



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO¹

POSGRADO EN CIENCIAS

MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

**“Geometría Hessiana y campos de direcciones asintóticas
de superficies polinomiales \mathbb{R}^3 ”.**

**TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS**

PRESENTA:

M. EN C. LUCÍA IVONNE HERNÁNDEZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO SÁNCHEZ BRINGAS.

MÉXICO, D.F.

DICIEMBRE, 2010.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Geometría Hessiana y campos de direcciones
asintóticas de superficies polinomiales en \mathbb{R}^3 .

Lucía Ivonne Hernández Martínez.

Con mucho cariño a:

*Lucero y Rodrigo... que mejor motivo que ustedes para
seguir adelante.*

*Gustavo, por el tiempo que hemos compartido, por tu
amor.*

Lourdes Arenas y Esperanza Trueba.

Espero encontrar las palabras justas y adecuadas para agradecer a todas y cada una de las personas que han contribuido en diversas formas a la conclusión de este trabajo.

3

Gustavo quiero agradecerte infinitamente por todo el apoyo que siempre me has brindado en lo que he querido emprender, porque siempre me motivas a salir adelante, por compartir conmigo tu tiempo, tu vida y tu espacio, tenemos dos muy buenos motivos para seguir y buscar la manera de lograr nuestras metas, Lucero y Rodrigo.

A mis padres, José y Julia, mis hermanos, Eric, Julia, Rocío e Iván, mi abuelo Gregorio, a todos ellos muchas gracias. He podido ver y sentir cuan grande es su apoyo, solidaridad y cariño, me siento afortunada de saber que cuento con ustedes y ustedes conmigo.

A mis amigos: Clotilde García, mi querida Coty, gracias por tu infinito apoyo, por tu amistad, por compartir conmigo este camino.

Joel García, muchas gracias por las observaciones y la disposición que has tenido en escuchar y comentar el contenido de la Tesis, por tu apoyo en la elaboración de algunas gráficas, por ser mi maestro en licenciatura, la visión que tienes de las matemáticas y la manera en la cual traspasas lo que sabes es maravillosa, gracias por tu amistad.

Francisco Larrión, gracias por todos tus comentarios y sugerencias en todo el tiempo que trabajamos juntos aprendí más que matemáticas, tenías razón,

Rafael Martínez, siempre has mostrado una gran disposición en apoyarme en todos los sentidos, gracias por la asesoría técnica en el uso de latex, por tus comentarios sobre este trabajo, pero sobre todo, gracias por ser mi amigo.

Lourdes Arenas, gracias por compartir conmigo tus experiencias de vida, por regalarme mucho de tu tiempo, por escucharme cuando más lo necesito y sobre todo, gracias porque con tu optimismo y positivismo, siempre encuentras las palabras exactas que me ayudan a seguir adelante, realmente considero que tienes la capacidad de guiar al otro para que con sus propias capacidades y recursos resuelva su diario vivir.

Esperanza Trueba, Lucía Gutiérrez, Ma. Eugenia Machorro, Martha Ramírez, María B, Luisa, gracias por la enorme enseñanza de vida que he recibido de ustedes, son un ejemplo para mí de mujeres valiosas que salen adelante día a día.

Mis sinodales, Dra. Shirley Bromberg, Dr. Oscar Palmas y Dr. Santiago López de Medrano. A todos ellos muchísimas gracias por su disposición y el tiempo que dedicaron a la revisión de esta tesis, por sus comentarios y sugerencias que permitieron mejorar la calidad de este trabajo. En especial quiero agradecer a la Dra. Adriana Ortiz, trabajar con ella ha sido para mí muy enriquecedor en mi formación, gracias por todo lo que he aprendido contigo y el apoyo brindado Adriana.

Mi director de Tesis, Dr. Federico Sánchez Bringas, gracias por el tiempo que has dedicado para mi formación académica, por tus observaciones y comentarios.

A CONACYT, gracias por la beca otorgada para cursar el doctorado, a mi centro de trabajo, la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Índice general

1. Introducción.	7
1.1. Presentación del Tema.	7
1.2. Contribuciones de esta Tesis.	9
2. Preliminares	13
2.1. Geometría diferencial clásica y Geometría afín.	13
2.2. Índice de un campo de direcciones alrededor de un punto singular aislado.	16
3. Geometría afín de la gráfica de un polinomio	19
3.1. Determinación de regiones hiperbólicas.	19
3.2. Curva Hessiana de superficies cúbicas	22
3.2.1. Curva Hessiana de f_α	23
3.2.2. Diagrama de bifurcación de $\Sigma(x, y)$	26
3.2.3. Determinación de dominios de f_α	26
3.2.4. Curva de inflexión y cúspides de Gauss de la familia f_α .	29
4. Campos de direcciones de una Forma Diferencial Cuadrática.	37
4.1. Extensión de una Forma Diferencial Cuadrática en infinito. . . .	37
4.2. Índice del campo de direcciones de una FDC.	47
4.3. Índice del campo de direcciones asintóticas de una superficie. . .	49
4.4. Ejemplos	50
4.4.1. Ecuaciones cuadráticas de Hopf	50
4.4.2. Polinomios cúbicos.	53
4.4.3. Polinomios de grado 6.	58

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Presentación del Tema.

Esta tesis comprende el estudio de dos temas de importancia en la geometría de superficies; la distribución de las componentes complementarias a la curva parabólica y el índice de algunos campos de direcciones tangentes a una superficie inmersa en \mathbb{R}^3 como son las líneas de curvatura y las líneas asintóticas. Más específicamente, en este trabajo consideramos superficies que son gráficas de polinomios de grado n en dos variables con coeficientes reales.

A continuación hacemos mención del desarrollo de estos temas.

Componentes complementarias de la curva parabólica de una superficie.

La geometría afín es un tema de investigación reciente, que ha permitido obtener nuevos resultados que contribuyen al estudio de la geometría de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 . Esta geometría posibilita la aplicación de la teoría de singularidades de funciones al estudio geométrico de las superficies. Elementos importantes tales como puntos parabólicos, elípticos e hiperbólicos, así como la estructura de las regiones definidas por dichos puntos, resultan invariantes bajo el grupo de transformaciones afines en \mathbb{R}^3 .

El estudio de la estructura afín de superficies diferenciales reales ha sido desarrollado principalmente por V. I. Arnold [2], Banchoff, Mc Crory y Gaffney [6], L. Kergosien y R. Thom [18], A. Ortiz-Rodríguez [21], G. Salmon [30] y R. Uribe [31], entre otros, quienes han realizado importantes contribuciones. Sin embargo, en este campo encontramos problemas sin resolver, aún para superficies que son la gráfica de un polinomio real. Por ejemplo, si la curva parabólica del polinomio es compacta, existe una componente conexa no acotada en el complemento de esta curva la cual juega un papel relevante determinando una parte de la estructura afín. Resulta interesante conocer qué condiciones debe cumplir el polinomio para que la región no acotada sea hiperbólica o elíptica.

En la curva parabólica, las cúspides de Gauss se distinguen del resto de puntos que la conforman porque la única dirección asintótica en el punto es tangente a la curva parabólica. El estudio de los puntos cúspide así como sus propiedades, se ha abordado desde diferentes enfoques: algunos de ellos son los estudiados en [6], por Banchoff, Mc Crory y Gaffney. Ellos consideran una inmersión diferenciable de un abierto del plano en \mathbb{R}^3 y las estudian aplicando la teoría de singularidades de funciones. Este trabajo muestra características geométricas de la superficie alrededor de una cúspide de Gauss.

Así, cuando una superficie algebraica es genérica, el número de cúspides de Gauss es finito. En [30] G. Salmon muestra que una superficie algebraica genérica de grado n en $\mathbb{C}P^3$, tiene $2n(n-2)(11n-24)$ cúspides. Este número resulta ser una cota superior para el número de cúspides de Gauss de una superficie algebraica genérica en $\mathbb{R}P^3$. Por otra parte, A. Ortiz-Rodríguez en [21] muestra que, para superficies que son gráfica de polinomios reales que satisfacen ciertas condiciones genéricas, la cota superior es $2(n-2)(5n-12)$. En [15] se mejora la cota anterior, $(n-2)(5n-12)$. Al respecto se siguen buscando mejores cotas y polinomios que las optimizen.

Índice de un campo de direcciones.

El estudio de campos de líneas tangentes a superficies en \mathbb{R}^3 (como lo son las líneas de curvatura y las líneas asintóticas), así como el índice de sus singularidades, (puntos umbílicos y cúspides de Gauss respectivamente), también ha sido de gran interés en el campo de la geometría de superficies. En esta dirección existen importantes conjeturas cuya demostración aún no aparece publicada, como la conjetura de Loewner, la cual afirma que: “El índice de un punto umbílico aislado de una superficie diferenciable inmersa en \mathbb{R}^3 es menor o igual que uno”. Las líneas de curvatura así como los puntos umbílicos han sido estudiados por C. Gutiérrez y J. Sotomayor [14] y su generalización para superficies en \mathbb{R}^4 , en [29] por A. Ramírez-Galarza y F. Sánchez-Bringas entre otros. Es importante hacer notar que, los campos de líneas de curvatura no son invariantes bajo el grupo de transformaciones afines, a diferencia de los campos de direcciones asintóticas, los cuales si resultan invariantes bajo este grupo.

En el complemento del dominio elíptico de la estructura afín de la superficie es en donde se definen los campos de direcciones asintóticas, los cuales son solución de la segunda forma fundamental de la superficie. Recordemos que la segunda forma fundamental es una forma diferencial cuadrática binaria. Estas formas han sido estudiadas por V. I. Arnold [4], J. W. Bruce [8], A. Davydov [9], C. Gutiérrez, F. Mercuri, F. Sánchez-Bringas [13] y H. Hopf [17] entre otros.

En [4], V. I. Arnold define un índice de cruces de una curva para un polinomio hiperbólico homogéneo (cuya curva parabólica es el origen y la región conexas complementaria al conjunto parabólico es hiperbólica). El índice del campo de direcciones asintóticas es un ejemplo del índice de cruces definido

en [4]. En este mismo trabajo V. I. Arnold muestra que tanto el conjunto de polinomios homogéneos hiperbólicos de grado 3, así como el conjunto de los polinomios de grado 4 son variedades conexas, los índices del campo de direcciones asintóticas para cada conjunto son $-1/2$ y -1 respectivamente. Para el conjunto de polinomios homogéneos hiperbólicos de grado 6, Arnold muestra que existen polinomios con índices distintos, por lo cual existen al menos dos componentes conexas. Un problema interesante consiste en determinar el número de componentes conexas que tiene la variedad de polinomios homogéneos hiperbólicos de grado n para $n \geq 5$. En [4], V. I. Arnold conjetura que dicho número crece al menos como función lineal del grado.

1.2. Contribuciones de esta Tesis.

Teniendo como principal motivación los problemas mencionados anteriormente, en esta tesis se consideran superficies diferenciables en \mathbb{R}^3 que son la gráfica de un polinomio real f en dos variables de grado n .

En el capítulo 3, sección 3.1 se da respuesta a la siguiente pregunta, cuando el grado del polinomio es impar: ¿Qué tipo es la componente no compacta del complemento de la curva Hessiana cuando ésta es compacta?. Para grado par se dan las condiciones que debe cumplir el polinomio para que la componente conexa no acotada del complemento de la curva Hessiana sea hiperbólica. El resultado principal de esta sección es el Teorema 3.1.3, en éste dichas condiciones quedan expresadas en términos de la parte homogénea de mayor grado del polinomio f .

En la sección 3.2 estudiamos la geometría de superficies definidas por polinomios de grado 3. Damos una descripción completa del diagrama de bifurcación de la curva Hessiana de los polinomios de esta familia. Este estudio comprende la determinación de la curva Hessiana, descripción de las regiones elípticas e hiperbólicas y sus propiedades, el estudio de la curva de inflexión y el número de cúspides gaussianas en cada caso. Si bien este estudio no es nuevo (ver [21] y [23]), el realizarlo de manera exhaustiva permitió obtener el corolario 3.2.5, el cual afirma que las rectas paralelas no son realizadas como la curva Hessiana de un polinomio cúbico. Este resultado es interesante por su relación con el problema referente al tipo de curvas algebraicas que puede realizar la curva Hessiana de una función polinomial de grado n .

En el capítulo 4, estudiamos los campos de direcciones definidos por el núcleo de una forma diferencial cuadrática en el punto al infinito y su aplicación a campos de direcciones tangentes a una superficie.

En la sección 4.1 el Lema 4.1.1 da la expresión de una forma diferencial cuadrática ω con coeficientes polinomiales bajo un cambio de coordenadas propuesto que permite el análisis de los campos de dicha forma en el punto al infinito. Investigamos además, condiciones que debe satisfacer una forma diferencial

cuadrática con coeficientes polinomiales para que el campo de direcciones que define se extienda al punto al infinito y éste sea una singularidad aislada de dicho campo. El Lema 4.1.3 enuncia condiciones algebraicas específicas sobre los coeficientes de la forma ω para que el infinito sea singularidad aislada de la forma cuadrática polinomial asociada a ω .

Otra condición algebraica sobre los coeficientes de una forma diferencial cuadrática la cual denominamos de buena multiplicidad se expresa en la definición 4.1.5. Esta condición con algunas hipótesis adicionales, determina aspectos geométricos importantes de la superficie así como de los campos de líneas de curvatura y asintóticas como lo muestran los Teoremas principales del capítulo 4.

La relevancia del Lema 4.1.1 se muestra en las secciones 4.2 y 4.3. En la sección 4.2 aplicando el lema 4.1.1 a la ecuación de líneas de curvatura de una superficie estudiamos el comportamiento del campo de direcciones principales en el punto al infinito. En la sección 4.3 suponiendo que la componente conexa no compacta del complemento de la curva Hessiana del polinomio es hiperbólica, estudiamos el comportamiento del campo de direcciones asintóticas. Los resultados expuestos en la sección 4.3 se obtuvieron en colaboración con A. Ortiz-Rodríguez y F. Sánchez-Bringas y se sometieron para su publicación [16].

Los resultados principales de este capítulo son el Lema 4.1.1 y los Teoremas 4.2.2, 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3. Suponiendo que la ecuación de líneas de curvatura de un polinomio f en el punto al infinito tiene buena multiplicidad, el Teorema 4.2.2 demuestra que los índices del campo de líneas de curvatura definidos por la ecuación $\omega = 0$ y de su parte homogénea de grado mayor ω_{3n-4} en infinito son iguales.

En lo que se refiere a campos de direcciones asintóticas, suponiendo que la segunda forma fundamental de un polinomio f en infinito tiene buena multiplicidad y que su parte homogénea f_n de grado mayor es hiperbólica el Teorema 4.3.2 afirma que la curva Hessiana del polinomio es compacta. Considerando las mismas hipótesis el Teorema 4.3.1 muestra que los índices del campo de direcciones asintóticas de f y de f_n en infinito son los mismos. También se afirma la compacidad de la curva Hessiana suponiendo que f_n es elíptico y que la segunda forma fundamental del polinomio f tiene buena multiplicidad en infinito en el Teorema 4.3.3.

Empleando algunos de los resultados expuestos en las secciones 4.1, 4.3 y otros obtenidos por Arnold en [5], se obtiene el Teorema 4.3.4, en el cual se da una cota superior para el número de cúspides gaussianas de la frontera de la componente conexa no acotada del complemento de la curva Hessiana de la gráfica de f .

La condición de buena multiplicidad también resulta útil para encontrar componentes diferentes en la variedad de polinomios hiperbólicos homogéneos

de grado fijo. Si la forma diferencial cuadrática no satisface la condición de buena multiplicidad, el ejemplo 4.4.4 de la sección 4.4.3 muestra que existen polinomios homogéneos del mismo grado, con índices en infinito distintos.

En la sección 4.4 se calcula el índice del campo de direcciones asintóticas en infinito para polinomios de diversos grados, además de darse las condiciones analíticas que deben de cumplir los coeficientes de una forma diferencial cuadrática polinomial en cada caso para que su forma asociada en infinito tenga buena multiplicidad.

Las formas cuadráticas vistas en la subsección 4.4.1 se utilizan para encontrar los índices en infinito de los polinomios vistos en la sección 4.4. Éstas son un modelo canónico útil ya que generan campos de direcciones cuyos índices toman valores $\pm n/2$, al igual que el índice de los campos de líneas asintóticas. La igualdad de índices del campo definido por la forma de Hopf y el campo de líneas asintóticas en infinito se establece mediante isotopías entre las formas cuadráticas definidas en 4.4.1 y la forma asociada a la segunda forma fundamental del polinomio en infinito.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Geometría diferencial clásica y Geometría afín.

Consideremos $l(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $l(t) = (l_1t, l_2t, l_3t) + p$, una parametrización de una recta tangente a la gráfica de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto $p = l(t_0)$. Decimos que la recta l tiene orden de contacto $k \in \mathbb{N}$, con la gráfica de f en p si

$$(G \circ l)^{(m)}(t_0) = 0 \quad \text{y} \quad (G \circ l)^{(k)}(t_0) \neq 0,$$

con $m = 0, 1, \dots, k-1$; donde $G(x, y, z) = f(x, y) - z$ y $(G \circ l)^{(k)}(t_0)$ denota la k -ésima derivada de la función $G \circ l$ en t_0 .

Es así como, de acuerdo al máximo orden de contacto de todas las rectas tangentes a la superficie en un punto, se clasifican los puntos de la superficie genérica de la siguiente manera [30]:

Un punto es *elíptico* si todas las rectas tangentes a la superficie en éste tienen orden de contacto igual a 2.

Un punto p es *hiperbólico* si tiene exactamente dos direcciones asintóticas. Dicho punto hiperbólico será *genérico* si el orden de contacto de cada una de sus direcciones asintóticas es igual a tres.

Las *direcciones asintóticas* son direcciones en el plano tangente a la superficie que se caracterizan como las rectas cuyo orden de contacto con la superficie es al menos 3.

Un punto p es *parabólico* si tiene exactamente una dirección asintótica o bien toda dirección tangente es asintótica; en este último caso se le llama *punto plano*. Además, diremos que un punto parabólico es *genérico* si su dirección asintótica tiene orden de contacto igual a 3 con la superficie en este punto.

La clasificación arriba mencionada es invariante bajo el grupo de transformaciones afines y se puede dar también en el contexto de la teoría clásica de Geometría diferencial de superficies.

Dada una superficie orientable inmersa en \mathbb{R}^3 , la *transformación de Gauss* N , asigna a cada punto (x, y) de U el vector normal unitario N . Así, la *curvatura gaussiana* de la superficie, es el determinante de la matriz jacobiana de su transformación de Gauss.

De esta forma, decimos que el punto es elíptico, hiperbólico o parabólico si la curvatura gaussiana de la superficie es positiva, negativa o cero respectivamente.

Así mismo tenemos que la *segunda forma fundamental* de la superficie está definida para un vector $v = (v_1, v_2)$ en el plano tangente a la superficie en el punto p por $II_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle$.

Recordemos que, en estos términos, una dirección v en el plano tangente a una superficie lisa en un punto p es llamada *dirección asintótica* si la superficie en esta dirección tiene curvatura normal cero, o de manera equivalente si dicha dirección anula a la segunda forma fundamental de la superficie en p .

Cuando la superficie es $\{z = f(x, y)\}$, la segunda forma fundamental tiene la siguiente expresión:

$$II(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

Análogamente se define la tercera forma fundamental de la superficie

$$III(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3.$$

Dichas formas reciben el nombre de *formas fundamentales homogéneas*.

Otra ecuación diferencial importante asociada a campos tangentes a una superficie diferenciable inmersa en \mathbb{R}^3 es la ecuación diferencial de líneas de curvatura:

$$(fE - eF)dx^2 + (gE - eG)dx dy + (gF - fG)dy^2 = 0,$$

donde E, F, G , y e, f, g son los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental respectivamente. Recordemos que la configuración de líneas de curvatura principal es obtenida como la configuración de una forma diferencial cuadrática hiperbólica (ó positiva) por lo que las soluciones de la ecuación anterior en un punto regular de la superficie son dos campos de direcciones ortogonales uno al otro. Sotomayor y Gutiérrez en [14] consideraron inmersiones en \mathbb{R}^3 de una variedad compacta. Ellos describen una clase de inmersiones con configuración de líneas de curvatura principal estables y demuestran que esta clase es densa en el espacio de inmersiones con la topología \mathcal{C}^2 .

En ambos contextos, (geometría afín y geometría diferencial) se sabe que toda superficie genérica tiene la siguiente estructura: los conjuntos de puntos elípticos e hiperbólicos son dominios abiertos en la superficie y la frontera entre estos dos conjuntos está formada por una curva lisa cuyos puntos son parabólicos, *la curva parabólica*. La proyección ortogonal de la curva parabólica en el plano xy es la *curva Hessiana*.

Observemos que si la superficie es $\{z = f(x, y)\}$, donde f es una función polinomial de grado n , entonces la curva Hessiana será una curva polinomial en dos variables cuyo grado es $\leq 2n - 4$ y está definida por

$$\Sigma(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2 = 0.$$

Un punto parabólico p es una *cúspide de Gauss* (también llamada punto *parabólico especial*), si la dirección asintótica en este punto es tangente a la curva parabólica y dicha dirección asintótica tiene orden de contacto 4 con la superficie.

Por otro lado, un punto hiperbólico es de *inflexión* si tiene al menos una dirección asintótica con orden de contacto 4 con la superficie. En caso de que ambas direcciones asintóticas tengan este orden de contacto con la superficie se dice que es *hiperbólico especial*.

El conjunto de cúspides de Gauss es finito y el conjunto de puntos de inflexión forma una curva en la superficie la cual llamaremos *curva de inflexión o curva flecnodal*. La curva de inflexión pertenece a la superficie, pero en este trabajo consideraremos su proyección ortogonal en el plano xy .

En [6], Banchoff, Mc Crory y Gaffney consideran una inmersión suave X de un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^3 y estudian las cúspides de Gauss en términos de la teoría de singularidades de funciones. En [6] muestran propiedades geométricas importantes de la superficie alrededor de una cúspide de Gauss. Entre algunas de estas propiedades destaca la siguiente: suponiendo que la transformación de Gauss de la superficie es estable, ellos caracterizan a un punto cúspide de Gauss en una superficie como aquel que, además de ser un punto en el que la dirección asintótica es tangente a la curva parabólica, al mismo tiempo es punto de inflexión de la curva asintótica que pasa por éste.

Por otra parte, en [30], se muestra que un punto parabólico de una superficie genérica S es una cúspide de Gauss si la curva parabólica y la curva de inflexión son lisas en p y su orden de contacto es 2.

Si la superficie $\{z = f(x, y)\}$ es genérica se puede ver en [31] que la afirmación anterior es equivalente a que en el punto parabólico la dirección asintótica anula la tercera forma fundamental homogénea de la superficie.

2.2. Índice de un campo de direcciones alrededor de un punto singular aislado.

Consideremos M una superficie diferenciable y X un campo diferenciable de direcciones tangente en M con una singularidad aislada en el punto p . Tomemos una curva cerrada simple $\Gamma : [0, 1] \rightarrow M$, tal que p es la única singularidad de X en el interior de la región acotada por Γ . Definimos un campo de direcciones orientado paralelo a $X(0)$ en Γ . Consideremos a lo largo de Γ cualquier campo vectorial Y diferenciable. El cambio total del ángulo entre la dirección del campo orientado X y Y , después de dar una vuelta alrededor de Γ en dirección positiva (respecto de la orientación de la superficie) es *el índice del campo de direcciones de X en p* . Este número es independiente de la elección de Γ y Y , además tiene la forma

$$\text{ind}_X(p) = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dicho índice es invariante bajo pequeñas perturbaciones continuas de X .

Consideremos la segunda forma fundamental de f . Diremos que tiene una singularidad en un punto p si ésta se anula en este punto. Si p es una singularidad aislada y U es una vecindad agujerada contenida en la proyección del dominio hiperbólico sobre el plano xy , es posible definir dos campos continuos de direcciones asintóticas sin singularidades en esta vecindad agujerada.

Los índices de ambos campos de direcciones en p coinciden. Entonces basta considerar cualquiera de estos campos de direcciones asintóticas y llamamos a este índice *el índice del campo de direcciones asintóticas en p* . El índice de campos de direcciones principales se define de manera equivalente.

Existen varios resultados que relacionan el índice de un campo con aspectos geométricos de la superficie, al respecto en [17], el teorema de Poincaré-Hopf afirma que:

Teorema. Si X es un campo vectorial continuo en una variedad orientable compacta M con p_1, p_2, \dots, p_n ceros del campo, la suma global de los índices de X es igual a la característica de Euler de la variedad M , es decir:

$$\sum_{p_i} \text{ind}_X(p_i) = \chi(M).$$

Poincaré observó que si la curva Γ es la unión de una colección finita de arcos definidos por los vectores del campo transversales a Γ , para calcular el índice del campo es suficiente considerar el conjunto finito V de puntos en los que la curva no es transversa al campo. Denotamos por e, i respectivamente, la cardinalidad de los subconjuntos de V , que consisten de aquellos puntos que se encuentran en la trayectoria local exterior, (*tangencias exteriores*) o interior,

2.2. ÍNDICE DE UN CAMPO DE DIRECCIONES ALREDEDOR DE UN PUNTO SINGULAR AISLADO.17

(*tangencias interiores*) a dicha curva. Entonces

$$\text{ind}_X(p) = 1 + \frac{(i - e)}{2},$$

también conocida como la fórmula del índice de Poincaré generalizada para el disco. Recordemos también la generalización de la fórmula del índice de Poincaré-Hopf para campos de direcciones con un número finito de singularidades en superficies con frontera [28]:

$$\Sigma = \chi(U) + \frac{i - e}{2},$$

donde Σ es la suma de los índices de las singularidades aisladas del campo de direcciones en la región U , y $\chi(U)$ es la característica de Euler de U .

Capítulo 3

Geometría afín de la gráfica de un polinomio real.

3.1. Determinación de regiones hiperbólicas.

En esta sección damos algunos criterios para determinar regiones hiperbólicas en superficies genéricas definidas por la gráfica de polinomios de cualquier grado.

Proposición 3.1.1 *Consideremos la gráfica de f , donde $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio de grado n . Supongamos que existe una recta L en el plano xy que no interseca a la curva Hessiana de f . Si f restringida a L es de grado impar, entonces L pertenece al dominio hiperbólico del plano.*

Demostración. Supongamos que L es una recta en el plano que no interseca a la curva Hessiana y no pertenece al dominio hiperbólico. Entonces ésta se encuentra enteramente contenida en el dominio elíptico. Esto implica que la restricción de f a L es un polinomio de una variable de grado impar definido en la región elíptica, por lo tanto la gráfica de $f|_L$ es convexa (ó cóncava). Por otro lado, como el grado de $f|_L$ es impar, entonces éste tiene al menos un punto de inflexión. Esto implica que la gráfica de $f|_L$ no es convexa, lo cual es una contradicción. \square

Lema 3.1.2 *Sea T una transformación lineal, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(u, v) = (au + bv, cu + dv)$, y sea*

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n a_{i, n-i} x^i y^{n-i},$$

un polinomio homogéneo de grado n . Llamemos $\tilde{f}(u, v)$ a la composición $(f \circ T)(u, v)$. Entonces $\tilde{a}_{n,0} = f(a, c)$ y $\tilde{a}_{0,n} = f(b, d)$.

Demostración. La demostración de este lema se obtiene por una sustitución directa.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(u, v) = f(T(u, v)) &= \sum_{k=0}^n a_{n-k, k} (au + bv)^{n-k} (cu + dv)^k \\
&= \sum_{k=0}^n a_{n-k, k} (a^{n-k} u^{n-k} + \dots + b^{n-k} v^{n-k}) (c^k u^k + \dots + d^k v^k) \\
&= a_{n,0} (a^n u^n + \dots + b^n v^n) + a_{n-1,1} (a^{n-1} u^{n-1} + \dots \\
&\quad + b^{n-1} v^{n-1}) (cu + dv) + \dots + a_{0,n} (c^n u^n + \dots + d^n v^n) \\
&= f(a, c) u^n + \dots + f(b, d) v^n
\end{aligned}$$

□

Consideremos ahora la extensión estándar de \mathbb{R}^2 en $\mathbb{R}P^2$ la cual consiste de ver al plano xy como la carta afín $w = 1$ del plano proyectivo con coordenadas $[x : y : w]$. Denotaremos por $w = 0$ la recta al infinito. La curva Hessiana de f en el plano xy puede o no intersectar la recta al infinito, en cualquier caso ésta puede ser considerada como una curva en el plano proyectivo. Llamaremos a la proyectivización de la curva Hessiana *la curva Hessiana proyectiva de f* .

Teorema 3.1.3 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado n tal que su curva Hessiana es compacta. Supongamos que su descomposición homogénea está dada por $f(x, y) = f_0 + f_1(x, y) + \dots + f_n(x, y)$, donde $f_i(x, y)$ es la componente homogénea de grado i de $f(x, y)$. Supongamos que una de las siguientes condiciones se cumple:*

a) n es impar, o

b) n es par, su curva Hessiana tiene grado $2n - 4$, $f_n^{-1}(0) \neq (0, 0)$ y la curva Hessiana proyectiva es suave.

Entonces, la componente conexa no acotada del complemento de la curva Hessiana en el plano es hiperbólica.

Demostración. El hecho de que la curva Hessiana sea compacta implica que cualquier recta contenida en el complemento de la curva Hessiana pertenece a la componente conexa no acotada de ésta. Ahora, la prueba consiste en determinar una recta L en la componente no acotada tal que la restricción de f a L defina un polinomio en una variable de grado impar.

a) Supongamos que el grado de $f(x, y)$ es $n = 2m + 1$. Entonces la componente de grado mayor tiene la expresión:

$$f_{2m+1}(x, y) = \sum_{k=0}^{2m+1} a_{2m+1-k, k} x^{2m+1-k} y^k.$$

Podemos suponer que $a_{2m+1,0} \neq 0$, de otra forma, es posible considerar un vector no cero (a, c) tal que $f_{2m+1}(a, c) \neq 0$. Además, el lema 3.1.2 garantiza

que la aplicación de una transformación lineal invertible de la forma $T(u, v) = (au + bv, cu + dv)$ para valores convenientes de b, d , nos proporciona coordenadas (u, v) para las cuales el polinomio f_{2m+1} satisface esta afirmación.

Entonces, $f(x, y)$ restringido a la recta $y = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ define un polinomio en una variable de grado $2m + 1$. Como la curva Hessiana es compacta, existe un número real $\epsilon > 0$ tal que la curva Hessiana está contenida en la región acotada determinada por el círculo de radio ϵ y centro en el origen. Así la recta $y = y_0$, donde $y_0 > \epsilon$, pertenece a la región no acotada. Entonces la proposición 3.1.1 implica que la región no acotada es hiperbólica.

b) Supongamos que el grado de $f(x, y)$ es $n = 2m$. En este caso probaremos primero el siguiente:

Lema 3.1.4 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n = 2m$. Si la curva Hessiana de f tiene grado $2n - 4$ y la parte homogénea de grado $2m$ de $f(x, y)$ es $f_{2m}(x, y) = \sum_{k=0}^{2m} a_{2m-k,k} x^{2m-k} y^k$, tal que $a_{2m,0} = 0$, entonces $a_{2m-1,1} \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que $a_{2m,0} = 0$ y $a_{2m-1,1} = 0$. Entonces,

$$f_{2m}(x, y) = \sum_{k=2}^{2m} a_{2m-k,k} x^{2m-k} y^k = y^2 Q(x, y) \quad \text{donde}$$

$$Q(x, y) = \sum_{k=2}^{2m} a_{2m-k,k} x^{2m-k} y^{k-2}.$$

Como el polinomio hessiano tiene grado $2n - 4$, entonces

$$\Sigma(x, y) = \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_{4m-4}(x, y),$$

donde $\Sigma_{4m-4}(x, y)$ es la parte homogénea de grado $4m - 4$. De hecho $\Sigma_{4m-4}(x, y)$ es igual al hessiano del polinomio homogéneo $f_{2m}(x, y)$.

Consideremos la extensión estándar de \mathbb{R}^2 a $\mathbb{R}P^2$ y denotamos por $w = 0$ la recta al infinito. La curva Hessiana proyectiva está dada por:

$$\Sigma_0 w^{4m-4} + \cdots + \Sigma_{4m-5}(x, y)w + \Sigma_{4m-4}(x, y) = 0.$$

Entonces, la intersección de esta curva proyectiva con la recta al infinito está dada por $\Sigma_{4m-4}(x, y) = 0$. Recordemos que $\Sigma_{4m-4}(x, y) = \text{hess}(f_{2m})$ y $f_{2m}(x, y) = y^2 Q(x, y)$. Así,

$$\begin{aligned} \Sigma_{4m-4}(x, y) &= [y^2 Q_{xx}(x, y)] [(f_{2m}(x, y))_{yy}] - [2y Q_x(x, y) + y^2 Q_{xy}(x, y)]^2 \\ &= y^2 [Q_{xx}(x, y)(f_{2m}(x, y))_{yy} - (2Q_x(x, y) + yQ_{xy}(x, y))^2]. \end{aligned}$$

Esto implica que el punto $[1 : 0 : 0]$ es un punto de intersección de la curva Hessiana proyectiva y la recta al infinito. Este hecho contradice que la curva Hessiana sea lisa. \square

Continuemos con la prueba de b). Primero mostraremos que si el coeficiente $a_{2m,0} \neq 0$, podemos encontrar un cambio de coordenadas lineal $T(u, v) = (au + bv, cu + dv) = (x, y)$ del plano xy tal que el coeficiente correspondiente $\tilde{a}_{2m,0}$ de f_{2m} se anule en las nuevas coordenadas.

Para ello, si existe un punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ en $f_{2m}^{-1}(0)$, entonces al menos una de las siguientes ecuaciones está bien definida:

$$f_{2m}\left(\frac{x_0}{y_0}, 1\right) = 0 \quad \text{o} \quad f_{2m}\left(1, \frac{y_0}{x_0}\right) = 0.$$

Supongamos que la primera ecuación está bien definida. El Lema 3.1.2 implica que

$$f_{2m}(T(u, v)) = f_{2m}(a, c)u^{2m} + \dots + f_{2m}(b, d)v^{2m},$$

entonces tomando $a = \frac{x_0}{y_0}$, $c = 1$, $b = -1$ y $d = 0$. Las siguientes ecuaciones se cumplen

$$\begin{aligned} f_{2m}(T(u, v)) &= f_{2m-1}\left(\frac{x_0}{y_0}, 1\right)u^{2m-1}v + \dots + f_{2m}(-1, 0)v^{2m} \\ &= \tilde{a}_{2m-1,1}u^{2m-1}v + \dots + f_{2m}(-1, 0)v^{2m}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{a}_{2m-1,1} \neq 0$ por el lema 3.1.4. Si la primera ecuación no está definida, es decir $y_0 = 0$, entonces, tomamos $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{y_0}{x_0}$ y $d = 1$ para obtener la misma expresión.

Entonces, podemos suponer que $a_{2m,0} = 0$ y $a_{2m-1,1} \neq 0$ de la expresión de $f(x, y)$. Como la curva Hessiana es compacta, existe un número real $\epsilon > 0$ tal que la curva Hessiana está contenida en la región acotada determinada por el círculo de radio ϵ y centro en el origen. Así la recta $y = y_0$, donde $y_0 > \epsilon$, pertenece a la región no acotada. Además, como $a_{2m-1,1} \neq 0$ la restricción $f|_{y=y_0}$ es un polinomio en una variable de grado impar, entonces la proposición 3.1.1 implica que la región no acotada es hiperbólica. \square

3.2. Geometría de la curva Hessiana de superficies cúbicas.

Consideremos los polinomios de la forma $f(x, y) = P_2(x, y) + P_3(x, y)$, donde $P_i(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado i , $i = 2, 3$. Sea $\{z = f(x, y)\}$ la gráfica de $f(x, y)$ en \mathbb{R}^3 . El origen pertenece a esta superficie y el plano tangente a este punto es el plano $z = 0$. Después de una rotación conveniente del plano es posible anular uno de los monomios de $P_3(x, y)$. Suponemos que el monomio que anulamos es el que tiene término x^2y , de esta forma consideraremos la familia de polinomios cúbicos

$$f_\alpha(x, y) = \frac{k}{2}x^2 + lxy + \frac{m}{2}y^2 + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{6}y^3, \quad (3.1)$$

con $\alpha = (k, l, m, a, b, c) \in \mathbb{R}^6$ y $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

3.2.1. Curva Hessiana de f_α .

El hessiano de la función f_α es:

$$\Sigma(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x \partial y} \right)^2,$$

por lo que la curva Hessiana de f_α esta definida por la ecuación:

$$\Sigma(x, y) = abx^2 - b^2y^2 + acxy + (am + bk)x + (kc - 2bl)y + km - l^2 = 0. \quad (3.2)$$

Esta curva es una cónica, cuyo discriminante es:

$$\Delta(a, b, c) = a(ac^2 + 4b^3).$$

Tenemos los siguientes resultados respecto a dicha cónica.

Lema 3.2.1 *Si el discriminante de la curva Hessiana no se anula, la curvatura gaussiana de la gráfica de f_α , $\Sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un único punto crítico p_0 con coordenadas:*

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{2b^3k + ac^2k - 2abcl + 2ab^2m}{a^2c^2 + 4ab^3}, \frac{bck - 4b^2l - acm}{ac^2 + 4b^3} \right).$$

Demostración del Lema. Consideremos el gradiente:

$$\nabla \Sigma(x, y) = (2abx + acy + bk + am, acx - 2b^2y + kc - 2bl),$$

el punto donde se anula está parametrizado por α y tiene la forma

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{2b^3k + ac^2k - 2abcl + 2ab^2m}{a^2c^2 + 4ab^3}, \frac{bck - 4b^2l - acm}{ac^2 + 4b^3} \right).$$

Observemos que esta solución está bien definida si $a(ac^2 + 4b^3) \neq 0$. \square

Lema 3.2.2 *Si $\Delta \neq 0$, la curva Hessiana es singular si y sólo si ésta es una cónica degenerada. Si $\Delta > 0$, la curva esta formada por dos rectas transversales y si $\Delta < 0$ se reduce a un punto.*

Demostración. Si la curva Hessiana es singular entonces su gradiente se anula en algún punto de ella. Por lo tanto si $\Delta < 0$ ésta se reduce a un punto puesto que no puede ser una elipse. El otro caso es análogo. Por otro lado si la Hessiana es una cuádrica degenerada entonces como $\Delta \neq 0$, ésta debe ser un punto o dos rectas que se intersecan, es decir una curva singular. \square

Proposición 3.2.3 *Sea S la superficie en \mathbb{R}^3 definida como la gráfica de f_α . Supongamos que el discriminante de la curva Hessiana es $\Delta \neq 0$ y definamos $\delta(k, l, m, a, b, c) := b^2k + acl - abm$. Entonces:*

1. Si $\Delta < 0$, la curva Hessiana de f_α es una elipse o un punto, respectivamente si $\delta \neq 0$ o $\delta = 0$.
2. Si $\Delta > 0$, la curva Hessiana de f_α es una hipérbola o dos rectas que se intersecan, si $\delta \neq 0$ o $\delta = 0$ respectivamente.

Para demostrar esta proposición, emplearemos el lema 3.2.1.

Demostración de la proposición 3.2.3. Observemos que la curvatura gaussiana evaluada en el punto (x_0, y_0) es:

$$\Sigma(x_0, y_0) = \frac{-(2amb + 2kb^2 + alc)^2}{a(4b^3 + ac^2)} = -\frac{\delta^2}{\Delta}.$$

Supongamos que $\Delta < 0$. Si $\delta = 0$, el punto (x_0, y_0) pertenece a la curva Hessiana lo cual implica que ésta curva es singular. Por lo tanto la curva Hessiana es una cónica degenerada y entonces ésta es un punto. Por otro lado, si $\delta \neq 0$, el punto singular (x_0, y_0) no pertenece a la curva Hessiana y entonces esta curva es una cónica suave, la cual en este caso es una elipse. Un argumento análogo puede aplicarse para el caso $\Delta > 0$. \square

Consideremos ahora el caso en el que el discriminante Δ es cero.

Proposición 3.2.4 Sea S la superficie en \mathbb{R}^3 definida como la gráfica de $f_\alpha(x, y)$. Supongamos que el discriminante de la curva Hessiana se anula y definamos $\mu = \mu(k, l, m, b, c) := c^2k - 4bcl + 4b^2m$. Entonces la curva Hessiana es:

1. Una parábola si $a = 0$ y $bk \neq 0$; ó $ac^2 + 4b^3 = 0$ y $bcm \neq 0$.
2. Una recta doble si $a = k = 0$; ó $ac^2 + 4b^3 = 0$ y $\mu = 0$.
3. Una recta simple si $a = b = 0$, ó $b = c = 0$

Demostración. Sea $\Delta(a, b, c) = 0$ entonces $a = 0$ o bien $4b^3 + ac^2 = 0$. Si $a = 0$, la curva Hessiana tiene por ecuación

$$-b^2y^2 + bkx + (kc - 2bl)y + km - l^2 = 0.$$

en el caso $bk \neq 0$, corresponde a una parábola con eje focal paralelo al eje x . Si $b = 0$, se tiene la recta simple $kcy + km - l^2 = 0$. Si $k = 0$ tenemos la recta doble $-(by + l)^2 = 0$.

Por otra parte, si $4b^3 + ac^2 = 0$ y $abc \neq 0$ entonces $a = \frac{-4b^3}{c^2}$, así la curva Hessiana está dada por

$$-b^2c^2y^2 - 4cb^3xy - 4b^4x^2 + (bkc^2 - 4b^3m)x + c^2(ck - 2bl)y + c^2(km - l^2) = 0.$$

Para eliminar el término de rotación, aplicamos a esta ecuación la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) = T(u, v)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-c}{\sqrt{4b^2+c^2}} & \frac{2b}{\sqrt{4b^2+c^2}} \\ \frac{-2b}{\sqrt{4b^2+c^2}} & \frac{-c}{\sqrt{4b^2+c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

así la ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} -b^2(4b^2 + c^2)v^2 + \frac{-2b^2c^2k - c^4k + 2bc^3l + 8b^4m}{\sqrt{4b^2 + c^2}}v + \frac{bc(c^2k - 4bcl + 4b^2m)}{\sqrt{4b^2 + c^2}}u \\ + c^2(km - l^2) = 0 \end{aligned}$$

Si el coeficiente de u no se anula, tenemos el caso de una parábola, con eje focal paralelo al eje u . Observemos que si el coeficiente de u es cero, podemos considerar $k = \frac{4bcl - 4b^2m}{c^2}$, entonces sustituyendo esta expresión, la ecuación cuadrática toma la forma:

$$\begin{aligned} -b^2(4b^2 + c^2)y^2 + 2b\sqrt{4b^2 + c^2}(2bm - cl)y - (cl - 2bm)^2 &= 0, \\ -(b\sqrt{4b^2 + c^2}y - (cl - 2bm))^2 &= 0, \end{aligned}$$

la cual corresponde a una recta doble. Además si $ac^2 + 4b^3 = 0$ y $a = 0$ entonces $b = 0$ y $kcv + km - l^2 = 0$ es una recta simple.

Argumentos similares implican que si $ac^2 + 4b^3 = 0$ y $c = 0$ o si $ac^2 + 4b^3 = 0$ y $b = 0$ y $amu + km - l^2 = 0$ es una recta simple. \square

Como una consecuencia de las proposiciones 3.2.3 y 3.2.4 concluimos que la curva Hessiana de polinomios cúbicos realiza todas las posibles cónicas excepto una, por lo cual enunciamos en el siguiente:

Corolario 3.2.5 *La cónica definida como dos rectas paralelas no es realizable como la curva Hessiana de un polinomio cúbico.*

Demostración. Supongamos que existe un polinomio cúbico f_α cuya curva Hessiana consiste de un par de rectas paralelas. Como estas rectas son simples en el plano xy , dividen en tres bandas al plano alternando los tipos de sus puntos en hiperbólico y elíptico.

Después de una rotación del plano, podemos suponer que estas líneas están definidas por $y = \rho_1$ y $y = \rho_2$.

La expresión de la función f_α después de la rotación es

$$f_\alpha(x, y) = \frac{\tilde{k}}{2}x^2 + \tilde{l}xy + \frac{\tilde{m}}{2}y^2 + \frac{\tilde{a}}{6}x^3 + \frac{\tilde{d}}{2}x^2y + \frac{\tilde{b}}{2}xy^2 + \frac{\tilde{c}}{6}y^3.$$

Entonces, para algún $\rho \in \mathbb{R}$ la recta $y = \rho$ pertenece a la región elíptica en el plano xy .

La restricción de $f|_L$ define un polinomio cúbico en una variable, el cual está enteramente contenido en la región elíptica. Así tenemos que $f_\alpha(x, \rho)$ por un lado es un conjunto de puntos elípticos; lo cual quiere decir que para cada punto la curvatura gaussiana es positiva, es decir no cambia de signo a lo largo de la recta $y = \rho$. Por otro lado, $f_\alpha(x, \rho)$ es un polinomio de grado 3 en la variable x , y todo polinomio de grado 3 tiene por lo menos 1 punto de inflexión el cual indica cambio de concavidad y por lo tanto, cambio de curvatura, lo cual es una contradicción. \square

3.2.2. Diagrama de bifurcación de $\Sigma(x, y)$.

Para poder determinar el conjunto de bifurcación de la curva Hessiana de f_α en términos del discriminante, analizaremos la imagen inversa $\Delta^{-1}(0)$ en el espacio de parámetros (a, b, c) de la transformación $\Delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta(a, b, c) = a(ac^2 + 4b^3).$$

Entonces $\Delta^{-1}(0)$ es el conjunto de puntos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$a(ac^2 + 4b^3) = 0.$$

Esta ecuación se cumple si

$$a = 0 \quad \text{ó} \quad (3.3)$$

$$ac^2 + 4b^3 = 0, \quad (3.4)$$

La ecuación (3.3) corresponde al plano bc . Para obtener la gráfica de la ecuación (3.4) consideremos a , una constante diferente de cero.

i) Si $a < 0$, la ecuación (3.4) es equivalente a

$$c^2 = \alpha b^3, \quad (3.5)$$

donde $\alpha = -4/a > 0$. Entonces la ecuación (3.5) define una cúspide en planos paralelos al plano bc . La región exterior definida por los puntos donde la desigualdad $c^2 > \rho b^3$ se cumple, corresponde a aquellos puntos cuya curva Hessiana es una hipérbola o dos rectas que se intersecan transversalmente. La región interior definida por los puntos donde la desigualdad $c^2 < \rho b^3$ se cumple, corresponde a aquellos puntos donde la curva Hessiana es una elipse o un punto.

Observemos que si $a \rightarrow 0^-$, la curvatura de la cúspide tiende a cero y la región interior se convierte en medio plano. Así la familia de cúspides parametrizadas por a converge al eje c cuando $a \rightarrow 0$.

ii) Si $a > 0$, el coeficiente α de la ecuación (3.5) es $\alpha = -4/a < 0$. Un análisis análogo al de *i)* implica que la imagen de la superficie es simétrica respecto al origen al caso *i)*. Como una consecuencia de todas estas observaciones tenemos la siguiente afirmación.

Proposición 3.2.6 *El diagrama de bifurcación de la curva Hessiana de f_α en el espacio de parámetros (a, b, c) es la superficie $\Delta^{-1}(0)$, la cual consiste de la unión del plano $\{a = 0\}$ y la superficie cuspidal $\{ac^2 + 4b^3 = 0\}$. Además esta superficie divide en 4 regiones el espacio como se muestra en la figura 3.1.*

3.2.3. Determinación de dominios de f_α .

Ahora determinaremos el tipo de dominio, hiperbólico o elíptico, en el complemento de la curva Hessiana para la familia f_α .

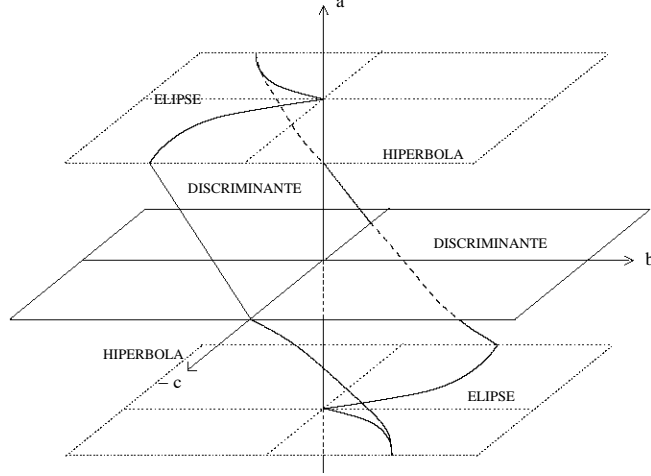


Figura 3.1: Superficie cuspidal $\Delta^{-1}(0)$.

Proposición 3.2.7 *Si la curva Hessiana es una parábola entonces la curvatura gaussiana $\Sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de f_α es regular. Además la región convexa en el complemento de esta curva es elíptica mientras que la región cóncava es hiperbólica.*

Demostración. Supongamos que la curva Hessiana es una parábola, esto implica que una de las siguientes condiciones se cumple: a) $a = 0$ y $bk \neq 0$, o b) $4b^3 + ac^2 = 0$ y $bc(c^2k - 4bcl + 4b^2m) \neq 0$. En el caso de a) la expresión

$$\Sigma(x, y) = -b^2y^2 + b kx + (kc - 2bl)y + km - l^2,$$

junto con la hipótesis $bk \neq 0$ implica que el gradiente

$$\nabla \Sigma(x, y) = (bk, -2b^2y + kc - 2bl),$$

no se anula. En el caso b) la expresión de Σ es:

$$\Sigma(x, y) = -b^2y^2 - \frac{4b^3}{c}xy - \frac{4b^4}{c^2}x^2 + \left(bk - \frac{4b^3m}{c^2}\right)x + (ck - 2bl)y + km - l^2,$$

y su gradiente es

$$\nabla\Sigma(x, y) = \left(\frac{4b^3}{c}y - \frac{8b^4}{c^2}x - \frac{4b^3m}{c^2} + bk, -2b^2y - \frac{4b^3}{c}x - 2bl + ck \right).$$

El gradiente se anula en los puntos (x, y) que satisfacen el sistema:

$$\begin{aligned} -\frac{2b}{c} \left(\frac{4b^3}{c}x + 2b^2y \right) &= \frac{4b^3m}{c^2} - bk \\ \frac{4b^3}{c}x + 2b^2y &= 2bl - ck. \end{aligned}$$

La existencia de una solución implica que:

$$\frac{4b^3m}{c^2} - bk = \frac{2b}{c}(2bl - ck),$$

o equivalentemente,

$$b(c^2k - 4bcl + 4b^2m) = 0.$$

Lo cual implica que el sistema no tiene solución.

Por otro lado, si L es una recta contenida en la región cóncava del complemento de la parábola entonces el Lema 3.1.2 implica que en las coordenadas convenientes la restricción de $f_\alpha|_L$ define un polinomio cúbico. Entonces, la proposición 3.1.1 implica que esta región es hiperbólica. Ya que la parábola es una cónica lisa, entonces la región convexa es elíptica. \square

Si la curva Hessiana es una elipse o una hipérbola, el lema 3.2.1 garantiza que la curvatura gaussiana de la gráfica de f_α tiene sólo un punto crítico. Este hecho implica la siguiente:

Proposición 3.2.8 *Si la curva Hessiana es una elipse, el punto singular de la curvatura (x_0, y_0) pertenece a la región acotada del complemento de la elipse. Esta región es elíptica y la curvatura toma su valor máximo en (x_0, y_0) . La región no acotada es hiperbólica.*

Por otra parte, si la curva Hessiana es una hipérbola, el punto singular de la curvatura (x_0, y_0) es la intersección de las asíntotas de la curva Hessiana. Estas rectas pertenecen a la región hiperbólica y la curvatura tiene un punto silla en (x_0, y_0) .

Demostración. Si la curva Hessiana es una elipse, el Teorema 3.1.3 implica que la región no acotada es hiperbólica, y entonces la región acotada es elíptica y ésta tiene un máximo el cual es el punto (x_0, y_0) , como veremos a continuación. Por otro lado si la curva Hessiana es una hipérbola, el siguiente cálculo muestra que las asíntotas se intersecan en el punto (x_0, y_0) el cual es un punto silla de la curvatura.

Para determinar el tipo de punto crítico (x_0, y_0) , consideramos la matriz Hessiana de la curvatura:

$$\text{hess}\Sigma(x, y) = \begin{pmatrix} 2ab & ac \\ ac & -2b^2 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $-\Delta$. Entonces si la curva Hessiana es una elipse se tiene que $-\Delta > 0$ y $ab < 0$, ya que $ab > 0$ implica que $\Delta > 0$. Además el punto singular (x_0, y_0) es un máximo de la curvatura. El valor de la curvatura en este punto es:

$$\frac{-\delta^2}{\Delta} > 0. \quad (3.6)$$

Un argumento de compacidad implica que (x_0, y_0) pertenece a la región acotada. Por otro lado, si la curva Hessiana es una hipérbola $-\Delta < 0$, entonces (x_0, y_0) es un punto silla y el lado izquierdo de la igualdad anterior es negativo. Esto implica que (x_0, y_0) pertenece a la región hiperbólica. Ahora probaremos que las asíntotas se intersecan en este punto. Supongamos $ac = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \Sigma(x, y) &= abx^2 - b^2y^2 + (am + bk)x - 2bly + km - l^2 \\ &= \left(\sqrt{ab}x + \frac{am + bk}{2\sqrt{ab}} \right)^2 - (by + l)^2 - \frac{(am + bk)^2}{4ab} + km. \end{aligned}$$

Entonces estas asíntotas están definidas como:

$$\left(\sqrt{ab}x + \frac{am + bk}{2\sqrt{ab}} + by + l \right) \left(\sqrt{ab}x + \frac{am + bk}{2\sqrt{ab}} - by - l \right) = 0,$$

y se intersecan en

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{2b^3k + 2ab^2m}{4ab^3}, -\frac{l}{b} \right).$$

El caso $ac \neq 0$ puede reducirse a este caso, haciendo una rotación del plano xy .
□

3.2.4. Curva de inflexión y cúspides de Gauss de la familia f_α

Recordemos que la curva de inflexión consiste de los puntos parabólicos o hiperbólicos, para los cuales alguna de sus direcciones asíntóticas pertenecen al núcleo de la tercera forma fundamental. Para describir dicho conjunto y determinar el número de direcciones de la tercera forma fundamental, aplicaremos el siguiente resultado el cual se prueba en [27].

Proposición 3.2.9 *Sea $V_3 = A(dx)^3 + 3B(dx)^2dy + 3Cdx(dy)^2 + D(dy)^3$ una forma cúbica simétrica en \mathbb{R}^2 y sea $\text{Hess}(V_3) = (AC - B^2)x^2 + (AD -$*

$BC)xy + (BD - C^2)y^2$ su forma cuadrática asociada con discriminante $\Lambda = (AC - B^2)(BD - C^2) - \frac{(AD - BC)^2}{4}$. Entonces las direcciones que son solución de V_3 son:

- a) Las tres reales y distintas si $\Lambda > 0$,
- b) una real y dos complejas conjugadas si $\Lambda < 0$,
- c) las tres reales y sólo dos de ellas que coinciden si $\Lambda = 0$ y $Hess(V_3)$ no es idénticamente cero,
- d) las tres reales iguales si $\Lambda \equiv 0$ (i.e., si los coeficientes de $Hess(V_3)$ son todos cero).

En el caso de la gráfica de f_α , la forma bilineal asociada a la tercera forma fundamental homogénea es

$$Hess(III) = (ab)x^2 + (ac)xy + (-b^2)y^2, \quad (3.7)$$

y su discriminante es $\Lambda = -\frac{1}{4}(4ab^3 + a^2c^2) = -\frac{1}{4}\Delta$, donde Δ es el discriminante de la curva Hessiana.

La siguiente proposición describe el comportamiento de la curva de inflexión de la superficie $z = f_\alpha(x, y)$ en términos de la curva Hessiana.

Proposición 3.2.10 Consideremos la gráfica de f_α :

- i) Si la curva Hessiana es una elipse o un punto, entonces la curva de inflexión está formada por tres rectas distintas.
- ii) Si la curva Hessiana es una parábola, una hipérbola o dos rectas entonces la curva de inflexión es una recta.
- iii) Si la curva Hessiana es una recta doble, entonces la curva de inflexión es todo el plano.
- iv) Si la curva Hessiana es una recta simple, entonces la curva de inflexión es vacía.

Demostración. La condición que define los puntos de inflexión está expresada en términos de las direcciones que anulan simultáneamente a la segunda y tercera forma fundamental:

$$(k + ax)dx^2 + 2(by + l)dxdy + (m + bx + cy)dy^2 = 0, \quad (3.8)$$

$$adx^3 + 3bdxdy^2 + cdy^3 = 0. \quad (3.9)$$

En la primera parte de la demostración determinamos algunas obstrucciones en la curva de inflexión para que sean una o tres rectas. Así, tenemos la siguiente afirmación:

La curva de inflexión no es la unión finita de rectas si y sólo si una de las siguientes condiciones se cumple:

- $c_1)$ $a = 0$ y $dy = 0$,
- $c_2)$ $2b dx + c dy = 0$, $ac^2 + 4b^3 = 0$ y $c \neq 0$,
- $c_3)$ $b = c = 0$, $a \neq 0$ y $dx = 0$,
- $c_4)$ $a = b = c = 0$.

La prueba de esta afirmación es obtenida directamente del análisis de la primera ecuación en todos los casos excepto para la condición c_2 donde son necesarias ambas ecuaciones.

Un análisis directo garantiza que estas condiciones implican los siguientes dos lemas:

Lema 3.2.11 *El plano xy no tiene puntos de inflexión si una de las siguientes condiciones se satisface:*

- $c_1)$ y $k \neq 0$,
- $c_2)$ y $c^2k - 4bcl + 4b^2m \neq 0$,
- $c_3)$ y $m \neq 0$,
- $c_4)$ y $km - l^2 > 0$.

Lema 3.2.12 *Cada punto del plano xy es un punto de inflexión si una de las siguientes condiciones se satisface:*

- $c_1)$ y $k = 0$,
- $c_2)$ y $c^2k - 4bcl + 4b^2m = 0$,
- $c_3)$ y $m = 0$,
- $c_4)$ y $km - l^2 \leq 0$.

En la segunda parte de la prueba observemos que si la curva Hessiana es una elipse o una hipérbola entonces $\Delta \neq 0$, equivalentemente, $a \neq 0$ y $ac^2 + 4b^3 \neq 0$. En este caso ninguna de las condiciones de los lemas se satisface. Así, para cada solución diferente de cero de la tercera forma fundamental, existe una recta de puntos de inflexión definida por la segunda forma fundamental.

En consecuencia, tomando en cuenta que el signo de Λ es opuesto al de Δ , la proposición 3.2.10 implica que si la curva Hessiana es una elipse o un punto, entonces hay 3 rectas de inflexión.

Por otro lado, si $\Delta < 0$, la curva Hessiana es una hipérbola o dos rectas transversales, entonces la única solución real de la tercera forma fundamental determina la recta de inflexión.

32CAPÍTULO 3. GEOMETRÍA AFÍN DE LA GRÁFICA DE UN POLINOMIO

Ahora supongamos que la curva Hessiana es una parábola. De acuerdo a la proposición 3.2.4 a), tenemos dos casos, si $a = 0$ y $bk \neq 0$, la primera ecuación implica que la segunda y tercera formas fundamentales homogéneas son:

$$\begin{aligned} II(dx, dy) &= kdx^2 + 2(by + l)dxdy + (m + bx + cy)dy^2, \\ III(dx, dy) &= dy^2(3bdx + cdy). \end{aligned}$$

Entonces $dy \neq 0$, Por otro lado, de la primera ecuación concluimos que $k = 0$. Así, la dirección definida por $3bdx + cdy = 0$ es una solución de la tercera forma fundamental y también de la segunda en un punto determinado por la sustitución de esta dirección en la forma.

Analizando el otro caso: $ac^2 + 4b^3 = 0$ y $bc\mu \neq 0$. Entonces, $a \neq 0$ y podemos sustituir $a = -\frac{4b^3}{c}$ en la tercera forma fundamental homogénea para obtener:

$$III(dx, dy) = (2bdx + cdy)^2(-bdx + cdy),$$

las direcciones simples de esta expresión junto con la segunda forma fundamental definen una recta de puntos de inflexión. Por otro lado, las direcciones dobles satisfacen c_2) como $\mu \neq 0$ entonces no hay más puntos de inflexión en el plano. Supongamos ahora que la curva Hessiana es una recta doble, la proposición 3.2.4 b) afirma que hay dos casos. Si $a = k = 0$ entonces dy es una dirección doble de la tercera forma fundamental. Esta dirección satisface c_1 , además, ya que k se anula, la afirmación 3.2.12 implica que cada punto del plano es un punto de inflexión. El otro caso definido por $ac^2 + 4b^3 = 0 = \mu$ es probado aplicando la afirmación 3.2.12 a la condición c_2 obtenida por la dirección doble de la tercera forma fundamental.

La afirmación *iv*) es probada con un análisis análogo al que aplicamos en el caso de la recta doble. \square

Ahora determinemos el número de cúspides de Gauss de acuerdo al tipo de cónica definida por la curva Hessiana:

Corolario 3.2.13 *Consideremos la familia de polinomios cúbicos reales*

$$f_\alpha(x, y) = \frac{k}{2}x^2 + lxy + \frac{m}{2}y^2 + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{6}y^3.$$

La gráfica de f_α tiene:

- a) Tres cúspides de Gauss si la curva Hessiana es una elipse.
- b) Sólo una cúspide de Gauss si la curva Hessiana es una hipérbola o parábola.
- c) No hay cúspides de Gauss si la curva Hessiana es una cónica singular.

Demostración. Consideremos la familia de superficies $z = f_\alpha(x, y)$. Como se había mencionado, las ecuaciones 3.8 y 3.9 determinan la curva de inflexión.

Como la curva de inflexión es tangente a la curva parabólica en las cúspides de Gauss ([20], [26]), el conjunto de cúspides de Gauss es el conjunto de puntos de intersección de la curva Hessiana y la curva de inflexión. Así tenemos el siguiente:

Lema 3.2.14 *Si la curva de inflexión consiste de una o tres rectas, entonces cada recta interseca a la curva Hessiana en un punto.*

Las siguientes conclusiones son consecuencia de la proposición 3.2.10 y el lema 3.2.14:

- a) Si la curva Hessiana es una elipse entonces la superficie tiene exactamente tres cúspides de Gauss.
- b) Si la curva Hessiana es una hipérbola o una parábola, entonces tiene exactamente una cúspide de Gauss.
- c) Si la curva Hessiana es un punto, entonces la superficie tiene un solo punto parabólico, es decir, no hay cúspides de Gauss. Este punto parabólico es la intersección de tres rectas de inflexión.

Si $\Delta > 0$ y la curva Hessiana está dada por dos rectas transversales entonces la superficie tiene un solo punto parabólico, es decir, no tiene cúspides de Gauss. Este punto parabólico es la intersección de las dos rectas Hessianas y de la recta de inflexión que pasa por este punto. Los otros casos se prueban con argumentos análogos. \square

Demostración del lema 3.2.14. Consideremos Δ . Por la proposición 3.2.10 la curva de inflexión está formada por tres o una recta, dependiendo si Δ es positiva, negativa, o cero. Cada una de estas rectas está definida por una dirección simple que satisface la tercera forma fundamental y la ecuación

$$x(ax^2 + bdy^2) + y(2bdxdy + cdy^2) + kdx^2 + 2ldxdy + mdy^2 = 0.$$

Si el coeficiente de x o y no son cero. Supongamos que el coeficiente de x no es cero. Entonces,

$$x = -\frac{2bdxdy + cdy^2}{adx^2 + bdy^2}y - \frac{kdx^2 + 2ldxdy + mdy^2}{adx^2 + bdy^2}.$$

Sustituimos esta expresión en la curva Hessiana, $2abx^2 - b^2y^2 + acxy + (kb + am)x + (kc - 2lb)y + km - l^2 = 0$ y obtenemos

$$[(-b^2dy^2 + acdxdy + abdx^2)y - dy^2bl + (am - kb)dxdy + dx^2al]^2 = 0. \quad (3.10)$$

La demostración de esta proposición consiste en ver cuántas soluciones tiene la ecuación 3.10 en términos del discriminante Δ de la curva Hessiana. Por cada solución de dicha ecuación, la segunda forma fundamental define una recta.

a) Si $\Delta < 0$ entonces la forma cuadrática $-b^2dy^2 + acdxdy + abdx^2$ (la cual es el coeficiente de la variable y) es definida positiva porque el determinante de la matriz de esta forma es $-\Delta$. Esto implica que la ecuación (3.10) tiene una solución real cuya multiplicidad es dos. Esto significa que cada recta de la curva de inflexión interseca a la curva Hessiana en un punto con multiplicidad dos.

b) Si $\Delta > 0$, la forma cuadrática $-b^2dy^2 + acdxdy + abdx^2$ tiene por solución dos direcciones reales distintas. Sustituyendo estas direcciones en la tercera forma

fundamental se verifica que estas direcciones no son solución de dicha forma. Entonces, la ecuación (3.10) tiene una solución real cuya multiplicidad es dos.

c) Si $\Delta = 0$, con $a = 0$ y $k \neq 0$, la dirección simple $3b dx + c dy = 0$ de la tercera forma fundamental tiene asociada una recta de inflexión. La solución de la tercera forma $dy = 0$ es una dirección doble de ésta. Como el coeficiente de la variable y de (3.10), $-b^2$ no es cero y los coeficientes de x y de y de la segunda forma son cero entonces no hay recta asociada a la solución $dy = 0$. En ese caso la curva Hessiana es una parábola.

d) Si $\Delta = 0$, con $ac^2 + 4b^3 = 0$ y $abc \neq 0$ entonces la dirección simple $-b dx + c dy = 0$ de la tercera forma fundamental no es dirección de la forma cuadrática $-b^2 dy^2 + acdxdy + abdx^2$. Esto implica que la ecuación (3.10) tiene una solución real cuya multiplicidad es dos. Recordemos que,

$$\Sigma(x, y) = -b^2 c^2 y^2 - 4cb^3 xy - 4b^4 x^2 + (bkc^2 - 4b^3 m)x + c^2(ck - 2bl)y + c^2(km - l^2).$$

Consideremos en este caso, $c^2 k - 4bcl + 4b^2 m \neq 0$ y el cambio de coordenadas del plano xy ,

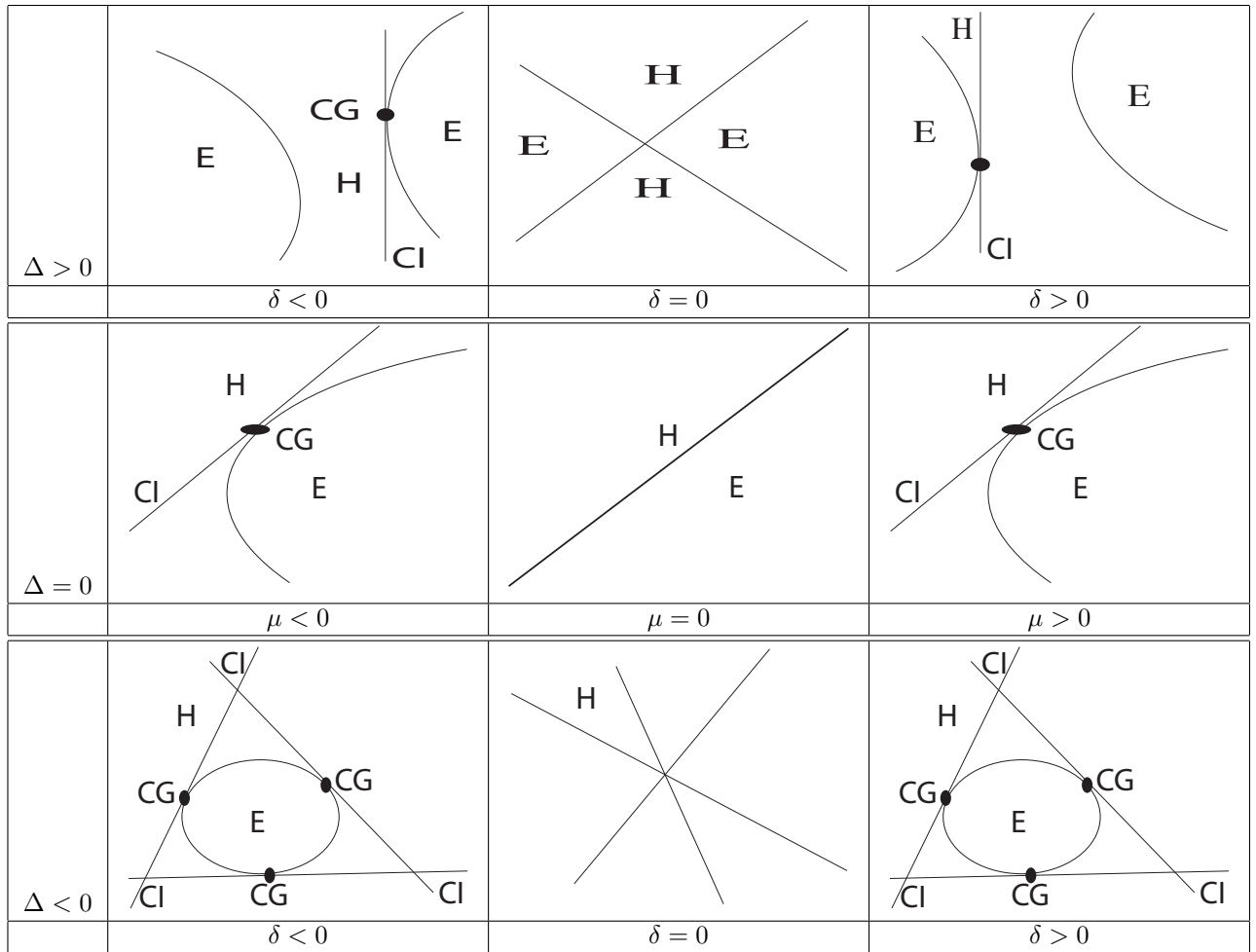
$$X = 2b^2 x + bc y, \quad Y = (bkc^2 - 4b^3 m)x + (c^3 k - 2bc^2 l)y,$$

cuyo determinante es $b^2 c(c^2 k - 4bcl + 4b^2 m)$. Entonces, la curva Hessiana es transformada en la parábola $-X^2 + Y + c^2(km - l^2) = 0$. Finalmente, esta parábola interseca en un punto a la recta de inflexión.

Si $ac^2 + 4b^3 = 0$, $abc \neq 0$ y $c^2 k - 4bcl + 4b^2 m = 0$, entonces $k = \frac{4bl}{c} - \frac{4b^2 m}{c^2}$. En este caso la curva Hessiana es la recta doble $-(2b^2 x + bc y + 2bm - cl)^2 = 0$ y por el lema 3.2.12 cada punto es un punto de inflexión. Esto significa que no hay recta de inflexión simple. \square

La siguiente figura muestra las bifurcaciones de la curva Hessiana de f_α .

Diagrama de bifurcación de la curva Hessiana de la familia f_α



Capítulo 4

Índice de los campos de direcciones de una forma diferencial cuadrática.

4.1. Extensión del campo de direcciones de una forma diferencial cuadrática en infinito.

Para describir el comportamiento de campos de líneas definidos en la superficie como lo son líneas de curvatura y líneas asintóticas cerca de infinito, determinaremos la expresión de una forma diferencial cuadrática

$$w(x, y) = A(x, y)dx^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dy^2,$$

con $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ funciones polinomiales, bajo el cambio de coordenadas $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right).$$

Esta función es la inversión $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ la cual envía una vecindad agujerada del origen en una vecindad agujerada del infinito.

Lema 4.1.1 *Consideremos una forma diferencial cuadrática polinomial en \mathbb{R}^2 , $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n$, donde ω_k , $k = 0, \dots, n$ es la parte homogénea de grado k de ω definida*

$$\omega_k(x, y) = A_k(x, y)dx^2 + 2B_k(x, y)dxdy + C_k(x, y)dy^2,$$

donde $A_k(x, y) = \sum_{i=0}^k a_{k-i,i}x^{k-i}y^i$, $B_k(x, y) = \sum_{i=0}^k b_{k-i,i}x^{k-i}y^i$, $C_k(x, y) = \sum_{i=0}^k c_{k-i,i}x^{k-i}y^i$. La expresión de ω en las nuevas coordenadas, denotada por

$\varphi^*\omega(u, v)$ es

$$\varphi^*\omega(u, v) = \varphi^*\omega_0(u, v) + \varphi^*\omega_1(u, v) + \cdots + \varphi^*\omega_n(u, v).$$

Si el polinomio $u^2 + v^2$ no es factor de $\varphi^*\omega_k(u, v)$ para toda $k = 0, \dots, n$, entonces $\varphi^*\omega(u, v)$ es, módulo el producto con una función que no se anula en el plano agujerado en el origen, a la forma cuadrática

$$\tilde{\omega}(u, v) = \tilde{\omega}_{n+4}(u, v) + \dots + \tilde{\omega}_{2n+4}(u, v),$$

donde

$$\tilde{\omega}_{n+4}(u, v) = \tilde{A}_{n+4}(u, v)du^2 + 2\tilde{B}_{n+4}(u, v)dudv + \tilde{C}_{n+4}(u, v)dv^2,$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{n+4}(u, v) &= (-u^2 + v^2)^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &\quad + 2(2uv(-u^2 + v^2)) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &\quad + 4u^2v^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i, \\ \tilde{B}_{n+4}(u, v) &= (-2uv)(-u^2 + v^2) \sum_{i=0}^n a_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &\quad + ((-u^2 + v^2)^2 - 4u^2v^2) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &\quad + (2uv)(-u^2 + v^2) \sum_{i=0}^n c_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i, \\ \tilde{C}_{n+4}(u, v) &= 4u^2v^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &\quad - 2(2uv)(-u^2 + v^2) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &\quad + (-u^2 + v^2)^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i. \end{aligned}$$

Llamamos a $\tilde{\omega}$ la forma asociada a ω en el punto al infinito.

Para la demostración de esta proposición consideraremos el siguiente lema que describe las ecuaciones de cambio de coordenadas para formas cuadráticas diferenciales.

4.1. EXTENSIÓN DE UNA FORMA DIFERENCIAL CUADRÁTICA EN INFINITO.39

Lema 4.1.2 Dada una forma diferencial cuadrática,

$$\omega = A(x, y)dx^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dy^2,$$

con $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ funciones diferenciables y $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ un difeomorfismo del plano, el cambio de coordenadas de la forma diferencial ω bajo el difeomorfismo φ está dado por:

$$\tilde{\omega} = \tilde{A}(u, v)du^2 + 2\tilde{B}(u, v)dudv + \tilde{C}(u, v)dv^2,$$

donde:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(u, v) &= (A \circ \varphi) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right)^2 + 2(B \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + (C \circ \varphi) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right)^2, \\ \tilde{B}(u, v) &= (A \circ \varphi) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) + (B \circ \varphi) \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right) \right] \\ &\quad + (C \circ \varphi) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right), \\ \tilde{C}(u, v) &= (A \circ \varphi) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right)^2 + 2(B \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + (C \circ \varphi) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right)^2.\end{aligned}$$

Demostración. Consideremos la forma diferencial cuadrática

$$\omega(x, y) = A(x, y)dx^2 + B(x, y)dxdy + C(x, y)dy^2,$$

y el cambio de coordenadas $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(u, v) = (x, y)$. Sea φ^* el pull-back de φ el cual actúa sobre el espacio de formas diferenciales, es decir

$$\varphi^* : \Lambda(x, y) \rightarrow \Lambda(u, v),$$

de manera que:

$$\tilde{\omega}(u, v) = A \circ \varphi(u, v)[\varphi^* dx]^2 + 2B \circ \varphi(u, v)[\varphi^* dx][\varphi^* dy] + C \circ \varphi(u, v)[\varphi^* dy]^2. \quad (4.1)$$

Para obtener el cambio de coordenadas, basta determinar las formas $\varphi^* dx$ y $\varphi^* dy$. Sabemos que

$$\varphi^* dx : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

y si $X \in \mathbb{R}^2$, $X = X_1 \frac{\partial}{\partial u} + X_2 \frac{\partial}{\partial v}$, entonces

$$\varphi^* dx \left(X_1 \frac{\partial}{\partial u} + X_2 \frac{\partial}{\partial v} \right) = dx \left(d\varphi \left(X_1 \frac{\partial}{\partial u} + X_2 \frac{\partial}{\partial v} \right) \right). \quad (4.2)$$

Por otro lado sabemos que $\varphi^* dx = \varphi_1^* du + \varphi_2^* dv \in \Lambda(u, v)$, de manera que determinamos φ_1^* por $\varphi^* dx \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ (análogamente para φ_2^*). Aplicando 4.2, tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi^* dx \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) &= dx \left(\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \right) \\ &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}.\end{aligned}$$

Un cálculo equivalente muestra que $\varphi^* dx \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}$, por lo tanto

$$\varphi^* dx = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv.$$

Análogamente obtenemos $\varphi^* dy$,

$$\varphi^* dy = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv.$$

Haciendo las sustituciones correspondientes de $\varphi^* dx$ y $\varphi^* dy$ en 4.1, desarrollando y reagrupando coeficientes en du^2 , $dudv$ y dv^2 , obtenemos las ecuaciones dadas. \square

Demostración del Lema 4.1.1. Consideremos los coeficientes A , B , C de la forma cuadrática ω , donde

$$A(x, y) = a_0 + \sum_{k=1}^n A_k(x, y), \quad B(x, y) = b_0 + \sum_{k=1}^n B_k(x, y), \quad C(x, y) = c_0 + \sum_{k=1}^n C_k(x, y),$$

con a_0 , b_0 , c_0 términos constantes y $A_k(x, y)$, $B_k(x, y)$, $C_k(x, y)$ son polinomios homogéneos de grado k , es decir

$$A_k(x, y) = \sum_{i=0}^k a_{k-i,i} x^{k-i} y^i, \quad B_k(x, y) = \sum_{i=0}^k b_{k-i,i} x^{k-i} y^i, \quad C_k(x, y) = \sum_{i=0}^k c_{k-i,i} x^{k-i} y^i.$$

De esta manera la forma diferencial cuadrática se puede expresar por grados como:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= a_0 dx^2 + 2b_0 dx dy + c_0 dy^2 \\ &+ A_1(x, y) dx^2 + 2B_1(x, y) dx dy + C_1(x, y) dy^2 \\ &+ A_2(x, y) dx^2 + 2B_2(x, y) dx dy + C_2(x, y) dy^2 \\ &\vdots \\ &+ A_n(x, y) dx^2 + 2B_n(x, y) dx dy + C_n(x, y) dy^2 \\ &= w_0 + w_1(x, y) + \cdots + w_n(x, y). \end{aligned}$$

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, dada por:

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right),$$

cuya derivada es:

$$d\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{-u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} & \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2} \\ \frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2} & \frac{-u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{pmatrix}$$

4.1. EXTENSIÓN DE UNA FORMA DIFERENCIAL CUADRÁTICA EN INFINITO.41

Aplicando el lema 4.1.2 a la forma diferencial cuadrática ω con este cambio de coordenadas, tenemos la expresión de la forma cuadrática en las nuevas coordenadas,

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega} &= \left(\frac{1}{r^4} (a_0 s^2 + 2(2b_0 u v s) + 4c_0 u^2 v^2) \right. \\
&+ \frac{1}{r^5} \left(s^2 \sum_{i=0}^1 a_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i + 2(2u v s) \sum_{i=0}^1 b_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i \right. \\
&+ 4u^2 v^2 \sum_{i=0}^1 c_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i) \\
&+ \frac{1}{r^6} \left(s^2 \sum_{i=0}^2 a_{2-i,i} u^{2-i} (-v)^i + 2(2u v s) \sum_{i=0}^2 b_{2-i,i} u^{2-i} (-v)^i \right. \\
&+ 4u^2 v^2 \sum_{i=0}^2 c_{2-i,i} u^{2-i} (-v)^i) + \dots \\
&+ \frac{1}{r^{n+4}} \left(s^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i + 2(2u v s) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right. \\
&+ \left. 4u^2 v^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right) du^2 \\
&+ 2 \left(\frac{1}{r^4} (a_0 (-2u v) s - 2b_0 (s^2 - 4u^2 v^2) + c_0 (2u v) (s)) \right. \\
&+ \frac{1}{r^5} \left((-2u v s) \sum_{i=0}^1 a_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i + (s^2 - 4u^2 v^2) \sum_{i=0}^1 b_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i \right. \\
&+ (2u v s) \sum_{i=0}^1 c_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i) \\
&+ \frac{1}{r^6} \left((-2u v s) \sum_{i=0}^2 a_{2-i,i} u^{2-i} (-v)^i + (s^2 - 4u^2 v^2) \sum_{i=0}^2 b_{2-i,i} u^{2-i} (-v)^i \right. \\
&+ (2u v s) \sum_{i=0}^2 c_{2-i,i} u^{2-i} (-v)^i) + \dots \\
&+ \frac{1}{r^{n+4}} \left((-2u v s) \sum_{i=0}^n a_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i + (s^2 - 4u^2 v^2) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right. \\
&+ \left. (2u v s) \sum_{i=0}^n c_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right) du dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{r^4} (a_0(4u^2v^2) - 2(2b_0uv s) + c_0(s)^2) \right. \\
 & + \frac{1}{r^5} (4u^2v^2 \sum_{i=0}^1 a_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i - 2(2uv s) \sum_{i=0}^1 b_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i \\
 & + s^2 \sum_{i=0}^1 c_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i) \\
 & + \frac{1}{r^6} (4u^2v^2 \sum_{i=0}^2 a_{2-i,i} u^{2-i} (-v)^i - 2(2uv s) \sum_{i=0}^2 b_{2-i,i} u^{2-i} (-v)^i \\
 & + s^2 \sum_{i=0}^2 c_{2-i,i} u^{2-i} (-v)^i) + \dots \\
 & + \frac{1}{r^{n+4}} (4u^2v^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i - 2(2uv s) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \\
 & \left. + r^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i) \right) dv^2
 \end{aligned}$$

donde $r = u^2 + v^2$ y $s = -u^2 + v^2$. Podemos reagrupar nuevamente la expresión por grados obteniendo

$$\tilde{\omega}(u, v) = \frac{1}{r^4} \varphi^* \omega_0(u, v) + \frac{1}{r^5} \varphi^* \omega_1(u, v) + \frac{1}{r^6} \varphi^* \omega_2(u, v) + \dots + \frac{1}{r^{n+4}} \varphi^* \omega_n(u, v)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \varphi^* \omega_0(u, v) & = (a_0 s^2 + 2(2b_0 u v s) + 4c_0 u^2 v^2) du^2 \\
 & + 2(a_0(-2u v s) - 2b_0(s^2 - 4u^2 v^2) + c_0(2u v s)) du dv \\
 & + (a_0(4u^2 v^2) - 2(2b_0 u v s) + c_0 s^2) dv^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi^* \omega_1(u, v) & = \left(s^2 \sum_{i=0}^1 a_{1-i,i} (u)^{1-i} (-v)^i + 2(2u v s) \sum_{i=0}^1 b_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i \right. \\
 & \left. + 4u^2 v^2 \sum_{i=0}^1 c_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i \right) du^2 \\
 & + 2 \left((-2u v s) \sum_{i=0}^1 a_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i + (s^2 - 4u^2 v^2) \sum_{i=0}^1 b_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i \right. \\
 & \left. + 2u v s \sum_{i=0}^1 c_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i \right) dudv
 \end{aligned}$$

4.1. EXTENSIÓN DE UNA FORMA DIFERENCIAL CUADRÁTICA EN INFINITO.43

$$\begin{aligned}
 & + \left(4u^2v^2 \sum_{i=0}^1 a_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i - 2(2uv s) \sum_{i=0}^1 b_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i \right. \\
 & \left. + s^2 \sum_{i=0}^1 c_{1-i,i} u^{1-i} (-v)^i \right) dv^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi^* \omega_n(u, v) & = \left(s^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i + 2(2uv s) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right. \\
 & \left. + 4u^2v^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right) du^2 \\
 & + 2 \left((-2uv s) \sum_{i=0}^n a_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i + (s^2 - 4u^2v^2) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right. \\
 & \left. + (2uv s) \sum_{i=0}^n c_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right) du dv \\
 & + \left(4u^2v^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i - 2(2uv s) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right. \\
 & \left. + s^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i} u^{n-i} (-v)^i \right) dv^2.
 \end{aligned}$$

Se puede observar que los coeficientes $\tilde{A}_0 \tilde{B}_0, \tilde{C}_0$ de $\varphi^* \omega_0$ son de grado 4, de la misma forma los coeficientes $\tilde{A}_1 \tilde{B}_1, \tilde{C}_1$ de $\varphi^* \omega_1$ son de grado 5, así hasta los coeficientes $\tilde{A}_n \tilde{B}_n, \tilde{C}_n$ de $\varphi^* \omega_n$ los cuales son de grado $n+4$. Podemos reescribir $\tilde{\omega}$ considerando como común denominador el término r^{n+4} obteniendo así la expresión:

$$\tilde{\omega}(u, v) = \frac{1}{r^{n+4}} [r^n \varphi^* \omega_0(u, v) + r^{n-1} \varphi^* \omega_1(u, v) + r^{n-2} \varphi^* \omega_2(u, v) + \cdots + \varphi^* \omega_n(u, v)].$$

La expresión de $\tilde{\omega}$ en el nuevo cambio de coordenadas es:

$$\tilde{\omega} = \underbrace{r^n \varphi^* \omega_0(u, v)}_{\tilde{\omega}_{2n+4}(u, v)} + \underbrace{r^{n-1} \varphi^* \omega_1(u, v)}_{\tilde{\omega}_{2n+3}(u, v)} + \underbrace{r^{n-2} \varphi^* \omega_2(u, v)}_{\tilde{\omega}_{2n+2}(u, v)} + \cdots + \underbrace{\varphi^* \omega_n(u, v)}_{\tilde{\omega}_{n+4}(u, v)}.$$

Observemos que el cero es una singularidad de la ecuación cuadrática. En esta última expresión el término $r^n \varphi^* \omega_0(u, v)$ es de grado $2n + 4$, el término

$r^{n-1}\varphi^*\omega_1(u, v)$ es de grado $2n + 3$, así hasta el término $\varphi^*\omega_n(u, v)$ el cual resulta ser el grado menor $n + 4$ de $\tilde{\omega}$. Teniendo así:

$$\tilde{\omega}_{n+4}(u, v) = \tilde{A}_{n+4}(u, v)du^2 + 2\tilde{B}_{n+4}(u, v)du dv + \tilde{C}_{n+4}(u, v)dv^2$$

donde:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{n+4}(u, v) &= (-u^2 + v^2)^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &+ 2(2uv(-u^2 + v^2)) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &+ 4u^2v^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{n+4}(u, v) &= (-2uv)(-u^2 + v^2) \sum_{i=0}^n a_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &+ ((-u^2 + v^2)^2 - 4u^2v^2) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &+ (2uv)(-u^2 + v^2) \sum_{i=0}^n c_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{n+4}(u, v) &= 4u^2v^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &- 2(2uv)(-u^2 + v^2) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i \\ &+ (-u^2 + v^2)^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i}(u)^{n-i}(-v)^i\end{aligned}$$

□

Como se hizo notar en el lema anterior, el cero es una singularidad de $\tilde{\omega}$. Para que dicha singularidad sea aislada, basta ver que las ecuaciones $\tilde{A}(u, v) = 0$, $\tilde{B}(u, v) = 0$ y $\tilde{C}(u, v) = 0$ no tienen solución común en una vecindad de éste, o de manera equivalente, que las pendientes de las rectas tangentes a la curva $\tilde{A}(u, v) = 0$ no coinciden simultáneamente con las pendientes de las curvas $\tilde{B}(u, v) = 0$ y $\tilde{C}(u, v) = 0$.

Las pendientes de las rectas tangentes a la curva $\tilde{A}(u, v) = 0$ están dadas por las pendientes de los factores lineales reales del polinomio homogéneo de menor

4.1. EXTENSIÓN DE UNA FORMA DIFERENCIAL CUADRÁTICA EN INFINITO.45

grado de \tilde{A} (como $u^2 + v^2$ no es factor de $\varphi^*\omega_k(u, v)$, entonces el polinomio homogéneo de menor grado de A es \tilde{A}_{n+4} y de igual manera para los coeficientes B y C).

Estos valores corresponden a los ceros de un polinomio $a(u)$ obtenido del polinomio homogéneo de menor grado de \tilde{A} , es decir, $a(u) = \tilde{A}_n(u, 1)$, de igual manera se analizan los polinomios $b(u) = \tilde{B}_n(u, 1)$ y $c(u) = \tilde{C}_n(u, 1)$, teniendo así que, para que el origen sea una singularidad aislada, es suficiente con que los polinomios $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$, no tengan ceros en común en una vecindad del origen. Estas afirmaciones demuestran el siguiente

Lema 4.1.3 *Sea ω una forma diferencial cuadrática polinomial en \mathbb{R}^2 , $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n$, donde ω_k , $k = 0, \dots, n$ es la parte homogénea de grado k de ω*

$$\omega_k(x, y) = A_k(x, y)dx^2 + 2B_k(x, y)dxdy + C_k(x, y)dy^2,$$

donde $A_k(x, y) = \sum_{i=0}^k a_{k-i,i}x^{k-i}y^i$, $B_k(x, y) = \sum_{i=0}^k b_{k-i,i}x^{k-i}y^i$, $C_k(x, y) = \sum_{i=0}^k c_{k-i,i}x^{k-i}y^i$, y sea $\tilde{\omega}$ su forma asociada a ω en el punto al infinito,

$$\tilde{\omega}(u, v) = \tilde{\omega}_{n+4}(u, v) + \dots + \tilde{\omega}_{2n+4}(u, v).$$

tal que el polinomio $u^2 + v^2$ no es factor de $\varphi^*\omega_k(u, v)$ para toda $k = 0, \dots, n$. Consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} a(u) &= (-u^2 + 1)^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i}u^{n-i}(-1)^i \\ &+ 2(2u(-u^2 + 1)) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i}u^{n-i}(-1)^i \\ &+ 4u^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i}u^{n-i}(-1)^i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(u) &= (-2u)(-u^2 + 1) \sum_{i=0}^n a_{n-i,i}u^{n-i}(-1)^i \\ &+ ((-u^2 + 1)^2 - 4u^2) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i}u^{n-i}(-1)^i \\ &+ (2u)(-u^2 + 1) \sum_{i=0}^n c_{n-i,i}u^{n-i}(-1)^i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(u) &= 4u^2 \sum_{i=0}^n a_{n-i,i}(u)^{n-i}(-1)^i \\
&- 2(2u)(-u^2+1) \sum_{i=0}^n b_{n-i,i}(u)^{n-i}(-1)^i \\
&+ (-u^2+1)^2 \sum_{i=0}^n c_{n-i,i}(u)^{n-i}(-1)^i.
\end{aligned}$$

Si los polinomios $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$, no tienen ceros en común en una vecindad del origen, entonces el origen es una singularidad aislada de $\tilde{\omega}$.

Observemos que la condición de que $u^2 + v^2$ no sea factor de la forma $\varphi^* \omega_k(u, v)$ para todo $k = 0, \dots, n$, es una hipótesis que no necesariamente se cumple, como se muestra en el siguiente ejemplo. En éste se considera la forma cuadrática definida por la segunda forma fundamental de un polinomio.

Ejemplo 4.1.4 Consideremos la familia de polinomios de grado 3

$$f_k(x, y) = k(x^2 + y^2) - \frac{3}{2}(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3),$$

con $k \in \mathbb{R}$. Su curva Hessiana es la familia de hipérbolas descritas por la ecuación

$$2k^2 - 12kx + 9x^2 - 12ky + 36xy + 9y^2 = 0.$$

La ecuación de líneas asintóticas es:

$$(2k - 9x - 3y)dx^2 - 6(x + y) dx dy + (2k - 3x - 9y)dy^2 = 0,$$

La forma asociada a la segunda forma fundamental en el punto al infinito es:

$$\begin{aligned}
\varphi^* II(u, v) &= \frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^5} [(2ku^4 + 4ku^2v^2 + 2kv^4 - 9u^3 + 15u^2v + 3uv^2 + 3v^3)du^2 \\
&- 4(u - v)(u^2 + 4uv + v^2) dudv \\
&+ (2ku^4 + 4ku^2v^2 + 2kv^4 - 3u^3 - 3u^2v - 15uv^2 + 9v^3)dv^2] = 0.
\end{aligned}$$

Se observa que bajo el nuevo cambio de coordenadas, $u^2 + v^2$ es factor de $\varphi^* II(u, v)$.

Este hecho da origen a la siguiente definición.

Definición 4.1.5 Sea ω una forma diferencial cuadrática y $\tilde{\omega}$ su forma asociada en infinito. Cuando la parte homogénea de menor grado, $\tilde{\omega}_{n+4}$ de $\tilde{\omega}$ está determinada sólo por la parte homogénea de mayor grado ω_n de ω diremos que $\tilde{\omega}$ tiene buena multiplicidad (en el origen).

4.2. Índice del campo de líneas de curvatura de una superficie.

Definición 4.2.1 Una forma diferencial cuadrática

$$w(x, y) = A(x, y)dx^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dy^2$$

es llamada hiperbólica (o positiva) en (x_0, y_0) si su discriminante Δ satisface

$$\Delta(x_0, y_0) = (B^2 - AC)(x_0, y_0) > 0.$$

Análogamente diremos que la forma cuadrática es elíptica (o negativa) en (x_0, y_0) si $\Delta(x_0, y_0) < 0$.

De acuerdo con esta definición, diremos que un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es hiperbólico (elíptico) en (x, y) si su segunda forma fundamental

$$II_f(x, y) = f_{xx}(x, y)dx^2 + 2f_{xy}(x, y)dxdy + f_{yy}(x, y)dy^2$$

es hiperbólica (elíptica).

Recordemos que el núcleo de una forma diferencial cuadrática positiva define dos direcciones en cada punto. Si esta forma diferencial cuadrática se anula en un punto aislado p y la forma cuadrática es positiva (o hiperbólica) en la vecindad agujerada alrededor de p , es posible definir dos direcciones en forma continua en cada punto de esta vecindad. Los índices de ambos campos de direcciones en p coinciden. Entonces llamaremos a éste el índice del campo de direcciones de la forma cuadrática en p .

Algunas aplicaciones importantes del cambio de coordenadas mostrado en el Lema 4.1.1 para el análisis del índice en infinito de campos de direcciones definidos por el núcleo de una forma diferencial cuadrática las mostramos a continuación. Analizaremos los campos de líneas de curvatura principal en una vecindad del infinito de la superficie $\{z = f(x, y)\}$ donde f es un polinomio.

La ecuación diferencial de líneas de curvatura para una superficie diferenciable inmersa en \mathbb{R}^3 es:

$$(fE - eF)dx^2 + (gE - eG)dxdy + (gF - fG)dy^2 = 0, \quad (4.3)$$

donde E, F, G , y e, f, g son los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental respectivamente. Recordemos que la configuración de líneas de curvatura principal es obtenida como la configuración de una forma diferencial cuadrática hiperbólica (ó positiva) por lo que las soluciones de la ecuación anterior en un punto regular de la superficie son dos campos de direcciones ortogonales.

Si la superficie es $\{z = f(x, y)\}$, donde f es un polinomio de grado n , los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de la superficie son:

$$E = 1 + (f_x)^2, F = f_x f_y, G = 1 + (f_y)^2,$$

$$e = f_{xx}, f = f_{xy}, g = f_{yy}.$$

De manera que la ecuación 4.3 toma la forma:

$$\begin{aligned} ((1 + f_x^2)f_{xy} - f_{xx}f_x f_y) dx^2 + ((1 + f_x^2)f_{yy} - (1 + f_y^2)f_{xx}) dx dy + \\ (f_x f_y f_{yy} - f_{xy}(1 + f_y^2)) dy^2 = 0 \end{aligned}$$

Observemos que los coeficientes de la ecuación de líneas de curvatura tendrán grado $\leq 3n - 4$. Aplicando el Lema 4.1.1 a la ecuación de líneas de curvatura de la superficie se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2.2 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado n y sea $\omega(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ la ecuación de líneas de curvatura de f ,*

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{3n-4},$$

donde ω_k , $k = 0, \dots, 3n - 4$ es la parte homogénea de grado k de ω definida en \mathbb{R}^2

$$\omega_k(x, y) = A_k(x, y)dx^2 + B_k(x, y)dxdy + C_k(x, y)dy^2.$$

Supongamos que $\tilde{\omega}(u, v)$ tiene buena multiplicidad. Entonces, los índices de los campos de líneas de curvatura de ω y ω_{3n-4} en el punto al infinito coinciden.

Demostración. Consideremos $\omega(x, y)$ la ecuación de líneas de curvatura de f y $\omega_{3n-4}(x, y)$ su parte homogénea de grado mayor $3n - 4$ respectivamente. Consideremos sus formas asociadas $\tilde{\omega}(u, v)$ y $\tilde{\omega}_{3n-4}(u, v)$ definidas en una vecindad U del punto al infinito.

La demostración consiste en mostrar que el campo de direcciones principales de ω puede ser deformado en el campo de direcciones principales de ω_{3n-4} por una isotopía cuyo discriminante preserva el signo negativo de la ecuación de líneas de curvatura localmente (en el punto al infinito). Definamos la isotopía Ψ con valores en el espacio \mathcal{Q} de formas cuadráticas reales en el plano.

$$\Psi : U \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{Q},$$

$$\Psi_t(u, v) = (1 - t)\tilde{\omega}_{3n-4}(u, v) + t\tilde{\omega}(u, v), \text{ es decir,}$$

$$\Psi_t(u, v) = \tilde{A}_t(u, v)du^2 + \tilde{B}_t(u, v)dudv + \tilde{C}_t(u, v)dv^2,$$

donde:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_t(u, v) &= \tilde{A}_{3n}(u, v) + tO_1^{(3n+1)}(u, v), \\ \tilde{B}_t(u, v) &= \tilde{B}_{3n}(u, v) + tO_2^{(3n+1)}(u, v), \\ \tilde{C}_t(u, v) &= \tilde{C}_{3n}(u, v) + tO_3^{(3n+1)}(u, v),\end{aligned}$$

y $O_i^{(3n+1)}(u, v)$, $i = 1, 2, 3$ son polinomios cuyos términos tienen un grado mayor que $3n$. El discriminante de la forma diferencial $\Psi_t(u, v)$ es

$$\Delta_t(u, v) = \tilde{\Delta}_{6n}(u, v) + tP^{(6n+1)}(u, v),$$

donde $\tilde{\Delta}_{6n}(u, v) = \tilde{A}_{3n}\tilde{C}_{3n} - \tilde{B}_{3n}^2$ es el discriminante de la forma $\tilde{\omega}_{3n-4}$ y $P^{(6n+1)}(u, v)$ es un polinomio cuyos términos tienen grado mayor o igual que $6n + 1$. Veamos ahora que el infinito es un punto singular aislado. Supongamos que el infinito no es un punto aislado de $\Delta_t(u, v) = 0$, entonces existe una curva de ceros del discriminante la cual contiene a este punto.

Observemos que esta curva tiene una recta tangente en el punto al infinito definida por los ceros de un factor lineal de la parte homogénea de menor grado de $\Delta_t(u, v)$, el cual es el discriminante de la forma homogénea $\tilde{\omega}_{3n-4}$. Esto implica que la recta tangente a la curva de ceros del discriminante $\Delta_t(u, v)$ pertenece al discriminante $\tilde{\Delta}_{6n}(u, v)$ lo cual es una contradicción, ya que ω_{3n-4} es una forma cuadrática hiperbólica. Por lo tanto $\Delta_t(u, v)$ tiene singularidad aislada en el punto al infinito para toda $t \in [0, 1]$. \square

4.3. Índice del campo de direcciones asintóticas de una superficie.

Otra aplicación importante se muestra en los campos de líneas asintóticas de una superficie. A continuación enunciamos algunos resultados que se obtienen de dicha aplicación y cuya demostración se puede consultar en [16].

Teorema 4.3.1 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado n . Supongamos que su parte homogénea de grado n , $f_n(x, y)$ es hiperbólica y $\tilde{\Pi}_f(u, v)$ tiene buena multiplicidad. Entonces, los índices de los campos de direcciones asintóticas de f y f_n en el punto al infinito coinciden.*

Teorema 4.3.2 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado n y supongamos que f_n , su parte homogénea de grado n es hiperbólica. Supongamos además que $\tilde{\Pi}_f(u, v)$ tiene buena multiplicidad. Entonces, la curva Hessiana de f es compacta. Además f es hiperbólico en una vecindad del punto al infinito y el campo*

de direcciones asintóticas puede ser extendido con singularidad aislada en este punto, por medio de la forma polinomial:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi}_f(u, v) &= \left(\widetilde{A}_{n+2} + O_1(n+3)\right)(u, v)du^2 + 2\left(\widetilde{B}_{n+2} + O_2(n+3)\right)(u, v)dudv \\ &+ \left(\widetilde{C}_{n+2} + O_3(n+3)\right)(u, v)dv^2,\end{aligned}$$

donde \widetilde{A}_{n+2} , \widetilde{B}_{n+2} , \widetilde{C}_{n+2} son los coeficientes de la forma asociada a la segunda forma fundamental de f_n en el punto al infinito:

$$\widetilde{II}_{f_n}(u, v) = \widetilde{A}_{n+2}(u, v)du^2 + 2\widetilde{B}_{n+2}(u, v)dudv + \widetilde{C}_{n+2}(u, v)dv^2.$$

La compacidad de la curva Hessiana también se garantiza si f_n es elíptico, como se muestra en la siguiente afirmación.

Teorema 4.3.3 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado n y supongamos que su parte homogénea de grado n , f_n es elíptica. Supongamos además que $\widetilde{II}_f(u, v)$ tiene buena multiplicidad. Entonces la curva Hessiana de f es compacta.*

Consideremos la superficie $S = \{z = f(x, y)\}$, donde f es un polinomio real cuya curva parabólica es compacta. Entonces existe una componente conexa en el complemento de esta curva la cual juega un papel relevante determinando la estructura afín, es decir, la componente conexa no acotada del complemento de la curva parabólica. Consideremos el caso en que dicha componente es hiperbólica.

Aplicando algunos de los resultados anteriores como el Teorema 4.3.1 y otros referentes al índice de una curva hiperbólica definida por un polinomio homogéneo hiperbólico, demostrados por V.I. Arnold en [4], se obtiene el siguiente resultado sobre una cota para el número de cúspides gaussianas en la frontera de la componente \mathcal{C}_u de f .

Teorema 4.3.4 *Consideremos un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n , tal que su curva Hessiana es convexa y suave. Supongamos que su parte homogénea de grado n es hiperbólica y $\widetilde{II}_f(u, v)$ tiene buena multiplicidad. Entonces,*

$$G_u \leq 2(2n - 5)(n - 3) + n,$$

donde G_u es el número de cúspides gaussianas en la frontera de la componente no acotada del complemento de la curva Hessiana.

4.4. Ejemplos

4.4.1. Ecuaciones cuadráticas de Hopf

Usaremos notación compleja, sean $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ y $dz = dx + idy$. Consideremos las formas diferenciales complejas cuadráticas analizadas por H.

Hopf en [17].

$$\begin{aligned} z^n dz^2 &= \operatorname{Re}(z^n dz^2) + i\operatorname{Im}(z^n dz^2), \\ \bar{z}^n dz^2 &= \operatorname{Re}(\bar{z}^n dz^2) + i\operatorname{Im}(\bar{z}^n dz^2). \end{aligned}$$

Los campos de direcciones definidos por

$$\operatorname{Im}(\bar{z}^n dz^2) = 0, \quad \operatorname{Im}(z^n dz^2) = 0$$

tienen el origen como única singularidad con índice $n/2$ y $-n/2$ respectivamente.

Este resultado es importante, ya que las ecuaciones $\operatorname{Im}(z^n dz^2) = 0$ y $\operatorname{Im}(\bar{z}^n dz^2) = 0$ nos servirán como un "modelo canónico" para determinar campos de direcciones con los índices mencionados.

De acuerdo con [8], dada una función ω que satisface ciertas condiciones que veremos a continuación, ésta tiene asociada una forma diferencial y por consiguiente un campo de direcciones.

Consideremos la función compleja $\omega(x, y)$. Supongamos que ésta se descompone en 2 funciones, una escalar ρ y la otra vectorial $\zeta^2 \in \mathbb{C}$, $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, donde $\omega = \rho\zeta^2$. Si la función ω satisface estas condiciones, la forma diferencial cuadrática asociada a ω , $\operatorname{Im}(\omega dz^2) = 0$, tiene la forma:

$$\omega_{xy}dx^2 + (\omega_{yy} - \omega_{xx})dx dy - \omega_{xy}dy^2,$$

cuyos ceros tienen asociado el campo $(\omega_{yy} - \omega_{xx}, 2\omega_{xy})$. Las formas diferenciales binarias de Hopf tienen esta forma. Veamos a continuación.

Proposición 4.4.1 Sean $x, y \in \mathbb{C}$, $y \neq 0$ constante y \bar{y} su conjugado. Supongamos que

$$\operatorname{Im}(x\bar{y}^2) = 0, \tag{4.4}$$

con $x \neq 0$. Entonces $x = \rho y^2$, $\rho \in \mathbb{R}$ describe el conjunto de todas las soluciones de la ecuación 4.4.

Demostración. Si $x = \rho y^2$ entonces $x\bar{y}^2 = \rho(y\bar{y})^2 \in \mathbb{R}$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) &\rightarrow \operatorname{Im}(x \cdot \bar{y}^2). \end{aligned}$$

Afirmamos que la función ϕ es suave. Si tomamos $x = x_1 + ix_2$, $\bar{y} = y_1 - iy_2$, entonces:

$$\operatorname{Im}(x\bar{y}^2) = -2x_1y_1y_2 + (y_1^2 - y_2^2)x_2$$

de manera que su gradiente $\nabla \text{Im}(x\bar{y}^2) = (-2y_1y_2, y_1^2 - y_2^2)$. La función ϕ es regular si $y \neq 0$, por lo que su solución, es decir $\text{Im}(x\bar{y}^2) = 0$ es una variedad de dimensión 1. De hecho es una función lineal del plano en \mathbb{R} , así su núcleo es un subespacio de dimensión 1.

Dado que $x = \rho y^2$ es solución, donde $x_1 = \rho \text{Re } y^2$, $x_2 = \rho \text{Im } y^2$ entonces

$$x_2 = x_1 \frac{\text{Im } y^2}{\text{Re } y^2}$$

describe la recta o subespacio de soluciones. \square

Proposición 4.4.2 Si

$$\text{Im}(w d\bar{z}^2) = 0, \quad (4.5)$$

entonces $w = \rho \zeta^2$ donde ζ es un campo tangente a la foliación definida por 4.5.

Demostración. Si ζ es tangente a la foliación definida por 4.5, entonces por el lema 4.4.1

$$w = \rho \left(\overline{d\bar{z}(\zeta)} \right)^2,$$

dado que

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial y}, \\ d\bar{z} &= dx - idy. \end{aligned}$$

Evaluando tenemos:

$$\begin{aligned} d\bar{z}(\zeta) &= (dx - idy) \left(\zeta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ &= \zeta_1 - i\zeta_2. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \overline{d\bar{z}(\zeta)} &= \overline{\zeta_1 - i\zeta_2} \\ &= \zeta_1 + i\zeta_2 \\ &= \zeta. \\ w &= \rho \left(\overline{d\bar{z}(\zeta)} \right)^2, \\ &= \rho \zeta^2. \square \end{aligned}$$

Desarrollamos ahora la ecuación diferencial cuadrática $\text{Im}(w d\bar{z}^2) = 0$.

$$\begin{aligned} w &= \rho(\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + 2i\zeta_1\zeta_2), \\ d\bar{z}^2 &= dx^2 - dy^2 - 2idxdy, \end{aligned}$$

de esta forma:

$$wd\bar{z}^2 = \rho(\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + 2i\zeta_1\zeta_2)(dx^2 - dy^2 - 2idxdy)$$

$$\operatorname{Im}(wd\bar{z}^2) = 2\rho(\zeta_1\zeta_2 dx^2 - (\zeta_1^2 - \zeta_2^2)dxdy - \zeta_1\zeta_2 dy^2),$$

así el campo (ζ_1, ζ_2) , es el que satisface la forma cuadrática

$$\zeta_1\zeta_2 dx^2 - (\zeta_1^2 - \zeta_2^2)dxdy - \zeta_1\zeta_2 dy^2 = 0.$$

4.4.2. Polinomios cúbicos.

Los coeficientes de la segunda forma fundamental de un polinomio cúbico son de grado ≤ 1 . Veamos cuáles son las condiciones analíticas sobre los coeficientes de una forma diferencial binaria cuadrática con coeficientes lineales para que dicha forma satisfaga la condición de buena multiplicidad.

Forma diferencial cuadrática con coeficientes lineales. Consideremos la forma diferencial cuadrática

$$\omega_0(x, y) = a_0 dx^2 + 2b_0 dx dy + c_0 dy^2,$$

Sea $\tilde{\omega}_0$ la forma asociada a ω_0 en infinito. El término $u^2 + v^2$ es factor de $\tilde{\omega}_0$ cuando

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ a_0 &= c_0. \end{aligned}$$

Consideremos la forma ω_1 dada por:

$$\omega_1(x, y) = (a_{10}x + a_{01}y)dx^2 + 2(b_{10}x + b_{01}y)dxdy + (c_{10}x + c_{01}y)dy^2$$

De la misma forma, $u^2 + v^2$ es factor de su forma asociada en infinito $\tilde{\omega}_1$ si

$$\begin{aligned} a_{01} + 2b_{10} - c_{01} &= 0, \\ a_{10} + 2b_{01} - c_{10} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que la forma $\omega = \omega_0 + \omega_1$ tenga buena multiplicidad, los coeficientes de dicha forma no deben satisfacer ninguna de las 4 ecuaciones anteriores.

Aplicaremos este resultado para conocer las condiciones analíticas de buena multiplicidad para los polinomios cúbicos.

Ejemplo 4.4.3 Familia f_α .

Consideremos la familia analizada en el capítulo 3, sección 3.2

$$f_\alpha(x, y) = \frac{k}{2}x^2 + lxy + \frac{m}{2}y^2 + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{6}y^3.$$

La segunda forma fundamental de la familia cúbica f_α es

$$II_{f_\alpha} = (k + ax)dx^2 + 2(by + l)dxdy + (m + bx + cy)dy^2.$$

La forma asociada a II_{f_α} en infinito es

$$\widetilde{II}_{f_\alpha} = \widetilde{\omega}_0(u, v) + \widetilde{\omega}_1(u, v),$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_0(u, v) &= (ku^4 - 4lu^3v - 2ku^2v^2 + 4mu^2v^2 + 4luv^3 + kv^4)du^2 \\ &+ 2(lu^4 + 2ku^3v - 2mu^3v - 6lu^2v^2 - 2kuv^3 + 2muv^3 + lv^4)dudv \\ &+ (mu^4 + 4lu^3v + 4ku^2v^2 - 2mu^2v^2 - 4luv^3 + mv^4)dv^2, \\ \widetilde{\omega}_1(u, v) &= (au^5 - 2au^3v^2 + 8bu^3v^2 - 4cu^2v^3 + auv^4 - 4uv^4)du^2 \\ &+ 2(2au^4v - 3bu^4v + 2cu^3v^2 - 2au^2v^3 + 8bu^2v^3 - 2cuv^4 - bv^5)dudv \\ &+ (bu^5 - cu^4v + 4au^3v^2 - 6bu^3v^2 + 2cu^2v^3 + 5buv^4 - cv^5)dv^2, \end{aligned}$$

\widetilde{II} no tiene buena multiplicidad si los parámetros de f_α satisfacen:

1. $l = 0, k = m$.
2. $c = 0, a = 3b$.

Si $c = 0$ y $a = 3b$, entonces el discriminante es positivo.

$$\Delta = a(ac^2 + 4b^3) = 12b^4 > 0.$$

Por lo tanto concluimos que f_α tiene buena multiplicidad si y sólo si $\Delta(a, b, c) < 0$. Recordemos que para este caso su curva Hessiana $\Sigma(x, y) = abx^2 - b^2y^2 + acxy + (am + bk)x + (kc - 2bl)y + km - l^2 = 0$, es una elipse, la cual tiene tres cúspides de Gauss. La componente acotada por Σ es elíptica, mientras la componente no acotada es hiperbólica, de esta manera el campo de direcciones asintóticas se extiende en la componente no acotada de la curva Hessiana.

Un caso particular de la familia f_α , es la subfamilia silla de mono, cuyas superficies son descritas por:

$$X_k(x, y) = \left(x, y, k(x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} - xy^2 \right),$$

con $k \in \mathbb{R}$. La curva Hessiana de esta familia es $\Sigma(x, y) = k^2 - x^2 - y^2 = 0$. Si $k \neq 0$ la curva Hessiana es una circunferencia, con tres cúspides de Gauss. Si

$k = 0$ la curva Hessiana es un punto. La región no acotada es hiperbólica y en ambos casos las curvas de inflexión son tres rectas.

Observación 4.4.4 *El campo de líneas asintóticas de la familia de superficies dada por $X_k(x, y)$ se extiende al infinito con singularidad aislada.*

La figura 4.1 muestra las gráficas de los polinomios a, b, c a los que hace referencia el lema 4.1.3 en una vecindad del origen. En ésta podemos observar que no hay intersección entre los ceros de estos polinomios. Por lo tanto, el origen es una singularidad aislada.

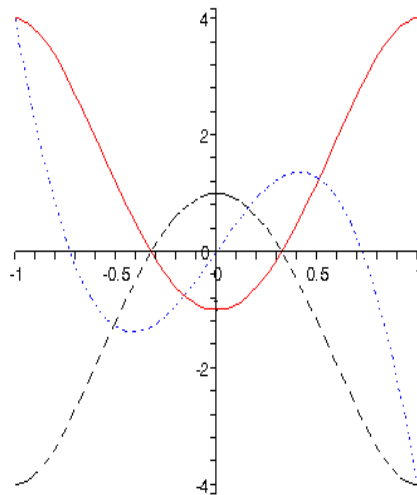


Figura 4.1: Gráficas de los polinomios deshomogeneizados a, b, c

Observación 4.4.5 *El índice en infinito del campo de líneas asintóticas de la superficie $X_0(x, y) = \left(x, y, \frac{x^3}{3} - xy^2\right)$ es $5/2$.*

Demostración. Llamemos ω_h a la forma diferencial cuadrática de Hopf para

$n = 5$ vista en 4.4.1,

$$\begin{aligned}\omega_h &= \operatorname{Im}(\bar{z}^5 dz^2), \\ &= (-5x^4y + 10x^2y^3 - y^5)dx^2 + 2(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4)dx dy \\ &+ (5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)dy^2.\end{aligned}$$

Recordemos que el campo asociado a esta forma tiene índice $5/2$. Sea $\tilde{\omega}$ la forma asociada a la segunda forma fundamental ω de la superficie $X_0(x, y)$ en infinito,

$$\tilde{\omega} = (u^5 - 10u^3v^2 + 5uv^4)du^2 + 2(5u^4v - 10u^2v^3 + v^5)dudv + (-u^5 + 10u^3v^2 - 5uv^4)dv^2.$$

La demostración se reduce a dar un cambio de coordenadas que lleve ω_h en $\tilde{\omega}$. Es decir, una transformación que lleve un campo de direcciones en el otro. Sea $\varphi(u, v) = (v, u)$ y apliquemos las ecuaciones de cambio de coordenadas 4.1.2. \square

Observación 4.4.6 *El índice en infinito del campo de líneas asintóticas de la familia de superficies $X_k(x, y) = \left(x, y, k(x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} - xy^2\right)$ es $5/2$.*

Si bien para la demostración de esta proposición podemos aplicar el Teorema 4.3.1, la demostración directa de esta afirmación es simple y muestra el manejo de isotopías entre formas diferenciales.

Demostración. Consideraremos una isotopía entre la forma asociada a la segunda forma fundamental de X_k , la cual llamaremos $\widetilde{\omega}_{X_k}$ y la forma $\tilde{\omega}$. Veamos que el discriminante de dicha isotopía no cambia de signo en una vecindad de infinito.

Como se había mencionado, la forma asociada a la segunda forma fundamental de X_0 en infinito es:

$$\tilde{\omega} = (u^5 - 10u^3v^2 + 5uv^4)du^2 + 2(5u^4v - 10u^2v^3 + v^5)dudv + (-u^5 + 10u^3v^2 - 5uv^4)dv^2.$$

la forma asociada a la segunda forma fundamental de X_k en infinito es:

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}_{X_k} &= (u^5 - 10u^3v^2 + 5uv^4 + k(u^2 + v^2)^5)du^2 \\ &+ 2(5u^4v - 10u^2v^3 + v^5)dudv \\ &+ (-u^5 + 10u^3v^2 - 5uv^4 + k(u^2 + v^2)^5)dv^2.\end{aligned}$$

Consideremos la isotopía $\omega(t) = (1 - t)\tilde{\omega} + t\widetilde{\omega}_{X_k}$, con $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}\omega(t) &= (u^5 - 10u^3v^2 + 5uv^4 + tk(u^2 + v^2)^5) du^2 \\ &+ 2(5u^4v - 10u^2v^3 + v^5)dudv \\ &+ (-u^5 + 10u^3v^2 - 5uv^4 + tk(u^2 + v^2)^5) dv^2.\end{aligned}$$

Calculando el discriminante Δ_t , de esta isotopía tenemos

$$\Delta_t = -4(u^2 + v^2)^5(t^2k^2(u^2 + v^2)^5 - 1).$$

Queremos que la isotopía preserve el signo del discriminante en una vecindad de infinito, es decir que Δ_t tenga el mismo signo para una vecindad de $(u, v) = (0, 0)$ para toda $t \in [0, 1]$. Observemos que si $t = 0$, $\Delta_0 = 4(u^2 + v^2)^5 > 0$. De esta manera, queremos que $\Delta_t > 0$ para toda $t \in [0, 1]$. Si $t \in [0, 1]$ la desigualdad

$$t^2 k^2 (u^2 + v^2)^5 < k^2 (u^2 + v^2)^5,$$

se satisface, así

$$k^2 (u^2 + v^2)^5 - 1 < 0, \quad \text{si} \quad u^2 + v^2 < \frac{1}{k^{2/5}}.$$

Si consideramos un disco alrededor de $(u, v) = (0, 0)$ de radio menor que $\frac{1}{|k|^{2/5}}$ se preserva el signo del discriminante de la isotopía. De esta manera el índice en infinito del campo $\widehat{\omega_{X_k}}$ es $5/2$. \square

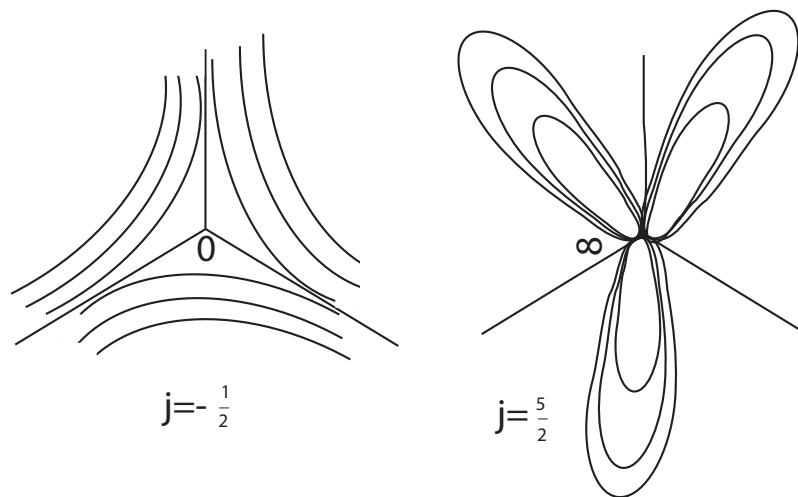


Figura 4.2: Líneas asintóticas en cero y en infinito de la silla de mono para $k = 0$

Observación 4.4.7 *El índice en infinito del campo de líneas asintóticas de la familia f_α es $5/2$.*

4.4.3. Polinomios de grado 6.

Forma diferencial cuadrática con coeficientes de grado 4.

Los coeficientes de la segunda forma fundamental de un polinomio de grado 6 son de grado ≤ 4 . Consideremos la forma ω_4 , cuyos coeficientes son de grado 4 dada por:

$$\begin{aligned}\omega_4(x, y) &= (a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4)dx^2 \\ &+ 2(b_{40}x^4 + b_{31}x^3y + b_{22}x^2y^2 + b_{13}xy^3 + b_{04}y^4)dx dy \\ &+ (c_{40}x^4 + c_{31}x^3y + c_{22}x^2y^2 + c_{13}xy^3 + c_{04}y^4)dy^2.\end{aligned}$$

Así, $\tilde{\omega}_4$ no tiene buena multiplicidad si satisface las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}-a_{40} + a_{22} - a_{04} - 2b_{13} + 2b_{31} - c_{22} + c_{40} + c_{04} &= 0 \\ -a_{31} + a_{13} + 2b_{22} - 2b_{40} - 2b_{04} - c_{13} + c_{31} &= 0\end{aligned}$$

Los siguientes polinomios son interesantes, el cambio de coordenadas de la segunda forma fundamental de uno de ellos no satisface la condición de buena multiplicidad, hipótesis del Teorema 4.3.1, por lo cual, ambos polinomios a pesar de tener el mismo grado, muestran índices diferentes en el punto al infinito.

Ejemplo 4.4.4 Consideremos el polinomio $f(x, y) = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$, cuya segunda forma fundamental es:

$$\begin{aligned}II_f &= 30(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)dx^2 + 2(120)(-x^3y + xy^3)dx dy \\ &- 30(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)dy^2.\end{aligned}$$

f es un polinomio 6-hiperbólico cuyo campo de líneas asintóticas en el origen de acuerdo con [4] tiene índice $ind_f(0) = -2$. La forma asociada a II_f en infinito es:

$$\begin{aligned}\widetilde{II}_f &= 30(u^8 - 28u^6v^2 + 70u^4v^4 - 28u^2v^6 + v^8)du^2 \\ &+ 2(240uv(u^6 - 7u^4v^2 + 7u^2v^4 - v^6))du dv \\ &- 30(u^8 - 28u^6v^2 + 70u^4v^4 - 28u^2v^6 + v^8)dv^2 = 0.\end{aligned}$$

Sea $g(x, y) = x^6 - 5x^4y^2 - 5x^2y^4 + y^6$. Su segunda forma fundamental es:

$$\begin{aligned}II_g &= 10(3x^4 - 6x^2y^2 - y^4)dx^2 + 2(-40)(x^3y + xy^3)dx dy \\ &- 10(x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4)dy^2,\end{aligned}$$

el campo de líneas asintóticas de g en el origen tiene índice $ind_g(0) = -1$. La forma asociada a II_g en infinito es

$$\begin{aligned}\widetilde{II}_g &= 10(u^2 + v^2)[(3u^6 - 35u^4v^2 + 25u^2v^4 - v^6) du^2 \\ &+ 2(4(3u^5v - 10u^3v^3 + 3uv^5)) du dv \\ &- (u^6 - 25u^4v^2 + 35u^2v^4 - 3v^6) dv^2].\end{aligned}$$

El índice en infinito de la forma \widetilde{II}_g es $ind_g(\infty) = 3$. Observemos que la ecuación cuadrática \widetilde{II}_g no satisface la condición de buena multiplicidad, (es decir, en este caso $(u^2 + v^2)$ es factor de \widetilde{II}_g) en tanto que \widetilde{II}_f sí la satisface.

Bibliografía

- [1] Aicardi F., *Geometrical Properties of Generic Real Surfaces at the Special Parabolic Points*. Preprint.
- [2] Arnol'd V.I., *Remarks on the Parabolic Curves on Surfaces an the Higher-Dimensional Mobius-Sturm Theory*. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 31 (1997), no. 4, 3-18,95; translation in Functional Analysis an Its Applications, 31 No. 4 (1997), 227-239.
- [3] Arnol'd V. I., *Arnold's Problems*. Springer-Verlag (2004).
- [4] Arnol'd V. I., *Astroidal Geometry of hypocycloids and the Hessian topology of hyperbolic polynomials*. Russian Math. Surveys, (2001), 56:6. 1019-1083.
- [5] Arnol'd V. I., *On the problem of realization of a given Gaussian curvature function*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 11 (1998)no. 2, 199-206.
- [6] Banchoff T., Gaffney T. y Mc.Crory C., *Cusps of Gauss Mappings*. Research Notes in Mathematics, Pitman (1982).
- [7] Bruce J.W., Giblin, P.J. y Tari, F., *Families of surfaces: height funtions, Gauss maps and duals. Real and complex singularities*. (São Carlos, (1994)), 148-178, Pitman Res. Notes Math. Ser., (1995), 333, Longman, Harlow.
- [8] Bruce J.W. y Fidal, D. L., *On binary differential equations and umbilics*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 11 (1989), No. 1-2, 147-168.
- [9] Davidov A. A., *Qualitative theory of control systems*. Translations of Math. Monographs. AMS. Providence Rhode Island, (1994), Vol. 141.
- [10] Do Carmo, M., *Diferential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. (1976).
- [11] Gibson C. G., *Singular points of smooth mappings*. London Pitman, (1979).
- [12] Golubitsky, M. y Guillemin V. *Stable mappings and their singularities*. New York, Springer Verlag, (1973).
- [13] Gutiérrez C., Mercuri F. y Sánchez-Bringas F., *On a Conjeture of Carathéodory: Analyticity Versus Smoothness*. Experiment. Math.,(1996), Vol 5, 1, 33-38.

- [14] Gutiérrez C. y Sotomayor J., *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces*. IMPA. (1986).
- [15] Hernández-Martínez L.I., Ortiz-Rodríguez A. y Sánchez Bringas F., *On affine Geometry of the graph of a real polynomial*.
- [16] Hernández-Martínez L.I., Ortiz-Rodríguez A. y Sánchez-Bringas F., *On the Hessian Geometry of a Real Polynomial Hyperbolic near Infinity*.
- [17] Hopf, H., *Differential Geometry in the Large*. Lecture Notes 1000, Springer-Verlag, (1989).
- [18] Kergosien L. y Thom R., *Sur les points paraboliques des surfaces*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, (1980), 290, 705-710.
- [19] Kulikov V.S., *Calculation of singularities of an imbedding of a generic algebraic surface in projective space P^3* . *Funct. Anal. and its Appl.* (1983), 17 (3), 15-27.
- [20] Landis E. E., *Tangencial Singularities*, *Funct. Anal. and its Appl.* (1981), 15, 103-114.
- [21] Ortiz-Rodríguez, Adriana. *Quelques aspects sur la géométrie des surfaces algébriques réelles*. *Bull. Sci. Math.* (2003), 127, 149-177.
- [22] Ortiz-Rodríguez A. y Sottile F., *Real hessian curves*, *Bol. Soc. Mat. Mex.* (3), (2007), vol. 13 No. 1, 157-166.
- [23] Panov D.A., *Special Points of Surfaces in the Three-Dimensional Projective Space*. *Funct. Anal. and its Appl.* (2000), Vol. 34 No. 4, 276-287.
- [24] Panov D.A., *Parabolic Curves and Gradient Mappings*. *Tr. Mat. Inst. Steklova* 221 (1998) 271-288; Russian translation: *Proc. Steklov Inst. Math* 221 (2) (1998) 261-278.
- [25] Perko, L., *Differential Equations and dynamical systems*. Springer Verlag. (1995)
- [26] Platonova, O. A., *Singularities of the mutual of a surface and a line*. *Moscow Math. Journal*, (1980) 248-249.
- [27] Porteous I. R., *Geometric Differentiation: for the intelligence of curves and surfaces*. Cambridge University Press, (1994).
- [28] Pugh C. C., *A Generalized Poincaré index formula*. *Topology*, (1968), Vol 7, 217-226.
- [29] Ramírez-Galarza A. y Sánchez-Bringas F. *Lines of Curvature near Umbilical Points on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4* . *Annals of Global Analysis and Geometry*, (1995), 13, 129-140.

- [30] Salmon G., *A treatise on the analytic geometry of three dimensions*. Chelsea Publishing Company. Fifth edition, (1965), Vol. II.
- [31] Uribe-Vargas R., *A Projective Invariant for Swallowtails and Godrons, and Global Theorems on the Flecnodal Curve*. *Moscow Math. Journal* 6:4 (2006), 731-768.