



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS**

**RESPUESTA ELASTO-ÓPTICA DE UNA FIBRA  
ÓPTICA DE ÍNDICE ESCALONADO. TEORÍA,  
SOLUCIÓN NUMÉRICA Y EXPERIMENTO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN:  
CIENCIAS (FÍSICA)**

**P R E S E N T A:**

**FÍS. ALEJANDRO SÁNCHEZ CERVANTES**



**DIRECTORA DE TESIS:  
DRA. SUSANA OROZCO SEGOVIA**

**MIEMBROS DEL CÓMITE TUTORAL:  
DR. JORGE ALEJANDRO REYES ESQUEDA  
DR. GUILLERMO MONSIVÁIS GALINDO**

**2011**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico este trabajo de tesis a mis padres, cuyo apoyo me permitió llegar a estas instancias.

También quiero dedicar este trabajo al pueblo mexicano, porque debo a él, la gloriosa oportunidad de estudiar en la máxima casa de estudios de nuestro país, la Universidad Nacional Autónoma de México.

Agradezco profundamente a Susana Orozco Segovia su excelente asesoría, su apoyo y su comprensión a lo largo de mis estudios de Maestría. Me satisface haber recibido sus enseñanzas en Física y haber conocido su calidad humana.

También quiero expresar mi más sincero agradecimiento a Andrés V. Porta Contreras, uno de mis mejores profesores de la licenciatura, quien me brindó su apoyo, asesoría y amabilidad. Es para mí un honor haber contado con su colaboración en el diseño de los dispositivos experimentales de este trabajo.

Alejandro Sánchez Cervantes

México D.F., mayo de 2011

# CONTENIDO

RESUMEN	IX
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Planteamiento del problema y objetivo	2
1.2 Desarrollo teórico	5
1.2.1 Esfuerzos y deformaciones	5
1.2.2 Efecto elasto-óptico	11
1.2.3 Óptica geométrica	16
2 MODELO TEÓRICO, SOLUCIÓN NUMÉRICA Y EXPERIMENTO	22
2.1 Modelo teórico	22
2.2 Solución numérica	24
2.3 Experimento	28
2.3.1 Compresión y cambio de intensidad	28
2.3.2 Propiedades elásticas de la fibra óptica	33
2.4 Comparación entre la solución numérica y el resultado experimental	39
3 CONCLUSIONES	41
3.1 Sugerencia	41
A CONSTANTES ELÁSTICAS DE SÓLIDOS ISOTRÓPICOS	44
B LIMITACIONES EN LOS MÓDULOS ELÁSTICOS LINEALES	46
BIBLIOGRAFÍA	48

## **RESUMEN**

El objetivo de este trabajo de tesis consiste en el estudio teórico y experimental del cambio de intensidad de la luz guiada por una fibra óptica plástica de índice escalonado, a causa de una compresión localizada y aplicada perpendicularmente al eje de la fibra óptica. Se propone un modelo teórico del problema basado en la Óptica Geométrica, en la teoría de la Elasticidad y la teoría elasto-óptica. Se supone que el núcleo de la fibra óptica es isotrópico, homogéneo, no magnetizable y elástico; además se supone que la luz es monocromática, de frente de onda plano, y de intensidad constante. Se obtiene una solución numérica con este modelo para una fibra óptica con núcleo de polimetacrilato de metilo y los resultados se comparan con los datos experimentales. La congruencia entre la solución numérica y los resultados experimentales se obtuvo usando un factor de calibración, el cual considera pérdidas en el sistema que no son causa de la compresión. Se presentan los experimentos para medir las propiedades elásticas de la fibra óptica utilizada en este trabajo. El módulo de Young y la razón de Poisson de la fibra óptica son indispensables para realizar la solución numérica del problema.

## **ABSTRACT**

The objective of this Thesis is the theoretical and experimental study of the light intensity variation in a step index plastic optical fiber, induced by a compression perpendicular to the fiber axis. A theoretical model based on the geometric optics, the elasticity and the elastic-optical theories is proposed. In the model, an isotropic, homogeneous, non-magnetizable and elastic fiber core has been assumed and a plane wave front of monochromatic light traveling along the fiber axis with constant intensity is considered. The numerical solution was obtained using the elastic and optical properties of polymethyl methacrylate and the results were compared with experimental data. The agreement between the numerical solution and the experimental results was obtained using a calibration factor, which considers losses in the system that are not related to compression. The experiments to measure elastic properties of the fiber used in this work are shown. The Young's modulus and the Poisson ratio of the optical fiber were inputs basic of the numerical solution of the problem.

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

Es indudable la importancia tecnológica que tienen las fibras ópticas actualmente. Forman parte de los más modernos endoscopios y son el esqueleto de la actual red de telecomunicaciones. Con las fibras ópticas se ha logrado incrementar enormemente la tasa de transmisión de información en las telecomunicaciones, gracias a su baja pérdida de transmisión y su amplio ancho de banda [1]. Lo anterior ha sido posible gracias al estudio de estos dispositivos por científicos e ingenieros. Sin embargo, debido a la demanda de mayor tasa de información, el estudio de nuevos materiales para la fabricación de fibras ópticas y su respuesta a agentes externos sigue siendo un campo de investigación actual [1], [2].

Otra aplicación de creciente interés de las fibras ópticas en los últimos años, está en los sensores de diferentes cantidades físicas y químicas. Por ejemplo, para medir altas presiones y detectar rupturas [3], para cuantificar fuerzas [4], para medir temperaturas [5] y para determinar nivel de líquidos [6].

Los sensores con fibra óptica (SFO) ofrecen inmunidad a interferencias electromagnéticas y están aislados eléctricamente, ventajas considerables con respecto a sus contrapartes electromagnéticas. Además, los SFO pueden usarse en áreas inaccesibles anteriormente gracias a su reducido tamaño y flexibilidad.

La tecnología de SFO comenzó con transductores de intensidad que cuantificaban el cambio de intensidad de la luz guiada por la fibra óptica causado por el agente a medir, por ejemplo una presión. Posteriormente se desarrollaron los sensores con fibras ópticas que utilizan redes Bragg que son una serie de franjas que se graban en un segmento del núcleo de la fibra, las cuales hacen que el índice de refracción del núcleo varíe periódicamente en la dirección longitudinal del núcleo. La red de Bragg funciona como un filtro que refleja una determinada longitud de onda de la luz guiada y deja pasar el resto de longitudes de onda. Inicialmente las fibras con redes Bragg surgieron en el ámbito de las telecomunicaciones pero rápidamente se investigó su gran potencial en el área de los sensores, dejando a un lado los sensores que cuantificaban cambios de intensidad en la última década del milenio pasado.

El avance en las investigaciones de nuevos materiales para la fabricación de fibras ópticas dio una nueva oportunidad a los SFO con base en los cambios de intensidad con la creación de las denominadas fibras ópticas plásticas<sup>1</sup>, pues son más resistentes a las fracturas por esfuerzos mecánicos y a los cambios de temperatura bruscos, además es más fácil multiplexar la luz que guían y son inmunes a interferencias electromagnéticas, a pesar de que presentan mayor atenuación a grandes distancias que sus contrapartes de vidrio. En los últimos años se ha intensificado el estudio de las fibras ópticas plásticas por su gran potencial en el campo de los sensores [7].

El objetivo de este trabajo de tesis consiste en el estudio teórico y experimental del cambio de intensidad de la luz guiada por una fibra óptica plástica<sup>2</sup> de índice escalonado, a causa de una compresión localizada.

---

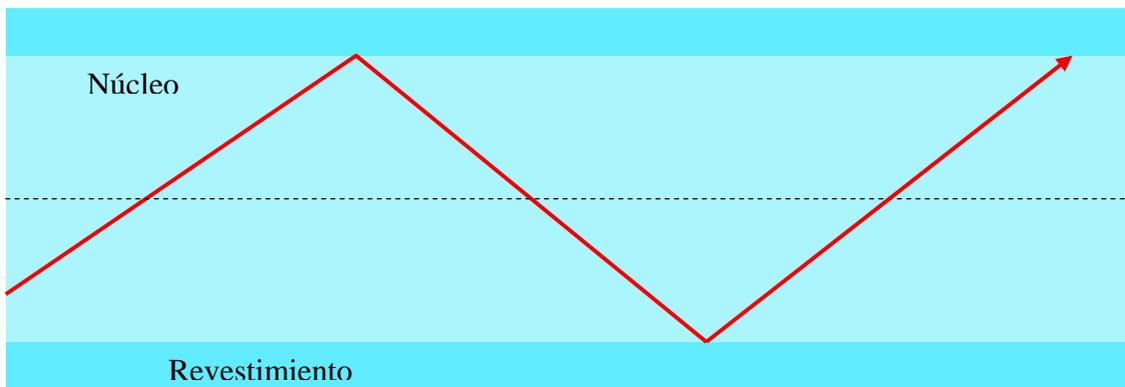
<sup>1</sup> A pesar de su nombre sus propiedades mecánicas no son estrictamente plásticas.

<sup>2</sup> No se volverá a usar la palabra plástica para referirse al tipo de fibra óptica estudiada en este trabajo porque puede causar confusión en cuanto a sus propiedades mecánicas. Se respeta esta denominación sólo por cuestiones bibliográficas.

En este capítulo se plantea y estudian los conceptos físicos aplicables al problema y se expone la teoría necesaria para resolver el problema.

## 1.1 Planteamiento del problema

Una fibra óptica (FO) es una guía de luz construida con materiales que permiten conducir la luz mediante reflexiones totales internas. La figura 1.1 ilustra una FO típica, el núcleo está hecho con un material transparente a la luz con un índice de refracción mayor que el correspondiente al recubrimiento. La línea roja representa un rayo de luz monocromática con una longitud de onda dentro del espectro de luz (390, 780 nm), longitud que es mucho menor que el diámetro de la FO (del orden de micrómetros a centímetros); lo anterior permite estudiar el proceso de transmisión de la luz por la FO con las leyes de la Óptica Geométrica (OG).



**Figura 1.1** Corte longitudinal de una fibra óptica típica.

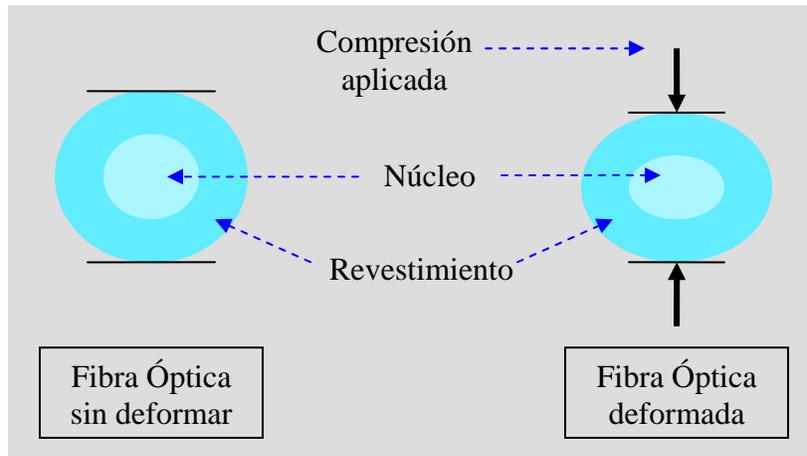
Para que el rayo de luz sea guiado completamente por la FO, todas las reflexiones del rayo en la frontera núcleo-revestimiento deben tener ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico, el cual, está determinado por los índices de refracción del núcleo y el revestimiento de la siguiente manera: [19]

$$\theta_c = \text{sen}^{-1} \left( \frac{n_r}{n_n} \right), \quad (1.1)$$

donde  $n_r$ ,  $n_n$  son los índices de refracción del revestimiento y del núcleo respectivamente. Gracias a la reflexión total interna, el rayo de luz no pierde intensidad en las reflexiones y como el núcleo de la FO está hecho de un material con una atenuación muy baja, se puede afirmar que la luz guiada no pierde su intensidad. A este tipo de fibras ópticas con núcleo y revestimiento se les conoce como fibras de índice escalonado.

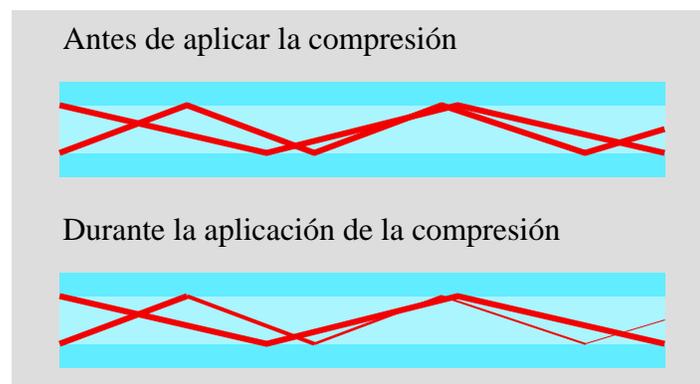
Supóngase que se guía luz de una fuente monocromática de intensidad constante mediante una FO de índice escalonado, la luz guiada realiza reflexiones totales internas y llega al otro extremo de la FO con la misma intensidad. Ahora supóngase que se aplica una compresión en un segmento de la superficie de la FO, véase figura 1.2, es indudable que la geometría de la FO cambia ya que se induce un estado de tensión dentro de la fibra que modifica su estructura. Este cambio altera el camino óptico que seguían los rayos guiados antes del esfuerzo, es decir, rayos que antes eran guiados con reflexiones totales internas ahora son guiados sólo con reflexiones “parciales”, en consecuencia se pierde luz en las reflexiones y por tanto

llegarán rayos al extremo opuesto de la fibra con menor intensidad. Al cesar la compresión, dependiendo de la magnitud de la compresión y de las propiedades mecánicas de la FO, la fibra regresará a su estado inicial o a un estado sin tensiones internas, en un tiempo denominado tiempo de recuperación.



**Figura 1.2** Cortes transversales de la fibra óptica antes y durante la aplicación de la compresión.

Lo anterior pone de manifiesto la factibilidad de construir un transductor de presión con FO, relacionando la magnitud de la compresión aplicada a la fibra con el cambio de intensidad de la luz guiada por ésta; lo interesante es preguntarse: ¿Se podrá expresar esta relación mediante una ecuación? Para responder esto es necesario indagar más en la física del problema. Lo primero que hay que establecer es el rol que juegan los diferentes materiales con que está hecha la FO de índice escalonado en el problema planteado. En principio el revestimiento funge sólo como frontera necesaria para realizar las reflexiones y el núcleo es el medio dónde viajan los rayos de luz, tanto los reflejados totalmente como los reflejados parcialmente, todos los rayos contribuyen a la magnitud de la intensidad en el extremo opuesto de la FO, ver figura 1.3.



**Figura 1.3** Rayos de luz que viajan por una fibra óptica antes y durante la aplicación de la compresión.

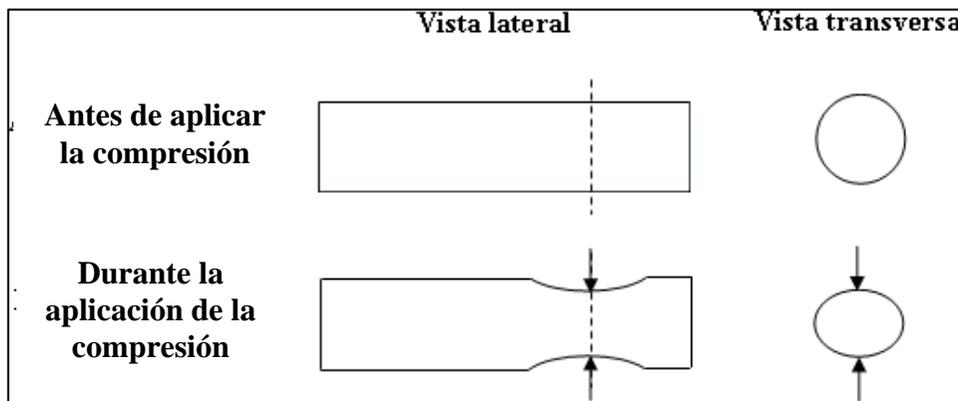
Si se toman las componentes a lo largo del eje de la FO de cada segmento de todos los rayos guiados, se tendrá un solo rayo equivalente viajando paralelo al eje de la fibra cuya intensidad será la suma de las intensidades de todos los rayos, tanto de los reflejados totalmente como de los reflejados parcialmente; entonces el problema se reduce a estudiar sólo como varía la intensidad de un rayo que viaja paralelo al eje de la FO al aplicar el esfuerzo externo. Este rayo equivalente viaja por el núcleo y no depende, al menos directamente, de la frontera núcleo-revestimiento ni del revestimiento, por lo cual, se puede

modelar la FO como hecha de un sólo material con índice de refracción constante e igual al del núcleo. El índice de refracción de un material se define como

$$n \equiv \frac{c}{v} = \frac{c}{\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}} = \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (1.2)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $\epsilon$  y  $\mu$  son la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética respectivamente.

La pregunta por resolver es: ¿Cómo varía la intensidad de este rayo equivalente, que viaja paralelo al eje de una FO con índice de refracción constante, al aplicar la compresión?

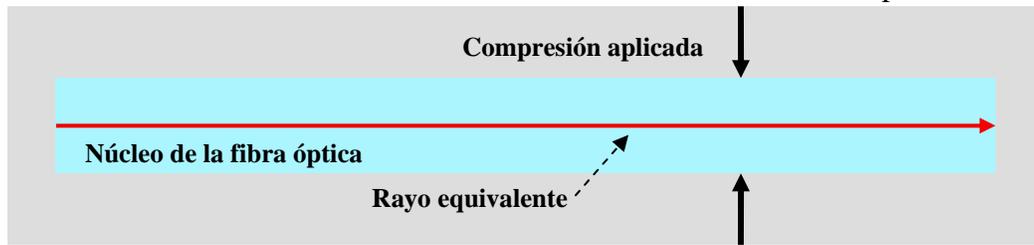


**Figura 1.4** Vistas longitudinal y transversal de una fibra óptica hipotética antes y durante la aplicación de la compresión.

Supóngase que se tiene una FO de índice de refracción constante, no magnetizable y libre de esfuerzos externos, entonces, al viajar un rayo de luz con intensidad constante paralelo al eje de ésta, el campo eléctrico del rayo polariza el material y la polarización permanece constante; pero si se aplica una compresión tal y como se muestra en la figura 1.4, la densidad de dipolos eléctricos dentro del elipsoide de deformación (elipse en la figura 1.4) será diferente a la densidad de dipolos en los otros puntos de la fibra, más aún, la densidad será diferente en cada dirección del elipsoide; por lo cual no se tendrá una constante dieléctrica que caracterice la FO sino que se tendrá un tensor dieléctrico.

Entonces el índice de refracción también cambia dentro del elipsoide y la FO debe caracterizarse con un tensor de índice de refracción. Pero ¿cómo afecta el cambio de índice de refracción a la intensidad del rayo guiado?, la respuesta se puede encontrar en la teoría de la Óptica Geométrica.

En resumen, el problema que se estudia en este trabajo es el comportamiento del cambio en la intensidad de la luz guiada por una FO de índice escalonado, a causa de compresiones “localizadas” y aplicadas perpendicularmente al eje de la FO, ver figura 1.5, variadas cuasiestáticamente. Se supone que el núcleo de la FO es isotrópico, homogéneo, no magnetizable y elástico; además se supone que la luz es monocromática, de frente de onda plano y de intensidad constante. Para resolver el problema primero hay que encontrar la relación entre el esfuerzo externo y el cambio de índice, y luego encontrar la relación entre el cambio de índice con el cambio de intensidad de la luz guiada.



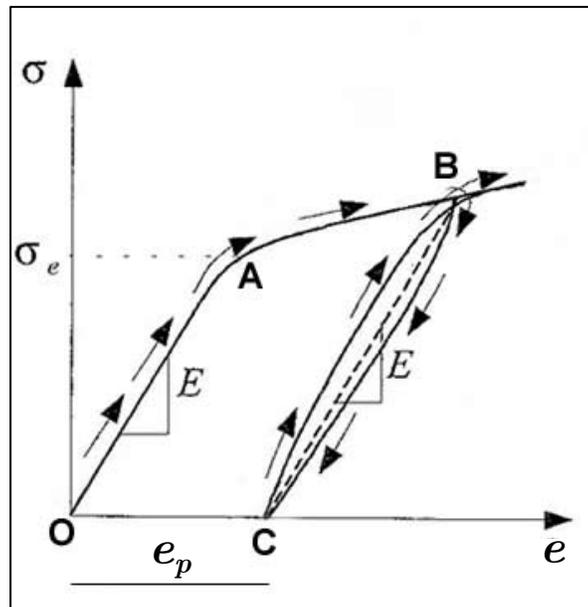
**Figura 1.5** Esquema del problema por resolver.

En la siguiente sección se estudia la teoría necesaria para establecer las dos relaciones mencionadas anteriormente teniendo en cuenta las hipótesis del problema.

## 1.2 Desarrollo teórico

### 1.2.1 Esfuerzos y deformaciones

La relación entre la compresión aplicada sobre la FO y la deformación que sufre es el objeto de atención en esta sección. Al aplicar el esfuerzo externo a la FO, en ésta se producirá un estado de “tensión”, es decir, dentro de la fibra habrá esfuerzos (fuerzas por unidad de área) que se opondrán a la deformación de la fibra; entonces, cuál es la relación entre los esfuerzos y la deformación de la FO al sufrir la compresión. Lo más sencillo es suponer que la relación es lineal o que la FO se comporta como un sólido elástico lineal. Cualquier deformación de un material a los esfuerzos, que no obedezca las leyes constitutivas de la elasticidad, se considera como una deformación inelástica.



**Figura 1.6** Curva esfuerzo-deformación para un sólido hipotético.

El diagrama mostrado en la figura 1.6 ilustra algunos de los conceptos básicos del estudio de la relación esfuerzo-deformación, en él se considera un sólido hipotético sometido a una tensión uniaxial ( $-\sigma$ ), mientras que su deformación  $e$  se representa por la deformación convencional definida como

$$e = (L - L_0) / L_0 \tag{1.3}$$

donde  $L$  es la longitud “instantánea” después de la compresión aplicada y  $L_0$  es la longitud original. Es decir, la deformación es una medida del cambio fraccional de la dimensión correspondiente.

El punto A señala el límite elástico  $\sigma_E$ , separa la curva esfuerzo-deformación en una región elástica y una región de deformación permanente o región plástica. Existen diferentes criterios para seleccionarlo, algunas veces se toma en el límite de proporcionalidad, en ocasiones se elige el punto para el cual la tensión produce una deformación permanente del 0.2%.

En la región elástica, una disminución de la tensión (descarga) da lugar a que la deformación se reduzca a lo largo de la misma línea, por tanto, en esta región existe una relación biunívoca esfuerzo-deformación. Para esfuerzos superiores a  $\sigma_E$ , el comportamiento deja de ser elástico y parte de la deformación no se recupera ante una descarga total (BC), apareciendo una deformación “permanente”<sup>3</sup> denominada deformación plástica  $e_p$ , que se observa en el punto C. Durante la descarga BC el comportamiento es aproximadamente elástico, lo mismo ocurre si se vuelve a aplicar un esfuerzo incremental (carga CB), pero al acercarse al punto B el comportamiento deja de ser elástico, como si el sólido recordara el máximo esfuerzo al cual había estado sometido previamente; este último fenómeno se conoce como histéresis mecánica. Por lo tanto, en la región plástica la relación esfuerzo-deformación depende de la historia de deformación del material.

Tanto en elasticidad como en plasticidad es común suponer condiciones isotérmicas y considerar a la temperatura como un parámetro, a pesar de que la temperatura tiene una influencia definitiva en el comportamiento del material. De igual modo, es una práctica común despreciar cualquier efecto que tuviera la velocidad de deformación en la curva de esfuerzo-deformación. Según esto, se supone que las deformaciones son independientes del tiempo y no se consideran fenómenos como la fluencia, tiempo de repuesta y tiempo de relajación [25].

Como se mencionó al inicio de esta sección lo más sencillo es suponer que la FO es un material elástico lineal, pero no sólo por lo sencillo es conveniente suponer esto, pues si el problema estudiado se desea ampliar para hacer un dispositivo sensor de presión, la FO no debe sufrir deformaciones permanentes porque quedaría inservible por lo tanto no es conveniente que la FO sea un material plástico. Aunque se puede suponer que la FO se utiliza sólo en su región elástica entonces la relación compresión y deformación de la fibra obedece las leyes constitutivas de la elasticidad lineal. Como en este trabajo sólo es de interés la respuesta mecánica de la FO dentro del límite elástico entonces se dará una breve exposición sobre la teoría de la elasticidad lineal, sus hipótesis y sus limitaciones.

La teoría de la elasticidad lineal supone como primera hipótesis que el material en estudio es un “medio continuo” y que las deformaciones que puede sufrir son muy pequeñas (infinitesimales), por lo cual, los desplazamientos  $\mathbf{u}$  de los “puntos materiales” y sus gradientes son muy pequeños, y no se puede diferenciar entre la configuración material y la configuración espacial [24], ver figura 1.7; en consecuencia, no hay distinción entre las coordenadas materiales y espaciales, es decir

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{X} + \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x} \approx \mathbf{X} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = 1. \quad (1.4)$$

<sup>3</sup> El carácter de permanente es en referencia a los tiempos de observación del fenómeno.

Además, como consecuencia, la densidad de la configuración espacial  $\rho_t \equiv \rho(\mathbf{x}, t)$  coincide con la densidad de la configuración material  $\rho_0 \equiv \rho(\mathbf{X}, 0)$  (que se supone conocida), y por lo tanto la densidad no es incógnita en problemas de elasticidad lineal.

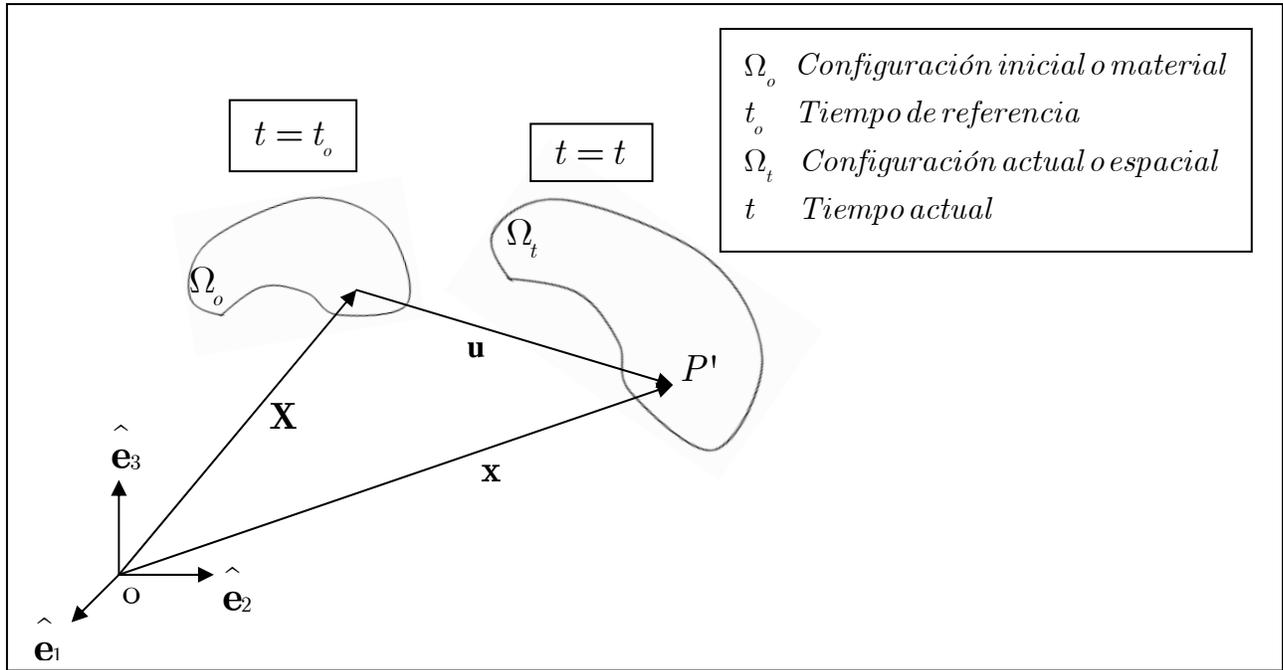


Figura 1.7 Configuraciones de un medio continuo.

Que los gradientes de los desplazamientos sean pequeños implica que no hay distinción entre los tensores material y espacial de deformación,  $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$  y  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  respectivamente, y coinciden con el tensor de deformaciones infinitesimales  $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ , esto es

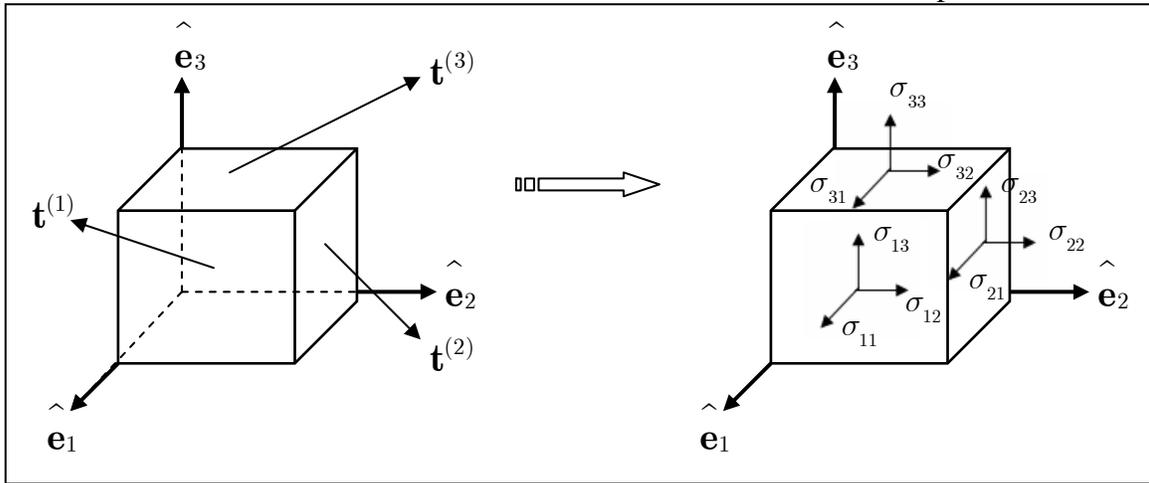
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) \approx \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}], \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right], \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Como segunda hipótesis, la teoría de la elasticidad lineal admite la existencia de un estado neutro en el cual las deformaciones y las tensiones son nulas. Como tercera hipótesis se establece que el proceso de deformación es isotérmico (la temperatura es constante a lo largo del tiempo) y adiabático (no hay pérdida ni ganancia de calor en todos los puntos del material). Esta última condición se puede escribir como

$$\left. \begin{aligned} \int_V \rho c(\mathbf{x}, t) dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= 0 \quad \forall V \quad o \\ \rho c(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \forall \mathbf{x}, t, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

donde  $c(\mathbf{x}, t)$  es la función que describe en forma espacial el calor generado por las fuentes internas por unidad de masa y unidad de tiempo, y  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  es el vector que describe en forma espacial el flujo de calor por unidad de superficie.





**Figura 1.8** Representación gráfica de las componentes del tensor de esfuerzos.

En consecuencia, el número de constantes distintas en  $\mathbf{C}$  se reduce de  $3^4=81$  a 36. La ley de Hooke se puede expresar sólo con estas 36 constantes, para esto, se impone un sistema de doble asignación de índices a las componentes de los esfuerzos y las deformaciones, de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma_{11} = \sigma_1 & \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_4 \\ \sigma_{22} = \sigma_2 & \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_5 \\ \sigma_{33} = \sigma_3 & \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_6 \end{array} \right\} \quad (1.12)$$

$$\left. \begin{array}{ll} e_{11} = e_1 & 2e_{23} = 2e_{32} = e_4 \\ e_{22} = e_2 & 2e_{13} = 2e_{31} = e_5 \\ e_{33} = e_3 & 2e_{12} = 2e_{21} = e_6 \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

Entonces

$$\sigma_K = C_{KM} e_M, \quad K, M \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad (1.14)$$

donde  $C_{KM}$  representa las 36 constantes elásticas distintas.

Por otra parte, para los materiales elásticos lineales, la energía interna específica  $u(\mathbf{x}, t)$  (energía interna/unidad de masa) y la densidad de energía interna  $u^*(\mathbf{x}, t)$  (energía interna/unidad de volumen) son tales que  $u^*(\mathbf{x}, t) = \rho_0 u(\mathbf{x}, t)$ , en consecuencia

$$\text{como } \rho \frac{du}{dt} \approx \rho_0 \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{d(\rho_0 u)}{dt} = \frac{du^*}{dt} \Rightarrow \rho \frac{du}{dt} = \frac{du^*}{dt}.$$

Sustituyendo (1.6) en la ecuación de la energía en forma local,

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \frac{du^*}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho_0 c - \nabla \cdot \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{d\mathbf{e}}{dt},$$

donde  $\mathbf{d}$  es el tensor velocidad de deformación<sup>4</sup>, se tiene

$$\frac{du^*}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{d\mathbf{e}}{dt}. \quad (1.15)$$

Entonces, al usar la ley de Hooke en la ecuación (1.15) e imponiendo las condiciones  $u^*(\mathbf{x}, t_0) = 0$  y  $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t_0) = 0 \quad \forall \mathbf{x}$  con  $t_0$  el tiempo inicial, se obtiene el potencial elástico:

$$u^*(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} (\mathbf{e} : \mathbf{C} : \mathbf{e}) = \frac{1}{2} e_{ij} C_{ijkl} e_{kl} \quad (1.16)$$

Este potencial proporciona más simetrías a  $\mathbf{C}$ , a saber,

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad \text{o} \quad C_{KM} = C_{MK}. \quad (1.17)$$

Como consecuencia la matriz de constantes elásticas  $C_{KM}$  es simétrica:

$$C_{KM} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Por lo tanto, el número de constantes elásticas distintas se reduce a sólo 21, sin embargo, al considerar clases particulares de materiales elásticos, el problema se puede simplificar aún más, lo cual se traduce en una reducción del número de constantes elásticas distintas de  $C_{KM}$ . En particular, los materiales elásticos que son isotrópicos en sus propiedades mecánicas, como se supone que es la FO de este trabajo, tienen la simetría más alta, pues no presentan direcciones privilegiadas, es decir, son simétricos por todas partes; y como consecuencia sus propiedades elásticas son descritas por sólo 2 constantes elásticas distintas, lo cual se demuestra a continuación.

Las propiedades físicas de un sólido isotrópico son, por definición, independientes de la elección del sistema de ejes coordenadas (por suposición ortonormales). En particular, las propiedades elásticas, dadas

---

<sup>4</sup> En la ecuación respectiva a esta nota, se utiliza la notación simbólica de la operación doble producto punto ( $:$ ), en notación de índices, un doble producto punto se expresa con dos pares de índices repetidos en un término. Por ejemplo, en la ecuación  $a_{ij} = b_{ilm} c_{lmj}$  los índices  $l, m$  aparecen repetidos esto significa que cada uno tomará todos los valores de su intervalo y que los términos resultantes se suman.

por  $C_{ijkl}$ , deben ser invariantes para cualquier cambio de ejes (rotación o simetría con respecto a un plano o punto). Las únicas cantidades que no son afectadas por estas transformaciones ortogonales son un escalar o el tensor unitario  $\delta_{ij}$ , por tanto, cada componente  $C_{ijkl}$  se puede expresar como una combinación lineal de productos externos de  $\delta_{ij}$  pero debido a la simetría  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  sólo se pueden tener las siguientes combinaciones para los cuatro índices  $ijkl$ :

$$\delta_{ij}\delta_{kl}, \delta_{ik}\delta_{jl}, \delta_{il}\delta_{jk}. \quad (1.19)$$

Entonces, el tensor de constantes elásticas toma la forma

$$C_{ijkl} = \lambda_e \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik}\delta_{jl} + \mu_2 \delta_{il}\delta_{jk}, \quad (1.20)$$

donde  $\lambda_e, \mu_1, \mu_2$  son constantes. Pero la condición de simetría (1.17) demanda que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_e$  por lo cual

$$C_{ijkl} = \lambda_e \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_e (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (1.21)$$

La ecuación anterior implica que el comportamiento elástico lineal de un sólido isotrópico está especificado por sólo dos constantes independientes  $\lambda_e, \mu_e$ ; conocidas como **constantes de Lamé**, las cuales deben obtenerse experimentalmente.

Sustituyendo (1.21) en (1.7) se obtiene la **ecuación constitutiva para medios elásticos lineales isotrópicos** o **Ley de Hooke**

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \lambda_e \text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{1} + 2\mu_e \mathbf{e} \\ \sigma_{ij} &= \lambda_e e_{ll} \delta_{ij} + 2\mu_e e_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Con la ley de Hooke se tiene resuelta la primera parte del problema planteado, siempre y cuando la FO sea un material elástico lineal o se opere en su región elástica.

### 1.2.2 Efecto elasto-óptico

El tema a discutir en esta sección es la relación entre la deformación y el cambio en el índice de refracción del material. En el planteamiento del problema se expuso la física detrás de este fenómeno, todo se centra en el cambio de la densidad de dipolos eléctricos de la FO inicialmente isotrópica y homogénea, este cambio exige que la FO se caracterice por un tensor de índices de refracción que depende de la posición en el material, pues sólo donde hay deformación hay cambio en la densidad de dipolos, además debe depender de la magnitud del esfuerzo aplicado o de la deformación.

Para comenzar es conveniente estudiar las propiedades del tensor índice de refracción de un material anisotrópico ante estímulos eléctricos, no homogéneo, no conductor ( $\sigma = 0$ ) e isotrópicamente magnetizable (la permeabilidad magnética  $\mu$  es un escalar); todas estas características las posee la FO

después de aplicar la compresión. Las ecuaciones constitutivas electromagnéticas de este tipo de material son

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}, t), & \text{con } \mu, \varepsilon_{ij} \text{ constantes,} \\ D_i(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_{ij}(\mathbf{r})E_j(\mathbf{r}, t) & i, j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

donde  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor dieléctrico del material, el cual depende de la densidad de dipolos eléctricos que es función de la posición y depende de la dirección de aplicación del campo eléctrico. Entonces las densidades de energía eléctrica y magnética son

$$\left. \begin{aligned} \omega_e &\equiv \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi} E_i(\mathbf{r}, t) \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) E_j(\mathbf{r}, t), \\ \omega_m &\equiv \frac{1}{8\pi} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi} \mu(\mathbf{r}) H^2(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Si no hay cargas libres ni corrientes en el material entonces las ecuaciones de Maxwell rotacionales son

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Multiplicando (1.25) por  $\mathbf{H}$  con un producto punto se tiene

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Análogamente multiplicando (1.26) por  $\mathbf{E}$  se tiene

$$-\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Sumando las ecuaciones anteriores resulta

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} \right],$$

que se puede reescribir como

$$-c \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{H} = \varepsilon_{ij} \dot{E}_j E_i + \dot{B}_i H_i. \quad (1.27)$$

Ahora obsérvese que

$$\frac{\partial \omega_e}{\partial t} = \frac{\varepsilon_{ij}}{8\pi} \left[ E_i \dot{E}_j + E_j \dot{E}_i \right], \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} H_i \dot{B}_i. \quad (1.29)$$

Como los índices  $i, j$  son mudos<sup>5</sup> en (1.28) entonces se pueden intercambiar en el último término, con lo cual, se tienen dos resultados muy importantes:

Primero, se obtiene el teorema de conservación energía electromagnética, por simple sustitución de (1.28) y (1.29) en (1.27)

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad \text{con } \omega = \omega_e + \omega_m. \quad (1.30)$$

Segundo, como el intercambio de índices en (1.28) es independiente del valor del campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  entonces el tensor dieléctrico es simétrico, por lo cual, sólo tiene seis componentes distintos.

La simetría del tensor dieléctrico hace posible reducir la expresión de la densidad de energía eléctrica a una forma cuadrática

$$8\pi\omega_e = \varepsilon_{kl} E_k E_l = \varepsilon_{11} E_1^2 + \varepsilon_{22} E_2^2 + \varepsilon_{33} E_3^2 + 2\varepsilon_{12} E_1 E_2 + 2\varepsilon_{13} E_1 E_3 + 2\varepsilon_{23} E_2 E_3.$$

Como  $\omega_e$  siempre es positiva para cualquier vector  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  entonces la ecuación anterior representa un elipsoide, el cual siempre se puede transformar a su expresión en un sistema de ejes principales, es decir, existe un sistema de ejes coordenados  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  en el cual el elipsoide se escribe como

$$\varepsilon_{11} E_1^2 + \varepsilon_{22} E_2^2 + \varepsilon_{33} E_3^2 = 8\pi\omega_e.$$

En este sistema de “ejes dieléctricos principales” se tiene

$$D_1 = \varepsilon_{11} E_1, \quad D_2 = \varepsilon_{22} E_2, \quad D_3 = \varepsilon_{33} E_3, \quad (1.31)$$

$$8\pi\omega_e = \varepsilon_{11} E_1^2 + \varepsilon_{22} E_2^2 + \varepsilon_{33} E_3^2 = \frac{D_1^2}{\varepsilon_{11}} + \frac{D_2^2}{\varepsilon_{22}} + \frac{D_3^2}{\varepsilon_{33}}. \quad (1.32)$$

Reemplazando  $\{D_1/\sqrt{8\pi\omega_e}, D_2/\sqrt{8\pi\omega_e}, D_3/\sqrt{8\pi\omega_e}\}$  por las coordenadas cartesianas  $\{x, y, z\}$  en (1.32) se tiene

---

<sup>5</sup> En una ecuación escrita con notación de índices, se dice que un índice es mudo si aparece dos veces en un término de la ecuación. Por ejemplo, en la ecuación  $a_{ij}=b_{ik}c_{kj}$  el índice  $k$  es mudo.

$$\frac{x^2}{\varepsilon_{11}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{22}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{33}} = 1, \quad (1.33)$$

esta ecuación representa un elipsoide cuyos semiejes principales son iguales a las raíces cuadradas de las permitividades eléctricas en las direcciones de los ejes “dieléctricos” principales. Ahora, como se consideró que  $\mu \approx 1$  entonces

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1. \quad (1.34)$$

Superficie conocida como **elipsoide de índices de refracción**.

Se han expuesto los elementos necesarios para estudiar sin inconvenientes el llamado efecto elasto-óptico, la relación entre la deformación del material y el cambio en su índice de refracción. Esto fue estudiado, por primera vez, por el científico escocés Sir David Brewster, él observó que al aplicar un esfuerzo mecánico a un material isotrópico transparente éste pasa a ser anisotrópico[19].

El efecto elasto-óptico también se da en materiales que son anisotrópicos, en éstos al aplicar un esfuerzo cambian las componentes del tensor índice de refracción que caracteriza sus propiedades ópticas. El físico Friedrich Carl Alwin Pockels desarrolló un modelo teórico del efecto elasto-óptico para materiales anisotrópicos. Este modelo se basa en la teoría de la elasticidad lineal para establecer la relación esfuerzo-deformación, por lo cual, se tiene como hipótesis deformaciones pequeñas y no rotaciones locales del elipsoide de deformación; y para relacionar la deformación con los cambios en las propiedades ópticas propone una dependencia lineal.

Para exponer el modelo de Pockels se comienza con el elipsoide de índices de refracción del material anisotrópico, expresado de la forma:

$$N_{ij} x_i x_j = 1 \quad \text{con } i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.35)$$

donde el tensor  $N_{ij}$  tiene las siguientes componentes

$$[\mathbf{N}]_{ij} = N_{ij} = \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Como ya se dijo antes, las propiedades ópticas de un medio están representadas en el tensor índice de refracción y por lo tanto, en el elipsoide de índices de refracción. Entonces cualquier deformación del material modifica el elipsoide de índices, esta modificación se puede asociar a un tensor variación  $\Delta \mathbf{N}$  de  $\mathbf{N}$ . La teoría de Pockels propone que el tensor variación es directamente proporcional a la deformación, esto es

$$\Delta N_{ij} = P_{ijkl} e_{kl}, \quad (1.37)$$

siempre y cuando el material sea elástico y no piezoeléctrico, y el esfuerzo aplicado sea cuasiestático. Las componentes  $P_{ijkl}$  pertenecen al denominado **tensor elasto-óptico** o **de Pockels**.

Debido a la ley de Hooke generalizada,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl},$$

el tensor variación se escribe en función del tensor de esfuerzos como

$$\Delta N_{ij} = \pi_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (1.38)$$

donde el **tensor piezo-óptico**  $\pi_{ijkl}$  cumple con la siguiente ecuación

$$P_{ijmn} = \pi_{ijkl} C_{klmn}. \quad (1.39)$$

Entonces, en el estado de tensión del material, su elipsoide de índices de refracción toma la forma siguiente

$$\left( N_{ij} + \Delta N_{ij} \right) x_i x_j = \left( N_{ij} + P_{ijkl} e_{kl} \right) x_i x_j = \left( N_{ij} + \pi_{ijkl} e_{kl} \right) x_i x_j = 1. \quad (1.40)$$

En consecuencia, los índices de refracción  $(n_1, n_2, n_3)$  a lo largo de los ejes principales están relacionados con los eigenvalores del tensor  $(N_{ij} + \Delta N_{ij})$  de la siguiente forma

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_i}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_0^2} + \lambda_i}} = \frac{n_0}{\sqrt{1 + n_0^2 \lambda_i}} \simeq n_0 \left[ 1 - \frac{n_0^2}{2} \lambda_i \right], \quad (1.41)$$

donde  $\Lambda_i$  son los eigenvalores de  $(N_{ij} + \Delta N_{ij})$  y  $\lambda_i$  representa los eigenvalores de  $\Delta N_{ij}$ . La ecuación (1.41) proporciona toda la información concerniente a la relación entre la deformación y el cambio de índice de refracción, pero al igual que en la teoría de la elasticidad, las componentes del tensor de Pockels están determinadas por la estructura del sólido en estudio, es de cuarto rango, pero observando (1.37) y (1.39) es claro que las constantes distintas de este tensor se pueden representar con un tensor de segundo orden

$$[P_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & P_{16} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & P_{26} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} & P_{36} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} & P_{46} \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & P_{55} & P_{56} \\ P_{61} & P_{62} & P_{63} & P_{64} & P_{65} & P_{66} \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \quad (1.42)$$

Por lo tanto, el tensor de Pockels queda reducido a sólo 36 componentes distintas. Para un material isotrópico, que posee la más alta simetría, sus propiedades elasto-ópticas quedan completamente descritas con sólo dos constantes distintas ( $p_{11}, p_{12}$ ), la reducción del número de constantes diferentes es idéntica a la realizada en la sección 1.2.1 de este capítulo, y el tensor toma la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{12} & P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \text{ con } A = \frac{(P_{11} - P_{12})}{2}. \quad (1.43)$$

### 1.2.3 Óptica Geométrica

El rayo equivalente que se definió en la sección 1.1 sigue las leyes constitutivas de la Óptica Geométrica. En la sección actual se exponen algunos elementos de esta teoría, sus hipótesis y sus consecuencias, con el objetivo de dejar claro cómo se utilizan sus resultados para establecer una relación entre el cambio del tensor de índice de refracción con el cambio de intensidad del rayo equivalente, al aplicar la compresión a la FO. Con esto queda completa la teoría necesaria para construir un modelo para el problema planteado en esta tesis.

La Óptica Geométrica (OG) se puede construir a partir de la teoría Electromagnética Clásica estableciendo algunas hipótesis, en particular en este trabajo son de interés las hipótesis concernientes a los materiales no homogéneos<sup>6</sup>, no conductores e isotrópicos<sup>7</sup> ( $\varepsilon$  y  $\mu$  constantes). Para comenzar se escriben las ecuaciones de Maxwell para materiales:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\rho_l(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_l(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

La primera hipótesis se refiere a la onda luminosa, ésta se supone monocromática y formada por campos que oscilan armónicamente en el tiempo y se expresan matemáticamente como

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

donde  $\mathcal{E}(\mathbf{r})$  y  $\mathcal{H}(\mathbf{r})$  son funciones vectoriales complejas que dependen de la posición. La parte real de las expresiones anteriores representa los campos de la onda luminosa.

<sup>6</sup> El núcleo de la fibra óptica es homogéneo en principio pero al aplicar un esfuerzo externo localizado pierde homogeneidad en la región donde se aplica el esfuerzo.

<sup>7</sup> Al final de esta sección se verá cómo adaptar los desarrollos hechos en esta sección suponiendo anisotropía.

La segunda hipótesis se hace sobre el material en el que se propaga la onda, pues es indispensable establecer las relaciones que describen el comportamiento del material bajo la influencia de los campos, conocidas como relaciones constitutivas electromagnéticas. En general, estas ecuaciones son muy complicadas, pero si los campos son armónicos temporales, y el material es lineal e isotrópico y está en reposo o en un movimiento muy lento, éstas toman una forma simple

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{r}) &= \sigma(\mathbf{r})\mathcal{E}(\mathbf{r}), \\ \mathcal{D}(\mathbf{r}) &= \varepsilon(\mathbf{r})\mathcal{E}(\mathbf{r}), \\ \mathcal{B}(\mathbf{r}) &= \mu(\mathbf{r})\mathcal{H}(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

En las ecuaciones anteriores la función  $\mathcal{J}(\mathbf{r})$  es la densidad de corriente,  $\sigma(\mathbf{r})$  es la conductividad específica,  $\varepsilon(\mathbf{r})$  es la permitividad eléctrica y  $\mu(\mathbf{r})$  es la permeabilidad magnética del material.

El material de interés en este trabajo carece de cargas libres y corrientes libres, por lo cual, al sustituir la expresión de los campos y usando las ecuaciones constitutivas en (1.44) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{r})\mathcal{E}(\mathbf{r})] &= 0, \\ \nabla \cdot [\mu(\mathbf{r})\mathcal{H}(\mathbf{r})] &= 0, \\ \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu(\mathbf{r})\mathcal{H}(\mathbf{r}), \\ \nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon(\mathbf{r})\mathcal{E}(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

Las ecuaciones anteriores pueden simplificarse más tomando como tercera hipótesis que las fuentes de los campos que conforman la onda luminosa están alejadas muchas longitudes de onda, con lo cual, la expresión más general de los campos tiene la forma

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}(\mathbf{r})e^{ik_0\mathcal{S}(\mathbf{r})}, \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{h}(\mathbf{r})e^{ik_0\mathcal{S}(\mathbf{r})}, \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

donde  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  son funciones vectoriales complejas de la posición,  $\mathcal{S}(\mathbf{r})$  es una función escalar real de la posición y representa el camino óptico, y  $k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda_0$  con  $c$  la velocidad de la luz en el vacío y  $\lambda_0$  la longitud de onda en el vacío.

Sustituyendo (1.48) en (1.47) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} [\varepsilon(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) + \mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{r})] \left( \frac{-1}{ik_0} \right) &= \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}), \\ [\mu(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mu(\mathbf{r})] \left( \frac{-1}{ik_0} \right) &= \mu(\mathbf{r})\mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}), \\ \left[ \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}) - \frac{i\omega}{c} \mu(\mathbf{r})\mathbf{h}(\mathbf{r}) \right] \left( \frac{1}{ik_0} \right) &= \mathbf{e}(\mathbf{r}) \times \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}), \\ \left[ \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{c} \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r}) \right] \left( \frac{1}{ik_0} \right) &= \mathbf{h}(\mathbf{r}) \times \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

Es necesaria una hipótesis más para obtener la OG de medios materiales isotrópicos, la cual establece el límite de validez de la OG. La hipótesis supone que la longitud de onda es mucho más pequeña que las

longitudes características del sistema en estudio (si  $\lambda_0 \rightarrow 0$ ,  $k_0 \rightarrow 0$ ), aplicando este límite al conjunto de ecuaciones anterior resulta

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.50)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.51)$$

$$\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r})\mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.52)$$

$$\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.53)$$

Sustituyendo (1.52) en (1.53) se obtiene la **ecuación eikonal**

$$|\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r})|^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (1.54)$$

donde  $n(\mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r})}$  es el índice de refracción del material,  $\mathcal{S}(\mathbf{r})$  es la **función eikonal** y las superficies dadas por  $\mathcal{S}(\mathbf{r}) = \text{constante}$  son llamadas **superficies de onda geométricas** o **frentes de onda geométricos**.

La ecuación eikonal es la base de la OG para medios materiales isotrópicos pues de ella se pueden deducir todas sus leyes, además, tiene la ventaja de ser deducida de las leyes del electromagnetismo. A continuación se deduce la ley de intensidad de la OG, la cual es de suma importancia en este trabajo.

Para materiales lineales e isotrópicos, las densidades de energía eléctrica y magnética están dadas respectivamente por

$$\left. \begin{aligned} w_e(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \\ w_m(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Con la expresión de los campos dada por (1.45) y (1.48) y suponiendo que el medio material no es absorbente (de energía) entonces, los promedios temporales de las densidades de energía eléctrica y magnética son, respectivamente

$$\left. \begin{aligned} \langle w_e(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{16\pi} \mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}^*(\mathbf{r}), \\ \langle w_m(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{\mu(\mathbf{r})}{16\pi} \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}^*(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

Pero sustituyendo la expresión de  $\mathbf{e}^*(\mathbf{r})$  de (1.53) y la expresión de  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  de (1.52) en (1.56) se tiene

$$\langle w_e(\mathbf{r}) \rangle = \langle w_m(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{16\pi} \mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot [\mathbf{h}^*(\mathbf{r}) \times \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r})]. \quad (1.57)$$

Es decir, dentro del límite de la OG resulta que los promedios temporales de las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales. Además, con estos campos se tiene como resultado, para el promedio temporal del vector de Poynting,

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[\mathbf{e}(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}^*(\mathbf{r})],$$

que se transforma, por el uso de (1.52), en

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi\mu(\mathbf{r})} \{ [\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}^*(\mathbf{r})] \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}) - [\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r})] \mathbf{e}^*(\mathbf{r}) \}.$$

Expresión que se reescribe, sustituyendo (1.50) y (1.56), como

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{2c}{n^2(\mathbf{r})} \langle w_e(\mathbf{r}) \rangle \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}). \quad (1.58)$$

Representando la densidad de energía total como  $\langle w(\mathbf{r}) \rangle = \langle w_e(\mathbf{r}) \rangle + \langle w_m(\mathbf{r}) \rangle$  y observando que la ecuación eikonal permite definir

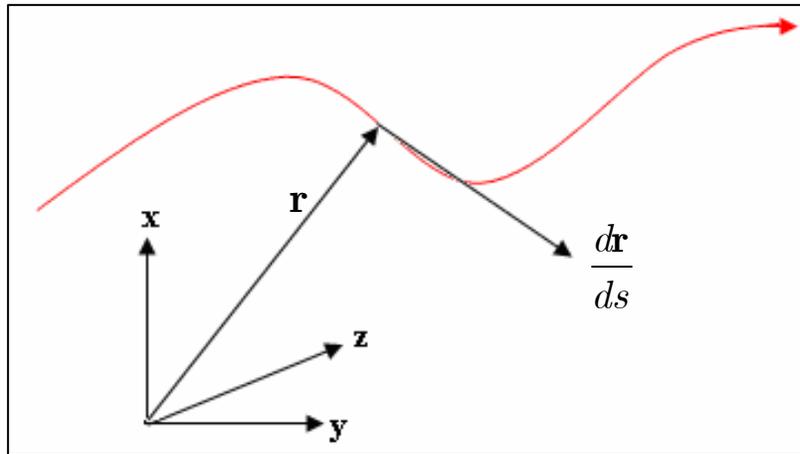
$$\hat{\mathbf{s}} \equiv \frac{\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} = \frac{\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r})}{|\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r})|}, \quad (1.59)$$

entonces (1.58) y la relación  $n(\mathbf{r}) \equiv c / v(\mathbf{r})$  muestran que

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = v(\mathbf{r}) \langle w(\mathbf{r}) \rangle \hat{\mathbf{s}}. \quad (1.60)$$

Por lo tanto, el promedio temporal del vector de Poynting tiene la misma dirección que la normal al frente de onda geométrico y su magnitud es igual al producto del promedio temporal de la densidad de energía con la velocidad de la onda luminosa monocromática en el medio  $[v(\mathbf{r})]$ .

*El desarrollo anterior permite definir los **rayos de luz** de la OG, como las trayectorias ortogonales a los frentes de onda geométricos. Los cuales, para materiales isotrópicos, coinciden en dirección con la dirección del promedio temporal del vector de Poynting.*



**Figura 1.9** Descripción matemática de la trayectoria de un rayo de luz.

Sea  $\mathbf{r}(s)$  el vector posición de los puntos de un rayo y que depende de su longitud de arco  $s$ , ver figura 1.9, entonces la ecuación eikonal se transforma en

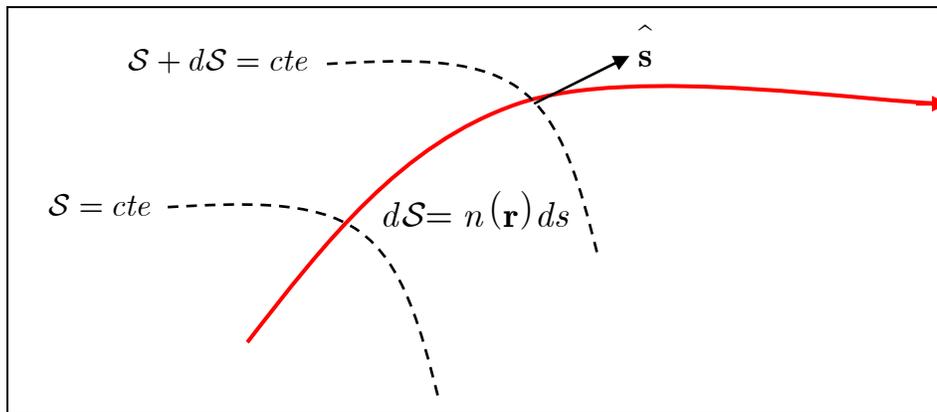
$$n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}). \quad (1.61)$$

La ecuación (1.61) permite observar claramente porque la función  $\mathcal{S}(\mathbf{r})$  se identificó como el camino óptico, pues si se consideran dos frentes de onda  $\mathcal{S}(\mathbf{r}) = cte$  y  $\mathcal{S}(\mathbf{r}) + d\mathcal{S}(\mathbf{r}) = cte$  entonces

$$\frac{d\mathcal{S}}{ds} = \nabla \mathcal{S} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = n(\mathbf{r}), \quad (1.62)$$

o en forma integral

$$\int_{s_1}^{s_2} n ds = \mathcal{S}(s_2) - \mathcal{S}(s_1).$$



**Figura 1.10** Representación gráfica de la relación entre los frentes de onda y el camino óptico.

Recuérdese que la intensidad de una onda electromagnética, en particular una onda de luz, se define como la norma del promedio temporal del vector de Poynting, es decir,

$$I(\mathbf{r}) = \left| \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \right|.$$

Ahora, suponiendo que el material tiene las propiedades de no absorber luz<sup>8</sup> y no tener fuentes de luz, propiedades que según la definición anterior pueden expresarse mediante una ley de conservación como

$$\nabla \cdot (\hat{\mathbf{I}}\mathbf{s}) = 0, \quad (1.63)$$

entonces sustituyendo (1.49) en la ecuación anterior se obtiene

<sup>8</sup> En realidad la fibra óptica utilizada absorbe luz, esto se cuantifica con el factor de atenuación, que resulta ser de 0.18 dB/m a  $\lambda=640\text{nm}$ . Este valor es despreciable para la longitud de fibra óptica utilizada en el experimento del problema planteado (aproximadamente 10 cm); por lo tanto, la hipótesis se cumple.

$$\nabla^2 \mathcal{S}(\mathbf{r}) + \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \ln \left( \frac{I(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \right) = 0. \quad (1.64)$$

Obsérvese el siguiente resultado: Sea  $A(\mathbf{r})$  una función escalar que depende de la posición, entonces

$$\frac{dA(\mathbf{r})}{ds} = \nabla A(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

pero usando (1.61) se tiene

$$\frac{dA(\mathbf{r})}{ds} = \frac{\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \cdot \nabla A(\mathbf{r}).$$

De lo cual se define el siguiente operador

$$\frac{d}{ds} \equiv \frac{\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \cdot \nabla \quad (1.65)$$

Utilizando (1.65) en (1.64) e integrando a lo largo del rayo, de un punto en  $s_1$  a un punto en  $s_2$ , se tiene

$$\frac{I(s_2)}{I(s_1)} = \frac{n(s_2)}{n(s_1)} \text{Exp} \left( - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 \mathcal{S}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} ds \right), \quad (1.66)$$

que es una expresión para la razón de las intensidades en cualesquiera dos puntos de un rayo, la denominada **ley de intensidad de la óptica geométrica**.

Dado que el problema se reduce al estudio de un rayo equivalente que viaja paralelo al eje principal de la FO, la anisotropía de la FO que se produce al comprimirla queda descartada del proceso de traslado del rayo equivalente, porque sólo existe una dirección de interés para el estudio del problema. Por lo tanto, con la ley de intensidad de la OG se tiene todo lo necesario para establecer cómo cambia la intensidad del rayo equivalente al aplicar una compresión a la FO.

## Capítulo 2

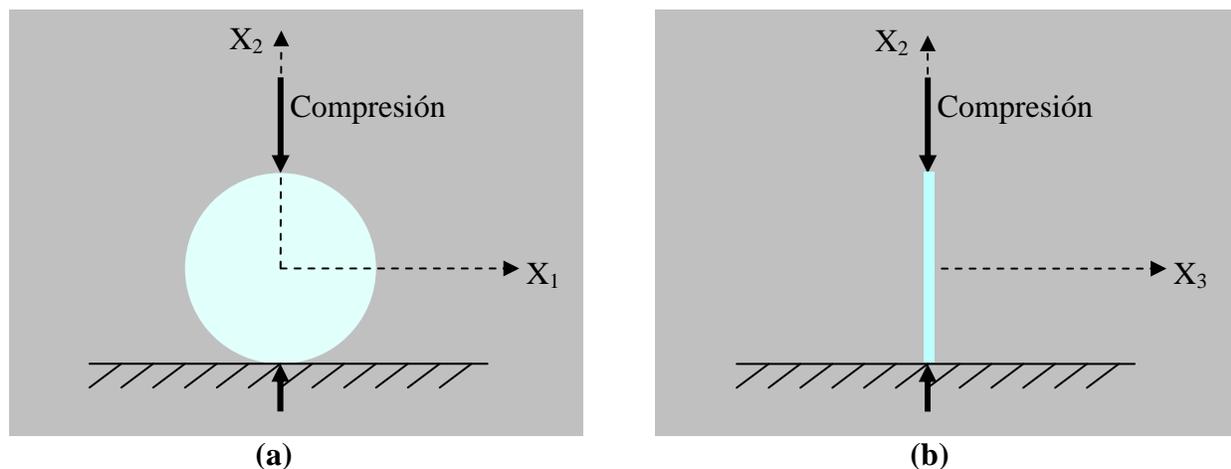
# MODELO TEÓRICO, SOLUCIÓN NUMÉRICA Y EXPERIMENTO

En el capítulo anterior se planteó el problema a resolver en este trabajo y se expuso la teoría necesaria para construir un modelo teórico del problema. En el presente capítulo se presenta el modelo que describe cualitativamente y cuantitativamente el problema, con este modelo se realiza una solución teórica del problema planteado y se compara con el experimento correspondiente, lo que permite comprobar la veracidad del modelo y las limitaciones del mismo.

Tanto los resultados teóricos del modelo como los resultados del experimento se analizan a lo largo de este capítulo, no sin antes exponer los correspondientes métodos de solución y experimentación.

### 2.1 Modelo teórico

Recuérdese que se estudia el cambio en la intensidad de la luz guiada por una FO de índice escalonado, producido por una compresión, aplicada cuasiestáticamente y perpendicular al eje de la FO. Se supone que el núcleo de la FO es isotrópico, homogéneo, no magnetizable y elástico; además se supone que la luz es monocromática, de frente de onda plano y de intensidad constante.



**Figura 2.1** (a) Corte transversal de la sección de FO donde se aplica la compresión, y (b) corte longitudinal de la misma sección.

La figura 2.1 muestra el plano transversal de la FO donde se aplica la compresión y un sistema de ejes coordenados. Los esfuerzos inducidos en la FO esencialmente se encuentran contenidos dentro de una lámina circular con un espesor casi nulo comparado con la longitud total de la FO, y las deformaciones a lo largo del eje  $X_3$  (normal al plano transversal) son muy pequeñas comparadas con las deformaciones a lo largo de los otros ejes coordenados. Entonces

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Pero como la compresión es aplicada paralela al eje  $X_2$  entonces  $\sigma_{12} = \sigma_{11} = 0$ , y de acuerdo a la ley de Hooke para un material isotrópico en términos de los módulos elásticos del material, ver apéndice A, el tensor deformación se expresa en función del esfuerzo  $\sigma_{22}$  como

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -\sigma_{22}\nu/Y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}/Y & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{22}\nu/Y \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

De acuerdo a lo visto en el capítulo 1, al aplicar la compresión, la FO pierde su isotropía alrededor del punto de aplicación, es decir, dentro de la lámina mostrada en la figura 2.1, y se caracteriza por un tensor de índices de refracción dado por

$$\mathbf{N} + \mathbf{P} : \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1/n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{12} & P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -\sigma_{22}\nu/Y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}/Y & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{22}\nu/Y \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

donde  $A = (P_{11} - P_{12})/2$  y  $n_0$  es el índice de refracción de la FO sin deformar<sup>1</sup>. Entonces, los índices de refracción a lo largo de los ejes principales dentro de la lámina deformada son

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_i}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_0^2} + \lambda_i}} \simeq n_0 \left[ 1 - \frac{n_0^2}{2} \lambda_i \right], \quad \text{con } i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.4)$$

donde  $\Lambda_i$  son los eigenvalores de  $(\mathbf{N} + \mathbf{P} : \mathbf{e})$  y  $\lambda_i$  representa los eigenvalores de  $(\mathbf{P} : \mathbf{e})$  enlistados a continuación:

$$\lambda_1 = e_{33}p_{11} + e_{11}p_{11}p_{12} + e_{22}p_{12}$$

<sup>1</sup>. Hay que destacar que en la ecuación (2.3) se abusa de la notación simbólica del doble producto punto (:), ya que el tensor de Pockels está expresado en su forma matricial, es decir, está reducido a dos índices elementos del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ; mientras que el tensor de deformaciones tiene dos índices elementos del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Esto se hace así con el fin de visualizar las componentes del tensor de Pockels. Más adelante se expresará este doble producto punto correctamente.

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( e_{11}p_{11} + e_{22}p_{11} + e_{11}p_{12} + e_{22}p_{12} + 2e_{33}p_{12} - \sqrt{\begin{aligned} &(e_{11}^2 p_{11}^2 + e_{12}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{11}^2 + e_{22}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}^2 p_{11}p_{12} \\ &- 2e_{12}^2 p_{11}p_{12} + 4e_{11}e_{22}p_{11}p_{12} - 2e_{22}^2 p_{11}p_{12} \\ &+ e_{11}^2 p_{12}^2 + e_{12}^2 p_{12}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{12}^2 + e_{22}^2 p_{12}^2) \end{aligned}} \right)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left( e_{11}p_{11} + e_{22}p_{11} + e_{11}p_{12} + e_{22}p_{12} + 2e_{33}p_{12} + \sqrt{\begin{aligned} &(e_{11}^2 p_{11}^2 + e_{12}^2 p_{11}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{11}^2 + e_{22}^2 p_{11}^2 \\ &- 2e_{11}^2 p_{11}p_{12} - 2e_{12}^2 p_{11}p_{12} + 4e_{11}e_{22}p_{11}p_{12} \\ &- 2e_{22}^2 p_{11}p_{12} + e_{11}^2 p_{12}^2 + e_{12}^2 p_{12}^2 - 2e_{11}e_{22}p_{12}^2 + e_{22}^2 p_{12}^2) \end{aligned}} \right)$$

El eigenvalor  $\lambda_3$  y las ecuaciones (2.2) y (2.4) proporcionan el valor del índice de refracción a lo largo del eje  $X_3$  dentro de la lámina deformada para las diferentes compresiones. Con esta información se propone una función continua para el índice de refracción a lo largo de toda la FO que depende del esfuerzo<sup>2</sup> paralelo al eje  $X_2$  dada por

$$n(z, \sigma_{22}) = n_0 - [dn(\sigma_{22})] \text{Exp} \left( - \left( \frac{z - z_p}{a} \right)^2 \pi [dn(\sigma_{22})]^2 \right) \text{ con } dn(\sigma_{22}) = \frac{n_0^3}{2} \lambda_3(\sigma_{22}), \quad (2.5)$$

donde  $z$  es la posición a lo largo del eje  $X_3$ ,  $z_p$  es el punto donde se aplica la compresión y  $a$  es un parámetro que ajusta la dimensión de la vecindad del punto de aplicación de la compresión.

La función anterior es gaussiana y permite aproximar de manera suave la forma en que varía el índice de refracción en la vecindad del punto de aplicación de la compresión y converge lejos de este punto al valor del índice de refracción de la FO sin deformar.

Finalmente, sustituyendo la ecuación (2.5) en la ley de intensidad, ecuación (1.66), se obtiene la forma en que cambia la intensidad del rayo equivalente al someter la FO a la compresión. Ahora es cuestión de comprobar la eficiencia de este modelo contra el experimento correspondiente, para lo cual hay que hablar de un material específico para el núcleo de la FO, pues las constantes elásticas y las constantes de Pockels son diferentes para cada material, y después obtener la solución con el modelo.

## 2.2 Solución numérica

En esta sección se resuelve de forma numérica el problema planteado, se usan las características del núcleo de una FO de índice escalonado enlistadas en la tabla 2.1. Los datos se tomaron de la hoja de especificaciones técnicas del PMMA<sup>3</sup> fabricado por PLEXIGLAS®.

Material	Polimetacrilato de metilo
Índice de refracción ( $n_0$ )	1.491
Modulo de Young ( $Y$ )	3.0303 GPa

<sup>2</sup> Recuérdese que las magnitudes de los esfuerzos inducidos en la FO son iguales a las magnitudes de las compresiones aplicadas a la FO.

<sup>3</sup> Polymethy methacrylate (Polimetacrilato de metilo).

Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.37
Constantes de Pockels ( $P_{11}, P_{12}$ )	0.121, 0.270

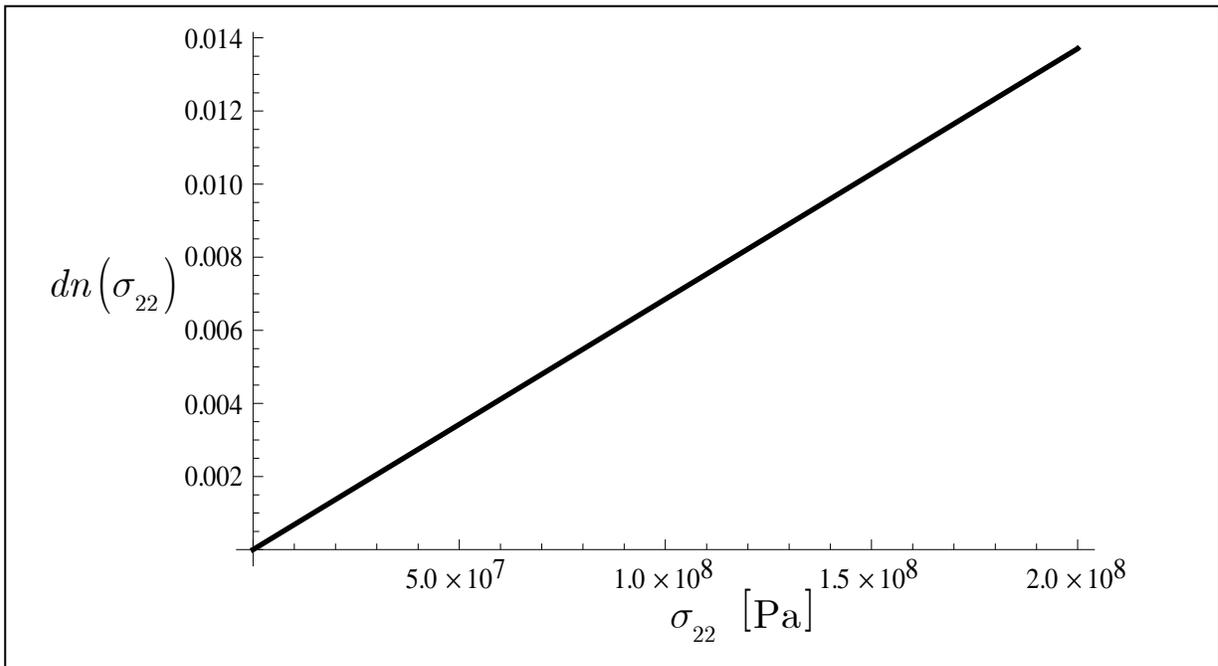
**Tabla 2.1** Características del núcleo de la fibra óptica.

Todos los cálculos y gráficas presentadas en esta sección se hicieron con el programa Wolfram Matemática 7.0.

En la sección anterior se enlistaron los eigenvalores de  $(\mathbf{P} : \mathbf{e})$ , para calcularlos se realizó el doble producto punto dando una doble asignación de índices al tensor de deformación, tal y como se hizo en la sección 1.3, con la finalidad de reducir la operación al siguiente producto punto:

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{12} & P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{pmatrix}.$$

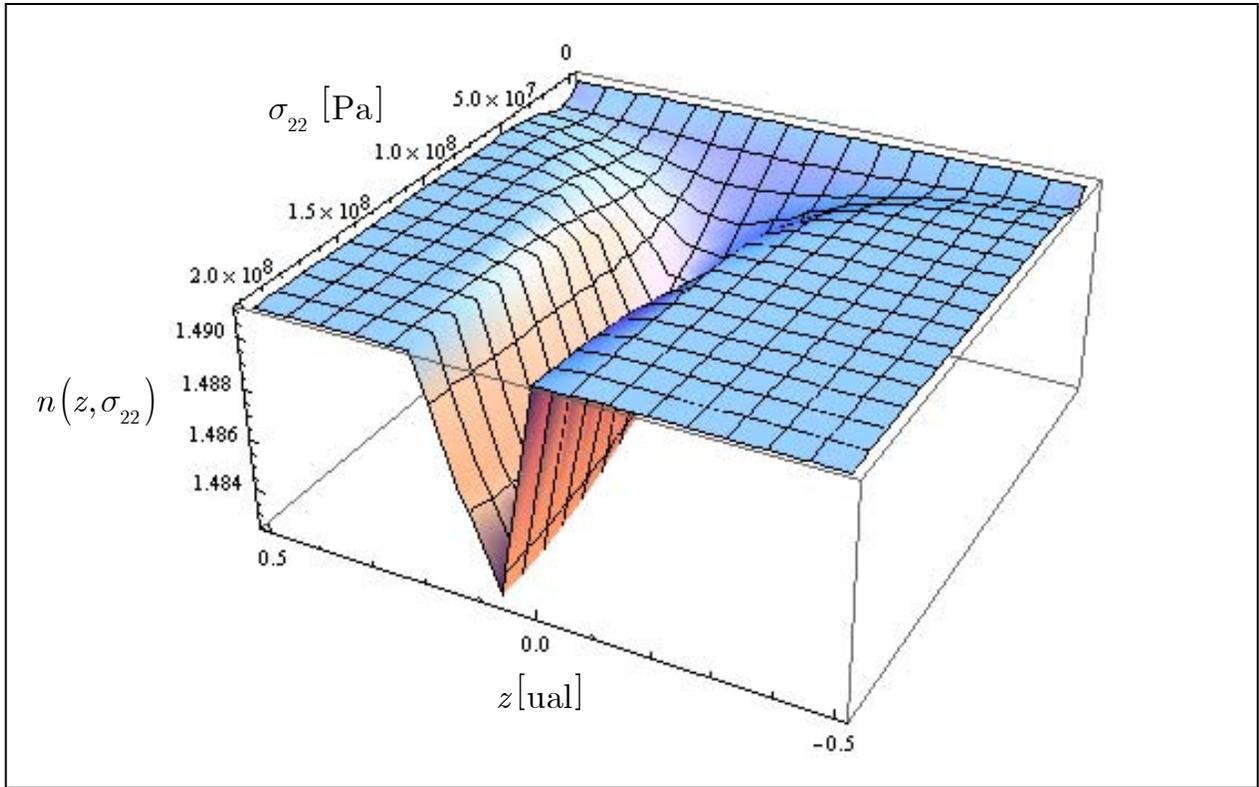
Con la reducción anterior es sencillo calcular los eigenvalores  $\lambda_i$  de la matriz resultante. Ahora, por la ecuación (2.4), es sólo de interés para el modelo el eigenvalor  $\lambda_3$  con el cual queda definida la función  $dn(\sigma_{22})$  cuya gráfica, evaluada hasta un esfuerzo de  $2 \times 10^8$  Pa, se presenta a continuación.



**Figura 2.2** Gráfica de la función  $dn(\sigma_{22})$ .

Por lo cual, el cambio en el índice de refracción en la dirección del eje  $X_3$  dentro de la lámina deformada, dado por la función  $dn(\sigma_{22})$ , es lineal.

La figura 2.3 es la gráfica de la ecuación (2.5) con  $z$  y  $\sigma_{22}$  como variables. El origen del sistema coordenado está en el punto de aplicación del esfuerzo. La linealidad de la función  $dn(\sigma_{22})$  se puede observar en el plano  $z = z_p$ . Además, se puede apreciar como el ancho de la gaussiana se reduce conforme aumenta la magnitud del esfuerzo.



**Figura 2.3** Gráfica de la función índice de refracción:  $n(z, \sigma_{22})$ , la variable  $z$  se expresa en unidades arbitrarias de longitud (ual)<sup>4</sup>.

Con la función índice de refracción propuesta, ecuación (2.5), se tiene parte de la información necesaria para resolver la integral que aparece en la ley de intensidad aplicada al problema planteado:

$$\frac{I(z_p, \sigma_{22})}{I(z_0, 0)} = \frac{n(z_p, \sigma_{22})}{n(z_0, 0)} \text{Exp} \left( - \int_{z_0}^{z_p} \frac{\nabla^2 \mathcal{S}(z, \sigma_{22})}{n(z, \sigma_{22})} dz \right). \quad (2.6)$$

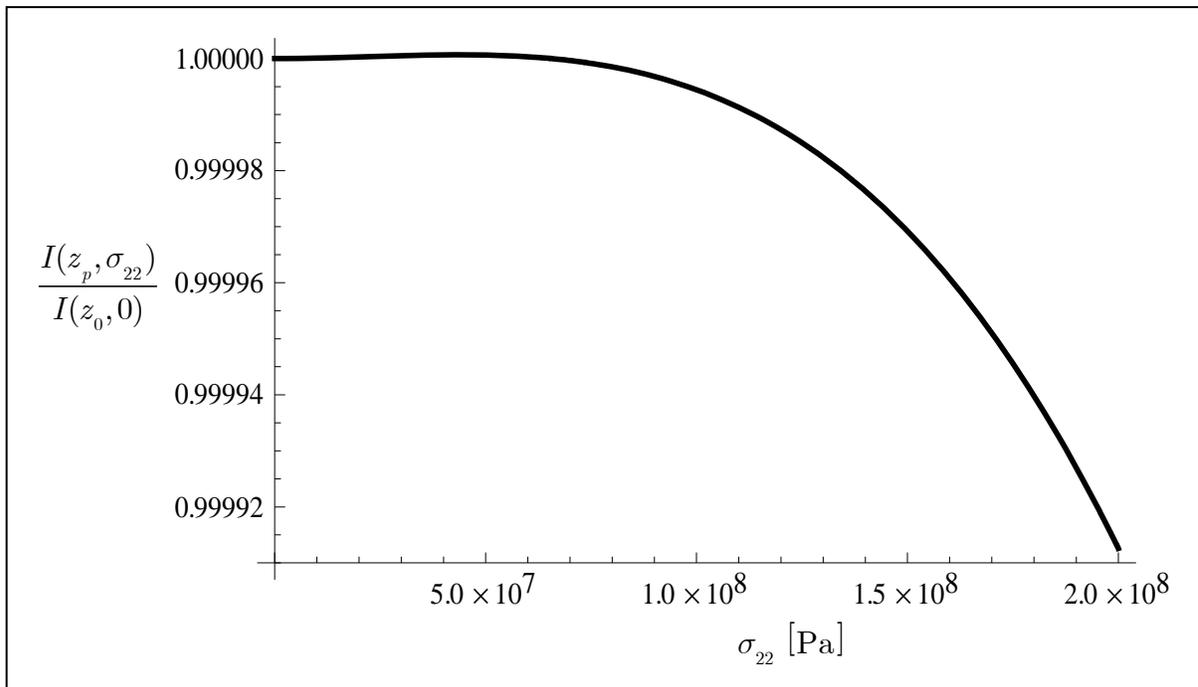
<sup>4</sup> El parámetro  $a$  también tiene unidades arbitrarias de longitud y deben ser iguales a las unidades de  $z$ , recuérdese que este parámetro sirve para ajustar el ancho de la gaussiana, aunque lo que tiene sentido físico es la razón  $(z - z_p)/a$ .

En la ecuación anterior,  $z_0$  es el punto donde entra la luz a la FO,  $I(z_0, 0)$  es la intensidad de luz que hay en  $z = z_0$  cuando la FO no está comprimida, de hecho esta intensidad es la misma para toda  $z$  al estar la FO libre de esfuerzos porque se supone que la FO es un medio que transporta la luz sin pérdidas en esta condición. Entonces la ecuación (2.6) proporciona la razón entre la intensidad en el punto donde se aplica la compresión y la intensidad inicial (intensidad de la luz que entra a la FO).

Recuérdese que se está trabajando con el rayo equivalente cuya dirección es a lo largo del eje  $X_3$  por tanto la función eikonal  $\mathcal{S}(z, \sigma_{22})$  se expresa como:

$$\mathcal{S}(z, \sigma_{22}) = n(z, \sigma_{22}) \hat{e}_3 \cdot (z \hat{e}_3) = n(z, \sigma_{22}) z. \quad (2.7)$$

Finalmente, con las ecuaciones (2.5) y (2.7) se tiene todo lo necesario para resolver numéricamente la ecuación (2.6), cuya solución proporciona la siguiente gráfica, pero antes se enlistan los valores de las variables que tienen que ver con las dimensiones de la FO y que se usaron para el cálculo:  $z_0 = -10$ ,  $z_p = 0$ ,  $a = 0.001$ .



**Figura 2.4** Resultado numérico de la razón entre la intensidad en el punto donde se aplica la compresión y la intensidad inicial.

Entonces, la solución numérica dice que el cambio de la razón  $I(z_p, \sigma_{22})/I(z_0, 0)$  con el esfuerzo tiene una variación muy pequeña para esfuerzos menores que  $1 \times 10^8$  Pa, y para esfuerzos entre  $1.4 \times 10^8$  Pa y  $2.0 \times 10^8$  Pa la variación se puede aproximar con una recta de pendiente negativa. Por lo tanto, el comportamiento del problema planteado es decaimiento asintótico, sin embargo, el cambio de la razón  $I(z_p, \sigma_{22})/I(z_0, 0)$  es del orden de  $10^{-5}$ .

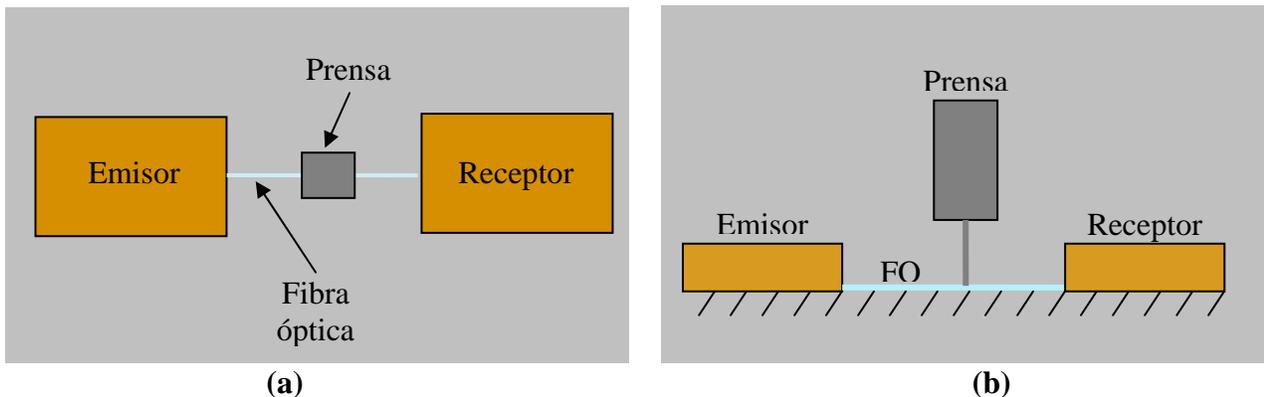
## 2.3 Experimento

El objetivo de esta sección es presentar el diseño del experimento que se hizo para comprobar la efectividad del modelo teórico, los resultados obtenidos y el análisis de estos. Además, se presenta un par de experimentos para determinar las propiedades elásticas de la FO utilizada, lo cual es muy importante pues toda la teoría esfuerzo-deformación utilizada depende de la hipótesis de elasticidad.

### 2.3.1 Compresión y cambio de intensidad

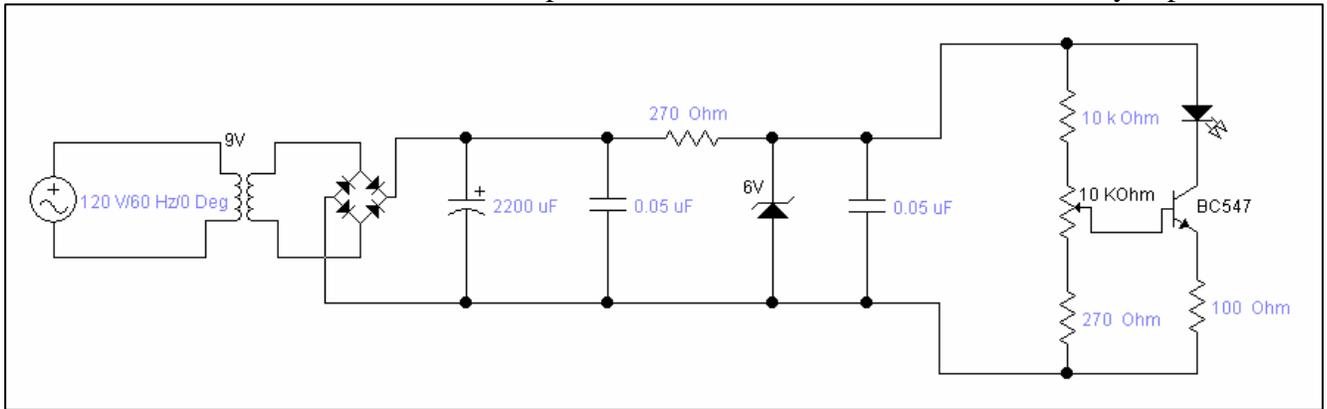
La figura 2.5 muestra el esquema del dispositivo que sirve para medir el cambio de intensidad de un haz de luz que viaja por una FO debido a la aplicación de un esfuerzo externo localizado en la FO. Este dispositivo consta de cuatro partes principales:

- Emisor. Su función es producir una fuente de luz cuasi-monocromática y de intensidad constante. Utiliza un LED de alta intensidad acoplado a uno de los extremos de la FO.
- Fibra Óptica (FO). Recibe la compresión. Es de tipo índice escalonado con núcleo de polimetacrilato de metilo y revestimiento de polímero fluorado. Una parte de la FO está cubierta con una funda de PVC suave, con la finalidad de proteger el revestimiento de la compresión directa.
- Prensa. Dispositivo que permite ejercer un esfuerzo localizado a la FO de forma controlada y cuantificada.
- Receptor. Circuito que utiliza un detector de luz acoplado a uno de los extremos de la FO para cuantificar la intensidad de la luz que viaja por ésta.



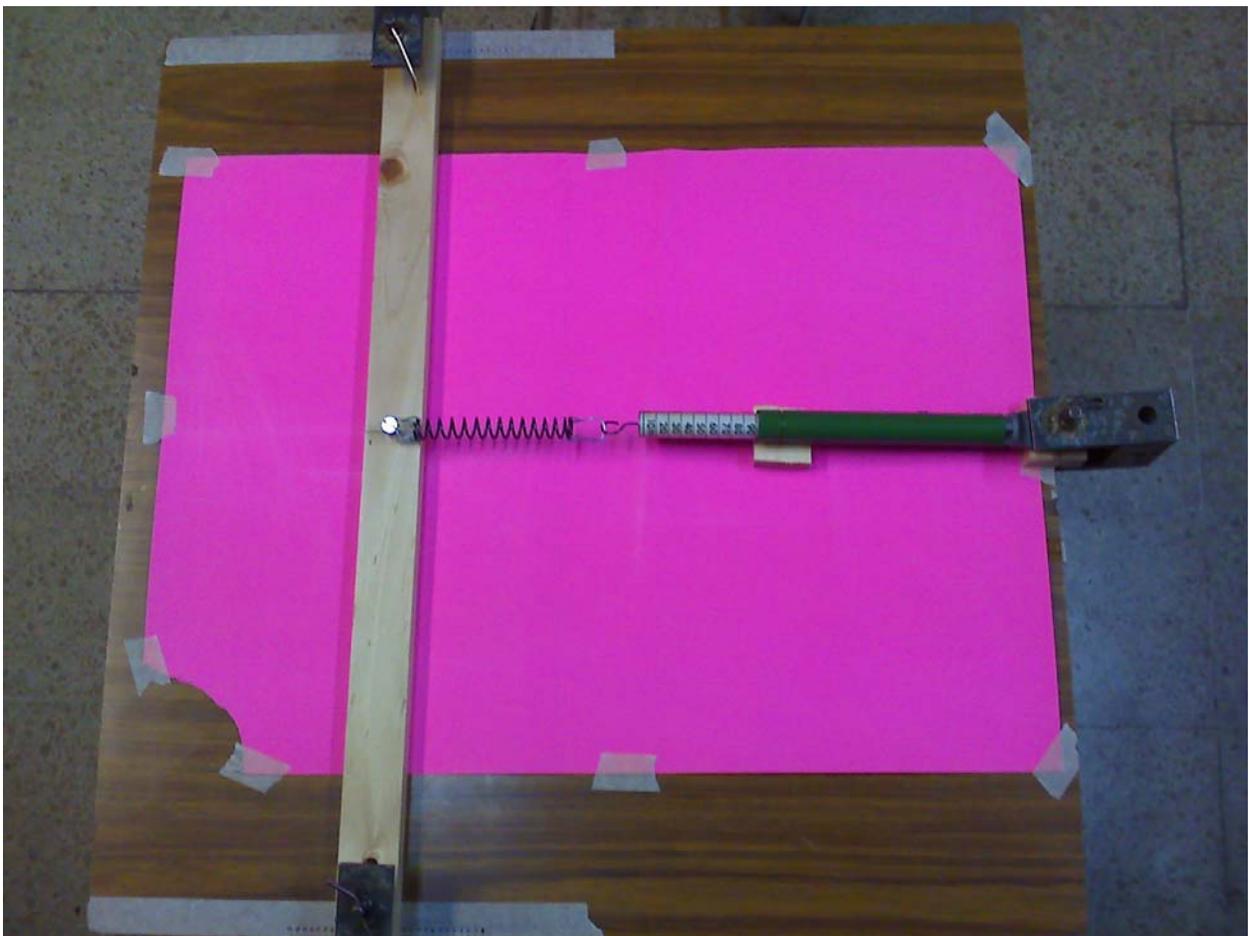
**Figura 2.5** Esquema del dispositivo para cuantificar el cambio de intensidad causado por la compresión sobre la FO. (a) Vista superior y (b) vista lateral.

El emisor es un circuito que utiliza un LED de alta intensidad con una longitud de onda pico de 650 nm, figura 2.6. El circuito permite controlar la cantidad de corriente que pasa por el LED con el potenciómetro conectado a la base del transistor, y de esta manera, se controla la intensidad inicial que entra en la FO. Además, la parte izquierda del circuito, ver figura 2.6, se diseñó para garantizar estabilidad en la alimentación eléctrica y reducir al mínimo el ruido en el LED.

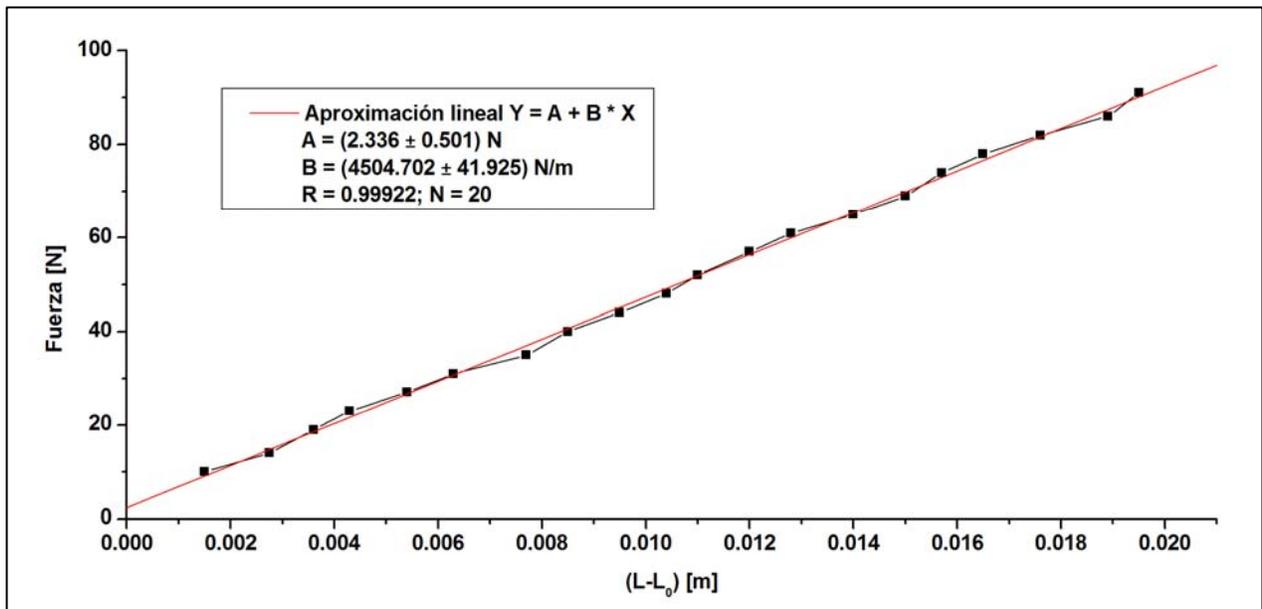


**Figura 2.6** Circuito emisor de luz con intensidad constante.

La prensa funciona con un resorte de compresión cuya constante elástica se midió experimentalmente, para lo cual se montó el arreglo experimental mostrado en la figura 2.7, los resultados se presentan en la figura 2.8 con una gráfica de fuerza vs. cambio de longitud. El resorte se comprime con un tornillo de 16 hilos por pulgada es decir con un avance por vuelta de 1.5 mm, este resorte empuja un vástago con un diámetro de 3.20 mm que aplica una compresión localizada, cuantificada y controlada a la FO.



**Figura 2.7** Arreglo experimental para medir la constante elástica del resorte de la prensa.



**Figura 2.8** Gráfica de fuerza aplicada al resorte contra cambio de longitud de este.

El diseño de la prensa evita que el vástago gire a causa del giro del tornillo con lo cual se prevé un desgaste de la FO por fricción. Esto se logra con una esfera colocada entre la base del vástago y un cilindro que recibe la compresión del resorte, ver figura 2.9 (b).



(a)

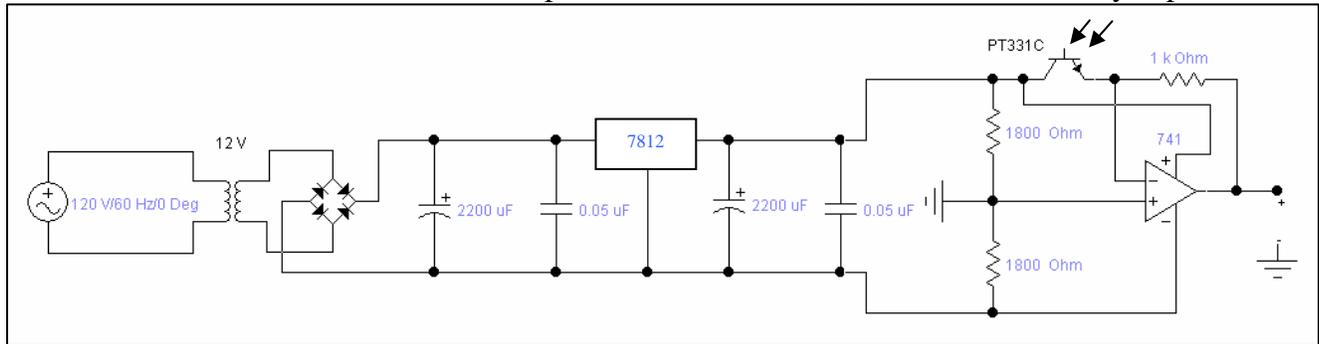


(b)

**Figura 2.9** (a) Prensa para ejercer una compresión localizada sobre la FO, (b) piezas internas de la prensa.

El diseño del circuito receptor se muestra en la figura 2.10, destaca el fototransistor PT333C que transforma linealmente la intensidad de la luz captada en corriente eléctrica. La primera parte del circuito, de izquierda a derecha en la figura, genera una fuente de voltaje continua de 12V que alimenta al fototransistor y al amplificador operacional, este último se utiliza en configuración de amplificador inversor<sup>5</sup>. El voltaje de salida del circuito es directamente proporcional al voltaje del fototransistor que depende de la intensidad de luz recibida por este.

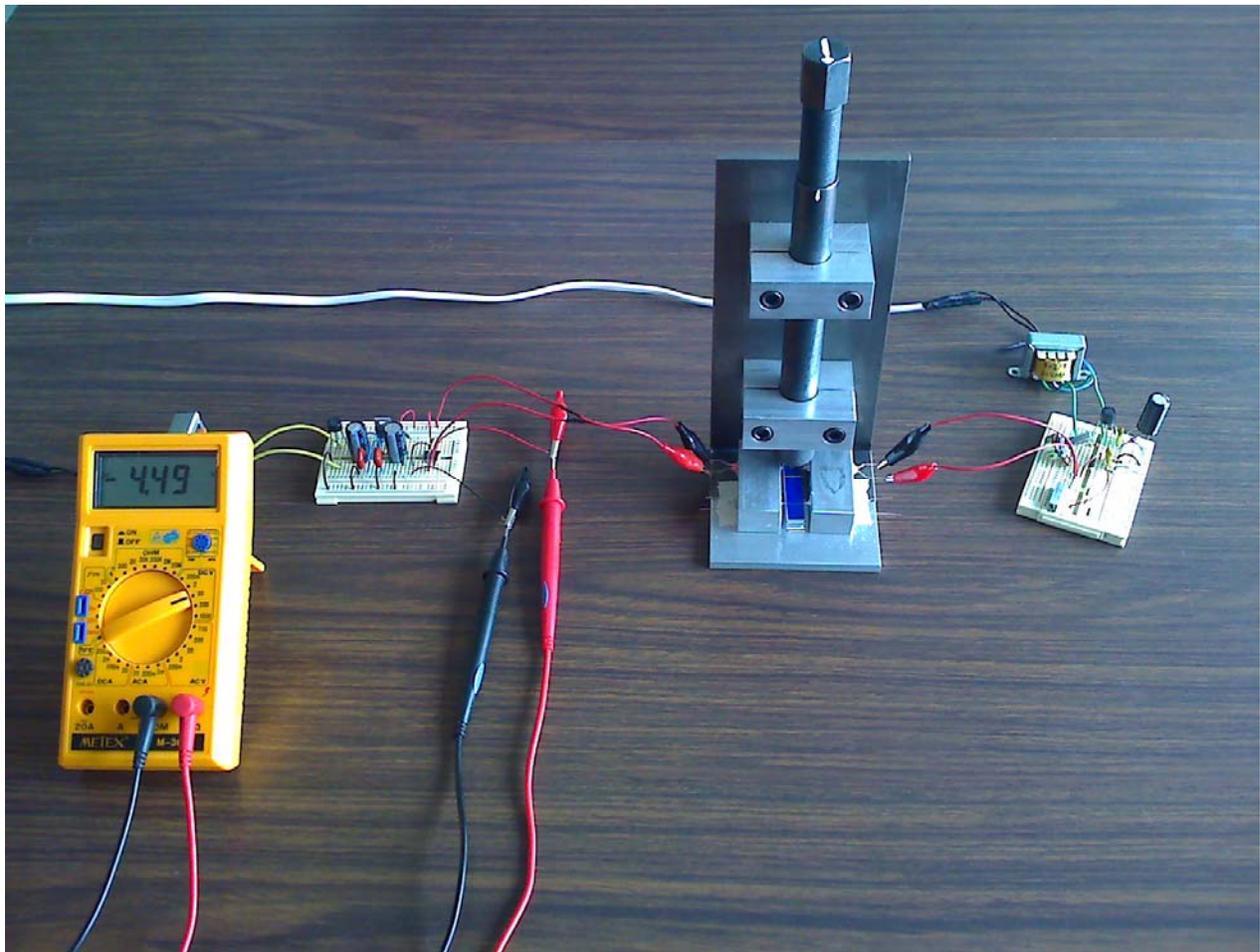
<sup>5</sup> En realidad es un convertor corriente a voltaje  $v = -I_{ft} R_f$ , en este caso  $v = -10^3 I_{ft}$  y por el signo (-) es un inversor.



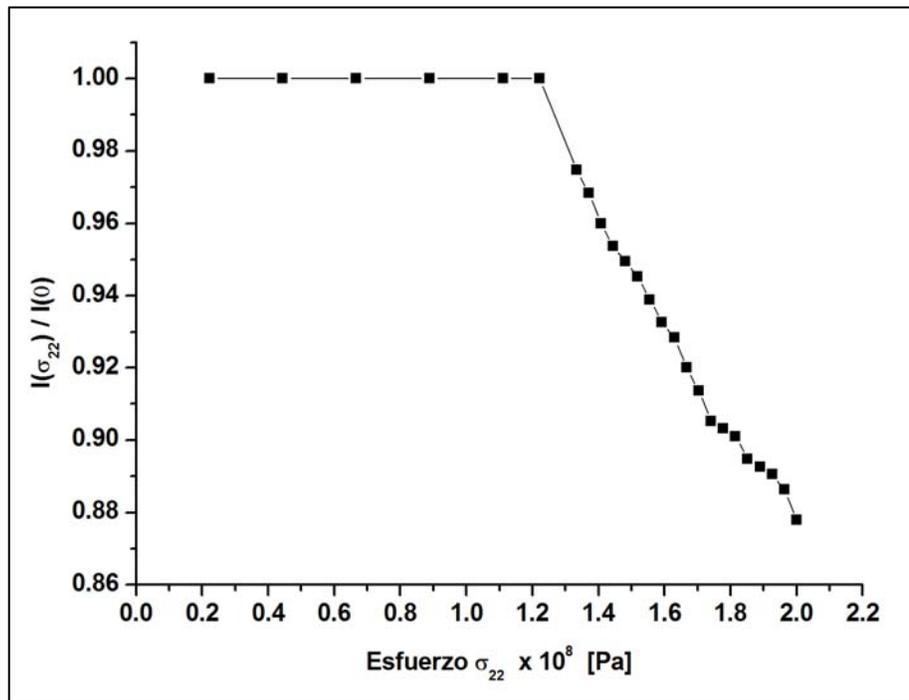
**Figura 2.10** Esquema del circuito receptor.

El experimento consistió en aplicar compresiones localizadas, controladas y cuasiestáticas a la FO tal y como se planteó el problema teóricamente en la sección anterior. En la figura 2.11 se muestra una fotografía del montaje experimental. Se midió el voltaje a la salida del circuito receptor para cada compresión aplicada, el cual es directamente proporcional a la intensidad de luz captada por el fototransistor.

Para comparar los datos obtenidos del experimento con la solución teórica, se graficó la razón entre la intensidad para una compresión dada y la intensidad inicial ( $I(\sigma_{22})/I(0)$ ), figura 2.12.

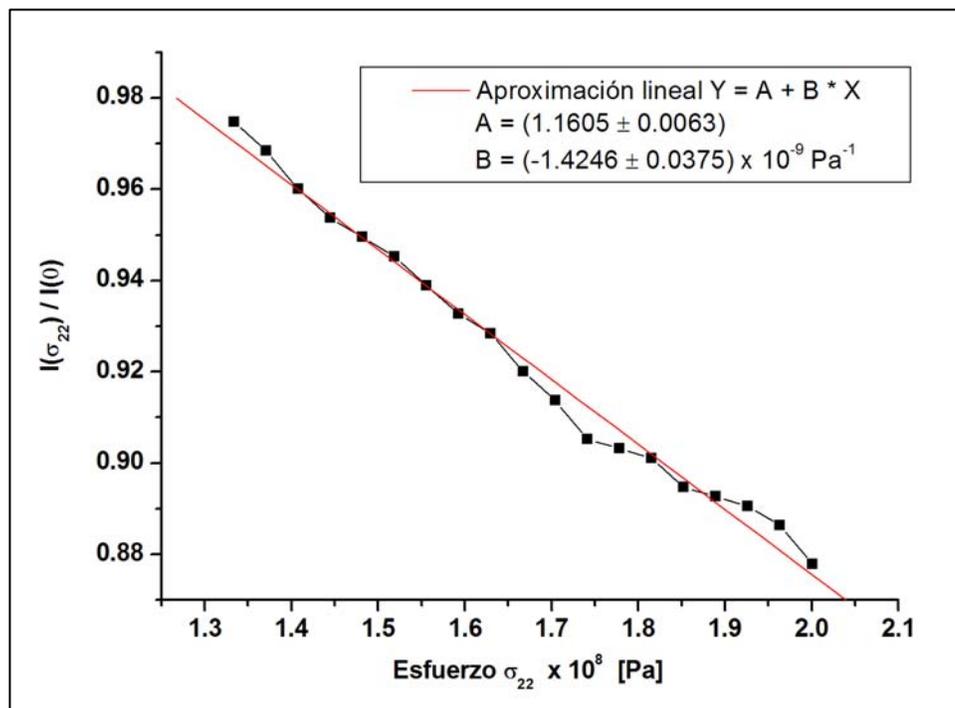


**Figura 2.11** Montaje experimental.



**Figura 2.12** Resultados experimentales del problema planteado.

De los resultados presentados en la figura 2.12 se observa que no hay cambio en la intensidad al someter la FO a compresiones menores que 1.3 GPa, es decir, en este intervalo de esfuerzos el detector no es lo suficientemente sensible, lo cual determina una región de “no operación práctica” para el detector diseñado. Para compresiones mayores que 1.3 GPa, se observa un decaimiento casi lineal, de hecho en la figura 2.13 se presenta una aproximación lineal para estos datos con un factor de correlación lineal  $R = 0.9942$ .



**Figura 2.13** Aproximación lineal de los datos experimentales.

Cualitativamente, la teoría predice muy bien el resultado experimental, pues para compresiones menores que 1.2 GPa se tiene un comportamiento asintótico a la unidad en la variable dependiente, y para compresiones mayores que 1.4 GPa, se tiene un decaimiento aproximadamente lineal; y el intervalo de 1.2 a 1.4 GPa no se puede decir como es el comportamiento. Sin embargo, el cambio en la variable dependiente predicho por la teoría es tres órdenes de magnitud más chico que el cambio medido experimentalmente.

La diferencia entre la solución teórica y el resultado experimental se analiza en la siguiente sección de este capítulo, para terminar esta sección se exponen los experimentos realizados para estudiar la elasticidad de la FO utilizada y los correspondientes resultados.

### 2.3.2 Propiedades elásticas de la fibra óptica

La FO seleccionada para realizar este trabajo tiene núcleo de Polimetacrilato de metilo (PMMA por sus siglas en inglés, polymetil metacrylate) y revestimiento de polímero fluorado, ambos materiales son considerados como plásticos en la literatura, pero como se explicó en la sección 1.2.1 estos tienen una región elástica. El objetivo de esta sección es presentar los experimentos que se hicieron para medir el módulo de Young y el módulo cortante de la FO con esfuerzos dentro de su límite elástico.

El PMMA a veces llamado simplemente acrílico (aunque este término describe una familia numerosa de polímeros químicamente conexos) es un termoplástico amorfo, transparente e incoloro, duro, rígido pero quebradizo. Tiene buena resistencia a la abrasión y a los rayos UV, una excelente claridad pero una resistencia débil a las temperaturas, a la fatiga y a los solventes. A pesar de ser inflamable, su emisión de humos es débil. Las hojas de datos técnicos de los fabricantes de PMMA reportan módulos de Young a corto plazo<sup>6</sup> entre 1.8 Gpa y 3.3 Gpa y razones de Poisson entre 0.35 y 0.45, haciendo única referencia a propiedades elásticas aunque los métodos de medición si consideran sus propiedades no elásticas<sup>7</sup>.

En este trabajo se aprovecha la geometría de la FO para medir su módulo de Young aplicándole esfuerzos uniaxiales paralelos a su eje principal, y para medir su módulo cortante, aplicándole esfuerzos de cisión pura perpendiculares a su eje principal. Pero se debe recordar que la FO está compuesta de dos materiales diferentes, ¿cómo afecta esto a los experimentos y a las correspondientes medidas? Existen tres posibles casos:

1. El módulo (ya sea de Young o cortante) del revestimiento es mucho mayor al módulo del núcleo.
2. El módulo del revestimiento es mucho menor al módulo del núcleo.
3. El módulo del revestimiento y el núcleo son prácticamente iguales.

De los tres casos anteriores lo más lógico es pensar que el ultimo es cierto porque la FO debe permanecer lo más unida posible en la frontera núcleo-revestimiento al someterla a dobleces, tracciones, compresiones y/o cisiones; y esto sólo se logra si los materiales tienen propiedades mecánicas casi idénticas. Con esto en mente se plantean los experimentos para medir los módulos elásticos suponiendo que la FO está constituida sólo de PMMA.

---

<sup>6</sup> El módulo de Young a corto plazo corresponde al valor del módulo de Young de un material medido sin tomar en cuenta su tiempo de respuesta ni su tiempo de recuperación, considerándolos nulos como se supone en la teoría de la elasticidad.

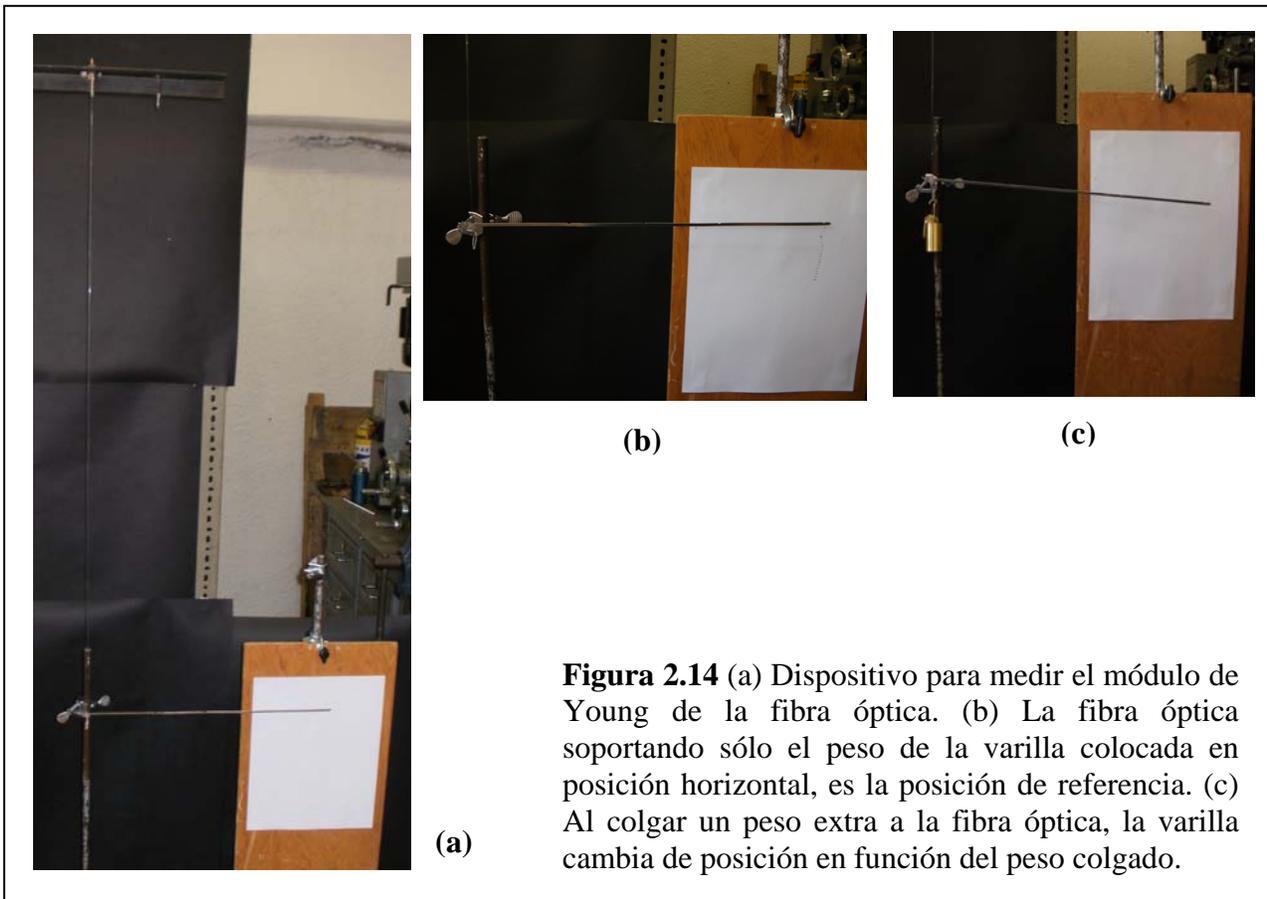
<sup>7</sup> Los datos se tomaron de las hojas técnicas del PMMA fabricado por PLEXIGLAS®, sus pruebas y métodos de medición son típicos de un amplio grupo de termoplásticos rígidos y semirígidos.

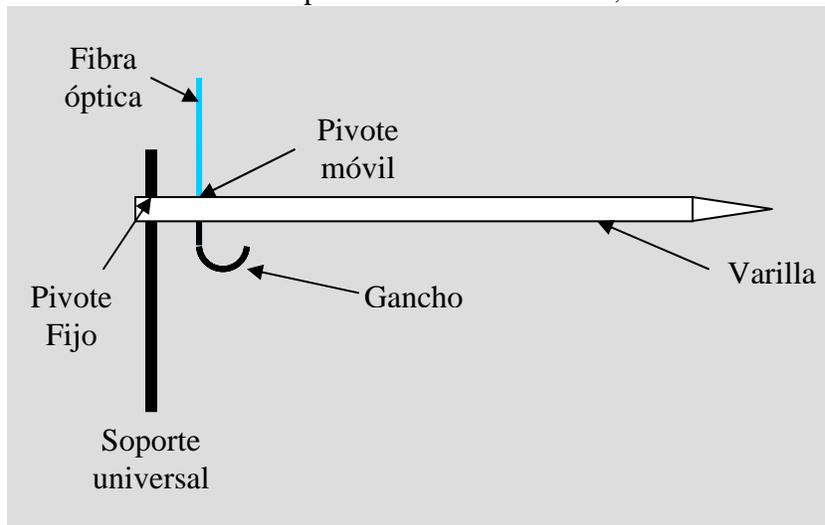
Para medir el módulo de Young se montó el arreglo experimental mostrado en la figura 2.14. Esquemáticamente se puede pensar en un resorte al cual se le cuelga masas y se mide su cambio de longitud, donde el resorte representa las propiedades elásticas longitudinales de la FO.

La varilla perpendicular a la FO que se aprecia en la figura 2.14 (b) es sujeta por dos pivotes, uno es fijo y el otro es móvil ya que la movilidad es proporcionada por el extremo inferior de la FO la cual se alarga al colgarle masas, ver figura 2.14 (c). Las masas se sujetan de la fibra por un gancho unido a ella, éstas proporcionan un esfuerzo uniaxial por el cual se alarga la FO, aunque los cambios de tamaño resultan ser imperceptibles, pero gracias a la varilla es posible cuantificarlos midiendo los cambios de posición del extremo libre de la varilla y usando una simple operación de semejanza de triángulos.

Sean  $l_p$  la distancia entre los pivotes de la varilla,  $l_0$  la distancia entre el pivote fijo y la punta libre de la varilla, y  $b$  el desplazamiento de la punta de la varilla al colgar una masa a la FO, entonces el cambio de longitud de la FO es

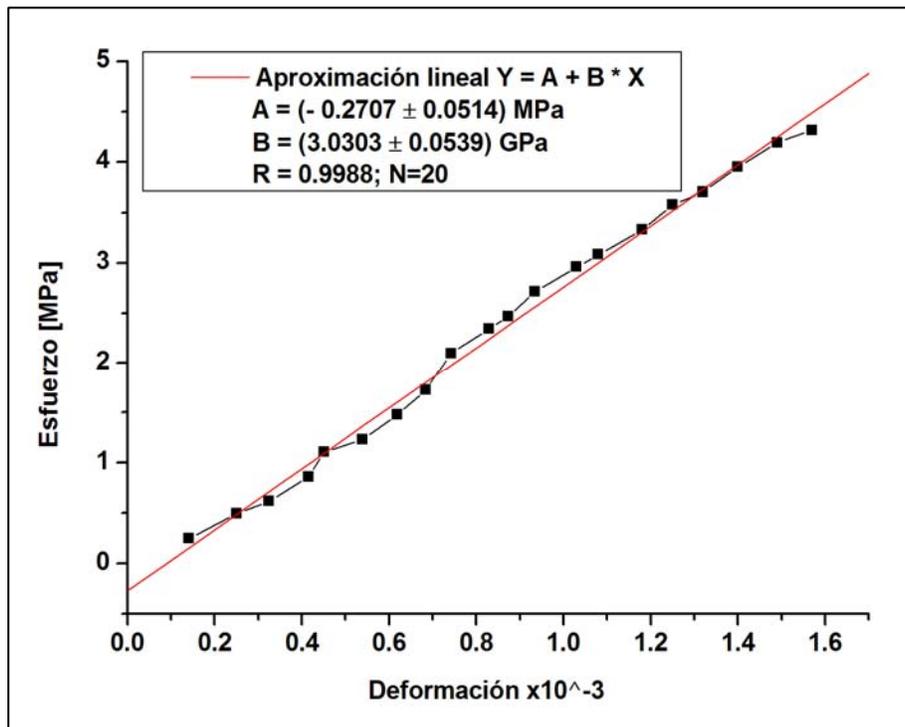
$$a = \frac{l_p}{l_0} b. \quad (2.8)$$





**Figura 2.15** Esquema de la varilla sujeta por los dos pivotes.

A continuación se presenta la gráfica de esfuerzo contra deformación longitudinal de la FO. El comportamiento es lineal y la pendiente de la recta es el módulo de Young a corto plazo de la FO que resultó ser  $Y = (3.0303 \pm 0.0539) \text{ GPa}$ . Es importante mencionar que durante las pruebas del experimento, se observaron tiempos de recuperación y tiempos de respuesta “total” hasta del orden de minutos.



**Figura 2.16** Gráfica para determinar el módulo de Young de la fibra óptica.

Para medir el módulo cortante se montó el arreglo experimental mostrado en la figura 2.17. Esquemáticamente se puede pensar que la FO es una varilla cilíndrica hecha de un solo material que sostiene una masa que gira sobre el eje principal de la FO, esto es, un péndulo de torsión. Si la FO es elástica entonces la dinámica de la masa está dada por

$$\ddot{\varphi} + \frac{\tau}{I}\varphi = 0, \quad (2.9)$$

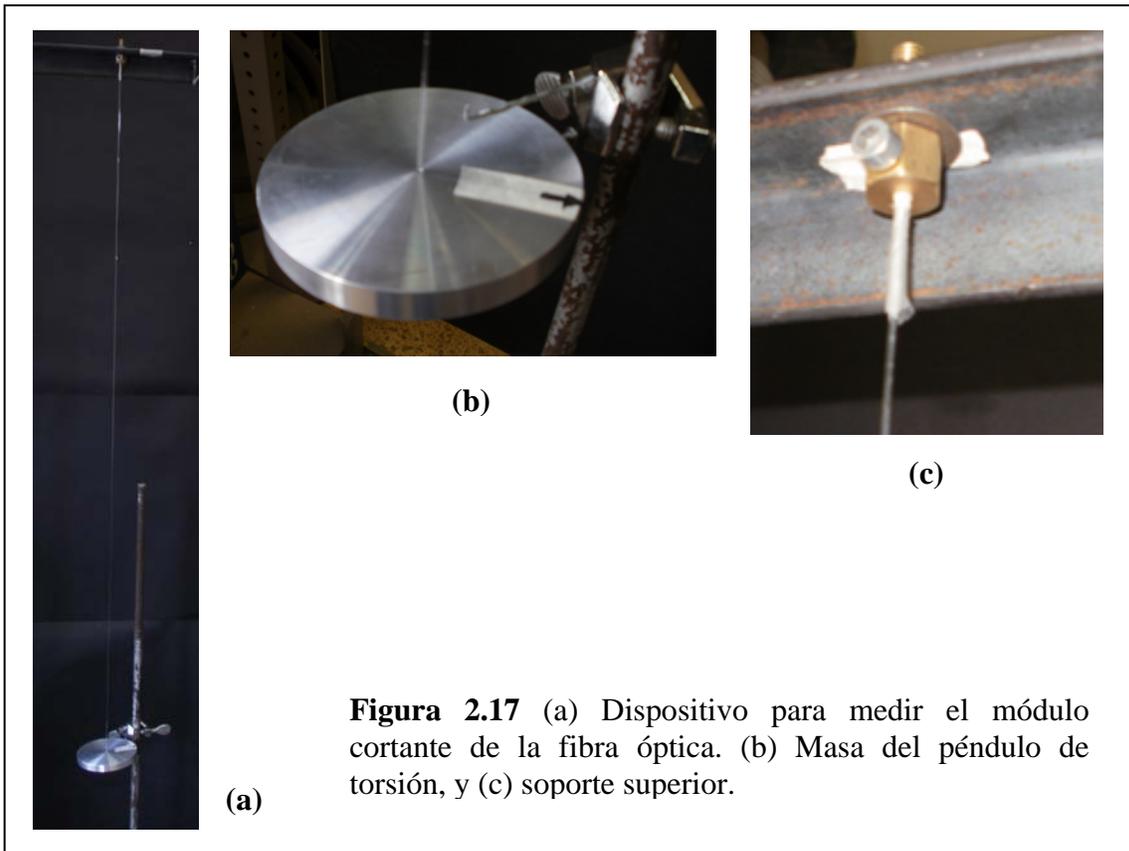
donde  $\tau$  es la constante de torsión de la FO,  $I$  es el momento de inercia de la masa y  $\varphi$  es el ángulo de giro de la masa.

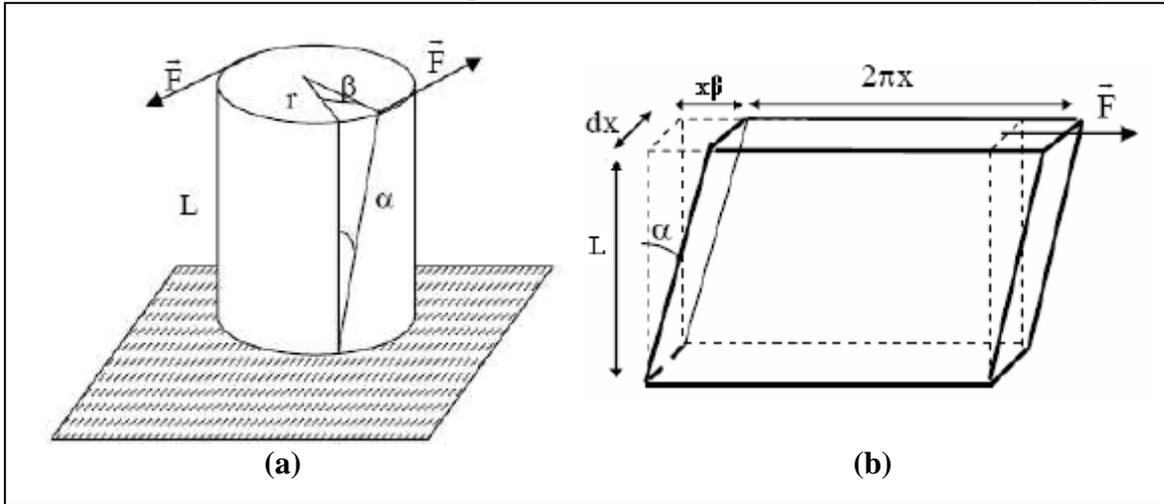
La deformación que sufre la FO por la torsión se puede considerar como un caso concreto de deformación por cisión y existe una dependencia entre su módulo cortante y la constante de torsión. Para esto, sea  $r$  el radio de la FO y  $L$  su longitud, supóngase fijo uno de los extremos de la FO y que se aplica un par de fuerzas tangentes a la superficie lateral, es decir, normales al eje principal de la FO. Ahora supóngase que la fibra está formada por infinitas láminas concéntricas y superpuestas de anchura  $dx$ , ver figura 2.17, entonces la deformación cortante es

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{dF}{dS} = \frac{1}{\mu} \frac{dF}{2\pi x dx}, \quad (2.10)$$

donde  $\mu$  es el módulo cortante de la FO y  $x$  el radio de la lámina. En lugar de considerar la fuerza  $F$ , se puede tomar la torca, entonces despejando de la ecuación anterior se tiene

$$dT = x dF = \mu \alpha 2\pi x^2 dx. \quad (2.11)$$





**Figura 2.18** (a) Modelo de la barra circular del péndulo de torsión, (b) lámina que representa una sección infinitesimal de esta barra.

Observando la figura 2.18 es claro que

$$\tan \alpha = \frac{x\beta}{L} \Rightarrow \alpha L \approx x\beta. \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.11) se tiene

$$dT = \frac{\mu\beta 2\pi}{L} x^3 dx. \quad (2.13)$$

Entonces integrado se obtiene

$$T = \int_0^r \frac{\mu\beta 2\pi}{L} x^3 dx = \frac{\mu\beta\pi}{2L} r^4. \quad (2.14)$$

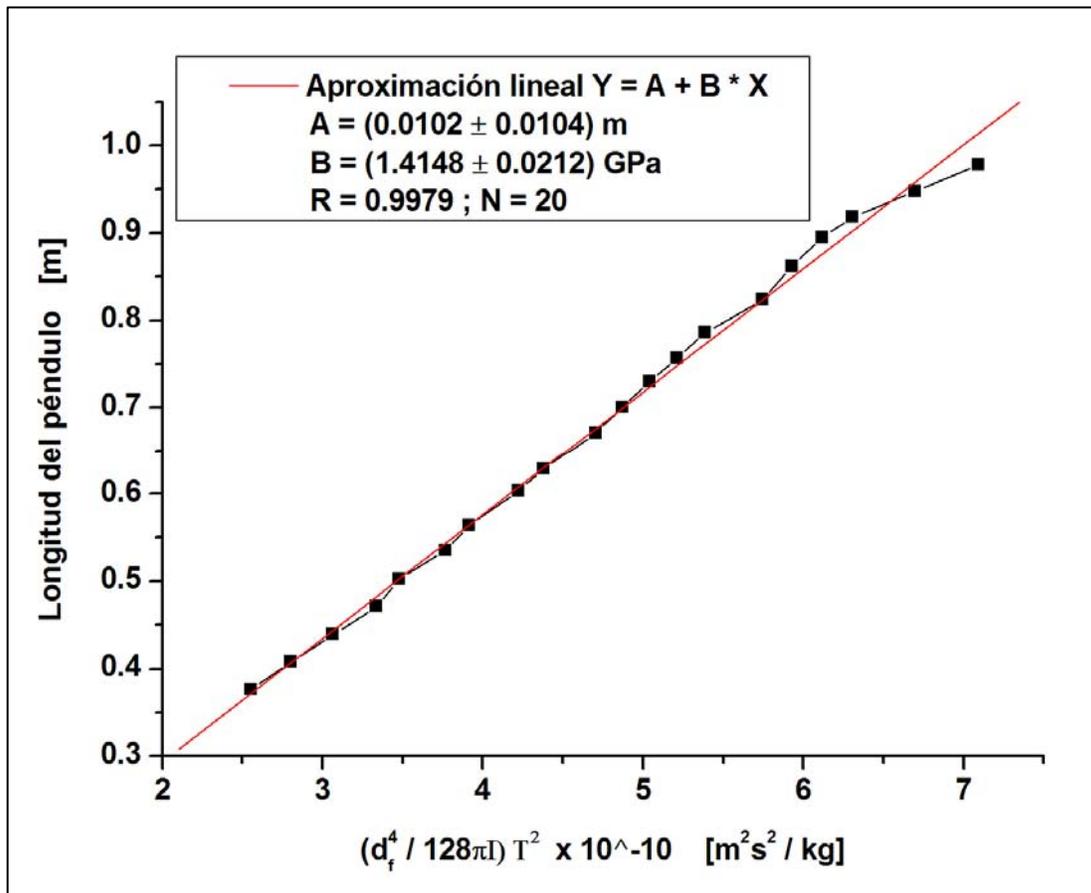
Finalmente, recordando la ley de Hooke para torsiones se concluye que

$$\frac{\mu\pi}{2L} r^4 = \frac{T}{\beta} \equiv \tau. \quad (2.15)$$

Como el período del movimiento armónico angular de la masa es  $t = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\tau}}$  entonces usando la ecuación anterior se tiene

$$\mu = \frac{128\pi IL}{t^2 d^4}, \quad (2.16)$$

donde  $d$  es el diámetro de la FO.



**Figura 2.19** Gráfica para determinar el módulo cortante de la fibra óptica.

Dado que el período de la masa depende de la longitud de la FO entonces si se miden los períodos correspondientes a diferentes longitudes y se grafica  $L$  contra  $\left(\frac{d^4}{128\pi I}\right)T^2$  entonces se obtiene una recta cuya pendiente es el módulo cortante de la FO. Justamente esto fue lo que se hizo, los resultados se muestran en la figura 2.19.

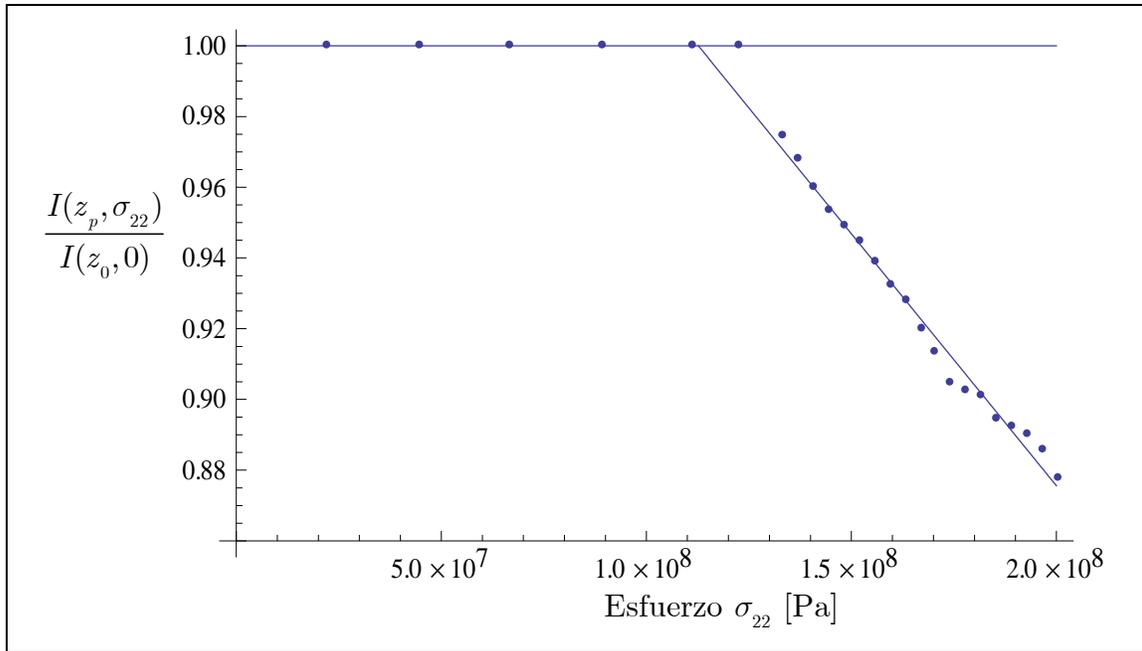
Por lo tanto la FO utilizada tiene un módulo cortante de  $(1.4148 \pm 0.0212) \text{ GPa}$ . Es importante mencionar que para todas las longitudes se observó un amortiguamiento considerable en la amplitud de oscilación. Para las medidas sólo se consideraron las amplitudes menos amortiguadas y en base a esto se midió el período de oscilación en cada caso.

Tanto los tiempos de recuperación y respuesta como el amortiguamiento del péndulo de torsión, exponen las limitaciones de la elasticidad de la FO y sugieren que su comportamiento se asemeja más a un sólido viscoelástico. Pero dada la aplicación cuasi-estática y progresiva de esfuerzos a la FO en este trabajo, no es de interés el comportamiento viscoelástico de la FO y es suficiente la hipótesis de elasticidad, por lo tanto, son más que suficientes los módulos elásticos obtenidos por los experimentos expuestos en esta sección.

## 2.4 Comparación entre la solución numérica y el resultado experimental

En las secciones anteriores se discutió la congruencia cualitativa entre la solución teórica y el resultado experimental. Ahora se presenta una modificación del modelo teórico cuyo propósito es reproducir cuantitativamente los resultados experimentales.

Para comenzar se presenta la gráfica de los datos experimentales, donde también se grafican las rectas que aproximan mejor al comportamiento en las dos regiones de interés, región de no operación práctica y región de decaimiento lineal; figura 2.20.



**Figura 2.20** Gráfica de los datos experimentales y de las rectas que mejor ajustan los datos.

El modelo predice de excelente manera el comportamiento cualitativo del problema, lo que hace pensar que con un simple parámetro de ajuste se puede obtener también una congruencia cuantitativa con el experimento. Exactamente esto se hizo, se agregó un parámetro  $b$  a la ecuación que modela el índice de refracción a lo largo del eje  $X_3$ , quedando de la siguiente forma:

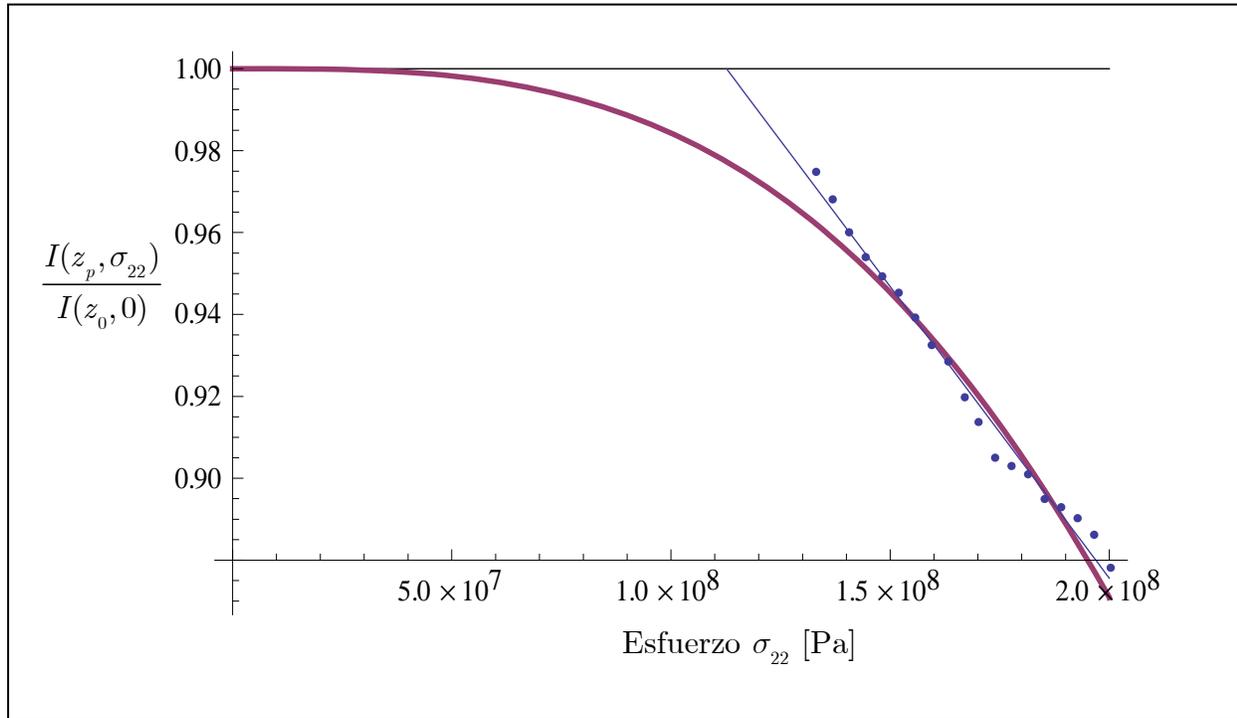
$$n(z, \sigma_{22}) = n_0 - [b \times dn(\sigma_{22})] \text{Exp} \left[ -\left(\frac{z-z_p}{a}\right)^2 \pi [b \times dn(\sigma_{22})]^2 \right] \text{ con } dn(\sigma_{22}) = \frac{n_0^3}{2} \lambda_3(\sigma_{22}), \quad (2.17)$$

donde se recuerda que  $z$  es la posición a lo largo del eje  $X_3$  y  $z_p$  es el punto donde se aplica el esfuerzo externo,  $a$  es el parámetro que ajusta la dimensión de la vecindad del punto de aplicación del esfuerzo, y  $\sigma_{22}$  es el esfuerzo.

El parámetro  $b$  multiplica a la función  $dn(\sigma_{22})$ , que proporciona el cambio del índice de refracción a causa de la compresión, su valor es una medida de la diferencia que existe entre los valores teóricos y las respectivas medidas experimentales, a causa de factores que no dependen de la compresión, por ejemplo,

el acoplamiento de la FO con el fototransistor. Por lo anterior al parámetro  $b$  se le da el estatus de “factor de calibración” entre el experimento y la solución numérica.

A continuación se presentan la gráfica de la solución numérica, con  $b = 10$ , y la gráfica de los datos experimentales con sus respectivas aproximaciones lineales.



**Figura 2.21** Gráficas teórica y experimental. La línea curva corresponde a la teoría y las líneas rectas a las aproximaciones lineales de los datos experimentales.

Con el factor de calibración se logró tener un cambio en la variable dependiente,  $I(z_p, \sigma_{22})/I(z_0, 0)$ , del mismo orden de magnitud y prácticamente en el mismo intervalo (0.87, 1). Por lo tanto, el nuevo modelo teórico reproduce cualitativamente y cuantitativamente el resultado experimental del problema planteado.

Como último comentario se menciona que dentro del intervalo de incertidumbre de las mediciones no se observó histéresis en el intervalo de compresiones aplicadas. En el siguiente capítulo se enuncian las conclusiones del trabajo y se da una sugerencia para mejorar el experimento.

## Capítulo 3

### CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo de tesis fue: El estudio teórico y experimental del cambio en la intensidad de la luz guiada por una fibra óptica plástica de índice escalonado, a causa de una compresión localizada y aplicada perpendicularmente al eje de la FO.

Se supuso que el núcleo de la FO es isotrópico, homogéneo, no magnetizable y elástico; además se supuso que la luz es monocromática, de frente de onda plano y de intensidad constante. Además, atendiendo la geometría del problema y las condiciones de frontera, se centró la atención a un rayo de luz equivalente que viaja paralelo al eje principal de la FO. Con estas hipótesis se propuso un modelo basado en la teoría de la Óptica Geométrica y de la teoría de elasto-óptica de Pockels, el cual proporciona el valor del índice de refracción de la FO a lo largo de su eje principal, en función de la compresión y del punto donde se aplica ésta. Esto con la finalidad de resolver la integral que aparece en la ley de intensidad de la Óptica Geométrica, la cual requiere una función del índice de refracción con la posición, y de la compresión en nuestro caso. La solución numérica de esta ley proporcionó la forma en que cambia, en función de la compresión aplicada, la razón entre la intensidad de la luz que viaja por la FO al someterla a la compresión y la intensidad de la luz sin compresión ( $I(\sigma_{22})/I(0)$ ).

La solución numérica obtenida con el modelo propuesto predijo el comportamiento cualitativo del problema planteado, sin embargo, para tener congruencia cuantitativa con los resultados experimentales reportados en este trabajo, se tuvo que modificar el modelo con un “factor de calibración” que es una medida de la diferencia que existe entre los valores teóricos y las respectivas medidas experimentales, a causa de factores que no dependen de la compresión, como el acoplamiento de la FO con el fototransistor. Por lo anterior al parámetro  $b$  se le da el estatus de “factor de calibración” entre el experimento y la solución numérica.

Con base en los resultados, tanto teóricos como experimentales, se concluye que el cambio de la razón  $I(\sigma_{22})/I(0)$  con la compresión aplicada tiene un comportamiento de decaimiento asintótico. Para compresiones menores que 1.2 GPa se tiene un comportamiento asintótico a la unidad en la variable dependiente, y para compresiones mayores que 1.4 GPa, se tiene un decaimiento aproximadamente lineal; y el intervalo de 1.2 a 1.4 GPa es de incertidumbre, porque con la sensibilidad del dispositivo experimental no se puede decir exactamente como es el comportamiento en esa región.

Los experimentos para medir el módulo de Young y el módulo cortante de la FO mostraron el intervalo de compresiones en el que la hipótesis elástica sobre este tipo de fibras ópticas es válida. Su comportamiento mecánico es viscoelástico aunque muestra una tendencia elástica para aplicaciones estáticas, como la realizada en este trabajo.

#### 3.1 Sugerencias

Para tener mejores resultados experimentales del problema planteado en este trabajo, se sugiere un nuevo diseño tanto para el circuito emisor como para el circuito receptor, ver Figura 3.1, para mejorar la

precisión y resolución del experimento. Esta propuesta utiliza dos fibras ópticas idénticas, una sirve de referencia y la otra se somete al esfuerzo externo localizado.

El circuito emisor utiliza dos LED's de alta intensidad con una longitud de onda pico de 940 nm. Su diseño permite controlar la cantidad de corriente que pasa por cada uno de los LED's gracias al trimpot (potenciómetro preajustable), con la finalidad de calibrar la diferencia de intensidad luminosa proporcionada por los LED's; por otro lado, el potenciómetro conectado a la base del transistor controla la cantidad de corriente que se divide entre los dos LED's con lo cual se cambia la intensidad luminosa de ambos LED's al mismo tiempo y en la misma cantidad. Además, la parte izquierda del circuito, ver figura 3.1 (a), se diseñó para garantizar estabilidad en la alimentación eléctrica y reducir al mínimo el ruido en los LED's.

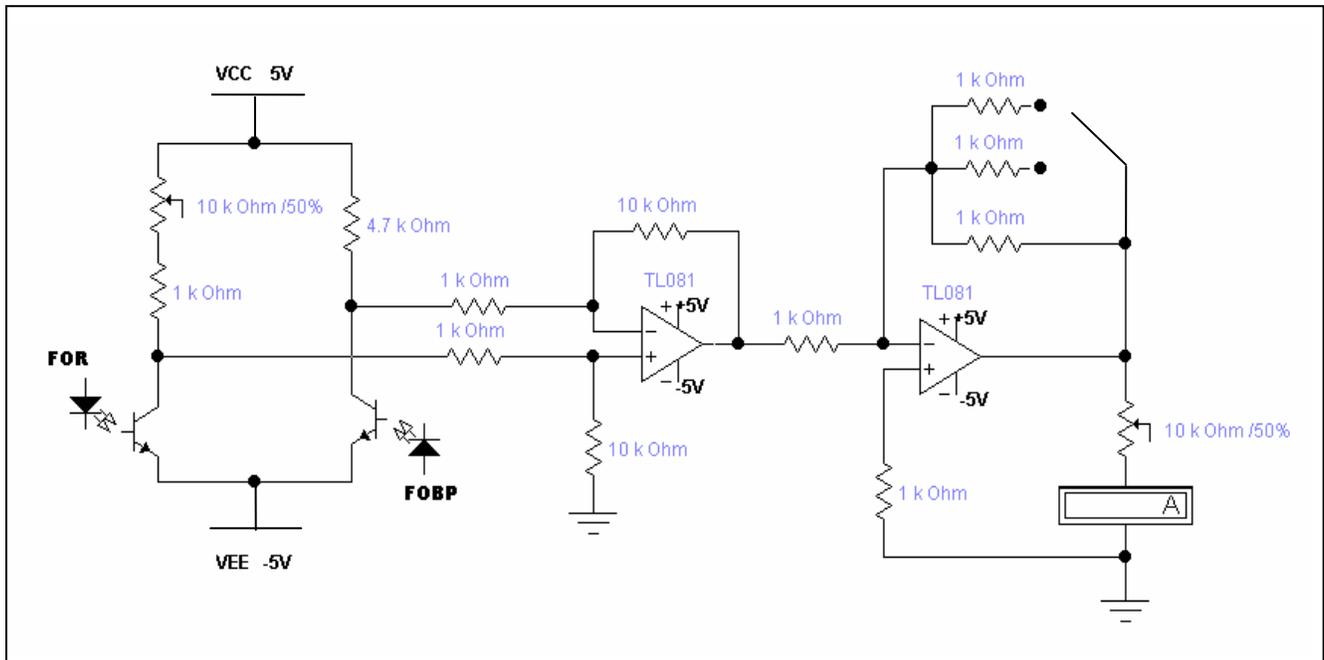
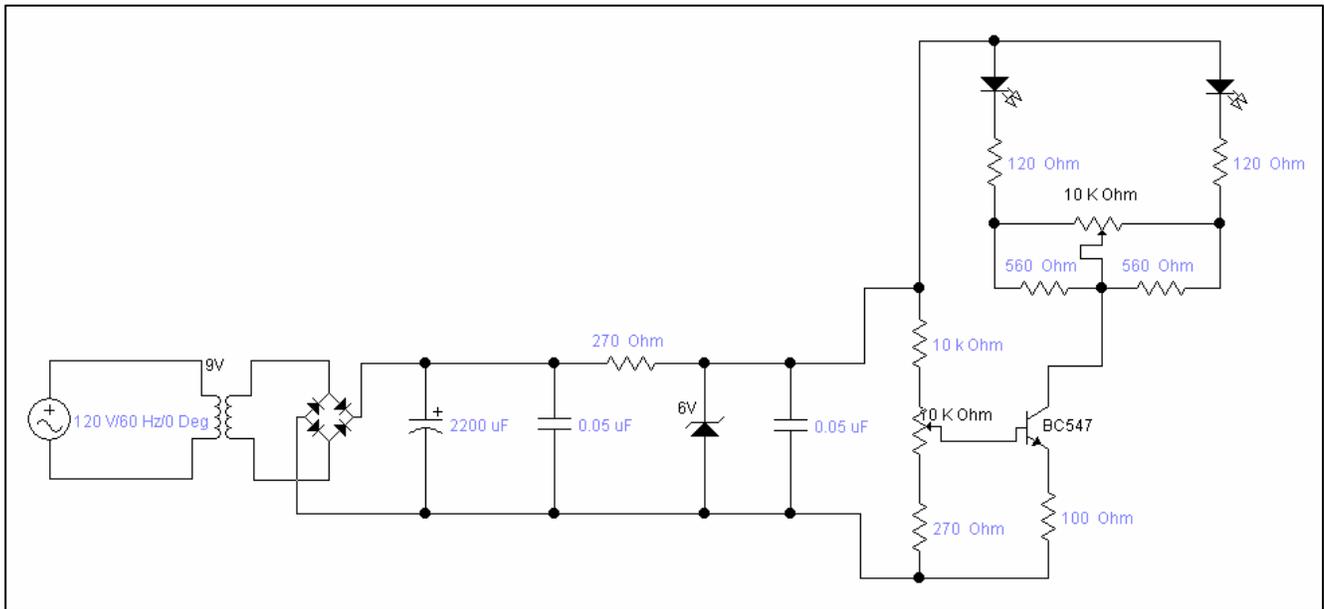
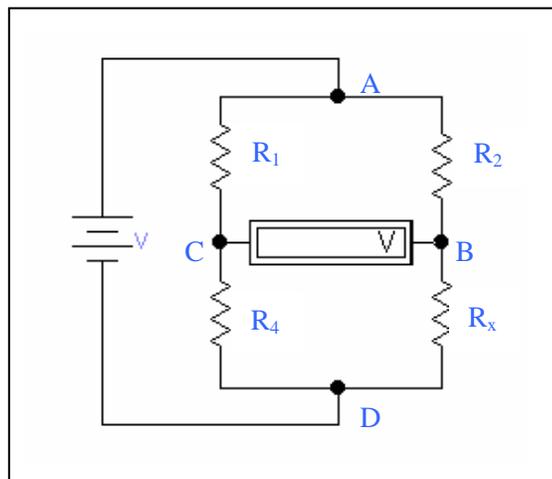


Figura 3.1 Circuito emisor (arriba) y circuito receptor (abajo).

El circuito receptor utiliza dos fototransistores PT333C que transforman linealmente la intensidad de la luz captada en corriente eléctrica, éstos forman parte de un puente de Wheatstone (primera parte del circuito de izquierda a derecha).

Un puente de Wheatstone es un instrumento eléctrico de medida, comúnmente se utiliza para medir resistencias desconocidas mediante el equilibrio de los brazos del puente. Para medir el valor de una resistencia desconocida, el puente se construye con cuatro resistencias que forman un circuito cerrado, siendo una de ellas la resistencia bajo medida y otra una resistencia variable que sirve para hacer la medida cumpliendo la relación  $R_1/R_4 = R_2/R_x$ , ver figura 3.2. Cuando se cumple la relación, entonces la diferencia de potencial entre los puntos C y B es cero y se puede saber con gran precisión el valor de la resistencia desconocida con un voltímetro conectado entre los puntos C y B.



**Figura 3.2** Puente de Wheatstone típico.

Al sustituir las resistencias  $R_x$  y  $R_4$  de la figura anterior por los dos pares fototransistor- FO, se obtiene un instrumento de medida para poner a prueba la FO que se somete a la compresión, es claro que esta FO toma el rol de la resistencia  $R_x$  en el puente de Wheatstone típico. Justamente esto es lo que se hace en el circuito receptor propuesto.

El puente de Wheatstone es la clave para obtener una mayor precisión, porque cuantifica la diferencia entre las intensidades de los haces de luz que viajan por las dos fibras ópticas. Entonces los problemas como mal pulido de las fibras o mala alineación en el acople Fototransistor-FO, que influyen en la pérdida de intensidad captada en los fototransistores, quedan completamente descartados de las medidas. El resto del circuito receptor son amplificadores operacionales, el primero usado como un amplificador de diferencias y el segundo usado como un amplificador inversor de ganancia seleccionable, los cuales proporcionan mayor resolución en las medidas.

También se sugiere realizar las medidas de los módulos elásticos de la FO con una maquina INSTRON para corroborar los resultados experimentales reportados en la tesis, los cuales son fundamentales para el correcto calculo numérico.

Se espera que con estas sugerencias se tenga una mayor congruencia cuantitativa entre el modelo teórico propuesto y el experimento, esto es, una reducción en el valor del factor de calibración mencionado en el capítulo 2.

## Apéndice A

# CONSTANTES ELÁSTICAS DE SÓLIDOS ISOTRÓPICOS

Las deformaciones de un sólido elástico isotrópico en función de los esfuerzos son

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij}. \quad (\text{A.1})$$

Para determinar experimentalmente las constantes de Lamé es conveniente reescribir la ecuación anterior en términos de las constantes de ingeniería  $Y$  y  $\nu$  definidas en el caso de tensión uniaxial simple mediante las relaciones  $\sigma_{11} = Y e_{11}$  y  $e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}$ , con lo cual

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{Y} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{Y} \sigma_{kk} \delta_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

donde el módulo de Young  $Y$  y la razón de Poisson  $\nu$  se relacionan con las constantes de Lamé por

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Si se considera el estado de tensión originado por una presión hidrostática uniforme ( $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ ) entonces

$$e_{ij} = \frac{e_{kk}}{3} \delta_{ij} \quad y \quad p = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) e_{kk} = -K e_{kk}. \quad (\text{A.4})$$

La constante  $K$  se denomina módulo de deformación volumétrica. Por otro lado, para el estado de cisión pura, las componentes cortantes de tensión y deformación se relacionan con el módulo cortante o de rigidez  $G$ , que resulta ser igual a la constante de Lamé  $\mu$  y se relaciona con las otras constantes por

$$G = \frac{Y}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.5})$$

Si se conoce el valor de un par de las diferentes constantes elásticas, se pueden calcular las otras mediante relaciones sencillas mostradas en la Tabla A.I.

Tabla A.I Relación entre las diferentes constantes elásticas.

	$Y, \nu$	$Y, \mu$	$\lambda, \mu$	$c_{11}, c_{12}$
$\lambda$	$\frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\mu(Y-2\mu)}{3\mu-Y}$	$\lambda$	$c_{12}$
$\mu$	$\frac{Y}{2(1+\nu)}$	$\mu$	$\mu$	$\frac{c_{11}-c_{12}}{2}$
$Y$	$Y$	$Y$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$c_{11} - 2\frac{c_{12}^2}{c_{11}+c_{12}}$
$K$	$\frac{Y}{3(1-2\nu)}$	$\frac{\mu Y}{3(3\mu-Y)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{c_{11}+2c_{12}}{3}$
$\nu$	$\nu$	$\frac{Y-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{c_{12}}{c_{11}+c_{12}}$

## Apéndice B

# LIMITACIONES EN LOS MÓDULOS ELÁSTICOS LINEALES

Se puede demostrar usando termodinámica que el tensor de constantes elásticas  $\mathbf{C}$  es definido positivo y por lo cual

$$\mathbf{A} : \mathbf{C} : \mathbf{A} > 0; \quad \forall \mathbf{A} \neq \mathbf{0}. \quad (\text{B.1})$$

como consecuencia el potencial elástico es positivo o cero, esto es

$$u^*(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e} : \mathbf{C} : \mathbf{e} \geq 0. \quad (\text{B.2})$$

Usando la ecuación anterior y la ley de Hooke:

$$u^*(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e} : \mathbf{C} : \mathbf{e} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} = \frac{1}{2} [\lambda \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e}] : \mathbf{e}. \quad (\text{B.3})$$

Pero como

$$\frac{1}{2} \lambda \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{1} : \mathbf{e} + \mu \mathbf{e} : \mathbf{e} = \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2(\mathbf{e}) + \mu \mathbf{e} : \mathbf{e}, \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : \mathbf{e} &= \left( \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{1} + \mathbf{e}' \right) : \left( \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{1} + \mathbf{e}' \right) = \frac{1}{9} \text{tr}^2(\mathbf{e}) \mathbf{1} : \mathbf{1} + \frac{2}{3} \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{1} : \mathbf{e}' + \mathbf{e}' : \mathbf{e}' \\ &= \frac{1}{3} \text{tr}^2(\mathbf{e}) + \mathbf{e}' : \mathbf{e}'. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En la ecuación (1.15) se utilizó el tensor deformación en sus componentes desviadoras  $\mathbf{e}'$ , cuya traza es siempre nula ( $\text{tr}(\mathbf{e}') = 0$ ). Sustituyendo la ecuación (B.5) en la ecuación (B.4) se tiene

$$\begin{aligned} u^*(\mathbf{e}) &= \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2(\mathbf{e}) + \frac{1}{3} \mu \text{tr}^2(\mathbf{e}) + \mu \mathbf{e}' : \mathbf{e}' = \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \text{tr}^2(\mathbf{e}) + \mu \mathbf{e}' : \mathbf{e}' \\ &= \frac{1}{2} K \text{tr}^2(\mathbf{e}) + \mu \mathbf{e}' : \mathbf{e}' \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Ahora considérese un material elástico lineal isotrópico sometido a dos tipos de procesos de deformación particulares:

1. Deformación puramente esférica.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}^{(1)} = \frac{1}{3} e \mathbf{1} \\ \mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \rightarrow u^{*(1)} = \frac{1}{2} K e^2 \geq 0 \Rightarrow K > 0. \quad (\text{B.7})$$

2. Deformación puramente desviadora.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}' \\ \text{tr}(\mathbf{e}^{(2)}) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow u^{*(2)} = \mu \mathbf{e}' : \mathbf{e}' \geq 0 \Rightarrow \mu > 0.^1 \quad (\text{B.8})$$

Como consecuencia de las dos ecuaciones anteriores se tienen los siguientes límites en los valores numéricos de las constantes elásticas del material:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \quad (\text{B.9})$$

Por la definición de la razón de Poisson y la experiencia  $\nu$  es siempre positivo y por tanto

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \\ \nu > 0 \end{array} \right\} \rightarrow E > 0. \quad (\text{B.10})$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0 \\ E \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}.$$

---

<sup>1</sup> Los superíndices en ésta y la anterior ecuación, se utilizan sólo para distinguir los diferentes procesos de deformación.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. A. de Montmorillon, G. Kuyt, P. Nouchi, A. Bertaina. *Latest advances in optical fibers*. C. R. Physique No. 9, pp. 1045-1054, November 2008.
- [2] J. Ballato, T. Hawkins, P. Foy, B. Yazgan-Kokuoz, C. McMillen, L. Burka, S. Morris, R. Stolen, R. Rice. *Advancements in semiconductor core optical fiber*. Optical Fiber Technology No. 16, pp. 399-408, September 2010.
- [3] N. K. Pandey, B. C. Yadav. *Embedded fibre optic microbend sensor for measurement of high pressure and crack detection*. Sensors and Actuators No. A 128, pp. 33-36, February 2006.
- [4] R. El Abdi, A. Rujinsky, C. Borda, I. Severin, M. Poulain. *New method for strength improvement of silica optical fibers*. Optics and Lasers in Engineering No. 46, pp. 222-229, November 2007.
- [5] A. Güemes, J. M. Menendez, M. Frövel, I. Fernandez, J. M. Pintado. *Experimental análisis of buckling in aircraft skin panels by fiber optic sensors*. Journal: Smart Materials and Structures No. 10, pp. 490-496, 2001.
- [6] M. Lomer, J. Arrue, C. Jauregui, P. Aiestaran, J. Zubia, J. M. López-Higuera. *Lateral polishing of bends in plastic optical fibers applied to a multipoint liquid-level measurement sensor*. Sensors and Actuators A No. 137, pp. 68-73, March 2007.
- [7] A. Kulkarni, J. Na, Y. J. Kim, S. Baik, T. Kim. *An evaluation of the optical fiber beam as a force sensor*. Optical Fiber Technology No. 15, pp. 131-135, July 2008.
- [8] T. Kun-Hsieh, K. Kyung-Suk, T. F. Morse. *General solutions for stress-induced polarization in optical fibers*. Journal of Lightwave Technology, vol. 9, No. 1, pp. 7-17, January 1991.
- [9] O. I Kotov, A. V. Khlybov, L. B. Liokumovich, S. I. Markov, A. V. Medvedev, V. A. Rukavishnikov, A. I. Borovkov, D. V. Sheuchenko. *Polarization modulation of light in an optical waveguide under lateral compression*. ISSN 1063-7842, Technical Physics, vol. 51, No. 11, pp. 1494-1499, 2006.
- [10] J. Koning, R. N. Rieben, G. H. Rodrigue. *Vector Finite-Element modeling of the full-wave Maxwell equations to evaluate power loss in bent optical fibers*. Journal of Lightwave Technology, vol. 23, No. 12, pp. 4147-4154, December 2005.
- [11] S. V. Polstyanko, Jin-Fa Lae.  *$H_1$  (curl) tangential vector Finite Element method for modeling anisotropic optical fibers*. Journal of Lightwave Technology, vol. 13, No. 11, pp. 2290-2295, November 1995.
- [12] J. Romano, J. A. Bucaro, J. J. Shirren. *On the induced phase shift of dynamically forced optical fiber: Theory and numerical simulations*. Journal of Lightwave Technology, vol. 14, No. 9, pp. 1992-2002, 1996.
- [13] Y. Mohanna, J. Saugrain, J. Rousseau, P. Ledoux. *Relaxation of internal stresses in optical fibers*. Journal of lightwave technology, vol. 8, No. 12, pp. 1799-1802, December 1990.

- [14] Haw-Long Lee, Win-Jin Chang, Yu-Ching Yang. *Viscoelastic analysis of optical effects in double-coated optical fibers induced by axial strain and hydrostatic pressure*. Materials Chemistry and Physics No. 91, pp. 80-87, Octubre 2005.
- [15] I. severin, R. El Abdi, M. Poulain. *Strength measurements of silica optical fibers Under severe environment*. Optics & Laser Technology No. 39, pp. 435-441, July 2007.
- [16] M. C. Hastings, B. Chiu, D. W. Nippa. *Engineering the development of Optical Fiber Sensors for adverse environments*. Nuclear Engineering and Desing No. 167, pp. 239-249, August 1997.
- [17] Sham-Tsong Shiue, Ting-Ying Shen. *Effect of thermal stresses on the static fatigue of double-coated optical fibers*. Materials Chemistry and Physics No. 89, pp. 159-163, August 2004.
- [18] H. Golnabi, M. Bahar, M. Razani, M. Abrishami, A. Asadpour. *Design and operation of an evanescent optical fiber sensor*. Optics and Lasers in Engineering No. 45, pp. 12-18, August 2007.
- [19] Hecht, E. *Óptica 3ed*. Addison Wesley Iberoamericana, Madrid, 2000.
- [20] Kravtsov Y., Orlov Y. *Geometrical Optics of inhomogeneous media*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [21] Born M., Wolf E. *Principles of Optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light 7ed (Expanded)*.Cambridge University Press, 2003.
- [22] Guenther R. *Modern Optics*. John Wiley & Sons, USA, 1990.
- [23] Landau L., Lifshitz E. *Teoría de la Elasticidad Vol.7 del Curso de Física teórica*. Editorial Reverté, Barcelona, 1969.
- [24] Olivilla X., Bosch C. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Alfaomega Grupo Editorial, México, 2005.
- [25] Mase G. *Mecánica del medio continuo*. Serie de compendios Schaum, Mc Graw-Hill, México, 1978.
- [26] Kolsky H. *Stress waves in solids*. Dover publications, New York, 1963.
- [27] Royer D., Dieulesaint E. *Elastic waves in solids I. Free and guided propagation*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2000.
- [28] Royer D., Dieulesaint E. *Elastic Waves in Solids II. Generation, Acousto-Optic interaction, applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2000.