



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Primeros resultados sobre las digráficas
localmente multipartitas semicompletas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

ROSALÍA ALEJANDRA TORRES CRUZ

DIRECTORES DE TESIS:

DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ

MAT. ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTÍZ



2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Torres
Cruz
Rosalía Alejandra
56 35 41 79
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304589931
2. Datos del tutor
Dra
Hortensia
Galeana
Sánchez
3. Datos del cotutor
Mat
Ilán Abraham
Goldfeder
Ortíz
4. Datos del sinodal 1
Dr
Bernardo
Llano
Pérez
5. Datos del sinodal 2
Dra
Mucuy Kak del Carmen
Guevara
Aguirre
6. Datos del sinodal 3
Dr
Hugo Alberto
Rincón
Mejía
7. Datos del trabajo escrito
Primeros resultados sobre las digráficas localmente multipartitas semicomple-
tas
46 p
2011

Agradecimientos

A mis padres por ser mi pilar, por estar conmigo a todo momento. A ellos por que sin su dedicación y amor no habría llegado hasta donde estoy.

A mi hermana por ser mi compañera de vida.

A mi abuelita por sus consejos y ternura.

A mis tíos, primos y sobrinos porque sin su apoyo y cariño habría desvanecido muchas veces, por las sonrisas y las lágrimas que pasamos juntos.

A mis amigos de la vida, a mis perrus, mates, pandilla y patosos.

A la Dra. Hortensia e Ilán por su paciencia, apoyo y cariño.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, mi orgullo, por su saber científico y artístico.

A todos los que me tendieron la mano, en especial a Miguel Lara, el amigo, Patricia Pellicer, el ejemplo, Oscar Palmas, la paciencia, y de nuevo Hortensia Galeana, por su enseñanza.

A ti por tu cariño.

*A MI ABUELITA
CON AMOR*

Índice

Introducción	I
1. Conceptos básicos	1
1.1. Primeras definiciones	1
1.2. Caminos, trayectorias y ciclos	4
1.3. Conexidad	8
2. Digráficas localmente semicompletas	9
3. Digráficas localmente multipartitas semicompletas	17
4. Conclusiones	43
Bibliografía	45

Introducción

Este trabajo está orientado a una de las ramas de la matemáticas más tangibles que a mi parecer podemos encontrar: la teoría de las gráficas. El tema en realidad no es muy conocido, pero tampoco desconocido para los estudiosos de esta gran materia, pues se trata de una de las tantas generalizaciones de los torneos, la clase de las digráficas que mejor conocemos según Bang-Jensen, Gutin y Volkmann.

Al hablar de las generalizaciones de torneos podemos mencionar las digráficas semicompletas, las cuasitransitivas, las localmente semicompletas en flechas y las digráficas localmente semicompletas; así como a los torneos multipartitos. El trabajo más próximo que tenemos es el de las digráficas localmente semicompletas en flechas pues fueron caracterizadas parcialmente por J. Bang-Jensen y más tarde lo hicieron Galeana-Sánchez y Goldfeder totalmente. Justamente Ilán A. Goldfeder es el responsable del tema de este trabajo, pues al centrarse en la idea de extender las digráficas localmente semicompletas y los torneos multipartitos en una misma clase surge nuestro tema de trabajo: las digráficas localmente multipartitas semicompletas.

Esta nueva clase de digráficas pretende, como lo hizo en su momento Bang-Jensen al proponer las digráficas semicompletas, preservar las características o propiedades de las digráficas que generalizan.

Nosotros nos centraremos en ver qué sucede con vértices y ciclos dados, qué tanto podemos extender dichos ciclos y cuándo dicho vértice está en un ciclo de longitud máxima,

y si no lo está, qué tan cerca de él se encuentra. El análisis lo hemos basado en el artículo *On cycles through a given vertex in multipartite tournaments*.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo introduciremos las definiciones y la notación que usaremos durante todo el trabajo. Consideraremos las nociones básicas de la *teoría de los conjuntos* de las cuales supondremos que se tiene una idea, pero también puede revisarse en el primer capítulo de los siguientes libros (7; 9). Así, entremos en materia para precisar los conceptos de la *teoría de las gráficas* que emplearemos, sin olvidar que los conceptos fundamentales de esta materia los podemos consultar en (7; 8).

1.1. Primeras definiciones

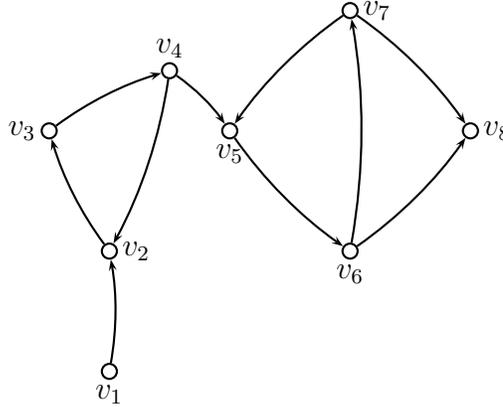
Una **gráfica dirigida** (*digráfica*) D consiste en un conjunto finito no vacío de elementos $V(D)$ llamados **vértices** y un conjunto $A(D)$ de pares ordenados de distintos vértices llamados **flechas** de D ; usualmente se denota como $D = (V, A)$. Notemos que el conjunto de flechas es finito por ser un subconjunto del producto cartesiano de los vértices. En nuestra definición de digráfica no permitimos varias flechas en la misma dirección, es decir, no hay flechas múltiples y tampoco se aceptan lazos (que es la flecha de un vértice a si mismo). Un ejemplo de una digráfica D es el siguiente:

$$V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

$$A(D) = \{f_1 = (v_1, v_2), f_2 = (v_2, v_3), f_3 = (v_3, v_4), f_4 = (v_4, v_2),$$

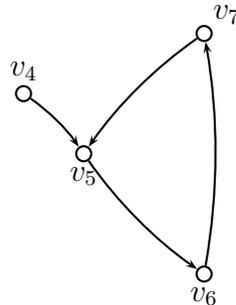
$$f_5 = (v_4, v_5), f_6 = (v_5, v_6), f_7 = (v_5, v_7), f_8 = (v_6, v_7),$$

$$f_9 = (v_7, v_8), f_{10} = (v_6, v_8)\}$$



Dadas D y H digráficas, H es una **subdigráfica** de la digráfica D si $V(H) \subseteq V(D)$, $A(H) \subseteq A(D) \cap (V(H) \times V(H))$. Si $A(H) = A(D) \cap (V(H) \times V(H))$, H es una **subdigráfica inducida** de D y lo denotamos por $H = D[V(H)]$. Si H es la siguiente digráfica, notamos que H es una subdigráfica inducida de la digráfica D .

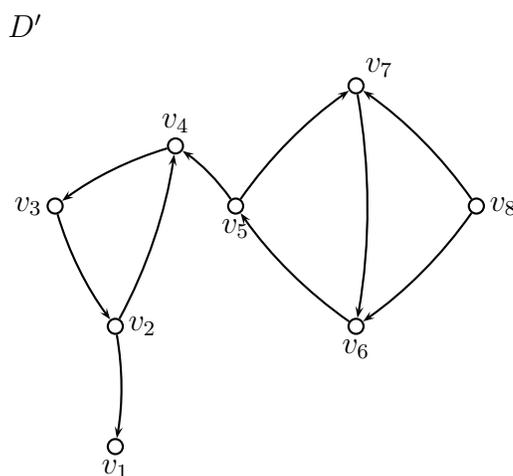
$$V(H) = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$$



Para cualquier subconjunto A de $(V(D) \cup A(D))$, $D - A$ denotará la subdigráfica obtenida de quitar todos los vértices que estén en el conjunto A y todas las flechas de D tales que alguno de sus vértices haya sido eliminado, así como las flechas de A .

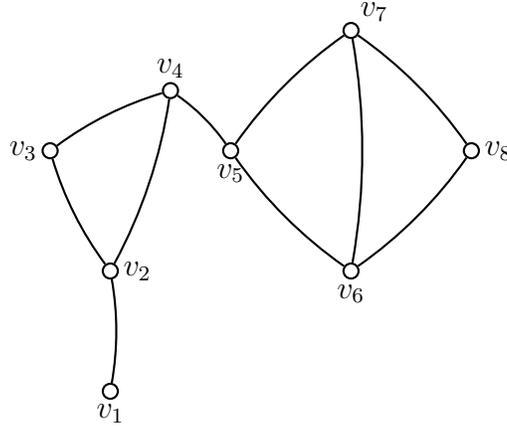
Si $(u, v) \in A(D)$, es decir, si (u, v) es una (u, v) -flecha de D , decimos que u **domina** a v y escribiremos $u \rightarrow v$ o $v \leftarrow u$; aunque en algunas ocasiones escribiremos uv . Asimismo diremos que dos vértices u y v son **adyacentes** si $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$; de lo contrario diremos que u y v no son adyacentes. Cuando hagamos uso de varias flechas cuyos vértices se repiten, las encadenaremos; es decir, siempre que $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ y $d \rightarrow c$ escribiremos $a \rightarrow b \rightarrow c \leftarrow d$.

Dada D una digráfica, definimos la **digráfica recíproca** de D , la digráfica D' obtenida de cambiar la dirección las flechas de la digráfica D . Es decir, $V(D') = V(D)$ y $A(D') = \{yx : x, y \in V(D), xy \in A(D)\}$. La digráfica recíproca de la digráfica D es la que se presenta a continuación.



Definimos también la **gráfica subyacente**¹ a D denotada por $UG(D)$, donde $V(UG(D)) = V(D)$ y $xy \in A(UG(D))$ si y sólo si $xy \in A(D)$ o $yx \in A(D)$; es decir, ignoramos las orientaciones de la digráfica D y borramos las posibles flechas múltiples y lazos de D . La siguiente gráfica es la gráfica subyacente a la digráfica D .

¹Una gráfica es un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices junto con conjunto (posiblemente vacío) de pares no ordenados de distintos vértices llamados aristas de la gráfica.

$UG(D)$ 

En una digráfica D definimos como **invecindad** de un vértice v , $N_D^-(v) = N^-(v)$, al conjunto de vértices que dominan a v y como **exvecindad** $N_D^+(v) = N^+(v)$ al conjunto de vértices que son dominados por v . A la cardinalidad de la invecindad (respectivamente exvecindad) de v en D la llamaremos el **ingrado** (respectivamente **exgrado**) de v en D y lo denotaremos como $d_D^-(v) = d^-(v)$ ($d_D^+(v) = d^+(v)$). En la digráfica D dada, los exvecinos del vértice v_4 son los vértices $\{v_2, v_5\}$ y el invecino del mismo vértice es el $\{v_3\}$.

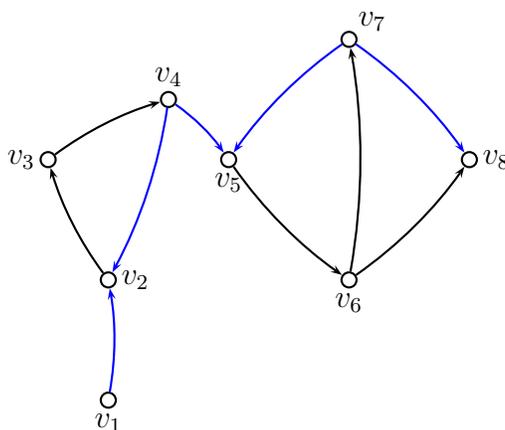
Para cualquier vértice v , si A es un subconjunto de vértices de D y queremos expresar que existe una flecha de dicho vértice a un elemento del conjunto A o viceversa, escribiremos vA -flecha o Av -flecha. Si A y B son subconjuntos de vértices de D y queremos expresar que existe $a \rightarrow b$ para algunas $a \in A$ y $b \in B$ escribiremos AB -flecha.

1.2. Caminos, trayectorias y ciclos

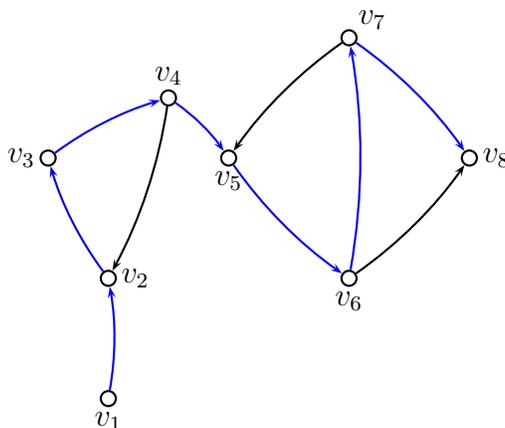
En una digráfica D un **camino** es una sucesión alternada de vértices y flechas de D , $C = (v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, v_{n-1}, f_{n-1}, v_n)$, tales que $f_i = v_i v_{i+1}$ o $f_i = v_{i+1} v_i$ para toda $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Un **camino cerrado** es un camino donde $v_1 = v_n$. Denotaremos por $V(C)$ al conjunto de vértices $\{v_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ y por $A(C)$ al conjunto de flechas $\{f_i : i \in \{1, \dots, n-1\}\}$. Notemos que $(V(C), A(C))$ es una subdigráfica de D . Diremos que C es un camino desde v_1 hasta v_n o también que es un $v_1 v_n$ -camino.

La **longitud** de C , denotada por $\ell(C)$, es el número de sus flechas, en este caso $\ell(C) = n - 1$. Si los vértices de C son distintos, diremos que es una **trayectoria** y si los vértices son distintos excepto por $v_1 = v_n$, diremos que es un **ciclo**. Notemos que toda $u \rightarrow v$ puede ser considerada como un camino de longitud uno, a saber, es una trayectoria. Cuando una trayectoria sea de longitud mínima, muchas veces sólo diremos que es una *trayectoria mínima*.

A continuación presentamos un v_1v_8 -camino en la digráfica D .



Definimos como **camino dirigido** (respectivamente **trayectoria dirigida**) a una sucesión de vértices y flechas $(v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, v_{n-1}, f_{n-1}, v_n)$ tal que $f_i = v_i v_{i+1}$ en D para cada $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. En color azul está indicado un camino dirigido de la digráfica D .

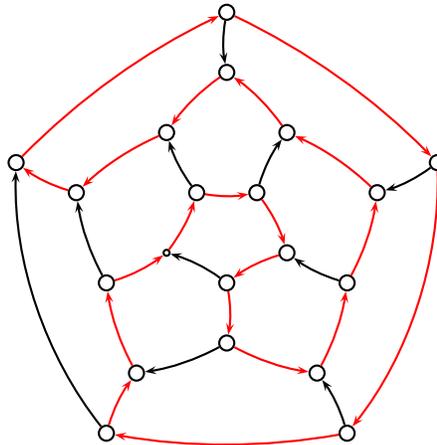


Un **ciclo dirigido** se define como una trayectoria dirigida con la única diferencia que $v_1 = v_n$. Notemos que está bien definida la longitud de un camino dirigido (resp. trayecto-

ria dirigida). Podemos denotarlo por v_1v_n -camino dirigido (resp. trayectoria dirigida). Si consideremos un ciclo de longitud n bastará llamarlo n -ciclo. Diremos que un ciclo (resp. trayectoria) C se puede **extender** si existe un ciclo (resp. una trayectoria) C' tal que $V(C) \subseteq V(C')$ y $\ell(C) < \ell(C')$ ².

En este texto, *sólo emplearemos caminos dirigidos (resp. trayectorias dirigidas, ciclos dirigidos) por lo que, en lo que resta del trabajo, v_1v_n -camino (resp. trayectoria) significará un camino dirigido (resp. trayectoria dirigida) desde v_1 hasta v_n . Así también diremos ciclo en lugar de ciclo dirigido.* Por esta razón, como no habrá posibilidad de confusión sobre que flecha tomar, el camino $(v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, v_{n-1}, f_{n-1}, v_n)$ se escribirá de la siguiente manera: $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$.

Dado un camino C en D , diremos que C es un **camino inducido** (resp. **trayectoria, ciclo**)(no dirigidos y dirigidos) si y sólo si $D[V(C)] = (V(C), A(C))$. Dado un camino (resp. trayectoria) $T = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ denotaremos por $T[v_i, v_j]$ al segmento de camino v_i, T, v_j (resp. subtrayectoria) $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j)$ de T . Una uv -trayectoria T es **minimal** si ningún subconjunto propio de $V(T)$ induce una digráfica con una uv -subtrayectoria. Un camino (resp. trayectoria, ciclo) C es **hamiltoniano** si $V(C) = V(D)$. Una digráfica D es hamiltoniana si contiene un ciclo hamiltoniano.



²En el sentido estricto de extensión, en este caso no es claro pues algunas veces no se estarán usando todas las flechas del primer ciclo en el segundo. Sin embargo, lo que se pretende es encontrar un conjunto de vértices C' tal que sean los vértices de un nuevo ciclo y $V(C) \subseteq V(C')$.

Dados dos vértices u y v , la **distancia** de u a v en D , denotada por $d_D(u, v)$, es la mínima de las longitudes todos los uv -caminos³. Cuando no haya posibilidad de confusión de donde se toman las trayectorias escribiremos $d(u, v)$. Bajo esta definición, $d_D(v, v) = 0$ para todo $v \in V(D)$. Si $A \subseteq V(D)$ y $v \in V(D)$ definimos la distancia de v a A (respectivamente de A a v) como la $\min\{d_D(v, a) : a \in A\}$.

Si hay un camino $C = uv$ -camino y $v \rightarrow w$ en D que no pertenece a C , podemos incluir dicha flecha en C como sigue: $C \cup (v, w)$; en el caso de existir $w \rightarrow u$ en D fuera de C , podemos incluir la flecha de la siguiente manera $(w, u) \cup C$. Si se tienen un $C_1 = uv$ -camino y un $C_2 = vw$ -camino, podemos **concatenar** dichos caminos, denotándolo por $C_1 \cup C_2$ donde $C_1 \cup C_2 = (u, \dots, v, \dots, w)$ y dándonos como resultado un nuevo camino en todos los casos.

El siguiente teorema será utilizado en varias ocasiones en el trabajo, por lo que hemos decidido enunciarlo y demostrarlo.

Teorema 1.1. *Sean D una digráfica y u, v dos vértices distintos de D . Si D tiene un uv -camino C entonces C posee una uv -subtrayectoria T .*

Demostración. Sea $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = v)$ un uv -camino de D . Procedamos por inducción sobre la longitud de C . Si $\ell(C) = 0, 1$ tenemos que $C = (u = v)$ o $C = (u = x_0, x_1 = v)$ donde claramente tales caminos son una uv -trayectoria. Supongamos que si C' es un camino cuya longitud es menor que n entonces C' contiene una uv -subtrayectoria. Sea $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = v)$ un uv -camino de longitud n . Tenemos dos casos, el primero si $x_i \neq x_j$ para toda $i \neq j$ entonces C es en sí misma una uv -trayectoria. El segundo si existe $i \neq j$ con $x_i = x_j$, supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, luego el camino C se ve de la siguiente manera $(u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}, x_n = v)$ y $C' = (u = x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}, x_n = v)$ es un uv -camino porque es una sucesión de vértices y flechas

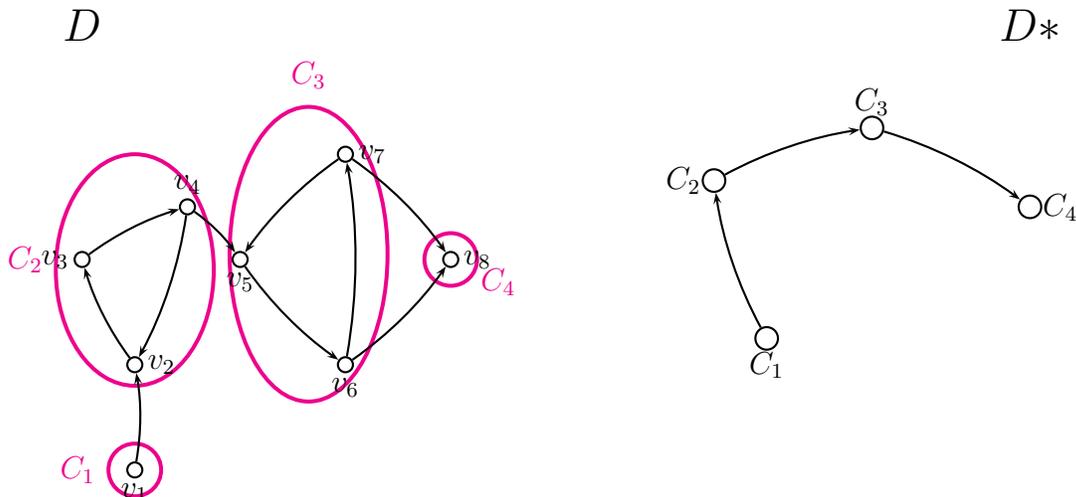
³Recordemos que estos caminos deberán ser dirigidos.

de D y $\ell(C') < n$, por hipótesis de inducción C' posee una uv -subtrayectoria y así C también. \square

1.3. Conexidad

Una digráfica D es **conexa** si su gráfica subyacente $UG(D)$ es conexa. Una **componente fuertemente conexa** D' de D es una subdigráfica máxima por contención en los vértices tal que para cualesquiera dos vértices u, v de D' , D' contiene un uv -camino. Diremos que D es **fuertemente conexa** si y sólo si D tiene sólo una componente fuertemente conexa.

Dada una digráfica D definimos la **digráfica de condensación** D^* como $V(D^*) = \{C_i : C_i \text{ es una componente fuertemente conexa de } D\}$ y $C_i C_j \in A(D^*)$ si y sólo si existe una $C_i C_j$ -flecha en D . Una **componente terminal** de D es una componente fuertemente conexa de D que en D^* tiene exgrado cero. En la siguiente figura se muestra la digráfica de condensación de la digráfica D que presentamos al inicio del presenta capítulo, primeramente se marcan en color rosa las componentes fuertemente conexas y a un lado se muestra D^* .



Capítulo 2

Digráficas localmente semicompletas

En este capítulo introducimos los objetos que serán la base para el desarrollo de este trabajo: los torneos y sus generalizaciones, llegando a las digráficas localmente semicompletas. Primero daremos la generalización de un teorema bien conocido para torneos verdadero para las digráficas semicompletas y para las localmente semicompletas, para dar una idea de lo que será el siguiente capítulo.

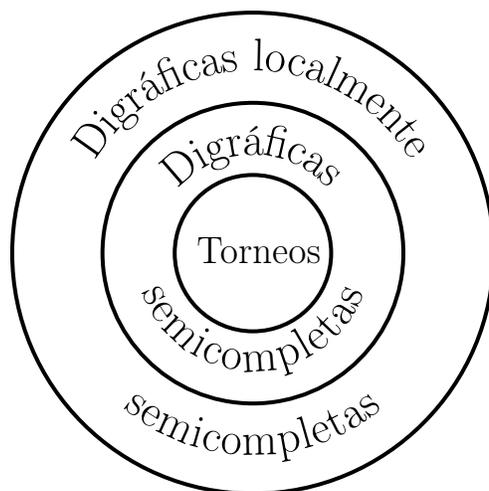
Debemos recordar que las digráficas localmente semicompletas fueron introducidas por Jørgen Bang-Jensen en 1990 de quien hemos tomado los primeros resultados, a saber, las primeras propiedades descritas de las componentes fuertemente conexas de estas digráficas que dan la guía para generalizar el teorema de torneos mencionado.

Definición 2.1. *Un **torneo** es una digráfica tal que entre cualesquiera dos vértices hay exactamente una flecha.*

Definición 2.2. *Una digráfica D es **semicompleta** si para cualesquiera dos vértices distintos hay al menos una flecha entre ellos, es decir, se cumple que para cualesquiera $u, v \in V(D)$ tenemos $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$.*

Definición 2.3. *Diremos que una digráfica D es **localmente semicompleta** si para todo vértice tanto su invecindad y su exvecindad inducen una digráfica semicompleta.*

Como podemos darnos cuenta, los torneos están contenidos en la familia de las digráficas semicompletas y éstas a su vez contenidas en la familia de las digráficas localmente semicompletas como lo muestra la siguiente figura.

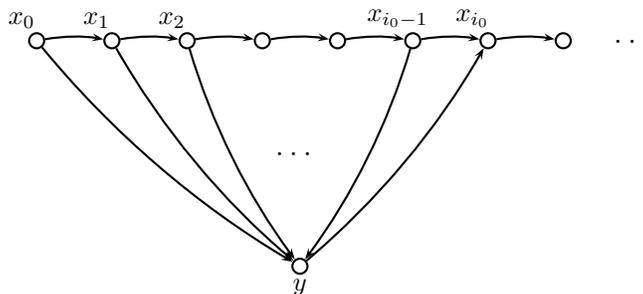


Teorema 2.1 (Rédei, (16)). *Toda digráfica semicompleta D contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Sea $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria de longitud máxima en D . Notemos que si $V(T) = V(D)$ entonces dicha trayectoria es hamiltoniana, así podemos suponer que existe $y \in V(D) \setminus V(T)$. Como D es semicompleta existe $y \rightarrow x_0$ ó $x_0 \rightarrow y$. Si existiese $y \rightarrow x_0$, T no sería de longitud máxima por lo tanto existe $x_0 \rightarrow y$.

Definamos $A := \{i : x_i \rightarrow y\}$, notemos que $A \neq \emptyset$ porque $0 \in A$. Podemos suponer que $x_n \rightarrow y$ no existe, pues si dicha flecha existiera, podríamos extender la trayectoria T , así podemos suponer que $n \notin A$. Supongamos que i_0 es el menor de los índices que no están en A . Como D es semicompleta, los vértices x_{i_0} y y son adyacentes, pero como $i_0 \notin A$ se tiene $y \rightarrow x_{i_0}$. Por otro lado notamos que $i_0 - 1 \in A$ lo que significa que $x_{i_0} \rightarrow y$. Ahora, consideremos la trayectoria $T' = (x_0, x_1, \dots, x_{i_0-1}, y, x_{i_0}, \dots, x_{n-1}, x_n)$ y observemos que

$\ell(T') > \ell(T)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto el conjunto A es vacío, es decir, la trayectoria T es hamiltoniana.



□

Definición 2.4. Sean A y B conjuntos ajenos de $V(D)$. Si para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ existe $a \rightarrow b$, diremos que A **domina a** B .

Notación 2.1. Para decir que A domina B escribiremos $A \longrightarrow B$.

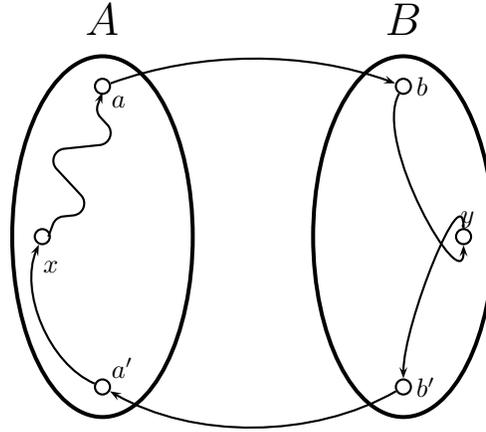
Definición 2.5. Sean A y B conjuntos de $V(D)$, definimos como $(A, B)_D = \{ab \in A(D) : a \in A, b \in B\}$.

Notación 2.2. Sean A y B conjuntos ajenos de $V(D)$, si $(B, A)_D = \emptyset$ escribiremos $A \implies B$. Esto será muy útil cuando queramos decir que no hay BA -flechas o que las flechas van en una sola dirección.

Definición 2.6. Si $A, B \subseteq V(D)$ ajenos son tales que $A \longrightarrow B$ y $A \implies B$, diremos que A **domina fuertemente a** B . Este hecho lo denotaremos por $A \dashrightarrow B$.

Lema 2.1. Sea D una digráfica conexa localmente semicompleta (no fuertemente conexa). Si A y B son componentes de D tal que al menos hay una AB -flecha entonces $A \implies B$.

Demostración. Sean $a \in A, b \in B$ tales que $a \rightarrow b$ y supongamos que existen $a' \in A$ y $b' \in B$ tales que existe $b' \rightarrow a'$. Para cualesquiera $x \in A$ y $y \in B$, como A y B son fuertemente conexas, existen xa -, by -, yb' - y $a'x$ -trayectorias dirigidas.



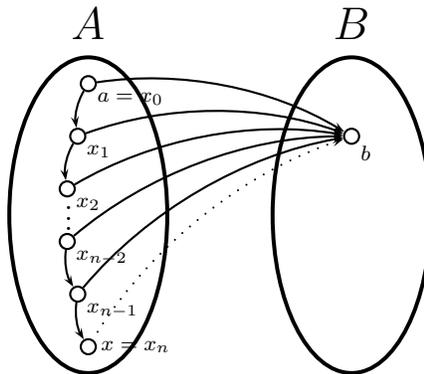
Consideremos los xy - y yx -caminos dirigidos, $C = (x, a) \cup (a, b) \cup (b, y)$ y $C' = (y, b') \cup (b', a') \cup (a', x)$ respectivamente. Así se tiene que $A \cup B$ es fuertemente conexa, lo que es una contradicción. Por lo tanto, todas las flechas van de A hacia B , es decir, $(B, A)_D = \emptyset$. \square

Lema 2.2. Sean A y B dos componentes fuertes de una digráfica D localmente semicompleta conexa pero no fuertemente conexa entonces hay dominación fuerte entre ellas o bien $(A, B)_D = \emptyset$ y $(B, A)_D = \emptyset$.

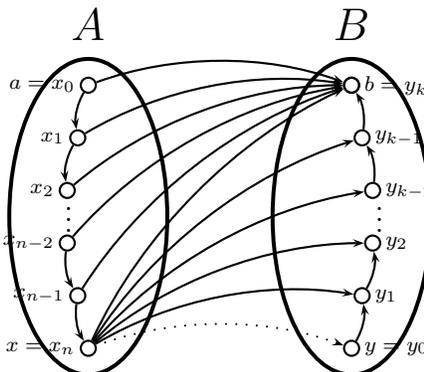
Demostración. Si no existiesen flechas entre A y B , se cumpliría el enunciado. Así podemos suponer que existe al menos una, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es $a \rightarrow b$ con $a \in A$, $b \in B$. Basta probar que $A \rightarrow B$ pues por el lema anterior se sigue que $A \implies B$.

Sea x un vértice arbitrario en A , consideremos una ax -trayectoria dirigida de longitud mínima en A , $T = (a = x_0, x_1, \dots, x_k = x)$. Demostramos por inducción sobre la longitud de T que todos los vértices de T dominan a b . Si $k = 1$ se tienen $a \rightarrow b$ y $a \rightarrow x$, por la definición 2.3 y por el lema 2.1, $x \rightarrow b$. Supongamos válido el resultado si la longitud de la trayectoria es $n - 1$, es decir, si existe una AB -flecha, existe $x_i \rightarrow b$ para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Sea $T = (a = x_0, x_1, \dots, x_k = x)$ la trayectoria de longitud n . Notemos que $T' = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ es una trayectoria de longitud $n - 1$, luego por la hipótesis

de inducción existe $x_{n-1} \rightarrow b$. Así se tienen $x_{n-1} \rightarrow b$ y $x_{n-1} \rightarrow x$ y por la definición 2.3 y el lema 2.1 se tiene $x \rightarrow b$. Así todos los vértices de A dominan a b .



Ahora consideremos $y \in B$, existe una yb -trayectoria dirigida de longitud mínima $U = (y = y_0, y_1, \dots, y_n = b)$ porque B es una componente fuerte de D . Por inducción sobre la longitud de U veamos que x domina a todo vértice de U . Si $n = 1$ se tiene $x \rightarrow b$ y $y \rightarrow b$, de manera análoga al argumento anterior existe $x \rightarrow y$. Ahora supongamos válido el resultado si la longitud de la trayectoria es $k - 1$. Si consideramos la trayectoria $(y = y_0, y_1, \dots, y_k = b)$ se tiene que la trayectoria $(y_1, \dots, y_k = b)$ es de longitud $k - 1$ por lo que existe $x \rightarrow y_1$. Ahora notemos que dicha flecha, $x \rightarrow y_1$, y la flecha $y \rightarrow y_1$, por la definición 2.3 y el lema 2.1, implican la existencia de $x \rightarrow y$. Con esto hemos demostrado que $x \mapsto B$.



Recordemos que si existe una AB -flecha se tienen todas las flechas entre los vértices de A y los vértices de B , por otro lado por el lema 2.1 se sigue que todas estas flechas van dirigidas de la componente A hacia la componente B y así tenemos $A \implies B$.

□

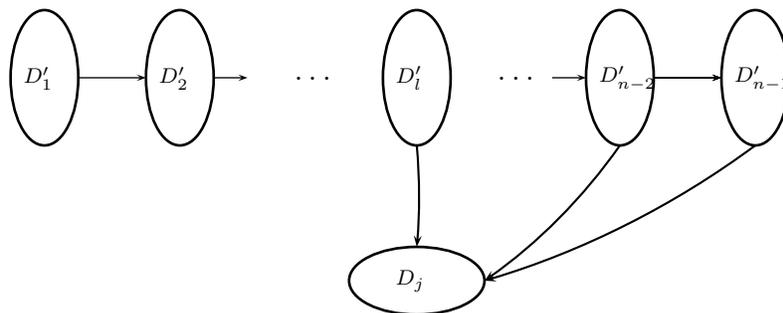
Lema 2.3. *Sea D una digráfica localmente semicompleta conexa. Si A y B son componentes fuertemente conexas de D tales que $A \mapsto B$ entonces A y B inducen digráficas semicompletas.*

Demostración. Como $A \mapsto B$ para cada $a \in A$ y $b \in B$ se tiene $a \rightarrow b$, luego para un vértice cualquiera $x \in A$ la componente B está contenida en la exvecindad de x , así B es semicompleta. Por otro lado, para cualquier vértice en B como $A \implies B$, la componente A está contenida en la invecindad de dicho vértice siendo así una digráfica semicompleta.

□

Lema 2.4. *Las componentes de una digráfica D localmente semicompleta conexa pueden ser ordenadas de manera única, D_1, D_2, \dots, D_k , de forma tal que no haya flechas de D_j a D_i si $j > i$ y $D_i \mapsto D_{i+1}$ si $i \in \{1, \dots, k-1\}$.*

Demostración. Sean D_1, D_2, \dots, D_k las componentes de D . Hagamos la prueba por inducción sobre la cantidad de componentes. Si $n = 2$, sean D_1 y D_2 las dos componentes, luego hay un orden entre ellas; esto al ser D es conexa hay al menos una flecha entre ellas lo que implica que todas las flechas tienen la misma dirección por el lema 2.1. Así D_1 será la componente que tiene los vértices que dominan a los vértices de D_2 ; es decir, D_1 es la componente de donde salen las flechas y D_2 la que las recibe cumpliéndose así el resultado. Supongamos válido el resultado para una digráfica con $n-1$ componentes. Sea D una digráfica con D_1, D_2, \dots, D_n componentes, consideremos una componente terminal D_j y la digráfica inducida por $D - D_j$. Así se tiene un orden entre las componentes de dicha digráfica, llamémosles $D'_1, D'_2, \dots, D'_{n-1}$. Tomando en cuenta la digráfica original y el hecho de que D_j es una componente terminal existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $D'_i \mapsto D_j$.



Por la definición 2.3 y del hecho de que D_j es terminal se tiene $D'_i \mapsto D_j$ para cada $i+1 \leq l \leq n-1$. Así se tiene el orden deseado, a saber: $D'_1 \mapsto D'_2 \mapsto \dots \mapsto D'_{n-1} \mapsto D_j$. \square

Teorema 2.2. *Toda digráfica conexa localmente semicompleta D tiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Por el lema 2.4, las componentes de D tienen un orden único D_1, D_2, \dots, D_k tal que no hay flechas de D_j a D_i si $j > i$ y $D_i \mapsto D_{i+1}$ si $i = 1, \dots, k-1$. Así por el teorema 2.1 en cada D_i podemos considerar una trayectoria hamiltoniana $T^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_{n_i}^i)$. Además se tiene por el lema 2.2 que entre cualesquiera componentes hay dominación fuerte, por lo que existe $x_{n_i}^i \rightarrow x_1^{i+1}$. sea $T = T^1 \cup (x_{n_1}^1, x_1^2) \cup T^2 \cup (x_{n_2}^2, x_1^3) \cup \dots \cup (x_{n_{k-1}}^{k-1}, x_1^k) \cup T^k$. Notamos que el resultado se cumple pues $V(T) = V(T^1 \cup (x_{n_1}^1, x_1^2) \cup T^2 \cup (x_{n_2}^2, x_1^3) \cup \dots \cup (x_{n_{k-1}}^{k-1}, x_1^k) \cup T^k) = V(D)$. \square

Capítulo 3

Digráficas localmente multipartitas semicompletas

Éste es el capítulo central de la tesis, en él probaremos los primeros resultados sobre las digráficas localmente multipartitas semicompletas. Estas digráficas son una generalización de los torneos multipartitos estudiados en (17) y que son una de las tantas generalizaciones de torneos; además esta clase contiene a la clase de las digráficas localmente semicompletas estudiadas en (1). Lo que pretendemos hacer en este trabajo es generalizar algunos resultados de las digráficas multipartitas semicompletas, otra generalización de los bien conocidos torneos, a una clase aún más amplia.

Definición 3.1. *Una digráfica D es **localmente multipartita semicompleta** si es multipartita y toda trayectoria minimal entre vértices no adyacentes en partes distintas en $UG(D)$ induce una trayectoria dirigida en D .*

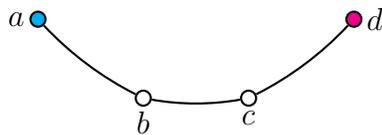
Un ejemplo que muestra que la clase de digráficas que presentamos es sensiblemente más grande que la de los torneos multipartitos son los ciclos, pues considerando una coloración propia¹ del mismo, para cualquier par de vértices de color distinto, toda trayectoria

¹Toda partición puede verse como una coloración propia asignando a cada parte un color diferente.

18CAPÍTULO 3. DIGRÁFICAS LOCALMENTE MULTIPARTITAS SEMICOMPLETAS

minimal entre ellos en $UG(D)$ induce una dirigida en el ciclo, por lo que es localmente multipartita semicompleta pero no es un torneo multipartito.

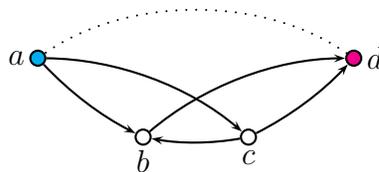
Nos detendremos para hacer una observación cuando se tenga una trayectoria (a, b, c, d) en $UG(D)$. Consideremos a los vértices a y d en partes distintas, si la trayectoria es dirigida notamos que no podemos deducir más flechas. Así que analizaremos el caso cuando la trayectoria no es dirigida, por lo que hay varias orientaciones posibles de las flechas; haremos el análisis de tres casos pues los demás se obtienen bajo recíprocos.



Las direcciones que analizaremos son las siguientes:

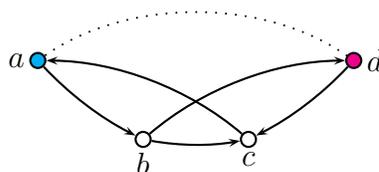
1. $a \rightarrow b \leftarrow c \rightarrow d$

En este caso las opciones para que exista una trayectoria dirigida entre los vértices a y d son las siguientes: (i) $a \rightarrow c$, (ii) $b \rightarrow d$ o (iii) a y d son adyacentes.

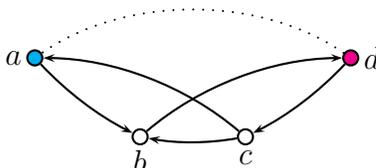


2. $a \rightarrow b \rightarrow c \leftarrow d$

Para esta segunda orientación las opciones entre los vértices a y d son: (i) $c \rightarrow a$, (ii) $b \rightarrow d$ o (iii) a y d son adyacentes.



3. $a \rightarrow b \leftarrow c \leftarrow d$ En esta última orientación entre los vértices a y d puede darse una de las siguientes opciones: (i) $c \rightarrow a$, (ii) $b \rightarrow d$ o (iii) a y d son adyacentes.



En cada uno de los casos, las opciones (i) y (ii) están condicionadas a saber en qué parte están los vértices b y c . Esto es: si los vértices a y c pertenecen a la misma parte la opción (i) es imposible y si los vértices b y d lo están, la opción (ii) tampoco es posible. De existir alguna de éstas opciones no tiene porque existir flecha entre los vértices a y d . De manera análoga, si existe la opción (iii) en cualquier dirección, las opciones (i) y (ii) no están obligadas.

Hagamos aquí una aclaración, entenderemos como **digráfica n-partita** (multipartita) lo siguiente:

Definición 3.2. Decimos que una digráfica D es **n-partita** si y sólo si existe una n-partición A_1, A_2, \dots, A_n del conjunto de vértices de D , es decir, se satisface que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $1 \leq i \neq j \leq n$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = V(D)$ y cada A_i es un conjunto independiente no vacío. Si D es n-partita, $\wp(D) = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ denota una n-partición ordenada de D .

En la búsqueda de generalizar los resultados ya conocidos para las digráficas localmente semicompletas y las digráficas multipartitas semicompletas nos enfrentamos al problema de decir cuando un vértice domina a un conjunto de vértices o un conjunto domina a otro. Es claro que en una digráfica multipartita no hay flechas entre vértices que están en la misma parte por lo que hay que hacer una distinción con esta situación.

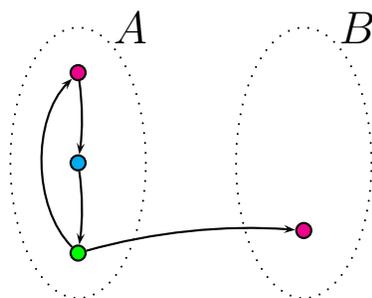
La definición que presentamos de dominación es la siguiente.

Definición 3.3. *Considérese una digráfica D con partición ordenada (U_1, U_2, \dots, U_k) . Dados $A, B \subseteq V(D)$ diremos que A P -domina a B si para todo $a \in A \cap U_i$ y para todo $b \in B \cap U_j$ entonces $a \rightarrow b$, siempre que $i \neq j$.*

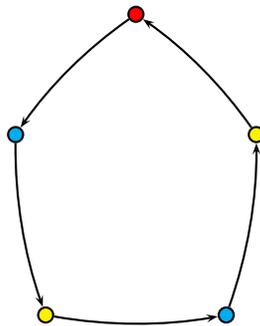
Notación 3.1. *Escribiremos que A P -domina B como $A \xrightarrow{P} B$.*

Hagamos una observación: Si dos conjuntos de vértices A y B pertenecen a la misma parte U_i como no hay flecha entre los vértices de los mismos, se tiene que $A \xrightarrow{P} B$ y $B \xrightarrow{P} A$.

Siguiendo la línea de extender resultados ya conocidos a las digráficas localmente multipartitas semicompletas, el lema 2.1 quedaría enunciado de la siguiente manera en caso de poderlo generalizar: Sea D una digráfica localmente multipartita semicompleta, si A, B son dos componentes fuertemente conexas de D y existe una AB -flecha entonces $A \xrightarrow{P} B$. Este resultado es falso si consideramos la siguiente digráfica, donde los colores representan la partición ordenada.



Otro resultado obtenido por Goddard, Kubicki, Oellermann y Tian en 1991 (13) es el siguiente: Sea D un torneo n -partito ($n \geq 3$). Si $v \in V(D)$ pertenece a un ciclo entonces v está contenido en un 3-ciclo o un 4-ciclo de D . Dicho resultado resulta falso si tratamos de extenderlo a la clase de las digráficas localmente multipartitas semicompletas. Un ejemplo muy sencillo son los ciclos C_n con $n \geq 5$ y n impar.



Comencemos el material definiendo una clase de vértices que juegan un papel importante en el desarrollo del trabajo.

Definición 3.4. Sean D una digráfica y C un ciclo de D . Sea $v \in V(D) \setminus V(C)$, se dice que v es un **exsingular** (**insingular**) con respecto a C si $v \mapsto C$ ($C \mapsto v$). Decimos que v es **singular** si es **exsingular** o **insingular**.

El siguiente teorema muestra formalmente como si D es una digráfica localmente multipartita semicompleta al cambiar de dirección todas sus flechas lo seguirá siendo, este resultado es útil en observaciones posteriores.

Teorema 3.1. Toda digráfica recíproca de una digráfica localmente multipartita semicompleta es localmente multipartita semicompleta.

Demostración. Sean D una digráfica localmente multipartita semicompleta y (U_1, U_2, \dots, U_n) una partición ordenada de $V(D)$. Llamemos D' a la digráfica recíproca de D . Veamos que la partición de $V(D)$ induce una partición en $V(D')$ pues dos vértices son adyacentes en D' si y sólo si lo son en D .

Por otro lado notemos que $UG(D')$ coincide con $UG(D)$ pues sólo estamos cambiando el sentido de las flechas.

Sean $u, v \in V(D')$ tales que están en partes distintas, digamos $u \in U_r$ y $v \in U_s$ con $r \neq s$. Sea T una trayectoria minimal entre u y v en $UG(D')$. Como $UG(D')$ coincide con

$UG(D)$ y D es localmente multipartita semicompleta, por la definición 3.1 T induce una trayectoria dirigida en D pero como D' es el resultado de cambiar las flechas de dirección, T también induce una trayectoria dirigida en D' pero en sentido contrario. Si la longitud de la trayectoria en $UG(D)$ tiene longitud uno o dos, por definición la trayectoria inducida en D contiene una trayectoria dirigida y puede tener una o sus dos flechas simétricas, por lo que en D' pasa lo mismo por la misma razón que sólo las flechas cambian de dirección. Con esto se verifica que D' es localmente multipartita semicompleta. \square

Uno de los primeros resultados que sí se pueden extender para las digráficas localmente multipartitas semicompletas habla de extender en longitud uno o dos un ciclo dado, para una mejor lectura de la prueba la dividimos en dos lemas que serán de gran utilidad.

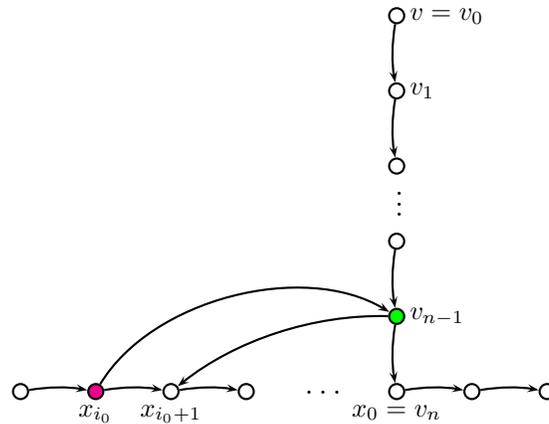
Lema 3.1. *Sea D una digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa y sea C un m -ciclo de D . Supongamos que D no tiene vértices exsingulares con respecto a C . Sean v un vértice no adyacente a C y $T = (v = v_0, v_1, \dots, v_n)$ una vC -trayectoria de longitud mínima entonces existe Cv_{n-1} -flecha o Cv_{n-2} -flecha.*

Demostración. Primero notemos que $n \geq 2$ porque v no es adyacente a C . Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_0)$ un m -ciclo de D . Supongamos sin pérdida de generalidad que $v_n = x_0$. Sea $\Sigma = \{x_i \in V(C) : v_{n-1}x_i \in F(D)\}$. Notemos que $\Sigma \neq \emptyset$ porque $x_0 \in \Sigma$; también puede suceder que $\Sigma = V(C)$, esto porque puede darse el caso que exista $v_{n-1} \rightarrow x_j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ y que exista $x_j \rightarrow v_{n-1}$ para alguna $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Es necesario notar que de darse este caso, el resultado se cumple pues tendríamos una Cv_{n-1} -flecha. Como v_{n-1} no es un vértice singular y ya analizamos el caso donde un vértice puede dominar al ciclo pero no fuertemente, sólo resta analizar el caso donde v_{n-1} no domina al ciclo, es decir, existe un vértice x_k en el ciclo tal que no existe $v_{n-1} \rightarrow x_k$. Sea i_0 el mayor índice tal que no existe $v_{n-1} \rightarrow x_{i_0}$, así podemos notar que $v_{n-1} \rightarrow x_{i_0+1}$.

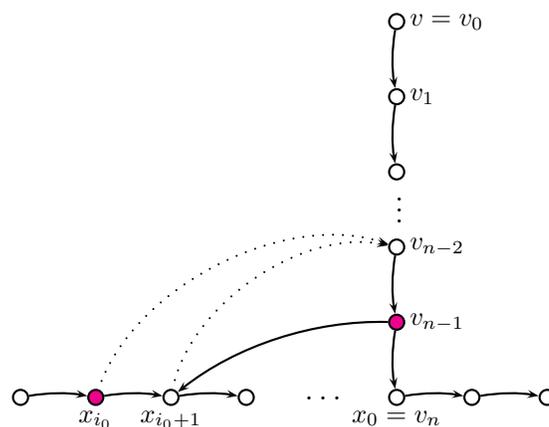
Por otro lado tenemos $x_{i_0} \rightarrow x_{i_0+1} \leftarrow v_{n-1}$, como no existe $v_{n-1} \rightarrow x_{i_0}$ y por la definición

3.1, se sigue que $x_{i_0} \rightarrow v_{n-1}$ o x_{i_0} y v_{n-1} están en la misma parte.

Si pasa la primera se sigue el resultado pues hay una Cv_{n-1} -flecha.

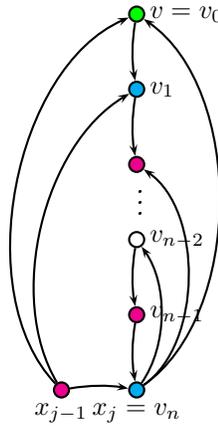


Si pasa la segunda, notamos primero que v_{n-2} no está en la misma parte que v_{n-1} y x_{i_0} , se tiene $x_{i_0} \rightarrow x_{i_0+1} \leftarrow v_{n-1} \leftarrow v_{n-2}$ por la definición 3.1 debe existir $v_{n-1} \rightarrow x_{i_0}$ o $x_{i_0+1} \rightarrow v_{n-2}$. La primera flecha no es posible porque i_0 es el mayor índice para el cual no existe $v_{n-1} \rightarrow x_{i_0}$ por lo que si se da la segunda flecha, se cumple el resultado. Dado el caso que x_{i_0+1} y v_{n-2} no sean adyacentes, por la minimalidad de T y la definición 3.1 se tiene $x_{i_0} \rightarrow v_{n-2}$ que es una Cv_{n-2} -flecha.



□

Lema 3.2. *Sea D una digráfica localmente multipartita semicompleta. Sean $v, x_j, x_{j-1} \in V(D)$ tal que $d(v, x_j) \geq 3$ y existe $x_{j-1} \rightarrow x_j$. Sea $T = (v = v_0, v_1, \dots, v_{n-i}, \dots, v_n = x_j)$ una vx_j -trayectoria minimal de v a x_j . Si se tiene $x_j \rightarrow v_{n-2}$ entonces $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_l : 0 \leq l \leq n-3\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_k : 0 \leq k \leq n-3\}$. Si se tiene $x_{j-1} \rightarrow v_{n-2}$ entonces $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_l : 0 \leq l \leq n-2\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_k : 0 \leq k \leq n-2\}$.*

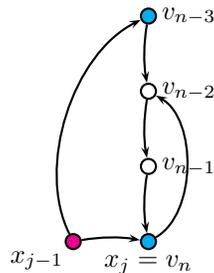


Demostración. Sea (U_1, \dots, U_α) una partición ordenada de D . Sea $r \in \{1, \dots, \alpha\}$ tal que $x_j \in U_r$, así $x_{j-1} \in U_s$ con $s \neq r$. Siendo $T = (v = v_0, v_1, \dots, v_{n-i}, \dots, v_n)$ la trayectoria de las hipótesis, procederemos por inducción sobre i .

Si $i = 3$. Consideramos el vértice v_{n-3} de la trayectoria dada T .

Caso 1 $v_{n-3} \in U_r$

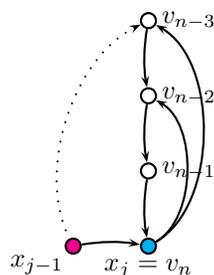
Se tiene $v_{n-3} \rightarrow v_{n-2} \leftarrow x_j \leftarrow x_{j-1}$. Recordemos que la flecha $x_j \rightarrow v_{n-2}$ existe por hipótesis. Por la definición 3.1 hay tres posibilidades: $x_j \rightarrow v_{n-3}$ o $v_{n-2} \rightarrow x_{j-1}$ o x_{j-1} y v_{n-3} son adyacentes. La primera flecha no se cumple pues x_j, v_{n-3} están en la misma parte y la segunda porque contradice la minimalidad de T , por lo que x_{j-1} y v_{n-3} son adyacentes pero por la misma minimalidad de la trayectoria, $x_{j-1} \rightarrow v_{n-3}$. Por lo tanto $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_3\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_3\}$.



Caso 2 $v_{n-3} \notin U_r$

En este caso se tiene que $v_{n-3} \rightarrow v_{n-2} \leftarrow x_j$, por la definición 3.1 y la minimalidad de T existe $x_j \rightarrow v_{n-3}$. Por otro lado notamos la trayectoria $x_{j-1} \rightarrow x_j \rightarrow v_{n-3}$; si $v_{n-3} \notin U_s$, por ser localmente multipartita semicompleta se cumple $x_{j-1} \rightarrow v_{n-3}$; por lo que $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_3\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_3\}$.

Este resultado se satisface aún cuando $v_{n-3} \in U_s$ pues no hay flecha entre vértices que están en la misma parte lo que nos dice que la P -dominación se cumple porque x_{j-1} domina a los vértices v_{n-i} con $0 \leq i \leq n-3$ que no están en U_s .

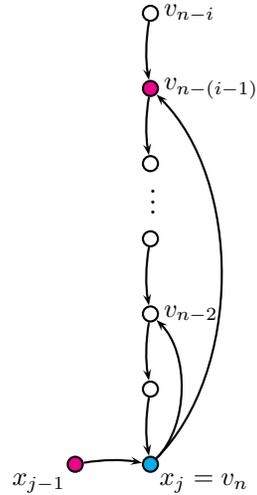


Supongamos válido el resultado para los vértices v_{n-j} tales $0 \leq j < i$ es decir, $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_{n-l} : 3 \leq l < i\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_{n-k} : 3 \leq k < i\}$

Ahora, consideremos el vértice v_{n-i} .

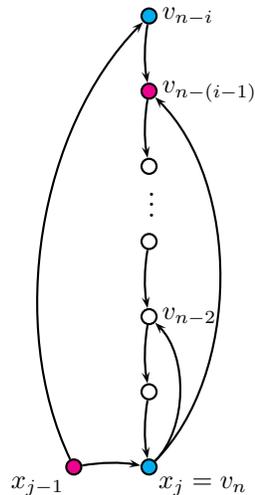
Caso 1 $v_{n-(i-1)} \in U_s$

Notemos que $v_{n-i} \notin U_s$ y por hipótesis de inducción se tiene $x_j \rightarrow v_{n-(i-1)}$



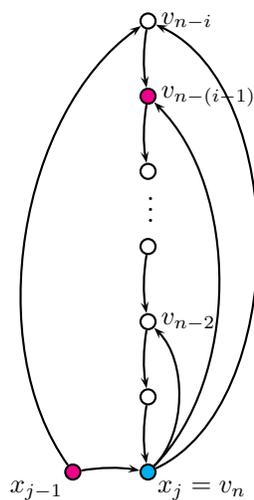
Caso 1.1 $v_{n-i} \in U_r$

Consideremos las flechas $x_{j-1} \rightarrow x_j \rightarrow v_{n-(i-1)} \leftarrow v_{n-i}$. Por la definición 3.1 hay tres opciones posibles: $v_{n-(i-1)} \rightarrow x_{j-1}$, $x_j \rightarrow v_{n-i}$ o x_{j-1} y v_{n-i} son adyacentes. La primera flecha no es posible por la minimalidad de T , la segunda tampoco se da porque x_j y v_{n-i} están en la misma parte; así por la minimalidad de T se da $x_{j-1} \rightarrow v_{n-i}$. De lo que se sigue el resultado $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_{n-l} : 3 \leq l \leq i\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_{n-k} : 3 \leq k \leq i\}$.



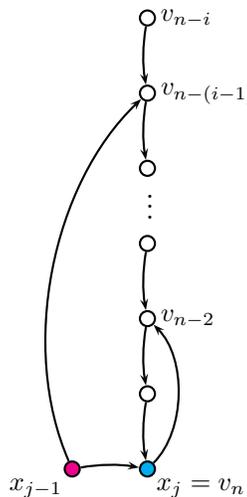
Caso 1.2 $v_{n-i} \notin U_r$

En este caso se tiene $v_{n-i} \rightarrow v_{n-2} \leftarrow x_j$, por la definición 3.1 y la minimalidad de T se tiene $x_j \rightarrow v_{n-i}$. Por otro lado, se tiene $x_{j-1} \rightarrow x_j \rightarrow v_{n-(i-1)} \leftarrow v_{n-i}$, así $x_{j-1} \rightarrow v_{n-i}$ por ser D localmente multipartita semicompleta. Dándose así el resultado.



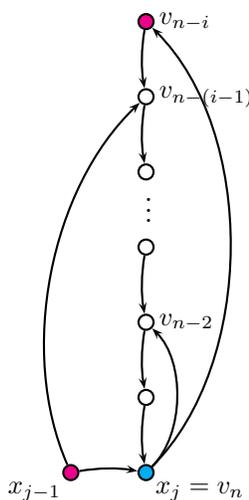
Caso 2 $v_{n-(i-1)} \notin U_s$

Por hipótesis de inducción se tiene $x_{j-1} \rightarrow v_{n-(i-1)}$



Caso 2.1 $v_{n-i} \in U_s$

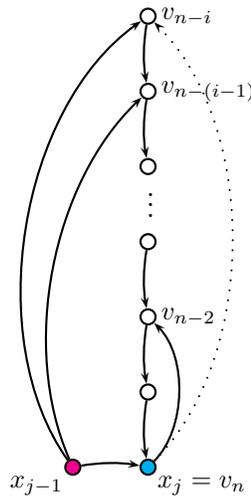
Consideremos las flechas $v_{n-i} \rightarrow v_{n-(i-1)} \leftarrow x_{j-1} \rightarrow x_j$. Por la definición 3.1 $v_{n-i} \rightarrow x_{j-1}$ lo cual no pasa pues están en la misma parte. De igual forma, puede existir $v_{n-(i-1)} \rightarrow x_j$, la cual tampoco se da pues contradice la minimalidad de T . Por ser D localmente multipartita semicompleta y por la misma minimalidad de T existe $x_j \rightarrow v_{n-i}$. Así se tiene el resultado $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_{n-l} : 3 \leq l \leq i\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_{n-k} : 3 \leq k \leq i\}$.



Caso 2.2 $v_{n-i} \notin U_s$

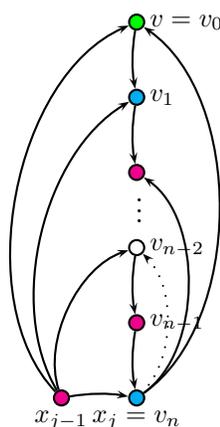
Como se tiene $v_{n-i} \rightarrow v_{n-(i-1)} \leftarrow x_{j-1}$, existe $x_{j-1} \rightarrow v_{n-i}$ por ser D localmente multipartita semicompleta (definición 3.1) y la minimalidad de T . Si $v_{n-i} \notin U_r$, como existen $x_j \leftarrow x_{j-1} \rightarrow v_{n-i}$ por la minimalidad de T y la definición 3.1, existe $x_j \rightarrow v_{n-i}$. De lo que se sigue el resultado $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_{n-l} : 3 \leq l \leq i\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_{n-k} : 3 \leq k \leq i\}$.

De igual forma si $v_{n-i} \in U_r$ se tiene el resultado pues no existe $x_j \rightarrow v_{n-i}$.



Por lo tanto, $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_l : 0 \leq l \leq n - 3\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_k : 0 \leq k \leq n - 3\}$.

Notemos que al considerar $x_{j-1} \rightarrow v_{n-2}$ en lugar de $x_j \rightarrow v_{n-2}$ como se tiene $v_{n-2} \leftarrow x_{j-1} \rightarrow x_j$, por la definición 3.1 debería existir flecha entre v_{n-2} y x_j excepto si están en la misma parte. Por la minimalidad de T , si existiera flecha sería la $x_j \rightarrow v_{n-2}$, implicando el resultado. De hecho, $x_{j-1} \xrightarrow{P} \{v_l : 0 \leq l \leq n - 2\}$ y $x_j \xrightarrow{P} \{v_k : 0 \leq k \leq n - 2\}$.

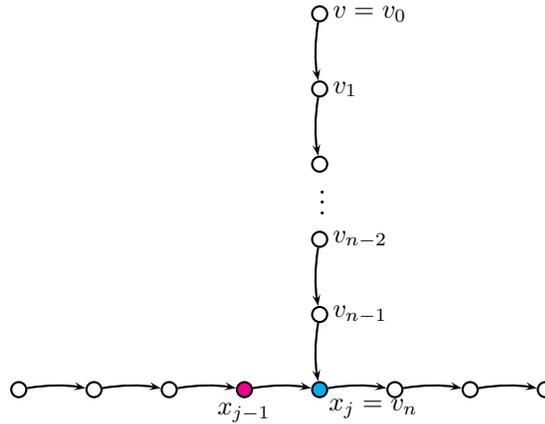


□

A continuación presentamos el teorema para el cual los lemas anteriores juegan un papel muy importante y son de gran utilidad.

Teorema 3.2. Sean D una digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa y $C = (x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_{m-1}, x_0)$ un m -ciclo de D . Supongamos que existe un vértice v no adyacente a C y sea $T = (v = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ una trayectoria dirigida de longitud mínima de v al ciclo C . Supongamos que v_{n-1} es un vértice no singular con respecto a C entonces existe un $(m + 1)$ - o $(m + 2)$ -ciclo que contiene a los vértices de C .

Demostración. Sea (U_1, U_2, \dots, U_t) una partición ordenada de D . Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_{m-1}, x_0)$ el m -ciclo de las hipótesis. Como $T = (v = v_0, v_1, \dots, v_n)$ es una trayectoria dirigida de longitud mínima de v al ciclo C , y v no es adyacente a C entonces $n \geq 2$. Tenemos que $x_j = v_n$ para alguna $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Recordemos que si dos vértices son adyacentes entonces están en partes distintas. Así, supongamos que $x_j \in U_l$ y que $x_{j-1} \in U_k$ con $k \neq l$.

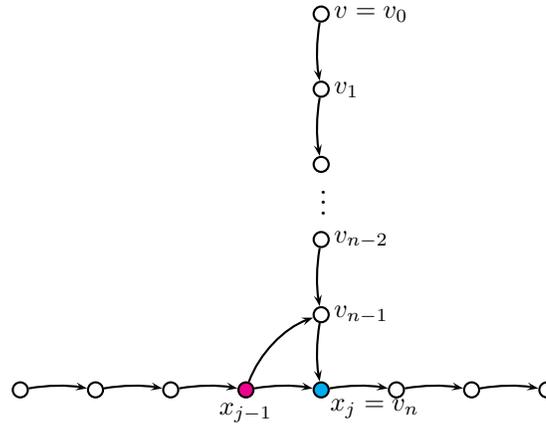


Como $v_{n-1} \rightarrow x_j$, v_{n-1} debe estar en una parte diferente de x_j , se tienen dos casos: $v_{n-1} \in U_k$ o $v_{n-1} \notin U_k$.

Caso 1 $v_{n-1} \notin U_k$

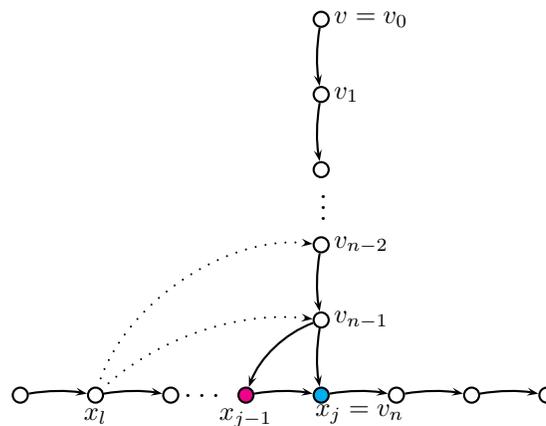
Notemos que se tiene $x_{j-1} \rightarrow x_j \leftarrow v_{n-1}$, por la definición 3.1 existe $x_{j-1} \rightarrow v_{n-1}$ o $v_{n-1} \rightarrow x_{j-1}$.

Caso 1 .1 Si existe $x_{j-1} \rightarrow v_{n-1}$



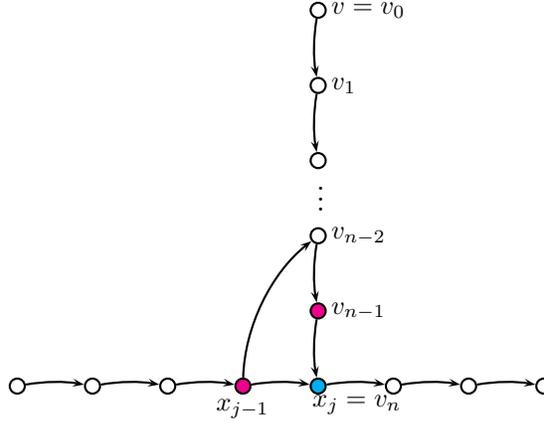
El ciclo buscado es $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, v_{n-1}, x_j, \dots, x_{m-1}, x_0)$ cuya longitud es $m + 1$ y contiene a los vértices de C .

Caso 1 .2 Si se tiene $v_{n-1} \rightarrow x_{j-1}$



Por el lema 3.1 existe $l \in \{0, \dots, m\}$ tal que $x_l \rightarrow v_{n-1}$ o $x_l \rightarrow v_{n-2}$. Así el ciclo buscado es $(x_0, x_1, \dots, x_l, v_{n-1}, x_{l+1}, \dots, x_{m-1}, x_0)$ cuya longitud es $m + 1$ o $(x_0, x_1, \dots, x_l, v_{n-2}, v_{n-1}, x_{l+1}, \dots, x_{m-1}, x_0)$ que tiene longitud $m + 2$ y ambos contienen a los vértices de C .

Caso 2 $v_{n-1} \in U_k$



En este caso notamos que $v_{n-2} \notin U_k$, por lo que se tiene $v_{n-2} \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n \leftarrow x_{j-1}$, por la definición 3.1 debe existir alguna de las siguientes: (i) $v_n \rightarrow v_{n-2}$, (ii) $v_{n-1} \rightarrow x_{j-1}$ o (iii) v_{n-2} y x_{j-1} son adyacentes. La primera flecha no es posible pues por el lema 3.2 se contradice que v no es adyacente a C , la opción (ii) tampoco se da porque dichos vértices están en la misma parte; por lo que tenemos (iii), pero por minimalidad de T se tiene $x_{j-1} \rightarrow v_{n-2}$. Por lo tanto, el ciclo buscado es el $(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n = x_j, x_{j-1}, \dots, x_{m-1}, x_0)$ cuya longitud es $m + 2$ y contiene a los vértices de C .

□

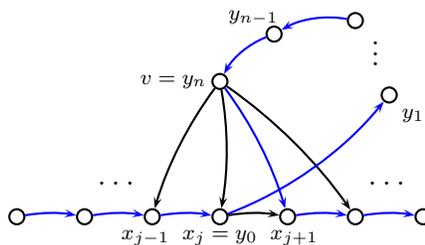
Corolario 3.1. Sean D una digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa y $C = (x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_{m-1}, x_0)$ un m -ciclo de D . Supongamos que existe un vértice v no adyacente a C y sea $T = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v)$ la trayectoria dirigida minimal de C a v . Supongamos que v_1 es un vértice no singular con respecto a C entonces existe un $(m + 1)$ - o $(m + 2)$ -ciclo que contiene a los vértices de C .

Demostración. Este resultado es consecuencia directa de los teoremas 3.1 y 3.2. □

Ahora busquemos un ciclo a partir de un vértice dado.

Proposición 3.1. *Sea D una digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa y C un m -ciclo de D . Supongamos que D tiene un vértice ex -singular v con respecto a C entonces $V(C)$ está contenido en un ciclo de longitud al menos $m + 2$ que pasa por v .*

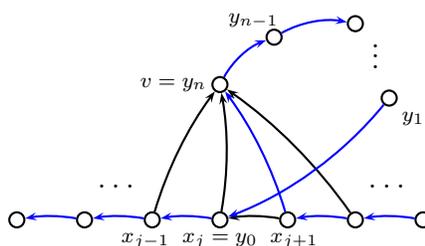
Demostración. Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_0)$ el m -ciclo de la hipótesis. Como D es fuertemente conexa, existe una Cv -trayectoria $T = (x_j = y_0, y_1, \dots, y_n = v)$ para alguna $j \in \{0, \dots, m-1\}$. Luego el ciclo buscado es $(x_j = y_0, y_1, \dots, y_n = v, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{m-1}, x_0, \dots, x_j)$ y además notemos que el nuevo ciclo pasa por el vértice v y tiene longitud mayor o igual a $m + 2$ pues la Cv -trayectoria tiene al menos longitud dos.



□

Corolario 3.2. *Sean D una digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa y C un m -ciclo de D . Supongamos que D tiene un vértice $insingular$ u con respecto a C entonces $V(C)$ está contenido en un ciclo de longitud al menos $m + 2$ que pasa por u .*

Demostración. El resultado se sigue del teorema 3.1 y la proposición 3.1.



□

Lema 3.3. *Sean D una digráfica localmente multipartita fuertemente conexa con n partes ($n \geq 3$) y C un m -ciclo de D tal que contiene vértices de a lo más $n - 1$ partes entonces dicho ciclo se puede extender.*

Demostración. Podemos suponer que D no tiene vértices singulares con respecto a C pues si los tuviera, el ciclo se puede extender por la proposición 3.1 o el corolario 3.2.

Sea (U_1, U_2, \dots, U_n) la partición ordenada de $V(D)$ que satisface la hipótesis y sin pérdida de generalidad supongamos que $C = (x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_{m-1}, x_0)$ no pasa por U_n . Sea $v \in (V(D) \setminus V(C)) \cap U_n$, esto lo podemos hacer pues los conjuntos de la partición son no vacíos. Hay dos posibilidades, que v sea o no adyacente a C .

Si v no es adyacente al ciclo, consideremos la vC -trayectoria dirigida minimal $T = (v = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = x_j)$ para alguna $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Por lo anterior y por el teorema 3.2 se tiene el resultado.

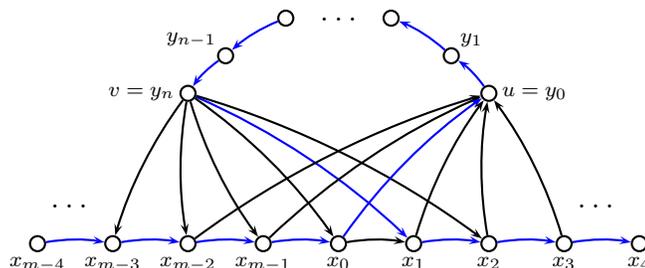
Ahora supongamos que v es adyacente a C . Analicemos primero el caso en el que existe $v \rightarrow x_j$ para alguna $j \in \{0, \dots, m-1\}$, supongamos sin pérdida de generalidad que $j = 0$. Como v es un vértice no singular podemos considerar dos casos: (i) $v \rightarrow C$ y $(C, \{v\}) \neq \emptyset$ y (ii) No pasa que $v \rightarrow C$, es decir, existe un vértice $x_k \in C$ tal que no hay (v, x_k) -flecha. En el primer caso, sea $j_0 = \max\{i : \text{existe } x_{j_0} \rightarrow v\}$. Así, se tiene $v \rightarrow x_{j_0+1}$ por lo que el ciclo buscado es $(x_0, x_1, \dots, x_{j_0}, v, x_{j_0+1}, \dots, x_{m-1}, x_0)$. En el segundo caso, de existir un vértice $x_k \in C$ para alguna $k \in \{1, \dots, m-1\}$ tal que no existe $v \rightarrow x_k$, como se tiene $x_k \rightarrow x_{k+1} \leftarrow v \rightarrow x_k$ y v deberían ser adyacentes pero como no lo son implica que ambos vértices están en la misma parte lo cual es una contradicción. El caso en el que existe $x_j \rightarrow v$ el resultado se tiene por el teorema 3.1 y un análisis análogo al anterior.

□

Lema 3.4. *Sea D una digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa y sea C un m -ciclo de D . Supongamos que D tiene al menos un vértice singular con respecto a C entonces $V(C)$ está contenido en un ciclo de longitud al menos $m + 2$ que pasa por algún vértice singular.*

Demostración. Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_0)$ el m -ciclo de las hipótesis, si existe al menos un vértice v exsingular con respecto a C , por la proposición 3.1 tenemos el resultado y si existiese al menos un vértice u insingular con respecto a C , el lema se cumple por el corolario 3.2. Ahora supongamos que existen ambos vértices insingular y exsingular con respecto a C u y v , respectivamente, como D es fuertemente conexa podemos considerar una uv -trayectoria de longitud máxima² $T = (u = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = v)$. Tenemos dos casos:

Caso 1 $V(T) \cap V(C) = \emptyset$, *i.e.*, T no pasa por C



En este caso es sencillo notar que el ciclo C puede ser extendido al ciclo $(x_0, u = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = v, x_1, \dots, x_{m-1}, x_0)$ y pasa por ambos vértices v y u .

Caso 2 $V(T) \cap V(C) \neq \emptyset$

Este caso se reduce a tener sólo un de los vértices singulares, es decir, se sigue de la proposición 3.1 o el corolario 3.2.

En ambos casos se extiende el ciclo C y al menos uno de los vértices singulares está en dicha extensión, además de cumplirse que la longitud del ciclo es al menos $m + 2$. \square

Al querer extender cualquier ciclo, es necesario centrar nuestra atención a los vértices del mismo. Dichos vértices de alguna manera son los vértices de una trayectoria si

²Consideraremos la trayectoria de longitud máxima pues así el ciclo C puede ser extendido en mayor longitud.

eliminamos cualquier flecha del ciclo, por lo que nos interesa clasificarlos, objetivo de la siguiente proposición. Pero primero veamos que entendemos por clasificación:

Definición 3.5. Decimos que un conjunto de vértices T admite una **clasificación** si y sólo si existe una asignación de los mismos vértices en conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , que satisfacen que $\bigcup_{i=1}^n A_i = T$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $1 \leq i \neq j \leq n$ y cada A_i es un conjunto independiente. Notamos que A_i puede ser un conjunto vacío para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$.

Proposición 3.2. Dados D una digráfica localmente semicompleta multipartita, $T = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ una trayectoria, un vértice u fuera de la trayectoria tal que $u \rightarrow v_k$ y $u \Rightarrow T$ entonces existe una clasificación de los vértices de T en tres conjuntos T_0, T_1 y T_2 que satisfacen las siguiente condiciones:

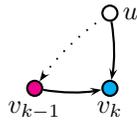
1. T_0 es el conjunto de los vértices en T que son dominados por u , i.e., $T_0 = \{v_i \in V(T) : u \rightarrow v_i\}$.
2. T_1 y T_2 forman una clasificación del conjunto $\{v_i \in V(T) : \text{no existe } u \rightarrow v_i\}$.
3. Si $v_i \notin T_0$ y $v_k \rightarrow v_i$ entonces $v_i \in T_1$, i.e., $T_1 = \{v_i \in V(T) \setminus T_0 : v_k \rightarrow v_i\}$.
4. Si $v_i \notin T_0$ y no pasa que $v_k \rightarrow v_i$ entonces $v_i \rightarrow v_k$ y $v_i \in T_2$, i.e., $T_2 = \{v_i \in V(T) \setminus (T_0 \cup T_1) : v_i \rightarrow v_k\}$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre i en el segmento de trayectoria $T[v_{k-i}, v_k]$. Notemos que $v_k \in T_0$.

Para el caso $i = 1$.

Consideramos $T[v_{k-1}, v_k]$. Analicemos dos casos: v_{k-1} está o no en la misma parte que u . Si no están en la misma parte, $v_{k-1} \rightarrow v_k \leftarrow u$, por lo tanto v_{k-1} y u son adyacentes. Ya que $u \Rightarrow T$ entonces $u \rightarrow v_{k-1}$ y así $v_{k-1} \in T_0$. Si están en la misma parte, en caso de

no existir la flecha simétrica entre v_{k-1} y v_k , $v_{k-1} \in T_2$; de darse la existencia de la flecha simétrica, $v_{k-1} \in T_1$.



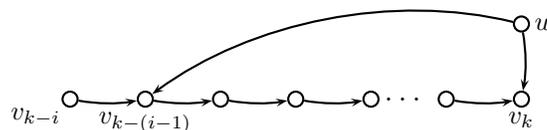
Analícemos el caso $i = 2$.

En este caso consideramos $T[v_{k-2}, v_k]$, así tenemos $v_{k-2} \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k \leftarrow u$. Observemos las posibles flechas ya que tenemos una trayectoria de longitud tres: (i) $v_{k-1} \rightarrow u$, (ii) $v_k \rightarrow v_{k-2}$ o (iii) v_{k-2} y u son adyacentes. En el caso (iii), como $u \Rightarrow T$ se tiene $u \rightarrow v_{k-2}$ y por tanto $v_{k-2} \in T_0$. De no darse este caso, notemos que el caso (i) no es posible por hipótesis y si se da (ii), $v_{k-2} \in T_1$. (Observemos que si no se da el caso (iii) podría ser porque v_{k-2} y u están en la misma parte).



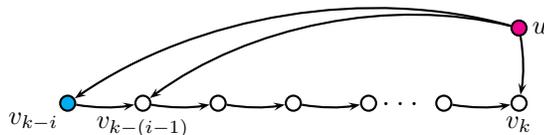
Supongamos que podemos clasificar los vértices de la trayectoria $T[v_{k-(i-1)}, v_k]$ como en las hipótesis y la extendámosla a una clasificación de $T[v_{k-i}, v_k]$. Dividamos la prueba en tres casos:

Caso 1 Si $v_{k-(i-1)} \in T_0$, *i.e.*, existe $u \rightarrow v_{k-(i-1)}$



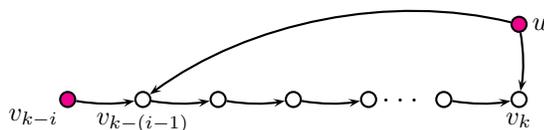
Hay dos posibilidades: v_{k-i} está o no en la misma parte que u .

Caso 1.1 v_{k-i} no está en la misma parte que u .



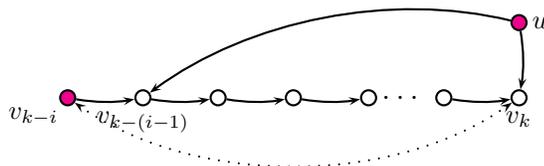
Por definición, v_{k-i} y u son adyacentes, pero por hipótesis $u \Rightarrow T$, entonces se tiene $u \rightarrow v_{k-i}$. Por lo tanto, $v_{k-i} \in T_0$.

Caso 1.2 v_{k-i} y u están en la misma parte.



Primero notemos que v_k está en una parte distinta a u , por lo que tenemos: $v_{k-i} \rightarrow v_{k-(i-1)} \leftarrow u \rightarrow v_k$, por lo que: (i) $v_{k-i} \rightarrow u$, (ii) $v_{k-(i-1)} \rightarrow v_k$ o (iii) v_{k-i} y v_k son adyacentes.

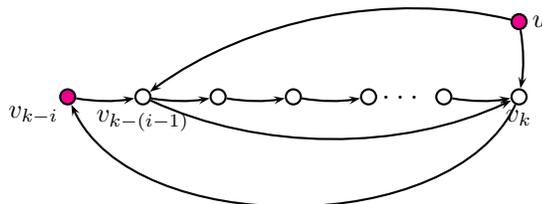
La primera opción no es posible pues ambos vértices están en la misma parte y porque $u \Rightarrow T$. Supongamos que pasa la tercera opción entonces $v_{k-i} \in T_1$ si existe $v_k \rightarrow v_{k-i}$ y $v_{k-i} \in T_2$ si existe $v_{k-i} \rightarrow v_k$.



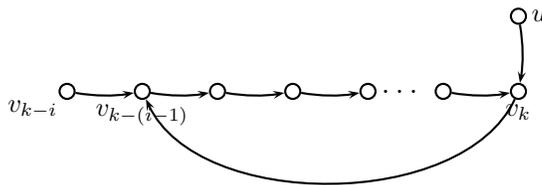
Si se da la segunda opción, tenemos la siguiente trayectoria de longitud tres: $v_{k-1} \rightarrow v_{k-(i-1)} \rightarrow v_k \leftarrow u$, así tenemos otras tres opciones: (a) $v_k \rightarrow v_{k-i}$, (b) $v_{k-(i-1)} \rightarrow u$ o (c) v_{k-i} y u son adyacentes.

Las opciones (b) y (c) son imposibles, la primera porque por hipótesis

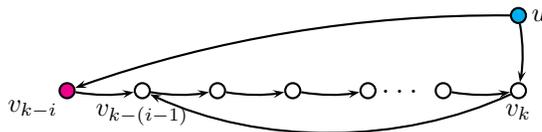
$u \Rightarrow T$ y la segunda porque v_{k-i} y u están en la misma parte. Luego se da la opción (a), por lo que $v_k \rightarrow v_{k-i}$. Así $v_{k-i} \in T_1$.



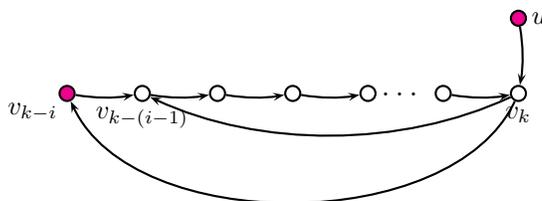
Caso 2 Si $v_{k-(i-1)} \in T_1$, *i.e.*, existe $v_k \rightarrow v_{k-(i-1)}$



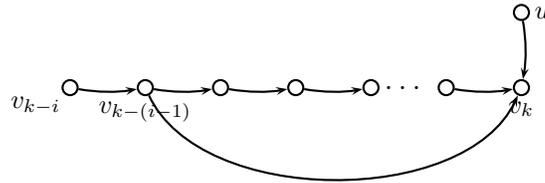
Consideremos la trayectoria $v_{k-i} \rightarrow v_{k-(i-1)} \leftarrow v_k \leftarrow u$ de donde se sigue por la definición de digráfica localmente multipartita semicompleta que: (i) $v_{k-(i-1)} \rightarrow u$, (ii) $v_k \rightarrow v_{k-i}$ o (iii) v_{k-i} y u son adyacentes. Notamos que la opción (i) es imposible porque $u \Rightarrow T$. Si se da (iii), por hipótesis $u \rightarrow v_{k-i}$; así $v_{k-i} \in T_0$ (en este caso, u y v_{k-i} están en partes distintas).



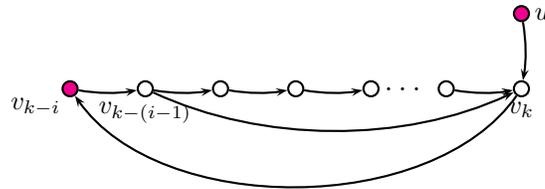
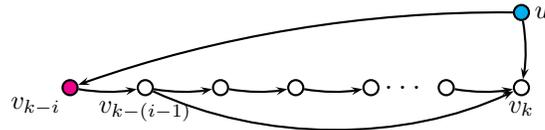
Notemos que si no pasa la opción (iii), es porque v_{k-i} y u están en la misma parte, luego se tiene el caso (ii) y por lo tanto $v_{k-i} \in T_1$.



Caso 3 Si $v_{k-(i-1)} \in T_2$, *i.e.*, existe $v_{k-(i-1)} \rightarrow v_k$



Consideremos ahora la trayectoria $v_{k-i} \rightarrow v_{k-(i-1)} \rightarrow v_k \leftarrow u$ de donde se sigue que puede pasar que: (i) $v_{k-(i-1)} \rightarrow u$, (ii) $v_k \rightarrow v_{k-i}$ o (iii) v_{k-i} y u son adyacentes. Si se da (iii), por hipótesis $u \rightarrow v_{k-i}$; así $v_{k-i} \in T_0$. De igual manera si no se da (iii), v_{k-i} y u están en la misma parte; además no se puede dar (i) y así se tiene (ii), por lo que $v_{k-i} \in T_1$.



Por otro lado, podemos afirmar que $\bigcup_{i=0}^2 T_i = V(T)$ porque si $v \in V(T)$ hemos probado que pasa una de las siguientes: (i) $u \rightarrow v$, (ii) $v \rightarrow v_k$ o (iii) $v_k \rightarrow v$ así $v \in T_i$ para alguna $i \in \{0, 1, 2\}$.

Con esto hemos demostrado el lema, pues existe una clasificación de $V(T)$ en los conjuntos mencionados y que cumplen las condiciones pedidas. Sólo recalquemos que los conjuntos T_0 , T_1 y T_2 están definidos de tal manera que tiene prioridad T_0 sobre los otros dos y T_1 sobre T_0 .

□

El siguiente teorema es parte esencial de este trabajo junto con la clasificación anterior; pensamos que serán de gran importancia para obtener nuevos resultados sobre la clase de las digráficas localmente multipartitas semicompletas.

Teorema 3.3. *Todo vértice de una digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa pertenece o es adyacente a un ciclo de longitud máxima.*

Demostración. Sean D digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa y v un vértice de D . Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_0)$ un ciclo de longitud máxima de D . Si $v \in V(C)$ el teorema se cumple, por lo que podemos suponer que $v \in V(D) \setminus V(C)$. Notemos que en D no existen vértices singulares pues si los hubiese el ciclo se podría extender por la proposición 3.1 o el corolario 3.2.

Por otro lado si v no fuera adyacente a C , por la observación anterior y el teorema 3.2 podríamos extender el ciclo, por lo tanto v es adyacente al ciclo. \square

Capítulo 4

Conclusiones

El presente trabajo es un tema de interés pues con esta clase de digráficas podremos entender un poco más la estructura de los torneos. Hasta este punto lo que sabemos es que *Todo vértice en una digráfica localmente multipartita semicompleta pertenece o es adyacente a un ciclo de longitud máxima*, lo que nos queda por responder es:

Conjetura 4.1. *Todo vértice en una digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa pertenece a un ciclo de longitud máxima.*

Aunque el teorema 3.3 la responde de manera parcial. Otras preguntas se han formado gracias a los juicios y sospechas que desprende esta nueva clase de digráficas, algunas de ellas son:

Conjetura 4.2. *Sea D una digráfica localmente multipartita semicompleta, todo ciclo de longitud máxima C en D interseca a cualquier otro ciclo C' en D .*

Conjetura 4.3. *Dada una digráfica localmente multipartita semicompleta fuertemente conexa con n partes ($n \geq 4$) y cada una de las partes con al menos dos vértices entonces hay un m -ciclo con $m > n$.*

La siguiente conjetura hace referencia a la condición de no poder hablar en general de hamiltonicidad en esta clase de digráficas.

Conjetura 4.4. *Toda digráfica localmente multipartita semicompleta regular es hamiltoniana.*

Conjetura 4.5. *Dada una digráfica D localmente multipartita semicompleta, si C es un trayectoria de longitud máxima e $I \subseteq V(D)$ es un conjunto independiente de cardinalidad máxima entonces $I \cap V(C) \neq \emptyset$.*

Esta última es la conjetura de J.-M. Laborde, C. Payan, N.H. Xuong (15) y que ya ha sido probada para varias clases de las generalizaciones de torneos (11; 18).

Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen, Locally semicomplete digraphs: A generalization of tournaments, *J. Graph Theory* **14** (1990), 371-390.
- [2] J. Bang-Jensen and J. Huang, Quasi-transitive digraphs, *J. Graph Theory* **20** (1995), 141-161.
- [3] J. Bang-Jensen, G. Gutin and J. Huang, A sufficient condition for a semicomplete multipartite digraph to be Hamiltonian, *Discrete Math.* **161** (1996), 1-12.
- [4] J. Bang-Jensen, Y. Guo, G. Gutin and L. Volkmann, *A classification of locally semicomplete digraphs*, *Discrete Math.* **167** (1997), 101-114.
- [5] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs: theory, algorithms, and applications*, Monographs in mathematics, Springer, 2001.
- [6] J. Bang-Jensen, The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs, *Discrete Math.* **283** (2004), 1-6.
- [7] F. Buckley and M. Lewinter, *A friendly introduction to graph theory*, Prentice Hall, 2003.
- [8] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Wadsworth, Inc., 2nd edition, 1986.
- [9] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.

- [10] H. Galeana-Sánchez and I.A. Goldfeder, A classification of strong and non-strong arc-locally semicomplete digraphs, (enviado).
- [11] H. Galeana-Sánchez and R. Gómez, Independent sets and non-augmentable paths in generalizations of tournaments, *Discrete Math.* **308** (2008), 2460-2472.
- [12] I.A. Goldfeder, Locally semicomplete multipartite digraphs: a generalization of semi-complete multipartite digraphs, (en preparación).
- [13] W.D. Goddard, G. Kubicki, O.R. Oellermann and S. Tian, On multipartite tournaments, *J. Combin. Theory Ser. B* **47** (1991), 284-300.
- [14] Y. Guo, A. Pinkernell and L. Volkmann, On cycles through a given vertex in multipartite tournaments, *Discrete Math.* **164** (1997), 165-170.
- [15] J.M. Laborde, C. Payan, N.H. Xuong, Independent sets and longest paths in digraphs. *Graphs and other combinatorial Topics. Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium of Graph Theory*, (1982) 173-177.
- [16] L. Rédei. Ein kombinatorischer Satz, *Acta Litt. Sci. Szeged* **7**, (1934), 39-43.
- [17] L. Volkmann, Multipartite tournaments: A survey, *Discrete Math.* **307**, (2007), 3097-3129.
- [18] S. Wang and R. Wang, Independent sets and non-augmentable paths in arc-locally in-semicomplete digraphs and quasi-arc-transitive digraphs, *Discrete Math.* **311**, (2011), 282-288.