



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ARQUEOACÚSTICA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**ANDRÉS ALUX MEDINA ALBORES**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. PABLO PADILLA LONGORIA  
2011**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno

Medina

Albores

Andrés Alux

51355845

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

401003879

Datos del tutor

Dr

Pablo

Padilla Longoria

Datos del sinodal 1

M. en M.

Alejandro

Ramos

Amézquita

Datos del sinodal 2

Dra.

Francisca Amelia

Zalaquett

Rock

Datos del sinodal 3

Dr.

Alejandro

Garciadiego

Dantán

Datos del sinodal 4

Dr.

Javier

Páez

Cárdenas

Datos del trabajo escrito

Arqueoacústica

65 p.

2011

## **INDICE.**

### **INTRODUCCIÓN**

### **OBJETIVOS**

#### **I. ARQUEOACÚSTICA**

- Visión general.
- Planteamiento teórico.
- Planteamiento práctico.
- El papel de la arqueoacústica .
- Metodología.

#### **II. LOS MAYAS**

- Historia general y delimitación geográfica/temporal.
- Influencias de otras culturas.
- Calendario y aspectos científicos.

##### **CHICHÉN ITZÁ.**

Historia general y delimitación geográfica/temporal.

Efectos acústicos en Chichén Itzá.

El juego de pelota.

El Castillo.

Arqueoacústica en El Castillo.

Otros trabajos acústicos en El Castillo.

Nuevas propuestas sobre los modelos de La Cola de Quetzal.

### **III. MARCO TEÓRICO FÍSICO MATEMÁTICO**

Oscilador armónico.

Cuerda vibrante.

Ecuación de onda.

Condiciones de frontera.

Implicaciones de las características estructurales.

### **IV. MÉTODOS NUMÉRICOS**

Descripción general.

Método de Monte Carlo.

Método de Diferencias Finitas.

Método del Elemento Finito.

Descripción y ventajas.

Desarrollo.

### **V. MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL EFECTO *COLA DE QUETZAL***

Femlab

Presentación y descripción de las simulaciones desarrolladas.

### **CONCLUSIONES**

### **BIBLIOGRAFÍA**

### **INTRODUCCIÓN**

La presente tesis se inscribe dentro del proyecto *Arqueoacústica*, el cual involucra a un grupo interdisciplinario de investigadores y estudiantes, cuyo principal objetivo es rescatar la dimensión sonora de los sitios arqueológicos.

El proyecto originalmente estaba centrado en el efecto de 'la cola de quetzal'<sup>1</sup> y una posible explicación del mismo. También buscaba generar argumentos que permitieran sugerir que tal efecto no es una coincidencia, sino que hubo cierta intencionalidad<sup>2</sup> por parte de sus constructores.

Después de un primer viaje a Chichén Itzá, fue claro que el efecto era mucho más complejo que un simple eco sobre la escalinata; además fueron apareciendo otras peculiaridades acústicas en toda la plaza central, así como en el juego de pelota.

Lo anterior llevó a realizar un segundo viaje con la intención de hacer mejores mediciones en la pirámide El Castillo, en la Plaza Central y en la Plataforma de Venus. Además se realizaron mediciones acústicas y espaciales en el juego de pelota, encontrando también efectos de gran interés.

A partir de estos viajes, el proyecto de arqueoaústica se volvió más ambicioso. Surgió un interés por otros sitios donde se conocían efectos acústicos y se comenzó una investigación sobre instrumentos prehispánicos (principalmente mayas) y su caracterización acústica, misma que sigue en marcha en la actualidad.

En este proyecto participan investigadores de física y matemáticas, Alejandro Ramos y Pablo Padilla, respectivamente; de Arqueología, Francisca Zalaquett y de etnomusicología, Guadalupe Caro. Además hemos recibido contribuciones de otros campos, como la actuaría, la antropología y la arqueoastronomía. Así mismo, estudiantes de actuaría y física han participado en dicho proyecto: Tonatiuh Ruiz, físico, realizó su tesis de licenciatura sobre un análisis de los modelos más importantes realizados hasta la fecha para explicar 'la cola de quetzal'.

¿A qué se refiere el rescate de la dimensión sonora de un sitio arqueológico?

---

<sup>1</sup> Este efecto consiste en la distorsión del eco de un pulso o un sonido brusco (un aplauso por ejemplo) causada por la escalinata norte de la pirámide "El Castillo", en Chichén Itzá, Yucatán. Más adelante se explicará con mayor detalle.

<sup>2</sup> El por qué no se puede hablar de la intencionalidad como un absoluto se explicará más adelante.

La historia y la arqueología nos han permitido conocer la mayor parte de los sitios arqueológicos, así como de las sociedades que los edificaron: su desarrollo, costumbres, historia, religión y mitología, arte, ciencia, interacciones sociales, etcétera. Sin embargo, son pocas las investigaciones sobre el sonido en las antiguas civilizaciones: ¿cómo sonaban sus instrumentos? ¿De qué forma interactuaban los intérpretes, los instrumentos y los lugares que usaban como escenario? ¿Fue considerada la acústica dentro de la planeación de los sitios ceremoniales?

Para responder estas preguntas, así como muchas otras que van surgiendo, es necesaria la intervención de varias disciplinas; principalmente las matemáticas, la física, la arqueología, la música y la etnomusicología; siendo además importantes también la arquitectura, la ingeniería acústica (sobre todo la de espacios abiertos), la arqueoastronomía, etcétera. Este carácter multidisciplinario permite evitar los lugares comunes de cada una de las disciplinas involucradas, así como abordar las preguntas arriba mencionadas desde una perspectiva mucho más amplia.

Actualmente existen varios trabajos dentro de la arqueoacústica a nivel mundial; algunos de ellos abordan la acústica en cuevas, otros en teatros grecorromanos, otros más en catedrales antiguas.<sup>3</sup>

De los pocos trabajos que tratan sitios e instrumentos mesoamericanos podemos mencionar el de Sergio Beristain (2002) el de Roberto Velázquez (2002), además por supuesto del que se lleva a cabo en el proyecto antes mencionado, en Chichén Itzá. En este mismo sitio hay trabajos realizados sobre El Castillo y el juego de pelota por David Lubman (1998), Frans A. Bilsen (2006) y un equipo dirigido por Nico F. Declercq (2003), entre otros. Estas investigaciones abordan el tema desde un punto de vista más técnico; al ahondar sobre todo en la parte de ingeniería y física, han aportado elementos importantes para comprender mejor la acústica de Chichén Itzá. Sin embargo, para llevar a cabo un estudio más completo, es necesario incorporar diversas perspectivas, como la artística, la arqueológica, entre otras.

Por otra parte, aún es difícil hablar de una disciplina bien estructurada. Uno de los vacíos que requieren más atención es la metodología, puesto que si bien se han dado

---

<sup>3</sup> Una fuente representativa es el libro *Archeoacoustics* de Chris Scarre y Graeme Lawson (2006)

elementos importantes para su desarrollo, sigue sin haber una metodología específica de la arqueoacústica. Se han tomado elementos y lineamientos de disciplinas similares como la arqueoastronomía y la etnomusicología, pero aún es necesario proponer una metodología que responda a las necesidades de la arqueoacústica.<sup>4</sup>

## **OBJETIVOS**

Como parte de sus objetivos, esta tesis contempla el tratar algunos de los conceptos más importantes a considerar, dentro del marco teórico de la arqueoacústica. No se tratarán todos, pues resultaría una tarea descomunal, pero sí se abordarán aquellos que conforman una base necesaria, de manera que la aportación al proyecto consistirá en sentar algunas bases para la eventual creación de una metodología propia de la arqueoacústica, por una parte, y por la otra, en un contexto más didáctico, proponer una estructura teórica, para editar un manual que permita dar un curso a nivel universitario.

Paralelamente, se busca destacar el papel de las matemáticas dentro de la arqueoacústica. Esto puede observarse en las interacciones que tiene con cada una de las disciplinas involucradas, pero sobre todo el desarrollo de modelos, incluyendo las simulaciones por computadora y el uso de métodos numéricos. Para esto es necesario el estudio de las ecuaciones que describen los fenómenos acústicos, es decir, de la ecuación de onda.

De los varios temas importantes para la arqueoacústica, se han seleccionado tres grandes áreas, que cubren los conceptos básicos que requeriría el marco teórico de la arqueoacústica y, por lo tanto, deben ser considerados en la elaboración de la metodología. Cada una de estas áreas se tratará en los capítulos que componen esta tesis, enlistados a continuación:

### **Arqueología e historia maya.**

Como parte fundamental del estudio de un sitio arqueológico es necesario conocer la historia de la cultura que lo construyó. Esto implica adquirir una noción general de varios aspectos de la misma, como por ejemplo la religión, la ciencia (en particular astronomía y matemáticas), el arte, la organización sociopolítica, etcétera. Esto

---

<sup>4</sup> La similitud entre estas disciplinas se explicará más adelante.

permitirá entender mejor las razones y los parámetros que se siguieron al edificar el sitio. Para profundizar en este conocimiento, es vital recurrir a las investigaciones arqueológicas, pues el estudio debe ir más allá de las fuentes escritas e históricas. De esta forma, se completará la apreciación cultural y el desarrollo de la cultura en cuestión.

### **Marco teórico físico-matemático.**

Al hablar de sonido y su comportamiento, es importante comprender su descripción físico-matemática: la ecuación de onda. Esto será la base para entender la forma en que el sonido, y eventualmente la música, se comporta en distintos espacios y las distintas interacciones de los distintos fenómenos acústicos auditivos y cognitivos más complejos con las fuentes de sonido y la arquitectura particular del sitio.

Para refinar esta noción, se requerirá comprender cómo es que el sonido se ve afectado por distintas variables, como la densidad del aire y la humedad presente, la absorción o reflexión que tengan los diversos materiales en que rebote el sonido y la forma en que la estructura de los edificios involucrados modifique la dinámica de las ondas sonoras. Estos puntos son evaluados e interpretados mediante las condiciones de frontera.

### **Métodos numéricos y simulación por computadora.**

Gracias a las computadoras es posible desarrollar un modelo realista del efecto acústico que se estudia, tomando en cuenta las características del espacio en que se lleva a cabo. Esto permite realizar un análisis que, de otra forma, llevaría mucho tiempo, siendo en ocasiones imposible completarlo. Además, este método permite introducir variaciones en los parámetros generales y las condiciones de frontera para conocer e interpretar mejor la susceptibilidad del efecto a dichos cambios; por ejemplo, se pueden modificar las características estructurales o geométricas del edificio o las cualidades de absorción/reflexión de los materiales empleados (lo cual ayuda a darse una mejor idea de la intencionalidad en la arquitectura utilizada), así como la posición e intensidad de la fuente de sonido.

En un nivel más especializado, es importante conocer de qué forma trabajan dichos modelos, la base que utilizan para operar, es decir los métodos numéricos, de los

cuales existe una gran variedad. En particular, el modelo elaborado en esta tesis se desarrolló en el programa Femlab, basado en elemento finito, mismo que es explicado en este capítulo.

En las conclusiones se llega a dos planteamientos importantes. El primero es que la arqueoacústica requiere de la participación de investigadores y estudiosos de muchas disciplinas, algunas de las cuales se mencionan en la tesis. Asimismo, se proporcionan elementos específicos de la contribución que puede hacer cada especialista. Uno de los objetivos finales de esta disciplina es lograr una visión múltiple, profundizando en cada aspecto de la investigación, para poder relacionarlos e integrarlos en una perspectiva más general y completa.

El segundo planteamiento se refiere a la arqueoacústica en general y a su estado actual. Es claro que el interés por estos temas e investigaciones va en aumento, pero sigue siendo un privilegio de pocos su conocimiento, por lo que se hace énfasis en la necesidad y conveniencia de una mayor y mejor divulgación. Además, es necesario cimentar mejor esta disciplina, comenzando por el desarrollo e implementación de una metodología propia y adecuada.

## **I. ARQUEOACÚSTICA**

En muchos de los sitios arqueológicos que podemos encontrar en México se dan efectos acústicos, la mayoría contemplados como simple curiosidad. Sin embargo, estos efectos, por el simple hecho de darse en un sitio arqueológico, forman parte del mismo y, por lo tanto, de la cultura que lo edificó. Para poder entender la verdadera relevancia de estos efectos dentro de dicha civilización, se necesita un estudio a profundidad que, además de aspectos arqueológicos, integre un análisis interdisciplinario. En efecto, disciplinas como las matemáticas, la física, la arquitectura, la antropología, la etnología y sus diversas vertientes (como pueden ser la acústica, la etnomusicología, entre otras) tienen un papel importante. Es a la hora de llevar acabo dicho análisis, que estas disciplinas intervienen en la búsqueda de una mayor comprensión de la civilización que construyó estos sitios.

En el ámbito del estudio de sitios arqueológicos desde una perspectiva multidisciplinaria están la arqueoastronomía y la etnoastronomía. Hoy en día muy

importantes para comprender el papel de los observatorios y marcadores astronómicos dentro de cada sitio. La etnoastronomía, referente a prácticas etnográficas actuales, integra la etnografía y la antropología con la astronomía (Broda 1991). En cuanto a la arqueoastronomía, esta disciplina recupera tanto la parte arqueológica e histórica, como la matemática y, por supuesto, la astronómica. Siguiendo una línea similar, e incluso coincidente, se desarrolla la arqueoacústica, que se enfoca más en el aspecto acústico de cada sitio, dentro del panorama arqueológico. Este término es usado por primera vez por Chris Scarre (2006) en el libro *Archaeoacoustics*. Si bien los trabajos desarrollados en este libro comprenden un objeto de estudio mucho más amplio, espacial y temporalmente, el término es perfectamente aplicable al trabajo que aquí se realiza.

### **Visión general.**

La necesidad de estudiar la acústica de los sitios arqueológicos, así como los efectos que se encuentran en cada uno, no responde simplemente a la curiosidad, como tampoco significa un estudio acústico casual de una estructura dada. El objetivo es incrementar nuestro entendimiento, mediante estos estudios, de las culturas antiguas.

Ecos y sonidos amplificados, atenuados o distorsionados van más allá de datos curiosos y atractivos; son elementos inherentes al sitio donde se dan. Más adelante se darán argumentos para sustentar el hecho de que estos efectos están relacionados con aspectos, tanto culturales como arquitectónicos y artísticos, los cuales, a su vez, pueden ayudar a entender a fondo la función que desarrollaban dentro de la cultura en cuestión. De esta forma el estudio, y posterior entendimiento de estos efectos, nos ayudará a ampliar nuestro conocimiento y comprensión de cada sitio y, por lo tanto, de la cultura que lo construyó. Si podemos además considerar que la estructura ha conservado sus características arquitectónicas esenciales, estos efectos son de los pocos vestigios que han sobrevivido al paso del tiempo, permitiéndonos un acercamiento y una profundización en la comprensión de las culturas antiguas.

Ahora bien, es importante poder discernir entre un efecto acústico que fue expresamente considerado en la construcción de un edificio o espacio y una simple coincidencia de factores estructurales. Esto no es trivial ni mucho menos; de hecho, el determinar la intencionalidad de los constructores con respecto al efecto en sí, implica un reto enorme y, dentro de la arqueoacústica, representa un elemento vertebral.

¿Por qué es tan difícil determinar la intencionalidad? en primer lugar, las restauraciones realizadas en cada sitio afectan, de una u otra forma, la estructura original; también, al momento de reconstruir un sitio, se pueden usar materiales distintos a los que se utilizaron en un principio (hay que recordar, y considerar en su momento, que la mayoría de los edificios mesoamericanos estaban cubiertos de estuco, material que, por ser hecho con materiales de cada región, varía en sus propiedades de respuesta acústica), modificando de esta forma las propiedades físicas, y por tanto acústicas, del edificio.

La interpretación de los vestigios arqueológicos representa un gran reto, sobre todo si dicho objeto es una ciudad antigua. Todos estos elementos forman parte de un gran todo, la forma en que cada parte se articulaba con las demás nos es desconocida. Entender estas relaciones es un esfuerzo imaginativo que corre el riesgo de convertirse en una proyección, ciertamente distorsionada, de nuestra propia sociedad. Si bien existen elementos compartidos entre las culturas antiguas y la nuestra, también es cierto que el estudio de las civilizaciones indígenas puede revelar formas originales de creencias o de ritos (Baudez 2004:17). Aunque los parámetros actuales de música, arquitectura, arte, etcétera, pueden ser muy distintos a los de las culturas antiguas, existen coincidencias en ambos, sobre todo al hablar cognitivamente (qué tonos y frecuencias son más agradables para el oído, por ejemplo). Sin embargo, dado que estos elementos compartidos pueden ser muchos, pero no todos y tampoco los más significativos, es importante realizar este estudio evitando aplicar esquemas modernos, sobre todo al momento de categorizar y analizar culturas antiguas (en su mayoría diferentes). Ciertamente existen referentes actuales que ayudan a una mejor comprensión e interpretación, pero sigue siendo una línea muy delgada la que separa una mirada crítica de una interpretación arbitraria o deformada.

Es aquí donde intervienen de manera fundamental la arqueología, la antropología y la etnografía. Es por medio de estas disciplinas que podemos formarnos un marco de referencia al momento de rescatar y utilizar distintos elementos de la investigación. Es decir, gracias a estas, se puede llevar a cabo el estudio en un contexto más adecuado y metodológicamente bien determinado.

De la arqueoastronomía, por otra parte, vale la pena rescatar la importancia que se le da a las características arquitectónicas de ciertos edificios: su configuración, orientación, materiales arqueológicos, la iconografía asociada, etcétera. El trabajo de Tichy (1991) en la Cuenca de México, habla precisamente de la forma en que se utilizaban estos parámetros, relacionando la arquitectura con el espacio, para la planeación de los pueblos.

### **Planteamiento teórico y práctico.**

El papel de la arqueoacústica, es proporcionar herramientas para realizar la investigación, principalmente en forma de modelos físicos y matemáticos que describan los efectos acústicos que nos interesan, pero también a través de investigaciones paralelas, o complementarias, desde una perspectiva conceptualmente distinta, que incorpore ideas y elementos de las distintas ciencias involucradas<sup>5</sup>, al proporcionar así una línea de investigación totalmente nueva, pero sustentada en metodologías y disciplinas tan sólidas como la arqueología y las ciencias físico-matemáticas. Esto responde a la necesidad de investigar estos espacios arquitectónicos con mayor profundidad y con nuevos enfoques de análisis (Zalaquett 2006:9).

Como toda disciplina científica, la arqueoacústica se puede aplicar en una gran cantidad de casos, y en cada uno variarán los resultados buscados; en general, lo que se busca es rescatar y estudiar el legado acústico de cada sitio, al complementar y enriquecer el conocimiento que la arqueología proporciona, utilizando elementos propios de la acústica, dentro del contexto de las matemáticas. Más aún, la arqueoacústica tiene como uno de sus fines principales, tal vez el más importante,

---

<sup>5</sup> Francisca Zalaquett al respecto incorpora teorías y metodologías sobre espacio y ritualidad, propuestas tanto por antropólogos sociales, como por teóricos de la representación.

determinar la intencionalidad al momento de edificar ciertos edificios o utilizar algún espacio, partiendo del análisis de las características acústicas de estos sitios, con la exactitud, o el margen de error que permiten las matemáticas.

Esta intencionalidad puede ser situada en alguna de las siguientes categorías:

La primera es la intencionalidad total; es decir, que tanto en el diseño como en la planificación del recinto haya sido tomada en cuenta, e incluso priorizada, la acústica propia del mismo. Esto implica, entre otras cosas, que el edificio fuera pensado para un propósito específico, generalmente de índole religiosa y/o artística,<sup>6</sup> dentro del cual la acústica, o el efecto en particular, jugara un papel importante. En un lugar así se hallaría una alta susceptibilidad del efecto acústico al mínimo cambio en las condiciones físicas, tales como la estructura del edificio y el material de las superficies. Un buen ejemplo de esta categoría es el de los teatros griegos. El interés de esta civilización por los fenómenos acústicos es ampliamente conocido. En los escritos de Plinio El Viejo (Siglo IV A.C.), hay muestras del entendimiento y comprensión a cierto nivel de los fenómenos acústicos como la dispersión, la reflexión y absorción del sonido. Sin embargo, no es sino hasta los tratados de *Arquitectura* de Marco Vitrubio, en el Siglo I A.C. que se tiene el primer documento que conecta explícitamente estos conocimientos con la arquitectura de los teatros grecoromanos. La forma en que estos conocimientos fueron aplicados en sus teatros todavía es campo fértil para la investigación. En la acústica de teatros grecoromanos, el efecto más importante es la reflexión del sonido por la superficie de la *orchestra*, el lugar donde el coro cantaba y danzaba, el cual incrementa, de cuarenta y dos a sesenta metros, la distancia máxima en la que el habla es inteligible (Rocconi 2006)

Después está la intencionalidad media. Esto es, que un lugar que presente cualidades acústicas especiales, haya sido modificado o empleado para resaltar el simbolismo del sitio o edificio construido. Es dentro de esta categoría que van a quedar situados la mayoría de los casos; puesto que lo más probable es que la gente que los diseñó o modificó, tratase ya sea de templos y pirámides o de pinturas rupestres, lo haya hecho buscando satisfacer ciertos requerimientos acústicos que le

---

<sup>6</sup> Esta afirmación, como se verá más adelante, proviene del hecho de que, en su mayoría, los efectos acústicos se dan en edificios de tipo religioso y/o artístico, sobre todo dentro de la civilización maya.

haya permitido resaltar aspectos o implicaciones artísticas o religiosas, pero siguiendo un método indirecto, tal vez de prueba y error. Dado que son tantos los casos que se tratan aquí, es difícil, por el momento, establecer una base que permita afirmar cuáles habrían sido los métodos utilizados por los constructores. Probablemente este es uno de los puntos que requieren más investigación a futuro.

Por último hay que tomar en cuenta el caso de que no exista ninguna intención; es decir, que haya sido mera casualidad la presencia de algún fenómeno acústico y que este no haya sido observado o, aun siendo observado, no fuera incorporado funcionalmente. Es incluso pertinente considerar la posibilidad de que las características acústicas del edificio o espacio en cuestión no hayan sido buscadas o notadas por los constructores. Para ejemplificar esta categoría está la gran cúpula de la Catedral de St's Paul en Londres, conocida como la *galería de los susurros*; aquí, una persona hablando en voz muy baja frente a la pared puede ser escuchada del otro lado de la cúpula de cuarenta y dos metros de distancia. Sin embargo, este efecto acústico nunca fue pensado en el diseño y construcción de la bóveda, además no existen indicios o pruebas de haber sido utilizado en algún acto ceremonial de la catedral (Downes 1988).

Es importante mencionar que la categorización previa es simplemente una guía y no busca, en ningún momento, ser definitiva. A pesar de que se ha tratado de delimitar lo mejor posible cada una de las categorías, puede resultar extremadamente difícil determinar exactamente a cuál de ellas pertenece cada caso, ya que existen variables y elementos incidentes que se deben tomar en cuenta. Por ejemplo, las características de cada civilización involucrada (religiosas, artísticas, históricas, etc.), las restauraciones, la estética, los cambios climáticos, e incluso la pura casualidad. Además, hay que considerar la evolución de un sitio, paralela a la de la cultura que lo edificó.

Scarre (2006), en la introducción del libro *Archaeoacoustics*, resume muy bien esta dificultad al

[...] considerar lo siguiente: el que un sitio no presente características acústicas particulares, no necesariamente implica que el sonido no haya tenido un lugar importante en la cultura (o en ese sitio en

particular). Pero, por otro lado, el hecho de que un edificio tenga una acústica especial no se puede usar como argumento definitivo al determinar si el sonido formaba parte fundamental en la civilización en cuestión o no. Además, se debe tener en cuenta que cualquier construcción, con intención de por medio o no, tiene una acústica característica.

### **Metodología.**

Una vez que se ha delimitado el campo de estudio y se cuenta con herramientas adecuadas, queda pendiente desarrollar una metodología propia acorde al estudio que se quiere llevar a cabo y, por supuesto, a los resultados que se esperan obtener.

Esta metodología debe considerar todos los factores involucrados, siempre considerando el carácter multidisciplinario de la investigación que se está llevando a cabo. Dado que este es un campo multidisciplinario esencialmente nuevo, no existe aún dicha sistematización; la mayoría de los trabajos elaborados a la fecha se centran en la obtención de resultados, a veces utilizando métodos de otras disciplinas, en el mejor de los casos de varias. Queda claro que este es un paso que requiere de inmediato estudio, pues de ello depende la correcta realización de cada investigación en el campo.

Francisca Zalaquett (2006), en su trabajo sobre el significado social de las plazas en el Grupo Norte de Palenque, proporciona elementos para estudiar estos espacios.

Establece, para comenzar, que la arquitectura es una manifestación cultural con significado tanto en las construcciones como en los espacios que la circundan; pero recalando la importancia de considerar que éstas son lugares de interacción humana y por lo tanto, dentro del contexto cultural, es necesario especificar el público al que va dirigido este lugar (Zalaquett 2006:11). Este es un factor muy importante, pues es bien sabido cómo afecta a la acústica de un lugar la cantidad de gente que se encuentre dentro, así como su disposición. Es en este mismo trabajo donde utiliza, como ya se había mencionado anteriormente, algunas herramientas y métodos de la arqueoastronomía; pero recurriendo también a mediciones acústicas en el sitio.

Se verá entonces que uno de los métodos más importantes y necesarios utilizados por la arqueoacústica es la realización de mediciones acústicas *in situ*, tanto del sitio en cuestión y de los instrumentos utilizados, como del resto de los elementos involucrados, dígase condiciones atmosféricas, materiales, etc. Este es precisamente el punto clave de la unión entre arqueología y acústica. En efecto, dichas mediciones nos proporcionan datos que, posteriormente, servirán para definir la relación entre la arquitectura y diseño del recinto (al igual que de la acústica resultante) con otros aspectos de la cultura respectiva, así como de su interacción con el resto de los elementos mencionados.

En el artículo *Arqueoacústica Maya*, Garza y Medina (2008) definen, a grandes rasgos, cuatro planos distintos en los que se debe entender y tratar el hecho de escuchar:

- 1) Estrictamente físicos.
- 2) Fisiológicos y cognitivos.
- 3) Su significado como parte de manifestaciones culturales, religiosas, artísticas, etc; y,
- 4) Mediante modelos matemáticos.

En este estudio, y en general en la arqueoacústica, se hace énfasis en el tercer punto, es decir, el significado del sonido en manifestaciones y representaciones culturales, así como la interpretación que se le puede dar a este aspecto hoy en día, utilizando las herramientas con que contamos<sup>7</sup>. Sin embargo, es necesario no dejar de lado los otros puntos, pues es mediante un estudio integral que se podrá llegar a los resultados deseados. En cuanto al cuarto punto, en el siguiente capítulo se presentarán varios modelos, en los que se trata un efecto acústico en particular.

Un elemento importante son los instrumentos musicales que se pueden rescatar de los sitios arqueológicos en nuestros días, tanto porque pueden ser caracterizados acústicamente, como por lo que representaban en su tiempo, o por las decoraciones que puedan tener; sin embargo, una de las razones principales es que

---

<sup>7</sup> Para un estudio más profundo de los cuatro puntos, referirse al artículo citado.

estos instrumentos, muy probablemente, eran los que interactuaban acústicamente con las estructuras (por partes o en su totalidad) que se están investigando.

Así mismo, estos instrumentos nos dan una muestra del tipo de sonidos que eran producidos y utilizados en cada cultura, permitiéndonos reducir la gama de frecuencias que deben ser estudiadas o, mejor dicho, centrándonos en las frecuencias que tienen una mayor relevancia dentro de la cultura (acústicamente hablando).

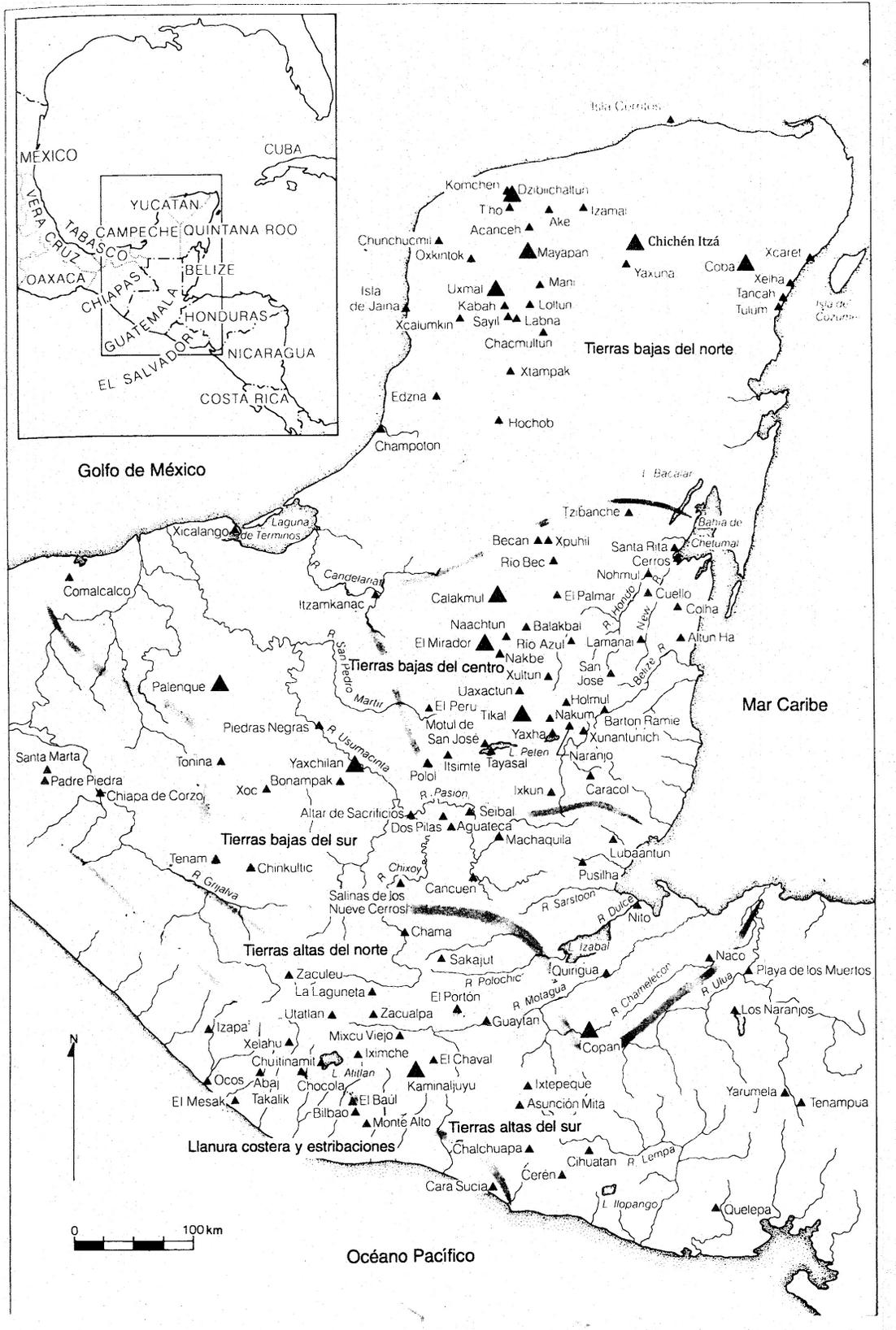
En lo referente a los instrumentos prehispánicos, Roberto Velázquez (2002) realizó algunos trabajos, sobre todo modelos y simulaciones, sobre silbatos prehispánicos, algunos de ellos encontrados en la Pequeña Acrópolis de Yaxchilán.

Un punto a tomar en cuenta es que, probablemente, el instrumento musical más utilizado, fue la voz humana. Sin embargo, hace falta un estudio que determine de manera precisa en qué forma era usada la voz en estos sitios, sobre todo dentro de ritos políticos y/o religiosos.

Es necesario señalar que la dimensión acústica de las sociedades mesoamericanas, e incluso de los pueblos indígenas contemporáneos, sigue siendo ampliamente desconocida e inexplorada; esto a pesar de que dicho aspecto forma parte esencial de la cosmovisión de cada cultura. El ejemplo más claro es el de la música prehispánica; aun cuando conocemos los instrumentos y distintos detalles de la forma en que se representaban danzas e interpretaciones musicales, no tenemos registro alguno de esta música. Lo que se pueda recuperar de los pueblos actuales está ya influido por los estilos impuestos por los colonizadores hispanos.

Hasta este punto se han dado numerosos elementos y consideraciones importantes para el desarrollo de una metodología adecuada; asimismo, hay mucho que se puede retomar de la arqueoastronomía. Existen a la fecha algunos trabajos con importantes aportaciones, en especial el de Zalaquett; sin embargo, hay aún mucho que hacer; es aquí donde más participación se requiere.

## **II. LOS MAYAS**



## Mapa de la zona maya.<sup>8</sup>

La civilización maya prehispánica se encontraba, geográfica y culturalmente, dentro de Mesoamérica. Ocupaba la península de Yucatán, Guatemala, Belice y algunas partes de El Salvador y Honduras. Incluso cuando se considera como una sola cultura, se pueden identificar tres grandes zonas dentro del área que ocupaban los mayas, las cuales presentan significativas diferencias culturales, así como variantes lingüísticas importantes:

- Litoral del Pacífico
- Tierras bajas centrales y meridionales
- Tierras bajas del norte

De la misma forma, la historia de esta civilización se divide en tres periodos: Preclásico, Clásico y Posclásico, que a su vez se dividen en temprano, medio y tardío. Del primer periodo, sólo mencionaremos que fue en sus inicios cuando esta civilización comienza la construcción de estructuras monumentales. Como muestra baste mencionar el grupo de La Danta, en El Mirador, con 70 m. de altura, así como la pirámide del Mundo Perdido, en Tikal, de más de 20 m. de altura y 80 m. de base (Baudez 2004:23)

En el periodo Clásico aparecen elementos importantes como lo son la falsa bóveda, las estelas, la escritura jeroglífica y el uso de la Cuenta Larga. En este periodo se identifican los primeros rasgos provenientes del centro de México, entre ellos la serpiente emplumada (Baudez 2004:26). Esto no es de sorprender, pues ya desde el periodo anterior los mayas tenían una amplia red de comercio con distintas partes de México.

Si bien en este periodo, aun en sus etapas tardías, la civilización maya se desarrolló linealmente, en el Posclásico se dieron cambios significativos; la caída de Teotihuacan, ciudad que proporcionaba cierto equilibrio en Mesoamérica, da lugar a un amplio intercambio comercial hacia y entre toda la zona maya (Baudez 2004:23).

---

<sup>8</sup> Mapa tomado de Sharer, Robert (2003:37)

La cultura maya es sumamente interesante; particularmente, dentro del contexto mesoamericano, por ser una de las más complejas. A pesar de haber heredado varios elementos importantes de las culturas olmeca y tolteca, como se verá más adelante, los mayas lograron importantes avances en aspectos culturales, artísticos e intelectuales.

Fue de los olmecas que se heredaron sistemas, ya avanzados de por sí, que sirvieron de base para desarrollar la escritura y la cuenta calendárica. La escritura es un logro esencial en sí misma, pero vale la pena mencionar que, de toda las culturas que florecieron en Mesoamérica, los mayas fueron de los únicos (junto con los zapotecas y los mexicas) que crearon y dominaron un sistema propio.

El calendario, por otra parte, sirvió como base y guía primordial para cuestiones religiosas, rituales y políticas. Además de su alta precisión, este calendario fue el único que midió el tiempo utilizando la cuenta larga, a pesar de Para llevar las cuentas, se valían de un ciclo solar de 365 días aproximadamente, pero lo complementaban con un ciclo ceremonial de 260 días (Baudez 2004:17).

La religión en las culturas prehispánicas, y en particular en la maya, jugaba un papel fundamental; no sólo culturalmente, pues también estaba íntimamente ligada a la política y, por tanto, al poder. No es casualidad que los edificios y, en general las estructuras, que perduran hasta nuestros días sean, en su mayoría, lugares dedicados al culto y a las manifestaciones religiosas y políticas. En efecto, eran estos edificios a los que se dedicaba mayor empeño y dedicación; se ponía especial cuidado a la hora de su construcción, tanto en los materiales, como en la arquitectura y estética. Estos lugares eran escenario de una de las manifestaciones más importantes durante la ejecución de rituales públicos, dentro de estas culturas: la música. El manejo del sonido como otra forma de percepción unida a lo visual es de gran importancia para comprender los mensajes y las sensaciones transmitidas dentro de estos rituales (Zalaquett 2006:20).

Como se verá más adelante, la importancia de estos edificios, permite suponer que no es casualidad que ahí se presenten la mayoría de los efectos acústicos conocidos. Hay que recordar el papel que jugaban durante ceremonias y ritos, aunado a la relevancia que se le daba al sonido y, sobre todo, a la música.

Durante el periodo Posclásico temprano, es Chichén Itzá la ciudad que permanece como el principal centro urbano de la península de Yucatán. Es ahí también donde se encuentran varios ejemplos de efectos acústicos relevantes, por lo que se centrará la atención en dicha ciudad.

### **CHICHÉN ITZÁ.**

A finales del periodo Clásico, Chichén Itzá era una pequeña ciudad de estilo Puuc. Sin embargo, al iniciar el Posclásico, esta ciudad entra en una etapa de notable desarrollo en varios aspectos, especialmente arquitectónicos e iconográficos, marcado por la influencia tolteca, proveniente de Tula. Es por esta razón que se hace una distinción entre el Chichén Itzá del Clásico y el del Posclásico, también llamado Chichén Itzá tolteca (Baudez, 2004:28).

Estas influencias impulsarán innovaciones en diversas representaciones culturales que, a su vez, causarán importantes cambios en la organización política y religiosa de Chichén Itzá. En efecto, se cree que desde el periodo Clásico terminal, era un grupo de individuos el que sustentaba el poder de la ciudad, en lugar de un soberano único.

Entre las muchas implicaciones que la división del poder puede tener, la que ha de interesarnos más es que, muy probablemente, en la ciudad existían varios linajes importantes, o varios grupos distintos, de guerreros.<sup>9</sup> Esto lleva a que la demostración y ostentación del poder sea muy importante, ya fuera por los gobernantes, o por el resto de los grupos.

Es entonces cuando entran en juego las ceremonias religiosas. Los templos eran una representación del cosmos, donde el altar o templete, en que se realizaban las acciones rituales, tales como ofrendas y sacrificios, simbolizaba un plano superior, más próximo a las deidades. De esta forma, el recorrido que realizaban los sacerdotes o dirigentes hacia el ofrendario, simbolizaba un acercamiento a los dioses.

Sin embargo, esto no era lo más importante; aun cuando aparentara encontrarse en segundo plano, el hecho de que los asistentes pudieran ver este

---

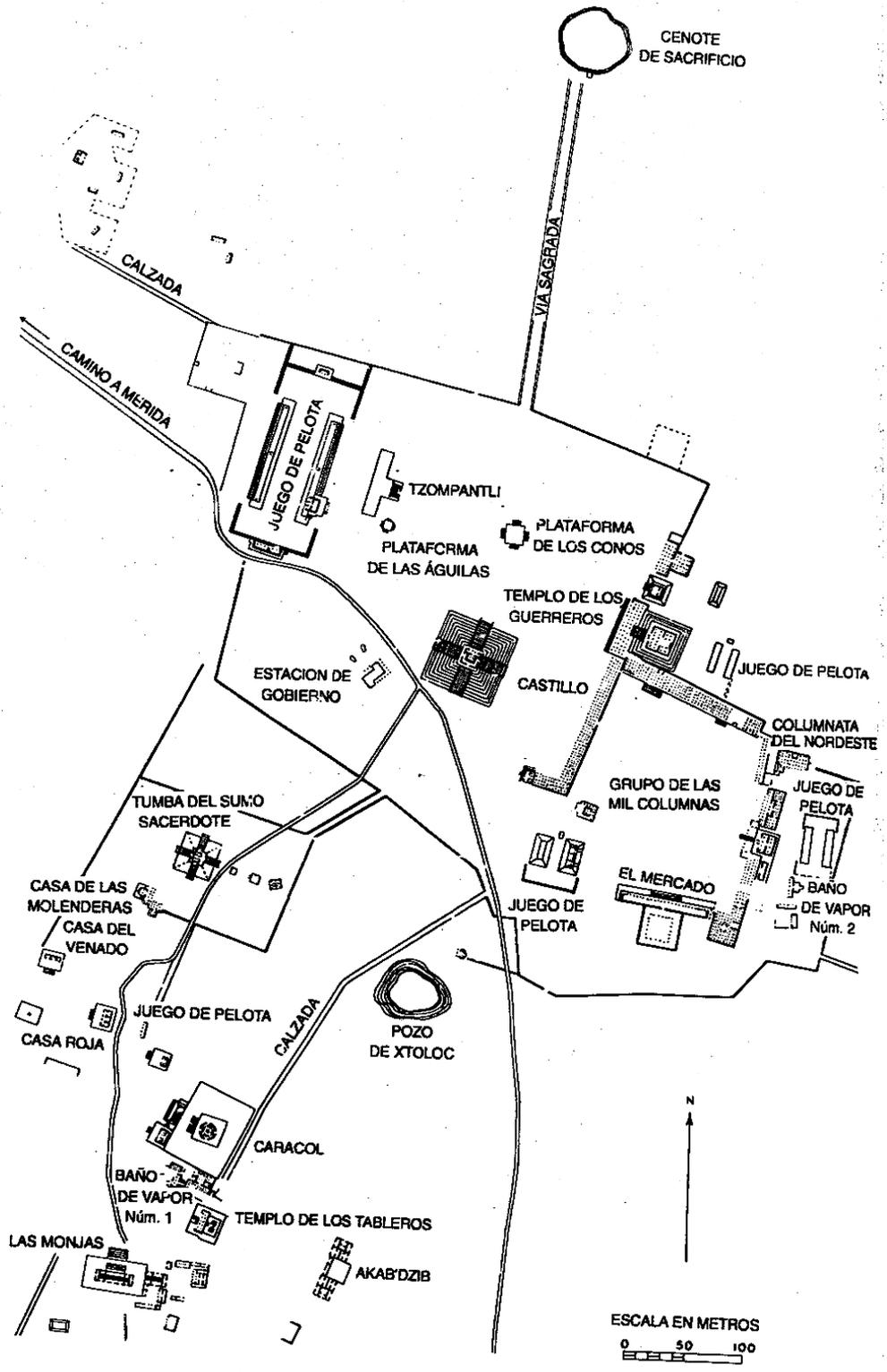
<sup>9</sup> Dos ejemplos: el primero, los guerreros 'serpiente', nombrados así por representarse siempre acompañados de una serpiente parcialmente emplumada; el segundo, los guerreros que ostentan un disco solar con rayos. Este último era, posiblemente, un personaje con mayor jerarquía que el anterior.

acercamiento era fundamental para validar la autoridad; reafirmando, de esta forma, la estrecha relación entre la religión y el poder. Así, entre más gente presenciara esto mejor. Era, por lo tanto, un objetivo fundamental, al construir estos lugares, permitir que dicha exhibición pudiera llegar a más personas.<sup>10</sup>

De la misma forma que en una obra de teatro, era conveniente realizar dichas actividades en un lugar cuya acústica propiciara un mejor entendimiento del mensaje que se trataba de transmitir.

---

<sup>10</sup> Esto considerando que dicha exhibición tuviera un carácter público, pues también las había privadas.



M

Mapa de Chichén Itzá<sup>11</sup>

<sup>11</sup> Mapa tomado de Sharer, Robert 2003:376

Dos de los edificios más importantes de Chichén Itzá presentan efectos acústicos interesantes. El primero es el Gran Juego de Pelota. Esta estructura, una de las diecisiete canchas de este tipo que se encuentran en el sitio,<sup>12</sup> es la más grande encontrada en Mesoamérica. Las impresionantes paredes laterales contribuyen a generar una amplificación del sonido, pero de una forma muy localizada: dos personas situadas en los dos templete del juego (una en cada uno), pueden mantener una conversación sin necesidad de elevar el volumen de la voz. Esto es algo muy notable, pues ambos templete están separados aproximadamente ciento sesenta metros.

El segundo edificio en el que se puede apreciar una acústica muy particular, es El Castillo, o pirámide de Kukulcán.<sup>13</sup> Esta pirámide, con planta cuadrada, domina la parte norte del sitio. Está conformado por nueve plataformas, y sobre la superior se encuentra el templo propiamente dicho. A su vez, cada cara tiene una escalinata, que se cree tenían originalmente los noventa y un escalones con los que cuenta hoy en día. Se han hecho un sinnúmero de combinaciones numéricas con los escalones y las plataformas (por ejemplo que sumando los escalones de cada escalinata, más el escalón último que representaría la superficie superior, da 365, número de días que tenía el año maya), pero no entraremos en detalle al respecto. Llama la atención que la escalinata principal, ubicada en la cara norte,<sup>14</sup> está enmarcada por dos cabezas de serpiente.

El Castillo se encuentra situado frente a la plaza principal del sitio, misma que es flanqueada por el Gran Juego de Pelota, el Templo de los Guerreros y la Plataforma de Venus, también conocida como Plataforma de los Conos, pues Le Plongeon descubrió en ella un conjunto de conos de piedra (Baudez, 2004:280)<sup>15</sup> que, en

---

<sup>12</sup> De hecho, el tener esta cantidad de juegos de pelota convierte a Chichén Itzá, junto con el Tajín, en uno de los sitios mesoamericanos con mayor cantidad de canchas de esta naturaleza.

<sup>13</sup> Vale la pena mencionar que Baudez (2004:281). afirma que el templo de Kukulcán, más que ser dedicado a una deidad, era un templo dinástico.

<sup>14</sup> A pesar de que se le conoce como cara norte, esta no mira exactamente a dicho punto cardinal, pues está desviada unos 17° al Este.

<sup>15</sup> Una referencia más precisa, aunque igual de breve, se puede encontrar en la tesis que hace Lawrence Gustave Desmond *Augustus Le Plongeon: Early maya archaeologist* publicada por la Universidad de Colorado en 1983.

opinión de ciertos investigadores, podrían ser utilizados como instrumento de percusión.

Al ser el punto más alto, no sólo en la plaza, también en todo el sitio, la cima de El Castillo tenía una importancia capital si se deseaba dirigirse a un grupo de personas ubicadas en dicha plaza. No es de sorprender, por lo tanto, que una persona ubicada en lo alto de la pirámide pueda ser escuchada en toda la plaza sin necesidad de elevar demasiado el volumen de su voz.<sup>16</sup>

El primer efecto que se encuentra en esta estructura es el siguiente: si una persona sube o baja por esta escalinata, sus pasos producen un sonido muy semejante al de gotas cayendo sobre agua. Para percibir este sonido, es necesario que exista cierta distancia entre quien camina y quien escucha.

El segundo efecto que es el que más ha acaparado la atención, tanto del público en general, como de diversos investigadores, es el conocido como la 'Cola de Quetzal'. Este efecto se puede resumir de la siguiente forma: si una persona ubicada frente a la escalinata aplaude, o emite un sonido parecido a un pulso, el eco que recibirá de la estructura será muy similar al canto de un Quetzal.<sup>17</sup>

Aquí empieza el trabajo de la arqueoacústica, pues surgen una gran variedad de preguntas, dudas y posibilidades al respecto. Para empezar, se tiene que determinar qué tan parecido es este eco al canto real de un quetzal, además de fijar los parámetros dentro de los cuales se podrá hablar efectivamente de esta similitud.

Pero eso es sólo el principio, pues lo verdaderamente importante es llevar a cabo una investigación que permita decir qué tan susceptible es este efecto a la estructura de El Castillo y, en particular, a la escalinata norte. Esto, dentro de un contexto arqueológico, histórico y antropológico, nos llevará a proponer un nivel de intencionalidad por parte de los constructores.

Este efecto, como se mencionó, ha sido estudiado por varios investigadores desde el punto de vista acústico; los trabajos correspondientes tienen como objetivo explicar qué mecanismos físicos intervienen en la generación del mismo. Para una

---

<sup>16</sup> Esto fue comprobado experimentalmente en el primer viaje que se hizo a Chichén Itzá.

<sup>17</sup> El que esta persona esté situada de frente a la escalinata es necesario para que esa misma persona escuche el eco. De encontrarse fuera, el eco se escuchará del otro lado de la escalinata (como si este fuera reflejado de forma simétrica).

rápida revisión de los principales estudios, se toma el siguiente texto de la tesis para licenciatura de Tonatiuh Ruiz, *Análisis acústico del efecto “Cola de Quetzal” en “El Castillo” de Chichén Itzá, Yucatán.*

Entre los trabajos más importantes acústicamente están los hechos por David Lubman, Nico F. Declercq y Frans A. Bilsen. A continuación se muestra un sumario de los trabajos acústicos realizados.

El primer trabajo acústico sobre la “Cola de Quetzal” fue elaborado por el ingeniero americano David Lubman en 1998, en una conferencia dada en un congreso de la Sociedad Americana de Acústica (ASA) (Lubman 1998b). Además de plantearse por primera vez una intencionalidad en el efecto “Cola de Quetzal”, también se planteó una primera explicación física al efecto. Se propone principalmente que la escalinata de “El Castillo” actúa como una red de difracción de Bragg. Sobre esta presentación pueden encontrarse dos páginas electrónicas (Lubman 1998c; Lubman 1998a).

Este trabajo llamó mucho la atención por su hipótesis de una intencionalidad y como resultado se publicaron varios artículos de divulgación en revistas impresas y electrónicas (Ouellette 1999; Weiss 1999). Además de esta conferencia, D. Lubman ha presentado más sobre el eco barrido de “El Castillo” y también sobre los efectos acústicos que suceden en el Gran Juego de Pelota (Lubman 1998c; Lubman 2002; Lubman 2005; Lubman 2006b; Lubman 2006a). Aunque sus trabajos son referenciados por muchos autores, sólo se pueden encontrar transcripciones de algunas presentaciones en Internet (Lubman 1998c; Lubman 1998a; Lubman 2006b). Hasta el momento este autor no ha publicado sobre el tema en ninguna revista científica indexada. A partir del trabajo de D. Lubman el efecto de la “Cola de Quetzal” ha sido abordado por varios investigadores. En el 2002 en un congreso panamericano de la ASA en Cancún, se realizó una sesión en la que varios expositores mexicanos y de otros países expusieron sobre este

efecto

acústico (Beristain, Coss et al. 2002; Carrera and Beristain 2002; Elizondo-Garza 2002; Kirk 2002; Lubman 2002) Del contenido de estos trabajos no se cuenta con referencias bibliográficas. A partir de esta sesión, el físico belga Nico F. Declercq, un especialista en difracción en ultrasonido, empezó una investigación con el fin de determinar el mecanismo físico que genera el eco barrido. Sobre el trabajo realizado se puede encontrar un artículo en la revista de la ASA (Declercq, Degrieck et al. 2004a), un reportaje en Nature News (Ball 2004), y otras publicaciones (Declercq, Degrieck et al. 2003a) (Declercq 2005). En el artículo mencionado, se obtuvieron simulaciones por computadora del efecto acústico aplicando su teoría de la difracción de superficies periódicas derivada de la Difracción de Rayleigh (Declercq, Degrieck et al. 2004b; Declercq 2005).

Inicialmente se comparó una simulación del eco producido por un pulso gaussiano con una grabación del eco barrido de “El Castillo” producido por un aplauso. En sus espectrogramas se encontraron algunas similitudes que implican un proceso de Difracción de Bragg en conjunto con condiciones de frontera del tipo fluido-sólido. No obstante se encontraron patrones en la grabación del eco barrido que no fueron reproducidos y cuyo origen es desconocido. Posteriormente se extrajo de la grabación del eco barrido el sonido del aplauso y se originó con este una simulación del efecto, al comparar la simulación con la grabación se encontró que estos difieren considerablemente por lo que concluyen que el efecto acústico tiene una fuerte dependencia con el sonido de la fuente.

Considerando que los modelos basados en la difracción como el de Declercq *et al.* no reproducen satisfactoriamente la “Cola del Quetzal”, el psicofísico holandés Frans A. Bilsen propuso un modelo alternativo basado en el fenómeno psicoacústico de Tono por Repetición (*Repetition Pitch* en inglés) (Bilsen 2006b). En este fenómeno cuando un sonido y su

repetición retrasada se juntan, en el escucha se percibe un tono compuesto por los múltiplos de la frecuencia “fundamental”  $1/\tau$  donde  $\tau$  es el tiempo de retraso (Bilsen 2004) (Bilsen 2006a). Considerando que el eco barrido se compone por una serie de repeticiones sonoras originadas por las reflexión de cada escalón, Bilsen utiliza un desarrollo geométrico sencillo para calcular el tiempo de retraso entre cada reflexión y de esta manera, obtener las frecuencias que componen al eco barrido. De este modo obtiene una descripción para las frecuencias que componen al eco barrido en función del tiempo que se ajusta con las medidas experimentales. A pesar de esto, no se desarrolla más su teoría y no se presentan simulaciones del efecto acústico.

Posterior al artículo de Bilsen se han presentado en congresos algunos trabajos acústicos por otros autores. Unos de ellos es un método computacional para simular ambientes acústicos de edificios el cual fue aplicado para el “El Castillo” (Tsingos, Lefebvre et al. 2007). También se han propuestos otros dos métodos para simular el eco barrido (Cruz Calleja 2008; Lubman 2008), estos trabajos no aportan explicación o mecanismo diferente ya que están basados o relacionados con la propuesta de Bilsen.

Si bien los modelos antes citados aportan elementos importantes para la comprensión del efecto acústico, ninguno logra describirlo satisfactoriamente. En efecto, estos modelos se centran en el aspecto acústico que, si bien es la parte central, no es lo único que debe tomarse en cuenta. Como se planteó desde un principio, el estudio arqueoacústico de un efecto acústico o un lugar en especial, debe considerar múltiples factores más allá de lo puramente físico. Definitivamente hace falta desarrollar un modelo que describa el efecto de mejor forma, pero eso debe ser complementado con estudios arqueológicos, históricos, antropológicos, musicales, etcétera.

### III. MARCO TEÓRICO FÍSICO-MATEMÁTICO

La acústica, en un amplio sentido de la palabra, puede ser entendida como la generación, transmisión y recepción de la energía en forma de ondas vibrantes en la materia. Cuando los átomos o moléculas en un fluido o sólido son movidas de su lugar normal de reposo, se genera una fuerza elástica restauradora.<sup>18</sup>

Ejemplos de esta fuerza son un resorte estirado o comprimido, una cuerda vibrante y el cambio de presión en un gas, los cuales se estudiarán más adelante. De hecho, se verá que para interpretar estos fenómenos, así como para poder modelarlos en un contexto matemático, es necesario recurrir a las ecuaciones diferenciales parciales.

Las ecuaciones diferenciales parciales son aquellas que involucran derivadas parciales de una función  $f$  desconocida que, en la mayoría de las aplicaciones a la física depende de variables independientes espaciales  $x, y, z$ ; además del tiempo  $t$ .

La representación usual de estas derivadas parciales es:

Primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

Segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

donde  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son iguales siempre que todas las funciones involucradas ( $f, f_x$  y  $f_y$ ) sean suficientemente diferenciables. Esta condición se cumplirá a partir de aquí.

Es común también, considerando la clase de problemas que se busca resolver, encontrar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, los cuales, al igual que con las ecuaciones de primer orden, pueden ser resueltos por métodos que se dividen en

---

<sup>18</sup> Kinsler, Frey 1962:1

dos tipos: analíticos y numéricos. Dado que los procedimientos analíticos sólo sirven para resolver determinados sistemas y que en general no es posible obtener soluciones en forma cerrada, se usarán los métodos numéricos.

### **Oscilador armónico**

El primer modelo que se verá es el de una masa unida a un resorte (ver figura 1), misma que se desliza sobre una superficie horizontal. El objetivo es calcular su movimiento cuando el resorte es comprimido o estirado y, posteriormente, liberado. En un principio, para mantener al máximo la simplicidad, se supondrá que la superficie no genera fricción; de la misma forma despreciaremos cualquier fuerza que amortigüe el movimiento de la masa aparte de la del resorte, por ejemplo la resistencia del aire.

Existen dos cantidades importantes: la que mide el desplazamiento de la masa desde su posición de reposo y la fuerza restauradora sobre la masa, causada por el resorte.

Para calcular el movimiento de la masa, se empezará por hacer  $y(t)$  la posición de la masa en el tiempo  $t$ . Para facilitar las cosas, se hace  $y = 0$  cuando la masa se encuentra en equilibrio, y se dirá, por convención, que  $y(t) < 0$  cuando el resorte se encuentra comprimido y, consecuentemente,  $y(t) > 0$  cuando se encuentra estirado (ver figura 2).

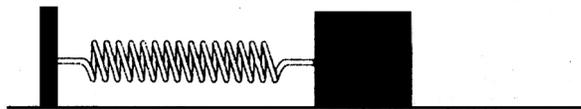


FIGURA 1. Una masa unida a un resorte. (Blanchard 1999:147)

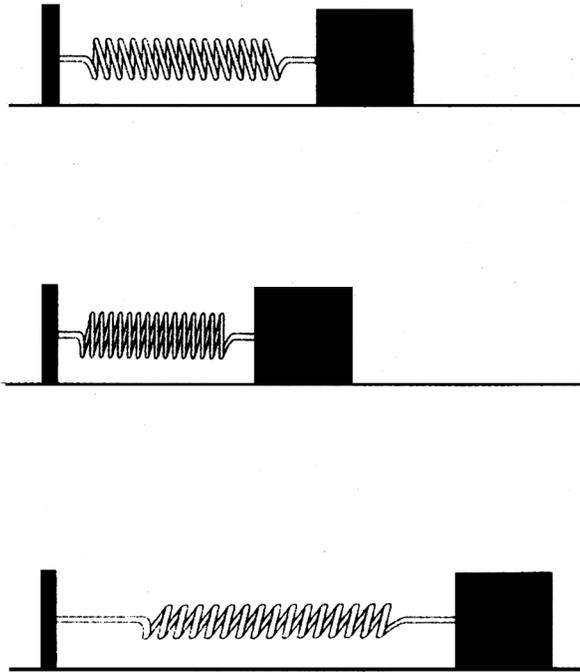


FIGURA 2. Distintas posiciones de la masa. (Blanchard 1999,147)

El punto inicial es la segunda ley de Newton, según la cual Fuerza = masa x aceleración.

Puesto que el desplazamiento está dado por  $y(t)$ , y la aceleración es  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , la ley de Newton se puede expresar como :

$$F = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

donde  $m$  es la masa del bloque. Finalmente, se debe especificar una expresión que describa la fuerza ejercida por el resorte sobre la masa. Lo cual se logra usando la ley de Hooke para resortes.<sup>19</sup> Por lo tanto se tiene:

$$F_s = -ky$$

---

<sup>19</sup> La fuerza restauradora ejercida por un resorte es linealmente proporcional al desplazamiento del resorte desde su posición e reposo y está dirigida hacia esa misma posición.

donde  $k > 0$  es una constante llamada la constante de resorte, misma que se puede ajustar cambiando el mismo. Combinando esta última expresión con la segunda ley de Newton se obtiene

$$F_r = -ky = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

que modela el movimiento de la masa. Se suele reescribir esta ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{k}{m} y = 0$$

Esta ecuación diferencial es comúnmente llamada oscilador armónico simple, o sin amortiguamiento. Para describir adecuadamente el desplazamiento de la masa, es necesario agregar dos condiciones iniciales:  $y_0$ , que corresponde al desplazamiento inicial de la masa y  $v_0$ , la velocidad inicial de la masa.

Otra forma de representar esto es por medio de un sistema de ecuaciones. Sabemos que  $v = dy/dt$ , donde  $v(t)$  es la velocidad de la masa en el tiempo  $t$ . De la misma forma, como la aceleración es la derivada de la velocidad, se puede reescribir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{k}{m} y$$

como

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{k}{m} y$$

De forma que quede el siguiente sistema:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{k}{m} y$$

Para acercar este modelo a la realidad, se debe agregar un término que represente alguna fuerza de fricción o amortiguamiento, pues sin este, la masa oscilaría de manera perpetua. Dado que la fricción es un concepto extremadamente complejo, se agruparán todas las fuerzas de amortiguamiento en un solo término, suponiendo que la magnitud es proporcional a la velocidad:

$$-b \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

donde  $b > 0$  es el coeficiente de amortiguamiento. El signo menos indica que el amortiguamiento se opone a la dirección del movimiento, de forma que siempre reducirá la velocidad.

El modelo quedaría de la siguiente forma:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -ky - b \frac{\partial y}{\partial t}$$

que se suele escribir:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky + b \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Finalmente, se simplifica al escribir  $p = b/m$  y  $q = k/m$ , para obtener:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p \frac{\partial y}{\partial t} + qy = 0$$

Esta nueva ecuación describe el comportamiento del oscilador armónico amortiguado.

Ahora, para incluir una fuerza externa se debe agregar otro término al lado derecho de la ecuación. Puede ser cualquier función, pero se suelen usar funciones constantes, exponenciales o senoidales, para simular distintos tipos de fuerzas que actúen empujando la masa. Dicha función dependerá sólo del tiempo y estará dada por  $f(t)$ .

Se tiene entonces la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p \frac{\partial y}{\partial t} + qy = g(t)$$

donde  $g(t) = f(t)/m$ .

Este es el oscilador armónico forzado.

Para encontrar la solución general de esta ecuación, se recurre al principio de linealidad ampliado:

Considerando una ecuación no homogénea (una ecuación forzada)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p \frac{\partial y}{\partial t} + qy = g(t)$$

y su correspondiente ecuación homogénea:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p \frac{\partial y}{\partial t} + qy = 0$$

1. supóngase que  $y_p(t)$  es una solución particular de la ecuación no homogénea y  $y_h(t)$  es una solución de la ecuación homogénea correspondiente. Entonces  $y_h(t) + y_p(t)$  es también una solución de la ecuación no homogénea.
2. Supóngase que  $y_p(t)$  y  $y_q(t)$  son dos soluciones de la ecuación no homogénea. Entonces  $y_p(t) - y_q(t)$  es una solución de la ecuación homogénea correspondiente.

Por lo tanto, si  $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$  es la solución general de la ecuación homogénea, entonces

$$k_1y_1 + k_2y_2(t) + y_p(t)$$

es la solución general de la ecuación no homogénea.

Considerando que los coeficientes  $p$  y  $q$  satisfacen  $q > 0$  y  $p \geq 0$ . Como en cualquier sistema físico mecánico, el amortiguamiento es positivo y el punto de equilibrio en el origen del sistema correspondiente es un sumidero. Por lo tanto, toda solución de la ecuación no forzada tiende a cero.

Al agregar el término forzado  $g(t)$ , la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p \frac{\partial y}{\partial t} + qy = g(t)$$

tiene la solución general  $k_1y_1(t) + k_2y_2(t) + y_p(t)$ , donde  $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$  es la solución general de la ecuación no forzada y  $y_p(t)$  es una solución de la ecuación forzada. Pero  $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$  tiende a cero. Por lo tanto, para  $t$  grandes se tiene

$$k_1y_1(t) + k_2y_2(t) + y_p(t) \approx y_p(t)$$

es decir, para  $t$  suficientemente grandes, todas las soluciones de la ecuación del oscilador armónico forzado con amortiguamiento ( $p > 0$ ) son aproximadamente las mismas. Esto se interpreta como que las condiciones iniciales no tienen efecto alguno sobre el comportamiento a largo plazo de las ecuaciones.

$y_p(t)$  puede representar cualquier función y es llamada la respuesta forzada. El término respuesta de estado permanente es usado para describir el comportamiento de esta función para  $t$  grandes.

Una solución del oscilador armónico no forzado es llamada respuesta natural.

Este comportamiento no es el mismo en el caso de las ecuaciones no amortiguadas, en las que el comportamiento detallado de las soluciones depende de las condiciones iniciales para todo tiempo. Más adelante se verá, utilizando un ejemplo en particular, la forma en que el comportamiento cualitativo de las soluciones depende de la frecuencia del término de forzamiento ya que, al acercarse la frecuencia de dicha función a la frecuencia natural de la ecuación, ocurre un cambio significativo en las soluciones. Este fenómeno es llamado resonancia.

### **Forzamiento senoidal**

El caso en que la función de forzamiento  $g(t)$  es del tipo seno o coseno tienen dos características cualitativas importantes. La primera es que son periódicas; es decir, se repiten después de cierto tiempo  $T$ , llamado periodo. Esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$g(t+T) = g(t)$$

para toda  $t$ . En segundo lugar tienen un promedio cero. Para cada periodo, el empuje en una dirección es igual al tirón en la otra, lo cual puede ser expresado como:

$$\int_0^T g(t) dt = 0$$

Un ejemplo de este tipo de fuerza externa son las vibraciones a las que se ve sometido un edificio durante un sismo y las ondas de presión acústica que golpean una copa.

Para fines prácticos, se verá ahora un oscilador armónico no amortiguado en particular, cuyo forzamiento es senoidal:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2y = \cos \omega t$$

Esta ecuación contiene un parámetro  $\omega$  que controla la frecuencia del forzamiento externo. Esta frecuencia es  $\omega/(2\pi)$ , para la ecuación no forzada

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2y = 0$$

Los eigenvalores son  $\pm i\sqrt{2}$ , por lo que la solución general es

$$y_k(t) = k_1 \cos \sqrt{2}t + k_2 \text{sen} \sqrt{2}t$$

Como no hay amortiguamiento, las funciones oscilan con la frecuencia natural  $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$  perpetuamente. La amplitud de la oscilación está determinada por los valores de  $k_1$  y  $k_2$ , que a su vez están definidos por las condiciones iniciales.

Para obtener la solución general de la ecuación forzada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = \cos \omega t$$

se hace uso del método de coeficientes indeterminados, obteniendo:

$$y(t) = k_1 \cos \sqrt{2}t + k_2 \text{sen} \sqrt{2}t + \frac{1}{2 - \omega^2} \cos \omega t$$

Se puede observar que la solución depende de  $\omega$ , misma que se había considerado como un parámetro.

Por otra parte, la solución no tiende a cero. Además dicha solución es una suma de términos seno y coseno de frecuencia  $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$  y  $\frac{\omega}{2\pi}$ . Para algunos valores de  $t$ , tanto la respuesta forzada como la natural son positivas o negativas, reforzándose una con otra. Pero para otros valores de  $t$ , las respuestas tienen signos contrario anulándose mutuamente.

Cuando tanto la respuesta natural como la forzada tienen aproximadamente la misma frecuencia, la amplitud de las oscilaciones crece y decrece según un patrón muy regular (ver figura 3). Este fenómeno es llamado pulsación.

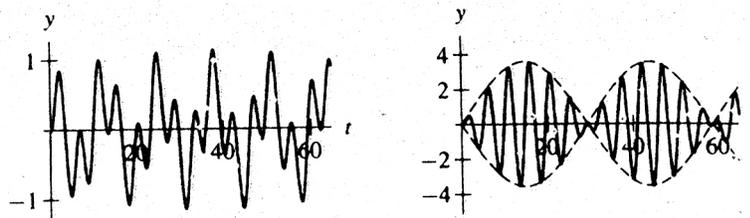


FIGURA 3. Pulsación<sup>20</sup>

Es preciso considerar a parte el caso en que  $\omega = \sqrt{2}$ , es decir, cuando la frecuencia del forzamiento es exactamente la misma que la frecuencia natural del oscilador. Esto es llamado forzamiento resonante o en resonancia. En este caso, toda

<sup>20</sup> Blanchard 1999:375

solución oscila con frecuencia natural. Para valores pequeños del tiempo  $t$ , la solución se parece a una solución particular del oscilador no forzado, mientras que para  $t$  grandes, el término  $\frac{1}{2\sqrt{2}} t \text{sen} \sqrt{2}t$  domina a los otros, por lo que la amplitud de la oscilación crece linealmente (Figura 4).

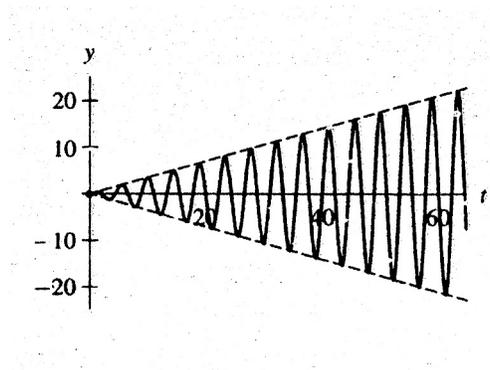


FIGURA 4<sup>21</sup>

El efecto de resonancia tiene dos elementos muy llamativos: el primero, que las soluciones se vuelven ilimitadas aun cuando la fuerza externa no lo sea. Segundo, que la fuerza externa empuja exactamente la misma cantidad que jala, haciendo que el promedio de esta fuerza sea cero.

### **Amplitud y fase del estado permanente**

En el caso más general del oscilador armónico amortiguado con forzamiento periódico

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p \frac{\partial y}{\partial t} + qy = \cos \omega t$$

el patrón que siguen a largo plazo todas las soluciones es el mismo, como ya se vio anteriormente. Este está determinado por una solución particular  $y = p(t)$  de la ecuación forzada que puede escribirse en la forma

$$y_p(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

Por lo tanto, para una  $t$  grande todas las soluciones oscilan con la misma frecuencia que el forzamiento. Este es el comportamiento de estado permanente de las soluciones. La amplitud de la oscilación es  $A$  y el ángulo de fase es  $\phi$ .<sup>22</sup>

---

<sup>21</sup> Blanchard 1999:381

### La cuerda vibrante

El siguiente paso es considerar una cuerda flexible, lo suficientemente tensa para que su forma en reposo sea una línea recta. El objetivo es modelar el comportamiento de la cuerda cuando se estira y, posteriormente, se suelta. Suponiendo que los extremos se ubican en  $(0,0)$  y  $(L,0)$  en el eje  $x$ , y que todo el movimiento tiene lugar en el plano  $xf$ , la posición sobre  $f$  de un punto  $x$  de la cuerda se puede representar mediante una función  $f$  que depende de  $t$ . (Figura 5)

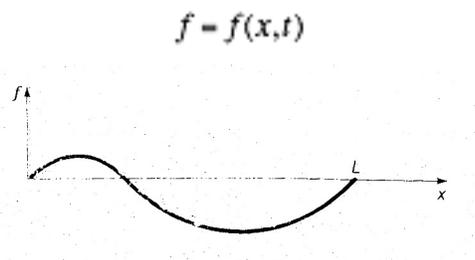


Figura 5<sup>23</sup>

Si se considera un segmento  $P$  de la cuerda, la tensión actúa sobre cada punto extremo  $A$  y  $B$  de  $P$  en una dirección tangente a la cuerda. Si se supone que la magnitud de esta tensión es una constante  $T$  a lo largo de toda la cuerda, entonces la componente vertical neta de la fuerza que actúa sobre  $P$  se da según la fórmula

$$T \sin \beta - T \sin \alpha,$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan como en la figura 6.

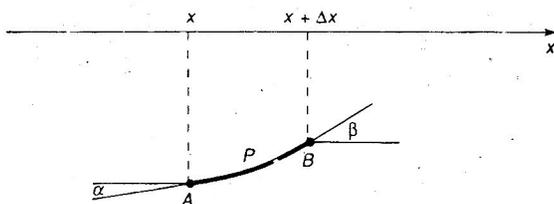


FIGURA 6<sup>24</sup>

---

<sup>22</sup> En un análisis más detallado se llega a las ecuaciones  $A = \frac{1}{\sqrt{(q-w^2)^2 + p^2 w^2}}$  y  $\tan \phi = \frac{-pw}{q-w^2}$

para obtener la amplitud y el ángulo fase respectivamente.

<sup>23</sup> Marcus 1993:599

<sup>24</sup> Marcus 1993:599

Si se representa la masa de  $P$  por el producto  $\rho(\Delta x)$ , donde  $\rho$  es la densidad lineal de la cuerda en su posición de reposo, la aceleración de  $P$  en dirección vertical  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  y aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical de  $P$  se tiene

$$\rho(\Delta x) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = T \operatorname{sen} \beta - T \operatorname{sen} \alpha$$

o bien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha}{\Delta x}$$

$T/\rho$  es una constante positiva que se representa como  $k^2$ . El segundo factor depende de los puntos  $A$  y  $B$ . Si  $B$  se aproxima a  $A$ , se tiene que  $\Delta x \rightarrow 0$ . Entonces, se tiene el límite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha}{\Delta x} \right)$$

que se puede reescribir de la forma

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}$$

donde

$$u(x, t) = \operatorname{sen}(\arctan f_x(x, t))$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= u(x, t) \\ \operatorname{sen} \beta &= u(x + \Delta x, t) \end{aligned}$$

que es la derivada  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ .

Volviendo a la identidad trigonométrica, mediante la regla de la cadena:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \cos(\arctan f_x) \left( \frac{1}{1 + f_x^2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Finalmente, tras simplificar, se obtiene la ecuación para el movimiento real de la cuerda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{k^2}{(1 + f_x^2)^{3/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Para simplificar esta ecuación, se supone que  $f_x$  es pequeña comparada con las segundas derivadas parciales que aparecen, quedando de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Esta suposición es válida, pues  $f_x$  representa la pendiente de la tangente de la cuerda en cualquier punto. En resumen, se está suponiendo que la forma de la cuerda no se desvía demasiado de la forma original.

Ahora se busca que esta ecuación satisfaga condiciones iniciales dadas. Suponiendo que la cuerda se tensa en cierta forma y luego se suelta; es decir, la cuerda inicia su movimiento en una posición distinta (representada por la figura 7) que anteriormente.

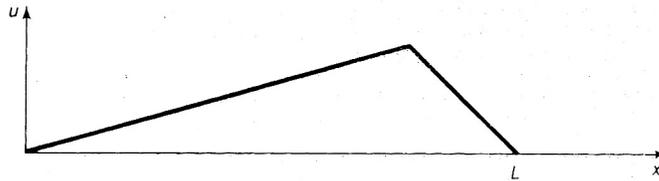


FIGURA 7. La cuerda en posición inicial distinta.<sup>25</sup>

Esta forma puede ser dada por una función  $f = S(x)$ . Si esta es la forma inicial ( $t = 0$ ), se tiene la primer condición inicial:

$$f(x,0) = S(x), 0 \leq x \leq L$$

Si además se supone que la cuerda tiene velocidad inicial cero, al abandonar su posición de reposo, se tiene una segunda condición inicial

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0), 0 \leq x \leq L$$

Puede verificarse directamente que una solución está dada por la ecuación de onda

$$f = u(x+kt) + v(x-kt)$$

donde  $u$  y  $v$  son funciones diferenciables arbitrarias.

Se necesita entonces encontrar funciones  $u$  y  $v$  que satisfagan las condiciones

$$\begin{cases} u(x) + v(x) = S(x) \\ u'(x) = v'(x) \end{cases} 0 \leq x \leq L$$

<sup>25</sup> Marcus 1993:601

para una forma inicial dada  $S(x)$ . Además se requiere que los puntos extremos de la cuerda estén fijos en  $(0,0)$  y  $(L,0)$ , es decir:

$$\begin{cases} f(0,t) = 0 \\ f(L,t) = 0 \end{cases} t \geq 0$$

Con esto, se llega a la fórmula de d'Alembert, en este caso particular

$$f(x,t) = \frac{1}{2}(S(x+kt) + S(x-kt))$$

Sin embargo, esta solución sólo tiene sentido para valores de  $x$  y  $t$ , tales que ambas cantidades  $x + kt$  y  $x - kt$  se encuentren en el intervalo  $[0,L]$ , ya que la función  $S$  se encuentra definida en dicho intervalo. Para extender  $S$  a una función definida en toda la línea, de manera que la solución satisfaga todas las condiciones se considera la solución en conexión con las condiciones de frontera dadas, obteniendo:

$$\begin{cases} S(kt) + S(-kt) = 0 \\ S(L+kt) + S(L-kt) = 0 \end{cases} t \geq 0$$

Si se hace  $y = kt$ , la primer condición se puede reescribir como

$$S(-y) = S(y), y \geq 0$$

esto dice que  $S$  es una función impar. Así, se ha ampliado la función  $S$  al intervalo  $[-L,L]$ . La segunda condición ampliada se puede reescribir como

$$S(L+kt) = S(kt-L)$$

o bien como

$$S(y+2L) = S(y)$$

haciendo  $y = kt - L$ .

De esta forma,  $S$  es una función periódica con periodo  $2L$  (esto se ve representado en la FIGURA 8).

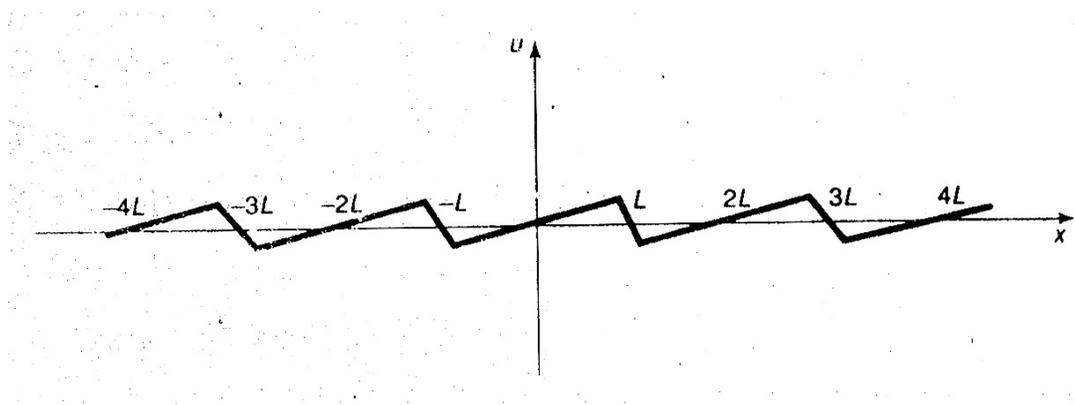


FIGURA 8. La función  $S$  con periodo  $2L$ <sup>26</sup>

De forma análoga, cualquier función de forma inicial  $S(x)$  definida en  $[0,L]$  se puede extender a una función  $2L$ -periódica. Así, la ecuación obtenida anteriormente para el intervalo  $[0,L]$  proporciona de hecho, una solución para el problema de la cuerda vibrante.

Retomando la figura que se mostró en un principio, del segmento de la cuerda, la siguiente imagen representaría su extensión periódica.

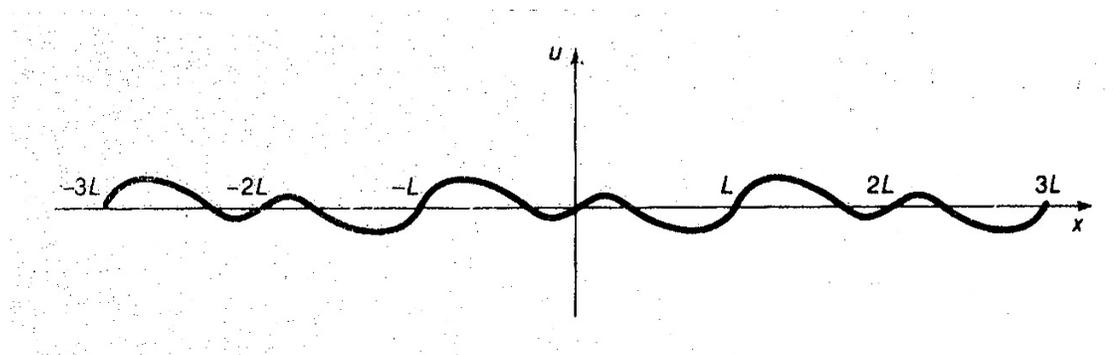


FIGURA 9<sup>27</sup>

En una variación del problema anterior, se toma ahora  $S(x) = 0$ , es decir, la cuerda en posición horizontal; pero con velocidad inicial  $V(x)$  en cada uno de sus puntos. Si se aplican las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = V(x) \end{array} \right\}$$

a la solución general

$$f = u(x+kt) + v(x-kt)$$

se puede reescribir la primera parte como

$$u(x) = -v(x), 0 \leq x \leq L$$

que, junto con la segunda parte de las condiciones, lleva a una nueva condición:

$$2kf'(x) = V(x)$$

se llega así a una variación de la fórmula anteriormente obtenida, teniendo ahora:

$$f = \frac{1}{2k} (W(x+kt) - W(x-kt))$$

donde  $W(x) = 2ku(x)$ , es una función continua que es una antiderivada para  $V(x)$ .<sup>28</sup>

<sup>26</sup> Marcus 1993:604

<sup>27</sup> Marcus 1993:604

Esta nueva fórmula, en combinación con las condiciones de frontera correspondientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,0) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{array} \right\}, t \geq 0$$

(además de que la velocidad en los puntos extremos se mantiene en cero  $V(0) = V(L) = 0$ ), presenta nuevas condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} W(kt) = W(-kt) \\ W(L+kt) = W(L-kt) \end{array} \right\}, t \geq 0$$

de las cuales se obtiene

$$W(y+2L) = W(y)$$

considerando  $y = kt - L$

de donde se sigue que  $W$  debe ser  $2L$  - periódica.

Entonces, para que la solución actual cumpla con todas las condiciones iniciales y en la frontera del problema,  $W$  debe ser una función  $2L$  - periódica que satisfice:

$$\frac{\partial}{\partial x} W(x) = V(x), 0 \leq x \leq L$$

### Ecuación de Onda

Antes de proceder a modelar el sonido como un fenómeno físico, será de gran utilidad analizar la ecuación de onda. En su forma más simple, esta ecuación es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

que es la forma unidimensional<sup>29</sup>; en dos y tres dimensiones, la forma es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = k^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = k^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

<sup>28</sup> Se permitirá que  $W(x)$  sea no-diferenciable en, a lo más, un número finito de puntos del intervalo  $[0,L]$ . En todos los puntos donde exista  $W'(x)$  se necesita que  $W'(x) = V(x)$ .

<sup>29</sup> El uso de  $k^2$  en la ecuación es para fines de simplificar el proceso de resolución.

Una forma alternativa de deducir esta ecuación es a partir de la dinámica de gases. Considérese un gas ocupando un tubo recto y estrecho, de forma que la velocidad de las partículas del gas,  $u$ , la densidad lineal,  $\rho$ , y la presión,  $P$ , dependen únicamente de la posición sobre el eje  $x$  y del tiempo  $t$ ; es decir,  $u$ ,  $\rho$  y  $P$ , son constantes en secciones transversales del tubo. Ahora considérese una porción del gas contenida dentro del intervalo  $a(t) < x < b(t)$ , el cual está en movimiento. Si se supone que los extremos del intervalo se mueven con las partículas,  $a'(t) = u(a(t), t)$  y  $b'(t) = u(b(t), t)$ . Por la ley de conservación de la masa, la cantidad de esta en el intervalo en movimiento del tubo es constante:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x, t) dx = 0$$

suponiendo que  $\rho$  y  $u$  son funciones del tipo  $C^1$ , se puede derivar para deducir:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{a(t)}^{b(t)} \rho_t(x, t) dx + b'(t)\rho(b(t), t) - a'(t)\rho(a(t), t) \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \rho_t(x, t) dx + (\rho u)(b(t), t) - (\rho u)(a(t), t) \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} (\rho_t(x, t) + (\rho u)_x(x, t)) dx \end{aligned}$$

usando el hecho de que  $a'(t) = u(a(t), t)$  y  $b'(t) = u(b(t), t)$ . Dado que esto se cumple para todas las partes del gas en movimiento, se concluye que

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

Por otra parte, el momento de esta porción de gas en movimiento está dado por:

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x, t) u(x, t) dx$$

Por la segunda ley de Newton, la razón de cambio del momento, en ausencia de fuerzas externas, es igual a la diferencia en las fuerzas debido a la presión en los extremos de esta porción del gas:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x, t) u(x, t) dx = AP(a(t), t) - AP(b(t), t) = - \int_{a(t)}^{b(t)} AP_x(x, t) dx$$

Esto simplemente expresa la conservación del momento. Aquí  $A$  es el área de una sección transversal del tubo. Para simplificar la notación, se escogerán las unidades de forma que  $A = 1$ . Si se deriva la expresión del lado izquierdo, se obtiene

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + P_x = 0$$

que, en combinación con la ecuación de conservación de masa lleva a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho_t + \rho_x u + \rho u_x &= 0 \\ \rho(u_t + uu_x) + P_x &= 0. \end{aligned}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con tres variables  $\rho$ ,  $u$  y  $P$ . Ahora es conveniente suponer que el flujo es isotrópico<sup>30</sup>, es decir  $P = P(\rho)$ , de forma que

$$P_x = P'(\rho)\rho_x.^{31}$$

Así, se llega a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $u$  y  $\rho$ .

$$\begin{aligned} \rho_t + \rho u_x + \rho_x u &= 0 \\ \rho(u_t + uu_x) + P'(\rho)\rho_x &= 0. \end{aligned}$$

Nótese que para toda  $\rho_0 > 0$ , las funciones constantes  $\rho(x,t) = \rho_0$ ,  $u(x,t) = 0$  forman una solución del sistema anterior. Supóngase que una variación de esta solución constante, con una pequeña perturbación, satisfaga también las ecuaciones del sistema. El término pequeño se refiere a la densidad en particular, por lo que se busca una perturbación de la siguiente forma:

$$\rho(x,t) = (1 + \delta(x,t))\rho_0.^{32}$$

De la misma forma, supóngase que la velocidad de las partículas  $u$  es pequeña.<sup>33</sup> Ahora definimos  $c_0 = \sqrt{P'(\rho_0)}$ .  $C_0$  es llamada la velocidad del sonido en el gas.<sup>34</sup> Sea  $U = \max|u(x,t)|$  la velocidad máxima de las partículas del gas. Aquí una

<sup>30</sup> El término isotrópico se refiere a que el flujo es tanto adiabático como reversible, es decir, que el flujo no intercambia energía con su entorno y que este flujo no pierde energía por fricción o efectos de disipación.

<sup>31</sup> En un gas ideal,  $P(\rho) = A\rho^\gamma$ ,  $\gamma = 1.4$ .

<sup>32</sup>  $\delta(x,t) = (\rho(x,t) - \rho_0)/\rho_0$  es llamada la condensación. También se supone que  $\Gamma = \max|\delta(x,t)| \ll 1$ .

<sup>33</sup> La experiencia con las ondas acústicas, que son pequeñas perturbaciones de las soluciones constantes mostradas arriba, muestra que las partículas de gas no se mueven mucho y que la velocidad de las partículas  $u$  es pequeña en comparación con la velocidad a la que las ondas de sonido se propagan a través del gas.

<sup>34</sup> En un gas ideal  $c_0^2 = \gamma\rho_0^{-1}$ .

suposición obligada es  $M = \frac{U}{c_0} \ll 1$ , donde M es el número Mach.<sup>35</sup> De esta forma, la

velocidad perturbada debe ser escrita en la forma  $u(x,t) = c_0 v(x,t)$ , donde  $v$  es una cantidad del orden de M. Sustituyendo  $\rho = (1+\delta)\rho_0$  y  $u = c_0 v$  en el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \delta_t + c_0 v_x + c_0 \delta v_x + c_0 \delta_x v &= 0 \\ (1+\delta)[c_0 v_t + c_0^2 v v_x] + p'((1+\delta)\rho_0) \delta_x &= 0 \end{aligned}$$

Como  $1+\delta \approx 1$  y  $P'((1+\delta)\rho_0) \approx P'(\rho_0) = c_0^2$  pues  $\delta$  es pequeña, la segunda ecuación de este nuevo sistema se convierte en  $v_t + c_0 \delta_x + c_0 v v_x \approx 0$

Por consistencia, se debe considerar que los términos  $\delta_t$ ,  $c_0 v_x$ ,  $v_t$ ,  $c_0 \delta_x$ , son todos del mismo orden. Entonces, en la primer ecuación, los términos  $c_0 \delta v_x$  y  $c_0 \delta_x v$  son pequeños comparados con los términos lineales  $\delta_t$  y  $c_0 v_x$ , por lo que los no lineales pueden ser despreciados. En la segunda ecuación, el término  $c_0 v v_x$  puede ser eliminado, pues es significativamente pequeño en comparación con  $v_t$  y  $c_0 \delta_x$ . Aquí se eliminan también los términos no lineales, obteniendo el sistema (lineal):

$$\begin{aligned} \delta_t + c_0 v_x &= 0 \\ v_t + c_0 \delta_x &= 0 \end{aligned}$$

Al derivar la primer ecuación con respecto a  $t$  y la segunda con respecto a  $x$ , multiplicar la segunda ecuación por  $c_0$  y restarla a la primera, se obtiene:

$$\delta_{tt} - c_0^2 \delta_{xx} = 0$$

de manera muy similar, se llega a que  $v$  también satisface:

$$v_{tt} - c_0^2 v_{xx} = 0.$$

Estas últimas dos ecuaciones son las ecuaciones de onda lineales. En el contexto de dinámica de gases, las soluciones de la ecuación de onda lineal son llamadas ondas acústicas. Las  $\delta$  y  $v$  originales no satisfacen el sistema anterior, por lo que se deberían usar  $\bar{v}, \bar{\delta}$  para denotar las soluciones del sistema. Sin embargo, es aceptado el abuso de notación para continuar con las letras originales.

En acústica, es preferible utilizar un potencial de velocidad :

---

<sup>35</sup> el número Mach es el resultante de dividir la velocidad U (en este caso la de las partículas) entre  $C_0$  (la velocidad del sonido).

$$\phi(x,t) = \int u(x,t) dx,$$

donde  $\phi$  satisface la misma ecuación lineal  $v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$

Una vez que tenemos la ecuación  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ , su solución es

$$f = u(x+y)v(x-y)$$

la cual se puede llevar a

$$f = u(x+kt)v(x-kt)$$

simplemente sustituyendo  $y = kt$ . Esta es la solución de la ecuación de onda unidimensional.

En su forma tridimensional, la ecuación de onda es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

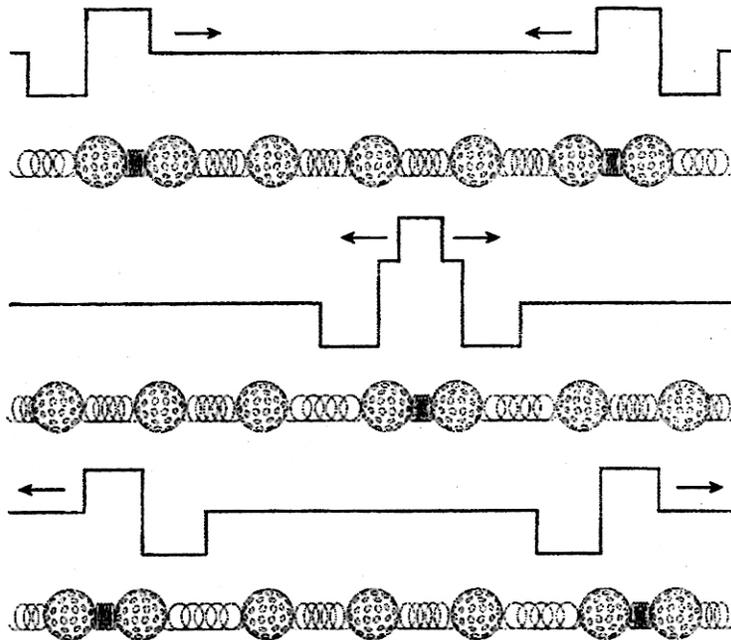
### Condiciones de frontera.

Como se ha visto, un factor esencial para resolver la ecuación de onda, así como para ajustar la solución al caso correspondiente, son las condiciones de frontera. Estas son consecuencia de la interacción del sonido con distintos elementos: otras ondas de sonido, obstáculos, etcétera, así como de cambios en el medio. Para poder comprender adecuadamente el comportamiento del sonido en un contexto más realista (pues hasta ahora sólo se ha estudiado en contextos limitados, aislados), es necesario revisar y comprender estas interacciones del sonido, así como la forma en que su dinámica se ve afectada por las mismas.<sup>36</sup>

**Superposición.** Cuando dos o más sonidos interfieren destructivamente entre sí, no desaparecen ni se restan: viajan juntos. De la misma forma, cuando interfieren constructivamente, en vez de potenciarse, pasan uno a través del otro.

---

<sup>36</sup> Las siguientes descripciones e imágenes fueron tomadas del libro *Acoustics and Psychoacoustics*, de David M. Howard y Jamie Angus.

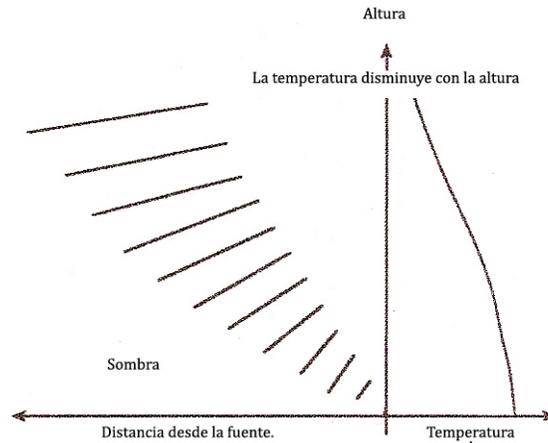


### Superposición

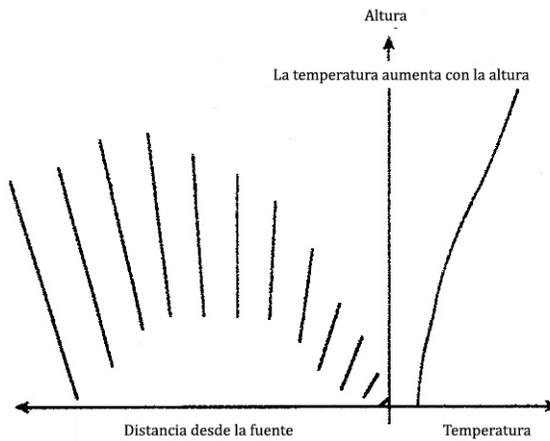
Refracción. Este efecto es análogo al que se da con la luz. En el caso óptico, la refracción surge porque la luz se mueve a distintas velocidades en medios distintos, mientras que en el caso acústico la refracción surge porque la velocidad del sonido en el aire depende de la temperatura (que afecta la densidad del aire). Dado que la temperatura del aire disminuye en función de la altura, la onda sonora es desviada en dirección contraria de la de la fuente. Esto significa que las personas que estén escuchando este sonido a nivel de suelo, verán el nivel del mismo reducido cuando se alejen de la fuente, pero en una tasa mayor a la que sería predicha por la ley inversa del cuadrado<sup>37</sup>. Sin embargo, si el gradiente de la temperatura aumenta con la altura, el sonido será desviado hacia abajo, en lugar de hacia arriba.

---

<sup>37</sup> En mecánica ondulatoria la ley de la inversa del cuadrado establece que para una onda como, por ejemplo, el sonido o la luz, que se propaga desde una fuente puntual en todas direcciones por igual, la intensidad de la misma disminuye de acuerdo con el cuadrado de la distancia a la fuente de emisión. (Wikipedia, consultada en Julio, 2009)



FIGURAS 11 Y 12. Dos ejemplos de cómo la velocidad del sonido se ve afectada por los cambios en la temperatura.<sup>38</sup>



El viento también puede causar un efecto de refracción, pues la velocidad del sonido dentro del medio es independiente de la velocidad del mismo. Esto quiere decir que, cuando el sonido se mueve a través de un medio en movimiento, la velocidad de la onda sonora es la suma de ambas velocidades, siempre y cuando sea visto desde un

<sup>38</sup>David M. Howard, Jamie Angus. 2006:35

<sup>39</sup> David M. Howard, Jamie Angus. 2006:36

punto fijo. El grado del cambio de dirección depende de la razón con que el viento cambie de velocidad, en función de la altura: a mayor cambio de velocidad, mayor es la desviación de la dirección.

Absorción. El sonido es absorbido por un objeto con el que choca. Esto se debe en parte a que, cuando este choque sucede, el objeto vibra, a menos que sea infinitamente rígido. Es decir, la energía vibracional es transferida de la onda sonora al objeto. Otra forma en que sucede una pérdida de energía es cuando el sonido viaja a través de un material poroso; es por esto que la ropa absorbe una gran cantidad de sonido, debido a que el incremento en el área de esta superficie porosa se ve reflejado en una mayor pérdida de la energía.

Reflexión<sup>40</sup>. Cuando el sonido choca con un objeto, no sólo es absorbido, también es reflejado. La reflexión del sonido puede ser dividida según el tipo de frontera que divide los dos medios.

Reflexión en objetos sólidos. En este caso, el objeto representa una frontera sólida. En la frontera entre el objeto y el aire, el sonido tiene velocidad cero, pues no puede mover al objeto. Esto lleva a que, en ese punto, toda la energía del sonido se concentra en la compresión del aire; dado que la energía en la presión no puede ser transferida en la dirección de la onda, ésta rebota en dirección contraria, es decir, el objeto no puede ser desplazado por la onda, por lo que el sonido regresa en dirección opuesta. En la figura 13 se puede ver este efecto representado por el sistema de masa-resorte.

---

<sup>40</sup> El tamaño del obstáculo con el que se encuentra la onda y la longitud de onda determinan si una onda rodea el obstáculo o se refleja en la dirección de la que provenía. Si el obstáculo es pequeño en relación con la longitud de onda, el sonido lo rodea (difracción), en cambio, si sucede lo contrario, el sonido se refleja (reflexión). (Wikipedia)

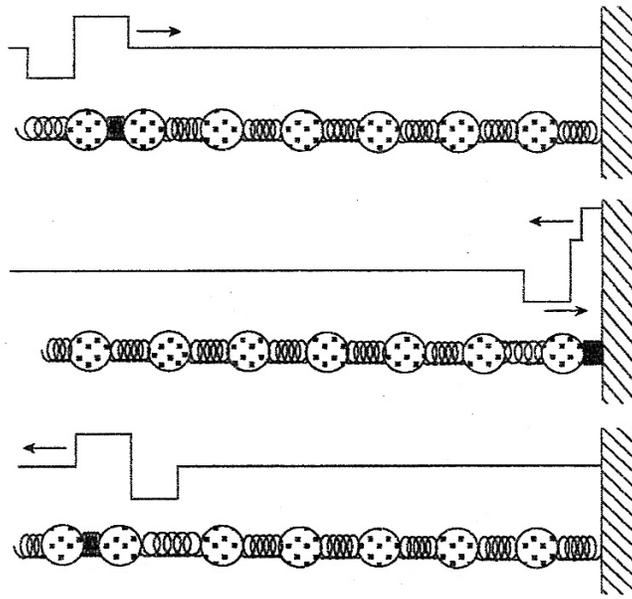


FIGURA 13. Reflexión en un objeto sólido.<sup>41</sup>

Un efecto interesante se da puesto que la onda tiene que cambiar de dirección y el resorte conectado al objeto se comprime el doble que un resorte alejado de la frontera. Esto sucede pues los componentes de la velocidad asociados con la onda reflejada se mueven en sentido contrario a los componentes de la velocidad de la onda que llega. En términos acústicos, esto quiere decir que, mientras el componente de la velocidad en la frontera reflejante es cero, el componente de la presión se duplica.

Reflexión de frontera cerrada a frontera abierta. En este caso, la onda pasa de una región cerrada, por ejemplo un tubo, a una región abierta (sin fronteras rígidas), como un espacio abierto<sup>42</sup>. La figura 14 muestra este efecto usando de nuevo el sistema masa-resorte.

<sup>41</sup> David M. Howard, Jamie Angus. 2006:38

<sup>42</sup> El espacio abierto es un tipo de región abierta donde la onda sonora puede propagarse en cualquier dirección. Sin embargo, no todas las regiones abiertas son espacio abierto.

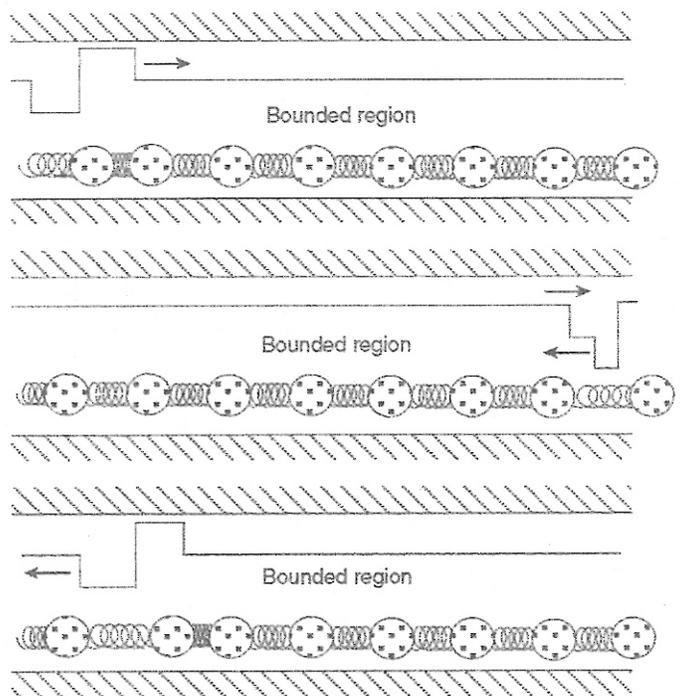


FIGURA 14.<sup>43</sup>

En la frontera entre las dos regiones, las moléculas en la región abierta tienen más libertad de movimiento que en la región cerrada. Como resultado, el componente de la presión de la onda sonora es cercano a cero en la frontera; por lo tanto, en este punto toda la energía del sonido se concentra en el componente de la velocidad de la onda como energía cinética o de movimiento. De nuevo, en términos acústicos, esto significa que, en la frontera, el componente de la velocidad en la onda es el doble, mientras que el de la presión es cero.

En conclusión, la reflexión del sonido en un objeto sólido se traduce en que el componente de la presión en la onda reflejada entra en fase con la onda entrante, mientras que la reflexión en la frontera entre una región cerrada y una abierta, provoca que el componente de la presión en la onda reflejada esté en fase contraria que la onda entrante. Esto se debe a la diferencia de la impedancia acústica en la frontera. En el primer caso, la impedancia en la frontera es mayor que la del medio de

<sup>43</sup> David M. Howard, Jamie Angus. 2006:39

propagación; en el segundo es menor. Con respecto al ángulo de incidencia en la frontera, aparte del perpendicular, aplican las leyes de reflexión normales.

#### **IV. MÉTODOS NUMÉRICOS**

Los métodos numéricos en matemáticas son usados para resolver problemas mediante la implementación de algoritmos específicos. Aunque en la actualidad existe una gran variedad de estos métodos, aquí se revisaran superficialmente dos de ellos: el método de Monte Carlo y el de las Diferencias Finitas. Así mismo, se profundizará en el método del Elemento Finito, pues es este método el que se usa como base en el programa FEMLAB, mismo que se utilizó para elaborar simulaciones en computadora de la acústica de la pirámide El Castillo, en Chichén Itzá.

El análisis matemático, en el contexto de los problemas de ingeniería, tiene dos objetivos principales: identificar los principios básicos que rigen el comportamiento de un sistema y transformar esos principios en modelos matemáticos compuestos de uno o varias ecuaciones que puedan ser resueltas, con el fin de predecir el comportamiento cuantitativo y cualitativo del sistema, siempre con la idea de que esta predicción sea precisa.

El método de Monte Carlo fue ideado en un principio por Enrico Fermi en la década de 1930 y, posteriormente, por Stanislaw Ulam en 1946, con quien colaboró John Von Neumann en el desarrollo del mismo.

Este método abarca varios algoritmos de resolución de problemas algebraicos que, en general, comparten el siguiente esquema:

1. Definir un dominio posible de entradas.
2. Generar estas entradas de manera aleatoria, basándose en una distribución probabilística específica.
3. Resolver la o las ecuaciones en cuestión para estas entradas específicas.
4. Agregar estos resultados individuales al resultado final.<sup>44</sup>

Estos métodos tienen aplicaciones que van desde las telecomunicaciones, finanzas y videojuegos, hasta la física y las matemáticas. En este último caso, se usa la integración

---

<sup>44</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Monte\\_carlo\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Monte_carlo_method) (Consultado en julio 2008)

de Monte Carlo, que utiliza algoritmos para la evaluación aproximada de integrales finitas, generalmente multidimensionales. Estos algoritmos evalúan la integral sobre una cuadrícula regular. Una desventaja de este método, aunque su principal característica, puede ser que se escogen aleatoriamente los puntos en los que la integral es evaluada, pudiendo perder información valiosa.

## **El método del Elemento Finito**

El Método del Elemento Finito (MEF) fue al principio desarrollado en 1943 por R. Courant, quien utilizó el método de Ritz de análisis numérico y minimización de las variables de cálculo para obtener soluciones aproximadas a un sistema de vibración. Poco después, un documento publicado en 1956 por M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp estableció una definición más amplia del análisis numérico. El documento se centró en “la rigidez y deformación de estructuras complejas”.<sup>45</sup>

El método del elemento finito, al igual que el método de las diferencias finitas, requiere que el problema esté definido en un espacio geométrico, de forma que pueda ser dividido en un número finito de regiones pequeñas, formando una especie de red o malla (mesh). En 1D el método particiona un intervalo en intervalos más pequeños, llamados *intervalos de la malla*. Los extremos de estos intervalos son llamados *vértices de la malla*.

En 2D, la partición genera triángulos o cuadriláteros (*elementos de la malla*). Los lados de estos triángulos son llamados *lados de la malla*. Estos lados de la malla no deben contener vértices en su interior. De esta forma, las fronteras definidas en la geometría son particionadas en lados de la malla, siempre aproximadamente, pues estas fronteras pueden ser curvas.

En 3D, la partición genera tetraedros. De forma similar las fronteras son divididas en caras triangulares de la malla, los lados en lados de la malla y los vértices aislados en vértices de la malla, a veces llamados *puntos nodales* o *nodos*.

---

<sup>45</sup> [http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_los\\_elementos\\_finitos](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_los_elementos_finitos)

Esta es la principal ventaja de este método sobre el de las diferencias finitas, pues en este último, la malla es formada por líneas ortogonales. En contraste con el procedimiento del método diferencial, consistente en discretizaciones convencionales, las ecuaciones principales en el método del elemento finito son integradas para cada uno de los elementos que componen la malla y la solución se suma alrededor de todo el dominio. Como consecuencia de estas operaciones, se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales finitas, que están en función de un conjunto de parámetros desconocidos para cada elemento. Estas ecuaciones se resuelven utilizando métodos algebraicos.<sup>46</sup>

En forma muy similar a este último, el análisis de elementos finitos de cualquier problema implica cuatro pasos:

- a) discretizar la región de solución en un número finito de subregiones o *elementos*.
- b) deducir las ecuaciones que rigen para un elemento típico.
- c) conjuntar todos los elementos en la región de solución.
- d) resolver el sistema de ecuaciones obtenido.

### **Discretización de los elementos finitos**

La región de solución se divide en un número de elementos finitos, como se muestra en la figura 15 donde se ha subdividido en cuatro elementos sin traslape (dos triangulares y dos en forma de cuadrilátero) y siete nodos. En el caso acústico, se busca una aproximación para la presión  $p_e$  en el elemento  $e$ , para luego interrelacionar las distribuciones de la presión en los diversos elementos, de manera que la presión sea continua en las fronteras entre elementos. La solución aproximada para la región completa será:

$$p(x, y) = \sum_{e=1}^N p_e(x, y)$$

en donde N es el número de elementos triangulares en que se dividió la región de solución.

---

La forma más común de aproximación para  $p$  dentro de un elemento, es la aproximación polinomial

$$p_e(x,y) = a + bx + cy$$

para un elemento triangular y

$$p_e(x,y) = a + bx + cy + dxy$$

para un elemento en forma de cuadrilátero.

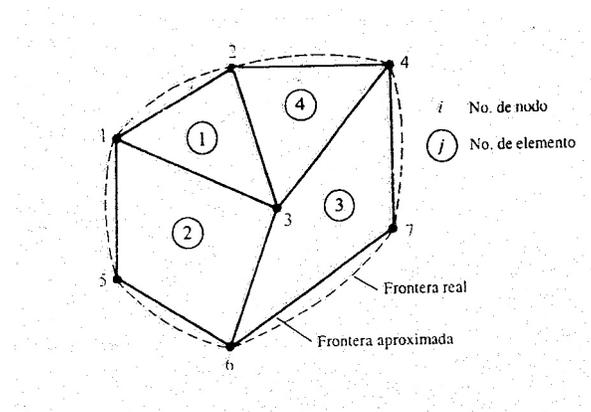


FIGURA 15 (Sadiku 1998:734)

### Ecuaciones que rigen a los elementos

Considérese un elemento triangular típico como el de LA FIGURA 16. Las presiones  $p_{e1}$ ,  $p_{e2}$  y  $p_{e3}$  en los nodos 1, 2 y 3 respectivamente, se obtienen por medio de la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} p_{e1} \\ p_{e2} \\ p_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  se determinan entonces por medio de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{e1} \\ p_{e2} \\ p_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

al sustituir esto en la ecuación original para  $p(x,y)$  se obtiene:

$$p_e = [1, x, y] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

o sea,

$$p_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x,y) V_{ei}$$

en donde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3) + (x_3 - x_2) y]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1) + (x_1 - x_3) y]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2) + (x_2 - x_1) y]$$

y  $A$  es el área del elemento  $e$ ; es decir,

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

o sea,

$$A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$

el valor de  $A$  es positivo siempre que se enumeren los nodos en sentido antihorario (comenzando en cualquier nodo). Es importante señalar que la ecuación para  $p_e$  da la presión en cualquier punto  $(x,y)$  situado dentro del elemento, siempre que se conozcan las presiones en los vértices. Esta es una de las ventajas de este método sobre el de las diferencias finitas, en el que sólo se pueden conocer las presiones en los puntos de la cuadrícula.

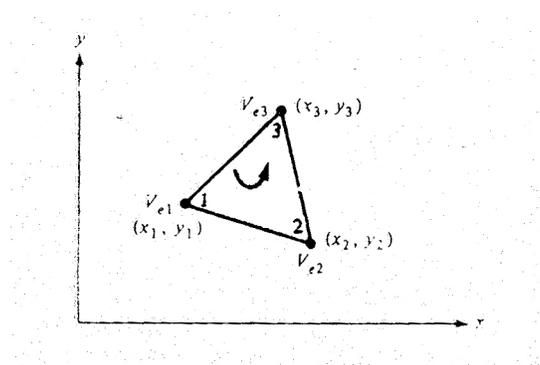


FIGURA 16<sup>47</sup>

### Ensamble de todos los elementos.

Una vez considerado un elemento típico, se procede a ensamblar estos elementos en la región de la solución. La energía asociada con el ensamble de todos los elementos en la malla es

$$W = \sum_{e=1}^N W_e = \frac{1}{2} \mathbf{e}[\mathbf{p}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{p}]$$

en donde

$$[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

el superíndice  $T$  denota la matriz transpuesta

$$[\mathbf{p}_e] = \begin{bmatrix} p_{e1} \\ p_{e2} \\ p_{e3} \end{bmatrix}$$

y  $n$  es el número de nodos,  $N$  el número de elementos, y a  $[\mathbf{C}]$  se le llama *matriz de coeficientes general o global*, la cual es el ensamble de las matrices individuales de coeficientes de los elementos. El siguiente paso es encontrar  $[\mathbf{C}]$  a partir de  $[\mathbf{C}^{(e)}]$ , donde

$$[\mathbf{C}^{(e)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(e)} & C_{12}^{(e)} & C_{13}^{(e)} \\ C_{21}^{(e)} & C_{22}^{(e)} & C_{23}^{(e)} \\ C_{31}^{(e)} & C_{32}^{(e)} & C_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$

llamada *matriz de coeficientes de los elementos*.

Un proceso relativamente sencillo<sup>48</sup> lleva a una matriz con las siguientes características:

1. Es simétrica ( $C_{ij}=C_{ji}$ ) igual que la matriz de coeficientes de los elementos.
2. Como  $C_{ij} = 0$ , si no existe acoplador entre los nodos  $i$  y  $j$ , es evidente que para un gran número de elementos  $[\mathbf{C}]$  se convierte en escasa y bandeda..
3. Es singular. Aunque esto no es tan obvio, puede demostrarse usando la matriz de coeficientes de los elementos.

---

<sup>48</sup> Por ser meramente metódico, este proceso no se revisará aquí. Para una descripción detallada de este, consultar el libro *Elementos de electromagnetismo* (Matthew N.O. Sadiku, 2004)

## Resolución de las ecuaciones resultantes.

Por el cálculo de variaciones, sabemos que la ecuación de Laplace (o la de Poisson) se satisface cuando es mínima la energía total en la región de solución. En consecuencia, se necesita que las derivadas parciales de  $W$  con respecto a cada valor nodal del potencial sean cero, es decir:

$$\frac{\partial W}{\partial p_k} = 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

En general esto nos lleva a

$$0 = \sum_{i=1}^n p_i C_{ik}$$

en donde  $n$  es el número de nodos que hay en la malla. Si esta ecuación se escribe para todos los nodos  $k = 1, 2, \dots, n$  se obtiene un conjunto de ecuaciones simultáneas por medio de las cuales puede encontrarse la solución de  $V^T$ . Para la resolución de este sistema existen dos formas similares, el *Método de Iteración* y el *Método de la Matriz en Banda*, las cuales pueden ser consultadas en *Elementos de electromagnetismo*.<sup>49</sup>

## V. MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL EFECTO COLA DE QUETZAL

### FEMLAB.

Como parte del estudio del efecto acústico en El Castillo, en Chichén Itzá, se elaboró una simulación que representa un pulso frente a una estructura muy similar a la escalinata de la pirámide.

Esta simulación se desarrolló utilizando el programa FEMLAB (v 3.1). dicho programa se utiliza en general para modelar y resolver problemas, tanto científicos como de ingeniería, basados en ecuaciones diferenciales parciales. Para esto, FEMLAB utiliza el Método de Elemento Finito.

En la simulación realizada se puede ver una escalinata rematada en su extremo superior por una estructura similar al templo de la pirámide. Las medidas de este

---

<sup>49</sup> Matthew N.O. Sadiku, 2004

diagrama son muy similares a las verdaderas: los escalones tienen una longitud y una altura ambas de 30 cm., mientras que en la escalinata de El Castillo, dichas medidas son de 25 a 30 centímetros<sup>50</sup>

En las imágenes se puede apreciar cómo el sonido se va propagando hasta encontrarse con la escalinata, momento en el que una parte rebota, lo cual correspondería al eco, y otra sigue avanzando hacia arriba. Es notable que el eco que regresa de la escalinata tiene una duración mayor que el pulso.

Una aportación importante en esta simulación es que se puede recuperar el valor de la presión en cualquier punto del plano en el que se desarrolla la acción. Esto permite conocer la forma en que regresa el sonido al oyente, sin importar cuál es la posición del mismo, o si este está situado en el mismo lugar en que el pulso es emitido.

Desafortunadamente se han presentado algunos inconvenientes al obtener los resultados de este modelo, debido principalmente a la falta de conocimiento del programa utilizado:

- no se ha podido transferir esta información a algún programa que lo reproduzca, de forma que se pueda escuchar.

- los valores que se obtienen de los cambios de presión en un punto dado no pueden ser transferidos a otro programa para su interpretación, pues se obtiene una tabla como imagen y no como archivo intercambiable.

- una simulación más realista debería ser realizada en 3D, pero eso requiere de un levantamiento estructural de toda la pirámide, o al menos de la cara norte. Esto implica un trabajo considerable, pues es necesario hacer las mediciones respectivas y trazar el modelo correspondiente en el programa (o en algún otro programa que se entienda con FEMLAB), lo cual también es un proyecto ambicioso.

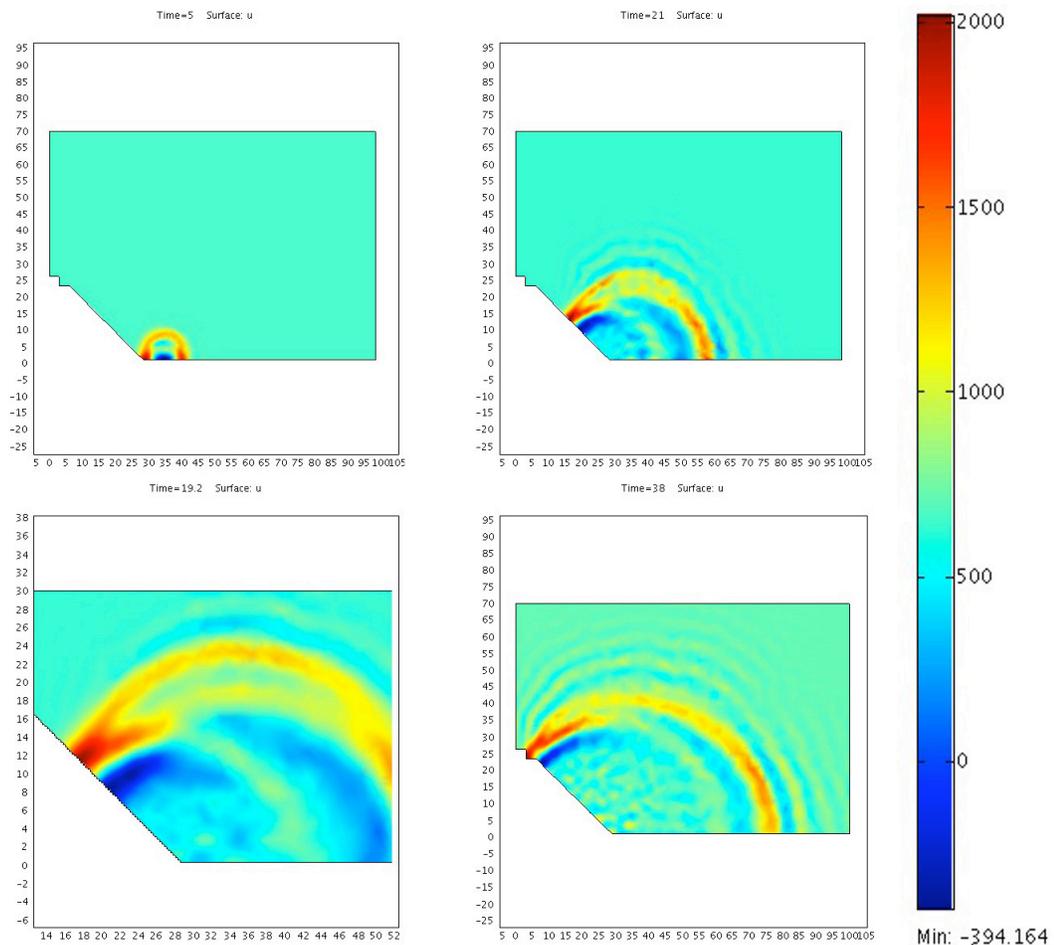
Sin embargo, la simulación aquí presentada es muy valiosa pues muestra cuán útil puede ser FEMLAB para analizar este tipo de fenómenos, sobre todo en espacios abiertos o muy grandes, que sean difíciles de caracterizar acústicamente. Además, sienta las bases para un proyecto de mayor envergadura: realizar un modelo

---

<sup>50</sup> Arochi en su libro *La Pirámide de Kukulcán*, señala que estas escalinatas miden 27 cm. de alto y 26 cm. de profundidad.

tridimensional, tanto de la escalinata norte de El Castillo, como de varios sitios que están siendo investigados.

A continuación se presentan cuatro imágenes que corresponden a distintos momentos de la simulación, misma que puede ser observada en su totalidad en el CD que se anexa a esta tesis.



## CONCLUSIONES

Como se dijo en un principio, la presente tesis se desarrolla en el contexto de un proyecto mucho mayor. De esta forma, se han presentado las bases que, a consideración del autor, representan las disciplinas más importantes en las que se apoya la arqueoacústica. Si bien se ha hecho énfasis en el papel de las matemáticas y la

física en este campo, es necesario señalar que la arqueología, la historia, la etnomusicología, entre otras, juegan un papel de suma importancia.

Tal vez la mayor aportación de este trabajo sea proponer varias líneas de investigación pendientes, que resultan fundamentales para hacer de la arqueoacústica una disciplina sólida y completa. Dichas líneas serían:

- Dentro de la arqueoacústica misma, desarrollar una metodología propia y adecuada, que considere todos los elementos que entran en juego en una investigación seria. Así mismo, esta metodología debe ser lo suficientemente flexible para aceptar la incidencia de otras disciplinas que no hayan sido consideradas previamente. En este trabajo se presentaron varios puntos que deben ser tomados en cuenta al llevar a cabo esta metodología, pero aún se requiere la consolidación de esta propuesta.
- En la parte de arqueología e historia, es necesario profundizar en la investigación referente a la importancia del sonido (no sólo la música) dentro de las culturas antiguas. Dentro de esta misma línea, se debe llevar a cabo una relación entre sonidos particulares (tomando en cuenta frecuencias, tonos, etcétera) y rituales y lugares en los que eran utilizados.
- En cuanto a la física, hace falta realizar una investigación acerca del estuco (materiales utilizados por regiones, tanto del estuco como de los colores utilizados para pigmentarlo, grosor, densidad, etcétera) y de la forma en que este modificaba la absorción y reflexión del sonido en los edificios.
- Finalmente, hace falta una simulación en 3D en FEMLAB, así como encontrar la forma de poder escuchar el eco producido en esta. De esta forma se podrá estar más cerca de realizar un modelo que explique satisfactoriamente el efecto de La Cola de Quetzal, en un principio, y cualquier efecto acústico que se encuentre en sitios arqueológicos.

Como conclusión general, la arqueoacústica es una disciplina relativamente nueva, sobre todo en nuestro país, por lo que existen pocos trabajos dentro de ella y aún menos referencias. Sin embargo, las investigaciones que se han hecho a la fecha resultan de gran importancia, pues establecen líneas vitales que han de ser seguidas en un futuro próximo. En este sentido, es necesario recalcar que dichas investigaciones deben ser realizadas desde distintas perspectivas disciplinarias, recuperando los lineamientos esenciales de cada una, pero siempre tomando en cuenta que son muchas y muy variadas las aportaciones del resto de los puntos de vista involucrados.

Finalmente, pero no por esto de menor importancia, es esencial exponer una línea de trabajo que permita a la arqueoacústica alcanzar nuevos horizontes: la divulgación. Esta se puede llevar a cabo desde distintos frentes, siendo los más importantes la publicación de las investigaciones que se realicen y la implementación de cursos y diplomados relacionados con esta disciplina, tanto a nivel de licenciatura, como de posgrado. Esto debería resultar conceptualmente distinto, pues la arqueoacústica puede ser abordada desde muchísimos puntos distintos. Lo importante es mantener la visión inclusiva y multidisciplinaria al momento de estructurar publicaciones y programas de estudio.

## **BIBLIOGRAFÍA.**

Arochi, Luis E.

2005            *La Pirámide de Kukulcan: su simbolismo solar.* Panorama. México.

Aveni, Anthony F.

1993            *Observadores del cielo en el México antiguo.* Fondo de Cultura Económica. México.

*Arqueología Mexicana*, vol. 27. I.N.A.H. México.

2008.

Baudez, Claude-François.

2004            *Una historia de la religión de los antiguos Mayas.*, México: UNAM, CEMCA, CCCAC. Instituto de Investigaciones Antropológicas.

- Beristain, Sergio et. al.  
2002 *Tonal response on the stairway of the main pyramid at La Ciudadela, Teotihuacan archaeological site.* The Journal of the Acoustic Society of America.
- Bilsen, Frans A.  
2006 "Repetition Pitch glide from the step pyramid at Chichen Itza". *The Journal of the Acoustical Society of America.*
- Blanchad, Paul et. al.  
1998 *Ecuaciones Diferenciales.* Brooks/Cole Publishing. México.
- Broda, Johanna et. al.  
1991 *Arqueoastronomía y etnoastronomía en Mesoamérica.* U.N.A.M. México.
- Cobos, Rafael.  
2003 *The Settlement patterns of Chichén Itzá, Yucatán, México.* Tulane University.
- Cruz Calleja, Jorge Antonio, Nico F. Declercq.  
2007 *An acoustic raindrop effect at Chichen Itza in Mexico.* The Journal of the Acoustical Society of America.
- Downes, Kerry.  
1988 *Architecture of Wren.* Redhedge.
- Declercq, Nico et. al.  
2003 *A full simulation of the Quetzal echo at the Mayan pyramid of Kukulcan at Chichen Itza in Mexico.* The Journal of the Acoustic Society of America.
- Desmond, Lawrence Gustave.  
1983 *Augustus le Plongeon: Early maya archaeologist.* University Microfilms International.  
*FEMLAB User's guide.*
- 2004 COMSOL AB.
- Garza, C., A. Medina, et al.  
2008 *Arqueoacústica maya: la necesidad del estudio sistemático de efectos acústicos en sitios arqueológicos.* Estudios de Cultura Maya **32**: 63-87. U.N.A.M. México.
- Houston, Stephen, Karl Taube.

- 2000            *An archaeology of the Senses: Perceptin and Cultural Expression in Ancient Mesoamerica*. Cambridge Archaeological Journal. UK.
- Howard, David M., Jamie Angus.
- 2006            *Acoustics and Psychoacoustics*. Focal Press.
- Kinsler, Lawrence E. Austin R. Frey.
- 1962            *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & Sons. Inc.
- Landa, Fray Diego.
- Relación de las cosas de Yucatán*. Fondo de Cultura Económica. México.
- Lubman, David.
- 1988            *Archaeological acoustic study of chirped echo from the Mayan pyramid at Chichen Itza, in the Yucatan Region of Mexico ... Is this the world's oldest known sound recording?*.
- Marcus, Daniel A.
- 1997            *Ecuaciones Diferenciales*. Compañía Editorial Continental S.A. México.
- Oullette, Jennifer.
- 2009            *The call of the past*. Salon.com
- Rocconi, Eleonora.
- 2006            "Theatres and Theatre Design in the Graeco-Roman World: Theoretical and Empirical Approaches" en *Archaeoacoustics*. McDonald Institute for Archaeological Research. Cambridge, UK.
- Sadiku, Matthew N. O.
- 2004            *Electromagnetismo*. Compañía editorial continental. México.
- Scarre, Chris, Graeme Lawson.
- 2006            *Archaeoacoustics*. McDonald Institute for Archaeological Research. Cambridge, UK.
- Sharer, Robert J.
- 2003            *La civilización maya*. Fondo de Cultura Económica. México.
- Tichy, Franz.
- 1991            "Los cerros sagrados de la cuenca de México, en el sistema de ordenamiento del espacio y de la planeación de los poblados. ¿El sistema ceque de los

andes en Mesoamérica?”, en *Arqueoastronomía y Etnoastronomía en Mesoamérica*. U.N.A.M. México.

Velázquez, Roberto.

2002 *Yaxchilan's whistles*. The Journal of the Acoustical Society of America.

Weiss, Peter.

1999 *Singing stairs*. Science News Journal.

Wikipedia. [http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_los\\_elementos\\_finitos](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_los_elementos_finitos)

Zalaquett Rock, Francisca.

2006 *Estudio de las representaciones escénicas en los mayas del periodo clasico: el grupo Norte de Palenque y su significado social*. U.N.A.M. México.