta fórmula puede ser codificada para obtener su número de Gödel, digamos que es m. Así tenemos un par de números n y m, tal que el segundo es el número de Gödel de la diagonal de la fórmula que tiene a n como número de Gödel. Está es una relación entre números, así que podemos preguntar si podemos definirla y reprentarla, tal cómo hicimos antes. La respuesta es que sí podemos, así tenemos un predicado D(x,y) que es satisfecho por todo par de números tal que el segundo es el número de Gödel de la diagonal de la fórmula que tiene al primero como número de Gödel y además esta fórmula es representable. Usando todos estos recursos podemos construir la siguiente fórmula:

$\forall x_1(x_1=0^{(k)} \supset \exists x_2 (D(x_1,x_2) \wedge {\sim}Dem_{PA}(x_2)))$, donde k es el número de Gödel de $\exists x_2 (D(x_1,x_2) \wedge {\sim}Dem_{PA}(x_2))$.

Está fórmula afirma que la diagonal de la fórmula con número de Gödel k no es demostrable, pero ella

18 Existen otros métodos para lograr que la autoreferencia, por ejemplo, la normalización. Cualquiera de ellos es igual de útil.

misma es dicha fórmula. Esta es una versión de la llamada fórmula G de Gödel para PA. Ella dice de sí misma que no es demostrable. A G se le aplica el razonamiento antes descrito y suponiendo que PA es consistente, tenemos que ni ella ni su negación son teoremas, pero sabemos que por lo menos una de estas fórmulas debe ser verdadera (si es que somos realistas, véase nota 13). Tenemos entonces que si el sistema PA es consistente, entonces es incompleto. Este razonamiento utiliza la noción d verdad pero podemos ver que no es necesario recurrir a ella veamos cómo.

Sea g el número de Gödel de la fórmula G, como ser demostrable es una propiedad representable, entonces tenemos que si g pertenece a conjunto de los números de Gödel de fórmulas demostrables entonces $\vdash_{PA}$G, pero si eso es cierto g no pertenece a conjunto de los números de Gödel de fórmulas demostrables. Pero si g no pertenece a dicho conjunto entonces G no es demostrable y entonces g pertenece a dicho conjunto. Lo que genera una contradicción. Lo que nos muestra que ni G ni ~G son demostrables.

Cuando Gödel demostró este primer teorema de la incompleción de PA, no tardo mucho en darse cuenta que una consecuencia de éste es que: si PA es consistente, no es teorema de PA que PA es consistente, es decir, que PA no puede demostrar su propia consistencia. Este resultado es conocido como el segundo teorema de la incompleción de PA. Esto lo logró Gödel al encontrar una fórmula del sistema que definía la propiedad de ser consistente para PA, CONS(PA). La prueba es larga y requiere para ser más comprensible de una versión diferente de la prueba del primer teorema de incomplesión, que no daré aquí. Al igual que el primer teorema, este segundo teorema de la incompleción se aplica a todos los sistemas recursivamente axiomatixables[19] y en donde se puedan representar las nociones de la aritmética básica. Un caso particular de gran interés para este trabajo es el caso de ZFC, pues una consecuencia del segundo teorema de la incompleción de Gödel es que si ZFC es consistente, ZFC no puede demostrar CONS(ZFC). Este resultado será muy útil un poco más adelante.

1.2.2 Modelos de PA, verdad e indecidibilidad

Una vez dicho lo anterior debemos analizar por qué reconocemos la verdad de las oraciones de Gödel. Dado el sistema formal PA para la aritmética de Peano (podría ser cualquier otro tan fuerte como para expresar la aritmética básica) y suponiendo que es consistente, la oración G de Gödel es tal que una vez decodificada (usando un sistema de numeración de Gödel) afirman que hay una oración del lenguaje de

19 Esto quiere decir que exista un método efectivo para determinar si una fórmula del sistema es axioma o no. Se hace esta especificación porque una forma de ampliar el sistema PA es por ejemplo estipulando que sean axiomas todas las fórmulas verdaderas, el problema con esta estrategia es que no podemos determinar efectivamente el conjunto de todas las fórmulas verdaderas.

PA que es verdadera si y sólo si no es demostrable en PA, y tal oración es la misma G[20]. Usando un razonamiento metateórico podemos ver que la oración es verdadera, veamos cómo. Si la oración G es falsa, entonces G es demostrable, pero como suponemos que nuestro cálculo es correcto, G no se puede derivar, pues S no sería correcto. Por lo que G es verdadera (al menos en el modelo pretentido (intended model)). Otra opción es analizar el predicado CONS(PA) involucrado en el segundo teorema de incomplesión de la aritmética. Dicho teorema nos dice que hay un predicado CONS(PA) que expresa la consistencia del sistema PA, pero que no es deducible dentro del sistema suponiendo la consistencia del mismo (existe una prueba de Gentzen de que la aritmética es consistente, pero usa métodos no finitos, de cualquier forma es razonable suponer que la aritmética es consistente, en este caso tenemos de nuevo una oración verdadera y no demostrable en el sistema PA)[21].

En este punto es importante poner énfasis en que dado el teorema de Löwenheim-Skolem, la teoría PA al estar expresada en lógica de primer orden y tener un modelo con dominio infinito, cumple que para cada cardinal infinito existe un modelo cuyo dominio tiene ese cardinal. Esto implica que, dado cualquier cardinal infinito, α, existe un modelos de PA cuyo dominio tiene como cardinal a α. Esto no quiere decir que la interpretación de nuestro lenguaje en esos modelos sea la que se utilizo para definir las propiedades mencionadas arriba. Es por ello que en algunos modelos es falsa la oración G, aunque el significado de G interpretada en ese modelo no sea el de una fórmula que afirma de ella misma que no es demostrable.

Es muy importante resaltar que la prueba de Gödel no requiere de la noción de verdad, su prueba apela a la noción de demostrabilidad. Es hasta que hacemos un razonamiento metateórico que requerimos de la noción de verdad.

También podemos notar que dados estos resultados el reto impuesto al estructuralismo (y del que hablaremos más en el siguiente capítulo) no puede ser respondido apelando a teorías matemáticas expresadas en primer orden, pues ninguna de ellas es categórica, esto es consecuencia del teorema de Löwenheim-Skolem.

A continuación hablaremos de teoría de conjuntos, presentaré una pequeña introducción a sus nociones

20 Para que la decodificación nos diga efectivamente la oración que afirma de ella misma que no es demostrable es necesario que apelemos al modelo pretendido de la teoría. Si apelamos en la decodificación a otro modelo la oración G de Gödel puede referirse a otra oración con significado muy diferente.

21 El problema con la prueba de Gentzen requiera de recursos no finitarios es que utiliza recursos que un formalista como Hilbert rechazaría. En el caso del estructuralismo, y en particular de Shapiro, (que son al fin los que interesan en este trabajo) esto no es un impedimento, de cualquier forma, Shapiro parece preferir utilizar un sólo tipo de lenguaje para expresar las teorías matemáticas, el lenguaje de la lógica de segundo orden. El apelar a reglas infinitarias resuelve el problema de la indecidibilidad sólo en el caso de la aritmética, pero como veremos más adelante no pasa lo mismo en el caso de otras proposiciones indecidibles como la HC en ZFC.

básicas y hablaremos de dos proposiciones indecidibles para el sistema ZFC, a saber, HC y la oración que afirma la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles.

1.3 Nociones básicas de TC.

En esta sección y las que le siguen hablaremos de la teoría de conjuntos. La primera aproximación será intuitiva, expondremos los axiomas de la teoría intuitiva de conjuntos y cómo es que ellos nos llevan a paradojas.

De manera poco rigurosa podemos definir a un conjunto como una colección de objetos bien determinada (acabada). Es importante distinguir entre un conjunto y los objetos que lo forman, por ejemplo, el conjunto de los estudiantes del Posgrado en Filosofía de la Ciencia es la colección formada por todos los estudiantes, no los estudiantes mismos. Los conjuntos están completamente determinados por los objetos que los conforman, es decir, lo que distingue a unos conjuntos de otros son los elementos que tienen. Esto requiere de dar un predicado especial, el predicado de pertenencia '$\in$'. Se dice que un objeto (o conjunto) A pertenece a un conjunto X si es uno de los objetos que lo conforman y se escribe formalmente como $A \in X$.[22]

Un ejemplo es el siguiente: supongamos que queremos hablar del conjunto de todos los estudiantes de la Maestría en Filosofía de la Ciencia generación 2008, este conjunto puede darse de dos formas. La primera es apelando a la propiedad de ser un estudiante de dicha generación, es decir, EFC = {x | x es estudiante de la Maestría en Filosofía de la Ciencia Generación 2008}. La segunda es mencionando explícitamente a todos los miembros de este conjunto, EFC = {Teresa, Araceli, Dayanira, Elizabeth, Mariana, Nancy, Víctor, Pedro, Paulo, Fausto, Rodrigo, Jonathan, Miguel, José, Alejandro, Cristian}. El resultado en ambos casos es el mismo pues determina al mismo conjunto de objetos. También podemos decir, por ejemplo, que Teresa $\in$ EFC, pues Teresa es un miembro del conjunto EFC.

Otra relación importante entre conjuntos es la relación de contención o de subconjunto, se dice que un conjunto A está contenido en otro B o que es un subconjunto de él sii todos los miembros del primero,

22 Como puede verse fácilmente, estas definiciones no aclaran con suficiente precisión qué es un conjunto, ni en qué consiste la relación de pertenencia. La estrategia más usual para determinar cuándo un objeto dado es un conjunto es apelando a los axiomas de la teoría de conjuntos y afirmando que un conjunto es un objeto perteneciente a un modelo o clase modelo de la teoría de conjuntos, es decir, que un conjunto es un objeto de una interpretación que hace verdaderos a todos los axiomas de la teoría, esta estrategia da una definición implícita de los conjuntos. En otras palabras, se considera a los conjuntos como objetos que hacen verdaderos los axiomas de la TC. Algunos consideran que esto no es suficiente y apelan a colecciones de objetos que hacen verdaderos a los axiomas, interpretando a la relación de pertenencia en el sentido usual.

también son miembros del segundo y se denota como A $\subseteq$ B. Como se puede apreciar, la relación de contención se puede definir a partir de la pertenencia como sigue:

Def. $A \subseteq B$ sii $\forall x(x \in A \supset x \in B)$

Veamos un ejemplo de esta relación. La relación de contención o de subconjunto es una relación entre conjuntos, así que necesitaremos un par de conjuntos. Recordemos el conjunto de los estudiantes de la Maestría en Filosofía de la Ciencia Generación 2008, de entre ellos algunos se especializaron en Filosofía de la Ciencias Cognitivas, ellos fueron: Araceli, Elizabeth, Dayanira, Jonathan, Rodrigo y José. Ellos determinan un conjunto, llamémoslo FCC. Se puede ver que todo miembro o elemento de FCC es también un miembro o elemento de EFC, por lo que FCC $\subseteq$ EFC.

La teoría intuitiva de conjuntos funciona con dos principios básicos para la construcción o determinación de conjuntos, dichos principios son el Axioma de Comprensión Irrestricto y el Axioma de Extensionalidad.

Axioma de Comprensión Irrestricto: Toda propiedad P determina un conjunto, el conjunto de todos los objetos que tienen la propiedad P.

Axioma de Extensionalidad: Un conjunto está completamente determinado por los elementos que lo conforman. O en otras palabras, dos conjuntos son iguales si tiene exactamente los mismo elementos.

Con estos dos principios se pueden construir muchos conjuntos. Por ejemplo, el conjunto potencia de un conjunto dado A, es decir, el conjunto que tiene como elementos a todos los subconjuntos de A y sólo a ellos, que se denota $\wp(A)$. También se puede construir el conjunto Unión y otros muchos. Estos axiomas son suficientes para reconstruir casi toda la matemática.

El problema de esta teoría intuitiva de conjuntos es que es inconsistente. Supongamos que queremos determinar el conjunto de todos los objetos que cumplen la siguiente propiedad, ser conjuntos que no se pertenecen a sí mismo. Esta propiedad determina el siguiente conjunto, $R = \{x \mid x \notin x\}$. La pregunta es ¿$R \in R$? Razonando un poco obtenemos que $R \in R$ sii $R \notin R$, lo cual es una contradicción. Puede verse que lo único que ocupamos para llegar a esta contradicción fue el Axioma de Comprensión Irrestricta. Ésta no es la única paradoja que genera este axioma, pero si es la de más fácil comprensión. Otras paradojas son la de Cantor y la Burali-Forti, que no analizarémos aquí.

El hecho de que la teoría intuitiva de conjuntos tal como la presentamos aquí genera contradicciones fue lo que motivo el desarrollo de una teoría axiomática de conjuntos.

1.3.1 Sistema ZFC

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel + Axioma de Elección es una teoría propuesta a principios del siglo pasado con el objetivo de dar un sistema matemático libre de paradojas. Dicha teoría es formulada usualmente en el lenguaje de la lógica de primer orden, es decir, con cuantificadores que sólo pueden cuantificar sobre los objetos y no sobre las propiedades y las relaciones. Debido al uso de la lógica de primer orden, el sistema ZFC debe contar, además de con axiomas, con 2 esquemas de axioma, a saber, el esquema de axioma de separación y el de reemplazo[23]. Además de estos dos esquemas, ZFC consta de los axiomas de extensionalidad, de par, de unión, de buena fundación, de conjunto potencia, de elección y de infinito. A continuación los presentaré, incluyendo sus formulaciones en el lenguaje de la lógica de primer orden.

Axioma de extensionalidad: Si dos conjuntos A y B tiene exactamente los mismo elementos, entonces A y B son el mismo conjunto.

$$\forall x(x\in A \equiv x\in B) \supset A=B$$

Axioma de Vacío: Existe un conjunto que no tiene elementos, lo denotamos $\varnothing$.

$$\exists x\forall y(y\notin x)$$

Axioma de Par: Dados dos objetos cualquiera de la teoría de conjuntos, A y B, existe un conjunto cuyos elementos son exactamente A y B.

$$\forall x\forall y\exists z\forall w(w\in z \equiv (w=x \vee w=y))$$

Axioma de Unión: Dado cualquier conjunto de conjuntos, C, existe un conjunto que tiene como elementos a todos y sólo los elementos de los conjuntos que pertenecen a C, este conjunto se llama la unión de C y se denota como $\cup C$.

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y \equiv \exists w(w\in x \wedge z\in w))$$

Axioma de Conjunto Potencia: Dado cualquier conjunto A, existe un conjunto que tiene como elementos a todos y sólo los subconjuntos de A, se le denota $\wp(A)$.

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y \equiv \forall w(w\in z \supset w\in x))$$

o bien,

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y \equiv z\subseteq x)$$

23 En sentido estricto el Axioma de Comprensión es redundante, pues se puede deducir del Axioma de Reemplazo.

Axioma de Infinito: Existe un conjunto inductivo, I, es decir, un conjunto al que pertenece el conjunto vacío y si $x \in I$, entonces $x \cup \{x\} \in I$. Puede verse que este conjunto debe ser infinito.

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \supset y \cup \{y\} \in x))$$

Axioma de Buena Fundación (Regularidad): Dado cualquier conjunto no vacío X, existe una conjunto Y, tal que $Y \in X$ y $X \cap Y = \emptyset$.

$$\forall x(x \neq \emptyset \supset \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in y \supset z \notin x)))$$

Axioma de Elección: Dado cualquier conjunto A de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, existe un conjunto que tiene como elementos a uno y sólo un elemento de cada elemento de A.

$$\forall x(((x \neq \emptyset \wedge \forall y(y \in x \supset y \neq \emptyset)) \wedge \forall y \forall z(((y \in x \wedge z \in x) \wedge y \neq z) \supset y \cap z = \emptyset)) \supset \exists y \forall z(z \in x \supset \exists w(w \in y \cap z \wedge \forall v(v \in y \cap z \supset v = w))))$$

Esquema de Axioma de Separación (o de Subconjunto): Dado un conjunto A cualquiera y una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de la teoría de conjuntos en primer orden que tenga a x como variable libre. Existe un conjunto que tiene como elementos a los elementos de A que satisfacen la fórmula $\varphi(x)$.

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \equiv (z \in x \wedge \varphi(z)))$$

Esquema de Axioma de Reemplazo: Si X es un conjunto y $\phi(x,y)$ es una relación del lenguaje de la teoría de conjuntos en primer orden tal que para cada x que pertenezca X existe un único y que satisface $\phi(x,y)$, entonces existe un conjunto Y que es igual a $\{y | \phi(x,y)$ es satisfecho para algún $x \in X\}$.

$$\forall x(\forall y \forall z(\exists w((w \in x \wedge \phi(w,y)) \wedge \phi(w,z)) \supset y=z) \supset \exists y \forall z(z \in y \equiv \exists w(w \in x \wedge \phi(w,z)))$$

Como había dicho más arriba estos axiomas conforman el sistema ZFC, si eliminamos el axioma de elección, esto da lugar a un sistema más sencillo llamado simplemente ZF. En la actualidad la mayoría de los matemáticos aceptan el axioma del elección en sus diferentes versiones, así el sistema más usado es ZFC.

Un aspecto muy importante a destacar es que la mayoría de los axiomas de ZFC nos muestran cómo construir conjuntos. Por ejemplo si aceptamos la existencia del conjunto vacío y el axioma de potencia podemos construir una gran cantidad de conjuntos, pero siempre finitos. Para poder asegurar la existencia de un conjunto infinito, necesitamos postular su existencia, para ello usamos el axioma de infinito. Los únicos axiomas que no tienen este carácter son el axioma de elección, pues sólo nos garantiza que existe una función de elección, pero no nos dice cuál es y el axioma de buena fundación, que impide la existencia de conjuntos no bien fundados (es un axioma que nos dice que ciertas colecciones no son conjuntos)

1.3.2 Números ordinales y cardinales.

Una vez que conocemos un poco del sistema ZFC, podemos definir a los números ordinales y cardinales, necesitamos dar estas definiciones para formular la Hipótesis del Continuo y exponer las pruebas de su independencia de ZFC.

Los números ordinales como su nombre lo indica son números que nos permiten bien ordenar conjuntos de objetos. Por ejemplo, si tengo una colección de 10 objetos, puedo ordenarla seleccionado un objeto y diciendo que este será el primero, tomar otro y decir que será el segundo, etc. Es fácil ver que este procedimiento lo puedo realizar con diferentes criterios, por ejemplo si quiero ordenar a un conjunto de personas, puedo ordenarlas por edad, o por nombre, o por estatura.

Los números cardinales son los que me permiten decir que cantidad de objetos tiene una colección. Por ejemplo, si considero a un grupo de alumnos de la facultad de filosofía, puedo decir que el cardinal del grupo es digamos 50, pues hay exactamente 50 alumnos en el grupo.

Algo que puede verse de inmediato es que los números ordinales y cardinales cuando son finitos coinciden, es decir, si bien ordeno a los alumnos de un grupo de la facultad por número de lista, también puedo decir exactamente cuántos son. Cuando considero números finitos, para cada ordinal existe un único cardinal que le corresponde y viceversa. Esta condición no se cumple cuando llegamos a los números transfinitos, tendremos que a muchos ordinales les corresponderá el mismo cardinal.

A continuación presentaré las definiciones formales de número ordinal y cardinal. Una vez hecho esto podremos ver que diferentes conjuntos infinitos, en particular diferentes números ordinales, tienen el mismo cardinal. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales, de los números enteros y de los números racionales tienen la misma cardinalidad, es decir, el mismo número de elementos. También veremos que no todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad, en particular veremos que el cardinal de los números reales es estrictamente mayor al cardinal de los números naturales (en realidad veremos que existen una infinidad de números transfinitos, pues para cualquier conjunto infinito siempre hay un infinito más grande en cardinalidad).

Para definir los números ordinales primero tenemos que definir cuando un conjunto W es bien ordenado por una relación R y cuando un conjunto es transitivo.

Def. Un conjunto W es bien ordenado por la relación R sii cumple con:

1) $\forall x \in W(\sim xRx)$ (R es antirreflexiva)
2) $\forall x \in W \forall y \in W(xRy \supset \sim yRx)$ (R es antisimétrica)[24]
3) $\forall x \in W \forall y \in W \forall z \in W((xRy \wedge yRz) \supset xRz)$ (R es transitiva)
4) $\forall x \in W \forall y \in W(xRy \vee yRx \vee x=y)$ (R es tricotómica)
5) $\forall x \subseteq W(x \neq \emptyset \supset \exists y \in x \forall z \in x\ (z \neq y \supset yRz)$ (Todo subconjunto no vacío de W tiene un elemento mínimo)

Def. Un conjunto W es transitivo sii $\forall x(x \in W \supset x \subseteq W)$
Ahora podemos definir un número ordinal como sigue:
Def. Un conjunto α es un número ordinal sii
1) α es transitivo y
2) α es bien ordenado por $\in_\alpha$. (si es bien ordenado por la relación de pertenencia restringida al conjunto α)

Los números ordinales tienen propiedades interesantes una de ellas es que dados cualesquiera dos ordinales α y β, si α y β no son iguales, entonces $\alpha \in \beta$ o $\beta \in \alpha$. Esto nos permite definir un orden para los ordinales como sigue.

Def. Dados α y β ordinales. $\alpha < \beta$ sii $\alpha \in \beta$.

Sabemos también que los números ordinales finitos son precisamente los números naturales y que el conjunto de todos ellos, en adelante ω, también es un número ordinal, de hecho es el ordinal infinito más pequeño.
Sabemos que por vacuidad el conjunto vacío es un ordinal. Sabemos que si α es un número ordinal, entonces $\alpha \cup \{\alpha\}$ (es decir, su sucesor, y lo denotamos $S(\alpha)$) es un ordinal.
Así, tenemos que los ordinales finitos deben lucir:
$\emptyset, S(\emptyset), SS(\emptyset), SSS(\emptyset), SSSS(\emptyset), SSSSS(\emptyset), \ldots$
Sabemos además que existen ordinales infinitos y el primero de ellos es ω. Y sabemos que el sucesor de ω, también es un ordinal, lo denotamos $\omega+1$. También el sucesor de él y así ω veces. Este proceso se

24 En realidad, la antisimetría es consecuencia de la antirreflexividad y de la transitividad.

puede repetir infinitamente, dado como resultado algo parecido a:

$\varnothing$, $S(\varnothing)$, $SS(\varnothing)$, $SSS(\varnothing)$, $SSSS(\varnothing)$, $SSSSS(\varnothing)$, …, ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\omega+4$, …, $\omega+\omega$, $\omega+\omega+1$, $\omega+\omega+2$, $\omega+\omega+3$, …, $\omega\times\omega$, …, ω^{ω}, …,$\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$, …

Los ordinales como ω, $\omega+\omega$, $\omega\times\omega$, ω^{ω}, etc. son llamados ordinales límite pues son la unión de todos los anteriores, no son ordinales sucesor. En términos formales tienen la siguiente forma: $\cup_{\alpha<\beta}\alpha=\beta$.

Esto nos da tres tipos de ordinales.

1) El conjunto vacío.
2) Los ordinales sucesores.
3) Los ordinales límite.

Puede verse que el vacío es en realidad un ordinal límite por vacuidad, aunque la mayoría de los teórico-conjuntistas incluye en la definición de ordinal límite la condición de ser diferente del vacío.

Una vez que sabemos qué es un número ordinal, podemos definir ordinal inicial y después número cardinal.

Def. Un ordinal α es llamado inicial sii no existe un ordinal $\beta<\alpha$ con el que sea biyectable.

Un ejemplo de ordinal inicial es ω, pues es el primer ordinal infinito, es decir, todos los ordinales anteriores son finitos y por ello no son biyectables con ω.

Ejemplos de ordinales que no son iniciales son $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\omega+4$, …, $\omega+\omega$, $\omega+\omega+1$, $\omega+\omega+2$, $\omega+\omega+3$, …, $\omega\times\omega$, …, ω^{ω}, …,$\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$.

Demos ahora la definición de cardinal de un conjunto bien ordenado.

Def. Si X es un conjunto bien ordenado, entonces el cardinal de X, $|X|$, es el único ordinal inicial con el que es biyectable.

Para definir por completo a los números cardinales y construir la jerarquía de los Aleph (nombre dado a los cardinales infinitos) es necesario primero definir el número de Hartogs de un ordinal y dar una función de los números de Hartogs.

Def. Dado un ordinal α cualquiera, el número de Hartogs de α, denotado $h(\alpha)$, es el menor ordinal que no es biyectable con ningún subconjunto de α.

Puede verse con relativa facilidad que para cualquier ordinal α, existe $h(\alpha)$ y que si α es infinito $h(\alpha)$ debe ser un ordinal límite, veasé (Hrbacek, p. 130 y ss.) Una vez que se ha definido el número de Hartog de un ordinal, se puede definir por recursión transfinita la siguiente jerarquía.

$\omega_0 = \omega$;

$\omega_{\alpha+1} = h(\omega_\alpha)$ para todo ordinal α;

$\omega_\alpha = \sup.\{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\}$ cuando α es un ordinal límite diferente del conjunto vacío.

Puede demostrarse con relativa facilidad que: 1) para cualquier ordinal infinito inicial, α, existe un ordinal β tal que $\alpha=\omega_\beta$ y 2) que para todo ω_β, con β ordinal, ω_β es un ordinal infinito inicial. Y dada nuestra caracterización de número cardinal podemos afirmar que los cardinales infinitos son precisamente los ordinales de la forma ω_β, con β ordinal. A estos ordinales los llamaremos Alephs y los denotaremos $\aleph_\alpha$, con α ordinal, tal que $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$, para todo α ordinal.

Ahora podemos ver que para todo ordinal infinito, su cardinal es justo uno de los Alephs que acabamos de caracterizar.

Una vez que sabemos con precisión qué es un cardinal podemos presentar el Teorema de Cantor:

Dado cualquier conjunto A, el cardinal de A es estrictamente menor que el cardinal de $\wp(A)$.

Esto se cumple para todos los conjuntos los finitos y los infinitos. Esto implica que no hay algo como el mayor número cardinal, pues si tal número cardinal existiese entonces el cardinal de su potencia sería estrictamente mayor, lo que nos lleva a una contradicción. Además, sabemos que muchos conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal, basta recordar que a cada Aleph corresponde una cantidad infinita de ordinales. Para asegurarnos que dos conjuntos tienen el mismo cardinal basta mostrar una biyección entre ambos conjuntos. Veamos ejemplos de conjuntos que tienen el mismo cardinal, aunque intuitivamente uno es más grande que el otro.

Ejemplo 1: Los números naturales y los números enteros tienen el mismo cardinal. Esto se puede probar dando la biyección entre ambos conjuntos. Se h: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida como sigue

$h(0) = 0$

$h(x) = (x+1)/ 2$ si x es impar

$h(x) = -(x/2)$ si x es par.

Puede verse que h es una biyección entre los números naturales y los enteros. Algo parecido se puede hacer para los número racionales. Esto quiere decir que el cardinal de todos estos conjuntos es $\aleph_0$, pues éste es el cardinal de los números naturales. Sin embargo, puede probarse que no hay una biyección entre los números naturales y los números reales. Veamos cómo.

Podemos restringir la prueba a todos los números reales entre 0 y 1, si ni siquiera podemos dar la biyección entre éstos y los números naturales, entonces no podremos dar una entre todos los números naturales y todos los reales. Supongamos que existe tal biyección, entonces podemos poner en relación cada número natural con uno real del intervalo (0,1), esto es lo mismo que poder numerar a los números reales en este intervalo. Esto sería muy parecido a lo que sigue:

1 – 0.212324324254...

2 – 0.312302002020...

3 – 0.462387828370...

4 – 0.252525252525..

….

Ahora considérese un número real, r, construido de la siguiente forma. El primer decimal de r es x+1 si x es menor que 9, en otro caso es 0, donde x es el primer decimal del primer real de nuestra lista. El segundo decimal es x+1 si x es menor que 9, en otro caso es 0, donde x es el segundo decimal del segundo real de nuestra lista. El tercer decimal es x+1 si x es menor que 9, en otro caso es 0, donde x es el tercer decimal del tercer real de nuestra lista. Y así sucesivamente. Podemos ver que el real que acabamos de definir no puede estar en la lista, pues es diferente a todos los reales de la lista en al menos un decimal. Esto prueba que el conjunto de los números reales no es numerable, es decir, que su cardinal es estrictamente mayor a $\aleph_0$. El verdadero problema es determinar cuál es su cardinal, éste es el problema del continuo.

Antes de presentar y analizar la Hipótesis del Continuo es conveniente definir una clase especial de cardinales, los cardinales fuertemente inaccesibles, que tendrán una gran relevancia en la discusión presentada en el capítulo 3.

Def. Dados A y B ordinales y f: A $\to$ B, una función. Decimos que f es una función cofinal de A en B sii $\sim\exists y \in B\ \forall x \in A(f(x)<y)$. Es decir, f es una función cofinal de A en B sii f no está acotada superiormente en B.

Def. Dados A y B ordinales, decimos que A es cofinal en B sii existe una función f:A $\to$ B cofinal de A en B.

Def. Dado B un ordinal, decimos que la cofinalidad de B, cf(B), es el menor ordinal tal que existe una función f cofinal de ese ordinal en B.

Enunciemos algunas propiedades derivadas del concepto de cofinalidad.

1) Para todo ordinal α, $cf(\alpha)$ es un cardinal.
2) Para todo ordinal α, $cf(\alpha) \leq \alpha$.

3) Para todo ordinal α, $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.

4) Todos los ordinales sucesores tiene cofinalidad 1.

Ahora podemos dar la definición de cardinales regulares y singulares:

Def. Un cardinal α es regular sii $cf(\alpha) = \alpha$.

Def. Un cardinal α es singular sii $cf(\alpha) < \alpha$.

Se puede demostrar que todo cardinal sucesor es regular y por lo tanto que todo cardinal singular es un cardinal límite. Pero, sabemos que no todos los cardinales límite son singulares. Un ejemplo de ello es ω, pues $cf(\omega) = \omega$. La pregunta es si existen otros cardinales límite que sean regulares. Si es que estos cardinales existen los llamaremos inaccesibles.

Def. Dado α, α es un cardinal inaccesible sii es un cardinal límite regular y $\alpha > \omega$.

Def. Dado κ, κ es un cardinal fuertemente inaccesible sii 1) κ es un cardinal límite regular, 2) para cualesquiera cardinales $\alpha,\beta < \kappa$ sucede que $\alpha^\beta < \kappa$, y 3) $\kappa > \omega$.

Debemos resaltar que el sistema ZFC no puede probar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles, aunque en la actualidad la mayoría de los matemáticos aceptan su existencia. El esquema de la prueba de que no es posible demostrar su existencia desde ZFC es el siguiente, en primer lugar suponemos que existen dichos cardinales, después de eso demostramos que existe un modelo de ZFC cuyo dominio tiene como cardinal un cardinal fuertemente inaccesible, es decir, si existen cardinales fuertemente inaccesibles se puede probar CONS(ZFC). Esto quiere decir que si ZFC puede probar que existen cardinales de este tipo, entonces ZFC puede probar CONS(ZFC), pero (como vimos antes) esto mostraría que ZFC es inconsistente. Es importante remarcar que tampoco es consecuencia de ZFC que no existen cardinales fuertemente inaccesibles. Lo que implica que desde ZFC es indecidible la oración que expresa la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles.

1.3.3 Hipótesis del continuo.

Como vimos en la sección anterior sabemos que el cardinal de los números reales, $|\mathbb{R}|$ (en adelante lo denotaremos como ℓ), es estrictamente mayor al cardinal de los números naturales, $\aleph_0$, es decir, $\aleph_0 < \ell$. De igual forma, cuando definimos la jerarquía de los Alephs mostramos que todo número cardinal infinito debe ser un Aleph. La pregunta o problema del continuo es determinar cuál es el Aleph que corresponde al continuo.[25] Está pregunta ha sido central en la investigación en teoría de conjuntos

25 Un resultado interesante es que el cardinal de los números reales no puede ser $\aleph_\alpha$, para cualquier α ordinal cofinal con el cardinal de los números naturales. Esto elimina a muchos cardinales como los posibles cardinales del continuo, sin

desde sus orígenes, de hecho Hilbert la menciona como uno de sus famosos 23 problemas (el primero para ser más específicos). El primero en tratar de resolver el problema fue el mismo creador de la teoría de conjuntos, Cantor. Él conjeturo que la cardinalidad del continuo corresponde al segundo Aleph, el inmediatamente posterior a $\aleph_0$, es decir, $\aleph_1$. Ésta fue conocida desde entonces como la hipótesis del continuo, en forma simbolica, $\ell = \aleph_1$.

Otra forma de plantear la hipótesis es dando diferentes caracterizaciones del continuo. La más útil es mostrando que los números reales pueden verse también como el conjunto de la funciones de $\aleph_0$ en 2, que es lo mismo que $2^{\aleph_0}$[26]. Podemos dar así una nueva formulación de la hipótesis del continuo como sigue $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esta presentación tiene la ventaja de inducir una generalización de manera un tanto natural como sigue: Para cualquier ordinal α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Ésta es conocida como la hipótesis generalizada del continuo. Una ventaja extra de esta presentación es que puede verse con relativa facilidad que el cardinal del continuo es $|\wp(\aleph_0)|$, pues $\wp(\aleph_0)$ es biyectable con $2^{\aleph_0}$.

Durante años Cantor intentó probar HC, pero nunca pudo lograrlo, aunque en alguna ocasión creyó estar muy cerca de hacerlo. Hilbert fue otro que creyó tener un esbozo de prueba de HC, pero no pudo dar la prueba. La razón de estos fracasos es que no se puede probar HC en el sistema ZFC, esto parecería indicar que HC es falsa, sin embargo, tampoco se puede probar ~HC en el sistema. En otras palabras HC es una proposición indecidible en el sistema ZFC. En las secciones siguientes hablaremos un poco de la prueba que muestra la indecidibilidad de HC.

1.3.4 Prueba de independencia de HC de ZFC.

En secciones anteriores expuse un esbozo de prueba de la independencia de la oración G de Gödel del sistema PA, en esas secciones la llamamos indecidibilidad, pero estos dos términos pueden tomarse como intercambiables sin problemas en este contexto. En ese esbozo de prueba trabajamos en términos puramente sintácticos. Es decir, la prueba nunca requirió de interpretaciones semánticas de la teoría. Esto es un poco inusual, la mayor parte de la pruebas de independencia se realizan a nivel semántico. El método estándar para dar una prueba de independencia de una proposición ϕ de una teoría formal X es dar dos modelos de dicha teoría, uno que haga verdadera la proposición ϕ y otro que la haga falsa.

Dar un modelo de una teoría formal consiste en dar una interpretación de la teoría que haga verdaderas a todas las oraciones de la teoría. Una interpretación está dada por un dominio de discurso o de

embargo, este resultado dista mucho de ser una respuesta a cuál es la cardinalidad del continuo.

26 La definición de la exponenciación cardinal es que dados dos números cardinales α y β, α^β es igual al conjunto de las funciones de β en α.

interpretación, A, que debe ser un conjunto no vacío (por lo menos en la teoría de modelos estándar) y una función interpretación F que a cada predicado, relación, función y constante de la teoría le asigne un subconjunto de A, un subconjunto del producto cartesiano (n-ésimo, en el caso de relaciones n-arias), funciones de A^n a A y objetos de A, respectivamente. Como resultado tenemos una estructura algebraico-relacional $<A,F>$ en donde todas las proposiciones de la teoría X son verdaderas. Simbólicamente esto se denota: para toda ϕ que pertenece a la teoría X $<A,F> \models \phi$, en donde A es un conjunto no vacío y F es una función interpretación.

Dada un teoría formal X y una proposición ϕ del lenguaje de la teoría, si podemos dar un modelo de X en el cual ϕ sea verdadera y uno en el cual sea falsa, se tiene que la proposición ϕ no es parte de la teoría o, en otras palabras, no se puede derivar de los axiomas de la teoría, pues en tal caso tendríamos un modelo que hace verdadera a ϕ y al mismo tiempo la hace falsa.

Este método nos permite mostrar que un proposición es independiente de una sistema formal. Una pregunta que puede surgir de manera inmediata es si dada una teoría formal cualquiera X existe o no una proposición ϕ del lenguaje de la teoría tal que se puedan encontrar un par de modelos de la teoría X, uno que haga verdadera a ϕ y otro que la haga falsa, es decir, si existe o no un proposición que sea indecidible (o independiente en dicha teoría). La respuesta no es sencilla si queremos abarcar todas las teorías formales posibles, pues existen muchas de ellas que en las cuales no hay proposiciones indecidibles y muchas otras en donde si las hay. Sin embargo, utilizando el resultado de Gödel expuesto antes podemos garantizar que en cualquier teoría formal que cumpla con las condiciones expuestas en las secciones anteriores existen proposiciones indecidibles y no sólo eso, podemos construir explícitamente algunas de dichas proposiciones con el método dado por Gödel. Dentro de este grupo de teorías formales se encuentran muchas teoría matemáticas, en particular las teoría de conjuntos ZFC. Este hecho nos garantiza que en ZFC existen proposiciones indecidibles. Y sin importar cuantos axiomas agreguemos a la teoría (mientras la teoría sea recursuvamente axiomatixable y consistente) siempre existirán proposiciones indecidibles o independientes de ese nuevo sistema formal. Esto es algo que podríamos llamar un límite gödeliano.

Usando todo lo antes dicho podemos dar el esbozo de prueba de la independencia de HC de ZFC, esto se logra dando dos modelos de ZFC y mostrando que en uno HC es verdadera y en otro es falsa.

1.3.4.1 Primera parte de la prueba (Gödel): Si ZFC es consistente, entonces ZFC + HC es consistente.

El primer progreso real del problema del continuo lo proporcionó Kurt Gödel en 1938 en su artículo "The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis". En este trabajo Gödel muestra que si ZF es consistente entonces ZFC + HC también es consistente. Esto lo logra al construir el Universo L, el universo de los conjuntos definibles, todos aquellos que puedan ser definidos por una fórmula del lenguaje de ZFC. L no sólo es un modelo de HC[27], sino de la Hipótesis Generalizada del Continuo la cuál sostiene que: $2^{\kappa} = \kappa^{+}$, donde κ es un cardinal y κ^{+} su cardinal sucesor. Lo que quiero resaltar es que el método de prueba consiste en dar un modelo L (en este caso un modelo-clase) de ZFC, tal que $L \vDash$ HC.

1.3.4.2 Segunda parte de la prueba (Cohen): Si ZFC es consistente, entonces ZFC + ~HC es consistente.

El segundo paso fundamental en la resolución del problema del continuo lo da Paul Cohen en 1963 en sus artículos "The Independence of the Continuum Hipótesis I y II". En estos artículos Cohen presenta el método de forcing, con el cual, a partir de un modelo de ZFC[28], construye otro modelo M[G] tal que $M[G] \vDash$ZFC + ¬HC.[29] Este modelo se construye con la ayuda de herramientas un poco más avanzadas como ordenes parciales y filtros genéricos, en realidad los detalles de la prueba carecen de relevancia en este contexto.

Con esto se muestra que tanto HC como su negación son consistentes con ZFC, siempre y cuando ZFC sea por sí misma consistente. Así, se concluye la prueba de independencia de la HC de ZFC, es decir, ZFC$\nvDash$HC y ZFC$\nvDash$¬HC. Nuevamente, lo que se hizo aquí es construir un modelo de ZFC tal que HC fuese falsa en él.

27 Para ser precisos L no es un modelo de ZFC, sino una clase-modelo, pues su dominio de interpretación es una clase propia, es decir, una colección muy grande que no puede ser un conjunto.

28 En realidad, no se pide un modelo de ZFC, sino de una cantidad finita de axiomas de ZFC. Recordemos que ZFC tiene 2 esquemas de axioma, lo que genera una cantidad infinita de axiomas. El truco es considerar un modelo de una cantidad finita de axiomas de ZFC, pero suficiente para realizar la prueba. La existencia de dicho modelo sí se puede probar dentro de la misma ZFC, lo cual no implica ninguna contradicción con el segundo teorema de incompleción de Gödel. Sólo habría contradicción si se pudiese probar dentro de ZFC, que existe un modelo de todos los axiomas de ZFC.

29 En realidad el método de *forcing* nos permite construir una cantidad infinita de modelos en donde el cardinal del continuo sea $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, etc. Todos aquellos que no están prohibidos por teoremas de ZFC, véase nota 22.

1.3.4.3 HC es independiente de ZFC.

Con la construcción de los modelos antes mencionados podemos garantizar que HC es independiente de ZFC, o en otras palabras, que ni HC ni su negación son derivables de los axiomas de ZFC. Esto deja abierto un problema para los filósofos de las matemáticas, en especial para los realistas, el problema de determinar si HC es verdadera o falsa. Pensadores como Gödel y muchos otros creyeron que HC debía tener un valor de verdad determinado, pues desde su punto de vista la Teoría de Conjuntos describe un reino de objetos abstractos e independientes de los seres humanos, lo que implica que HC debe ser o verdadera o falsa respecto a este reino de objetos. Gödel además creía HC era falsa pues tiene como consecuencias oraciones del lenguaje de la teoría de conjuntos que le parecían falsas o dudosas. Así que este grupo de matemáticos realistas proponían la búsqueda de nuevos axiomas para completar la TC, de tal suerte que describiese con mayor precisión dicho reino matemático, algunos de ellos como Gödel esperaban que estos nuevos axiomas mostrasen que HC es falsa (Véase Gödel, 1947). Otros pensaban que la prueba de independencia de HC de ZFC sugería una visión antirealista de la TC, poniendo en duda la existencia de un reino de objetos matemáticos que pudiésemos llamar "los conjuntos". Ellos proponían un suerte de relativismo en donde la pregunta por el valor de verdad de HC debía contestarse dependiendo del modelo de ZFC en que se estuviese trabajando. Es decir, que el valor de verdad de HC dependía por completo del modelo, si el modelo era L entonces HC es verdadera, pero si el modelo era M[G] entonces era falsa (Veáse Mostowski, 1964). Esto desató un fuerte polémica. Una de las posibles respuestas a estos cuestionamientos y otros similares es la posición filosófica conocida como estructuralismo matemático, que pretende, usando recursos lógicos más fuertes que los hasta aquí mencionados, defender que a pesar de que no sabemos cuál es el valor de verdad de HC, ésta tiene un único valor de verdad. En el capítulo 2 presentaré dicha posición y en el capítulo 3 presentaré una discusión sobre si efectivamente responde a este y otros retos.

Se puede considerar que el problema para determinar el valor de verdad de HC se debe a que no tenemos un modelo pretendido de la Teoría de Conjuntos y es por ello que aceptamos los modelos propuestos en las pruebas de Gödel y de Cohen. Si tuviésemos un modelo pretendido podríamos apelar a él y buscar si en ese modelo HC es verdadera o falsa (posiblemente mediante razonamientos metateóricos). Recordemos que seguimos una estrategia muy similar para determinar que la oración G de Gödel era verdadera aunque era indemostrable en PA. Para lograr llegar a este resultado nos servimos de un razonamiento metateórico que utilizaba entre otras cosas el hecho de que contábamos con un modelo pretendido de la aritmética. Parte de nuestro esfuerzo en los capítulos siguientes se centrará en tratar de develar un modelo pretendido para la TC.

1.3.5 Nuevos Axiomas

Como se dijo en la sección anterior uno de los programas para solucionar el problema del continuo, una vez que se demostró la independencia de HC de ZFC, fue la complementación de esta teoría con nuevos axiomas, buscando que algunos de ellos lograra determinar la cardinalidad del conjuntos de los números reales. Durante los últimos 50 años se han propuesto muchos de estos nuevos axiomas, muchos de ellos postulando la existencia de los llamados cardinales grandes, cardinales con características muy particulares cuya existencia no puede ser probada dentro del sistema ZFC, entre ellos los cardinales fuertemente inaccesibles. También se propusieron otros de corte combinatorio y relacionados con la técnica de *forcin*g mencionada anteriormente, finalmente entre 2000 y 2002 se determino que si se acepta una extensión de ZFC que incluya axiomas como Martin Máximo Acotado o los Axiomas Acotados Propios del *Forcing* se puede determinar que el cardnial del continuo es $\aleph_2$. Parecería que esto mostraría que la HC del continuo es falsa. Sin embargo, esto no es del todo claro, pues este resultado depende de la aceptación de nuevos axiomas de TC. Es posible que se propongan otros axiomas que en conjunto con ZFC determinen que HC es verdadera. Esto nos llevaría a una discusión sobre cuáles de los axiomas debemos aceptar y cuáles rechazar y bajo que criterios, o si bien podemos aceptar unos y otros y trabajar con teoría de conjuntos diferentes, algo que a muchos antirealistas les parecería lo más adecuado. Sin embargo, como ya se dijo antes nuestra estrategia de argumentación será diferente. La estrategia para abordar el problema que presentaré a continuación consisté en defender el estructuralismo matemático y apoyarnos en resultados de categoricidad que si bien no nos darán la respuesta sobre el valor de verdad de las proposiciones indecidibles como HC o la oración G de Gödel, si nos garantizarán que éstas y todas las proposiciones de la matemática clásica (en realidad de las teorías no algebraicas, es decir, las que tienen un modelo pretendido) tienen un único valor de verdad.[30]

30 Como veremos un poco más adelante, las teorías algebraicas, como la teoría de grupos o la topología, al tener una gran cantidad de modelos no isomorfos no pueden cumplir con que todas las oraciones de sus lenguajes respectivos tengan un único valor de verdad. Por ejemplo, la oración que dice que la operación definida en la teoría de grupos es conmutativa es verdadera en unos modelos y falsa en otros. Otro caso interesante es la oración que afirma la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles, pues su valor de verdad no queda determinado por los modelos de la teoría de conjuntos. Los detalles de esto se encuentran en el capítulo 3 de este trabajo.

Capítulo 2: El estructuralismo Ante Rem de Shapiro

En 1973 Paul Benacerraf publicó un artículo titulado "Mathematical Truth", en dicho trabajo revivió una antigua disputa (que probablemente se puede rastrear hasta Platón y Aristóteles) entre realistas y antirealistas en matemáticas. El punto central del trabajo de Benacerraf es mostrar que si aceptamos el realismo (y con ello la existencia de objetos matemáticos abstractos, que son causalmente inertes, es decir, que no tienen conexiones causales con los objetos físicos), tenemos que explicar cómo es que podemos tener conocimiento matemático. Este problema parece especialmente importante en la actualidad, pues han sido muy favorecidas las explicaciones de la epistemología naturalizada. De alguna forma el reto es insertar el conocimiento matemático dentro del marco naturalista. Ante este panorama han surgido una multitud de respuestas, entre ellas las llamadas estructuralistas. Los estructuralistas sostienen que la matemática es la ciencia de la estructura y el reto epistemológico es explicar cómo es que podemos tener conocimiento sobre dichas estructuras.

En este capítulo presentaré una posición estructuralista particular, la posición de Shapiro, conocida como el estructuralismo *Ante Rem*. Hago esta aclaración pues si bien los argumentos que analizaré en el próximo capítulo pretenden afectar no sólo a esta posición sino al estructuralismo en general (o casi todas las posiciones estructuralistas), es muy complicado dar una caracterización adecuada que englobe a todos aquellos que han sido llamados estructuralistas matemáticos. Es por ello que me centraré en la posición de Shapiro, aunque hacia el final de capítulo hablaré un poco más de otros tipos de estructuralismo y trataré de dejar en claro que tienen algunos puntos en común con la propuesta de Shapiro. En particular, la mayoría de las posiciones estructuralistas defienden el realismo en valor de verdad y, en consecuencia, requieren que las teoría de las que hablan (teorías matemáticas) cumplan con dos requisitos: que tengan por lo menos un modelo y que este modelo sea único salvo isomorfismo. Llamaré a estos requisitos el requisito de existencia y el de unicidad. Estos dos requisitos obliga al estructuralista a cambiar el lenguaje en que expresa las teorías matemáticas, tiene que abandonar el lenguaje de la lógica de primer orden. Una alternativa que resuelve el problema (es decir, que provee de teorías que cumplan ambos requisitos) consiste en expresar a las teorías matemáticas en el lenguaje de la lógica de segundo orden, esta es la estrategia que siguen la mayoría de los estructuralistas.

Antes de exponer la postura de Shapiro presentaré el reto de Benacerraf para comprender por qué es tan importante responderlo.

2.1 Reto de Benacerraf

El reto de Benacerraf está guiado por dos motivaciones que pueden especificarse como sigue:

> (1) la preocupación por disponer de una teoría semántica homogénea en la cual la semántica para las proposiciones de la matemática sea análoga a la semántica para el resto del lenguaje, y (2) la preocupación porque la explicación de la verdad matemática se combine con una epistemología razonable.(Benacerraf, 2004, p. 233-234)

Estas dos motivaciones son la eje de la argumentación de Benacerraf, quien sostiene que una teoría adecuada de la verdad matemática debe cumplir con ambos condiciones. Según él ninguna de la teorías hasta ese momento presentadas cumple con ambos requisitos. Así, el diagnostico de Benacerraf es el siguiente:

> Ya que, como sugeriré, las explicaciones de la verdad que tratan el discurso matemático y el no-matemático de manera significativamente parecida, lo consiguen al precio de dejar sin explicar cómo podemos tener algún conocimiento matemático en absoluto; mientras aquellas que atribuyen a las proposiciones matemáticas el tipo de condiciones de verdad que está claro que sabemos obtener, lo consiguen a expensas de fracasar a la hora de conectar estas condiciones con algún análisis de los enunciados que muestre cómo las condiciones asignadas son condiciones de su *verdad*. (*Idem.*)

Como puede verse los dos requisitos que nos impone Benacerraf están relacionados con la generalidad de las teorías. Lo que pretende este filósofo es que no tratemos al conocimiento y a la verdad matemática de manera especial. Se pide entonces que las teorías semánticas y epistemológicas que nos ayudan a analizar a las matemáticas sean en esencia las mismas que usamos para el resto de los ámbitos del saber humano. Asimismo, sostiene que las teorías semánticas y epistemológicas deben ser globales en los campos en los que se aplican.

2.1.1 Semántica

Tomando en cuenta lo antes dicho, por un momento supongamos que tenemos algo como una semántica estándar para todo el lenguaje natural[31]. Parece además que el mejor candidato que tenemos para ser dicha semántica uniforme es una semántica de tipo tarskiano[32]. Esperaríamos que dicha semántica analizase dos oraciones de la misma forma, en los mismo términos. Por ejemplo:

31 Este supuesto se debe a que en la actualidad es difícil sostener que existe una semántica plenamente aceptada que nos sirva para analizar todo el lenguaje.

32 Según Benacerraf, esto se debe principalmente a dos cosas:
1) La teoría tarskiana es general, pues se aplica por igual a las oraciones de la matemática y a las oraciones sobre objetos físicos.
2) Sin ella tendríamos que dar una nueva teoría de la inferencia matemática, en palabras de Benacerraf: “Si rechazamos la concepción estándar, la inferencia matemática necesitará una explicación nueva y específica”. (Benacerraf, 2004, p. 43) De hecho, si rechazamos la semántica tarskiana para la matemática, tendríamos que dar una teoría de la inferencia en general. Véase, (Orayen, 1991)

(1) Hay por lo menos 2 estudiantes asociados que son más jóvenes que Cristian.

(2) Hay por lo menos 2 números primos que son menores que 5.

Parece claro que la oración (1) se puede analizar como afirmando que existen 2 sujetos que tiene la propiedad de ser estudiantes asociados y que todos ellos están en la relación de ser más joven con Cristian (y por supuesto que Cristian existe, o en otras palabras, que el término Cristian tiene referente). Esto da como resultado la siguiente forma lógico-gramatical:

(3) $\exists x \exists y(x \neq y \wedge Ax \wedge Ay \wedge xJc \wedge yJc)$

Parece claro, y poco problemático, que esta oración al ser interpretada nos compromete con la existencia de dos objetos que tienen ciertas propiedades y están en una relación con otro objeto, a saber, Cristian. Oraciones como (1) al ser interpretadas de la manera usual (con los recursos de la lógica de clásica de primer orden) parece comprometernos con la existencia de estos tres objetos. Pero si aceptamos que este mismo tipo de interpretación es correcto para oraciones como (2), entonces nuestra semántica nos comprometería con la existencia de objetos como los números naturales, en este caso el número 5 y los números primos menores que él. El problema con rechazar la aplicación de la misma semántica para oraciones como (2) es que perdemos generalidad y tendríamos que dar una nueva semántica para dicha oraciones y justificar la aplicación de dos criterios semánticos en el análisis de oraciones que en apariencia son muy similares.

Esto nos deja dos opciones:

Opción 1: Mantener el *desideratum* de una semántica uniforme y mantener la misma semántica (u otra, pero que se aplique por igual a todas las oraciones del lenguaje), y en consecuencia aceptar la existencia de objetos abstractos como los números[33] (o por lo menos, darles el mismo estatus ontológico que a los objetos físicos).

Opción 2: Abandonar el *desideratum* de una semántica uniforme y justificar el uso de maquinarias diferentes para oraciones como (1) y (2), y no aceptar la existencia de objetos abstractos.

Estas dos opciones presentan programas filosóficos distintos y plausibles, por lo menos inicialmente. El problema es empatar estas dos opciones con nuestras intuiciones epistemológicas.

Antes de analizar los problemas que pueden surgir al introducir la epistemología de las matemáticas en la discusión, demos un breve vistazo a que pasaría si rechazamos la semántica tarskiana y optamos por otra.

---

33 En general es aceptado que los objetos matemáticos son objetos abstractos, de hecho es uno de los supuestos que sostiene Benacerraf. Si alguien requiere de argumentos para defender está tesis puede verse (Hart, 1991), especialmente p. 91 y 92.

El mismo Benacerraf ofrece un análisis de las consecuencias de optar por semánticas no estándar (no-tarskianas) para analizar las oraciones matemáticas. Pone como ejemplo la posición que David Hilbert presentó en su texto "Acerca del Infinito". Benacerraf llama a ésta y otras posiciones similares "combinatorias" pues, según él, tratan de explicar la verdad matemática en términos sintácticos.

> Llamaré a tales concepciones, por carecer de un término mejor y porque casi invariablemente encajan en las características sintánticas (combinatorias) de los enunciados, concepciones "combinatorias" de los determinantes de la verdad matemática. La idea principal de las concepciones combinatorias es la de asignar valores de verdad a los enunciados de la aritmética sobre la base de ciertos hechos sintácticos (generalmente demostrativistas) sobre ellos. (*Ibíd*, p. 237)

La estrategia general de estas posiciones es apelar a la demostrabilidad, usando cláusulas como la siguiente:

Dado un sistema formal X, la oración S es verdadera (en X) sii S es demostrable en X.

Esto representa un problema serio sobre todo considerando el primer teorema de incompleción de la aritmética de Gödel, pues como vimos, dicho teorema demuestra que existen oraciones matemáticas que son verdaderas, pero no demostrables. Uno podría decir que una de las lecciones de Gödel es que la verdad y la demostrabilidad no son conceptos coextensionales. (Aún rechazando esta lectura un tanto realista de los teoremas de Gödel, tendríamos que existen oraciones tales que tanto ellas como su negación son no verdaderas de acuerdo a este tipo de cláusulas.)

Otras posiciones que pretenden abandonar la semántica estándar son: 1) las que pretenden reducir los axiomas de la matemática a proposiciones analíticas y 2) las que pretenden definir la verdad matemática convencionalmente.

De cualquier forma al parecer ninguna de ellas es una buena respuesta, no por lo menos de acuerdo a los dos puntos presentados como motivaciones del reto de Benacerraf. Pues:

> Motivadas por consideraciones epistemológicas, las concepciones "combinatorias" nos ofrecen condiciones de verdad cuya satisfacción o no satisfacción pueden determinar los simples mortales, pero el precio que pagan es su incapacidad para conectar esas llamadas "condiciones de verdad" con la verdad de las proposiciones para las cuales son condiciones. (*Ibíd,* p.252)

Así, hasta el momento tenemos que el *desideratum* de tener una semántica uniforme y la aceptación de la semántica estándar nos compromete con la existencia de objetos matemáticos. También hemos visto que rechazar la semántica estándar puede ser muy problemático, por lo que Benacerraf sugiere que la semántica tarskiana es la adecuada para el análisis semántico de las oraciones matemáticas.

> Considero que sólo tenemos una explicación de ese estilo: la de Tarski, y que su característica esencial es la de definir la verdad en términos de referencias (o satisfacción) sobre la base de un tipo particular de análisis sintáctico-semántico del lenguaje, y así que cualquier supuesto análisis genuino de la verdad matemática debe ser el análisis de un concepto que sea un concepto de verdad por lo menos en el sentido de Tarski. (*Ibíd*, p. 239)

2.1.2 Epistemología

Como acabamos de ver la primera condición para dar una teoría filosófica aceptable para las matemáticas es una semántica uniforme, que de cuenta de las condiciones de verdad de las oraciones matemáticas en sentido fuerte, es decir, que de cuenta de las oraciones de la matemática del mismo modo en que damos cuenta del resto de las oraciones de nuestro lenguaje. Y además se argumentó a favor de una semántica tarskiana.

El segundo requisito de nuestra teoría filosófica aceptable es que dado que "presuponemos que poseemos conocimiento matemático y que tal conocimiento no es menos conocimiento por ser matemático [y ya] que nuestro conocimiento lo es de verdades, o puede ser así interpretado, una explicación de la verdad matemática, para ser aceptable, debe ser consistente con la posibilidad de poseer conocimiento matemático: las condiciones de verdad de las proposiciones matemáticas no pueden hacernos imposible el saber que se satisfacen.[...] Dicho más claramente, el concepto de verdad matemática, tal como lo he explicado, debe encajar en una explicación global del conocimiento, de manera que haga inteligible cómo poseemos el conocimiento matemático que poseemos" (*Ibíd*, p. 240) Esto nos compromete con dar una epistemología que nos explique cómo nuestro conocimiento matemático está relacionado con los objetos matemáticos (y las relaciones que hay entre ellos), que a fin de cuentas son los que dan los valores de verdad de las oraciones matemáticas. Además nos compromete con que esta explicación esté en concordancia con una epistemología general.

Lo cierto es que desde la aparición de los contraejemplos tipo Gettier, no parece haber un consenso sobre cuál ha de ser el análisis correcto del conocimiento. Desde entonces han aparecido no pocas posiciones filosóficas en el campo de la epistemología. De hecho el dilema de Benacerraf fue originalmente planteado en el contexto de la Teoría Causal del Conocimiento (TCC), que impone como requisito para afirmar que el sujeto S sabe que P, que la justificación de la creencia de S en P tenga una relación causal con lo que de hecho hace verdadero que P. Esta teoría como es bien sabido no es universalmente aceptada, lo que es más en los últimos tiempos ha sido duramente criticada. No obstante, el dilema de Benacerraf aún está vigente, pues no necesitamos aceptar la TCC para defenderlo, basta hacer notar que la mayoría de las teorías epistemológicas contemporáneas tiene los mismo problemas que TCC respecto al conocimiento matemático, retomaremos esta idea un poco más adelante.

Comencemos con la reconstrucción del problema. Uno de los casos paradigmáticos de conocimiento es el conocimiento sobre objetos que son accesibles directamente a nuestros sentidos (no contemplaré aquí los problemas escépticos sobre el mundo externo).

> Como explicación de nuestro conocimiento presente sobre objetos de tamaño medio, ésta [la TCC] descansa sobre buena base. Involucrará, causalmente, alguna referencia directa a los hechos conocidos, y , a través de ella, una referencia a los objetos mismos. Además, tal conocimiento (de casa, árboles, trufas, perros y paneras) representa el caso más claro y más fácil de tratar. (*Ibíd*, p. 245)

El hecho de que el conocimiento de objetos físicos es uno de nuestros paradigmas de conocimiento puede deberse a diversos factores (según la epistemología que adoptemos). Por ejemplo, podríamos decir que nuestra confianza en el conocimiento de estos objetos se debe a que obtenemos información sobre ellos mediante los sentidos y que dichos mecanismos perceptivos son confiables o que nos garantizan una relación directa (causal) con el objeto, etc. Lo relevante es que, en la mayoría de las posiciones epistemológicas, se acepta que tenemos acceso a los objetos empíricos (accesibles mediante la percepción) de los que predicamos conocimiento, aunque las diferentes posiciones den cuenta de este acceso de diferentes formas. El problema es que si uno acepta el realismo matemático la diferencia entre el conocimiento de objetos empíricos y el de objetos matemáticos no es muy grande en el sentido en que ambos son independientes del sujeto, tiene realidad propia. Es por esto que parece existir la necesidad de explicar cómo es que tenemos acceso a dichos objetos. "La conexión entre lo que debe ser el caso si *p* es verdadera y las causas de las creencias de X pueden variar mucho. Pero siempre hay *alguna* conexión, y la conexión relaciona los fundamentos de la creencia de X con el contenido de *p*." (*Idem.*) Esta conexión no es nada sencilla de explicar pues dado que los objetos matemáticos son objetos abstractos no podemos tener ningún tipo de contacto causal con ellos, no podemos tener acceso a ellos mediante los sentidos. Debido a esto, algunos pensadores como Gödel han sostenido que si bien los sentidos no parecen ofrecernos un acceso a los objetos abstractos, nosotros contamos con algún mecanismo como la intuición que nos permite tener acceso al reino de los números. El problema con este tipo de respuestas es que nuevamente requerimos una explicación plausible de este tipo de mecanismos, por lo menos una tan buena como las que tenemos para justificar la adecuación de los sentidos como mecanismo para obtener conocimiento sobre los objetos físicos. El problema es que no parece haber tal explicación.

En lo personal creo que el proyecto quineano de naturalización de la epistemología es muy plausible, en tal caso parece que la ciencia es la que decidirá (por lo menos en parte) cuáles son los requisitos para tener conocimiento. Así, dado el estado actual de la ciencia es plausible que se sostenga que si predicamos conocimiento sobre objetos externos a nosotros tengamos que explicar de alguna forma cómo es que tenemos acceso a dichos objetos en términos de nuestra mejor ciencia.

El problema aquí es que la noción de acceso no está bien definida. En el caso de los objetos físicos, tenemos una manera estándar de entender cómo tenemos acceso a ellos, usamos nuestros sentidos. Así, podemos decir que nuestro conocimiento sobre los objetos físicos lo obtenemos primordialmente mediante el acceso que tenemos a ellos mediante la percepción sensorial directa (cuando los percibimos). Este acceso perceptual es uno de los garantes de nuestro conocimiento sobre los objetos físicos. El problema es que no parece que tengamos una noción clara de acceso más allá de la perceptual. Cuando decimos que conocemos un objeto o un hecho parece claro que hemos tenido acceso a él, ya sea por medio de la percepción directa o bien por información que nos llega por medio de otras fuentes como reportes de otros individuos (en caso contrario sería difícil siquiera poder saber de que cosa decimos que sabemos algo). Por ejemplo, yo creo saber que Sócrates era griego, pero cómo es que yo sé esto. Obviamente no he tenido acceso directo a Sócrates pues el murió mucho tiempo antes de que yo naciera. Sin embargo, yo he obtenido información respecto a él mediante lectura de libros, la asistencia a clases y conferencias e incluso mediante la televisión. Esto medios pueden contar como algún tipo de acceso no-perceptual a Sócrates, sin embargo, esto no es nada claro. El problema de aceptar a todos estos medios como accesos no-perceptuales a Sócrates es que todos y cada uno de ellos los obtuve mediante la percepción de las páginas de los libros, de las palabras pronunciadas por los profesores o conferencistas, o bien de las imágenes y lo sondos que aparecían en la televisión. Así que al fin y al cabo todo ellos fueron obtenidos mediante la percepción. Esto no es de sorprender si aceptamos que nuestro contacto con el mundo es mediante la percepción (sensorial), cualquier medio de acceso a eventos u objetos que no se dé mediante su percepción directa se da finalmente mediante la percepción de alguna otra cosa como palabras, imágenes, etc.[34]

Si aceptamos todo esto, parece que el acceso a los objetos matemáticos del que hablamos más arriba tiene que ser una de dos cosas (de naturaleza muy diferente): 1) alguna facultad perceptual diferente a las usuales (es decir, más allá de los sentidos que usualmente nos son atribuidos como la vista o el tacto), 2) obien, un mecanismo más similar a la lectura de libros o la comprensión de una plática que requiera por lo menos inicialmente de la percepción sensorial (en mi opinión es muy probable que estos mecanismo deban ser lingüísticos, pero esto es algo muy discutible).[35]

34 Con esto no quiero decir que todo conocimiento tiene que provenir de la percepción, pero si que comienza con ella. Por ejemplo, yo puedo haber leído mucho sobre Sócrates en diferentes fuentes y mediante procesos deductivos (o inductivos) obtener conocimiento extra, que no obtuve directamente de mis lecturas. El punto que quiero resaltar es que por lo menos la información necesaria para poder comenzar a razonar al respecto tuve que obtenerla mediante la percepción.

35 Más adelante veremos que algunas de las soluciones más usuales al problema del acceso son: 1) postular la existencia de una facultad cognitiva nueva llamada intuición que nos permite percibir los objetos matemáticos y 2) postular mecanismo lingüísticos que nos permitan explicar cómo es que sin postular una facultad nueva podemos tener acceso a

De cualquier forma parece que si aceptamos una semántica estándar en matemáticas nos veremos forzados a hacer cambios en nuestras teorías epistemológicas, pues a simple vista no parecen poder dar cuenta del conocimiento de los objetos matemáticos.[36] "No resultará sorprendente que esto haya sido un preámbulo para señalar que combinar *esta* concepción del conocimiento con la concepción "estándar" de la verdad matemática hace difícil ver cómo es posible el conocimiento matemático." (*Ibíd,* p. 246) Esto es porque los objetos matemáticos son objetos abstractos y en tanto tales, no pueden tener una conexión causal con nosotros (los sujetos que se supone tenemos conocimiento matemático) y por tanto no pueden cumplir el requisito fuerte de relación causal impuesto por TCC. Incluso si optamos por otra epistemología todavía necesitamos explicar la relación entre los objetos matemáticos y los seres humanos. En palabras de H. D. Hart: "Es por lo menos oscuro cómo una persona puede tener conocimiento de lo que es necesario para la verdad de las matemáticas puras sobre números, funciones y conjuntos. Como se prometió, el dilema de Benacerraf es que lo que parece ser necesario para la verdad matemática también parece hacer imposible el conocimiento matemático." (Hart, 1991, p. 98) [37]

Ahora podemos ver que aceptar la opción 1 (aceptar una semántica uniforme para todo el lenguaje, incluido el matemático) implica un cambio en nuestra epistemología, un cambio que probablemente implique la postulación de mecanismos especiales en el caso de objeto abstractos, lo que implica que nuestra epistemología no será uniforme. El problema que surge al rechazar la opción 1 y optar por la opción 2 (aceptar una semántica no uniforme que de cuenta de las oraciones de la matemática en términos no referenciales) es que al rechazar la existencia de los objetos matemáticos no parece posible explicar en qué sentido el conocimiento matemático es objetivo.

Así, el dilema de Benacerraf se presenta como sigue: o aceptamos una semántica estándar (tarskiana) o aceptamos una epistemología razonable. Estos pueden ser vistos como dos cuernos del dilema, el metafísico y el epistemológico.

2.1.3 Reconstrucción del argumento.

1. No hay una oración de un cuerpo desarrollado de oraciones (teorías o disciplinas) que sea verdadera sin que existan objetos a los que se refieran sus términos.

---

los objetos matemáticos.

36 Aunque es la postura de Benacerraf al respecto, en mi opinión no es claro que esto deba suceder. Una alternativa es no cambiar en lo esencial nuestra teoría epistemológica y únicamente agregar algunos mecanismo nuevos que nos expliquen como es que tenemos acceso a los objetos matemáticos (sin importar de qué tipo de mecanismo se trate). Ésta es según entiendo, la estrategia que siguen los estructuralistas.

37 "So it is at least obscure how a person could have any knowledge of the suject matter needed for the truth of the pure mathematics of numbers, functions and sets. As promised, Benacerraf΄s dilemma is that what seems necessary for mathematical truth also seems to make mathematical knowledge imposible." La traducción es mía.

2. Las matemáticas son un cuerpo de oraciones verdaderas.
3. Los objetos matemáticos son objetos abstractos.
4. Los objetos abstractos son inertes causalmente.
5. Para que S sepa que P debe haber alguna conexión entre S y lo que hace verdadero que P.
6. La relación paradigmática de conexión con el mundo es la percepción.
7. La percepción es por naturaleza causal.

/∴ No tenemos contacto con objetos abstractos.

/∴ No tenemos conocimiento matemático.

Como puede verse, existen diferentes estrategias para rechazar la conclusión, una de ellas es optar por el cuerno epistemológico del problema y darle más peso a nuestras intuiciones epistemológicas y en consecuencia dar un explicación alternativa de la semántica de las oraciones matemáticas.[38] Otra opción es tomar el cuerno metafísico y cambiar o complementar nuestra epistemología. Esto último no resulta tan problemático si consideramos que el requisito de acceso causal parece estar motivado por considerar a la percepción como el paradigma de acceso a los objetos externos. En este sentido, sólo tendríamos que explicar cómo es que tenemos acceso a objetos matemáticos.

2.1.4 Posibles respuestas al dilema.

Existen muchos intentos de responder al dilema de Benacerraf (de los más variados tipos). Algunos optan por rechazar la existencia de objetos abstractos. Entre los que escogen este camino se encuentra, por ejemplo, Hartry Field que niega el conocimiento matemático y trata de dar cuenta de este fenómeno reduciéndolo a ficciones útiles, véase (Field, 1980).

Otros como Shapiro, Wright, Maddy (la primera) optan por el camino opuesto. Parten de una aceptación de la interpretación semántica estándar y tratan de mostrar cómo es que el requisito epistemológico que está a la base del problema se debe a una mala comprensión de qué es el conocimiento.

38 Raúl Orayen en (Orayen, 1991) presenta tres posibles consecuencias de tomar el cuerno epistemológico y abandonar la semántica tarskiana en el análisis de las oraciones matemáticas (y con ello, rechazar la existencia de objetos matemáticos abstractos).

1) Nos obliga "a revisar nuestra explicación de la eficacia de la lógica en ciertos dominios" (p,132) en particular, en la matemática.

2) "Si no hay conjuntos infinitos, TC1 (La lógica cuantificacional de orden 1) es incompleta" (p.132).

3) "El abandono total de entidades "causalmente inertes" podría limitar la capacidad de nuestras teorías para describir 'hechos lógicos' que podrían dares en la realidad (p. 136) Como por ejemplo, la inconsistencia de una teoría, cuando dicha inconsistencia no es descubierta nunca por un ser humano.

Pese a todo, Orayen no pretende que estas observaciones sean argumentos contra la adopción del cuerno epistemológico (él es basta cuidadoso al respecto). Sin embargo, yo abogo para que sean tomadas como tales.

> Desde este punto de vista, las matemáticas, en efecto, hacen frente a un clase *sui generis* de entidades, pero la impresión de que hay un problema epistemológico no es más que el producto de una innecesariamente restringida concepción (naturalista) de los recursos epistemológicos de la mente humana, reduciendo la accesibilidad a estas entidades a "algo así como la percepción". (Hale & Wright, 2002, p. 103-104)[39]

Y dentro de este tipo de postura que podemos llamar conservativa, hay un división: los que apelan a la intuición matemática (Parson, Maddy, Gödel, etc.)[40] y los que toman la vía intelectual[41] (Shapiro, Wrigth, Hale, Resnik y en general todos los estructuralista y los neo-fregeanos). En lo que resta del trabajo me concentraré en una posición que apoya la vía intelectual. Para ver críticas a la intuición véase (Hale & Wright, 2002), especialmente p. 104-111.

La postura que analizaré a continuación es la de los estructuralistas matemáticos que optan por aceptar la semántica tarskisna y dar una explicación epistemológica diferente en el caso del conocimiento matemático, su epistemología se basa en la adquisición de teorías matemáticas que determinen de manera necesaria una única estructura matemática. Como veremos uno de los mayores problema será dar cuenta de la noción de estructura y del infinito matemático.

2.2 Estructuralismo

En esta sección presento la postura estructuralista de Shapiro y cómo es que pretender dar solución al dilema de Benacerraf. Como se verá a continuación la propuesta es conservacionista en semántica, es decir, acepta y asume la semántica tarskiana estándar para el lenguaje de las matemáticas. Debido a esto el estructuralismo de Shapiro se compromete con la existencia de los objetos matemáticos. En consecuencia, el estructuralista debe proponer una epistemología que explique cómo es que un ser humano con capacidades finitas puede tener conocimiento de los objetos matemáticos.

La sección se dividirá a su vez en dos subsecciones. En la primera presentaré la postura ontológica de Shapiro y la compararé con otras propuestas estructuralistas. En la segunda explicaré su propuesta epistemológica y remarcaré que para que su propuesta funcione las teorías matemáticas deben ser categóricas, es decir, tienen que tener un único modelo salvo isomorfismo.

---

39 "On this view mathematics does indeed deal with *sui generis* kinds of entitites, but the impression that these are epistemologically problematic is merely the product of a needlessly restricted – 'naturalistic'– conception of the epistemological resources of the human mind, overlooking the accesibility of these entities to 'something like perception'." La traducción es mía.

40 Los que optan por apelar a la intuición matemática son aquellos que creen que el acceso a los objetos matemáticos se da mediante una facultad parecida a la percepción mediante los sentidos, ellos tendrán que explicar y juestificar la existencia de esta facultad.

41 Aquí utilizo el término 'vía intelectual' para referirme al tipo de mecanismo que explican el acceso a los objetos matemáticos sin apelar a facultades cognitivas nuevas. Este tipo de mecanismo son generalmente lingüísticos.

2.2.1 Ontología.

Como ya he dicho el estructuralismo de Shapiro es una posición que defiende la visión estándar de la semántica, acepta la existencia de objetos matemáticos (abstractos) y pretende dar un epistemología razonable para justificar nuestro conocimiento matemático y así responder al reto de Benacerraf. Esto la coloca como una posición realista. Debido a que existen en filosofía de las matemáticas una gran gama de posición filosóficas diferentes (y en muchos casos incompatibles) que se llaman a sí mismas realistas, conviene clarificar este concepto.

2.2.1.1 Realismo: realismo en ontología y realismo en valor de verdad.

En la literatura existen diferentes concepciones de realismo, no me concentraré en caracterizarlas a todas. En lugar de ello, presentaré a continuación una clasificación muy útil que presenta Shapiro. La idea principal de la distinción es establecer una clara diferencia entre dos preguntas centrales en la ontología de las matemáticas, a saber, (a) ¿existen los objetos matemáticos? y (b) ¿es el conocimiento matemático objetivo?

A primera vista parecería que si uno no defiende la existencia de los objetos matemáticos no puede defender la objetividad del conocimiento matemático y viceversa que si uno rechaza la objetividad del conocimiento matemático, entonces uno no puede estar comprometido con la existencia de objetos matemáticos. Pero todo esto es un error, uno puede defender la existencia de objetos matemáticos sin comprometerse con la objetividad del conocimiento y también puede suceder que uno no esté comprometido con la existencia de los objetos matemáticos, pero si esté comprometido con la objetividad de las matemáticas. Debido a esto es conveniente hacer un distinción entre realismo en ontología y realismo en valor de verdad.

> Incluso en el nivel de los *slogans*, hay dos diferentes temas realistas. El primero es que los objetos matemáticos existen independientemente de la mente, las lenguas, etc. Llamemos a éste realismo en la ontología. El segundo tema es que los enunciados matemáticos tienen valores de verdad objetivos independientes de la mente, los idiomas, las convenciones, etc., de los matemáticos. Llamemos a éste realismo en el valor de verdad.
> (Shapiro, 1997, p. 37) [42]

Como puede verse el realista en valor de verdad es el que se preocupa más por la objetividad del conocimiento matemático. Para los fines de este trabajo, el tipo de estructuralista que más nos ocupará será el que defiende el realismo en valor de verdad, esto debido a que este tipo de realista está comprometido con que dada cualquier oración del lenguaje de las matemáticas (de las teoría que tienen

---

42 "Even at the level of slogans, there are two different realist themes. The first is that mathematical *objets* exist independently of the minds, languages, and so on. Call this *realism in ontology.* The second theme is that mathematical *statements* have objective truth-values independent of the minds, languages, conventions, and so forth, of mathematicians. Call this *realism in truth-value."* La traducción es mía.

un modelo pretendido) ésta tiene que ser verdadera o falsa, para hacer esto compatible con el conocimiento matemático este tipo de estructuralista tienen que defender un tipo muy particular de epistemología que será nuestro objeto de estudio más adelante.

Antes de continuar con nuestra caracterización del estructuralismo es conveniente distinguir entre los filósofos realistas y el llamado por Shapiro "realista en el trabajo" (*working realist*), también llamado por Michael Resnik "platonista metodológico" (*methodological platonism*). El realista en el trabajo se caracteriza por usar y aceptar los principios, métodos e inferencias que tradicionalmente están asociadas al realismo, pero que no ofrece una defensa filosófica de ellos, por así decirlo, los asume (conscientemente o no) como un dogma útil para su labor.

> Yo defino un *realista en el trabajo* como una persona (o comunidad) que usa o acepta las inferencias matemáticas y afirmaciones sugeridas por el realismo tradicional y rechazada por otros por motivos antirrealistas. Los principios metodológicos en cuestión son las definiciones impredicativas, el axioma de elección, la extensionalidad general, las funciones arbitrarias, los conjuntos y la lógica clásica. El realismo en el trabajo es una visión sobre la práctica matemática o, para ser precisos, una visión que concierne a cómo esta práctica está siendo descrita. (*Ibíd*, p. 38)[43]

Se pueden distinguir a su vez por lo menos tres tipos de realistas en el trabajo:

1) Aquellos que no se comprometen con alguna postura filosófica respecto a las herramientas que usan y que probablemente ni siquiera son conscientes de ello.
2) Aquellos que son conscientes de sus compromisos (utilizan el axioma de elección, las herramientas de la lógica clásica, etc.), pero que no están comprometidos con que esto deba ser así. Este tipo de realistas en el trabajo pueden cambiar su forma de trabajar ante nueva evidencia.
3) Aquellos que usan las herramientas antes descritas, son conscientes de ello y además creen que este uso debe ser la norma de la práctica matemática, pero que no están comprometidos con ninguna defensa filosófica de estas herramientas.

El realismo en el trabajo no es propiamente una posición filosófica. Por ejemplo, la mayoría de ellos no tienen (o tienen que tener) una posición concreta respecto al problema del continuo, la oración G de Gödel o a la existencia de cardinales fuertemente inaccesible. En contraste el realismo fuerte o realismo filosófico es aquel que se compromete no sólo con esta forma de hacer matemáticas, sino con el

43 "I define a *working realist* to be a person (or community) who use or accepts the mathematical inferencces and assertions suggested by tradicional realism and rejected by others on antirealist grounds. The methodological principles in question [are] impredicative defintions, the axiom of choice, general extensionality, arbitrary functions and sets, and classical logic. Working realism is a view concerning mathematical practice or, to be precise, a view concernig how practice is to be described." La traducción es mía.

realismo en ontología y el realismo en valor de verdad.[44] Puede verse que un sujeto puede ser un realista en el trabajo y al mismo tiempo puede ser un antirrealista filosófico.

Según Shapiro, el realismo filosófico es un proyecto que no debe pensarse como fundacionista, en el sentido de dar un análisis de las matemáticas que ofrezca un fundamento definitivo para esta disciplina. La pretensión sí es dar un fundamento a las matemáticas, pero este no es un fundamento último. Como en otras ramas de la ciencia la pretensión es proporcionar una reconstrucción racional de las matemáticas dentro del cuerpo completo de la ciencia.

> El realismo filosófico es un plan para la comprensión de la estructura de una parte del barco de Neurath, la parte relativa a las matemáticas. La idea es comenzar el proceso filosófico afirmando la objetividad de la verdad matemática y la existencia independiente de un reino de los objetos matemáticos. Como tal, el realismo filosófico es sólo un comienzo. (*Idem.)*[45]

La aceptación del realismo filosófico sólo es el punto de partida del programa estructuralista. Como ya he dicho, el estructuralismo pretende responder al dilema de Benacerraf y, en este sentido, tiene que proporcionarnos un explicación de cómo interpretar las oraciones de la matemática, qué clase de objetos son los objetos matemáticos y explicarnos cómo es que podemos tener conocimiento sobre los objetos matemáticos, todo esto apoyándose en el realismo filosófico. En palabras de Shapiro:

> El primer punto de la agenda de este programa es dar cuenta de la naturaleza de los objetos postulados. Después de todo, ¿qué son estos números, conjuntos, etc? La respuesta presumiblemente proporcionaría las condiciones de verdad de los enunciados de las matemáticas. Para que el programa tenga éxito, también necesitan responder a ¿cómo un lenguaje con estas condiciones de verdad se puede aprender? y ¿cómo los seres humanos logran el intercambio de información sobre el reino matemático? ¿Cómo es que los matemáticos hacen afirmaciones verdaderas la mayor parte del tiempo? Claramente, el realismo filosófico necesita una epistemología. Este es el segundo punto de la agenda. (*Ibíd.*, p. 45)[46]

Otro punto importante de la agenda estructuralista es explicar cómo es que el conocimiento matemático se aplica tan exitosamente en las ciencias naturales y sociales. Sin embargo, por no ser útil para los fines de este trabajo no profundizaremos en el tratamiento que Shapiro ofrece para este punto.

---

44 Se puede defender que el realismo filosófico también se puede caracterizar como una posición que sólo defiende el realismo en valor de verdad, esto sería un realismo débil.

45 "Philosophical realism is a plan for understanding the structure of part of the ship of Neurath, the part concerning mathematics. The idea is to start the philosophical process by asserting the objectivity of mathematical truth and the independent existence of a realm of mathematical objects. As such, philosophical realism is only a start." La traducción es mía.

46 "The first item on the agenda of this program is an account of the nature of the postulated objects. What, after all, are these numbers, sets, and so on? The account would presumably yield truth conditions for the statements of mathematics. For the program to succeed, we also need to be told how a language with these truth conditions can be learned and how humans manage to exchange information about the mathematical realm. How do mathematicians make true assertions most of the time? Clearly, philosophical realism needs an epistemology. That is the second item on the agenda." La traducción es mía.

2.2.1.2 Teorías algebraicas y no-algebraicas.

Una clasificación muy importante tiene que ver con el tipo de teorías matemáticas con las que el estructuralista se enfrenta, es la distinción entre teoría algebraicas y no algebraicas. Por ejemplo, si uno está analizando la aritmética de Peano, parece razonable que si uno defiende el realismo en valor de verdad, adquiera el compromiso de que cualquier oración del lenguaje de PA tiene un valor de verdad determinado, pues tenemos en mente un modelo pretendido para dicha teoría (estamos analizando la estructura de los números naturales). Sin embargo, si estamos analizando la teoría de grupos, no estamos analizando una sólo estructura sino todas aquellas que cumplan con los axiomas de la teoría. En ese sentido parece poco razonable pedir que todas las oraciones del lenguaje de la teoría de grupos tengan un valor de verdad determinado, por ejemplo si la operación definida en la teoría es conmutativa o no, está oración será verdadera o falsa dependiendo del grupo particular que estemos analizando. Esto requiere de una distinción entre tipos de teorías, si es que queremos defender el realismo en valor de verdad. La distinción requerida será entre las teorías algebraicas y las no-algebraicas.

> Notemos, en primer lugar, que nadie está preocupado por el hecho de que la conmutatividad de la multiplicación es independiente de los axiomas de la teoría de grupos. Esto se debe, desde todas las consideraciones, a que la teoría de grupos no trata de una estructura particular que es única salvo isomorfismo. Por el contrario, la teoría de grupos trata a una clase de estructuras relacionadas. Lo mismo ocurre con la teoría de campos, la topología, y así sucesivamente. Que yo llamo disciplinas "algebraicas". El estatus de los enunciados independientes se plantea (si lo hace), sólo en disciplinas como la aritmética, el análisis y quizás a la teoría de conjuntos. Los matemáticos llaman a veces a disciplinas como la aritmética y el análisis "concretas", pero ese término tiene otros usos en la filosofía. La idea es que cada una de estas disciplinas trata de una estructura única, o un clase isomórfica de ellas. A falta de un término mejor, yo llamo a estas disciplinas "no algebraicas". (*Ibíd.*, p. 40-41)[47]

La distinción puede precisarse si recordamos que Shapiro pretende conservar la interpretación tarkiana del lenguaje, de tal suerte que utiliza la teoría de modelos para interpretar las teorías.

> El marco de la teoría de modelos permite una distinción relativamente clara entre las ramas algebraicas y no algebraicas de las matemáticas. Una disciplina es no algebraica si tiene una única interpretación "pretendida" entre sus modelos posibles o, más precisamente, si todos sus modelos "pretendidos" son isomorfos (o por lo menos equivalentes). Esto, junto con el tercero excluido (en la teoría del lenguaje-objeto) dan condiciones verdad bivalentes a la manera usual. Cada oración, incluyendo a las independientes de los axiomas, tiene un valor de verdad. En estas ramas, "la verdad" equivale a "la verdad en los modelos pretendidos". Por supuesto, el rompecabezas filosófico se refiere ahora a la forma en que logran aprehender, seleccionar, o comunicar las interpretaciones pretendidas, y cómo nos las arreglamos para saber cosas sobre ella (o ellas) - de los cuales hablaremos más tarde. Una disciplina es algebraica si tiene una amplia clase de modelos (no equivalentes). La

47 "Notice , first, that no one is troubled by the fact that the commutativity of multiplication is independent of the axioms of group theory. This is because, on all accounts, group theory in not about a single structure that is unique up to isomorphism. Rather, group theory is about a class of related structures. The same goes form field theory, topology, and so on. I call such fields "algebraic". The status of independent statements arises (if it does) only in fields like arithmetic, analysis, and perhaps set theory. Mathematicians sometimes call fields like arithmetic and analysis "concrete," but that term has other uses in philosophy. The idea is that each such field is about a single structure, or isomorphism type. For lack of a better term, I call the fields "nonalgebraic"." La traducción es mía.

> teoría de grupos, por ejemplo, se trata de todos los grupos. En la práctica, sin embargo, los matemáticos no utiliza el lenguaje de la teoría grupos. El teórico de grupos trabaja en una metateoría (teoría de conjuntos) con el fin de estudiar a los grupos. Es una pregunta abierta si su propia metateoría es algebraica o, para el caso, si hay disciplinas no algebraicas. (*Ibíd*., p. 50)[48]

Se puede ver entonces que las teoría no-algebraicas son aquellas que cuentan con un modelo pretendido, hablan de una estructura particular. Mientras que las algebraicas hablan de clases de estructuras que cumplen sus axiomas. Es muy importante la distinción, pues ahora podemos ver que el realismo en valor de verdad sólo está comprometido con que las oraciones del lenguaje de las teorías no-algebraicas tiene un valor de verdad determinado. Además toda la discusión posterior sobre si las teorías matemáticas son categóricas o no, se aplica sólo a teorías no-algebraicas.

Antes de proseguir con la agenda estructuralista y dar una explicación del estatus ontológico de los objetos matemáticos y de las estructuras, notemos que si aceptamos que el lenguaje de nuestra teoría de fondo (marco de análisis) es la lógica clásica de primer orden, entonces la ontología determinada por los modelos de la teoría está sujeta a las tesis quineanas de la relatividad ontológica y la inescrutabilidad de la referencia. La idea es que dado que la ontología de nuestras teorías no-algebraicas está determinado por el dominio de discurso necesario para interpretar las variables y los cuantificadores de dichas teorías y que para cada teoría existen una gran cantidad de modelos (incluso si sólo nos restringimos a los modelos pretendidos), entonces no podemos elegir una única interpretación de nuestras teorías. Comúnmente este problema, cuando es planteado en otros contextos, por ejemplo en las ciencias naturales, se resuelve apelando a factores contextuales para determinar la interpretación más adecuada de nuestra teoría, sin embargo, no parece que en el caso de las matemáticas podamos usar este tipo de recursos. Además de esto, la lógica de primer orden impone un reto extra, pues las teorías expresadas en este lenguaje están sujetas al teorema de Löwenheim-Skolem, lo que quiere decir que si tiene un modelo infinito, tiene una cantidad infinitos de modelos no isomorfos.

La solución propuesta por Shapiro para estas dificultades es utilizar como parte de la teoría de fondo a

48 “The model-theoretic framework allows a relatively neat distinction between algebraic and nonalgebraic branches of mathematics. A field is nonalgebraic if it has a single “intended” interpretation among its posible models or, more precisely, if all of its “intended” models are isomorphic(or at least equivalent). This, together with the excluded middle (in the object-language theory) yield bivalent truth conditions in the usual manner. Every sentence, incluiding those independent of the axioms, has a truth-value. In such branches, “truth” amounts to “truth in the intended models.” Of course, the philosophical puzzle now concerns how we manage to apprehend, pick out, or communicate the intended interpretations, and how we manage to know things about it (or them) – of wich more later. A field is algebraic if it has a broad class of (nonequivalent) models. Group theory, for example, is about all groups. In practice however, the mathematicians does not use the language of group theory. The group theorist works in a (set-theoretic) metatheory in order to study groups. It is an open question whether its metatheory is itself algebraic or, for that matter, whether there are any nonalgebraic fields.” La traducción es mía.

la lógica de segundo orden y no a la primer orden, además de postular a las estructuras matemáticas como objetos en nuestra ontología, lo que nos permitiría resolver el problema de la referencia, pues el discurso matemático se referiría a estructuras y objetos dentro de dichas estructuras y no a las instancias de éstas.

2.2.1.3 Caracterización de estructura.

En propósito de esta subsección es dar una caracterización de la ontología de fondo en la propuesta de Shapiro, especialmente de la noción de objeto y de estructura. La noción principal a aclarar es la de estructura pues apoyándonos en ella podremos caracterizar a los objetos y dar una noción adecuada de identidad, por lo menos en el contexto matemático. Un problema que puede surgir es que la caracterización de estructura supone a la de objeto, y la de objeto a la de estructura, en este sentido el trabajo será dialéctico, caracterizaremos la noción de estructura suponiendo una noción de objeto, misma que refinaremos después, al tener más clara la noción de estructura.

Shapiro defiende la existencia de los objetos matemáticos y le da un énfasis especial a los objetos de las teoría no-algebraicas. Pero a diferencia de lo que podemos llamar un platonista tradicional, Shapiro no defiende que los objetos matemáticos existen independientemente de las estructuras de las que son parte. Es decir, Shapiro no está comprometido con la existencia de objetos matemáticos aislados, sino que defiende que en tanto objetos están definidos por el papel que juegan en la estructura que les corresponde. Por ejemplo, un platonista tradicional puede sostener que el número 2 existe independientemente de si existe el número 8, pero Shapiro defiende que el número dos existe en tanto que tiene relaciones bien especificadas con el resto de los número naturales. Ser el número 2 en este sentido es ser el sucesor de 1, ser el número predecesor de 3, etc.

> El número 2, por ejemplo, no es nada más ni nada menos que la segunda posición en la estructura natural de números, 6 es la sexta posición. Ninguno de ellos tiene independencia de la estructura en la que son posiciones, y como lugares en esta estructura, ningún número es independiente de la otro, la esencia del 2 es ser el sucesor del sucesor de 0, el predecesor de 3, el primer número primo, y así sucesivamente. (*Ibíd.*, p. 72)[49]

Esta es un primera caracterización de objeto matemático como un lugar en una estructura. Notemos que esto hace a los objetos matemáticos dependientes de la estructura de la que forman parte y, por ello, la caracterización de los objetos depende de la caracterización de la noción de estructura. En este sentido para el estructuralista las únicas propiedades de los objetos que son relevantes, son las propiedades que

49 "The number 2, for example, is no more and no less than the second position in the natural-number structure; 6 is the sixth position. Neither of them has any independence from the structure in which they are positions, and as places in this structure, neither numbers is independent of the other, The essence of 2 is to be the successor of the successor of 0, the predecessor of 3, the first primer, and so on." La traducción es mía.

afectan sus relaciones con otros objetos dentro de la estructura, por decirlo de otro modo, las propiedades no estructurales de un objeto no son importantes para el estructuralista. También podemos observar que al hablar de estructuras no estamos hablando de ejemplificaciones de estructuras. Entendiendo como ejemplificación de una estructura un conjuntos de objetos (de cualquier clase) que estén en las misma relaciones que los objetos de la estructura.[50] No estamos hablando de modelos de las teorías que pueden ser muchos (en el caso de la estructura de los números naturales, podemos usar como modelos (o instancias) una secuencia infinita de marcas, o una lista de secuencias de letras ordenas lexicográficamente, etc.), hablamos más bien de las relaciones entre los objetos de cada ejemplificación que son isomórficas en todos los modelos de una teoría particular (no-algebraica). Usando esto podemos dar una primera caracterización de estructura:

> Una estructura es la forma abstracta de un sistema[51], destacando las interrelaciones entre los objetos, y haciendo caso omiso de cualquier característica de los objetos que no afectan a su relación con otros objetos en el sistema. (*Ibíd*.,. p. 74)[52]

Como parece obvio esta caracterización necesita ser refinada, pero antes de hacerlo veamos algunos ejemplos de estructuras para que nos sirvan de guía en nuestro análisis. El primero a considerar es un ejemplo propuesto por Michael Resnik:

> Tomemos el caso de la lingüística. Imaginemos que al utilizar el proceso de abstracción [...] un gramático llega a una estructura compleja que se llama *Inglés*. Ahora bien, supongamos que más tarde resulta que el corpus del Inglés falla de manera significativa en instanciar este patrón, por lo que muchas de las afirmaciones que nuestro lingüista ha hecho acerca de esta estructura serán falsificadas. Burlonamente, los lingüistas cambiar el nombre de la estructura a *Tinglés*. Sin embargo, gran parte del conocimiento de nuestro lingüista sobre el Tinglés *qua* patrón persiste, porque él ha conseguido describir un patrón y discutir algunas de sus propiedades. De manera parecida, me dicen que sabemos mucho sobre el espacio euclidiano a pesar de su falla al ser instanciado físicamente. (Resnik, 1982, p. 101) [53]

---

50 La noción de ejemplificación trae al estructuralista *Ante rem* por lo menos dos problemas. El primero tiene que ver con que dada su noción de ejemplificación, la estructura es una ejemplificación o instancia de ella misma, lo que hace que su estatus ontológico privilegiado se pueda poner en duda. El segundo problema tiene que ver con el famoso teorema de von Neumann que sostiene que dado un conjunto cualquiera de objetos X, X puede ejemplificar cualquier estructura cuyo dominio de objetos tenga la misma cardinalidad que el conjunto. Esto implica que al preguntarnos si un conjunto de objetos ejemplifica o no una determinada estructura, la respuesta es que sí puede hacerlo. Pero nosotros queremos que esto no sea así, muchas veces queremos que ciertos objetos no ejemplifiquen una estructura y sí otra, el problema es que al parecer nosotros somos los que imponemos las relaciones relevantes para considerar o no que un conjunto de objetos ejemplifican dicha estructura. Éste será un problema importante para el estructuralismo, especialmente para su epistemología. Sin embargo, no profundizaré en estos problemas por no ser el objetivo del trabajo.

51 Shapiro usa el término sistema para referirse a una estructura modelo-teórica, hace la distinción para evitar confusiones con su noción de estructura.

52 “A *structure* is the abstract form of a system, highlighting the interrelationships among the objetcs, and ignoring any feature of them that do not affect how they relate to other objects in the system.” La traducción es mía.

53 “Take the case of linguistics. Let us imagine that by using the abstractive process […] a grammarian arrives at a complex structure which he calls *English*. Now suppose that it later turns out that the English corpus fails in significant ways to instantiate this pattern, so that many of the claims which our linguist made concerning his structure will be falsified. Derisively, linguists rename the structure *Tenglish*. Nonetheless, much of our linguist's knowledge about

Este es un primer ejemplo, pero podemos ver otros como el ajedrez. En un juego normal de ajedrez, cada pieza (la reina, el rey, los peones, etc.) tiene una función bien definida en el juego, además de cada una de ellas tiene permitido sólo una clase de movimientos. Si, por ejemplo, antes de comenzar una partida notamos que nos falta la reina blanca, podemos substituirla por cualquier otro objeto, siempre y cuando respetemos las reglas de movimiento de la reina. Podemos además hacer un análisis teórico del juego de ajedrez y hacer preguntas sobre si es posible o no hacer ciertas jugadas, por ejemplo si se puede dar jaque con sólo caballos, la respuesta a este tipo de preguntas se da en función del papel que juegan los caballos en la estructura de ajedrez, nunca se apela a la piezas físicas. En este sentido podemos hablar de la estructura del ajedrez.

Estos dos ejemplos, si bien son ilustrativos, no son del todo útiles para clarificar la noción de estructura matemática, pues algo que caracteriza a la mayoría de las estructuras matemáticas[54] es que tiene una infinidad de objetos, consideremos, por ejemplo, la estructura de los naturales o la estructura del espacio euclidiano. También es importante notar que el análisis de las estructuras no requiere que las estructuras de hecho tengan instancias, retomando el ejemplo de Resnik, si la estructura del espacio euclidiano es instanciada o no en el espacio físico no es algo que afecte el trabajo formal del geómetra.

Regresemos a nuestra caracterización de los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos a diferencia de los objetos de otras estructuras son determinados por completo por el papel (el lugar) que juegan en la estructura. Por ejemplo, en el número 2 se caracteriza por su lugar en la estructura de los números naturales. Si por ejemplo, ejemplificamos la estructura de los números naturales utilizando la teoría de conjuntos como lo hace von Neumann, tendríamos que los números naturales son conjuntos tales que el primero (el cero) es el conjunto vacío y para cualquier número natural x, su sucesor es $x \cup \{x\}$. Esta instanciación de la estructura de los naturales tiene particularidades como que dado cualquier número natural, $x \in s(x)$. Sin embargo, este último hecho depende por completo de las propiedades que tiene esta instanciación particular, y no refleja ninguna propiedad estructural de los números naturales, es por

Tenglish qua pattern stand; for he has managed to describe *some* pattern and to discuss some of its propierties. Similary, I claim that we know much about Euclidean space despite its failure to be instantiated physically." La traducción es mía.

54 Una pregunta que surge de manera natural es qué distingue a las estructuras matemáticas de las no-matemáticas, si es que algo las distingue. Una primera respuesta es que no existe tal distinción y que si un matemático se preocupa por estudiar una estructura esto es suficiente para que dicha estructura sea considerada matemática, esta respuesta no deja satisfechos a muchos. Una segunda respuesta parte de notar que las estructuras típicamente matemáticas son estudiadas por métodos deductivos y que las relaciones entre los objetos de dichas estructuras no apelan a relaciones espacio-temporales, mentales, sociales, etc. "In mathematical structures, [...] the relations are all *formal,* or *structural*. The only requirements on the successor relation, for example, are that it be a one-to-one function, that the item in the zero place not be in its range, and that the induction principle hold. No spatiotemporal, mental,personal, or spiritual properties of any exemplification of the successor function are relevant to its being the successor function." (Shapiro, 1997, p. 98)

ello, que en estricto sentido no podemos decir que los ordinales de von Neumann son los números naturales.

Dado que los objetos matemáticos están completamente determinados por el lugar que ocupan en la estructura, podemos hablar de ellos como lugares en la estructura.

> Podemos distinguir un objeto que hace el papel de 2 en una ejemplificación de la estructura del los números naturales del número mismo. El número es la orificio, el lugar en la estructura. Lo mismo ocurre con los números reales, los puntos de la geometría euclidiana, los miembros de la jerarquía de la teoría de conjuntos, y casi todos los objetos de teoría no algebraica de las matemáticas. Cada objeto matemático es un lugar en una estructura particular. Hay así una cierta prioridad en el estatus de los objetos matemáticos. La estructura es anterior a los objetos matemáticos que contiene, al igual que cualquier organización es anterior a las puestos que lo constituyen. (Shapiro, 1997, p. 78) [55]

Dicho sea de paso esto resuelve el problema de Julio César planteado por Frege, pues la pregunta sobre si un determinado objeto es el número 2, se puede responder haciendo notar que desde esta perspectiva los objetos que sirven como número 2 en instanciaciones particulares de la estructura de los números naturales, no son el número 2. El número 2 es un lugar en la estructura de los números naturales. Algo similar se puede decir, respecto al problema de si los números naturales son los construidos por von Neumann o los construidos por Zermelo. Véase (Benacerraf, 1965).

Hay que aclarar dos posibles interpretaciones que se pueden hacer de la caracterización de los objetos matemáticos como lugares en las estructuras. La primera de ellas toma a los lugares como simples espacios que deben ser llenados; la segunda, como objetos en sí mismos. La primera no habla de los lugares como objetos, se concentra en hablar de los objetos que los llenan en las diferentes ejemplificaciones de la estructura. "Llame a esto la perspectiva los lugares-son-puestos. Esta orientación de puestos supone una ontología de fondo para cubrir los puestos de la estructura". (*Ibíd.*, p. 78)[56] La segunda perspectiva toma a los lugares como objetos y por ello no requiere de una ontología de fondo, no depende las ejemplificaciones de la estructura, para dar sentido a las oraciones de la matemática, Shapiro llama a esta persceptiva "places-are-objects". Shapiro opta por la perspectiva "places-are-objects" porque responde muy bien al realismo en valor de verdad y además nos permite dar una interpretación de los términos matemáticos como refiriendo a estos lugares en las estructuras.

---

55 "[We] can distinguish an object that plays the role of 2 in an exemplification of natural-number structure form the number itself. The number is the office, the place in the structure. The same goes for real numbers, points of Euclidean geometry, members of the set-theoretic hierarchy, and just about every object of nonalgebraic field of mathematics. Each mathematical object is a place in a particular estructure. There is thus a certain priority in the status of mathematical objects. The structure is prior to the mathematical objects it contains, just as any organization is prior to the offices that constitute it." La traducción es mía.

56 "Call this the places-are-offices perspective. This office orientation presupposes a background ontology that fill the places of the structure". La traducción es mía.

Ahora falta caracterizar la noción de estructura, de forma más precisa. Una pregunta inicial es qué tipo de objeto es una estructura. Lo primero que tenemos que notar es que las estructuras, al igual que los universales, tienen muchas instancias, es decir son objetos tales que están ejemplificados en muchos objetos, tienen la propiedad de ser uno-en-muchos. Este tipo de entidades han sido analizadas desde la antigüedad por muchos filósofos, ejemplos de ellas son las formas platónicas, los universales o las propiedades. En la jerga contemporánea, la distinción se hace entre tipos y casos. Existen por lo menos dos tratamientos usuales para este tipo de entidades: 1) Sostener que existen independientemente de sus ejemplificaciones, existen incluso si no hay ninguna ejemplificación de ellas (esto corresponde a la perspectiva "places-are-objects"), esta posición se conoce como realismo *Ante rem*. 2) Estos objetos no existen realmente, lo que llamamos estructuras, formas o universales sólo son las formas comunes a todas sus ejemplificaciones, son completamente dependientes de ellas si acabas con todas sus instancias, ellas también desaparecen. (Esta posición corresponde a la perspectiva "places-are-offices") Esta posición se conoce como realismo *In re*.

Esto induce dos posiciones en el estructuralismo, el estructuralismo *Ante rem*, y el estructuralismo *In re* o eliminativista, que bien podría llamarse estructuralismo sin estructuras. Como parece ya obvio, Shapiro se compromete con el estructuralismo *Ante rem*.

Los eliminativistas, al aceptar la perspectiva "places-are-offices", tienen que hacer un par de reajustes semánticos, las oraciones de la matemática tiene que parafrasearse como sigue:

> Dada una fórmula ϕ del lenguaje de una teoría X de la matemática, sus condiciones de verdad están reflejadas por la oración ϕ': si S es un modelo de X, entonces $\phi[S]$, es decir, que ϕ es verdadera en S.

El problema es que, como dijimos antes, esto compromete a los eliminativistas con una ontología de fondo, lo cual es un problema si consideramos que existe la posibilidad de que una teoría no tenga modelos (por ejemplo, si somos antirealistas) y en ese caso todas las oraciones de dicha teoría serían verdaderas. A este problema se pueden dar tres respuestas:

1) Respuesta Ontológica. Adoptar una ontología de fondo, por ejemplo la jerarquía acumulativa de conjuntos.
2) Respuesta Modal. Hablar no sólo de modelos, sino de modelos posibles.
3) Abandonar el eliminativismo y adoptar el estructuralismo *Ante rem*.

Sea cual sea la opción que escojamos, tenemos que dar criterios para determinar cuando dos teorías tienen la misma estructura. El primer candidato obvio para cumplir con la relación de identidad entre estructuras es la relación de isomorfismo (en algunos casos está relación es demasiado fina, por ejemplo cuando tenemos a los números naturales con 0 y sucesor y cuando tenemos a los números naturales con 0, sucesor y suma; parece claro que en sentido estricto ambas son la misma estructura, aunque no exista un isomorfismo entre ellas, en esos casos se puede aplicar una relación de equivalencia definida por Resnik, véase (Shapiro, 1997, p. 91)) Esto sólo es el comienzo de nuestra explicación, cada una de las posiciones estructuralista antes señaladas debe dar una explicación más completa de cuándo dos teorías tienen la misma estructura. Shapiro discute la solución de los que optan por una teoría de fondo y de aquellos que optan por la vía modal, para ver detalles (*Ibíd,*p. 90 y ss.) La respuesta que veremos con más detalle es la que ofrece el estructuralista *Ante rem*, que consiste en dar una teoría axiomática de las estructuras. Esta teoría está presentada en el lenguaje de la lógica de segundo orden y cuenta con los siguientes axiomas:

Infinito: Existe por lo menos una estructura que tiene un número infinito de lugares.
Sustracción: Si S es una estructura y R es una relación de S, entonces existe una estructura S' isomorfa al sistema que consiste en los lugares, funciones y relaciones de S, excepto R. Si S es una estructura y f es una función de S, entonces existe una estructura S'' isomorfa al sistema que consiste en los lugares, funciones y relaciones de S, excepto f.
Subclase: Si S es una estructura y c es una subclase de los lugares de S, entonces existe una estructura isomorfa al sistema que consiste de los lugares en c sin relaciones ni funciones.
Adición: Si s es una estructura y R es un relación cualquiera sobre los lugares de S, entonces existe una estructura S' isomorfa al sistema que consiste de los lugares, las funciones y las relaciones de S junto con R. Si S es una estructura y f es un función cualquiera sobre los lugares de S, entonces existe una estructura S' isomorfa al sistema que consiste de los lugares, las funciones y las relaciones de S junto con f.
Estructura Potencia: Dados S una estructura y s la colección de sus lugares. Existe una estructura T y una relación binaria R tal que para todo subconjunto s' de s, existe un lugar x de T tal que $\forall z(z \in s' \equiv Rxz)$.
Reemplazo: Dada S una estructura y f una función tal que para cada lugar x de S, f(x) es un lugar en una estructura, llamémos a dichas estructuras Sx, para cada x. Existe una estructura T que es (por lo menos) del tamaño de la unión de los lugares de las estructuras Sx. Y existe una función g tal que para cada lugar z en cada Sx existe un lugar en T tal que g(z) = y.

Coherencia: Si ϕ es una fórmula coherente en el lenguaje de la lógica de segundo-orden, entonces existe una estructura que la satisface.

Reflexión: Si ϕ, entonces existe una estructura que satisface los otros axiomas de la teoría de estructuras y ϕ, donde ϕ es una fórmula del lenguaje de la teoría de las estructuras.[57]

Shapiro confiesa que su teoría de las estructuras (y por tanto su explicación de la identidad en estructuras) es equivalente a las otras dos propuestas, la ontológica (que toma como teoría de fondo ZFC en segundo orden) y la modal (que construye la teoría modal de modelos). En este sentido afirma que la teoría de estructuras es una variante notacional de ZFC, la diferencia entre estas dos teorías es muy pequeña. “En cierto sentido, la teoría de conjuntos y la teoría de las estructuras recién vista son variantes notacionales una de la otra. En particular, la teoría de las estructuras sin el principio de reflexión es una variante de ZFC en segundo orden, y la teoría de las estructuras con el principio de reflexión es una variante de notacional de la teoría de conjuntos con un principio de reflexión correspondiente.” (*Ibíd.*, p. 96)[58] De hecho es notable que ambas teoría estén comprometidas con que sus modelos tengan como dominio de discurso conjuntos cuya cardinalidad es fuertemente inaccesible. Esto no es un problema serio para Shapiro, pues la diferencia entre estas posturas es filosófica. Shapiro sostiene que su propuesta es más perspicua, pues no se compromete con un ontología de fondo (como la jerarquía acumulativa u objetos posibles) que incluya más principios que los ya supuestos en los principios estructuralistas. En cualquier caso, según Shapiro los retos epistemológicos que enfrentan todas estas posturas son los mismos.

2.2.1.4 Tipos de estructuralismo.

Antes de presentar la epistemología propuesta por Shapiro, quiero presentar un pequeño panorama de otras propuestas estructuralistas para mostrar que los argumentos que presentaré en el capítulo 3 se aplica no sólo al estructuralismo *Ante rem*, sino que afecta a todos los estructuralistas que defienden un realismo en valor de verdad.

Existen 3 puntos que caracterizan las diversas posturas estructuralistas:

57 Este axioma nos garantiza que la teoría de estructuras es coherente, también implica que existen estructuras con tantos lugares como un cardinal fuertemente inaccesible. Se pueden incluir más axiomas de reflexión que nos garanticen que existen estructuras con más lugares, es decir, que existen estructuras que tienen tantos lugares como otro cardinal grande, por ejemplo, un cardinal de Mahlo o un cardinal indescriptible. Los detalles se encuentran en (Shapiro, 1991, cap. 6).

58 “In a sense, set theory and the envisioned structure theory are notacional variants of each other. In particular, structure theory without the reflection principle is a variant of second-order ZFC, and structure theory with reflection principle is a notational variant of set theory with a corresponding reflection principle.” La traducción es mía.

> (1) que las matemáticas se refiere principalmente a "la investigación de las estructuras", (2) que se trata de una "abstracción de la naturaleza de los objetos individuales", o incluso, (3) que los objetos matemáticos "no tienen más para ellos que lo que puede ser expresado en términos de las relaciones básicas de la estructura." (Reck & Price, 2000, p. 341-342)[59]

Aunque estos principios son aceptados por todos los estructuralistas, la interpretación particular que hacen de cada uno puede variar mucho de postura a postura. También es común a todos ellos la relevancia que juega la teoría de conjuntos (generalmente ZFC, aunque como vimos en la sección anterior otros optan por variantes (notacionales) como la teoría de las estructuras). La teoría de conjuntos juega dos papeles: 1) como una teoría matemática más que debe ser analizada de acuerdo a los principios estructuralistas y 2) como teoría de fondo o marco teórico que sirve para reconstruir el resto de las teorías matemáticas, es decir, como el marco teórico que nos permite hablar de estructuras.[60]

Estos hechos generan lo que podemos llamar una metodología estructuralista, que consta de dos principios:

> (i) Lo que suele hacerse en las matemáticas es estudiar las características estructurales de esas entidades. En otras palabras, nosotros las estudiamos como estructuras, o la medida en que son estructuras. (ii) Al mismo tiempo, sucede (o debería suceder) que no tiene importancia real en las matemáticas lo que la naturaleza intrínseca de estas entidades es, más allá de sus características estructurales. (*Ibíd*., p. 345)[61]

La relativa ventaja de la adopción de la metodología estructuralista es que es neutra respecto a cuestiones filosóficas. Puede verse el paralelismo con la definición de realista en el trabajo de Shapiro, al parecer la mayoría de los realistas en el trabajo adoptan una metología estructuralista, pero no se comprometen con una interpretación filosófica.

Debido a esta neutralidad respecto a la filosofía subyacente al estructuralismo, se han desarrollado por lo menos 4 programas diferentes: 1) estructuralismo formalista, 2) estructuralismo relativista, 3) estructuralismo universalista y 4) estructuralismo de patrones.

---

59 "(1) that mathematics is primarily concerned with "the investigation of structures"; (2) that this involves an "abstraction from nature of individual objects"; or even, (3) that mathematical objects "have no more to them than can be expressed in terms of the basic relations of the structure". La traducción es mía.

60 Algo que puede servir para entender al estructuralismo es tomar en cuenta sus antecedes históricos. Reck y Price presenta por lo menos 4:
1) El surgimiento del álgebra abstracta.
2) El surgimiento de los sistemas axiomáticos formales.
3) El surgimiento de la teoría de conjuntos.
4) El trabajo de Bourbaki y sus seguidores
Para ver a detalle (Reck & Price, 2000, p. 346 y ss.)

61 "(i) What we usually do in mathematics is to study the *structural features* of such entities. In Other words, we study them as structures, or insofar as they are structures. (ii) At the same time, it is (or should be) of *no* real concern in mathematics what the *intrinsic nature* of these entities is, beyond their structural features." La traducción es mía.

2.2.1.4.1 Estructuralismo formalista

Este estructuralismo se distingue por no dar una interpretación realista a las oraciones de la matemática. Los adherentes a esta clase de estructuralismo adoptan la metodología estructuralista para las matemáticas, pero o bien rechazan dar respuesta o dan una respuesta deflacionista a las preguntas metafísicas y semánticas de fondo. En otra palabras, se caracterizan por:

1) Negarse a dar respuesta filosóficas más allá de las ya dadas por la metodología estructuralista.
2) Sostienen que las matemáticas se refieren a un lenguaje no interpretado.
3) Sostienen que las matemáticas sólo se preocupan por las relaciones inferenciales.

Esto pone de manifiesto que no defienden un programa realista, ni para ontología, ni para valor de verdad. Su respuesta al dilema de Benacerraf consiste en rechazar la semántica estándar. En realidad este tipo de esctructuralista sólo pueden considerarse como tales pues usan una metodología estructuralista, pero propiamente no defienden una postura filosófica que pueda ser llamada con justicia estructuralista. Esta clase de estructuralista no será relevante en las discusiones posteriores.

2.2.1.4.2 Estructuralismo relativista

Este segundo tipo de estructuralismo se caracteriza por asumir que las oraciones de la matemática se deben interpretar literalmente, es decir, preserva la semántica tarskiana, pero dado que en el mejor de los casos tenemos teoría categóricas, que tienen una infinidad de modelos isomorfos, no se compromete con la existencia de un único referente para los términos matemáticos. "Es decir, el estructuraista relativista trabaja con una noción de referencia (inspirado en el concepto de interpretación en la teoría de modelos), que es relativa a esta elección - de ahí su nombre." (*Ibíd*., p. 349)[62] Es importante resaltar que esta posición es compatible con el realismo en valor de verdad. La adopción o no de la posición realista en valor de verdad dependerá del lenguaje en el que son expresadas la teorías matemáticas, si se adopta la lógica de primer orden no se defenderá el realismo, pero si trabaja con teorías expresadas en el lenguaje de la lógica de segundo orden, sí se defenderá el realismo en valor de verdad.

Esta postura tiene dos compromisos:

> En primer lugar, si queremos entender la aritmética en este sentido, tenemos que asumir la existencia de un conjunto infinito. [...] Esta suposición la existencia es, por tanto, un presupuesto necesario para el estructuralismo relativista, o por lo menos para su aplicabilidad. En segundo lugar, un estructuralista relativista por lo general asume que un conjunto infinito nos es dado de forma independiente de la aritmética. (*Ibíd*., p.350)[63]

62 "That is to say, relativist structuralism work with a notion of reference (modeled on the notion of interpretation in model theory) that is *relative* to such a choice – thus its name." La traducción es mía.

63 "First, if we want to understand arithmetic along these lines, we *have to asume* the existence of an infinite set. […] Such an existence assumption is, thus, a necessary presupposition for relativist structuralism, or at least for its applicability. Second, a relativist structuralist *usually assumes* that some infinite set is given to us independently from arithmetic." La

Estos dos compromisos se pueden cumplir si se asume la teoría de conjuntos como teoría de fondo. Si se acepta una teoría como ZFC como teoría de fondo, no sólo se cumplen los dos requisitos, sino que estos estructuralistas pueden contestar al reto de Benacerraf, siempre y cuando, ofrezcan una epistemología adecuada. El principal problema es que existe una ambigüedad en la referencia de los términos.

Para la discusión que presentaré en el siguiente capítulo sólo serán relevantes los estructuralistas relativistas que asuman o estén comprometidos con el realismo en valor de verdad.

2.2.1.4.3 Estructuralismo universalista

Este tipo de estructuralismo se caracteriza por relativizar las oraciones de las matemáticas, para evitar la ambigüedad en la referencia. Se relativizan los cuantificadores de los axiomas con un predicado que haga referencia a los objetos del modelo pretendido de la teoría. Por ejemplo, podemos utilizar un predicado para hacer referencia a los números naturales, digamos N( ) que sólo es satisfecho por números naturales, así los axioma de Peano quedaría como sigue:

> (A1') $N(1)$,
> (A2') $\forall x[N(x) \rightarrow N(s(x))]$,
> (A3') $\forall x[N(x) \rightarrow (1 \neq s(x))]$,
> (A4') $\forall x\forall y[((N(x) \wedge N(y)) \wedge x\neq y) \rightarrow (s(x) \neq s(y))]$,
> (A5') $\forall X[(X(1) \wedge \forall x((N(x) \wedge X(x)) \rightarrow X(s(x)))) \rightarrow \forall x\,(N(x) \rightarrow X(x))]$ (*Ibíd*., p. 355)

Aplicar este tipo de paráfrasis a las oraciones de la matemática nos da como resultado:

1) Las oraciones de las teorías matemáticas en su mayoría sería condicionales (si bien cuantificadas universalmente).
2) Se logra una abstracción de los modelos particulares (evitando la ambigüedad en la referencia de los términos matemáticos).
3) Se elimina toda referencia a modelos pretendidos.
4) No se requiere la postulación de objetos abstractos (en general).
5) No se requiere de comprometerse con la existencia de modelos pretendidos.

Estos puntos plantean un problema a esta posición (que puede ser considerada eliminativista en el sentido de Shapiro), pues si no existen modelos para una teoría matemática, todas las oraciones de su lenguaje serían verdaderas, este es el problema de la vacuidad, la misma objeción que les hace Shapiro, véase (Shapiro, 1997, p. 90 y ss.). Las posibles respuestas a este problema son exactamente las misma que ya vimos con antelación: Asumir ZFC (o alguna equivalente) como teoría de fondo, optar por la

traducción es mía.

inclusión de operadores modales o de objetos posibles, o bien aceptar la postura de Shapiro.

Es importante resaltar que estas posturas defienden el realismo en valor de verdad, lo cuál las hace susceptibles a los argumentos del capítulo 3. El último tipo de estructuralismo, el estructuralismo de patrones, es el estructuralismo de Shapiro, por lo que no diré más de él. Lo que quiero remarcar es que los estructuralistas a los que aplican los argumentos que discutiré en el siguiente capítulo son aquellos que se comprometen con el realismo en valor de verdad. Es importante aclarar que otras posiciones en filosofía de las matemáticas que aceptan o defienden el realismo en valor de verdad no son necesariamente afectadas por dichos argumentos, pues éstos sólo afectan a filósofos que explican el conocimiento matemático a través de lo que previamente he llamado vía intelectual. Esto quiere decir que filósofos que defienden a la intuición como el mecanismo que nos permite adquirir conocimiento matemático tienen muy poco que preocuparse por esta discusión (ellos tienen su propios problemas, como, por ejemplo, explicar la noción misma de intuición). La siguiente y última sección de este capítulo presentará un ejemplo de esta vía intelectual, la epistemología propuesta por Shapiro.

2.2.2 Epistemología estructuralista.

Shapiro es consciente del reto que impone el dilema de Benacerraf. También es consciente de que la teoría causal del conocimiento (supuesta en el dilema) ha sido fuertemente rechazada por la mayoría de los epistemólogos, pero que esto no implica que el dilema haya sido resuelto. Esto se debe a que la TCC es una instancia (por así decirlo) de un proyecto más amplio, la naturalización de la epistemología, que todavía tiene una fuerte influencia entre los filósofos, probablemente por muy buenas razones.

> En el clima actual, entonces, no se puede (sin más) que el realismo en la ontología ha sido refutado simplemente porque no hay contacto causal con objetos abstractos. Sin embargo, el problema persiste. Sea cual sea el destino de la teoría causal, Benacerraf está en lo cierto sobre que hay algo problemático sobre el realismo en ontología en el frente epistemológico. El realista no puede tomar nota de la falta de consenso y declarar alegremente: "¿Qué, me preocupa?" ni puede hacer un simple anuncio de que va a producir una epistemología de las matemáticas, tan pronto como epistemólogos hayan terminado.
> Para agudizar la crítica del realismo en la ontología, tengamos en cuenta que la teoría causal del conocimiento es un ejemplo de un género muy extendido llamado "epistemología naturalizada", cuya tesis es que el sujeto humano es un ser natural que se encuentra en el universo físico. Cualquier facultad que el conocedor tiene y puede invocar en búsqueda del conocimiento debe incluir sólo los procesos naturales susceptibles de análisis científico ordinario. [...] No puede haber refutación del realismo en la ontología, pero hay una profundo reto para él. (Shapiro, 1997, p. 110)[64]

64 "In the present climate, then, one cannot (without further ado) that realism in ontology has been refuted simply because there is no causal contact with abstract objects. Nevertheless, the problem remains. Whatever the fate of the causal theory, Benacerraf is quite correct that there is something troublesome about ontological realism on the epistemic front. The realist cannot note the lack of consensus and cheerfully declare, "What, me worry?" nor can he make a simple announcement that he will produce an epistemology for mathematics as soon as epistemologists are finished.
To sharpen the critique of realism in ontology, note that the causal theory of knowledge is an instance of a widely held

Para poder responder al dilema de Benacerraf tenemos que apoyarnos en recursos que puedan ser avalados por la ciencia. En este sentido, aquellos que, por ejemplo, recurren a la intuición como mecanismo que justifica el conocimiento matemático, tienen que encontrar la manera de insertar a la intuición en un dominio científico que pueda explicarla y justificarla. Shapiro no opta por este camino, lo que él propondrá es una explicación que recurra a nuestras facultades intelectuales (que ya son avaladas por la ciencia) para explicar la adquisición del conocimiento matemático.

Su propuesta postula 3 mecanismo cognitivos que nos permitiría justificar la adquisición de conocimiento matemático, y en general, la adquisición de conocimiento sobre estructuras, tal como el las definió. Los tres mecanismos son:

1) Abstracción por reconocimiento de patrones.
2) Abstracción lingüística.
3) Uso de definiciones implícitas.

Cada uno de estos mecanismo tendrá una función importante en la epistemología estructuralista. El primero nos proporciona los conocimientos más básicos, pero es insuficiente para adquirir todo el conocimiento matemático. Los otros dos mecanismo nos ayudarán a completar la explicación.

2.2.2.1 Abstracción por reconocimiento de patrones.

El primer mecanismo que entra en juego en está explicación epistemológica es la abstracción basada en reconocimiento de patrones. El mecanismo consiste en percibir instancias de un estructura, para después reconocer qué es lo común a todas ellas, es decir, la cantidad de objetos involucrados y las relaciones que hay entre ellos. Este mecanismo nos ayuda a aprehender estructuras finitas y pequeñas, por ejemplo la estructura de un conjunto de 4 elementos. Sería difícil aprehender estructuras finitas grandes o infinitas usando este mecanismo, pues es difícil o imposible tener una percepción completa de una instancia de dichas estructuras. Sin embargo, no parece ser demasiado controversial que en algunos casos podemos aprehender estructuras finitas de un tamaño razonable mediante el reconocimiento de patrones en instancias de estas estructuras.

Es importante mencionar que el objetivo de Shapiro nunca es dar cuenta de manera rigurosa de este mecanismo, se limita a proponerlo y explicar su utilidad. Es decir, Shapiro sólo pretende dejar en claro que este mecanismo nos proporciona las habilidades requeridas para aprender estructuras finitas y pequeñas. Deja el estudio detallado de éste a los psicólogos y los científicos cognitivos.

genre called “naturalized epistemology”, whose thesis in that the human subject is a thoroughly natural being situated in the physical universe. Any faculty that the knower has and can invoke in pursuit of knowledge must involve only natural processes amenable to ordinary scientific scrutiny. […] There may be no refutation of realism in ontology, but there is a deep challege to it.” La traducción es mía.

El proceso de abstracción mediante reconocimiento de patrones es usualmente ejemplificado mediante la aprehensión de tipos mediante sus instancias (no sólo de estructuras, sino de universales, propiedades o formas). Un ejemplo de esto es la forma en el que aprendemos las letras. El tipo de la letra 'E' va más allá de sus instancias, cuando decimos que aprendemos la letra 'E' es cuando podemos diferenciarla de sus instancias. "No hay necesidad de adjudicar el uso apropiado de la palabra 'tipo' aquí. El lector es libre de utilizar una palabra diferente. El punto importante es que tenemos que salir de la simple dicotomía objeto/propiedad y pensar en términos de lugares en un patrón o estructura. [...] Es de suponer, que nada filosóficamente oculto o científicamente poco respetable ha sido invocado a lo largo del camino. Al final, ya sea a desmificado a los números o se ha mitificado a los objetos más mundanos." (*Ibíd*., p. 114)[65]

Al parecer no hay mucha controversia en el uso de la abstracción por reconocimiento de patrones en la epistemología, por decirlo de alguna forma, es un recurso que los naturalistas aceptaría (aunque probablemente rechazaría que podemos aprehender estructuras). Este mecanismo sirve también para explicar la adquisición de los números naturales, por lo menos de los primeros de ellos. Parece que cuando aprendemos a identificar el patrón común en todos los conjuntos de 2 objetos, lo que aprehendemos es la estructura de los conjuntos de 2 objetos. Usando este ejemplo es más fácil justificar la imposibilidad de aprehender estructuras grandes o infinitas, pues es difícil justificar que podemos percibir directamente conjuntos de por ejemplo un millón de objetos con suficiente precisión como para abstraer su estructura.

La pregunta que surge inmediatamente es cómo aprehendemos entonces las estructuras infinitas o las finitas de gran tamaño. "Por lo tanto, para cualquier persona que invoca sólo abstracción simple en la epistemología de las matemáticas, muchas de las características que hacen que el infinito sea problemático son compartidas por finitos grandes. Incluso en esta etapa, el estructuralista necesita estrategias epistémicas que no sean el reconocimiento simple de patrones." (*Ibíd*., p. 117)[66] La respuesta ofrecida por Shapiro es mediante un proceso de abstracción que es una variante de la abstracción por reconocimiento de patrones.

Esta variante de la abstracción por reconocimiento de patrones comienza con la aprehensión de

65 " There is no need to adjudicate the proper use of the word 'type' here. The reader is free to use a different word. The important point is that we must leave the simple property/object dichotomy and think in terms of *places in a pattern* or structure. […] Presumably, nothing philosophically occult or scientifically disrespectable has been invoked along the way. In the end, we either desmystify numbers or we mystify more mundane items." La traducción es mía.

66 "Thus, for anyone who invokes only simple abstraction in the epistemology of mathematics, many of the features that make the infinite problematic are shared by large finite. Even at this stage, the structuralist needs epistemic strategies other than the simple pattern recongnition." La traducción es mía.

estructuras finitas y pequeñas. Una vez hecho esto reflexionamos sobre dichas estructuras y comprendemos lo común a ellas[67], usando esta información formamos un patrón. Es algo muy similar a la abstracción simple, salvo que está se realiza sobre estructuras finitas pequeñas y ya no sobre instancias de estructuras.

> Una posibilidad relacionada es que los seres humanos tienen una facultad que se asemeja a reconocimiento de patrones, pero va más allá de simple abstracción. Las estructuras finitas pequeñas, una vez abstraídas, son vistas como desplegando un patrón por sí mismas. Por ejemplo, las estructuras de cardinales finitos se presentan en un orden natural: el patrón 1, seguido por el patrón 2, seguido por el modelo 3, y así sucesivamente. Nosotros proyectamos entonces este patrón de los patrones más allá de las estructuras obtenidas por abstracción simple. (*Ibíd*., p. 118)[68]

Esta variación de la abstracción simple nos proporciona no sólo un mecanismo para poder explicar cómo es que aprehendemos estructuras finitas grandes, sino que explica cómo aprehendemos estructuras infinitas, por lo menos algunas de ellas. Por ejemplo, una vez que hemos aprendido suficientes estructuras finitas pequeñas de números naturales, podemos empezar a aprehender estructuras finitas pero cada vez más grandes y finalmente podremos aprehender la estructura de los números naturales. Y una vez que aprehendimos la estructura de los naturales podemos, abstrayendo sobre la estructura de los naturales, aprehender la estructura de los enteros, etc. Si bien este par de mecanismo de abstracción son muy útiles, no pueden explicar la adquisición de todo el conocimiento matemático. Shapiro propone un par más de mecanismos, el primero es la abstracción lingüística y el segundo es la utilización de definiciones implícitas.

2.2.2.2 Abstracción lingüística

Este mecanismo puede verse como una variación más de la abstracción simple, aunque más complejo y poderoso. Como su nombre lo indica la abstracción lingüística es un mecanismo que opera sobre el lenguaje. Al igual que la abstracción simple se establecen patrones, pero esta vez a partir de las oraciones. (Esta es básicamente la misma estrategia que siguen Frege y los Neo-fregeanos).

Para realizar este tipo de abstracción tenemos que partir de un lenguaje base y de su ontología. Por

67 Esta propuesta de Shapiro es oscura. No es claro a que se refiere con lo común a ellas, ni en que sentido lo comprendemos. Una forma de entenderlo es pensar que una vez que hemos aprehendido las estructuras finitas pequeñas, podemos comprender que estas estructuras tienen una cantidad determinada de objetos y que estos objetos tienen un orden (o ciertas relaciones bien establecidas entre estos objetos), y que entre más objetos tenemos más relaciones. Estas relaciones se pueden complicar, pero seguramente el tipo de orden en las estructuras es muy similar. El problema es que esto no es nada claro, pues la totalidad de las estructuras posibles que se pueden generar entre un conjuntos de objtos es muy grande (y más grande entre más objetos haya). Esto es, de nuevo, un problema para el estructuralismo en el que no me concentraré.

68 "A related possibility is that humans have a faculty that resembles pattern recognition but goes beyond simple abstraction. The small finite structures, once abstracted, are seen to display a pattern themselves. For example, the finite cardinal structures come in a natural order: the 1 pattern, followed by the 2 pattern, followed by the 3 pattern , and so on. We then *project* this pattern of patterns beyond the structures obtained by simple abstraction." La traducción es mía.

ejemplo podemos usar el español. Una vez establecido el lenguaje de fondo podemos tomar un reducto bien definido del lenguaje, por ejemplo incluyendo sólo los predicado relacionados con las profesiones de la personas. En este reducto del lenguaje nos sería imposible distinguir a dos sujetos que ejerzan la misma profesión (por simplicidad supondremos que nadie ejerce dos profesiones), pues nuestro lenguaje sólo tiene predicados para profesiones. Es decir, en ese sublenguaje del español, Saúl Kripke y W.V.O. Quine serían indistinguibles, pues ambos son filósofos y esto es todo lo que podemos decir sobre ellos. Una vez que hemos hecho esto, centramos nuestra atención sobre la relación de equivalencia que genera nuestro sublenguaje sobre la ontología original. Las clases de equivalencia agruparan a todos los individuos de nuestra ontología original de acuerdo a su profesión, todos los carteros, todos los filósofos, todos los matemáticos, etc. Las clases de equivalencia ahora pueden ser tomadas como los objetos de la ontología de nuestro sublenguaje, generando así una nueva ontología.

> La idea aquí es que el lenguaje y el sublenguaje juntos caracterizan una estructura, la estructura ejemplificada por las clases de equivalencia y las relaciones entre ellos formuladas en el sublenguaje. Por tanto, es posible invocar la orientación los lugares-son-objetos, en cuyo caso los lugares en esta estructura son justamente tomados como sus objetos. (*Ibíd*., p. 123) [69]

Estas técnicas aunque poderosas no parecen ser naturales, pues los resultados de aplicarlas para tratar de explicar todo el conocimiento matemático genera estructuras que no se parecen mucho a las estructuras que estudian los matemáticos (véase, *Ibíd.* p. 129). Para evitar esta artificialidad, Shapiro propone su último mecanismo epistemológico, que como él mismo confiesa es el más especulativo y problemático.

2.2.2.3 Definiciones implícitas y corpus teórico.

Lo primero que debemos de notar antes de describir el mecanismo mismo es que existen diferentes formas en que podemos conocer un objeto. Por ejemplo, regresando al ejemplo de principios de capítulo, yo conozco que Sócrates era griego. Pero esto no lo conozco mediante una precepción directa de Sócrates sino mediante información obtenida por medio escritos y orales. Todo el conocimiento que tengo sobre Sócrates lo he obtenido mediante descripciones como: 'Sócrates era el maestro de Platón', 'Sócrates murió al ingerir cicuta', etc.[70] Si podemos aceptar que conocemos objetos mediante descripción, parece plausible extender este mecanismo para conocer una estructura. El método que se

69 "The idea here is that the language and sublanguage together characterize a structure, the structure exemplified by the equivalence classes and the relations between them formulable in the sublanguage. It is thus possible to invoke the places-are-objects orientation, in which case the places in this structure are rightly taken to be its objects." La traducción es mía.

70 En este punto no pretendo ofrecer una defensa del conocimiento por descripción ni clarificar la función de la percepción, o si es que efectivamente tenemos conocimiento por este medio.

sirve de las descripciones es el de las definiciones implícitas utiliza. Como en cada uno de los mecanismo que hemos descrito, un antirealista matemático podría sostener que en realidad este mecanismo sólo nos ayuda a comprender una instancia particular de la estructura y que tal cosa como la estructura ni siquiera existe. A esto Shapiro responde: “Eventualmente, sin embargo, un oyente debidamente preparado entenderá que es la propia estructura, y no un caso particular de la misma, la que se está describiendo. Una vez más, no tengo la pretensión de iluminar los mecanismos psicolingüísticos que subyacen a esta comprensión. Sin embargo, es claro que al menos algunos oyentes lo entienden.” (Shapiro, 1997, p.129)[71] Independientemente del resultado de esta discusión en importante resaltar un par de cosas. En primer lugar, la intención de Shapiro no es dar una explicación científica de los mecanismo involucrados en el aprendizaje mediante descripciones, pero considera que éste es posible, de no ser así su propuesta no respondería al reto de Benacerraf. En segundo lugar, lo relevante de la descripción de Shapiro no es explicarnos cómo es exactamente que se lleva a cabo el proceso, sino cómo es que dar una descripción nos ayuda a aprehender una estructura[72] y qué tipo de descripción debe realizarse para lograr esto.[73]

En primer lugar contestemos qué tipo de descripción se busca. La descripción propuesta es la que puede darse mediante una definición implícita. Este tipo de descripción no es directa, lo cual parece razonable si nos preguntamos cómo definiríamos una estructura infinita directamente. La técnica consiste, más bien, en presentar una serie de enunciados que expresen relaciones bien determinadas entre una serie de objetos, los cuales posiblemente no estén bien determinados (no definidos explícitamente). Una pregunta es en qué sentido esto puede ayudarnos a describir una estructura. La idea fundamental de la definición implícita es definir un objeto (o un conjunto de objetos) únicamente

71 “Eventually, however, a properly prepared listener will understand that it is the structure itself, and not any particular instance of it, that is being described. Again, I do not claim to illuminate the psycholinguistic mechanisms that underlie this understanding. Nevertheless, it is clear that at least some listeners get it.” La traducción es mía.

72 La realidad es que Shapiro no aclara demasiado este punto, sólo nos dice que si podemos describir con suficiente precisión una estructura podemos aprehenderla. El problema es que si respetamos la analogía que nos sirve para motivar la utilización de mecanismo descriptivos, no podemos decir que conocemos en el mismo sentido a los objetos que percibimos directamente que aquellos que conocemos sólo mediante descripciones.
A mí parecer la falta de claridad de Shapiro en este punto puede ser muy problemática debido a críticas como las ofrecidas por Kripke, véase la siguiente nota.

73 El tipo de requisitos que se impondrán a una descripción para que ésta sirva para aprehender un estructura son muy similares a los que se imponen a las descripciones para decir que nos permiten tener conocimiento de un objeto físico. Por ejemplo, para que la descripción 'Sócrates era el maestro de Platón” sea informativa, se requiere que Platón tenga efectivamente un maestro y que sólo haya tenido un maestro, esto no nos ayuda ni siquiera a fijar la referencia del término Sócrates. No es necesario que todas las descripciones que usemos determinen un único objeto que cumple con la propiedad, pero si se requiere que al final la totalidad de las descripciones nos ayuden a determinar de que objeto estamos hablando. Para críticas a este tipo de propuestas véase (Kripke, 1972) especialmente la conferencia 2. En ese texto Kripke crítica la teoría cumulo para fijar la referencia, algo similar se puede hacer para la propuesta epistemológica derivada. De nuevo, no profundizaré en estas objeciones por ir más allá del objetivo de este trabajo.

de acuerdo a sus relaciones estructurales. Veamos un ejemplo tomado de Carnap. Supongamos que queremos hablar o referirnos a una red de trenes, podemos hacerlo directamente usando nombres para las estaciones, las líneas, etc. Otra opción es usar descripciones que hagan referencia a propiedades (no-estructurales de la red) por ejemplo, la estación más bella. Una opción más (la relevante para nosotros) es hacer una descripción puramente estructural de la red, por ejemplo, en lugar de usar el nombre de una estación podemos nombrarla mediante sus relaciones de conexión con otras estaciones.

Las definiciones implícitas son un lugar común en matemáticas sobre todo desde el auge del formalismo de Hilbert. El matemático, en general, no pretende responder a preguntas como: qué es el número 2; sino a preguntas como; qué papel juega el número 2 en la estructura de los naturales (o si se quiere qué propiedades estructurales o formales tiene el número 2). Para poder responder a esa pregunta propone una serie de principios (axiomas) que le ayudan a responder a la segunda pregunta y al mismo tiempo que le indique la forma de la estructura que está analizando. Al parecer el uso de definiciones implícitas es aceptado sin mayor problema por aquellos que suscriben una metodología estructuralista (tal como se definió antes).

> En las primeras páginas de un libro de texto sobre teoría de números, se puede leer que cada número tiene un sucesor único, que el 0 no en el sucesor de ningún número, y que el principio de inducción tiene. [...] Lo único que nos dice acerca de estos objetos es que ciertas relaciones tienen entre ellos. (*Ibíd*., p. 130)[74]

La forma estándar de obtener conocimiento matemático es partir de los axiomas y aplicar métodos deductivos. Una vez que tenemos los axiomas que nos sirven como definiciones implícitas, usamos la deducción para obtener más conocimiento sobre la estructura.

Hasta aquí tenemos que la estrategia de la definición implícita consiste en caracterizar una estructura mediante una serie de oraciones que llamamos axiomas, estos axiomas deben servirnos para fijar una única estructura salvo isormorfismo, sólo entonces podemos decir que nos proporcionan un significado lo suficientemente preciso como para llamarlos postulados de significado o definiciones implícitas. Notemos que no cualquier conjunto de oraciones puede caracterizar una estructura. Por ejemplo, la oración que sostiene que un determinada operación es conmutativa y no es conmutativa al mismo tiempo (una oración que es contradictoria), no caracteriza ninguna estructura.[75] De igual forma existen conjuntos de oraciones que son satisfechas por muchas estructuras diferentes, por ejemplo, los axiomas

74 "In the opening pages of a textbook on number theory, we might read that each number has a unique sucessor, that 0 in not the sucessor of any number, and that the induction principle holds. [...] The only thing we are told about these objects is that certain relations hold among them." La traducción es mía.

75 Esto se refiere a que un conjunto de oraciones que no implican una contradicción lógica no pueden describir ninguna estructura, en tanto que no son verdaderas nunca.

de la teoría de grupos. Para poder determinar que conjuntos de oraciones que pueden caracterizar una estructura debemos imponerles a dichos conjuntos dos requisitos: que por lo menos exista una estructura que los satisfaga y que no exista más de una.

> Hay dos requisitos en una definición implícita. La primera es que por lo menos una estructura satisfaga los axiomas. Llamemos a esto la “condición de existencia." El segundo requisito es que a lo más una estructura (salvo isomorfismo) sea descrita. Esta es la "condición de unicidad." (*Ibíd*., p. 132)[76]

Es importante resaltar que en el caso de Shapiro no pueden existir dos estructuras isomorfismo, pues en tal caso y debido a su definición de estructura, serían la misma estructura. Seguramente, cuando habla de isomorfismo se refiere a los modelos que son instancias de la estructura.

Podemos ver además que ambos requisitos son consecuencia de su realismo en valor de verdad. Por un lado, si una teoría no tiene ningún modelo, entonces no podríamos decir que la teoría es verdadera, ni siquiera podríamos hablar de verdad restringida a un modelo. Por otro lado, si la teoría tiene una gran cantidad de modelos y éstos no son isomorfos, entonces no podríamos hablar de verdad de las oraciones a secas, tendríamos que restringir nuestra noción de verdad a modelos particulares.

Shapiro presenta una explicación de cómo es que podemos cumplir ambos requisitos. En cuanto a la unicidad, este requisito nos pide que nuestras teorías tengan un sólo modelo salvo isomorfismo, en términos técnicos, se pide que las teorías sean categóricas. Cabe aclarar que el requisito sólo se impone a teorías que son no-algebraicas, puesto que son estas teorías las que pretenden hablar de una estructura matemática particular. En el caso de las teorías algebraicas no se pide este tipo de requisitos.

Podemos notar que si nuestra teoría matemática está expresada en el lenguaje de la lógica de primer orden, entonces no se puede cumplir este requisito debido al teorema de Löweinhein-Skolem, pues si nuestras teorías tienen un modelo infinito (como la mayoría de la teorías matemáticas) entonces para cada cardinal infinito existe un modelo de la teoría cuyo dominio de objetos tiene tanto objetos como ese cardinal. Es por esto que para tener teorías que determinen un único modelo salvo isomorfismo, necesitamos cambiar de lenguaje lógico. Una buena opción es optar por un lenguaje de orden superior, en particular por la lógica se segundo orden.

Adoptar a la lógica de segundo orden como lenguaje de base para las teorías matemáticas parece, por lo menos en principio, una solución al problema de la unicidad. Esto se debe a que existen resultados que muestran que teorías como la aritmética de Peano, el análisis real y la geometría euclideana son teorías

76 “There are two requirements on an implicit definition. The first is that *at least* one structure satisfies the axioms. Call this the 'existence condition.' The second requirement is that *at most* one structure (up to isomorphism) is described. This is the 'uniqueness condition'.” La traducción es mía.

categóricas en sus versiones en segundo orden[77]. El reto es mostrar que todas las teorías no-algebraicas de la matemática son categóricas. En el siguiente capítulo nos concentraremos en el caso de la teoría de conjuntos, en particular en ZFC, aunque asumir este sistema no es esencial. El caso de ZFC en su versión en segundo orden es de especial importancia por dos razones, la primera es que no es una teoría categórica, por lo menos si asumimos una semántica estándar para ella, y la segunda es que es la teoría que sirve como teoría de fondo para las diferentes posturas estructuralistas que nos ocupan.

En cuanto al problema de la existencia, Shapiro apela a la noción de coherencia, que está presente en su teoría de las estructuras, específicamente en el axioma que nos garantiza que dada cualquier fórmula coherente de la lógica de segundo orden, existe una estructura que la satisface. Si aceptamos este axioma, sólo basta notar que los axiomas de una teoría matemática no-algebraica particular son coherente, para garantizar la existencia de su estructura correspondiente. Pero, como bien lo nota Shapiro, el problema es dar una caracterización adecuada de la noción de coherencia. Existen por lo menos dos formas de aclarar el concepto de coherencia. El primero es apelando a la consistencia. Esta propuesta no es suficiente, puesto que existen teorías en lógica de segundo orden que son consistentes pero no tienen modelo. Considérese la aritmética de Peano en segundo orden (PA2), debido al primer teorema de incompleción de Gödel, la oración G es independiente de dicha teoría, esto implica que PA2 + G es una teoría consistente. También sabemos que haciendo un análisis metateórico podemos saber que G es verdadera en el modelo pretendido y dado que PA2 es categórica (y su único modelo salvo isomorfismo es el modelo pretendido) PA2 + ~G no tiene modelo. Esto implica que la lógica de segundo orden no es completa. Así, si bien la consistencia puede ser una condición necesaria para la coherencia resulta claro que no es suficiente. La segunda propuesta es tomar a la coherencia como un término que no puede ser definido formalmente, pero del cual tenemos buenas intuiciones y nos puede servir como guía. En este sentido podemos decir que la coherencia es un análogo a la noción de satisfacción que no podemos definir con suficiente precisión debido a que la lógica de segundo orden es incompleta.

Esta justificación de la existencia puede no ser muy satisfactoria para todos, sin embargo, no profundizaré en ella pues la discusión sale de los límites de este trabajo. La noción relevante ahora es la de categoricidad y me concentraré en ella en el próximo capítulo. Antes de concluir esta sección me gustaría precisar que este par de requisitos (existencia y unicidad) no son requisistos particulares de la

77 La lógica de segundo orden nos puede proporcionar estos resultados, entre otras cosas, porque puede caracterizar números cardinales infinitos, es decir, que existen oraciones de la lógica de segundo orden que sólo pueden ser satisfechas en modelos de un cardinal infinito determinado. Por ejemplo, el axioma de inducción de PA2, sólo puede ser satisfecho en modelos de cardinalidad $\aleph_0$.

propuesta de Shapiro. De hecho, espero que para este punto quede claro que son requisitos que impone cualquier epistemología estructuralista que este comprometida con el realismo en valor de verdad. Un ejemplo lo proporciona de la epistemología propuesta por Michael Resnik. El propone un epistemología basada en el proceso de abstracción, que se realiza por etapas, hasta llegar al conocimiento de objetos matemáticos.

> Vamos a través de una serie de etapas durante las cuales conceptualizamos nuestra experiencia en términos sucesivamente más abstractos. En la última etapa hemos llevado a la experiencia lo suficientemente lejos detrás de que nuestras teorías son mejor construidas como teorías de entidades abstractas.(Resnik, 1982, p. 99)[78]

Al igual que Shapiro, él da una gran importancia a los axiomas de la teorías matemáticas en el proceso de aprehensión de las estructuras de las teoría no-algebraicas, incluso más que al estudio de las posibles instancias de las teorías.

> Del mismo modo, yo afirmo que sabemos mucho sobre el espacio euclidiano a pesar de su falta de una instancia física. Una teoría pura de un patrón es una teoría deductiva desarrollada o desarrollable que se basa en axiomas que pretenden caracterizar el patrón en cuestión. (*Ibíd., p. 101*)[79]

A pesar de que el proceso de adquisición propuesto por Resnik de conocimiento es diferente del propuesto por Shapiro, Resnik afirma:

> Una teoría pura puede ser falsificada mostrando que no se caracterizan ningún patrón en absoluto, es decir, que es inconsistente, y esto puede ser demostrado mostrando que no caracteriza a un patrón único, es decir, que no es categórica.
> Centremos nuestra atención en las teorías puras desde la perspectiva de que las teorías aplicadas deben seguir las líneas estándar. De acuerdo a mi sugerencia teorías sobre un patrón se justifican en la medida en que tenemos evidencia de su consistencia y categoricidad, la primera condición tienen una prioridad más alta. (*Idem.*)[80]

78 "We go through a series of stages during which we conceptualize our experience in sucessively more abstract terms. At the last stage we leave experience far enough behind that our theories are best constructed as theories of abstract entities." La traducción es mía.

79 "Similarly I claim that we know much about Euclidean space despite its failure to be instantiated physically. A pure theory of a pattern is a deductively developed or developable theory which is based upon axioms which purport to characterize the pattern in question." La traducción es mía.

80 "A pure theory can be falsified by showing that it fails to characterize any pattern at all, that is, that it is inconsistent, and it can be shown to be inadequate by showing that it does not characterize a unique pattern, that is, that it is not categorical.
Let us turn our attention to pure theories since the account for applied theories should follow standard lines. According to my sugestion theories of a pattern is justified to the degree to which we have evidence for its consistency and categoricity, with the former having a higher priority." La traducción es mía.

2.4 Conclusiones del capítulo.

Para concluir con este capítulo quiero resaltar los siguientes puntos:

1. El dilema de Benacerraf obliga a escoger entre una semántica estándar (tarskiana) o un epistemología estándar para la matemática.
2. Los estructuralista, en particular Shapiro, reconocen el dilema. Ellos optan por preservar la semántica y proporcionarnos una explicación epistemológica adecuada (que sea susceptible de una explicación científica) que justifique nuestro conocimiento sobre objetos abstractos.
3. La epistemología estructuralista opta por una vía intelectual, es decir, pretende explicar el acceso a objetos abstractos mediante procesos cognitivos sin tener que postular un nuevo tipo de percepción.
4. Los estructuralistas que defienden un realismo en valor de verdad, como Shapiro o Resnik, están comprometidos con proporcionar teorías matemáticas no-algebriacas que cumplan con los requisitos de existencia y unicidad. Estás teorías deben ser categóricas.

Capítulo 3: La cuasi-categoricidad de ZFC y el estructuralismo.

En los dos primeros capítulos he presentado temas que, en principio, parecen no estar muy conectados. En el primer capítulo presenté un panorama de las proposiciones indecidibles (o independientes) en un sistema formal dado. Me concentré en tres proposiciones: la oración G de Gödel en la aritmética de Peano, la oración que afirma que existen cardinales fuertemente inaccesibles y la hipótesis del continuo, estas últimas dos en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel + Axioma de Elección. Uno de los objetivos de está presentación era mostrar cómo es que se prueba la independencia (o indecidibilidad) de dichas oraciones en sus respectivas teorías, en particular, que la independencia de la HC se demostraba construyendo un par de modelos de ZFC tales que el primero era modelo de HC y el segundo era modelo de ~HC. En el capítulo dos, presenté una discusión filosófica sobre el realismo matemático. En primer lugar analicé el dilema de Benacerraf y la importancia de solucionar los problemas que planteaba. Después presenté una posible solución, el estructuralismo matemático (me concentré en la propuesta de Stewart Shapiro, el Estructuralismo *Ante rem*). Del análisis de dicha posición resulto que una teoría estructuralista que defiende el realismo en valor de verdad requiere, para responder al dilema de Benacerraf, mostrar que las teorías matemáticas son categóricas, por lo menos en el caso de las teorías no-algebraicas.

Este capítulo tiene como propósito establecer una relación entre los capítulos anteriores, presentar y analizar una serie de argumentos que pretenden desacreditar a la postura estructuralista. La conexión se establece debido a que el requisito de categoricidad no se cumple en el caso de la teoría de conjuntos. Este hecho, unido a la existencia de diferentes modelos para ZFC y la ausencia de un modelo pretendido para dicha teoría, ha llevado a muchos filósofos de la matemática (incluso antes de la presentación del estructuralismo) a reflexionar sobre qué es un conjunto y si es que podemos aceptar que la teoría de conjuntos es una teoría no-algebraica. Y en caso de que aceptemos que la teoría de conjuntos es una teoría no-algebraica, si el hecho de que no es categórica puede ser un golpe definitivo contra el estructuralismo matemático.

Para responder a estos cuestionamientos presentaré: 1) el teorema de cuasi-categoricidad de ZFC (Zermelo 1930), 2) la postura de los filósofos y matemáticos que ven en las pruebas de la independencia de HC de ZFC suficiente evidencia para declarar a la teoría de conjuntos un teoría algebraica, 3) la crítica a esta última postura, que se sirve del teorema de Zermelo, 4) un intento por lograr la categoricidad (por lo menos en la parte pura de la teoría de conjuntos) que se sirve de una versión modificada de la teoría de conjuntos ZFC (McGee 1997), 5) las críticas presentadas por diversos autores a esta propuesta y 6) una propuesta de solución que apela al doble papel de la teoría de conjuntos en la filosofía de las matemáticas, como marco teórico y como un teoría matemática más.

3.1 Cuasi-categoricidad de la teoría de conjuntos (Zermelo 1930).

En 1908, Ernst Zermelo presentó el primer sistema axiomático formal para la teoría de conjuntos. Dicho sistema incluía los axiomas de extensionalidad, de separación (o comprensión restricta), de conjuntos elementales (el vacío, los unitarios y los pares), de conjunto potencia, de unión, de infinito y de elección. Véase (Kanamori, 2004) especialmente p. 503 y ss. Durante un periodo de aproximadamente 20 años, Zermelo dejó de publicar por problemas personales. Durante ese periodo, el sistema fue completado con un par de axiomas propuestos por Adolf Fraenkel el axioma de fundación y el axioma de reemplazo. El sistema resultante fue conocido como Zermelo-Fraenkel + Axioma de elección[81]. Este sistema es presentado, en general, en un lenguaje de primer orden. Lo que, como vimos en el primer capítulo, lo obliga a tener dos esquemas de axioma: separación y reemplazo. En 1930, Zermelo publicó su último artículo "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre."[82] En el cual presentó su versión definitiva del sistema axiomático para la teoría de conjuntos que es, en esencial, el descrito arriba[83], pero que estaba expresado en segundo orden[84]. El cambio fundamental, respecto a ZFC en primer orden, es que los axiomas de separación y reemplazo en segundo orden dejan de ser esquemas de axioma y se convierten en axiomas con cuantificación de segundo orden. Otra característica notable es que el sistema considera la existencia de urelementos, considerados por Zermelo de gran importancia si es que la teoría de

81 Es interesante notar que el sistema original de Zermelo ya incluía el axioma de elección y en ese sentido parece redundante mencionar explícitamente este axioma al nombrar la teoría. Esto se debe a que el axioma de elección fue rechazado por una buena parte de los matemáticos de la época, especialmente por aquellos que preferían los axiomas constructivos. Finalmente, la discusión se inclino a favor de la aceptación del axioma de elección, en buena medida por la aparición de pruebas que mostraban la equivalencia entre el axioma de elección y otras proposiciones matemáticas que tenían mayor aceptación. Desde entonces se conoce al sistema estándar como ZFC (por sus siglas en inglés). Es común considerar también el sistema ZF que no incluye el axioma de elección.

82 En español el artículo tendría por título "Sobre números límite y dominios de conjuntos: una nueva investigación sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos".

83 El sistema presentado por Zermelo no incluye: el axioma de conjunto vacío, el axioma de infinito y el axioma de elección. El conjunto vacío es reemplazado por un urelemento. El axioma de infinito no es incluido, pues Zermelo pretende dar la mayor generalidad posible a sus resultados. En cuanto al axioma de elección no es incluido pues Zermelo lo considera un principio lógico, esto puede ser muy cuestionable, de cualquier forma lo usa para demostrar su teorema de cuasi-categoricidad.

84 La versión original de Zermelo ya estaba presentada en segundo orden, la aclaración se debe a que comúnmente se trabaja con ZFC en primer orden.

conjuntos ha de aplicarse, esto lo obligo ha realizar algunos cambios en la forma de los axiomas[85]. Para no confundir esta teoría con la estándar, Zermelo la llamó ZF', yo la llamaré ZFCU2 para remarcar que es una teoría en segundo orden y cuenta con urelementos.[86] Con esta teoría como fondo Zermelo logró caracterizar a los modelos de la teoría de conjuntos, él los llama dominios normales.

> [Este trabajo] presenta una demostración de que un "dominio normal" de este tipo se determina salvo isomorfismo por dos números, por el cardinal de su «base», es decir, la cardinalidad de la totalidad de "urelementos" del dominio (que no son propiamente conjuntos), y por su 'característica', el tipo ordinal de todas las "secuencias básicas" que figura en él, o bien, de todos los números ordinales que pueden ser representados en ella por conjuntos. (Zermelo, 1996, p. 1219)[87]

Una vez dicho esto, Zermelo procedió a caracterizar los conceptos involucrados en esta afirmación y demostrarla. A continuación presentaré un esbozo de la prueba de Zermelo, para seguirlo puede ser de ayuda considerar 1) que la característica de un modelo debe ser un cardinal fuertemente inaccesible (y, en la versión original debido a que no incluye es el axioma de infinito en su sistema, también puede ser ω) y 2) que las secuencias básicas no son otra cosa que representantes de los ordinales de von Neumann que se construyen a partir de un urelemento, en lugar de a partir del vacío.

Es claro que Zermelo era consciente de que su resultado mostraba la no-categoricidad de la teoría de conjuntos. Esto no era un problema para él, lo que es más, él creía que su resultado serviría para clarificar la noción de conjunto, como un concepto abierto que permitía un desarrollo potencialmente infinito de la teoría, además de clarificar algunas de las antinomias que se presentaban como objeciones a la teoría de conjuntos (por ejemplo, la paradoja de Burali-Forti).

> La diferenciación clara entre estos modelos del (no-categórico) sistema axiomático produce una aclaración satisfactoria de las 'antinomias ultrafinitas', porque siempre es el caso de que los "no-conjuntos" de un modelo aparecer como "conjuntos", tanto en el siguiente modelo como en todos los subsiguientes. (*Idem.*)[88]

La primera parte de la prueba consiste en dar una caracterización más precisa de secuencia básica y sus propiedades. Una secuencia básica es un conjunto transitivo bien ordenado por la relación de pertenencia construido a partir de un urelemento. En términos formales:

---

85 Por ejemplo, en el axioma de conjunto potencia se reemplaza el conjunto vacío por un urelemento arbitrario.

86 La llamo ZFCU2 y no ZF'U2, pues si bien no incluye el axioma de elección si lo utiliza, además la eliminación del axioma de infinito sólo es para lograr mayor generalidad y en la comparación que haré más adelante con otros resultados el axioma de infinito será incluido.

87 "[This paper] presents a demostration that a 'normal domain' of this kind is determined up to isomorphic mappings by two numbers, by the power of its 'basis', that is, by the cardinality of the totality of the domain's 'urelements' (which are not proper sets), and by its 'characteritic', the ordinal type of all the 'basic sequences' contained in it or, alternatively, of all ordinal numbers which can be represented in it by sets." La traducción es mía.

88 "The sharp differentiation between these models of the (non-categorical!) axiom system yields a satisfactory clarification of the 'ultrafinite antinomies', for it is always the case that the 'non-sets' of one model appear as 'sets' both in the the next model and in all subsequent ones." La traducción es mía.

Def. Sea un urelemento u,

$g_0 = u$

$g_{\alpha+1} = g_\alpha \cup \{g_\alpha\}$ para todo ordinal α.

$g_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\, g_\beta$ cuando α es ordinal límite.

Decimos que x es un secuencia básica sii existe un urlemento u tal que x = g_α para algún ordinal α.

Como puede verse con relativa facilidad las secuencias básicas son isomorfas a los ordinales de von Neumann, por ello deben tener propiedades formales muy similares. Por ejemplo, que dado α un ordinal, si $\beta \in \alpha$ entonces β es ordinal, en términos de secuencias básicas tendríamos que dada g una secuencia básica, si $g' \in g$, entonces g' es una secuencia básica. Para ver más propiedades de los ordinales véase (Hrbacek & Jech, 1999) especialmente el cap. 6.

El primer resultado que se demuestra especialmente para secuencias básicas es el siguiente[89]:

Teorema: Si u es un urelemento en un dominio normal[90] y r es un conjunto bien ordenado cuyo tipo ordinal es α y r pertenece al dominio normal, entonces existe en el dominio normal una secuencia básica g_α que es isomorfa a r y cuyo elemento inicial es u.

Después de demostrar este y otros teoremas, Zermelo demuestró que dado un dominio normal, existe un ordinal que no está representado en el dominio pero que es la mínima cota superior de todos los ordinales representados en el dominio normal. Este ordinal es la característica del dominio normal.

También demostró que la característica de un dominio normal tiene dos propiedades: 1) es un ordinal límite regular inicial, es decir es un cardinal inaccesible y 2) es un punto fijo para un función ψ definida por Zermelo[91]. Lo relevante es que dadas las dos condiciones tenemos que la característica de un dominio normal debe ser un cardinal fuertemente inaccesible.

El hecho de que la característica de un dominio normal debe ser un cardinal fuertemente inaccesible se debe a que si una estructura modelo-teórica es modelo del axioma de reemplazo (además de los otros axiomas usuales) está debe tener un dominio cuyo cardinal sea inaccesible, el axioma de potencia requiere que el dominio sea fuerte y si además aceptamos el axioma de infinito, este cardinal tiene que

89 No presentaré las demostraciones de los teoremas que enunciaré a continuación pues no es el objetivo de este trabajo hacer una reconstrucción formal de éstos, sino presentar sus implicaciones filosóficas en la discusión sobre el estructuralismo matemático. La demostración detallada se incluye en el apéndice de este trabajo.

90 Por dominio normal entenderemos un modelo(-clase) con conjuntos y urelementos de la teoría ZFCU2, tal como lo presentó Zermelo.

91 Para ver los detalles véase (Zermelo, 1996) p. 1222 y ss. Para aquellos familiarizados con ZFC, la función Ψ propuesta por Zermelo es muy parecida a la función $\beth$ usada normalmente para relacionar el índice de un nivel de la jerarquía acumulativa y su cardinal. También es interesante recordar que la función $\beth$ es la que se utiliza normalmente para mostrar que existen cardinales fuertes mayores que ω, por ejemplo, $\beth_\omega$.

ser mayor que ω. Uniendo todos estos requisitos tenemos que la característica debe ser un cardinal fuertemente inaccesible. Es en este punto que la independencia de la proposición que afirma la existencia de estos cardinales respecto a ZFC cobrá mayor relevancia. Pues, dada la independencia de esta proposición no tenemos la certeza de la existencia de dichos cardinales. Si dichos cardinales existen entonces existen modelos de ZFCU2, pero en caso contrario no hay modelo alguno para esta teoría. Retomaré este punto un poco más adelante.

Una vez que Zermelo demostró estas propiedades de la característica de un dominio normal, ofreció una serie de teoremas que nos explican cómo esta constituido un dominio normal. Lo más importante de su presentación es que demuestró que dado un dominio normal cualquiera, éste se puede bien ordenar en estratos bien definidos. Para ello demuestra, en primer lugar, que dado un dominio normal cualquiera M y un subdominio N de M, si para todo $x \in N$ sucede que todos los elementos de x también son elementos de N y si para todo $x \in M$ sucede que si todos sus elementos están N, entonces también x está en N, entonces tenemos la certeza de que N es un dominio normal. Es decir, nos da condiciones necesarias y suficientes para saber si un subdominio de un dominio normal es el mismo un dominio normal.

Usando estos resultados establece sus tres teoremas de desarrollo:

> ***Primer teorema de desarrollo.*** *Todo dominio normal P con característica π puede ser dividido en una secuencia bien ordenada de "niveles"* Q_α *no-vacíos y disjuntos dos a dos de tipo π, de tal forma que cada nivel* Q_α *incluye todos los elementos de P que no aparecer en una nivel anterior y cuyos elementos pertenecen al 'segmento' asociado* P_α*, es decir, a la suma de los niveles anteriores. El primer nivel* Q_0 *incluye todos los urelementos. (Zermelo, 1996, p. 1225)*[92]

> ***Segundo teorema de desarrollo.*** *En el desarrollo de un dominio unitario, todos los segmentos* P_α *tiene el cardinal de* $\Psi(\alpha)$*.*[93] P_α *sólo contiene conjuntos de menor número cardinal, mientras que el correspondiente nivel de* Q_α *ya contiene conjuntos de este cardinal. Cada segmento del primer tipo*[94] $P_{\beta+1}$ *contiene como conjuntos todos los sub-dominios del nivel inmediatamente anterior* P_β*, y cada segmento de la segunda clase contiene todos los segmentos anteriores y sus sub-dominios. El dominio unidad por sí mismo tiene la cardinalidad de su caracterñisticaπ, y contiene como conjuntos a todos sus sub-dominios de menor cardinal. (Ibíd, p. 1226)*[95]

---

92 "***First development theorem.*** *Every normal domain P with characteristic π can be divided into a well-ordered sequence of non-empty and pairwise disjoint 'layers'* Q_α *of type π, in such a way that each layer* Q_α *includes all the elements of P which do not appear in a earlier layer and whose elements belong to the associated 'segment'* P_α*, i.e. to the sum of the preceding layers. The first layer* Q_0 *includes all the urelements."* La traducción es mía.

93 $\Psi(\alpha)$ es el cardinal de $\wp\wp\wp\ldots\wp(\varnothing)$ α veces, es decir, que el cardinal del conjunto que resulta de aplicar la operación potencia α veces al conjunto vacío.

94 Cuando Zermelo habla de los ordinales del primer tipo se refiere a ordinales sucesor; cuando habla de ordinales del segundo tipo, a ordinales límite.

95 "***Second development theorem.*** *In the development of a unit domain, every segment* P_α *has the power of* $\Psi(\alpha)$*.* P_α *contains only sets of smaller cardinal number, while the corresponding layer* Q_α *alredy contains sets of this power. Every segment of the first kind* $P_{\beta+1}$ *contains as sets all sub-domains of the immediately preceding* P_β*, and every segment of the second kind contains all preceding segments and their sub-domains. The unit domain itse has the power of its*

__Tercer teorema de desarrollo. (Teorema de desarrollo "canónico".)__ Cada dominio normal con base Q puede ser dividido en una secuencia bien ordenada de niveles Q_α,disyuntos dos a dos, comenzando con Q, de manera que cada Q_α tiene la suma de los niveles anteriores como un "segmento", y de tal manera que cada Q_α contiene como conjuntos a todos los sub-dominios de la segmento asociado P_α que no se encuentran en ese segmento y que no tienen un cardinal mayor que $\Psi(\alpha)$. Esta última restricción no es indispensables en el caso de los "dominios unitarios", donde el desarrollo "libre" y "canónico" coinciden. Con el desarrollo "canónico" todos los segmentos P_τ, cuyo índice τ, el "número límite" satisface las condiciones previstas (I) y (II), es en sí mismo un dominio normal. (Ibíd, 1227)[96]

Estos teoremas nos permiten garantizar que dado cualquier modelo de la teoría ZFCU2 éste puede bien ordenarse en niveles bien definidos y disjuntos dos a dos, sin importar el número de urelementos que estén contenidos en su base. Es importante resaltar que si se trata de un dominio unitario es suficiente contar con los dos primeros teoremas. El teorema de desarrollo canónico es necesario sólo en los casos donde la base tiene dos o más elementos. En estos casos si tenemos dos modelos de ZFCU2 cuyas bases no son equivalentes (que no son biyectables), dados Q_α y Q'_α, los niveles con el mismo indice en sus respectivos modelos, tendrían diferente cardinalidad y uno de ellos tendría conjuntos de forma muy diferente al del otro, para todo α menor que el primer cardinal fuerte mayor o igual a los cardinales de ambas bases, hablaré más sobre esto en la siguiente sección. Como consecuencia de esto tenemos que sin el teorema de desarrollo canónico perderíamos los resultados de isomorfismo que presentaremos a continuación.

Este hecho pierde un poco de relevancia si consideramos que en la presentación contemporánea de la teoría de conjuntos no se contempla la existencia de urelementos, dado esto, los modelos de esta teoría pueden ser vistos como unitarios, pues se construyen a partir únicamente del conjunto vacío. Esto quiere decir que los modelos de la teoría de conjuntos ZFC2 (sin urelementos) pueden dividirse en niveles tales que se comportan como se describe en los dos primeros teoremas de desarrollo. Algo que puede verse con relativa facilidad es que de acuerdo a los teoremas de desarrollo los modelos de ZFC2 sería segmentos iniciales de la jerarquía acumulativa, pues cada segmento inicial de la jerarquía acumulativa hasta un nivel indexado por un cardinal fuertemente inaccesible cumple los requerimientos de los teoremas de desarrollo y es un modelo de ZFC2. Lo que nos lleva a los teoremas de isomorfismo, que nos permitirán comprender en que sentido la teoría de conjuntos ZFCU2 (o ZFC2) es

---

characteristic π, and contains as sets all its sub-domains of smaller power." La traducción es mía.

96 "*__Third development theorem. (Theorem of "canonical" development.)__ Every normal domain with basis Q can be divided into a well-ordered sequence of separeted 'layers' Q_α, beginning with Q, such that again each Q_α has the sum of the preceding layers as a 'segment', and such that each Q_α contains as sets all those sub-domains of the associeted segment P_α which are not themselves in that segment and which do not have a power greater that $\Psi(\alpha)$. This last restriction in not needed in the case of 'unit domains', where 'free' and 'canonical' development coincide. With a 'canonical' development , every segment P_τ, whose index τ satisfies the 'boundary number' conditions (I) and (II), is itself a normal domain."* La traducción es mía.

cuasi-categórica.

> ***Primer teorema de isomorfismo.*** *Dos dominios normales con la misma característica y bases equivanlentes son isomorfos, y de hecho el mapeo isomorfo de los dominios uno en el otro es determinado de manera única por el mapeo de sus bases. (Ibíd, p. 1228 a 1229)*[97]
>
> ***Segundo teorema de isomorfismo.*** *Dados dos dominios normales con bases equivalentes y diferentes números límite* π *y* π' *siempre es el caso de que uno es isomorfo a un segmento canónica del otro. (Ibíd, p. 1229)*[98]
>
> ***Tercer teorema de isomorfismo.*** *Dados dos dominios normales con la misma característica, uno es siempre isomorfo a un sub-dominio (propio o impropio) del otro. (ídem)*[99]
>
> ***Teorema de automorfismo.*** *Los automorfismos, es decir, los mapeos isomorfos de un dominio normal en sí mismo, corresponden uno a uno con los mapeos biyectivos de la base en sí misma. De ello se deduce que automorfismos sólo son posibles cuando el número base* $\rho > 1$. *Todos los dominios unitarios son "monomórficos". El grupo de los automorfismos es isomorfo al grupo de permutaciones de la base. Además, los "meromorfismos", es decir, los mapeos isomorfos del dominio normal en una parte de sí mismo, corresponden a a los mapeos biyectivos de la base (infinita) a una de sus partes equivalentes. (Ibíd, p. 1230)*[100]

Lo que haré a continuación es presentar tres clarificaciones de estos resultados. La primera se referirá a cómo es que podemos comparar los modelos de ZFCU2. La segunda a cómo se pueden interpretar estos resultados en la teoría de conjuntos en su presentación sin urelementos, ZFC2. La tercera a cómo es que estos resultados pueden afectar al estructuralismo matemático.

3.1.1 Teoremas de isomorfismo y modelos de ZFCU2

Comencemos por clarificar cómo son los modelos de ZFCU2. De acuerdo al primer teorema de desarrollo, dado un modelo P de ZFCU2 (un dominio normal en la terminología de Zermelo) con característica π y base Q, se puede generar una partición de P que sea una jerarquía. Para ver esto primero debemos definir los dominios parciales de P (que generan una jerarquía acumulativa).

$P_1 = Q$

97 "***First isomorphism theorem.*** *Two normal domains with the same characteristic and equivanlent bases are isomorphic, and indeed the isomorphic mapping of the domains on to one another is* uniquely *determined by the mapping of their bases."* La traducción es mía.

98 "***Second isomorphism theorem.*** *Given two normal domains with equivalent bases and different boundary numbers* π *and* π'*, it is always the case that one is isomorphic to a canonical segment of the other."* La traducción es mía.

99 "***Third isomorphism theorem.*** *Given two normal domains with the same characteristic, one is always isomorphic to a (proper or improper) sub-domain of the other."* La traducción es mía.

100 "***Automorphism theorem.*** *Automorphisms, i.e. isomorphic mappings of a normal domain on to itself, correspond in a one-one way equivalent mapping of the basis on to itself. It follows that automorphisms are only possible when the basis number* $\rho > 1$. *All unit domains are "monomorphic". The group of all automorphisms is isomorphic to the permutations group of the basis. In addition, "meromorphism", i.e. isomorphic mappings of the normal domain on to a part of itself , corresponding to the one-one mappings of the (infinite) basis on to equivalent parts.*" La traducción es mía.

$P_{\alpha+1} = Q \cup \{x \in P | \forall y(y \in x \equiv y \in P_\alpha\}$, para α ordinal menor que π[101],[102].

$P_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} P_\beta$, para α ordinal límite menor o igual que π.

Se puede ver que $P_\pi = P$

Usando los dominios parciales podemos definir nuestra partición como sigue:

$Q_0 = P_1$,

$Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ para todo α ordinal tal que $0 < \alpha < \pi$.

Cada nivel Q_α, con α mayor a 0, tiene como elementos a todos los conjuntos que pueden ser construidos a partir de elementos de P_α y que no pueden ser construidos en P_α mismo[103]. Además, se puede ver que, $P = \cup_{\alpha<\pi} Q_\alpha$.

Ahora es fácil observar que si dos modelos de ZFCU2 tiene la misma característica y sus bases son equivalentes, podemos establecer una relación de isomorfismo entre ellos, utilizando una biyección f entre sus bases. Esto es justo lo que hace el primer teorema de isomorfismo. Este isomorfismo depende de que para todos los niveles Q_α y Q'_α, ambos tienen la misma cardinalidad y fueron construidos de la misma manera, es decir, los conjuntos de cada uno de estos niveles tienen la misma forma (la misma estructura dada por la $\in$). Esto nos permite comparar dos modelos que tienen la misma característica y bases equivalentes, el resultado usando la jerga estructuralista es que ambos son instancias de la misma estructura.

Comparemos ahora dos modelos de ZFCU2, P y P', con bases equivalentes, Q y Q', y con características diferentes, π y π'. Sin perdida de generalidad podemos considerar $\pi < \pi'$. En este caso tenemos dos opciones: (1) cuando $|Q| < \pi$ y (2) cuando $\pi \leq |Q|$. En el caso (1) podemos decir que que P es isomorfo a P'_π, pues en ambos se construyen conjuntos con la misma forma. Puede verse fácilmente

101 Es importante restringir los conjuntos que aparecen en las secuencias indexadas por un ordinal sucesor, pues el cardinal de la base puede se mucho mayor a la característica del modelo y, en este caso, si aceptamos que el modelo puede tener como elemento al conjunto de todos los urelementos tendríamos una inconsistencia. Esto se debe a que si tenemos un dominio normal tal que el cardinal de su base, $|Q|$, es igual o mayor que su característica, π, y aceptamos que el modelo contiene al conjunto de todos sus urelementos, este dominio tendrá a su vez como elemento a una secuencia básica g_π, generando una contradicción. Para dejar en claro esto veamos que si tenemos tal conjunto, por el axioma de separación tendríamos un conjunto de urelementos de cardinal π. Por el axioma de elección, podemos bien ordenar a tal conjunto. Además para todo para todo ordinal $\alpha < \pi$ y para un urelemento u, tenemos que existen la secuencia básica g_α generadas a partir de u. Y por el axioma de reemplazo tenemos que existe un conjunto $g = \{g\alpha \mid \alpha < \pi\}$, pero $g = g_\pi$, contradicción.

102 Es importante notar que en el nivel P_2 están todos los conjuntos de urelementos con cardinalidad menor que la característica del modelo. Los detalles quedarán más claros un poco más adelante.

103 Se puede ver un paralelismo muy claro entre los P_α y los niveles de la jerarquía acumulativa de conjuntos. Además la partición generada, es decir, los Q_α es una noción muy parecida a la de rango de un conjunto. Recordemos que el rango de un conjunto x es el mínimo nivel de la jerarquía acumulativa en donde x aparece como subconjunto, usando la noción de rango podemos definir una partición en la jerarquía acumulativa completamente análoga a la dada por Zermelo para dominio normales. Esto será aún más claro cuando analicemos, un poco más adelante, los dominios unitarios.

que para todo nivel hasta π, incluyéndolo, son estructuralmente equivalentes. En el caso (2) las cosas pueden ser un poco más problemáticas, pues el segmento P'_π contendrá conjuntos que no tienen la forma de ningún conjunto presente en P, en particular, un conjunto con cardinalidad π. Esto implica que de hecho P'_π no es un dominio normal. Es en este punto cuando entra en juego el teorema de desarrollo canónico. El teorema de desarrollo canónico nos permite construir una jerarquía un poco diferente.

Primero la definición de dominio parciales canónicos:

$P^*_1 = Q$

$P^*_{\alpha+1} = Q \cup \{x \in P \mid \forall y(y \in x \equiv y \in P^*_\alpha) \wedge |x| \leq \Psi(\alpha)\}$[104], para α ordinal menor que π.

$P^*_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} P^*_\beta$, para α ordinal límite menor o igual que π.

Usando los dominios parciales canónicos podemos definir nuestra partición canónica como sigue:

$Q^*_0 = P^*_1$,

$Q^*_\alpha = P^*_{\alpha+1} - P^*_\alpha$ para todo α ordinal tal que $0 < \alpha < \pi$.

Cada nivel Q^*_α, con α mayor a 0, tiene como elementos a todos los conjuntos con cardinal menor a $\Psi(\alpha)$ del dominio normal P que pueden ser construidos a partir de elementos de P^*_α y que no pueden ser construidos en P^*_α mismo.

Este desarrollo canónico nos garantiza que P'^*_π es un dominio normal y por ello es isomorfo a P.[105] lo que nos permite comparar a dos dominio normales que tengan bases equivalentes, el dominio normal con característica menor isomorfo a un segmento canónico (con tipo ordinal igual al del modelo más pequeño) del dominio normal con característica mayor. Como veremos un poco después, (respecto a los modelos sin urelementos) en el caso de dominios unitarios, es decir, construidos a partir de un sólo elemento, el desarrollo canónico es el desarrollo normal. Así que en estos casos no será necesario apelar al teorema de desarrollo canónico.

104Recordemos que $\Psi(\alpha)$ es el cardinal de $\wp\wp\wp\ldots\wp(\emptyset)$ α veces.

105Esto se debe a que si tenemos un dominio normal tal que el cardinal de su base, |Q| es igual o mayor que su característica π, este dominio no tendrá como miembros a todos los conjuntos que pueden ser construidos a partir de sus urelementos, en particular no tendrá como elemento al conjunto de todos sus urelementos. Para dejar esto en claro veamos que si tenemos tal conjunto, por el axioma de separación tendríamos un conjunto de urelementos de cardinal π, además para todo para todo ordinal $\alpha < \pi$ y para un urelemento u, tenemos que existen la secuencia básica g_α generadas a partir de u. Y por axioma de reemplazo tenemos que existe un conjunto $g = \{g\alpha \mid \alpha < \pi\}$, pero $g = g_\pi$, contradicción.
Esto quiere decir que para dos modelos de ZFCU2, P y P', con bases equivalentes, Q y Q', pero diferentes características, π y π', con $\pi < \pi'$, no siempre se cumple que P es isomorfo a P'_π. Veamos los detalles. Supongamos que $|Q| \geq \pi$, entonces como acabamos de ver P no contiene todos los conjuntos que se pueden construir a partir de Q, sólo contiene a aquello cuyo cardinal es menor que π. Pero, P'_π tiene todos los conjuntos que se pueden construir a partir de Q' de cardinal menor que π' y como $\pi < \pi'$, tenemos que P y P'_π no son isomorfos, pues $P'\pi$ contiene un conjunto con cardinal π y P no. El desarrollo canónico impide que en P'^*_π aparezcan conjuntos con cardinales iguales o mayores a π, solucionando el problema. A la luz de esto podemos ver que la función del teorema de desarrollo canónico es la de limitar el tipo de conjuntos que hay en cada nivel.

Pero, qué pasa cuando tenemos modelos de ZFCU2 que no tienen la misma base, pero si la misma característica. Consideremos ahora dos modelos de ZFCU2, P y P', con bases no equivalentes Q y Q', y cuya característica π es la misma. Supongamos sin perdida de generalidad que $|Q| < |Q'|$. Puede verse que para cualquier conjunto de P, existe uno con la misma forma en P', de hecho se puede dar una función inyectiva que mande a cada conjunto de P en uno de P' con la misma forma. Esto nos garantiza que P es isomorfo a un $P_1 \subseteq P'$, tal que P_1 es el mismo un dominio normal.[106] Es por decirlo de otro modo, comparar el modelo más delgado con un rebanada del otro modelo. En términos estructuralista la estructura del modelo con base más pequeña es una sub-estructura del modelo con base mayor.

Finalmente consideremos el caso de dos dominios normales de ZFCU2 con bases no equivalentes y características diferentes. Sean dos dominios normales de ZFCU2, P y P', con bases no equivalentes Q y Q', y con características diferentes, π y π'. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\pi < \pi'$. Ahora debemos considerar dos casos: (1) cuando $|Q| < |Q'|$ y (2) cuando $|Q'| < |Q|$. Caso (1): consideremos ahora un tercer dominio normal P'' con base Q' y característica π, por el segundo teorema de isomorfismo, este es isomorfo a un segmento canónico de P'. Además por el tercer teorema de isomorfismo tenemos que P es isomorfo a un subdominio de P''. Lo que nos permite decir que P es isomorfo a un subdominio de un segmento canónico de P', que a su vez es un subdominio de P'. Caso (2): consideremos un tercer modelo P'' con base Q' y característica π. Por el segundo teorema de isomorfismo tenemos que P'' es isomorfo a un segmento canónico de P' y por el tercer teorema de isomorfismo tenemos que P'' es isomorfo a un subdominio de P. Así, tenemos que existe un subdominio de P y un subdomnio de P' que son isomorfos.

Ahora, podemos enunciar:

Teorema de cuasi-categoricidad para ZFCU2: Para cualesquiera dos dominio normales de ZFCU2, P y P', existen sub-dominios (propios o impropios) de cada uno de ello, P_x y P'_x, tales que P_x es isomorfo a P'_x.

La moraleja que pretendo extraer de este análisis es que dados dos dominio normales de ZFC2, existe una manera de compararlos mediante la relación de isomorfismo, siempre tienen algo en común. Que tanto se asemejen dos modelos puede variar mucho. Sin embargo, existe un modelo que mínimo M tal que para cualquier otro modelo P, M siempre es isomorfo a una subdomino de P. Este modelo mínimo es el modelo cuya base tiene un sólo elemento (la más pequeña posible) y cuya característica es el

106En este caso no tenemos que apelar al desarrollo canónico, pues ambos son dominios normales que además tienen la misma característica y en este sentido contienen el mismo tipo de conjuntos, debido a que la restricción al tamaño de los conjuntos es exactamente la misma, está dada por el tipo ordinal (la característica).

primer cardinal fuertemente inaccesible (el más pequeño posible).

3.1.2 Teoremas de Isomorfismo y modelos de ZFC2

Los teoremas de isomorfismo de Zermelo tienen una interpretación en ZFC2 muy parecida a la de ZFCU2, la diferencia principal es que todos los modelos de ZFC2 se construyen a partir del conjunto vacío, en lugar de a partir de urelementos. En este sentido se comportan como los dominios unitarios. Esto quiere decir que basta para dar cuenta de ellos con los dos primeros teoremas de isomorfismo y los dos primeros teoremas de desarrollo.

Una nota importante es que la característica de un modelo de ZFC2 tiene que ser de nueva cuenta un cardinal fuertemente inaccesible, las razones son las mismas que las expuestas con anterioridad.

Al eliminar a las bases como un factor relevante tenemos una nueva enunciación de los teoremas de isomorfismo y de desarrollo. En analogía a la noción de dominio normal (que incluye urelementos), nosotros usaremos la noción tradicional de modelo.

Primer teorema de desarrollo: Todo modelo P de ZFC2, con característica π, puede ser dividido en niveles Q_α no vacíos y disyuntos 2 a 2, con α ordinal menor que π, tal que Q_α contiene a todos los conjuntos de rango α[107]. $Q_0 = \varnothing$.

Segundo teorema de desarrollo: Dado P un modelo de ZFC2, cada segmento P_α tendrá cardinalidad igual a $\Psi(\alpha)$ y todos sus elementos tendrán cardinalidad menor a $\Psi(\alpha)$, lo que quiere decir que Q_α tendrá elementos cuya cardinalidad será a lo más $|Q_\alpha|$. Para todo α ordinal, $\wp(P_\alpha) = P_{\alpha+1}$. Y para todo ordinal límite α y para todo ordinal β, $\beta < \alpha$, $\wp(P_\beta) \subseteq P_\alpha$ y $P_\beta \in P_\alpha$. Además, P tiene como elementos a todos sus subconjuntos de cardinalidad menor que su característica.

Primer teorema de isomorfismo para ZFC2: Dados dos modelos de ZFC2 con la misma característica, son isomorfos.

Segundo teorema de isomorfismo para ZFC2: Dados dos modelos de ZFC2 con diferente característica, uno es isomorfo un segmento inicial del otro.

Dado los dos teoremas anteriores podemos enunciar:

Teorema de cuasi-categoricidad para ZFC2: Dados dos modelos de ZFC2, P y P', sucede (1) P es isomorfo a P' o (2) P es isomorfo a un segmento inicial de P', o viceversa.

107El rango de un conjunto x es el índice del primer nivel de la jerarquía acumulativa de conjuntos tal que x es subconjunto de ese nivel. Formalmente tenemos:

Def.: El rango de un conjunto x “se denota $\rho(x)$ y se define como

$$\rho(x) = \cap\{\alpha \in OR \mid x \in BF_{\alpha+1}\}.$$

Es decir, $\rho(x)$ es el mínimo ordinal α tal que $\alpha \subseteq BF_{\alpha+1}$.” (Amor Montaño, Campero Arena, & Miranda Perea, 2011) p. 90.

Lo que tenemos como resultado es una forma muy práctica de comparar modelos, pues dados dos modelos de ZFC2, o son isomorfos o uno es isomorfo a un segmento inicial del otro. Otro punto relevante es que de nueva cuenta existe un modelo mínimo, aquel cuya característica es el primer cardinal fuertemente inaccesible. Y lo más sorprendente es que los modelos de mínimos de ZFCU2 y los de ZFC2 son isomorfos.

Una consecuencia interesante del análisis de los resultados es que si podemos incluir en la teoría axiomas que nos permitan fijar el tamaño de la característica y de la base, en el caso de ZFCU2, o simplemente de la característica, en el caso de ZFC2, tendríamos los resultados de categoricidad deseados.

3.1.3 Consecuencias para el estructuralismo

Como ya es obvio la teoría de conjuntos ZFC no es categórica. Pues, por un lado, si consideramos modelos sin urelementos lo que tenemos es una sucesión de modelos cuyos tipos ordinales tienen que ser cardinales fuertemente inaccesibles y que cada uno de ellos está contenido isomorficamente en todo los modelos de mayor tamaño, pero no tenemos un único modelo salvo isomorfismo. Por otro lado, si consideramos los modelos que tienen urelementos estos se pueden comparar (de una forma mucho más complicada), pero de nuevo no tenemos un único modelo salvo isomorfismo.

Así que no tenemos una teoría categórica para la teoría de conjuntos, en el mejor de los casos tenemos cuasi-categoricidad. Esto nos impide cumplir con los requisitos impuestos por la epistemología estructuralista para aprehender un teoría no-algebraica: es decir, que la teoría sea 1) recursivamente axiomatizable, 2) que sea satisfacible (es decir, que tenga por lo menos un modelo) y 3) que sea categórica (es decir, que todos sus modelos sean isomorfos). En particular falla el requisito de categoricidad.[108]

El problema se agrava considerablemente si hacemos notar que la teoría de conjuntos o una de sus variantes notacionales (la teoría de estructuras o la teoría de clases) es en las que se reconstruyen la estructuras matemáticas que según el estructuralista son el objeto de estudio de la matemática. El problema es que si no tenemos un modelo pretendido bien establecido de la teoría de conjuntos y no tenemos una teoría de conjuntos categórica, entonces en cada uno de los modelos de la teoría de

108De hecho, como ya se dijo antes, si no existen los cardinales fuertemente inaccesibles, entonces no existen modelos de la teoría ZFC2, con lo que también fallaría el requisito de satisfacción. Esto en realidad no es un problema mayúsculo, pues la mayoría de los matemáticos actualmente acepta la existencia de dicho cardinales. También existen razón filosóficas para defender su existencia. Véase (Álvarez, 1994), (Maddy, 1988b) y (Maddy, 1988a).Otra forma de solución el problema es sostener que la teoría de conjuntos tiene modelos-clase, en donde los modelos cumplen que sus dominios son clases que cumplen los requisitos que definen a los cardinales fuertemente inaccesibles, excepto que son muy grandes para ser conjuntos.

conjuntos se pueden reconstruir las estructuras de todas las otras teorías categóricas, pero no tenemos garantía de que las diferentes reconstrucciones (en los diferentes modelos de la teoría de conjuntos) sean las mismas, así que si perdemos a la posibilidad de rescatar a la estructura de la teoría de conjuntos, también perdemos a las estructuras de las otras teorías no algebraicas. El problema de la no-categoricidad de la teoría de conjuntos es doble, por un lado afecta a la epistemología estructuralista, por otro lado, afecta también a la ontología porque perdemos la posibilidad de dar una única caracterización de las estructuras de las teorías no algebraicas.

Ante este panorama un estructuralista tiene por lo menos las siguientes 4 opciones para solucionar el problema:

1) Defender que la TC es una teoría algebraica. Es decir, sostener que la teoría de conjuntos no pretende hablar de un dominio o un estructura única, sino que pretende describir muchas estructuras, cada una de ellas sería un universo de conjuntos. De está forma el requisito de categoricidad ya no tiene porque cumplirse pues sólo se aplica a teorías no-algebraicas. Este es el camino que toman pensadores como Mostowski y Kalmar.[109],[110]
2) Tratar de modificar la teoría para obtener categoricidad. Es decir, aumentar axiomas que permitan obtener una teoría de conjuntos categórica, esto se lograría si podemos fijar el cardinal de la base y la característica de los modelos. Esta estrategia es la que siguen McGee y Uzquiano, quienes aumentan a ZFC el axioma de urelementos y dan un semántica con cuantificación irrestricta a los cuantificadores de primer orden. Ellos obtienen algo parecido a un teorema de categoricidad para esta nueva teoría.
3) Abandonar el estructuralismo. Una opción más es rechazar el estructuralismo con base en este problema y adoptar otra teoría filosófica para las matemáticas, algo que sugieren filósofos como Rayo y Uzquiano.
4) Defender que dentro del marco estructuralista TC juega un doble papel, como teoría matemática de fondo en el análisis estructuralista y como una teoría matemática más. Esto la distingue del

109Mostowski en realidad no escoge el camino de ver a la teoría de conjuntos como un teoría algebraica para defender el estructuralismo, sino a raíz de las pruebas de independencia de HC respecto a ZFC.

110En principio se podría poner al mismo Zermelo como un representante de esta posición. Sin embargo, Zermelo si bien no creía que existía un único modelo salvo isomorfismo de la teoría de conjuntos, si creía que los modelos de la teoría de conjuntos era de un tipo particular, los descritos por sus teoremas. Lo que es más sus teoremas parecen implicar que si bien no hay un único modelo salvo isomorfismo de la teoría de conjuntos, si hay una única clase modelo de la teoría de conjuntos, a saber, la jerarquía acumulativa de conjuntos. En este sentido podemos decir que si bien bajo nuestra definición de teoría no-algebraica la teoría de conjuntos es algebraica (pues no tiene un modelo-conjunto único salvo isomorfismo) TC puede ser no-algebraica si aceptamos que el modelo pretendido puede ser una clase-modelo. En este caso tendríamos que cambiar nuestra definición de teoría no-algebraica un poco. Dicho esto, lo más probables que Zermelo hubiese rechazado como modelos de la teoría de conjuntos a L y a los modelos generados por *forcing*.

resto de las teoría no-algebraicas. Y como consecuencia de esto se puede defender que el requisito de categoricidad impuesto por la epistemología estructuralista debe ser modificado para el caso de la teoría de conjuntos, de tal forma que salve no sólo el problema epistemológico, sino también el ontológico (es decir, que dicha modificación sea compatible con una estrategia que nos permita asegurar que las otras teorías no-algebraicas refieren a una única estructura).[111]

A continuación exploraré estas diferentes alternativas con más detalle y ofreceré argumentos en contra de las tres primeras. Para al final concluir que la mejor opción que tiene el estructuralista es optar por la cuarta opción.

3.2 Modelos de ZFC: ¿La teoría de conjuntos es una teoría algebraica?

En esta sección analizaré la solución 1 al problema de la no-categoricidad de la teoría de conjuntos, es decir, la propuesta de concebir a la teoría conjuntos como una teoría algebraica (como un teoría que habla de muchas estructuras, tal como la teoría de grupos o la topología).

La idea de ver a TC como una teoría algebraica tuvo sus primeros adherentes al presentarse las pruebas de independencias de la HC respecto a ZFC. En 1965, el matemático polaco Andrzej Mostowski dio un conferencia titulada "Recent Results in Set Theory" en la cual defendía que la teoría de conjuntos debía ser entendida como una teoría que se propone analizar una gran cantidad de estructuras matemáticas (en el sentido de la teoría de modelos) diferentes y que sólo tenían en común que cumplían los axiomas básicos de la teoría de conjuntos. Los principales argumentos que presentó se sustentaban en los resultados presentados por Paul Cohen apenas dos años antes en un par de artículos (Cohen, 1963) y (Cohen, 1964). En estos artículos Cohen presentó un método llamado *forcing* que permitía generar diferentes modelos de la teoría de conjuntos, que daban diferente valor de verdad a la HC y el axioma de elección (AC).

En el mismo congreso, Georg Kreisel replicó duramente los argumentos presentados por Mostowski.[112] Una de las principales herramientas usadas por Kreisel en su crítica era el uso de la lógica de segundo orden y en especial los teoremas presentados por Zermelo en (Zermelo, 1996), justo los que hemos

111 Una opción muy similar es adoptada por Geoffrey Hellman en (Hellman, 2002), la diferencia fundamental es que su explicación se basa en el uso de los operadores modales y la apelación a estructuras posibles. Esto indica además, que el problema presentado es un problema que los estructuralista se han tomado muy en serio y que debe ser resuelto si es que se quiere adoptar el estructuralismo como una filosofía de las matemáticas correcta.

112 Ambos textos y una par de réplicas más al trabajo de Mostowski se encuentran en (Lakatos, 1967)

analizado en la sección anterior.

Un análisis más de la discusión fue presentado por Thomas Weston en (Weston, 1976). Quien como Kreisel no compartía la posición de Mostowski, pero consideraba que los argumentos de Kreisel eran incorrectos y propone una defensa diferente. A continuación, reconstruiré algunos de los detalles de está discusión.

3.2.1 Mostowski y las pruebas de independencia de HC.

La estrategia argumentativa de Mostowski consiste en: 1) defender que la noción de conjuntos debe refinarse, 2) que la refinación debe realizarse a nivel de sistemas axiomáticos, 3) analizar los resultados que muestran al incompleción de los sistemas formales de TC, 4) mostrar que existen muchos modelos de TC que cumplen con la noción (ambigua) de conjuntos que tenemos y 5) concluir que TC debe ser considerada una teoría algebraica.

El primer punto resaltado por Mostowski es que la noción de conjunto ha sido entendida de muy diferentes formas a lo largo del desarrollo de la disciplina. Ni siquiera Cantor y Dedekind entendía lo mismo por conjunto. Este punto cobra mayor relevancia si se considera que TC ha sido propuesta como la disciplina base en los trabajos de fundamentación de las matemática. Recordemos que podemos reducir prácticamente todas las teorías matemáticas a nociones teórico-conjuntistas, con la excepción de la teoría de categorías. Esto quiere decir que si TC está bien fundamentada, en especial la noción de conjunto, entonces obtendríamos un sustento adecuado para el resto de las matemáticas.

> Desafortunadamente este no es el caso. La noción de un conjunto es mucho más complicado de lo que se pensaba originalmente. Varias formas de hacer este concepto más preciso se propusieron durante el debate de los fundamentos de la teoría de conjuntos. Esto explica una multitud de axiomas que se propusieron para la teoría de conjuntos, así como el hecho de ninguno de estos sistemas axiomáticos ha sido unánimemente aceptado por todos los matemáticos. (Mostowski, 1964,p. 82-83)[113]

La mayoría de las ampliaciones para TC que había sido propuestos en la época en que Mostowski presentó su artículo consistían en postular la existencia de cardinales grandes, como los inaccesibles y otros aún más grandes. La postulación de estos cardinales puede ser problemática si se considerá que por lo menos en principio, podemos decir que TC (al igual que muchas otras teorías matemáticas) estudia un tipo particular de objetos (los objetos de su dominio), los conjuntos y las relaciones que hay entre ellos. Es decir, TC es, o por lo menos parece ser, una teoría no-algebraica.

Si esto es cierto, se debe tener cuidado en postular la existencia de objetos en TC, pues de alguna forma

113“Unfortunately this is not the case. The notion of a set is much more complicated than was originally thought. Various ways of making this notion more precise were proposed during the discussions of the foundations of set theory. This accounts for a multitude of axioms which were proposed for set theory as well as for the fact none of these axiomatic systems has been unanimously accepted by all mathematicians.” La traducción es mía.

tendríamos que justificar que dichos objetos existen en la realidad (de los conjuntos). Además, TC tiene compromisos ontológicos muy fuertes. Entre su compromisos ontológicos se incluyen algunos supuestos como la existencia de conjuntos infinitos, o que las relaciones existen al igual que los conjuntos. Esto no es un gran problema para TC, más bien parece que es una cuestión de principio, para trabajar en TC debes de partir de estos supuestos, que al final son los que permiten que TC sirva como teoría base para otras teoría matemáticas.

Pero, ¿cómo justificar la postulación de conjuntos infinitos, especialmente de los cardinales grandes? Mostowski sostiene que existen por lo menos dos principios que pueden ayudar a dicha justificación: 1) el principio de transición del infinito potencial al actual y 2) el principio de existencia de conjuntos singulares.

El principio de transición del infinito potencial al actual puede verse en trabajos como el de Dedekind que busca justificar la aceptación del infinito en acto, mostrando una sucesión que parte de un elemento y construye el siguiente a partir de él, de tal forma que el proceso de construcción no tiene fin, es decir, es potencialmente infinita. Este principio puede ser útil para defender la existencia de cardinales grandes como por ejemplo los cardinales fuertemente inaccesibles. En la actualidad la justificación estándar para aceptar la existencia de conjuntos infinitos está dada por el axioma de infinito. Con todo podemos decir que este principio nos guía en la formulación y refinamiento de axiomas sobre el infinito.

El segundo principio, el principio de existencia de conjuntos singulares, es un poco más difícil de describir. "Supongamos que en la construcción de sistemas por medio de las operaciones descritas por los axiomas teóricos que hemos aceptado hasta ahora, se obtiene sólo conjuntos con la propiedad P. Si no hay ninguna razón obvia para que todos los conjuntos tengan la propiedad P, podemos añadir a los axiomas una oración existencial que afirme que hay conjuntos sin la propiedad P." (*Ibíd,* p. 85)[114] Este principio, a pesar de ser vago, ha sido utilizado en diversas ocasiones por ejemplo al definir los cardinales de Mahlo y los cardinales medibles. Para los detalles puede véase (*Ibíd,* p. 86-87)

Es importante recordar que la existencia de estos cardinales no puede ser probada en ZFC mismo, debido a una limitación impuesta por el segundo teorema de incomplesión de Gödel. Tomando en cuenta esto y que la TC es la teoría de fondo en la reconstrucción de las matemáticas, podemos decir que no hay un método formal que nos ayude a decidir si este tipo de cardinales existen, pero en tal caso

114"Let us assume that in constructing sets by means of the operations described by those set-theoretical axioms which we have accepted so far, we obtain only sets with a property *P*. If there are no obvious reasons why all sets should have the property *P*, we adjoin to the axioms an existential statement to the effect that a there are sets without the property *P*." La traducción es mía.

qué tipo de pruebas podemos dar a favor de su existencia, pruebas que podamos considerar adecuadas o racionales. Mostoski considera que no hay tales justificaciones y en consecuencia no podemos delimitar correctamente la noción de conjunto, pues no podemos decir si existen o no tales conjuntos.

Si trasladamos la discusión al nivel de los axiomas, podemos decir que en tanto en la teoría formal de conjuntos existen oraciones que son indecidibles, la teoría formal no da una descripción completa y adecuada de qué debe ser considerado un conjunto. El problema de la justificación racional de la existencia de cardinales grandes se traduce a la justificación de la aceptación o no de axiomas que postulan su existencia.[115] El problema es en realidad más profundo, pues si aceptamos un versión en segundo orden de la aritmética tenemos que existe en el universo conjuntista una única estructura salvo isomorfismo de PA2, pero sabemos que existen proposiciones indecidibles en PA2 (las oraciones G de Gödel). Así que los axiomas de TC son incompletos, sin importar cuantos axiomas de cardinales grandes aceptemos.

> Es obvio a partir de la resiente revisión esquemática que el problema de la verdad intuitiva de las oraciones es difícil y no independientes del problema de la verdad de los axiomas fuertes de infinito, incluso si nos restringimos a las oraciones de la aritmética de segundo orden. Por esta razón, muchos matemáticos abandonar la teoría de conjuntos intuitiva a favor de la teoría axiomática de conjuntos. Vamos a discutir en lo que sigue algunos de los resultados metamatemáticos alcanzados en el curso de este estudio. (*Ibíd,* p. 89)[116]

Los resultados metamatemáticos que Mostowski analizó en su artículo son en primer lugar la prueba de Gödel que muestra la consistencia de ZF + Axioma de elección (AC) y de ZF + HC y, en segundo lugar, las pruebas de Cohen que muestran la consistencia de ZF + ~AC y de ZF + ~HC. Estas dos pruebas juntas demuestran la independencia de HC de ZFC y la independencia del axioma de elección de ZF.

En la prueba de Gödel, como vimos en el primer capítulo, se construye un modelo de ZFC a pelando a la noción de definibilidad. Según Mostowski, la prueba no sólo muestra que la consistencia de HC y AC respecto a ZF, sino que nos indican que la noción de conjunto es ambigua y lo es a tal grado que no puede decidir si oraciones como HC o AC son verdaderas o falsas.

> La prueba de Gödel contiene un resultado mucho más profundo que una mera prueba de consistencia. Él reconoció que la noción intuitiva de un conjunto es demasiado vaga para que podamos decidir si el axioma de

115Un análisis profundo de criterios para la aceptación de nuevos axiomas para TC está presentado en (Maddy, 1988a) y (Maddy, 1988b).

116"It is obvious from the above sketchy review that the problem of the intuitive truth of sentences is difficult and not independent from the problem of truth of strong axioms of infinity even if we restrict ourselves to sentences of second order arithmetic. For this reason many mathematicians abandon intuitive set theory in favour of axiomatic set theory. We shall discuss in what follows some metamathematical results reached in the course of this study." La traducción es mía.

> elección y la hipótesis del continuo son verdaderas o falsas.(*Ibíd,* p. 89)[117],[118]

Después de aseverar esto, analizó las pruebas de Cohen y extrajo como resultado que la naturaleza de la indecibilidad de la HC respecto a ZFC es muy diferente a la indecidibilidad de G respecto a PA. Por ejemplo, G es decidible si se agregan reglas infinitarias a PA, pero eso no sucede con HC. La idea de fondo es que en el caso de PA tenemos un modelo pretendido, pero en el caso de TC no contamos con algo parecido, algo que nos ayude o nos guíe en el camino correcto.

> Esto demuestra que el carácter incompleto de la teoría de conjuntos se debe a circunstancias distintas de la incompletud de la aritmética. Se asemejan más bien a lo incompleto de la teoría de grupos o de similares teorías algebraicas. Estas teorías son incompletas porque sus axiomas formulados con la intención de que admitan modelos no isomorfos. En el caso de la teoría de conjuntos no se tenía esta intención, pero los resultados son los mismos.
> Modelos construidos por Gödel y Cohen son importantes no sólo por las razones puramente formales de que nos permiten obtener las pruebas de independencia, sino también porque nos muestran las diversas posibilidades que se abren ante nosotros cuando se quieren hacer más precisas las intuiciones en las que se basa la noción de un conjunto. (*Ibíd*, p. 94)[119]

En resumen, según Mostowski TC debe ser analizado a nivel formal, es decir, a nivel de sistemas axiomáticos. Pero dado que dichos sistemas tienen modelos no isomórficos podemos sostener que la teoría de conjuntos es un teoría algebraica, aunque no fue crea con esa intención.[120] Apelar a que dichos modelos no son los que teníamos en mente cuando formulamos TC no ayuda, pues cómo mostró Mostowski en realidad no estaba claro cuál era la realidad que se quería capturar cuando se formuló la teoría de conjuntos.

117“[The Gödel's] proof contains a much deeper result than a mere proof of consistency. He recognized that the intuitive notion of a set is too vague to allow us to decide wheter the axiom of choice and the continuum hypothesis are true or false.” La traducción es mía.

118No deja de ser irónico que la moraleja que Mostowski extrae de las pruebas ofrecidas por Gödel sea que no tenemos un dominio de objetos que podamos llamar el dominio de los conjuntos. Especialmente si consideramos que Gödel defendió en (Gödel, 1947) que su modelo era artificial y que no podía ser considerado el modelo de la teoría de conjuntos. El problema de la incomplesión de los axiomas de ZFC era visto por Gödel como un problema que podía solucionarse con la adición de nuevos axiomas que refinarán la noción de conjunto, pero siempre con miras a lograr una mejor descripción del reino de los conjuntos.

119“This shows that the incompleteness of set-theory is caused by other circumstances than the incompleteness of arithmetic. It is comparable rather to the incompleteness of group theory or of similar algebraic theories. These theories are incomplete because we formulated their axioms with the intention that they admit non-isomorphic models. In the case of set-theory we did not have this intentions but the results are just the same.
Models constructed by Gödel and Cohen are important not only for the purely formal reasons that they enable us to obtain independence proofs, but also because they show us various possibilities which are open to us when want to make more precise the intuitions underlying the notions of a set.” La traducción es mía.

120A manera de anécdota: Debo confesar que la motivación original de este trabajo era defender una postura parecida a la de Mostowski. Las intuiciones para defender dicha postura las obtuve después de estudiar las pruebas de independencia de HC respecto a ZFC. Sin embargo, el análisis posterior de resultados como el de Zermelo me llevaron a cambiar de opinión.

3.2.2 Kreisel y la teoría de conjuntos en segundo orden.

Kreisel presentó sus críticas al trabajo de Mostowski en dos textos, el primero una replica al trabajo de Mostowski y el segundo su propia propuesta de qué tipo de justificación debe ofrecerse para la aceptación de los axiomas de una teoría. Ambos textos fueron presentados en el mismo congreso. Las ideas centrales de la propuesta de Kreisel era mostrar que sí tenemos una noción suficientemente precisa de conjunto y que la justificación de la admisión de nuevos axiomas se da a partir del análisis de dicha noción.

En el primer texto, la replica a Mostowski, Kreisel hace una observación histórica sobre la opinión de Gödel sobre la noción de conjunto y sobre si podemos o no hablar de la existencia de múltiples universos conjuntistas.

> Es simplemente falso que Gödel creía que la noción intuitiva de conjunto es demasiado vaga para decidir el axioma de elección AC o la CH: en el artículo sobre el problema continuo de Cantor que se explicita que el AC tiene la misma evidencia a partir la noción intuitiva de conjunto (en jerarquía acumulativa de Zermelo) que los otros axiomas aceptados. (Kreisel, 1964, p. 97-98)[121]

Después de hacer esta observación histórica, Kreisel arremete contra la idea de Mostowski de que la justificación de los nuevos axiomas debe ser formal. La idea de fondo es muy sencilla y es que incluso la aceptación de los primeros axiomas de la teoría de conjuntos no fue formal, sino que se presentaron argumentos basados en las ideas intuitivas sobre qué debe ser un conjunto. “El axioma de existencia de Zermelo (comprensión) es formalmente similar al axioma de reducibilidad. Él lo justifica, no por la coherencia formal de las pruebas relativas, sino por la explicación, en palabras, de la noción de: conjunto de cosas”. (*Ibíd,* p.99)[122]

Finalmente, sobre la naturaleza de la indecibilidad de HC respecto a ZFC, Kreisel afirma que Mostoswki no considera que la HC es decidida por ZFC2, a diferencia de los axiomas sobre cardinales grandes. Esto se debe a que de acuerdo con el teorema de Zermelo, HC a de ser verdadera o falsa en todos los modelos de ZFC2, sin embargo, los axiomas de cardinales grandes pueden ser verdaderos o falsos dependiendo del modelo de ZFC2, esto debido a que si el tipo ordinal de modelo (la característica) es, por ejemplo, el primer cardinal inaccesible, entonces no habrá cardinales grandes, pero si la característica es mayor, en el modelo oraciones como la que afirma que hay cardinales fuertemente inaccesibles será verdadera. Este análisis muestra que HC y los axiomas de cardinales

121“It is simply false that Gödel believed the *intuitive* notion of set to be vague to decide the axiom of choice AC or the CH: in the article on Cantor's continuum problem he explicitly states the AC has the same evidence for the intuitive notion of set (in cumulative hierarchy of Zermelo) as the other accepted axioms.” La traducción es mía.

122“Zermelo's set existence (comprehension) axiom is formally similar to the axiom of reducibility. He justified it, not by formal relative consistency proofs, but by explaining, in words, the notion of: set *of* something.” La traducción es mía.

grandes son tipos de oraciones indecidibles muy diferentes. Hasta este punto se pueden ver ideas centrales en el pensamiento de Kreisel sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos, especialmente sobre la justificación de nuevos axiomas y del papel que juega la formalidad.

En su segundo artículo "Informal Rigour and Completeness Proofs", también recogido en (Lakatos, 1967), Kreisel defendió que el papel de las teoría formales no era el de ofrecer la justificación última de los axiomas, la justificación de los axiomas está dada más bien con pruebas que están fuera de la teoría formal en cuestión y tienen que ver con las nociones básicas de una teoría, a este respecto ofrece un análisis de la noción de conjunto.

Kreisel habla de por lo menos tres formas diferentes de entender la noción de conjunto que estaban presentes al momento de originarse las paradojas de la teoría de conjuntos.

> Es probablemente cierto que la reacción precautoria se debió a esto: las clases presentada por sí mismas son una noción vaga, o, específicamente, una mezcla de nociones incluidas (i) los conjuntos finitos de las cosas (es decir, objetos sin miembros), o (ii) conjuntos de algo (como en las matemáticas, conjuntos de números, conjuntos de puntos), pero también (iii) las propiedades o *intenciones* que uno no tiene *a priori* acotados sobre las extensiones (que son muy comunes en el pensamiento común, pero no en matemáticas). (Kreisel, 1964b, p. 143)[123]

Kreisel se concentra en (ii)[124] y argumenta que con las debidas acotaciones, como las hechas por Russell y Zermelo, se puede usar como una noción de conjunto lo suficientemente precisa. En especial si se considera la jerarquía acumulativa que suponía el trabajo de Zermelo, la cual sirve para clarificar la noción de conjunto de cosas (set *of* something). En este sentido, afirma que la axiomatización de la teoría de conjuntos presentada por Zermelo no fue presentada para clarificar la noción de conjunto, sino como el resultado del análisis de la noción de conjunto supuesta en la jerarquía acumulativa. El papel de las teorías formalizadas no es según Kreisel la de ofrecer clarificaciones de la nociones básicas de la teoría, sino la de presentar los resultados del análisis previo de dichas nociones.

Suponiendo que la noción de conjunto de cosas (sets *of* something) es suficientemente precisa y es la que está supuesta en la jerarquía acumulativa de conjuntos, Kreisel se enfrentará al análisis de las pruebas de independencia de HC respecto a ZFC, para mostrar que no deben suscitar reacciones

---

123"It is probably true to say that the reactionary caution was due to this: *class* presented itself as a vague notion, or, specifically, a mixture of notions incluiding (i) finite sets of individuals (i.e. objects without members), or (ii) sets *of* something (as in mathematics, sets of numbers, sets of points), but also (iii) properties or *intensions* where one has no *a priori* bound on the extension (which are very common in ordinary thought but not in mathematics)." La traducción es mía.

124La opción (i) puede descartarse si consideramos que las teorías matemáticas que se pretende reconstruir en TC tiene en su mayoría dominios infinitos. En cuanto a (iii), puede verse como concepción de conjunto que originó algunas de las paradojas, al considerar que toda intensión puede determinar un conjunto. La ventaja de (ii) sobre está última es que siempre acota el uso de una propiedad para determinar un conjunto a un conjunto ya dado, es decir, separa de un conjunto los objetos que cumplen una propiedad determinada.

alarmistas como las de Mostowski.

En ese sentido, el primer paso del trabajo de Kreisel es encontrar un lenguaje formal apropiado para presentar las definiciones de las teorías matemáticas, que previamente obtuvo de su análisis de las nociones básicas involucradas en las teorías. Él considerá que el lenguaje de la lógica de primer orden no es adecuado para realizar este trabajo, pues sólo puede caracterizar estructuras finitas, y la mayoría de las teorías matemáticas hablan de estructuras infinitas. Esto lo lleva a adoptar el lenguaje de la lógica de segundo orden.[125] Pone como ejemplo del éxito de esta estrategia en el trabajo de Dedekind al presentar a la aritmética. La caracterización de la aritmética se logra al convertir el esquema de axioma de inducción en un axioma de segundo orden, esto nos arroja un resultado de categoricidad para esta teoría.

Usando esta estrategia podemos dar una versión de la teoría de conjuntos en segundo orden y así obtenemos ZFC2, la teoría de conjuntos sin urelementos de la que hablamos un par de secciones atrás. Según vimos, todos los modelos de ZFC2 contienen a un modelo mínimo, el que tiene como característica al primer cardinal fuertemente inaccesible, y en dicho modelo se decide HC. Esto quiere decir que aunque no sabemos cuál es el valor de verdad de HC, sí sabemos que HC es verdadera o falsa en todos los modelos de ZFC2.

Esto sugiere que la postura de Kreisel es tomar como (clase-)modelo pretendido de la teoría de conjuntos a la jerarquía acumulativa completa, pues es la que refleja el análisis de la noción de conjunto, esto es apoyado por un análisis detallado de los teoremas de Zermelo que hemos visto al principio del capítulo. Si aceptamos esto, podemos responder a Mostowski que la teoría de conjuntos si habla de una estructura (de univierso bien definido) el universo de conjuntos dado por la jerarquía acumulativa de conjuntos. Como ya había adelantado antes en una nota la pie, esto no convierte a la teoría de conjuntos inmediatamente en una teoría no-algebraica, pues la propuesta de Kreisel (que me parece correcta) no garantiza que la teoría de conjuntos tenga un único modelo salvo isomorfismo. Esto se debe a que la jerarquía acumulativa de conjuntos no es un modelo del tamaño de un conjunto, es demasiado grande, es una clase propia. Esto implica que aun aceptando que JC es el modelo pretendido de la teoría de conjuntos, esta sigue siendo algebraica. La solución es ampliar nuestra noción de modelo e incluir clases-modelo. Si optamos por esta estrategia, la teoría de conjuntos es no-algebraica (bajo nuestra nueva definición).

125Las razones dadas por Kreisel para la adopción de lenguajes de segundo orden son muy similares a las de los estructuralistas. Ambos buscan lenguajes que puedan dar cuenta de las intuiciones de los matemáticos, las intuiciones que les permiten capturar los modelos pretendidos.

3.2.3 ¿La teoría de conjuntos en segundo orden decide la hipótesis del continuo?

Unos años después de la controversia entre Mostowski y Kreisel, Thomas Weston presenta una serie de argumentos que pretenden mostrar que la posición de Kreisel sobre la decidibilidad de la HC en ZFC2 es incorrecta, aunque argumentará a favor de que HC tiene un valor de verdad determinado.

Lo primero es ofrecer la definición de Weston (y Kreisel) de HC, pues un poco diferente a las expuestas en el capítulo 1.

> La hipótesis del continuo dice que sólo hay dos posibles "tamaños" (cardinalidades) para los conjuntos infinitos de números reales, el tamaño del conjunto de los números naturales y el del conjunto de todos los números reales. (Weston, 1976, p. 281)[126]

Como vimos en el capítulo 1, la HC es independiente de ZFC, la prueba esta dada en los trabajos de Gödel y Cohen. En realidad el método de *forcing* de Cohen es suficiente para dar el resultado, pues con el se pueden generar dos modelos de ZFC, uno en el que HC sea verdadera y uno en el que sea falsa. Como vimos en el caso de Mostowski, esto ha dado pie a que muchos consideren que la noción de conjunto no está bien definida y en consecuencia hayan propuesto ver a la teoría de conjuntos como una teoría algebraica. Mostowski no fue el único en defender está visión, por ejemplo, Kalmar sostiene:

> Supongo que en el futuro diremos naturalmente "vamos a tomar una teoría de conjuntos S" como ahora tomamos un grupo G o un campo F. Por supuesto que a veces vamos a tener una teoría de conjuntos S tal y tal (es decir, un modelo arbitrario de algún sistema de axiomas de la teoría de conjuntos). (Kalmar, 1967, p.105)[127]

Kreisel como vimos en la sección anterior llamo a los defensores de esta postura, alarmistas. También es importante recordar que no todos los teórico-conjuntistas defendía esta postura, por ejemplo, Gödel seguía hablando de la teoría de conjuntos, véase (Gödel, 1947). Weston defiende el punto contra los alarmistas, en particular, defiende que HC tiene un valor de verdad determinado, aunque lo hace usando un argumento diferente al ofrecido por Kreisel.

Weston hace notar que la estrategia de Kreisel es abandonar la lógica de primer orden, en favor de la lógica de segundo orden, como el lenguaje de las matemáticas, en especial para la teoría de conjuntos. El primer punto de ataque de Weston contra Kreisel es que, como vimos, éste defiende que ZFC2 decide HC. Weston argumentará que esto no es así, la HC sigue siendo indecidible en ZFC2.

> Pero la invitación es engañosa; CH es todavía no es demostrable, ni refutable en la teoría de segundo orden (veremos más abajo cómo se prueba esto). Todo lo que Kreisel podía esperar mostrar a través de la lógica de

126“The continuum hypothesis says that there are only two possible “sizes” (cardinalities) for the infinite sets of real numbers, the size of the set of natural numbers and that of the set of all real numbers.” La traducción es mía.

127“I guess that in the future we shall say as naturally 'let us take a set theory S' as we take now a group G or a field F. Of course sometimes we shall take a set theory S so and so (i.e. an arbitrary model of some axiom system of set theory).” La traducción es mía.

segundo orden es que CH tiene un valor de verdad. Yo sostengo que o bien no lo hace o no hace falta. Es decir, voy a demostrar que su argumento de segundo orden en realidad supone una interpretación única pretendida de ZF. Sostengo que si ZF tiene esa interpretación, a continuación, ese mismo hecho, muestra que el CH tiene un valor de verdad definido, y si no hay una interpretación única pretendida entonces el argumento de segundo orden silba en la oscuridad (Weston, 1976, p. 282)[128]

Para mostrar su punto, Weston analiza primero la aritmética de Peano en segundo orden. La teoría PA2 que presentó es la usual, cambiando el esquema de axioma de inducción por un axioma de segundo orden. Una vez hecho esto introdujo una semántica general para está teoría, que incluye un subconjunto C del conjunto potencia del dominio U que sirve para interpretar los cuantificadores de segundo orden. Para detalles formales véase el capítulo 4 de (Enderton, 2001). Con está idea en mente, nos dice que si consideramos el caso en el que $C=\wp(U)$, es decir, cuando los cuantificadores de segundo orden cuantifiquen sobre todos los subconjuntos del dominio, tendremos el resultado de categoricidad deseado. Esto no es sorprendente, pues la prueba de categoricidad para PA2, se basa en una semántica estándar que interpreta los cuantificadores de segundo orden usando todos los subconjuntos del dominio. Weston sugiere que la elección de C como la potencia de U se debe al supuesto de la existencia de un modelo pretendido. Algo muy importante a resaltar es que si C es un subconjunto propio de la potencia del domino, entonces perdemos el resultado de categoricidad.

Una consecuencia de aceptar la categoricidad de PA2 es que la lógica de segundo orden es incompleta, como vimos en el capítulo 1, pues por ejemplo, la oración G de Gödel es consecuencia semántica de PA2, pero no es derivable en PA2. Este es el hecho que Kreisel usa para defender que la HC es consecuencia lógica de ZFC2, aunque no es derivable.[129] Sin la suposición de que $C=\wp(U)$, se pierden los teoremas de categoricidad que son muy relevantes en la propuesta de Kreisel y en la propuesta estructuralista.

De hecho, él concede tanta importancia a la categoricidad que ve el hecho de que no hay una estructura matemática infinita que se pueda caracterizar por una teoría de primer orden categórica como "establecedor de la insuficiencia de los fundamentos de primer orden" de las matemáticas. (Weston, 1976, p. 285)[130]

Weston afirma que el requisito de categoricidad se puede cumplir en teoría de primer orden haciendo

128“But the invitation is misleading; CH is still unprovable and unrefutable in second order set theory (we will see below how this is proved). All that Kreisel could hope to show via second order logic is that CH has a truth value. I argue that he either doesn´t do this or he doesn´t need to. That is, I will show that his second order argument actually presupposes a unique intended interpretation for ZF. I argue that if ZF has such an interpretation, then that fact itself shows that CH has a definite truth-value, and if there is no unique intended interpretation then the second-order argument is whistling in the dark.” La traducción es mía.

129La prueba de que HC no es derivable a partir de ZFC2 es dada por el propio Weston en (T. S. Weston, 1977)

130“In fact, he attaches such importance to categoricity that he sees the fact that no infinite mathematical structure can be characterized by a categorical first order theory as “establishing the *inadequacy* of first order foundations” of mathematics.” La traducción es mía.

algunas restricciones que pueden parecer arbitrarias, pero para él las restricciones a los modelos de PA2 son igualmente arbitrarias.

Una vez que ha puesto el ejemplo de la aritmética, presenta el caso de la teoría de conjuntos. Da un sistema axiomático para TC, ZF^2, que en esencia es ZFC2 sin el axioma de elección. Y considera los modelos de dicha teoría como triadas ordenas <U, C, R> donde U es el dominio de los cuantificadores de primer orden, C es un subconjunto de la potencia de U que sirve para interpretar los cuantificadores de segundo orden y R es un subconjunto de UxU que sirve para interpretar la pertenencia. De nuevo argumenta que el resultado de cuasi-categoricidad de Zermelo sólo se sigue si consideramos $C=\wp(U)$, llama a estos modelos *-modelos.

> Para sobre-simplificar un poco, podemos poner el argumento de Kreisel de la siguiente manera:
> (a) ZF^2 es categórica, por lo que
> (b) Todos los modelos de ZF^2 son isomorfos, por lo que
> (c) El CH tiene el mismo valor de verdad en todos los modelos, por lo que
> (d) El CH tiene un valor de verdad, y punto.
> La simplificación en la presentación del caso de Kreisel es que (a) no es probablemente cierto, incluso para * modelos, pero es un resultado similar. (*Ibíd*, p. 286)[131]

Como reconoce el propio Weston, (a) es falsa, pues no tenemos un teorema de categoricidad para la ZFC2, tenemos un resultado de cuasi-categoricidad, tal como hemos visto en secciones anteriores. (Alguien podría defender que la jerarquía acumulativa completa puede ser tomado como el modelo pretendido de la teoría de conjuntos, esto implicaría que debemos hacer un ajuste en nuestra noción de modelo, para convertirla en modelo clase, hablaremos de esto un poco más adelante.) A este respecto Weston reconoce que el valor de verdad de HC se decide en el nivel $\omega+3$ de la jerarquía acumulativa, así que si tenemos el resultado de cuasi-categoricidad y dado que el nivel $\omega+3$ pertenence al modelo mínimo, tendríamos que la HC tiene un valor de verdad determinado.

De nuevo el ataque contra el teorema de cuasi-categoricidad se basa en el rechazo de Weston en aceptar que los modelos de ZFC2 tienen que ser tales que $C=\wp(U)$. Aceptar sólo los *-modeles le parece a Weston por completo injustificado, lo que es más recurre a los alarmistas y sostiene que es natural creer que la teoría de conjuntos tenga modelos no isomorfos.

131"To over -simplify slightly, we can put Kreisel's argument as follows:
(a) ZF^2 is categorical, so
(b) All models of ZF2 are isomorphic, so
(c) The CH has the same truth value in all models, so
(d) The CH has a truth value, period.
The oversimplification in this presentation of Kreisel's case is that (a) is probably not true, even for *-models, but a similar result is." La traducción es mía.

> Así que el argumento para la casi-categoricidad de ZF^2 falla a menos que sepamos de antemano que efectivamente existe una interpretación única pretendida de la misma. En la actualidad, el argumento sólo demuestra que el CH tiene el mismo valor de verdad en el grupo de las *-estructuras asociados a cada interpretación natural. (*Ibíd*, p. 288)[132]

Dicho esto Weston propone su propio argumento a favor de que HC tiene un valor de verdad determinado. Este argumento supone que tenemos un modelo pretendido para la teoría de conjuntos. Su argumento es muy sencillo:

1. HC es verdadero sii HC es satisfecho en la estructura $M=\langle V_{\omega+3},\in\rangle$.
2. HC es verdadera si $M \models S$, donde S es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos que expresa HC.
3. HC es falsa si $M \models \sim S$.
4. $M \models s$ o $M \models \sim s$.
5. Por lo tanto, HC es verdadera o HC es falsa.

Como podemos ver este argumento nos aseguraría que la HC tiene un valor de verdad determinado, y podríamos usar argumentos similares para defender que de hecho todas (o casi todas) las oraciones de TC tienen de hecho un valor de verdad determinado. Esto no implica que nosotros podamos conocer cuál es dicho valor de verdad.

Detengámonos un momento a analizar si este argumento puede ser útil para el estructuralista. Recordemos que el estructuralista pide como requisito para poder aprehender un estructura que tengamos una teoría formal que sea satisfacible, categórica y recursivamente axiomatizable y que describa dicha estructura. Ahora bien, la respuesta de Weston nos garantiza una defensa del realismo en valor de verdad, por lo menos en el caso de la teoría de conjuntos, pero esto no satisface la epistemología estructuralista. Por decirlo de otra forma, nos da el resultado realista que esperábamos, pero no nos da una explicación de cómo llegamos a él. Así el resultado de Weston no sirve para nuestros propósitos.

Pero, ¿podemos aceptar sin más el resultado propuesto? Mi respuesta es que no, creo que, siguiendo a Weston y Zermelo, tenemos buenas razones para aceptar el teorema de cuasi-categoricidad para la teoría de conjuntos.

Analizando los argumentos de Weston podemos ver que hay en ellos un uso esencial de los modelos generales de las teoría de segundo orden, es decir, es esencial el que podamos variar los dominios de

132 "So the almost categoricity argument for ZF^2 fails unless we know in advance that there is indeed a unique intended interpretation of it. As it stands, the argument merely shows that the CH has the same truth-value in the group of *-structures associated with each natural interpretation." La traducción es mía.

interpretación de los cuantificadores de segundo orden. Este hecho es el que está detrás del rechazo de Weston a los resultados de categoricidad, tanto para PA2 como para ZFC2. Según Weston no hay una razón justificada para elegir los *-modelos de una teoría sobre el resto de los modelos. Pero esto parece ser por lo menos cuestionable. Recordemos que la idea central en el trabajo de Kreisel era que el análisis (informal) de las nociones básicas de una teoría eran las que nos guiaban en la elección de los axiomas adecuados para ella y que ésta era la razón por la que proponía el uso de la lógica de segundo orden, pues ésta parecía reflejar mejor los resultados del análisis de las nociones básicas. Pero, ¿en qué sentido reflejaba mejor el análisis? Pues, justo en tanto determinaba modelos que cumplía con dichas nociones. En el caso particular de la teoría de conjuntos, la intuición de fondo era la ver a los conjuntos como conjuntos de cosas (sets *of* something). Esta noción parecía llevarnos además a comprometernos con la existencia de todos los conjuntos que pudiésemos formar mediante nuestros principios constructivos (como la potencia, la unión e incluso el remplazo). Pero entonces si queremos recuperar estas intuiciones debemos aceptar que los cuantificadores de segundo orden tengan un interpretación plena, no una acotada que elimine a algunos subconjuntos del universo como posibles funciones del axioma de remplazo o propiedades del axioma de comprehensión. Si esto es correcto, sí tenemos una buena razón para pedir que nuestros modelos sean tales que la interpretación de los cuantificadores de segundo orden corra sobre todos los subconjuntos (en realidad subclases) del universo. Algo muy similar se puede decir sobre los modelos de PA2.

Si estoy en lo correcto, el argumento de Weston contra Kreisel ha perdido mucha fuerza. Pero aún quedan un par de puntos por aclarar: 1) si es que es un problema para Kreisel que HC no sea derivable desde ZFC2 y 2) si la propuesta de Kreisel realmente supone que tenemos un modelo pretendido para la teoría de conjuntos.

Sobre 1) podemos decir que en realidad no es un problema para Kreisel si es que él puede justificar que de acuerdo con la noción de conjunto como conjunto de cosas podemos establecer que todos los modelos de ZFC2 son tales que los cuantificadores de segundo orden se deben interpretar corriendo sobre todos los subconjuntos del dominio de interpretación. Si tenemos este resultado, podemos justificar que los *-modelos son de hecho los modelos de la teoría y que en consecuencia oraciones como la HC son consecuencias semánticas de ZFC2, aunque no sean derivables.

Sobre 2) hay que ser muy cuidadosos, en el texto de Kreisel se dice que la noción de conjunto de cosas es la que está supuesta en la jerarquía acumulativa de conjuntos, pero esto no quiere decir que se requiera suponer que la jerarquía acumulativa de conjuntos es el modelo pretendido de la teoría. Si recordamos los resultados de Zermelo sobre cuasi-categoricidad de ZFC2, podemos ver que parte esencial de los resultados está dada por los teoremas de desarrollo, los cuales no parten de un universo conjuntista dividido en niveles (no parte de la jerarquía acumulativa). Los teoremas de desarrollo parten de un modelo cualquiera de la teoría ZFC2 y prueban que puede dividirse en niveles bien ordenados, esto quiere decir que no parten de suponer que la jerarquía acumulativa es el modelo pretendido de la teoría, sino que prueban que cualquier modelo de la teoría puede verse como un segmento inicial de dicha jerarquía. Pero si esto es así, Weston está usando en su prueba un hecho que aunque es aceptado por Kreisel, no es necesario para defender su postura, y en este sentido parece tener compromisos más fuertes. De hecho, el que se pueda ver a la jerarquía acumulativa como el modelo pretendido de ZFC2 es una consecuencia de los teoremas de cuasi-categoricidad.

Si todo lo dicho hasta aquí es correcto, lo que tenemos es que Kreisel efectivamente ofrece argumentos sólidos en contra de ver a la teoría de conjuntos como una teoría algebraica. Pero aún no es claro cómo esto puede ayudar al estructuralista, especialmente, no es claro cómo esto puede resolver el problema de la no-categoricidad de la teoría de conjuntos.

A continuación, presentaré las opciones 2) y 3) de como resolver el problema, la que propone ampliaciones a ZFC2 para lograr la categoricidad y la que propone abandonar el estructuralismo a la luz de la no-categoricidad de TC. Una vez hecho esto, defenderé que una clarificación de la propuesta de Kreisel y Zermelo y un análisis del papel que juega TC en la filosofía estructuralista puede dar cuenta de este problema.

3.3 Teorema de categoricidad para la parte pura de conjuntos de ZFCU2 + axioma de urelementos.

Como habíamos adelantado una opción disponible aún para el estructuralista es encontrar una ampliación de la teoría que cumpla los requisitos impuestos por su epistemología. En particular, buscar una teoría que puede o no ser una extensión de ZCF2 que sea categórica, satisfacible y recursivamente axiomatizable. También habíamos visto que si se añadía a ZCF2 (sin urelementos) un axioma que nos permita fijar su característica lograríamos obtener el resultado de categoricidad deseado.

En esta línea de trabajo se ubica el trabajo de Vann McGee. En (McGee, 1997), presenta un resultado muy parecido al que necesitamos, demuestra que, con las debidas ampliaciones, todos los modelos de la teoría de conjuntos son isomorfos en la parte pura de conjuntos. La ampliaciones incluyen algunos elementos que la mayoría no estaría dispuestos a aceptar fácilmente como la cuantificación irrestricta y el axioma de urelementos. A pesar de esto, el resultado parecía sorprendente, además de ser exactamente lo que necesitaban los estructuralistas matemáticos para defender su posición. Pero fue aún más sorprendente que 5 años después Gabriel Uzquiano presentó, en (Uzquiano, 2002), un par de teoremas de categoricidad para otras axiomatizaciones de la teoría de conjuntos, que además arrojaban modelos isomorfos para la parte pura de conjuntos, en las tres axiomatizaciones. Todo parecían buenas noticias para el estructuralista.

Sin embargo, este resultado no fue aceptado por todos, en especial en 2003, Agustín Rayo y el propio Gabriel Uzquiano, escribieron un texto que no fue publicado, pero que presentaba lo que ellos creían que eran objeciones definitivas al teorema de McGee (y los propuestos por Uzquiano), en especial al uso de este teorema en la defensa del estructuralismo. Además de ellos algunos otros como Geoffrey Hellman rechazaron el uso de este teorema para defender al estructuralismo, los detalles se pueden ver en (Hellman, 2002). La idea de Hellman es que el tratamiento de McGee es un tanto artificial y no refleja las ideas estructuralistas. Hellman establece una defensa diferente para el estruturalismo, apelando directamente al teorema de Zermelo, seguiré una estrategia muy similar más adelante.

A continuación presentaré el resultado de McGee y un análisis de él, mostrando cómo es que él obtiene el resultado de categoricidad. Después analizaré las objeciones de Rayo y Uzquiano. Finalmente, mostraré que se puede responder a ellas clarificando que es lo que realmente demuestra el teorema, desafortunadamente en este proceso también quedará claro lo poco que realmente nos ayuda este teorema en la discusión.

3.3.1 Teorema de McGee.

Vann McGee pretendía dar un resultado que nos garantice que cualquier oración del lenguaje de la teoría pura de conjuntos es verdadera o falsa, o para lo fines de esta discusión, que nos ayude a aprehender la estructura del universo de los conjuntos.[133] Para ello, propuso un sistema más fuerte que el presentado por Zermelo. McGee parte de una versión de la teoría de conjuntos en segundo orden con urelementos, es decir, de una teoría de conjuntos con un axioma de separación que cuantifica en segundo orden (la misma de la que parte Zermelo).[134] A este sistema McGee añade dos elementos: 1)

133Vann McGee defendía una postura que podríamos llamar estructuralista eliminativista, pues defendía el realismo en valor de verdad, pero no se comprometía con el realismo en ontología. De hecho creía que los argumentos expuesto en (Benacerraf, 1965) mostraban que los lenguajes de la matemática estaban sometidos a una suerte de inescrutabilidad de la referencia.

134McGee incluye en su sistema el axioma de infinito, que Zermelo excluye para lograr más generalidad en su resultado. Tal como nosotros presentamos el sistema de Zermelo incluimos el axioma de infinito, pues actualmente es completamente aceptado y es más fácil comparar los resultado de Zermelo y de McGee si se incluye este axioma.

los cuantificadores de primer tendrán una interpretación irrestricta, es decir, cuantificarán sobre todo lo que hay, 2) incluye un Axioma de Urelementos, que garantiza que todo aquello que existe y no es conjunto, es decir, los urelementos, forman un conjunto.

Axioma de Urelementos: $\exists x\,(Set(x) \wedge \forall y(\sim Set(y) \supset y \in x))$[135]

El resultado es una teoría que llamaremos ZFCU2 + Axioma de Urelementos. Con esta teoría se puede definir una jerarquía acumulativa nueva cuyo primer nivel es el conjunto de los urelementos. Al añadir el axioma de urelementos tiene la garantía de que cada nivel de su jerarquía es a su vez un conjunto. La jerarquía se define como sigue por recursión.

$U_0= Q$, donde Q es el conjunto de los urelementos.

$U_{\alpha+1}= U_0 \cup \wp(U_\alpha)$

$U_\lambda= \cup_{\alpha<\lambda} U_\alpha$, para λ ordinal límite.

Esto impone una diferencia fundamental con los resultados de Zermelo. De acuerdo con estos, pueden existir modelos de la teoría ZFCU2 que tengan un base (la colección de sus urelementos) que sea mayor que su característica, es decir, que de acuerdo a Zermelo existen modelos de ZFCU2 cuyas bases son clases propias vistas desde dentro, aunque serán conjuntos en modelos más grandes. Cuando tenemos este tipo de modelos sucede que en el modelo no existen todos los conjuntos que se pueden formar a partir de los urelementos, sólo tendremos los que tengan una cardinalidad menor que la característica. Con la adición de axioma de urelementos excluimos la existencia de estos modelos extraños y podemos garantizar que la colección de los urelementos puede ser vista como un conjunto, incluso desde dentro del modelo.

El uso de la cuantificación irrestrica nos garantiza que todos los modelos incluirán a todos los urelementos y a los conjuntos que podemos formar a partir de ellos. Esto nos ayudará a demostrar que el universo entero es biyectable con el universo conjuntista, el paso más importante para lograr la categoricidad.

Una vez que tenemos la nueva jerarquía podemos definir la parte pura de conjuntos, que no será otra cosa que los conjuntos que se pueden construir a partir únicamente del conjunto vacío, en otras palabras, la parte pura del universo conjuntista será la jerarquía acumulativa tradicional. Hasta este punto tenemos dos jerarquías de conjuntos, la pura y la impura, tal que la primera es un parte propia de la segunda. La distinción es hecha debido a que incluso si cuantificamos sobre todo lo que hay,

135McGee utiliza un predicado Set(x) para poder distinguir los conjuntos de los urelementos. En sentido estricto, Zermelo debió haber hecho algo muy similar, pero su presentación era un tanto informal. Para ver los detalles de la prueba de Zermelo, véase el apéndice de este trabajo.

podemos tener diferentes modelos de ZFCU2 + axioma de urelementos, pero en cada uno de ellos existirá una copia de la parte pura de conjuntos. Es por ello que el resultado de categoricidad se acotará a esta parte de los modelos de la teoría.

Usando estos hechos y la interpretación irrestrica de los cuantificadores de primer orden podemos demostrar el principio de compleción, que es equivalente al principio de Maximalidad:

> **Principio de Compleción.** Los conjuntos puros no son isomorfos a un segmento inicial de los "conjuntos puros" de cualquier otro modelo de ZFCU en segundo orden.
> **Principio maximalidad.** Dado cualquier <U,S,E> modelo de ZFCU de segundo orden. Los objetos que se tratan como conjuntos puros por este modelo puede ser isomórficamente mapeados en los conjuntos puros. Es decir, hay una función biyectiva *I* que toma como argumentos a los miembros de U que satisfagan la oración abierta "x es un conjunto puro" en el modelo <U,S,E> y como resultados a los conjuntos puros de tal manera que, para cada *x* y *y* en el dominio, *Exy* si y sólo si *I(x)*∈ *I(y)*. (McGee, 1997)[136]

El siguiente paso es demostrar que el universo entero y la parte pura de conjuntos tienen el mismo tamaño, esto queda establecido en el siguiente lema:[137]

> **Lema.** ZFCU en segundo orden + el axioma de urelementos implica que lo hay un mapeo biyectivo del universo entero en los conjuntos puros. (*Ibíd,* p. 63)[138]

Teniendo este resultado podemos garantizar que el tamaño de los modelos de la teoría de conjuntos puros es el tamaño del universo entero.

> **Lema.** Cualesquiera dos modelos de ZFCU de segundo orden + el principio maximalidad con el mismo universo del discurso tiene conjuntos puros isomorfos. En particular, cualesquiera dos modelos de ZFCU de segundo orden + maximalidad el principio en el que las variables de primer orden corren sobre todas las cosas tiene conjuntos puros isomorfos. (*Ibíd*, p. 55)[139]

Esto quiere decir que si aceptamos la cuantificación irrestrica, podemos fijar el tamaño del modelo, fijamos la característica y la base, y con el teorema de Zermelo, que nos dice que cualesquiera dos modelos de la teoría de conjuntos con la misma base y la misma característica son isomorfos, podemos

---

136“**Completeness Principle.** The pure sets are not isomorphic to a proper initial segment of the “pure sets” of any other model of second-order ZFCU.
Maximality Principle. Take any model <*U,S,E*> of second-order ZFCU. The objects that are treated as pure sets by that model can be isomorphically embedded into the pure sets. That is, there is a one-one funtion *I* taking the members of *U* that satisfy the open sentence “*x* is a pure set” in the model <*U,S,E*> to pure sets in such a way that, for *x* and *y* in the domain, *Exy* if and only if *I(x)*∈ *I(y)*.” La traducción es mía.

137Es importante notar que dado que se esta hablando del universo entero y la jerarquía acumulativa de conjuntos no tiene mucho sentido hablar en términos de cardinalidad. Sin embargo, la idea de fondo es la misma establecer un mapeo biyectivo entre estas dos colecciones.

138“**Lemma.** Second-order ZFCU + the *Urelement* Set Axiom Implies that there is one-one map from the entire universe into the pure sets.” La traducción es mía.

139“**Lemma.** Any two models of second-order ZFCU + the Maximality Principle with the same universe of discourse have isomorphic pure sets. In particular, any two models of second-order ZFCU + the Maximality Principle in which the first-order variables range over everything have isomorphic pure sets.” La traducción es mía.

afirmar que todos los modelos de la teoría, son isomorfos en la parte pura de conjuntos. Esto es:

> **Teorema de categoricidad.** Cualesquiera dos modelos de ZFCU de segundo orden + el axioma de urelementos con el mismo universo del discurso tienen conjuntos puros isomorfos. En particular, cualesquiera dos modelos de ZFCU de segundo orden + el axioma de urelementos en el que las variables de primer orden corran sobre todas las cosas tienen isomorfo conjuntos puros isomorfos. (*Idem.)*[140]

Esto no nos da un resultado de categoridad sobre la estructura total de los conjuntos, pero sí nos da categoricidad sobre la estructura de los conjuntos puros, es decir, nos da el resultado de categoricidad para la jerarquía acumulativa de conjuntos. Para tener una resultado de categoricidad sobre todos los conjuntos se necesitaría incluir un axioma que limite el número de urelementos. Aunque debe notarse, que los urelementos son usados para aplicaciones, pero la mayoría de los matemáticos sólo usan conjuntos puros y los teoremas propiamente matemáticos se refieren a la estructura de estos últimos.

> La adición del axioma de urlementos a ZFCU de segundo orden da al realista precisamente lo que quiere: un sucinto y simple conjunto de axiomas que especifica completamente, salvo isomorfismo, la estructura del universo de los conjuntos puros. [...] La adición del axioma de urelementos a ZFCU de segundo orden es suficiente para garantizar un valor de verdad determinado para cada oración del lenguaje de la teoría de conjuntos, y esto a su vez es suficiente para fijar los valores de verdad de todas las oraciones de las matemáticas clásicas. (*Ibíd,* p. 55-56) [141]

Hasta este punto parece misión cumplida por el estructuralista, por fin ha obtenido la teoría categórica que necesitaba para defender su epistemología.

3.3.2 Críticas de Rayo y Uzquiano

Rayo y Uzquiano presentan sus objeciones al uso de teorema de McGee en la defensa del estructuralismo en un artículo no publicado de 2003. En dicho escrito identifican bien el problema que representa la no-categoricidad de la teoría de conjuntos para la epistemología estructuralista. Su crítica se centra en tratar de mostrar que este teorema no le permite al estructuralista tener una teoría satisfacible y categórica al mismo tiempo.

En primer lugar establecen que el resultado de McGee no proporciona categoricidad para la teoría de conjuntos sino, categoricidad restringida a cuantificación irrestricta y a la parte pura de conjuntos.

> [P-Categoricidad U-Axiomática]
> Si un conjunto de axiomas A es (i*a*) satisfecho por un modelo con un dominio absolutomente irrestricciones, (*iib*)

140“**Categoricity Theorem.** Any two models of second-order ZFCU + the *Urelement* Set Axiom with the same universe of discourse have isomorphic pure sets. In particular, any two models of second-order ZFCU + the *Urelement* Set Axiom in which the first-order variables range over everything have isomorphic pure sets.” La traducción es mía.

141“The addition of the *Urelement* Set Axiom to second-order ZFCU gives the realist precisely what she wants: a simple, succint set of axioms that fully specifies, uniquely up to isomorphism, the structure of the universe of pure sets. [...] The addition of the *Urelement* Set Axiom to second-order ZFCU suffices to pin down a uniquely determined truth value for every sentence of the language of set theory, and this in turn suffices to fix the truth values of all the statemants of classical mathematics.” La traducción es mía.

> de tal manera que cualquiera de los dos modelos de A, con dominios absolutamente irrestrictos tienen P-restricciones isomorfas para algún predicado P del lenguaje de la A, y (iii) son recursivos, entonces, al insistir en que los cuantificadores de primer orden tomen rangos absolutamente irrestrictos, los matemáticos están en condiciones de utilizar una forma única para especificar la estructura matemática ejemplificada por cada una de los P-restricciones de los miembros de la clase C de la modelos de A con dominios absolutamente irrestrictos. (Rayo & Uzquiano, 2003, p. 6)[142]

La restricción al predicado *P* se debe a que es necesario incluir un predicado para distinguir los conjuntos puros de los urelementos y de los conjuntos impuros (los que se construyen a partir de los urlementos, o en otras palabras, los que no pertenecen a la jerarquía acumulativa tradicional).

Como ya dijimos, los estructuralistas pueden usar este resultado para defender su posición. Sin embargo, como acabamos de ver, el tamaño de un modelo de la teoría de conjuntos ZFCU2 es a un cardinal fuertemente inaccesible. El teorema de McGee demuestra, además, que el universo entero (todo lo que hay) es biyectable con la parte pura de conjuntos. Así que tenemos que la teoría de conjuntos ZFCU2 + el axioma de urelementos con cuantificación irrestricta es satisfacible sii el cardinal de todo lo que hay es fuertemente inaccesible. Si el estructuralista quiere usar este resultado, debe comprometerse con que el cardinal de todo lo que hay es fuertemente inaccesible. Por ejemplo, si resulta que el cardinal de todo lo que hay es la potencia de un cardinal fuertemente inaccesible, la teoría ZFCU2 + axioma de urelementos (con cuantificación irrestricta en primer orden) no es satisfacible. Las críticas de Rayo y Uzquiano se concentran en dar razones para cuestionar este compromiso.

Consideremos ahora la teoría de clases, si la expresamos en el lenguaje de la lógica de segundo orden, le agregamos el axioma de urelementos y le damos una interpretación irrestrica a los cuantificadores de primer orden tenemos como resultado un teorema de categoricidad muy similar al que tenemos para la teoría de conjuntos. Sin embargo, "La teoría de clases Morse-Kelley en segundo orden con urelementos (MKU2) más el axioma de urelementos [...] requieren que el universo contenga precisamente la potencia-de-un-inaccesible de objetos." (*Ibíd,* p. 7)[143] Es decir, que ambas teorías imponen requisitos diferentes e incompatibles para el tamaño del universo. Lo que quiere decir que una de las dos no es satisfacible. Esto quiere decir que no podemos aceptar a ambas teorías como verdaderas, pero ¿qué criterios podemos usar para elegir entre una o la otra? Parece evidente que no podemos recurrir a criterios matemáticos, pues prácticamente todo lo que puede demostrar una teoría (relevante para la

142"[*U-Axiomatic P-Categoriccity*]
If a set of axioms **A** is (*ia*) satisfied by a model with an absolute unrestricted domain, (*iib*) such that any two models of **A** with absolutely inrestricted domains have isomorphic *P*-restrictions for some predicate *P* in the language of **A**, and (*iii*) recursive, then, by insisting that the first-order quantifiers take absolutely unrestricted range, mathematicians are in a position to use **A** to uniquely specify the mathematical structure exemplified by each of the *P*-restrictions of members of the class **C** of the models of **A** with absolutely unrestricted domains." La traducción es mía.

143"Second-order Morse-Kelley class theory with urelements (MKU2) plus the Urelement Set Axiom [...] require the universe contain precisely power-of-an-inaccessible many objects" La traducción es mía.

práctica matemática) lo puede demostrar la otra. De hecho, es común que el matemático use una teoría u otra de manera casi indistinta, pues sabe bien que si demuestra algo usando una de ellas, puede traducir la prueba a la otra teoría. Esto quiere decir que tendríamos que elegir entre una de las dos teorías usando criterios no matemáticos.

Esto en principio es algo no deseable, sin embargo, haciendo un análisis más cuidadoso de la cuestión tal parece que la decisión no la debe tomar un matemático, sino un filósofo. Veamos cuál es la diferencia entre ambas teoría. Sabemos que ambas teorías pueden servir como marco teórico para fundamentar casi todas las matemáticas, además, cualquier teorema (que no sea sobre la teoría misma) que se demuestra con la ayuda de una de ellas, puede realizarse usando la otra teoría, es decir, para fines matemáticos las teorías son prácticamente equivalente a nivel formal. Pero entonces, cuál es la diferencia entre ellas. La diferencia parece ser filosófica, pues la teoría de clases se compromete con la existencia de algunas clases que no son conjuntos, mientras que la teoría de conjuntos evita tales compromisos usando maquinaria lógica, esto pasa por ejemplo en el caso de los ordinales. La teoría de clases acepta que existe la clase de los ordinales, mientras que la teoría de conjuntos se limita a describirla usando fórmulas lógicas. Pero si la diferencia entre estas teorías es nivel de los compromisos ontológicos y no a nivel matemático, entonces parece de lo más natural suponer que la elección entre una teoría y otra debe ser hecha por el filósofo y no por el matemático.

Por otro lado, si se toma en serio la crítica de Rayo y Uzquiano a que el teorema nos compromete con la existencia de exactamente una cantidad inaccesible de objetos podemos responder que justo la teoría de conjuntos nos dice que lo que hay son conjuntos y urelementos y que los urelementos son mucho menos que los conjuntos, esto quiere decir que si aceptamos la teoría de conjuntos lo más natural es suponer que hay tantas cosas como conjuntos. Veamos esto con un poco más de detalle. Parte esencial de la demostración del teorema de McGee se debe a la aceptación del axioma de urelementos. Este axioma nos garantiza que todos las cosas que existen y no son conjuntos forman un conjunto, llamémoslo Q. Luego por el axioma de elección en su versión del teorema de buen orden, podemos bien ordenar a Q. Y por el teorema de numerabilidad podemos garantizar que Q es isomorfo a un ordinal de modelo, esto quiere decir que la cantidad de objetos del universo que no son conjuntos es realmente muy pequeña comparada con la cantidad de conjuntos que existen, de hecho es despreciable, pues podemos establecer una biyección entre todos lo objetos que existen y los objetos que son conjuntos. Esto quiere decir que si aceptamos la teoría de conjuntos nos comprometemos con que el cardinal de todo lo que hay es fuertemente inaccesible. Algo muy similar se puede decir sobre la teoría de clases, con la diferencia de que dicha teoría se compromete con la existencia de más objetos (algunas clases propias). Al final, cada teoría se propone como una teoría comprensiva que pretende servir como una teoría de la existencia matemática, que además supone que la cantidad de objetos matemáticos es muy superior a la cantidad de objetos no-matemáticos. En este sentido no es nada extraño que pida requisitos diferentes para el tamaño de todo lo que hay, pues cada una postula diferentes entidades que son en cantidad muchas más que las que no postulan (los objetos no matemáticos). Esto también quiere decir que ninguna de las dos pide en realidad ningún requisito al tamaño del conjunto de los objetos no matemáticos que existen.

Creo que esto es suficiente para mostrar que las críticas de Rayo y Uzquiano no afectan realmente al estructuralista que pretende usar el teorema de McGee para solucionar el problema de la no-categoricidad de la teoría de conjuntos. Sin embargo, creo que esto mismo muestra que la respuesta dada por el teorema de McGee es insatisfactoria, pues contesta a la pregunta ¿cuántos conjuntos hay? con la respuesta todos los que hay. Recordemos que esta respuesta era necesaria para poder capturar la estructura del universo de los conjuntos. De acuerdo con el teorema de Zermelo lo único que nos faltaba para lograrlo era fijar el tamaño del universo conjuntista. Así, el teorema de McGee parece responder a la pregunta cuál es la estructura del universo conjuntista, diciendo: "Pues exactemente la estructura del universo de los conjuntos", lo cual es muy poco informativo e insatisfactorio. En realidad no parece ayudarnos a fijar con suficiente precisión[144] la estructura del universo de los conjuntos que es lo que al final espera el estructuralista. Como veremos más adelante esto no desacredita por completo al teorema de McGee, pero por lo menos nos mostrará que el teorema de Zermelo es aún muy útil. Esta discusión continuará en la última sección de este capítulo.

Hasta aquí mi tratamiento del artículo de Rayo y Uzquiano ha sido puramente negativo, pero quiero rescatar un par de resultados propuestos por ellos, sus resultados limitativos.

El primero de ellos nos garantiza que no podemos tener una teoría de conjuntos que sea una extensión de ZFC2 que sea categórica, satisfacible y recursivamente axiomatizable, si suponemos un principio general de reflexión.

> **Primer resultado limitativo.**
> *Si el principio de reflexión global de segundo orden se tiene, entonces ningún conjunto recursivo y satisfacible de oraciones verdaderas del lenguaje de la teoría de conjuntos es categórico.* (*Ibíd,* p. 4)[145]

144Cuando digo aquí con suficiente presición me refiero a que nos ayude a capturar todo lo que el matemático sabe sobre el modelo pretendido de la teoría de conjuntos.

145"**First Limitative Resultados**
If the Principle of Second-order Global Reflection obtains, then no recursive and satisfiable set of true sentences of the language of set theory is categorical." La traducción es mía.

Esto en principio parece no ser un golpe definitivo para el estructuralista, pues bastaría que rechace este principio para evitar tener este resultado. Sin embargo, la mayoría de los estructuralista aceptan este principio, como lo vimos en el capítulo 2 para el caso de la teoría de Shapiro. Shapiro usaba este principio en su teoría de las estructuras. Así que este resultado garantiza que la teoría de conjuntos no tiene y no puede tener una una axiomatización en segundo orden que cumpla con ser recursiva, satisfacible y categórica.

El segundo resultado es sobre los requisitos de tamaño que impone la teoría de conjuntos a sus modelos. El resultado muestra que la teoría de conjuntos no es estable, es decir, que no existe un cardinal κ tal que existe un modelo de la teoría cuyo dominio tiene cardinal κ y para cualquier cardinal $\lambda>\kappa$, sucede que existe un modelo de la teoría cuyo dominio tiene cardinal λ, es decir, que siempre existen saltos entre la cardinalidad de un modelo y el siguiente.

> **Segundo resultado limitativo.**
> *Ninguna teoría que extienda ZFCU2 que sea satisfacible en el dominio de tamaño de un conjunto es estable* (*Ibíd,* p. 9)[146]

Este teorema será de relevancia en especial en la siguiente sección cuando se proponga una solución al problema del estructuralista apelando al doble papel de la teoría de conjuntos en la filosofía estructuralista.

3.4 El teorema de Zermelo y el estructuralismo.

En esta última sección de trabajo quiero proponer una solución para el problema que tiene el estructuralista generado por la no-categoricidad de la teoría de conjuntos. Una respuesta similar se encuentra en el trabajo de Geoffrey Hellman titulado "Maximality vs. Extendability: Reflections on Structuralism and Set Theory", publicado en el año 2002. La única diferencia es en los detalles, pues Hellman pretende usar la estrategia que presentaré a continuación para defender su propia versión del estructuralismo, a saber, el estructuralismo modal. La estrategia es bastante simple y consiste en hacer notar que la teoría de conjuntos juega un doble papel en la propuesta estructuralista, uno como teoría de fondo y otro como una teoría matemática más. Usando este hecho, se pretende justificar que la teoría de conjuntos no debe cumplir con el requisito de categoricidad y que es suficiente que se tenga la cuasi-categoricidad dada por el teorema de Zermelo.

La teoría de conjuntos es antes que nada una teoría matemática más, tal como la teoría de gráficas, la

---

146"**Second Limitative Result**
No theory extending ZFCU2 that is satisfacible in set-sized domain is stable." La traducción es mía.

aritmética o el análisis real. En cuanto tal es que se requiere de ella que cumpla los requisitos impuestos por la epistemología estructuralista. En tanto teoría matemática esperamos poder explicar cómo es que aprehendemos su estructura. Es por ello, que por lo menos en principio, esperamos dar una axiomatización de ella que cumpla con ser satisfacible, recursivamente axiomatizable y categórica. Sin embargo, la teoría de conjuntos no sólo es vista por el estructuralista como un teoría matemática a analizar, sino como la teoría de fondo para reconstruir su propuesta.

En qué sentido es la teoría de conjuntos la teoría de fondo para el estructuralismo es algo que merece una respuesta más o menos detallada. Recordemos que existen diferentes tipos de estructuralismo. En el caso del estructuralismo eliminativista, la teoría de conjuntos claramente juega el papel de teoría de fondo, pues es desde ella que se demuestra que los diferentes modelos de una teoría (como la aritmética) son isomorfos. En otros tipos de estructuralismo como el estructuralismo modal de Hellman o el estructuralismo *Ante rem* de Shapiro las teorías base en donde se reconstruyen las relaciones de isomorfismo son diferentes, en el primer caso es la teoría modal de modelos y en el segundo caso la teoría de estructuras. Sin embargo, como ya lo hice notar en el capítulo 2, estas teorías pueden ser vistas como equivalentes, o variantes notacionales, su diferencia más importante es a nivel filosófico, todas ellas pueden dar los mismo resultados a nivel de justificación del estructuralismo. Así es que de una u otra forma la teoría de conjuntos juega el papel de marco teórico en la propuesta estructuralista. En palabra de Hellman:

> La teoría de conjuntos sirve como un marco universal en el que todas las matemáticas estándar clásicas pueden reconstruirse. [...] TC sirve como un estándar de la prueba matemática clásica y como una teoría general de la existencia matemática. (Hellman, 2002, p. 338)[147]

Este papel de marco teórico para resolver cuestiones filosóficas de la matemática, como cuándo una prueba es correcta o cuándo estamos justificados en aceptar la existencia de un objeto matemático, requiere que la teoría de conjuntos sea extremadamente flexible, que pueda incluir entre sus objetos conjuntos que puedan servir para representar a objetos matemáticos de cualquier otra teoría matemática.

> Es interesante, sin embargo, que incluso antes del notable descubrimiento de Gödel, la teoría de conjuntos también habían comenzado a ser vista como una parte de las matemáticas en sí misma, tratando no sólo con un universo definido de conjuntos – se propone como marco ontológico suficiente para las matemáticas clásicas. Pero con múltiples universos, de hecho, con un número infinito sin límites, como se describe en Zermelo (1930). Como tal, se asemeja a álgebra abstracta en vez de la teoría de números, y puede ser abordado con un espíritu

147“[S]et theory served as a universal framework in which all of standard, classical mathematics could be carried out. […] It serves both as a standard of classical mathematics proof and as general theory of mathematical existence.” La traducción es mía.

> estructuralista, junto con otras teorías matemáticas (incluida la teoría de números, así, cabe señalar). (*Idem.*)[148]

Esto parece requerir que la teoría de conjuntos en principio no tenga una estructura completamente determinada, pues de ser así, podría no servir para analizar algunas teorías matemáticas. En realidad esto no es nada claro, como habíamos dicho lo único que se requería para poder fijar con toda precisión la estructura de la teoría de conjuntos era establecer la cardinalidad de la altura del modelo. Supongamos que hemos hecho esto y que la cardinalidad del modelo es λ un cardinal fuertemente inaccesible. A primera vista parece que si se nos presenta una teoría no-algebraica cuyo dominio de objetos tiene una cardinalidad mayor a λ entonces no podríamos utilizar la teoría de conjuntos para modelarla, pues no tendríamos nunca conjuntos de suficiente tamaño. Esto no es del todo cierto, pues bien podríamos establecer modelos para la teoría con cardinalidad menor a la pretendida pero que hicieran verdaderas todas las oraciones que son teoremas de la nueva teoría. El problema realmente grande si queremos utilizar a la teoría de conjuntos para fijar la estructura de dicha teoría, pues no tendríamos manera de garantizar la existencia de una estructura con tantos lugares. Es en este último sentido que tener una teoría de conjuntos abierta (sin haber fijado el tamaño de sus modelos) puede ser ventajosa para el estructuralista. Con todo, la posibilidad de que se presente una teoría matemática que tenga un modelo pretendido de tal tamaño es muy remota, pero no por ello debe ser descartada.

Parece que por su mismo origen y función esperamos de la teoría de conjuntos que sea tan poderosa que pueda reconstruir a todas (o casi todas) las teoría matemáticas, pero esto parece implicar que debe ser lo suficientemente flexible como para poder capturar la estructura de cualquier otra teoría matemática. Esta flexibilidad parece imponernos también un requisito que permita que la teoría conjuntos, por lo menos en principio, no tenga una estructura completamente determinada, pues de ser así no tendríamos la certeza de poder analizar otras teorías. De hecho, como bien señala Hellman, ésta parece la idea de fondo del trabajo de Zermelo.

> Nuestro sistema de axiomas no es categórico, que en este caso no es una desventaja, sino más bien una ventaja, porque en este hecho descansa la enorme importancia y aplicabilidad ilimitada de la teoría de conjuntos. (Zermelo, 1996, p. 1232)[149]

148"It is intersting, however, that even prior to Gödel's remarkable discovery, set theory had also begun to be viewed as a part of mathematics in its own right, dealing not with just one fixed universe of sets–*the* proposed sufficient ontological framework for classical mathematics–but with *multiple universes*, indeed with boundlessly infinitely many, as described in Zermelo (1930). As such, it resembles abstract algebra rather than number theory, and it can be approached in a structuralist spirit along with other mathematical theories (incluiding number theory as well, it should be noted)." La traducción es mía.

149"Our axiom system is *non-categorical*, which in this case is not a disadvantage but rather an *advantage*, for on this very fact rests the enormous importance and unlimited applicability of set theory." La traducción es mía.

Dicho esto, parece razonable no esperar que la estructura de la teoría de conjuntos esté por completo determinada, justo en este hecho parece descansar su poder como teoría de fondo. Con todo, el teorema de Zermelo nos da una buena idea de como deben de ser los modelos de la teoría de conjuntos (en su versión de segundo orden, que es la que parece recuperar las intuiciones originales que teníamos sobre la noción de conjunto). Por ejemplo, a partir del teorema sabemos que todos los modelos de la teoría de conjuntos pueden ser divididos en estratos bien definidos, que el tamaño de cualquier modelo debe ser isomorfo a un cardinal fuertemente inaccesible y que si no contemplamos la existencia de urelementos, todos los modelos de la teoría de conjuntos deben ser un segmento inicial de la jerarquía acumulativa.

Así si esperamos que la teoría de conjuntos sirva como marco teórico para nuestro análisis es razonable esperar que su estructura no este completamente determinada, para permitirnos recuperar la mayor cantidad de teorías matemáticas. Pero si esto es así, esto debería afectar los requisitos que la epistemología estructuralista impone para la aprehensión de la estructura de la teoría de conjuntos. En particular, el requisito de categoricidad debe ser substituido por uno más adecuado a la naturaleza de la teoría de conjuntos.

Desde mi punto de vista existen dos opciones de modificación: 1) requerir cuasi-categoricidad de la teoría o bien 2) aceptar la categoricidad proporcionada por el teorema de McGee.

Si optamos por la opción 1) tendríamos que el teorema de Zermelo nos permitiría garantizar la aprehensión las estructuras que representan a la teoría de conjuntos, que son segmentos iniciales de la jerarquía acumulativa de conjuntos (o modelo isomorfos a ellos) hasta un cardinal fuertemente inaccesible. En realidad parece que el teorema de cuasi-categoricidad nos ayuda a recuperar todo lo que sabemos sobre la teoría de conjuntos. Nuestro conocimiento sobre la estructura de la teoría de conjuntos se refinará en la medida que los matemáticos desarrollen más la teoría. Un problema con esto es que no parece ser una respuesta muy acorde con la filosofía estructuralista.

La opción 2), aceptar los teoremas de McGee nos permitiría garantizar que la jerarquía acumulativa completa es el modelo pretendido de la teoría de conjuntos (en realidad el modelo clase). El teorema nos dice, junto con el de Zermelo, que la jerarquía acumulativa de conjuntos es el modelo pretendido de la teoría de conjuntos, afortunadamente no nos dice cuál es exactamente el tamaño de la jerarquía, lo que nos permite seguir teniendo una visión de la teoría de conjuntos como una teoría abierta y con posibilidades de seguirse desarrollando. Esto estaría en sintonía con los supuestos estructuralistas, pero como ya he argumentado, esto en realidad no nos ofrece mucha información sobre la estructura, no mucha más de la que ya nos daba el teorema de Zermelo. Esto no tiene porque ser un problema grave, la única diferencia con los resultados que se obtienen al aceptar la opción 1) es que tenemos la garantía de que JC es el modelo pretendido de la teoría. Los detalles sobre si dicha estructura contiene o no objetos como los cardinales fuertemente inaccesibles o los supercompactos queda de igual forma en la obscuridad.

Así la propuesta es: para resolver el problema epistemológico originado por la no-categoricidad de la teoría de conjuntos, sólo tenemos que observar que la teoría de conjuntos juega dos papeles en la filosofía de las matemáticas y esto no lleva modificar el requisito de categoricidad en su caso. Además, el teorema de cuasi-categoricidad de Zermelo o el teorema de McGee parecen ser todo lo que necesitamos para defender una epistemología estructuralista.

Para concluir debemos ver que como cada una de las dos opciones soluciona el problema ontológico que suscitaba la no-categoricidad de la teoría de conjuntos y que tenía que ver con la falta de garantía de que todas las reconstrucciones de las teoría no algebraicas fuesen idénticas, de otra forma perderíamos también al resto de las teorías no-algebraicas.

En el caso de la opción 2) parece claro que el problema queda resuelto, pues hay un sólo modelo pretendido que es la jerarquía acumulativa de conjuntos y en este sentido hay una única reconstrucción de las estructuras de las teorías no algebraicas.

En el caso de la opción 1) basta con notar que la mayoría de las matemáticas clásicas se definen en niveles muy bajos de la jerarquía acumulativa de conjuntos, en niveles menores al indexado por el primer cardinal fuertemente inaccesible. Esto es cierto en particular para todos nuestros ejemplos de teorías no-algebraicas como la aritmética de Peano, el análisis real, el análisis funcional y la geometría euclidiana. Esto quiere decir que la mayoría de las matemáticas se pueden reconstruir y analizar en el modelo mínimo de la teoría de conjuntos es decir en el modelo dado por el nivel indexado por el primer cardinal fuertemente inaccesible.[150] Así que la reconstrucción de dichas teoría es la misma en todos los modelos posibles de la teoría conjuntos, pues se realiza en la parte que es común a todos. Con esto queda resuelto el problema ontológico originado por la no-categoricidad de la teoría de conjuntos.

150Algo interesante de mencionar es que incluso la hipótesis del continuo se resuelve en el modelo mínimo, lo cual no quiere decir que podamos dar su valor de verdad, sino que podemos garantizar que tiene un valor de verdad determinado.

3.5 Nota final

Antes de concluir el trabajo me gustaría presentar algunas notas sobre los modelos de la teoría de conjuntos presentada por Vann McGee, a la luz de los resultados formales de Rayo y Uzquiano.

Ellos muestran que la teoría de conjuntos ZFCU2 + axioma de urelementos con una interpretación irrestrica para los cuantificadores de primer orden impone un requisito al tamaño de todo lo que hay y que dicho requisito es incompatible al requisito de una teoría de clases con características similares. Esto como vimos no es un gran problema, considerando que ambas teorías son incompatibles en sus compromisos ontológicos, aunque son prácticamente equivalentes a nivel matemático. Es muy probable que se tenga algo muy similar respecto a teoría de categorías, es decir, que imponga requisitos de tamaño para todo lo que hay, diferentes a los de la teoría de conjuntos. Lo que tiene estas teorías en común es que todas ellas se proponen como marcos teóricos para la matemática completa. Si consideramos esto, tendremos que si podemos fijar la estructura de una de ella, podremos capturar sin necesidad de usar cuantificación irrestrica a las otras, siempre y cuando sean menos generales. En este sentido, podemos decir que si fijamos la estructura de la teoría de categorías, podemos fijar la estructura de la teoría de clases y de la teoría de conjuntos sin usar cuantificación irrestricta; si fijamos la estructura de la teoría de clase, podemos hacer lo propio con la teoría de conjuntos. La idea detrás de esto es que la teoría que sea más general es la que requiere el uso de cuantificación irrestrica para poder fijar su estructura, pues al ser la más general es la que nos proporciona la totalidad de los objetos. Así, otra forma de solucionar el problema de la incompatibilidad de los requisitos de tamaño es aplicar sólo cuantificación irrestricta a la teoría más general que aceptemos. Mi intuición es que esa debe ser la teoría de categorías, pero la justificación de esto excede los límites de este trabajo.

Conclusiones.

- El estructuralismo que defiende un realismo en valor de verdad está comprometido, si es que quiere responder al dilema de Benacerraf, a proporcionar teoría matemáticas no-algebraicas recursivamente axiomatizables, satisfacibles y categóricas.
- Si se adopta el lenguaje de segundo orden en matemáticas podemos proporcionar teorías que cumplan estos requisitos, para prácticamente todas las teorías no-algebraicas, a excepción de la teoría de conjuntos.
- Tenemos buenas razones para creer que la teoría de conjuntos es una teoría no-algebraica, pero sólo tenemos un teorema de cuasi-categoricidad para ella, dado por Zermelo en 1930. Esto representa un desafío para el estructuralismo matemático.
- El problema se resuelve analizando el doble papel que juega la teoría de conjuntos en la filosofía de las matemáticas, en particular en el estructuralismo, como marco teórico y como una teoría matemática más.
- El teorema de cuasi-categoricidad de Zermelo nos proporciona lo necesario para defender al estructuralismo. Además nos garantiza que prácticamente todas las oraciones de la matemática clásicas (de las teoría no-algebraicas) tiene un valor de verdad determinado, con la excepción de algunas oraciones que se resuelven en niveles muy altos de la jerarquía acumulativa.
- El teorema de categoricidad para la teoría de conjuntos propuesto por Vann McGee en 1997, no es de mucha ayuda, si lo que esperamos es aprehender la estructura del universo conjuntista, no nos da más de lo que ya nos daba el teorema de Zermelo. Pero parece reflejar la intuición de que la teoría de conjuntos nos proporciona todos lo objetos que hay, partiendo de los objetos que nos son conjuntos. En este sentido, se explica la incompatibilidad con otras teoría que se proponen como marcos teóricos para la matemática como la teoría de clases o la teoría de categorías.

Apéndice: Demostración del teorema de Zermelo.

A.1 ZFCU2

Axiomas de ZFCU2.

El sistema ZFCU2 contempla la existencia de urelementos en sus modelos, es por ello que requerimos de un predicado *set* para poder distinguir a los conjuntos de los urelementos. Esto da como resultado que algunos de los axiomas de ZFCU2 requieran ajustes para restringuirlos con el predicado *set*.

Axioma de extensionalidad: $(\forall x(x \in a \equiv x \in b) \wedge Set(a) \wedge Set(b)) \supset a=b$

Axioma de separación: $\forall x \forall X(set(x) \supset \exists y(set(y) \wedge \forall z(z \in y \equiv (Xz \wedge z \in x)))$

Axioma de par: $\forall x \forall y \exists z(set(z) \wedge \forall w(w \in z \equiv (w = x \vee w = y))$

Axioma de conjunto potencia: $\forall x(set(x) \supset \exists y(set(y) \wedge \forall z(z \in y \equiv ((z \subseteq x \wedge z \neq \emptyset) \vee z = u))$, donde u es un urelemento arbitrario.

Axioma de unión: $\forall x(set(x) \supset \exists y(set(y) \wedge \forall z(z \in y \equiv \exists w(w \in x \wedge z \in w)))$

Axioma de infinito: $\exists x(set(x) \wedge \emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$

Axioma de buena fundación: $\forall x((x \neq \emptyset \wedge set(x)) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge set(y) \wedge \forall z(z \in y \rightarrow z \notin x)))$

Axioma de reemplazo: $\forall x(set(x) \supset \forall R(\forall y \forall z(\exists w(w \in x \ \& \ R(w,y) \ \& \ R(w,z)) \rightarrow y=z) \rightarrow \exists y(set(y) \wedge \forall z(z \in y \equiv \exists w(w \in x \ \& \ R(w,z)))$

Para acabar debemos definir el conjunto vacío que hasta este punto es sólo una constante.

Def. $\emptyset = x$, tal que $set(x) \wedge \forall y(y \notin x)$.

También podemos definir ser un urelemento.

Def. x es un urelemento sii ~set(x).

Definamos un dominio normal para ZFCU2, como un modelo compuesto de conjuntos y urelementos que satisfaga todos los axiomas de ZFCU2.

Def. Un dominio normal es una triada ordenada <U,S,E>, donde U[151] es un conjunto con urlementos y conjuntos como miembros (el dominio de interpretación), S es un subconjunto de U (que sirve para interpretar el predicado set(x)) y E es un subconjunto de UxU (que sirve para interpretar la relación de pertenencia), que además cumple con <U,S,E> $\models$ x, para toda x que sea axioma de ZFCU2.

Def. Dado un dominio normal P = <U,S,E>, decimos que su base es $Q=\{x \in U | x \notin S\}$, es decir, Q, la base de un dominio normal, es el conjunto[152] de todos sus urelementos.

Def. Sea un urelemento u, podemos definir la siguiente secuencia:

$g_0 = u$

$g_{\alpha+1} = g_\alpha \cup \{g_\alpha\}$ para todo ordinal α.

$g_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} g_\beta$ cuando α es ordinal límite.

Decimos que x es un secuencia básica sii existe un urlemento u tal que $x = g_\alpha$ para algún ordinal α.

Def. El tipo ordinal de un conjunto bien ordenado es el único ordinal con el que es isomorfo.[153]

Proposición 0: toda secuencia básica con índice mayor a 0 es un conjunto transitivo bien ordenado por la pertenencia.

Como se puede ver las secuencias básicas son isomorfas a los ordinales usuales, de hecho cada secuencias básica es isomorfa al ordinal que le sirve de índice, con la única diferencia de que su primer elemento no es el vacío, sino un urelemento.

Con ayuda de estas definiciones podemos formular las siguientes proposiciones, las 5 primeras expresan propiedades análogas propiedades de los ordinales.

151 Tal como los definimos los dominio normales son modelos, no clase-modelos. Esto puede generar confusión, pues dado P=<U,S,E> un dominio normal, dentro de P U, S y E son clases propias, pero vistos desde fuera son conjuntos. La idea de fondo es que dado P, existe un dominio normal P'=<U',S',E'> más grande que P, tal que dentro de P' U, S y E son conjuntos, pero de nuevo, dentro de P' U', S' y E' son clases propias, para verlos como conjuntos, tenemos que apelar a un dominio P'' aún más grande.

152 De nuevo, Q puede ser un conjunto o una clase propia dentro de P, pero es un conjunto visto desde fuera del dominio normal.

153 De hecho, cualquier conjunto puede tener un tipo ordinal, pues dado cualquier conjunto x, por el teorema del buen orden, se puede bien ordenar a x con una relación r y en consecuencia <x,r> es isomorfo a un único ordinal que es su tipo ordinal. El problema con esto es que dependiendo de cual sea la relación r, el tipo ordinal puede variar.

Proposición 1. Para toda secuencia básica g_α, se cumple que:

1) Para todo x que pertenece a g_α, sucede que para toda g_β con $\alpha<\beta$, $x \in g_\beta$.
2) Para toda g_β con $\beta < \alpha$, $g_\beta \in g_\alpha$.

Proposición 2. Para toda secuencia básica g_α se cumple que para todo x si $x \in g_\alpha$, entonces x es una secuencia básica.

Proposición 3. Si g es una secuencia básica, entonces $g \cup \{g\}=g'$ es una secuencia básica, el tipo ordinal de g' es el sucesor del tipo ordinal de g.

Proposición 4. Si G es un conjunto de secuencias básicas construidas a partir del mismo urelemento y no existe un $x \in G$ tal que para todo $y \in G$, $y \leq x$ (es decir, si no tiene un $\in$-máximo), entonces $\cup G$ es una secuencia básica y el tipo ordinal de la secuencia es el mínima cota superior de todos los tipos ordinales de las secuencias básicas en G. Si G tiene un elemento $\in$-máximo, g_α, entonces $\cup G = g_\alpha$.

Def. Dadas dos secuencias básicas g_α y g_β, construidas a partir del mismo urelemento, decimos que $g_\alpha < g_\beta$ sii $g_\alpha \in g_\beta$.

Proposición 5. Dadas dos secuencias básicas g_α y g_β, con el mismo elemento inicial y tal que $\alpha < \beta$, tenemos que $g_\alpha \subset g_\beta$ y $g_\alpha \in g_\beta$. En este sentido podemos decir que si $\alpha < \beta$, entonces $g_\alpha < g_\beta$, siempre y cuando ambas secuencias básicas se hayan construido a partir del mismo urelemento.

Proposición 6. Dado un dominio normal $P = \langle U,S,E \rangle$, si u es un urelemento que pertenece a P y r es un conjunto bien ordenado que pertenece a P, que es isomorfo al ordinal α, entonces existe en P una secuencia básica cuyo primer elemento es u y cuyo tipo ordinal es α, g_α.
Dem: Supongamos, por inducción transfinita sobre los ordinales, que la proposición se cumple para todo ordinal $\beta < \alpha$, probemos para α. Tenemos dos casos cuando α es sucesor y cuando α es límite.
Caso 1: Sea $\alpha = \beta+1$, tenemos por la hipótesis que existe en P $g_\beta \cong \beta$, y por la proposición 3 tenemos que existe en P $g' = g_\beta \cup \{g_\beta\}$, cuyo tipo ordinal es $\beta+1 = \alpha$.
Caso 2: Sea α un ordinal límite, por hipótesis de inducción sabemos que existen en U g_β para todo $\beta <$

α y que existe r en S un conjunto bien ordenado isomorfo a α. Por el axioma de reemplazo tenemos que existe en S un conjunto A de tipo ordinal α que tiene como elementos a todas y sólo las g_β para todo $\beta < \alpha$. Puede verse que $A = \{x \in U | x=g_\beta$, para alguna $\beta<\alpha\} = \cup_{\beta<\alpha} g_\beta$ y por la proposición 4 tenemos que $\cup_{\beta<\alpha} g_\beta$ es una secuencia básica de tipo α.

Proposición 7. La totalidad de las secuencias básicas g_α de un dominio normal P que comienzan por el mismo urelemento u forman un subconjunto bien ordenado G_u de U, y los ordinales α correspondientes a cada secuencia básica forman un segmento bien ordenado Z_π de los números ordinales, cuyo tipo ordinal es π. No existe en P un conjunto que contenga como elementos a todas las secuencias básicas de G_u. Lo que impide al mismo tiempo que exista un conjunto bien ordenado en P de tipo ordinal π. π es la mínima cota superior de los tipos ordinales de las secuencias básicas en P.

Dem: Supongamos que existe en P un conjunto que contiene a todas las secuencias básicas de P, llamémoslo G. Por la proposición 4, G es una secuencia básica de tipo π. Pero por definición de π, tenemos que $\pi \in \pi$, contradicción pues π es un ordinal. Esto muestra que no puede existir en S un conjunto que contenga a todas las secuencias básicas de P. Falta mostrar no puede existir conjunto bien ordenado de tipo ordinal π.

Supongamos que existe un conjunto bien ordenado de tipo ordinal π, llamémoslo O. Por el axioma de reemplazo tenemos que podemos sustituir a todos los elementos de O por todas y cada una de las secuencias básicas de P, generando un conjunto que contiene a todas las secuencia básicas de P, lo cual como acabamos de ver es imposible. Por lo tanto no puede existir en P un conjunto bien ordenado de tipo ordinal π.

Def. Dado un dominio normal P, la característica de P es un ordinal π tal que es el mínimo ordinal que es mayor que todos los ordinales que son isomorfos a alguna secuencia básica en P. En otra palabras, π es la mínima cota superior de todos los tipos ordinales de conjuntos en P.

La característica de un dominio normal es un ordinal con características bien definidas por los siguientes dos teoremas.

Teorema I. Dado un dominio normal P, su característica π es un cardinal inaccesible.

Dem.:

1. π es ordinal regular inicial. Supongamos que no lo es. Entonces existe un ordinal $\rho < \pi$, que es cofinal con π. Entonces la secuencia Z_π de ordinales contiene una sub-secuencia de tipo ordinal ρ, que está conformada por un conjunto ordinales $\alpha_\nu < \pi$ que pertenecen a una secuencia ordinal $Z_\alpha < Z_\pi$.

Así, para cada urelemento u y para todo α_ν existe en P un secuencia básica g_{α_ν}. Tenemos que en P existe el conjunto $G_{\alpha\nu}$ de todas las secuencias básicas g_{α_ν}. Pero de acuerdo con la proposición 4, tenemos que $\cup G_{\alpha\nu}$ es una secuencia básica en P, cuyo tipo ordinal es α. Pero como $\alpha = \text{lím}\ \alpha_\nu = \pi$, !. Por lo tanto, π es un ordinal regular inicial.

2. π es cardinal límite. Supongamos que es un cardinal sucesor, $\omega_{\alpha+1}$. Entonces $\omega_\alpha < \pi$ y por ello hay una secuencia g_{ω_α} que pertenece a P. Entonces $\wp(g_{\omega_\alpha})$ también pertenece a P, pero $|\pi| = |\omega_{\alpha+1}| \leq |\wp(g_{\omega_\alpha})|$. Lo que es una contradicción. Por lo tanto, π es un cardinal límite regular.

Definamos la función Ψ. Debemos notar que para todo ξ ordinal representado en el dominio normal P, existe una secuencia básica g_ξ en P, por la proposición 6. También se puede ver que existe en P un conjunto bien ordenado isomorfo a $|\wp(\xi)|$, como consecuencia del axioma de potencia, llamaremos a este cardinal ξ^*. Y por la proposición 6 tenemos que existe una secuencia básica g_{ξ^*}. Esto nos permite definir una función Φ: OR $\rightarrow$ OR, tal que para todo ordinal $\alpha \in Z_\pi$, $\Phi(\alpha)=|\wp(\alpha)|=\alpha^*$. Está función manda a muchos ordinales al mismo cardinal (para α infinitos). Para normalizarla, es decir, para obtener una función que sea inyectiva, continua y creciente, definimos por recursión la función Ψ.

1) $\Psi(0) = 0$
2) $\Psi(\alpha+1) = \psi(\alpha)^* = \Phi(\Psi(\alpha))$
3) $\Psi(\alpha) = \text{lím}_{\beta<\alpha}\ \Psi(\beta)$ cuando α es límite.

Falta ver que la función Ψ es normal. Veamos que es creciente. Supongamos, por hipótesis para hacer una inducción transfinita, que Ψ es creciente para todo x ordinal menor que β y probemos que es creciente para β. Sean α un ordinal tal que $\alpha < \beta$, sabemos que $\alpha+1 \leq \beta$. Es claro que, $\Psi(\alpha) < \phi(\Psi(\alpha)) = \psi(\alpha+1) \leq \Psi(\beta)$. Por lo que Ψ es creciente. Veamos ahora que Ψ es continua. Por la definición, sabemos que $\text{lím}\{\Psi(\alpha_\nu) \mid \alpha_\nu < \alpha\} = \Psi(\text{lím}\{\alpha_\nu \mid \alpha_\nu < \alpha\}$, por lo que el Ψ es continua y podemos garantizar que es una función normal.

Teorema II. Dado un dominio normal P, con característica π. Tenemos que $\pi = \Psi(\pi)$.

Dem.: Notemos que la función $\Psi(x)$ permite biyectar el segmento Z_π con un subconjunto propio de el mismo. Esto implica que para todo ordinal $\alpha < \pi$, tenemos que $\Psi(\alpha) < \pi$. Esto puede probarse por inducción transfinita. Dado un ordinal α supongamos que todos los anteriores cumplen que si $\beta < \pi$, entonces $\Psi(\beta) < \pi$. Caso 1: Supongamos que α es ordinal sucesor menor que π, entonces $\alpha=\beta+1$. Tenemos que $\Psi(\alpha) = \Psi(\beta+1) = \phi(\Psi(\beta)) < \pi$. Caso 2: Supongamos que α es límite, entonces existe g_α cuyos elementos son los g_β con $\beta < \alpha$ a los cuales les corresponden un único $g_{\Psi(\beta)}$ tales que cumplen, por la hipótesis, con $g_{\Psi(\beta)} < g_\pi$. Pero la unión de todos estas secuencias básicas es, por la proposición 4, una secuencia básica g_ρ de P, por lo que $g_\rho < g_\pi$. Además, $\rho=\text{lím}\ \Psi(\beta) = \Psi(\alpha)$. Por lo tanto, para todo $\alpha < \pi$, $\Psi(\alpha) < \Psi(\pi)$.

Finalmente, probemos que $\pi = \Psi(\pi)$. Sabemos que $\Psi(\pi) = \text{lím}_{\alpha<\pi}\ \Psi(\alpha)$. Supongamos que $\pi < \Psi(\pi)$, entonces existe un $\alpha < \pi$ tal que $\pi < \Psi(\alpha)$, lo que contradice lo que acabamos de probar. Y como $\Psi(\alpha)$ es una función normal, tenemos que $\pi \leq \Psi(\pi)$, lo que implica que $\pi = \Psi(\pi)$.

Corolario 1: π es un cardinal fuertemente inaccesible.

Estamos listos para presentar los teoremas de desarrollo que nos permiten caracterizar a los dominios normales.

Tal como están definidos los dominios normales es posible que los urelementos de un modelo sean tantos que desde dentro del modelo sean una clase propia, es decir, que desde dentro del modelo no puedan ser visto como un conjunto. Esto sucederá cuando el cardinal del conjunto de los urelementos sea igual o mayor que la característica del modelo. En esos casos, el modelo no tendrá como elementos a todos los conjuntos que se pueden formar a partir de sus urelementos, en particular no tendrá como elemento a ningún conjunto de urelementos con cardinalidad igual o mayor a la caraccterística del modelo.

Teorema III: Dado un dominio normal $P = \langle U,S,E \rangle$ cuya característica es π y con $Q= \{x \in U \mid x \notin S\}$. No existe en P un conjunto x tal que $\forall y(y \in x \supset \sim set(x)) \wedge \pi \leq |x|$.

Dem: En el caso en que $|Q| < \pi$, el resultado es trivial. Consideremos que $\pi \leq |Q|$. Supongamos que sí existen conjuntos de urelementos con cardinalidad mayor o igual a la característica, sea z uno de esos conjuntos. Como $|z| \geq \pi$, por el axioma de separación tenemos $z_\pi \subseteq z$, tal que $|z_\pi| = \pi$. Luego por el teorema del buen orden, podemos bien ordenar a z_π, y por la proposición 4 existe en P un g_π, contradicción.

Lema 1: Dado un dominio normal P = <U,S,E>, consideremos una subestructura M de P, tal que M = $<U^M \subseteq U, S^M, E^M>$, con $U^M \neq \varnothing$. Si se cumplen:

1) $\forall x(x \in U^M \supset \forall y(y \in x \supset y \in U^M))$ y
2) $\forall x((x \in U \wedge \forall y(y \in x \supset y \in U^M)) \supset x \in U^M)$,

entonces M es un dominio normal. Además, si $\{x \in U| \, x \notin S)\} = \{x \in U^M| \, x \notin S^M\}$, entonces P = M.
Dem: Sea M = $<U^M \subseteq U, S^M, E^M>$ una subestructura de un dominio normal P = <U,S,E>, tal que cumple con 1) y 2) y $U^M \neq \varnothing$. M es modelo de extensionalidad, pues P es modelo de extensionalidad.
Sean a, b elementos de U^M, entonces $\{a,b\} \in S$, pues P es modelo del axioma de par, pero entonces por la condición 2), $\{a,b\} \in S^M$. Por lo que, M es modelo del axioma de par. Una estrategia muy similar se puede seguir para probar que M es modelo de reemplazo, separación, unión, potencia, buena fundación e infinito. Por lo que M es un dominio normal.
Supongamos que $Q = \{x \in U| \, x \notin S)\} = \{x \in U^M| \, x \notin S^M\} = Q^M$, pero que $P \neq M$. Consideremos $R = U - U^M \neq \varnothing$. R no contiene urelementos por hipótesis. Sea $r \in R$, por nuestra suposisción de que M cumple con 2), existe por lo menos un $x_1 \in r$ tal que $x_1 \notin U^M$, entonces $x_1 \in R$. Pero entonces, existe por lo menos un $x_2 \in x_1$ tal que $x_2 \notin U^M$, entonces $x_2 \in R$. Este razonamiento se puede repetir infinitas veces, generando un cadena infinita de pertenencia, lo que contrafice el axioma de buena fundación. Por lo tanto, si $Q = Q^M$, entonces P = M.

Primer teorema de desarrollo: Todo dominio normal P con característica π, puede ser dividido en una secuencia bien ordenada de niveles Q_α, indexados por todos los ordinales $\alpha < \pi$, no vacíos y disjuntos 2 a 2, en donde cada nivel tiene como elementos a todos los conjuntos que no aparecen en los niveles anteriores, pero cuyos todos elemenetos aparecen en dichos niveles. El primer nivel incluye a todos y sólo los urelementos del modelo.
Dem: Primero definamos las secuencias parciales de P
$P_1 = Q$
$P_{\alpha+1} = Q \cup \{x \in P| \, \forall y(y \in x \equiv y \in P_\alpha\}$, para α ordinal menor que π[154].

154Es importante notar que en el nivel P_2 están todos los conjuntos de urelementos con cardinalidad menor que la característica del modelo, esto debido a que no pueden existir el dominio normal conjuntos con cardinal igual o mayor a

$P_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} P_\beta$, para α ordinal límite menor π.

Usando las secuencias parciales de P podemos definir nuestra partición de P en niveles como sigue:

$Q_0 = P_1$,

$Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ para todo α ordinal tal que $0 < \alpha < \pi$.

Podemos además definir $P_\pi = \cup_{\beta<\pi} P_\beta$.

Por definición tenemos que el primer nivel Q_0 contiene a todos los urelementos de P, que vistos como secuencias básicas son g_0 para algún urelemento. Ahora probemos que para toda g_α generada a partir de cualquier urelemento, $g_\alpha \in Q_\alpha$. Supongamos que esto se cumple para todo $\beta<\alpha$ y probémoslo para α. El supuesto nos garantiza que todos los elementos de g_α, que son a su vez secuencias básicas g_β pertenecen al nivel correspondiente Q_β, pero $g_\alpha \notin Q_\beta$, para ningún $\beta<\alpha$, pues de ser así, existiría un g_β elemento de g_α en el mismo nivel, lo que contradice las condiciones de la construcción. Esto quiere decir que $g_\alpha \in P_{\alpha+1}$, pero $g_\alpha \notin P_\alpha$, lo que quiere decir que $g_\alpha \in Q_\alpha$. Por lo tanto para todo ordinal $\alpha<\pi$, $g_\alpha \in Q_\alpha$. Esto no garantiza que ningún nivel Q_α es vacío y por definición sabemos que son disjuntos 2 a 2. Falta ver que $P_\pi = P$.

Sabemos que P_π es un subconjunto de U. Consideremos un conjunto $r \in U$, tal que $\forall x(x \in r \supset x \in P_\pi)$. Entonces para todo $r_\nu \in r$, existe un Q_{α_ν}, tal que $r_\nu \in Q_{\alpha_\nu}$, los niveles Q_{α_ν} no son necesariamente diferentes. Los ordinales α_ν forman un conjunto bien ordenado de tipo ordinal $\rho < \pi$, tal que $|\rho|$ no es mayor que $|r|$. Como π es un cardinal inaccesible, no es cofinal con ningún ordinal menor que él, lo que implica que el límite α de los α_ν es menor que π. Esto quiere decir que todos los $r_\nu \in P_\alpha \subseteq P_\pi$. Además, $r \in P_{\alpha+1}$ y en consecuencias $r \in P_\pi$. Esto quiere decir que si en P_π están todos los elementos de un conjunto r que pertenece a U, entonces r también pertenece a P_π. Además, por construcción sabemos que si un conjunto r pertenece a P_π, todos sus elementos también pertenecen a P_π. Además, P_π contiene a todos los urelementos de U. Así, aplicando el lema 1, tenemos que $P_\pi = P$.

Def. Un dominio unitario es un dominio normal tal que existe un único elemento de U que satisface ~set(x).

---

la característica, como consecuencia del teorema III.

Segundo teorema de desarrollo: Todo dominio normal unitario P = <U,S,E> cumple que todo segmento P_α tiene como cardinal $\Psi(\alpha)$. P_α contiene conjuntos con cardinalidad estrictamente menor a $\Psi(\alpha)$, y todos los conjuntos en Q_α tienen cardinalidad igual o menor que $\Psi(\alpha)$. Todo $P_{\alpha+1}$ contiene como conjuntos a todos los subconjuntos de P_α. Todo P_α, con α límite, contiene como conjuntos a todos los subconjuntos de los segmentos anteriores y a los segmentos mismos. Además $|U| = \pi$. y para todo $x \subseteq U$ con cardinal menor que π, $x \in U$.

Dem: La afirmación es cierta para P_1, pues $|P_1| = 1 = \Psi(1)$ y $P_1 = Q_0 = \{u\}$, lo que cumple con que todos los conjuntos de Q_0 tiene cardinal 0 (por vacuidad) y que todos los conjuntos de P_1 tienen cardinalidad menor a $1 = \Psi(1)$ (por vacuidad). Por hipótesis de inducción transfinita, supongamos que para todo $\beta<\alpha$, $|P_\beta| = \Psi(\beta)$ y para todo $x \in Q_\beta$, $|x| \leq \Psi(\beta)$. Existen dos casos cuando α es ordinal sucesor y cuando es ordinal límite.

Caso 1: sea α un ordinal sucesor. Entonces $\alpha = \beta+1$, tal que β cumple con $|P_\beta| = \Psi(\beta)$ y para todo $x \in Q_\beta$, $|x| \leq \Psi(\beta)$, por hipótesis, $P_\alpha = P_{\beta+1} = P_\beta \cup Q_\beta$, por definición. P_α tiene como miembros a todos los subconjuntos de P_β, por lo que $|P_\alpha| = |\wp(P_\beta)| = \Phi(\Psi(\beta)) = \Psi(\beta+1) = \Psi(\alpha)$, pero todos los elementos de P_α tienen cardinalidad menor o igual a $\Psi(\beta) < \Psi(\alpha)$. Y el nivel Q_α contiene como elementos a todos los subconjuntos P_α que no aparecen como conjuntos en nigún nivel anterior, P_α mismo es el subconjunto más grande que parece en Q_α y su cardalidad es $\Psi(\alpha)$.

Caso 2: sea α un ordinal límite. Entonces $P_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} P_\beta$, en donde cada P_β cumple con lo estipulado por la hipótesis. A P_α pertenencen todos los subconjuntos de cada nivel Q_β, incluido Q_β mismo, cada nivel Q_β tiene cardinal igual a $\Psi(\beta) < \Psi(\alpha)$. Es por ello que $|P_\alpha| = \text{lím}_{\beta<\alpha} |P_\beta| = \text{lím}_{\beta<\alpha} \Psi(\beta) = \Psi(\alpha) < \pi$.

Además, se puede ver que $|U| = \pi$. y para todo $x \subseteq U$ con cardinal menor que π, $x \in U$.

Tercer teorema de desarrollo (teorema de desarrollo canónico): Todo dominio normal P = <U,S,E>, con base Q (es decir, con $Q =\{x \in U| x \notin S\}$) y característica π, puede ser dividido en niveles Q_α, indexados por todos los α menores que π. Q_0 será Q. A cada Q_α pertenencen como conjuntos todos los subconjuntos de P_α que no pertenecen a P_α y cuyo cardinal es menor o igual a $\Psi(\alpha)$. Esta última restricción no es necesaria en el caso de los dominio que unitarios (que continenen un sólo urelemento), pues el desarrollo normal en estos dominios (el descrito por el primer teorema de desarrollo) coincide con el desarrollo canónico. Con el desarrollo canónico, todo segmento $P\tau$, donde τ es un cardinal fuertemente inaccesible, es un dominio normal.

Dem.: La demostración requiere de una nueva definición de segmentos canónicos y niveles canónicos.

$P^*_1 = Q$

$P^*_{\alpha+1} = Q \cup \{x \in P| \forall y(y \in x \equiv y \in P^*_{\alpha}) \wedge |x| \leq \Psi(\alpha)\}$, para α ordinal menor que π.

$P^*_{\alpha} = \cup_{\beta<\alpha} P^*_{\beta}$, para α ordinal límite menor o igual que π.

Usando los dominios parciales canónicos podemos definir nuestra partición canónica como sigue:

$Q^*_0 = P^*_1$,

$Q^*_{\alpha} = P^*_{\alpha+1} - P^*_{\alpha}$ para todo α ordinal tal que $0 < \alpha < \pi$.

Cada nivel Q^*_{α}, con α mayor a 0, tiene como elementos a todos los conjuntos con cardinal menor a $\Psi(\alpha)$ del dominio normal P que pueden ser construidos a partir de elementos de P^*_{α} y que no pueden ser construidos en P^*_{α} mismo.

La demostración de que $P^*_{\pi} = P$ es análoga a la demostración del primer teorema de isomorfismo, usando el lema 1. La condición 2) del lema se satisface debido a que para cualquier conjunto r cuyos elementos pertenezcan a P^*_{π} tiene cardinal ρ menor que π, esto implica que r pertenece a Q^*_{ρ}. La condición 1) se satisface por construcción y por construcción la base de ambos modelos es la misma, así el resultado se tiene aplicando el lema 1.

Probemos ahora que P^*_{τ}, con τ un cardinal fuertemente inaccesible, es un dominio normal. Sea $\tau < \pi$, un cardinal fuertemente inaccesible y P^*_{τ} el segmento canoníco de P asociado a τ. P^*_{τ} tiene como elementos a conjuntos cuyo cardinal $\rho \leq \Psi(\alpha) < \Psi(\tau) = \tau$ y que pertenecen a un nivel Q^*_{α}, con $\alpha<\tau$. Además, cualquier conjunto r, tal que su tipo ordinal ρ es menor que τ que es subconjunto de P^*_{τ}, es subconjunto de algún P^*_{α} con $\alpha<\tau$, pues τ no es cofinal con ningún ordinal menor, y entonces r pertenece a un segmento P^*_{γ} con γ ordinal menor o igual a ρ. P^*_{τ} tiene como elementos a todos sus subconjuntos con cardinal menor que τ, en particular los construidos a partir del axioma de reemplazo dentro de P^*_{τ}. Además, si r es un conjunto bien ordenado en P (si no lo es se puede bien ordenar por el teorema del buen orden) tal que su tipo ordinal ρ es menor que τ, entonces $\Psi(\rho)<\Psi(\tau)=\tau$ y $|\wp(\rho)| = \Phi(\rho) \leq \Phi(\Psi(\rho)) = \Psi(\rho+1) < \tau$, lo que garantiza que $\wp(r)$ pertenezca a P^*_{τ}. Consideremos ahora una $r_I = \{x_{\nu} \in P^*\pi| \text{ x es un cardinal y } \nu \in I\}$ una secuencia de números cardinales menores que τ, bien ordenada con tipo ordinal $\sigma < \tau$, esta secuencia está acotada por $r' < \tau$, pues τ es un cardinal inaccesible. Entonces $\cup_{\nu\in I} r_{\nu} \leq r' < \tau$. Lo que garantiza que P^*_{τ} es modelo del axioma de unión. Por lo que P^*_{τ} es un dominio normal. Que además tiene como característica τ que cumple con las condiciones impuestas por los teroemas I y II.

Primer teorema de isomorfismo: Dos dominios normales P y P' con la misma característica y con bases equivalentes (es decir, que existe una biyección entre los urelementos de ambos dominios normales) son isomorfos, y el isomorfismo entre P y P' está determinado por la biyección entre sus bases.

Dem.: Sean dos dominios normales P=<U,S,E> y P'=<U',S',E'>, con caracterítica π y tal que existe una función biyectiva f:Q $\rightarrow$ Q'. La estrategia para demostrar el isomorfismo consistira en usar el primer teorema de desarrollo y mostrar que todos los segmentos P_α y P'_α son isomorfos. Puede verse que como los niveles P_1 y P'_1 sólo tiene urelementos, son isomorfos por la función f. Supongamos como hipótesis de inducción transfinita que todos los segmentos P_β y P'_β son isomorfos para todo $\beta<\alpha$, y demostremos que P_α es isomorfo a P'_α. Tenemos dos casos, cuando α es un ordinal sucesor y cuando es un ordinal límite.

Caso 1: Sea $\alpha = \beta+1$. Por hipótesis sabemos que P_β es isomorfo a P'_β, llamamos a la función que muestra el isomorfismo, δ. Sabemos que $P_\alpha = P_{\beta+1} = P_\beta \cup Q_\beta$. Sea $x \in Q_\beta$, entonces todos los elementos de x pertenecen a P_β, pero x no pertenece a P_β. Sabemos que para toda $y \in x$, $\delta(y) \in P'_\beta$, por hipótesis, sabemos además que $x'=\{y| \ y' = \delta(y) \text{ para } y \in x\}$ está en Q'_β, pues todos los elementos de x' están en P'_β, pero $x' \notin P'_\beta$, de lo contrario habría una contradicción con la hipótesis. Así podemos relacionar x con x' y obtenemos el isomorfismo deseado entre $P_\alpha = P_{\beta+1}$ y $P'_{\beta+1} = P'_\alpha$.

El isomorfismo se define como sigue:

χ: $P_\alpha \rightarrow P'_\alpha$ tal que

$\chi(x) = \delta(x)$ si $x \in P_\beta$

$\chi(x) = \{y'| \ y' = \delta(y) \text{ para } y \in x\}$ cuando $x \in Q_\beta$.

Caso 2: Sea $\alpha = \cup_{\beta<\alpha} \beta$. Por hipótesis sabemos que todo P_β es isomorfo a P'_β, cuando $\beta<\alpha$, llamamos a las función que muestran los isomorfismos, δ_β, para cada β. Sabemos que $P_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} P\beta$. Sean x, $y \in P_\alpha$ tales que $x \in y$, sabemos además que existe P_β con $\beta<\alpha$, tal que x e y pertenecen a P_β. Entonces $\delta_\beta(x) \in \delta_\beta(y)$ en el nivel P'_β, entonces tanto $\delta_\beta(x)$ como $\delta_\beta(y)$ pertenencen a P'_α y además $\delta_\beta(x) \in \delta_\beta(y)$. Lo que nos garantiza que existe un isomorfismo entre P_α y P'_α.

El isomorfismo se define como sigue:

χ: $P_\alpha \rightarrow P'_\alpha$ tal que

$\chi(x) = \delta_\beta(x)$ si $x \in Q_{\beta+1}$

Esto nos garantiza que P_π es isomorfo a P'_π, lo que asu vez nos garantiza que P es isomorfo a P'.

Segundo teorema de isomorfismo: Dados dos dominios normales P y P', tales que sus bases son equivalentes, pero con características π y π' diferentes, siempre uno (el que tenga una característica menor) es isomorfo a un segmento canónico del otro.

Dem: Sean dos dominios normales P=<U,S,E> y P'=<U',S',E'>, con caracterítica diferentes π y π' respectivamente, tal que existe una función biyectiva f:Q $\rightarrow$ Q'. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\pi < \pi'$. Sabemos que ambos, π y π', cumplen con las características impuestas por los teoremas I y II, es decir, son cardinales fuertemente inaccesibles. Por el teorema de desarrollo canónico sabemos que $P'*_\pi$ es un dominio normal. Podemos ver que P y $P'*_\pi$ son dominio normales con bases equivalentes y misma característica, por lo que por el primer teorema de isomorfismo, son isomorfos.

Tercer teorema de isomorfismo: Dados dos dominios normales P y P' con la misma característica π, uno es isomorfo a un subdominio (propio o impropio) del otro.

Dem.: Sea dos dominios normales P=<U,S,E> y P'=<U',S',E'>, con caracterítica π. Sin perdida de generalidad podemos suponer que existe una función biyectiva f:Q $\rightarrow$ Q'' $\subseteq$ Q'. Cualquier elemento m de U' puede generar una cadena finitas desendente ...m2$\in$m1$\in$m que termina en un urelemento de Q', esto está garantizado por el axioma de buena fundación. Consideremos ahora los conjuntos cuyas cadenas desendentes térniman en un urelemento de Q'', llamamos a este conjunto P''. Puede verse que P'' cumple con los requisitos impuestos por el lema 1. La condición 1) se cumple, pues si x $\in$ P'' entonces todos sus elementos pertenencen a P'', basta considerar las cadenas que se pueden generar a partir de las cadenas generadas por x, en donde se excluye a x como primer elemento. La condición 2) se satisfabe debido a que si para todos los elementos de un conjunto m existen cadenas finitas desendentes que terminan en un urelemento, podemos construir cadenas finitas desendentes para m agregando a las cadenas ya existentes a m como primer elemento. Esto nos garantiza que P'' es un dominio normal. Además, P'' tiene característica π y su base es biyectable con la base de P, por lo que por el primer teorema de isomorfismo, P'' y P son isomorfos.

Teorema de cuasi-categoricidad para ZFCU2: Dados dos dominios normales, P=<U,S,E> y P'=<U',S',E'>, existen P''=<U'',S'',E''> y P'''=<U''',S''',E'''>, subdominios de P y P' respectivamente, tales que son dominios normales y son isomorfos.

Bibliografía:

Álvarez, C. (1994). De la determinación del infinito a la inaccesibilidad de los cardinales transfinitos. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía.*, *26*(78), 22-71.

Amor Montaño, J. A., Campero Arena, G., & Miranda Perea, E. F. (2011). *Teoría de Conjuntos: Curso Intermedio* (p. 199 p.). México, D.F. Facultad de Ciencias-UNAM.

Benacerraf, P. (1965). What Numbers Could Not Be. *The Philosophical Review*, *74*(1), 47-73.

Benacerraf, P. (2004). La Verdad Matemática. *Ágora: Papeles de Filosofía*, *23*(2), 233-253.

Cohen, P. J. (1963). The Independence of the Continuum Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *50*(6).

Cohen, P. J. (1964). The Independence of the Continuum Hypothesis, II. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *51*(1).

Enderton, H. (2001). *A Mathematcial Introduction to Logic* (2nd ed., p. 317). New York: Open Court.

Field, H. (1980). *Science without Numbers: A Defence of Nominalism* (p. 129). Princeton: Princeton University Press.

Gödel, K. (1947). What is Cantor's Continuum Problem? *The American Mathematical Monthly*, *54*(9), 515 - 525.

Gödel, K. (1981a). ¿Qué es el problema del continuo de Cantor? *Obras Completas* (pp. 340-362). Madrid: Alianza Editorial.

Gödel, K. (1981b). Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines. In K. Gödel (Ed.), *Obras Completas* (pp. 45-90). Madrid: Alianza Editorial.

Hale, B., & Wright, C. (2002). Benacerraf's Dilemma Revisited. *European Journal of Philosophy*, *10*(1), 101-129.

Hart, W. D. (1991). Benacerraf's Dilemma. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía.*, *XXIII*(68), 87-103.

Hellman, G. (2002). Maximality vs. Extendability: Reflections on Structuralism and Set Theory. In D. B. Malment (Ed.), *Reading Natural Philosophy: Essays in the History and Philosophy of Science and Mathematics* (pp. 335-361). Chicago: Open Court.

Hrbacek, K., & Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory* (3rd ed., p. 291). New York: Marcel Dekker Inc.

Kalmar, L. (1967). Comments on Mostowski's Paper. In I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics* (pp. 104-105). Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Kanamori, A. (2004). Zermelo and Set Theory. *The Bulletin of Symbolic Logic*, *10*(4), 487-553.

Kreisel, G. (1964). Informal Rigour and Completeness Proofs. In I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics* (pp. 138-171). Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Kreisel, G. (1967). Comments on Mostowski's Paper. In I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics* (pp. 97-103). Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Kripke, Saul. (1972) *Naming and Necesity* (p. 172) Oxford: Basil Blackwell.

Lakatos, I. (Ed.). (1967). *Problems in the Philosophy of Mathematics.* (p. 241 p.). Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Maddy, P. (1988a). Believing the Axioms. II. *The Journal of Symbolic Logic*, *53*(3), 736-764.

Maddy, P. (1988b). Believing the Axioms. I. *The Journal of Symbolic Logic*, *53*(2), 481-511.

McGee, V. (1997). How We Learn Mathematical Language. *Philosophical Review*, *106*(1), 35-68.

Mostowski, A. (1964). Recent Results in Set Theory. In I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics* (pp. 84-96). Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Orayen, R. (1991). La Lógica y el dilema de Benacerraf. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía.*, *XXIII*(68), 127-137.

Rayo, A., & Uzquiano, G. (2003). A Puzzle for Structuralism. p. 1-19.

Reck, E. H., & Price, M. P. (2000). Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics. *Synthese*, *125*(1), 341-383.

Resnik, M. (1982). Mathematics as a science of patterns: Epistemology. *Nous*, *16*(1), 95-105. Blackwell Publishing.

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* (p. 279). New York: Oxford University Press.

Smullyan, R. (1992). *Gödel's Incompleteness Theorems*. *SubStance* (Vol. 12, p. 139). New York: Oxford University Press.

Uzquiano, G. (2002). Categoricity theorems and conceptions of set. *Journal of Philosophical Logic*, (September 2001), 181-196.

Weston, T. (1976). Kreisel, the Continuum Hypothesis and Second Order Set Theory. *Journal of Philosophical Logic*, *5*, 281-298.

Weston, T. S. (1977). The Continuum Hypothesis is Inpendent of Second-Order ZF. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *XVIII*(3), 499-503.

Zermelo, E. F. F. (1996). On Boudary Numbers and Domains of Sets: New Investigations in the Foudations of Set Theory. In W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foudations of Mathematics* (pp. 1219-1233). New York: Clarendon Press - Oxford University Press.