UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

"ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL EN EL ÁREA DE LA QUÍMICA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERA QUÍMICA

P R E S E N T A

OLGA LIDIA NAVARRETE RADILLA

MÉXICO, D. F. **CIUDAD UNIVERSITARIA, MARZO DE 2011.**

JURADO ASIGNADO:

PRESIDENTE: ALBERTO ROSAS PÉREZ

VOCAL: GUADALUPE JOSEFINA TOLEDO MACIAS

SECRETARIO: RICARDO MARTÍNEZ GALICIA

1er. SUPLENTE: HÉCTOR JOE ROSAS TOLEDO

2° SUPLENTE: TONATIHU VALDEZ HERNÁNDEZ

SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA FACULTAD DE QUÍMICA, U.N.A.M.

ASESOR DEL TEMA: ALBERTO ROSAS PÉREZ † ______________________________

SUSTENTANTE: OLGA LIDIA NAVARRETE RADILLA ______________________________

AL MAT. ALBERTO ROSAS PÉREZ

MI GRAN MAESTRO DE AYER, HOY Y SIEMPRE

CON INFINITO CARIÑO Y AGRADECIMIENTO

POR SU GRAN APOYO INCONDICIONAL

A MI MADRE, POR SU GRAN ESFUERZO

A MI FAMILIA POR CONFIAR SIEMPRE EN MÍ

A RICARDO MARTÍNEZ POR SUS APORTACIONES A ESTE PROYECTO

ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL EN EL ÁREA DE LA QUÍMICA.

Índice

Página

INTRODUCCIÓN

Mi inquietud por elaborar esta tesis es consecuencia de la experiencia adquirida durante el tiempo empleado en la realización del servicio social en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Química, bajo la supervisión del Matemático Alberto Rosas Pérez responsable de dicha actividad.

Una de las actividades que desarrolla el Departamento de Matemáticas es la de organizar y coordinar programas de asesorías, tanto de manera individual como grupal, según lo requieran las necesidades de los alumnos, esta labor representa un gran compromiso para el Departamento, dado que al alumno se le proporcionan las bases necesarias de álgebra, geometría, trigonometría entre otras, para lograr un buen razonamiento lógico matemático útil y necesario en las distintas carreras impartidas en la Facultad de Química.

La idea de impartir asesorías de matemáticas surge debido a que los conocimientos con los que ingresan los estudiantes a la facultad son heterogéneos. Los resultados de este proyecto han sido favorables, tanto para los alumnos como para el prestador de servicio social que asesora, a este último le beneficia porque la experiencia adquirida en dicho trabajo le ayuda a reafirmar y combinar el binomio contenido-didáctica, y muchos de ellos se inclinan por la docencia.

El programa de asesorías en el cual desarrollé el servicio social en 1996 continua vigente, y con grandes logros porque actualmente he observado que cuentan con un buen equipo de asesores (básicamente de los últimos semestres) seleccionados por profesores del departamento de matemáticas, quienes además coordinan durante todo el semestre dicho trabajo. Se tienen horarios: de lunes a viernes de 8:00 a.m. a 7:00 p.m., con la finalidad de que todo alumno tenga la posibilidad de recibir apoyo cuando lo solicite. Los asesores se encargan de brindar a los jóvenes la ayuda necesaria para encontrar la solución a diversos problemas relacionados con las diferentes materias impartidas en la facultad. Este proyecto no es obligatorio para los alumnos, no es necesaria una inscripción para participar y por lo tanto no se percibe ninguna calificación. Cabe mencionar que desde 1996 a la fecha los cambios que ha tenido el programa de asesorías, lo han hecho más exitoso.

Durante mi estancia en el Departamento de Matemáticas, observé en los alumnos la carencia del razonamiento lógico matemático porque después de haberles proporcionado las herramientas matemáticas necesarias para emprender el curso de cálculo, les es difícil introducirlas en un proceso como lo es el cálculo diferencial e integral. Esto es lo que me ha motivado a darle un seguimiento al Programa de Asesorías, enfocándome principalmente en el tema de Integración y con la finalidad de involucrar aún más a los jóvenes en el campo de las matemáticas, ya que estas nos facilitan el razonamiento.

Cálculo I es una asignatura del tronco común de las licenciaturas que se imparten en la Facultad de Química. Es una materia obligatoria con clave 1111 y que lleva una seriación con Cálculo II y Ecuaciones Diferenciales; y cuyos objetivos de esta asignatura son:

- Conocer los conceptos de límite y continuidad.
- Comprender la relación entre derivada y límite de una función.
- Aplicar el concepto de derivada en la construcción de modelos matemáticos donde se den razones de cambio.
- Aplicar la derivada en la resolución de problemas de química, física, matemáticas, entre otras
- Comprender la relación entre derivada e integral.
- Interpretar los conceptos de integral definida e indefinida.
- Aplicar el cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas de química, física, matemáticas, entre otras.

Dicha asignatura está constituida por las siguientes unidades:

1.- El campo de los números reales.
2.- Funciones (dominio, conjunto de imágenes, regla de correspondencia)
3.- El concepto de límite
4.- La derivada
5.- Algunas aplicaciones de la derivada
6.- La integral definida

7.- Funciones trigonométricas
8.- Métodos y técnicas de integración
9.- Algunas aplicaciones de la integral

En la elaboración de este trabajo me dedicaré básicamente a las técnicas de integración, desarrolladas en las unidades 6, 7, 8 y concluyendo la tesis con la unidad 9.

El tema de integración suele crear algunos conflictos en los alumnos, para algunos que tienen los conocimientos básicos de matemáticas les es complicado introducirlos en la resolución de ciertas integrales, para otros que son capaces de identificar el integrando surge la duda sobre cuál es la técnica de integración a utilizar, y para otros más que poseen conocimiento y habilidad en las técnicas de integración, les causa dificultad interpretar y representar, mediante una relación matemática que involucre una integral, los enunciados que describen a un problema de aplicación de la integral.

CAPÍTULO I. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL PROCESO DE INTEGRACIÓN

1.1 Breve reseña histórica acerca del origen del cálculo integral, desde Demócrito hasta Cauchy.

El cálculo surge de la geometría griega, siendo Demócrito (370 a. C.) quien utilizó esta herramienta para calcular el volumen de pirámides y conos a través de un número infinito de secciones cuyo espesor era muy pequeño. Eudoxo y Arquímedes determinaron el área circunscrita por una curva con la exactitud requerida mediante el método de exhaución, que consistía en aproximar la figura curva con polígonos inscritos y circunscritos, considerando la curva como la frontera fija a la que se aproximan los polígonos, intentando llenarla completamente cada vez que aumentaban el número de sus lados[8]. Sin embargo, fue difícil estructurar una teoría enfocada al cálculo porque carecían de la herramienta necesaria para hacerlo, tenían dificultades con los números irracionales. En el siglo XVII, Cavalieri precursor del cálculo integral, desarrolló el método de los indivisibles[8] y apoyándose en este calculó áreas y volúmenes, junto con Torricelli ampliaron el uso de los infinitesimales[8]. Descartes y Fermat hicieron uso del álgebra para encontrar el “área bajo una curva”; así como la tangente a una curva, lo que en la actualidad se conoce como integración y diferenciación.

A partir de la segunda mitad del siglo XVII, Newton y Leibniz quienes trabajaron individualmente, resumieron los conceptos conocidos actualmente como la derivada y la integral y presentaron reglas de gran utilidad para el manejo de éstos (reglas de diferenciación); así como también presentaron el Teorema Fundamental del Cálculo. Gracias a estas aportaciones de Newton y Leibniz surge el cálculo diferencial e integral, cuyo principal objetivo son las propiedades de algunas funciones reales de variables reales. Los métodos anteriores a Newton y Leibniz estaban basados en teorías aplicadas a la resolución de problemas individuales y no en teorías generales que apoyaran en la resolución de problemas universales de cálculo. Newton y Leibniz se encargaron de recopilar y perfeccionar toda la información que habían obtenido anteriormente algunos matemáticos y es así como de esta manera logran encontrar algoritmos aplicables a los problemas, a lo cual se le conoce como el descubrimiento “final” del cálculo. Más tarde se le atribuye a Cauchy y sus continuadores otro hecho fundamental: la aportación de un orden lógico del cálculo.

CAPÍTULO II. Conceptos básicos de cálculo integral

2.1 Cálculo integral

El cálculo integral es una rama de las matemáticas con aplicaciones que van desde el cálculo de área y volumen en geometría hasta aplicaciones practicas en química, física e ingeniería, tales como el cálculo de trabajo, volumen de un sólido de revolución, longitud de arco, momento, centro de masa, presión de fluidos, fuerzas de fluidos; así como en diversas áreas de las matemáticas (estadística, ecuaciones diferenciales, métodos numéricos, entre otras).

Del cálculo integral vamos a comentar sobre:

- Integral definida
- Integral indefinida
- Teorema Fundamental del Cálculo
- Algunas técnicas de integración
- Algunas aplicaciones de la integral

que son algunos puntos fundamentales del cálculo integral, ya que su campo es mucho más amplio.

2.2 Integral definida

Es común determinar áreas de figuras geométricas regulares tales como cuadrado, círculo, elipse, etc., a través de fórmulas ya establecidas, pero ahora queremos determinar el área (A) de una región acotada por las rectas $x = a$, $x = b$, el eje x, y la gráfica de una función f continua, siendo $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$ (fig. 2.2.1).

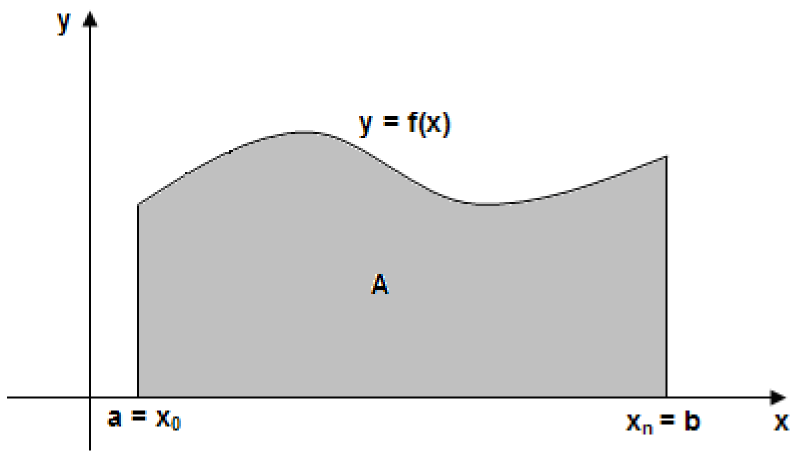


Fig. 2.2.1

Si A existe, esta área suele representarse como la integral de f, donde f tiene como dominio el intervalo cerrado [a, b].

Si consideramos una partición P del intervalo [a, b] como un subconjunto finito de números $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de dicho intervalo, tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ y si el intervalo [a, b] se divide en n subintervalos: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,…, $[x_{i-1}, x_i]$,…, $[x_{n-1}, x_n]$ donde la amplitud (el ancho) de cada uno de estos no necesariamente es del mismo tamaño. Si el intervalo de mayor amplitud tiende a cero, los demás también.

Por el Teorema de Bolzano Weierstrass; toda f continua en [a, b] lo es en cada $[x_{i-1}, x_i]$, por lo tanto si $f(x_1)$ es la altura máxima (M_1) de f sobre $[x_0, x_1]$, y sabiendo que la longitud del primer subintervalo está dada por $\Delta x = (x_1 - x_0)$, entonces el área del primer rectángulo inscrito (figura 2.2.2) estará dada por $M_1(x_1 - x_0)$, de igual manera se tiene para los siguientes subintervalos. El área total S se determina sumando las áreas de los rectángulos circunscritos de la región A, esto es:

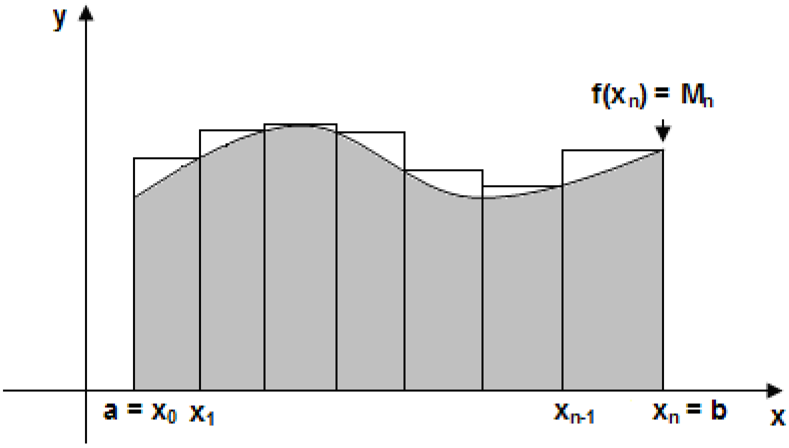


Fig. 2.2.2

$$S = M_1 (x_1 - x_0) + M_2 (x_2 - x_1) + \dots + M_n (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Por otra parte, si utilizamos alturas mínimas (m_i), tenemos que para el primer subintervalo $[x_0, x_1]$, la altura mínima es $f(x_0) = m_0$ y la longitud está dada por $(x_1 - x_0)$, por lo tanto la suma de las áreas de los rectángulos inscritos de la región A (figura 2.2.3) queda definida como la suma total s, y está dada por:

$$s = m_0 (x_1 - x_0) + m_1 (x_2 - x_1) + \dots + m_{n-1} (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

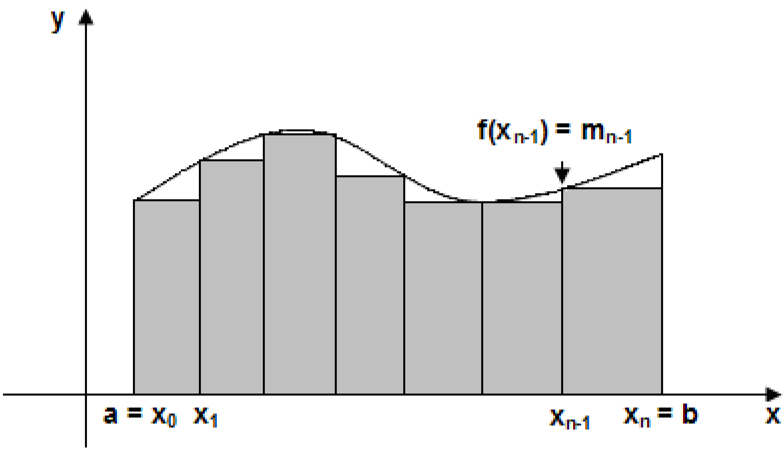


Fig. 2.2.3

siendo $S(f, P_j) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ la suma superior y $s(f, P_j) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ la suma inferior de la función f para la partición P_i. Para cada partición diferente P_i podemos formar los conjuntos

$$[S] = \{ S_1, S_2, S_3, \ldots \}$$

y

$$[s] = \{ s_1, s_2, s_3, \ldots \}$$

donde [S] es el conjunto de sumas superiores y [s] es el de sumas inferiores.

De lo anterior cabe mencionar que

$$s(f, P_j) \leq A \leq S(f, P_j)$$

para cualquier partición P_j.

Si el número de subintervalos aumenta, cada vez que definamos una nueva partición P, s y S se aproximarán aún más a A porque los valores que vayamos obteniendo de s aumentarán mientras que los valores de S disminuirán siempre que se trabaje con una P más fina, cada P subsecuente contendrá a la anterior, esto es

$$P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \ldots$$

Por definición de supremo e ínfimo se tiene lo siguiente:

Supremo

Sea S un conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente. Un número M es el supremo de S si

(i) M es una cota superior de S.

(ii) $M \leq K$, donde K es cualquier cota superior de S.

Ínfimo

Si un conjunto no vacío S está acotado inferiormente, entonces un número m es el ínfimo de S si

(i) m es una cota inferior de S

(ii) $m \geq k$, donde k es cualquier cota inferior de S.

Entonces cuando

$$\inf [S] = \sup [s]$$

habremos encontrado un número único A que llamaremos integral definida o simplemente integral de f sobre [a, b], a este número se le simboliza como

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

El símbolo $\int$ es una s alargada (s de suma), a y b son los límites de integración inferior y superior respectivamente y f(x) representa a la función.

Finalmente concluimos que $\int_a^b f(x)\,dx$ se interpreta como el área de una región A, acotada por la función $f: R \to R$, las rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje x cuando se tiene que $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$.

Es conveniente mencionar que una función f es integrable en un intervalo [a, b], si es continua y está acotada en dicho intervalo.

2.3 Integral indefinida

Ahora nos toca hablar del proceso inverso de la diferenciación: la antidiferenciación o integración indefinida.

Se dice que una función F continua en [a, b] es una antiderivada de f continua también sobre [a, b], si

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$$

donde F´(x) denota la derivada de F.

A la familia de todas las antiderivadas de una función f se le conoce como integral indefinida de f y se representa como

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde C es la constante de integración y puede sustituirse por cualquier valor real. Si se desea encontrar una antiderivada específica, únicamente se le asigna un valor real a la constante de integración.

2.4 Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable sobre el intervalo [a, b], si F es una función continua sobre ese mismo intervalo, entonces F queda definida como

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

Si f es una función continua en el punto c del intervalo [a,b], entonces F será derivable en c, y por lo tanto

$$F'(c) = f(c)$$

Si deseamos demostrar que $F'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$, consideremos que c ϵ (a, b) y que h > 0 (únicamente se realizará la demostración para el caso en el que el límite superior de integración varia), entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x)\,dx$$

Definiendo a M_h y m_h (figura 2.4.1), tenemos que

M_h = altura máxima de f en [c, c + h]

m_h = altura mínima de f en [c, c + h]

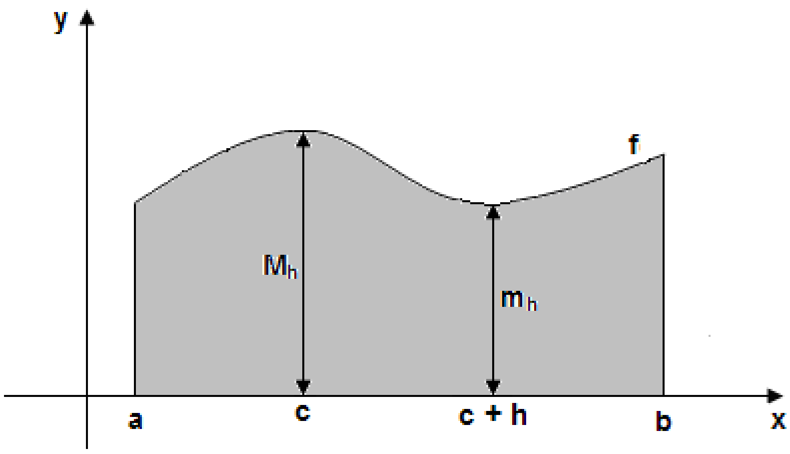


Fig. 2.4.1

y dado que la longitud del intervalo [c, c + h] esta dada por

$$(c + h) - c = h$$

tenemos que

$M_h \bullet h$ = suma superior de f en [c, c + h]

$m_h \bullet h$ = suma inferior de f en [c, c + h]

Por teorema*: $m(b - a) \leq \int_c^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$, tenemos que

$$m_h \bullet h \leq \int_c^{c+h} f(x)\,dx \leq M_h \bullet h$$

por lo tanto

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h$$

Puesto que f es continua en c,

$$\lim_{h\to 0} m_h \;=\; f(c) \;=\; \lim_{h\to 0} M_h$$

Por el teorema de la función intermedia* queda demostrado que

$$F'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)$$

El hecho de que la función sea continua en el punto c, nos garantiza que la función F sea derivable en ese mismo punto y de manera general se garantiza que si f es continua x є [a,b], entonces F es derivable en cualquier x que pertenece al intervalo [a,b] y por lo tanto f es la derivada de alguna función, para este caso, la función

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

2.5 Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable sobre el intervalo [a, b] y dada la función g cuya derivada g´(x) = f(x), entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

El proceso para la demostración de este teorema es el siguiente

Sea P = $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de intervalo [a, b] y dado c un punto del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tal que

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(c)(x_i - x_{i-1}) = f(c)\,(x_i - x_{i-1})$$

Si M_i es el supremo de la función sobre el intervalo $[x_i - x_{i-1}]$ y m_i es el ínfimo de f sobre el intervalo $[x_i - x_{i-1}]$

entonces

$$m_i (x_i - x_{i-1}) \leq f(c) (x_i - x_{i-1}) \leq M_i (x_i - x_{i-1})$$

sabiendo que

$$f(c)(x_i - x_{i-1}) = g(x_i) - g(x_{i-1})$$

tenemos

$$m_i (x_i - x_{i-1}) \leq g(x_i) - g(x_{i-1}) \leq M_i (x_i - x_{i-1})$$

sumando para i = 1, 2,…., n obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Si $S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_n - x_{n-1})$ es la suma superior y $s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_n - x_{n-1})$ la suma inferior de la función f para la partición P, entonces

$s \leq g(b) - g(a) \leq S$ para toda partición P.

De lo anterior se deduce que

$$\int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a)$$

CAPÍTULO III. Algunas técnicas de integración

3.1 Integrales directas

La integración es un proceso no tan sencillo o tan directo como lo es la diferenciación, puesto que no hay reglas que nos ayuden de forma general a integrar una función continua.

En los textos de cálculo generalmente se prueban algunas integrales para usarlas como modelos o reglas, unas de estas son:

1) $\int dx = x + C$

2) $\int k\, dx = k \int dx = k\, x + C,\ \text{donde}\ k = \text{cte}$

3) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

4) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

5) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

6) $\int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x + C$

7) $\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + C$

8) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

9) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

10) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

11) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

12) $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

13) $\int \cot x \, dx = \ln|\text{sen } x| + C = -\ln|\csc x| + C$

14) $\int e^x \, dx = e^x + C$

15) $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \text{ con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$

16) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

17) $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

18) $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C$

Cuando aplicamos una o más de una de estas reglas de integración, estamos encontrando de forma directa el resultado de la integral. Esto se puede observar en los siguientes ejemplos.

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS INTEGRALES DIRECTAS

En la resolución de los cinco primeros ejemplos se aplicará la regla 2.

1) $\int_{-2}^{1} 5 \, dx = 5x\Big|_{-2}^{1} = 5(1) - 5(-2) = 5 + 10 = 15$

2) $\int_{-3}^{7} (-20) \, dx = -20x\Big|_{-3}^{7} = -20(7) - (-20)(-3) = -140 - 60 = -200$

3) $\int_{0}^{3} (-160) \, dx = -160x\Big|_{0}^{3} = -160(3) - (-160)(0) = -480$

4) $\int_{-4}^{-1} \dfrac{\pi}{2} \, d\theta = \dfrac{\pi}{2}\theta \Big|_{-4}^{-1} = \dfrac{\pi}{2}(-1) - \dfrac{\pi}{2}(-4) = \pi\dfrac{3}{2}$

5) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\ dr = \sqrt{2}r\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} = \sqrt{2}\,(\sqrt{18}) - \sqrt{2}(\sqrt{2}) = \sqrt{36} - \sqrt{4} = 4$

Se recomienda utilizar la regla 2 y 4 para integrar los ejemplos 6 y 7

6) $\int_{-2}^{4}(\frac{x}{2} + 3)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} x\ dx + \int_{-2}^{4} 3\ dx = \left[\frac{x^2}{4} + 3x\right]\Bigg|_{-2}^{4}$

$$= \left[\frac{4^2}{4} + 3(4)\right] - \left[\frac{(-2)^2}{4} + 3(-2)\right] = 21$$

7) $\int_{1/2}^{3/2}(-2x + 4)\ dx = \int_{1/2}^{3/2}(-2x)\ dx + \int_{1/2}^{3/2} 4\ dx = \left[-x^2 + 4x\right]_{1/2}^{3/2}$

$$= \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{2}\right)\right] - \left[-\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 2$$

En los ejemplos 8 y 9 es conveniente utilizar la regla 4 para integrar

8) $\int_{0}^{\pi/2} \theta^2\ d\theta = \frac{\theta^3}{3}\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{\pi^3}{24}$

9) $\int 5x^4\ dx = x^5 + C$

Para integrar los siguientes ejemplos se aplican las reglas 2 y 4, y además se tienen que aplicar a los ejemplos del 13 al 16 las leyes de los exponentes y/o leyes de los radicales.

10) $\int\left(4x^4 - 3x^2 + 6x - 1\right) dx = \frac{4x^5}{5} - x^3 + 3x^2 - x + C$

11) $\int\left(3 - 2x + x^2\right) dx = 3x - x^2 + \frac{x^3}{3} + C$

12) $\int\left(ax^2 + bx + c\right) dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$

13) $\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+5\right)dx=\int\left(2x^{-2}+3x^{-3}+5\right)dx=\frac{-2}{x}-\frac{3}{2x^2}+5x+C$

14) $\int\left(\frac{x^4+2x^2+1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{7/2}+2x^{3/2}+x^{-1/2}\right)dx$

$$=\frac{2}{9}x^{9/2}+\frac{4}{5}x^{5/2}+2x^{1/2}+C=\frac{2}{9}\sqrt{x^9}+\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+2\sqrt{x}+C$$

15) $\int\left(\sqrt{3x}-\frac{3}{\sqrt{3x}}\right)dx=\sqrt{3}\int\sqrt{x}\,dx-\frac{3}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{3}\int x^{1/2}\,dx-\frac{3}{\sqrt{3}}\int x^{-1/2}\,dx$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2}-\frac{6}{\sqrt{3}}x^{1/2}+C=\frac{2\sqrt{3x^3}}{3}-\frac{6}{\sqrt{3}}\sqrt{x}+C$$

16) $\int\left(\frac{27x^3-1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=27\int\frac{x^3}{x^{1/3}}\,dx-\int\frac{dx}{x^{1/3}}=27\int x^{8/3}\,dx-\int x^{-1/3}\,dx$

$$=\frac{81}{11}\sqrt[3]{x^{11}}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$$

Algunos funciones requieren de una herramienta algebraica (leyes de los exponentes, leyes de los radicales, factorización, etc.) para encontrar un integrando equivalente al que se tiene inicialmente y así poderlo integrar a través de las reglas citadas anteriormente.

3.2 Integración por cambio de variable

Este método consiste en reescribir el integrando en forma más accesible mediante un cambio de variable, en términos de **u** y **du,** de tal manera que la integral resultante sea más fácil de obtener. Para ello se le recomienda al alumno, siempre que tenga una integral de la forma

$$\int \mathbf{f(g(x))g'(x)dx}$$

hacer u = g(x) y du = g´(x) dx y escribir a la integral en términos de u y du de la siguiente manera

$$\int \mathbf{f(u)\,du}$$

Finalmente logramos encontrar una integral más fácil de resolver, cuya solución es:

$$\int \mathbf{f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C}$$

Este procedimiento "integración por cambio de variable" es apropiado para integrales compuestas. Es necesario que el alumno domine el proceso de diferenciación, puesto que esto le ayudará a definir a u y determinar du adecuadamente.

Sugerencias para la aplicación de este método de integración

- Hacer **u = g(x)**
- Obtén la derivada de **u**
- Justifica que la derivada de **u** sea igual o muy parecida, excepto por una constante o una variable en algunos casos, a la otra parte del integrando
- Reescribe la integral inicial en términos de **u** y de **du**.
- Evalúa la integral resultante
- Sustituye **u** por g(x) en el resultado obtenido
- Si deseas corroborar el resultado, derívalo y compáralo con el integrando, estos tienen que ser iguales.

Para ello, los ejemplos siguientes:

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS INTEGRALES POR CAMBIO DE VARIABLE.

1) $\int x^2\sqrt{x^3 - 1}\,dx$

Nótese que x^2 dx es la diferencial de: $x^3 - 1$, salvo por una constante, para ello, sea: $u = x^3 - 1$

$$du = 3\,x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}du = x^2\,dx$$

realizando el cambio de variable e integrando (reglas básicas de integración, página 14).

$$= \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{2}{9}u^{3/2} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-1)^3} + C$$

2) $\int x\sqrt[3]{\left(4-x^2\right)^2}\,dx = \int x\left(4-x^2\right)^{2/3}\,dx$

En este ejemplo x es la diferencial de 4 – x^2, excepto por una constante, por lo que se sugiere que

sea $\quad u = 4 - x^2$

$du = -2x\,dx$

$-\frac{1}{2}du = x\,dx$

realizar el cambio de variable e integrar

$$= -\frac{1}{2}\int u^{2/3}\,du = -\frac{3}{10}u^{5/3} + C = -\frac{3}{10}\sqrt[3]{\left(4-x^2\right)^5} + C$$

3) $\int \frac{z}{\sqrt{3z^2+1}}\,dz$

sea $\quad u = 3z^2 + 1$

$du = 6z\,dz$

$\frac{1}{6}du = z\,dz$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{1}{6}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{3}u^{1/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{3z^2+1} + C$$

4) $\int x^2\sqrt{4-x^3}\,dx$

sea $\quad u = 4 - x^3$

$du = -3x^2\,dx$

$-\frac{1}{3}du = x^2\,dx$

$$= -\frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = -\frac{2}{9}u^{3/2} + C = -\frac{2}{9}\sqrt{\left(4-x^3\right)^3} + C$$

5) $\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}\,dy$

sea $u = 3 - y \quad \Rightarrow \quad y = 3 - u$

$du = -\,dy$

$-du = dy$

$$= -\int \frac{6-u}{u^{2/3}}\,du = -\int \left(6u^{-2/3} - u^{1/3}\right)du = -6\int u^{-2/3}\,du + \int u^{1/3}\,du$$

$$= -18u^{1/3} + \frac{3}{4}u^{4/3} + C = -18(3-y)^{1/3} + \frac{3}{4}(3-y)^{4/3} + C$$

6) $\int \left(2z^2+1\right)^{1/3} z^3\,dz$

sea $u = 2z^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \frac{u-1}{2}$

$du = 4z\,dz$

$\frac{1}{4}du = z\,dz$

$$= \frac{1}{4}\int u^{1/3}\left(\frac{u-1}{2}\right)du = \frac{1}{8}\int \left(u^{4/3} - u^{1/3}\right)du = \frac{1}{8}\int u^{4/3}du - \frac{1}{8}\int u^{1/3}du$$

$$= \frac{3}{56}u^{7/3} - \frac{3}{32}u^{4/3} + C = \frac{3}{56}\left(2z^2+1\right)^{7/3} - \frac{3}{32}\left(2z^2+1\right)^{4/3} + C$$

$$= \frac{3}{56}\sqrt[3]{\left(2z^2+1\right)^7} - \frac{3}{32}\sqrt[3]{\left(2z^2+1\right)^4} + C$$

7) $\int \frac{\left(z^{1/3}+2\right)^4}{\sqrt[3]{z^2}}\,dz$

sea $u = z^{1/3} + 2$

$du = \frac{1}{3}z^{-2/3}\,dz$

$3du = z^{-2/3}\,dx$

$$= \int \left(z^{1/3} + 2\right)^4 \left(z^{-2/3}\right) dz = 3\int u^4 du = \frac{3}{5}u^5 + C = \frac{3}{5}\left(z^{1/3} + 2\right)^5 + C$$

8) $\int x^4 \sqrt{2 - x^5}\, dx$

sea $u = 2 - x^5$

$du = - 5x^4\, dx$

$-\frac{1}{5} du = x^4\, dx$

$$= -\frac{1}{5}\int u^{1/2}\, du = -\frac{2}{15}u^{3/2} + C = -\frac{2}{15}\left(2 - x^5\right)^{3/2} + C$$

9) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^{3/2} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) dx$

sea $u = x + \frac{1}{x}$

$du = (1 – x^{-2})\, dx$

$du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$= \int u^{3/2} du = \frac{2}{5}u^{5/2} + C = \frac{2}{5}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{5/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^5} + C$$

10) $\int \sqrt{5x + 1}\, dx$

sea $u = 5x + 1$

$du = 5\, dx$

$\frac{1}{5} du = dx$

$$= \frac{1}{5}\int u^{1/2} du = \frac{2}{15}u^{3/2} + C = \frac{2}{15}(5x + 1)^{3/2} + C = \frac{2}{15}\sqrt{5x + 1} + C$$

11) $\int x^2\left(4-x^2\right)^3 dx$

$$\text{sea } u=4-x^2 \Rightarrow x=\sqrt{4-u}$$

$$du = -2x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}du = x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int u^3\sqrt{4-u}\,du=\frac{1}{2}\int v^{1/2}\left(4-v\right)^3 dv$$

$$\text{sea } v=4-u \Rightarrow u=4-v \Rightarrow u^3=\left(4-v\right)^3$$

$$dv = -du$$

$$-dv = du$$

$$=\frac{1}{2}\int v^{1/2}\left(64-48v+12v^2-v^3\right)dv=32\int v^{1/2}\,dv-24\int v^{3/2}\,dv+$$

$$+6\int v^{5/2}dv-\frac{1}{2}\int v^{7/2}\,dv=\frac{64}{3}v^{3/2}-\frac{48}{5}v^{5/2}+\frac{12}{7}v^{7/2}-\frac{1}{9}v^{9/2}+C$$

$$=\frac{64}{3}\left[4-\left(4-x^2\right)\right]^{3/2}-\frac{48}{5}\left[4-\left(4-x^2\right)\right]^{5/2}+\frac{12}{7}\left[4-\left(4-x^2\right)\right]^{7/2}$$

$$-\frac{1}{9}\left[4-\left(4-x^2\right)\right]^{9/2}+C=\frac{64}{3}x^3-\frac{48}{5}x^5+\frac{12}{7}x^7-\frac{1}{9}x^9+C$$

12) $\int \sqrt{4x+3}\left(x^2+1\right)dx$

$$\text{sea } u=4x+3 \qquad \Rightarrow \qquad x^2=\left(\frac{u-3}{4}\right)^2$$

$$du = 4\,dx$$

$$\frac{1}{4}du = dx$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\left[\left(\frac{u-3}{4}\right)^2 + 1\right]du = \frac{1}{4}\int u^{1/2}\left(\frac{u^2-6u+9}{16}+1\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\left(\frac{u^2-6u+25}{16}\right)du = \frac{1}{64}\int u^{1/2}\left(u^2-6u+25\right)du = \frac{1}{64}\int u^{5/2}du$$

$$-\frac{3}{32}\int u^{3/2}du + \frac{25}{64}\int u^{1/2}du = \frac{1}{224}u^{7/2} - \frac{3}{80}u^{5/2} + \frac{50}{192}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{224}\left(4x+3\right)^{7/2} - \frac{3}{80}\left(4x+3\right)^{5/2} + \frac{50}{192}\left(4x+3\right)^{3/2} + C$$

13) $\int 5x\sqrt{2+3x^2}\,dx$

sea $u = 2 + 3x^2$

$du = 6x\,dx$

$$\frac{5}{6}du = \frac{5}{6}(6)x\,dx$$

$$\frac{5}{6}du = 5x\,dx$$

$$= \frac{5}{6}\int u^{1/2}du = \frac{5}{9}u^{3/2} + C = \frac{5}{9}\left(2+3x^2\right)^{3/2} + C = \frac{5}{9}\sqrt{\left(2+3x^2\right)^3} + C$$

14) $\int\left(x^2-4x+4\right)^{4/3}dx = \int\left[\left(x-2\right)^2\right]^{4/3}dx$

sea $u = x - 2$

$du = dx$

$$= \int\left[\left(x-2\right)^2\right]^{4/3}dx = \int\left(u^2\right)^{4/3}du = \int u^{8/3}du$$

$$= \frac{3}{11}u^{11/3} + C = \frac{3}{11}(x-2)^{11/3} + C = \frac{3}{11}\sqrt[3]{(x-2)^{11}} + C$$

15) $\int \sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,\frac{dx}{x^3}$

sea $u = 1 + \frac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2u-2}$

$du = -\frac{1}{2x^2}\,dx$

$-2du = \frac{dx}{x^2}$

$$= -2\int u^{1/2}(2u-2)\,du = -4\int\left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)du = -4\int u^{3/2}du + 4\int u^{1/2}du$$

$$= -\frac{8}{5}u^{5/2} + \frac{8}{3}u^{3/2} + C = -\frac{8}{5}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{5/2} + \frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3/2} + C$$

$$= -\frac{8}{5}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{5}} + \frac{8}{3}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3}} + C$$

16) $\int \sqrt{3+x}\,(x+1)^2\,dx$

sea $u = 3 + x \quad \Rightarrow \quad x = u - 3$

$du = dx$

$$= \int u^{1/2}(u-3+1)^2\,du = \int u^{1/2}(u-2)^2\,du$$

$$= \int u^{1/2}\left(u^2 - 4u + 4\right)du = \int u^{5/2}du - 4\int u^{3/2}du + 4\int u^{1/2}du = \frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{8}{5}u^{5/2}$$

$$+ \frac{8}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{7}(3+x)^{7/2} - \frac{8}{5}(3+x)^{5/2} + \frac{8}{3}(3+x)^{3/2} + C$$

3.3 Integración por partes

Este método consiste en determinar una segunda integral que sea menos complicada de integrar que la "integral dada", se utiliza básicamente para resolver integrales en donde el integrando, en algunos casos, está constituido por una función trascendente o algebraica, o por el producto de funciones polinomiales y/o trascendentes, de la forma **f(x)•q(x) dx** en donde f(x) es un polinomio con coeficientes reales y q(x) es una función trascendente, como el caso 1, 2, 3 y 4 entre otros. También

1) $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

2) $\int x e^{2x} dx$

3) $\int x \ln x \, dx$

4) $\int \sec^3 x \, dx$

Una regla nemotécnica útil para obtener el modelo de integración por partes es:

sea u = f(x) y v = g(x) y se desea obtener la d(uv), entonces

$$\left[\mathbf{f(x)\,g(x)}\right]' = \mathbf{f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ 1$$

integrando cada miembro de la ecuación 1, obtenemos

$$\int \left[\mathbf{f(x)\,g(x)}\right]' \mathbf{dx} = \int \mathbf{f(x)\,g'(x)\,dx} + \int \mathbf{g(x)\,f'(x)\,dx}$$

Nótese que el integrando del primer miembro es f(x)g(x), por lo tanto

$$\mathbf{f(x)\,g(x)} = \int \mathbf{f(x)\,g'(x)\,dx} + \int \mathbf{g(x)\,f'(x)\,dx}$$

despejando la primera integral del segundo miembro, encontramos que

$$\int \mathbf{f(x)\,g'(x)\,dx} = \mathbf{f(x)\,g(x)} - \int \mathbf{g(x)\,f'(x)dx}$$

Si u = f(x) y v = g(x), entonces du = f´(x) dx y dv = g´(x) dx. Finalmente el modelo de integración por partes queda:

$$\int \mathbf{u\,dv} = \mathbf{u\,v} - \int \mathbf{v\,du}$$

En el proceso de integración por partes se expresa $\int \mathbf{u\,dv}$ en términos de otra integral $\int \mathbf{v\,du}$ y de **uv**. Es muy importante la elección de **u** y **dv** porque de ello depende que la integral del segundo miembro de la fórmula sea más fácil de obtener que la integral inicial, para ello se procede de la siguiente manera.

1) Se sustituye una parte de la función por **u** y se halla la diferencial de **u**. Al mismo tiempo, se sustituye por la diferencial **dv** la otra parte de la función incluyendo la diferencial de la variable independiente, y se integra obteniendo el valor de **v.**

Nota: se recomienda que la parte que se sustituye por **dv** sea la parte más fácil de integrar, en algunos casos será necesario utilizar integración por cambio de variable.

2) Se reemplazan los datos obtenidos en el paso anterior, en la fórmula de integración por partes.

3) Se efectúa el producto indicado y se halla la nueva integral eligiendo un método adecuado.

4) En algunos ejercicios se tendrá que repetir el mismo proceso (pasos del 1 al 3) cuando el nuevo integrando resulte ser un producto menos accesible de integrar con la ayuda de métodos más simples como el integrar directamente o por cambio de variable.

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS INTEGRALES UTILIZANDO EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

Modelo básico para la resolución de los siguientes ejemplos

$$\int \mathbf{u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

1) $\int x\,dx$

sea $u = x$ $\quad dv = dx$

$du = dx$ $\quad v = x$

sustituyendo u, du, dv y v en el modelo de integración por partes, tenemos

$$\int x\,dx = x^2 - \int x\,dx$$

$$2\int x\,dx = x^2 + 2C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

2) $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

Definiendo a u, du, dv y v de la siguiente manera

sea $u = x$ $\quad dv = \operatorname{sen} x\,dx$

$du = dx$ $\quad v = -\cos x$

y sustituyéndolas en el modelo básico de integración por partes, tenemos que

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

finalmente nos apoyamos en las reglas básicas de integración (página 14) para integrar cos x, y obtenemos como resultado final

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

3) $\int x \cos x \, dx$

sea $u = x$ $\quad dv = \cos x \, dx$

$du = dx$ $\quad v = \text{sen } x$

$= x \text{ sen } x - \int \text{sen } x \, dx = x \text{ sen } x + \cos x + C$

4) $\int x^2 e^{3x} \, dx$

sea $u = x^2$ $\quad dv = e^{3x} \, dx$

$du = 2x \, dx$ $\quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$

$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} \, dx$

En este ejemplo se hace una doble integración por partes, porque la integral $\int x e^{3x} \, dx$ no es directa, seguimos teniendo un producto de dos funciones (algebraica por trascendente). Por lo tanto, sea

$u = x$ $\quad dv = e^{3x}$

integrando e^{3x} por cambio de variable

$du = dx$ $\quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$

y por lo tanto

$$\int x^2 e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \, dx \right] = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C$$

5) $\int x^2 \text{ sen } 3x \, dx$

sea $u = x^2$ $\quad dv = \text{sen } 3x \, dx$

$du = 2x \, dx$ $\quad \int dv = \int \text{sen } 3x \, dx$

Integrando por cambio de variable

$v = \frac{1}{3} \int \text{sen } u \, du = -\frac{1}{3} \cos 3x$

$$= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x \cos 3x \, dx$$

Integrando por partes

$u = x \qquad dv = \cos 3x \, dx$

$du = dx \qquad \int dv = \int \cos 3x \, dx$

$$\int dv = \frac{1}{3}\int \cos u \, du$$

$$v = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} 3x \, dx\right)$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C$$

6) $\int x \cos 4x \, dx$

sea $u = x \qquad dv = \cos 4x \, dx$

$du = dx \qquad \int dv = \int \cos 4x \, dx$

Integrando por cambio de variable

$$\int dv = \frac{1}{4}\int \cos u \, du$$

$$v = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$$

$$= \frac{1}{4}x \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{4}\int \operatorname{sen} 4x \, dx = \frac{1}{4}x \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$$

7) $\int x\, e^{-2x} dx$

sea $u = x$ $\qquad$ $dv = e^{-2x}\, dx$

$du = dx$ $\qquad$ $\int dv = \int e^{-2x} dx$

$$\int dv = -\frac{1}{2}\int e^{u} du$$

$$v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

8) $\int x \sec x \tan x\, dx$

sea $u = x$ $\qquad$ $dv = \sec x \tan x\, dx$

$du = dx$ $\qquad$ $v = \sec x$

$$= x \sec x - \int \sec x\, dx = x \sec x - \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$

9) $\int x \csc^2 x\, dx$

sea $u = x$ $\qquad$ $dv = \csc^2 x\, dx$

$du = dx$ $\qquad$ $v = -\cot x$

$$= -x \cot x + \int \cot x\, dx = -x \cot x + \ln\left|\operatorname{sen} x\right| + C$$

10) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

sea $u = x^2$ $\quad dv = \operatorname{sen} x \, dx$

$du = 2x \, dx$ $\quad v = -\cos x$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx$$

$u = x$ $\quad dv = \cos x \, dx$

$du = dx$ $\quad v = \operatorname{sen} x$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2\left(x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx\right)$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$$

11) $\int x^3 e^{-x} dx$

sea $u = x^3$ $\quad dv = e^{-x} dx$

$du = 3x^2 \, dx$ $\quad v = -e^{-x}$

$$= -x^3 e^{-x} + 3\int x^2 e^{-x} dx$$

$u = x^2$ $\quad dv = e^{-x} dx$

$du = 2x \, dx$ $\quad v = -e^{-x}$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6 \int x e^{-x}$$

sea $u = x$ $\quad dv = e^{-x} dx$

$du = dx$ $\quad v = -e^{-x}$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6\left(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx\right)$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} - 6e^{-x} + C$$

12) $\int \arctan x \, dx$

sea $u = \arctan x$ $\quad dv = dx$

$du = \dfrac{1}{1+x^2} dx$ $\quad v = x$

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

sea $u = 1 + x^2$

$du = 2x\ dx$

$\frac{1}{2} du = x\ dx$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|u| + C = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + C$$

13) $\int \ln x\ dx$

sea $u = \ln x$ $dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx$ $v = x$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

14) $\int \arccos x\ dx$

sea $u = \arccos x$ $dv = dx$

$du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $v = x$

$$= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

sea $u = 1 - x^2$

$du = -2x\ dx$

$-\frac{1}{2} du = x\ dx$

$$= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{1/2}} = x \arccos x - \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du$$

$$= x \arccos x - u^{1/2} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

15) $\int \sqrt{x}\ \ln x\, dx$

sea $u = \ln x$ $\quad dv = x^{1/2}\, dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad v = \frac{2}{3}x^{3/2}$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ \ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ \ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C$$

16) $\int x^2\ \ln x\, dx$

sea $u = \ln x$ $\quad dv = x^2\, dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad v = \frac{1}{3}x^3$

$$= \frac{1}{3}x^3\ \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\ \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

17) $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx$

sea $u = \operatorname{sen} 3x$ $\quad dv = \operatorname{sen} x\, dx$

$du = 3 \cos 3x\, dx \quad v = -\cos x + C$

$$= -\operatorname{sen} 3x \cos x + 3\int \cos x \cos 3x\, dx$$

sea $u = \cos 3x$ $\quad dv = \cos x\, dx$

$du = -3 \operatorname{sen} 3x \quad v = \operatorname{sen} x$

$$= -\operatorname{sen} 3x \cos x + 3\left(\operatorname{sen} x \cos 3x + 3\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x\, dx\right)$$

$$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx = -\operatorname{sen} 3x \cos x + 3 \operatorname{sen} x \cos 3x + 9\int (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x)dx$$

$$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx - 9\int (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x)dx = -\operatorname{sen} 3x \cos x + 3 \operatorname{sen} x \cos 3x$$

$$-8\int (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x)dx = -\operatorname{sen} 3x \cos x + 3 \operatorname{sen} x \cos 3x$$

$$\int (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x)dx = \frac{\operatorname{sen} 3x \cos x - 3 \operatorname{sen} x \cos 3x}{8} + C$$

18) $\int e^{-x} \text{sen } x \, dx$

sea $u = e^{-x}$ $\quad dv = \text{sen } x \, dx$

$du = -e^{-x} \, dx$ $\quad v = -\cos x$

$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x \, dx$

sea $u = e^{-x}$ $\quad dv = \cos x \, dx$

$du = -e^{-x}$ $\quad v = \text{sen } x$

$$\int e^{-x}\text{sen } x \, dx = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\text{sen } x - \int e^{-x} \text{ sen } x \, dx$$

$$\int e^{-x}\text{sen } x \, dx + \int e^{-x}\text{sen } x \, dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x}\text{sen } x$$

$$2\int e^{-x}\text{sen } x \, dx = -e^{-x}\cos x - e^{-x} \text{ sen } x + C$$

$$\int e^{-x}\text{sen } x \, dx = \frac{-e^{-x}\cos x - e^{-x} \text{ sen } x}{2} + C = \frac{-e^{-x}(\cos x + \text{sen } x)}{2} + C$$

19) $\int \text{sen } \sqrt{x} \, dx$

sea $u^2 = x$

$2u \, du = dx$

$= 2\int u \text{ sen } u \, du$

sea $z = u$ $\quad dv = \text{sen } u \, du$

$dz = du$ $\quad v = -\cos u$

$= -2u\cos u + 2\int \cos u \, du = -2u\cos u + 2 \text{ sen } u + C$

$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2 \text{ sen } \sqrt{x} + C$

20) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

sea $u^2 = x$

$2u \, du = dx$

$$= 2\int u \cos u \, du$$

sea $z = u$ $\quad dv = \cos u \, du$

$dz = du$ $\quad v = \text{sen } u$

$$= 2\,u\,\text{sen}\,u - 2\int \text{sen}\,u\,du = = 2\,u\,\text{sen}\,u + 2\cos u + C$$

$$= 2\sqrt{x}\,\text{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$$

21) $\int \text{sen } x \ln(\cos x)dx$

sea $u = \ln(\cos x)$ $\quad dv = \text{sen } x \, dx$

$du = \dfrac{-\text{sen } x}{\cos x}dx$ $\quad v = -\cos x$

$$= -\cos x \ln(\cos x) - \int \frac{\cos x \,\text{sen } x}{\cos x}dx = -\cos x \ln(\cos x) - \int \text{sen } x \, dx$$

$$= -\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C$$

22) $\int \cos x \ln(\text{sen } x)dx$

$u = \ln(\text{sen } x)$ $\quad dv = \cos x \, dx$

$du = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}dx$ $\quad v = \text{sen } x$

$$= \text{sen } x \ln(\text{sen } x) - \int \frac{\cos x \,\text{sen } x}{\text{sen } x}dx = \text{sen } x \ln(\text{sen } x) - \int \cos x \, dx$$

$$= \text{sen } x \ln(\text{sen } x) - \text{sen } x + C$$

23) $\int \csc^3 x \, dx$

$u = \csc x$ $\quad dv = \csc^2 x \, dx$

$du = -\csc x \cot x \, dx$ $\quad v = -\cot x$

$$= -\cot x \csc x - \int \csc x \cot^2 x \, dx = -\cot x \csc x - \int \csc x\left(\csc^2 x - 1\right)dx$$

$$\int \csc^3 x\,dx = -\cot x \csc x - \int \csc^3 x\,dx + \int \csc x\,dx$$

$$2\int \csc^3 x\,dx = -\cot x \csc x + \int \csc x\,dx$$

$$\int \csc^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$$

24) $\int \sec^n x\,dx$ con $n \in Z^+$ y $n \geq 2$

$$\int \sec^n x\,dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\,dx =$$

sea $u = \sec^{n-2} x$ $\qquad$ $dv = \sec^2 x\,dx$

$du = (n-2)\sec^{n-3} x \sec x \tan x\,dx$ $\qquad$ $v = \tan x$

$du = (n-2)\sec^{n-2} x \tan x\,dx$

$$\int \sec^n x\,dx = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x \tan^2 x\,dx$$

$$\int \sec^n x\,dx = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x\left(\sec^2 x - 1\right)dx$$

$$\int \sec^n x\,dx = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^n x\,dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx$$

$$\int \sec^n x\,dx + (n-2)\int \sec^n x\,dx = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx$$

$$(n-1)\int \sec^n x\,dx = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx$$

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$$

25) $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ con $n \in Z^+$ con $n \geq 2$

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,dx$$

sea $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ $\qquad$ $dv = \operatorname{sen} x\,dx$

$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\,dx$ $\qquad$ $v = -\cos x$

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\,\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\,\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,(1-\text{sen}^2 x)\,dx$$

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\,\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \text{sen}^n x\,dx$$

$$\int \text{sen}^n x\,dx + (n-1)\int \text{sen}^n x\,dx = -\,\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

$$n\int \text{sen}^n x\,dx = -\,\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

26) $\int \cos^n x\,dx$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$

$$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1}x\cos x\,dx = \cos^{n-1}x\,\text{sen}\,x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,\text{sen}^2 x\,dx$$

sea $u = \cos^{n-1}x$ $\qquad$ $dv = \cos x\,dx$

$du = -(n-1)\cos^{n-2}x\,\text{sen}\,x\,dx$ $\qquad$ $v = \text{sen}\,x$

$$\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\,\text{sen}\,x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,\text{sen}^2 x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\,\text{sen}\,x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\,\text{sen}\,x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx + (n-1)\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\,\text{sen}\,x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx$$

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\,\text{sen}\,x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\text{sen}\,x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

3.4 Integración por sustitución trigonométrica

La integración por sustitución trigonométrica es una técnica que se utiliza para determinar integrales que contienen expresiones como: $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ó $\sqrt{x^2 - a^2}$. Esta técnica consiste en prescindir del contenido de la raíz mediante una sustitución de una función trigonométrica adecuada que nos permita hacerlo. Para ello a > 0.

- Si el integrando es de la forma $\sqrt{\mathbf{a^2 - x^2}}$, hacer **x = a sen** θ, donde $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$,y manejar la identidad $\mathbf{\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta}$ para llevar a cabo la racionalización. Esto es

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\left|\cos\theta\right| = a\cos\theta$$

Ahora bien, sabemos que $\sqrt{\mathbf{a^2 - x^2}}$ **= a cos** θ**,** que **x = a sen** θ y por lo tanto **dx = a cos** θ **d**θ, esta información nos ayudará a realizar la siguiente sustitución

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a\cos\theta \; a\cos\theta\, d\theta = a^2 \int \cos^2\theta\, d\theta$$

El resultado de esta integral quedará en función de la variable θ, y para dejarla en términos de la variable original x es conveniente recurrir al Teorema de Pitágoras, sabemos que $c^2 = a^2 + b^2$, si como parte del integrando tenemos $\mathbf{a^2 - x^2}$, entonces del Teorema deducimos que $c^2 = \mathbf{a^2}$, $a^2 = \mathbf{x^2}$ y $b^2 = \mathbf{a^2 - x^2}$, entonces $b = \sqrt{a^2 - x^2}$. Así el siguiente triángulo rectángulo nos ayudará para representar el resultado final de la integral en términos de la variable deseada.

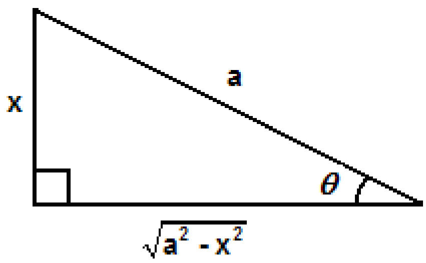


Figura 3.4.1

De la figura 3.4.1 sabemos que **sen θ =** $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}$**,** entonces $\boldsymbol{\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}$ y

$\mathbf{\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}$

Para integrar se sugiere utilizar la identidad $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$

$$a^2\int \cos^2\theta\, d\theta = a^2\int\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{a^2}{2}\int d\theta + \frac{a^2}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta$$

Integrando $\frac{a^2}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta$ por cambio de variable

$$= \frac{a^2}{2}\int d\theta + \frac{a^2}{4}\int \cos u\, du = \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4}\,\text{sen}\, 2\theta + C$$

De la figura 3.4.1 se deduce que $\boldsymbol{\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}$, y aplicando la identidad

sen 2θ = 2 sen θ cos θ, sustituimos en el resultado obtenido, con la finalidad de que este quede en función de la variable x, se tiene

$$= \frac{a^2}{2}\left(\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{4}(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + C = \frac{a^2}{2}\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{4}\left(\frac{2x}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

- Si el integrando es de la forma $\sqrt{\mathbf{a^2 + x^2}}$, es conveniente utilizar la sustitución **x = a tan θ**, donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, y utilizar la identidad $\mathbf{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$. Así

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\tan^2\theta} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)} = \sqrt{a^2\sec^2\theta} = a\left|\sec\theta\right| = a\sec\theta$$

Si **$x = a \tan \theta$**, **$dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$** y sabiendo que $\sqrt{\mathbf{a^2 + x^2}}$ **$= a \sec \theta$**, obtenemos la siguiente integral mediante la sustitución de estos datos, así

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \int a \sec\theta \; a \sec^2 \theta \, d\theta = a^2 \int \sec^3 \theta \, d\theta$$

Es necesario que la solución de la integral quede en función de la variable original x, para ello se sugiere utilizar el Teorema de Pitágoras, a saber
$c^2 = \mathbf{a^2 + b^2}$, esto es si el radicando es $\mathbf{a^2 + x^2}$, entonces resulta que
$c^2 = \mathbf{a^2 + x^2}$, $a^2 = \mathbf{a^2}$ y $b^2 = \mathbf{x^2}$.

Es conveniente apoyarnos en el siguiente triángulo porque nos ayudará a presentar el resultado final en términos de la variable x.

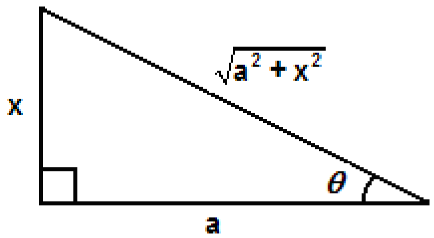


Figura 3.4.2

Del triángulo podemos deducir que $\tan \theta = \dfrac{x}{a}$ y $\sec \theta = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$

Resolviendo la integral $a^2 \int \sec^3 \theta \, d\theta$, utilizando la técnica de integración por partes (ejemplo 24, página 36).

$$\int \sec^3 \theta \, d\theta = \sec\theta \tan\theta - \int \tan^2 \theta \sec\theta \, d\theta = \sec\theta \tan\theta - \int \left(\sec^2\theta - 1\right) \sec\theta \, d\theta$$

$$u = \sec\theta \qquad dv = \sec^2 \theta$$
$$du = \sec\theta \tan\theta d\theta \qquad v = \tan\theta + C$$

$$\int \sec^3 \theta \, d\theta = \sec \theta \tan \theta - \int \sec^3 \theta \, d\theta + \int \sec \theta \, d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta \, d\theta = \sec \theta \tan \theta - \int \sec^3 \theta \, d\theta + \ln \left|\sec \theta + \tan \theta\right|$$

$$2\int \sec^3 \theta \, d\theta = \sec \theta \tan \theta + \ln \left|\sec \theta + \tan \theta\right|$$

$$\int \sec^3 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln \left|\sec \theta + \tan \theta\right| \; ......*$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación $*$ por a^2 queda

$$a^2\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{a^2}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

$$a^2\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\,\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C$$

$$a^2\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}\right| + C$$

- Si el integrando es $\sqrt{\mathbf{x^2 - a^2}}$ (donde x es la variable y a es una constante), se sugiere utilizar la sustitución **x = a sec θ**, donde $0 \le \theta \le \pi$, si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, y emplear $\mathbf{\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1}$. Esto es

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a\left|\tan\theta\right| = \pm a\tan\theta$$

Sabiendo que $\sqrt{\mathbf{x^2 - a^2}}$ **= a tan θ**, que **x = a sec θ** mediante la derivada de x encontramos que **dx = a sec θ tan θ dθ**, y con ello podemos realizar la sustitución en la expresión original, de esta manera obtenemos:

$$\int\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \int a\tan\theta\; a\sec\theta\tan\theta\, d\theta = a^2\int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta$$

Debido a que el resultado de esta integral quedará en función de la variable θ, es necesario utilizar el Teorema de Pitágoras para que el resultado final quede en términos de x, sabemos que c^2 = $\mathbf{a^2 + b^2}$, si en el integrando tenemos $\mathbf{x^2 - a^2}$, entonces del Teorema deducimos que b^2 = $\mathbf{x^2 - a^2}$,
a^2 = $\mathbf{a^2}$ y c^2 = $\mathbf{x^2}$.

Se sugiere utilizar el siguiente triángulo rectángulo para realizar el cambio de variable en el resultado.

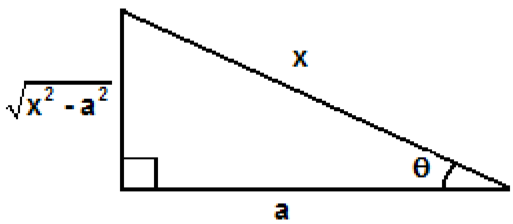


Figura 3.4.3

Apoyándonos en la figura 3.4.3, tenemos que $\mathbf{\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}}$ y $\mathbf{\sec\theta = \frac{x}{a}}$

Integrando

$$a^2\int \tan^2\theta \sec\theta \, d\theta$$

$$\int \tan^2\theta \sec\theta \, d\theta = \int \sec\theta\left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta = \int \sec^3\theta \, d\theta - \int \sec\theta \, d\theta$$

Por $*$ de la página 40,

$$\int \tan^2\theta \sec\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| - \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

$$\int \tan^2\theta \sec\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

Multiplicando por a^2 ambos miembros de la ecuación, tenemos que

$$a^2\int \tan^2\theta \sec\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{a^2}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

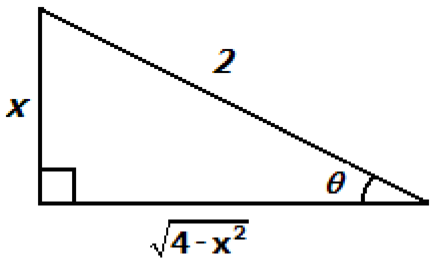
$$a^2\int \tan^2\theta \sec\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) - \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C$$

$$a^2\int \tan^2\theta \sec\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C$$

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.

Para la resolución de los siguientes ejemplos utilizar lo mencionado en la sección 3.4

1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$



Del triángulo obtenemos: $\text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{2}$

$$x = 2\,\text{sen}\,\theta \quad \rightarrow \quad x^2 = 4\,\text{sen}^2\theta$$

$$dx = 2\cos\theta\,d\theta \qquad \sqrt{4 - x^2} = 2\cos\theta$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{\left(4\,\text{sen}^2\theta\right)\left(2\cos\theta\right)}{\sqrt{4 - 4\,\text{sen}^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{\left(4\,\text{sen}^2\theta\right)\left(2\cos\theta\right)}{\sqrt{4\left(1-\text{sen}^2\theta\right)}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\left(4\,\text{sen}^2\theta\right)\left(2\cos\theta\right)}{\sqrt{4\cos^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{\left(4\,\text{sen}^2\theta\right)\left(2\cos\theta\right)}{2\cos\theta}\,d\theta = 4\int \text{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= 4\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 2\int d\theta - 2\int \cos 2\theta\,d\theta = 2\theta - \text{sen}\,2\theta + C$$

sabiendo que $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$$= 2\theta - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C = 2\left(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta\right) + C = 2\left[\text{sen}^{-1}\frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}\right] + C$$

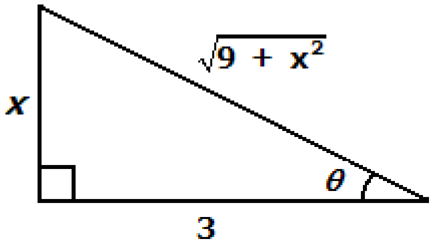
2) $$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\left(2\cos\theta\right)\left(2\cos\theta\right)}{4\,\text{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\,d\theta$$

$$x = 2\,\text{sen}\,\theta \qquad x^2 = 4\,\text{sen}^2\theta$$

$$dx = 2\cos\theta\,d\theta \qquad \sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$

$$= \int \cot^2\theta\,d\theta = -\cot\theta - \theta + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \text{sen}^{-1}\frac{x}{2} + C$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{(3\tan\theta)\left(3\sqrt{\sec^2\theta}\right)} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(3\tan\theta)\left(\sqrt{\sec^2\theta}\right)}$



Del triángulo determinamos que $\tan\theta = \frac{x}{3}$ y por lo tanto

$x = 3\tan\theta \qquad\qquad x^2 = 9\tan^2\theta$

$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \qquad \sqrt{9+x^2} = 3\sqrt{\sec^2\theta}$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta\sec\theta}\, d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \frac{1}{3}\int \csc\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{x} - \frac{3}{x}\right| + C$$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{(9\tan^2\theta)(3\sec\theta)} = \frac{1}{9}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\, d\theta$

$x = 3\tan\theta \qquad\qquad x^2 = 9\tan^2\theta$

$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \qquad \sqrt{x^2+9} = 3\sec\theta$

$$= \frac{1}{9}\int \left(\frac{\sec\theta}{\tan\theta}\right)\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) d\theta = \frac{1}{9}\int \csc\theta\cot\theta\, d\theta = -\frac{1}{9}\csc\theta + C = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C$$

5) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}} = \int \frac{5\sec\theta\tan\theta}{\left(25\sec^2\theta\right)\left(5\tan\theta\right)}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta$$

$x = 5\sec\theta \qquad x^2 = 25\sec^2\theta$

$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \qquad \sqrt{x^2+9} = 3\sec\theta$

$$= -\frac{1}{9}\csc\theta + C \quad = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C$$

6) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-25}} = \int \frac{5\sec\theta\tan\theta}{\left(125\sec^3\theta\right)\left(5\tan\theta\right)}\,d\theta = \frac{1}{125}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{125}\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$x = 5\sec\theta \qquad x^3 = 125\sec^3\theta$

$dx = 5\sec\theta\tan\theta\, d\theta \qquad \sqrt{x^2-25} = 5\tan\theta$

$$= \frac{1}{250}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{250}\left[\int d\theta + \int \cos 2\theta\, d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{250}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right] + C = \frac{1}{250}\left[\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \theta\right] + C$$

$$= \frac{1}{250}\left[\left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\right)\left(\frac{5}{x}\right) + \sec^{-1}\frac{x}{5}\right] + C = \frac{\sqrt{x^2-25}}{50x^2} + \frac{1}{250}\sec^{-1}\frac{x}{5} + C$$

7) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{(2\operatorname{sen}\theta)(2\cos\theta)}{2\cos\theta}\,d\theta = 2\int \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -2\cos\theta + C$$

$x = 2\operatorname{sen}\theta \qquad x^2 = 4\operatorname{sen}^2\theta$

$dx = 2\cos\theta\, d\theta \qquad \sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$

$$= -2\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C = -\sqrt{4-x^2} + C$$

8) $\int \frac{x\,dx}{x^2+9} = \int \frac{(3\tan\theta)(3\sec^2\theta)}{9\sec^2\theta}\,d\theta = \int \tan\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta| + C$

$x = 3\tan\theta \qquad x^2 = 9\tan^2\theta$

$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta \qquad x^2 + 9 = 9\sec^2\theta$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right| + C$$

9) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan^3\theta}\,d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{\tan\theta}\,\frac{\sec\theta}{\tan\theta}\,d\theta$

$x = \sec\theta \qquad x^2 = \sec^2\theta$

$dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta \qquad (x^2-1)^{3/2} = \tan^3\theta$

$$= \int \csc\theta\cot\theta\,d\theta = -\csc\theta + C = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + C$$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}} = \int \frac{\frac{5}{2}\sec\theta\tan\theta}{5\tan\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$

$x = \frac{5}{2}\sec\theta \qquad x^2 = \frac{25}{4}\sec^2\theta$

$dx = \frac{5}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \qquad \sqrt{4x^2-25} = 5\tan\theta$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{5} + \frac{\sqrt{4x^2-25}}{5}\right| + C$$

11) $\int \frac{dx}{(36+x^2)^2} = \int \frac{6\sec^2\theta}{1296\sec^4\theta}\,d\theta = \frac{1}{216}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{216}\int \cos^2\theta\,d\theta$

$x = 6\tan\theta \qquad (36+x^2)^2 = 1296\sec^4\theta$

$dx = 6\sec^2\theta\,d\theta$

$$= \frac{1}{216}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right] + C = \frac{1}{864}\left[2\tan^{-1}\frac{x}{6} + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right] + C$$

$$= \frac{1}{432}\left[\tan^{-1}\frac{x}{6} + \left(\frac{x}{\sqrt{36+x^2}}\right)\left(\frac{6}{\sqrt{36+x^2}}\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{432}\left[\tan^{-1}\frac{x}{6} + \frac{6x}{36+x^2}\right] + C$$

12) $$\int \frac{dx}{\left(16-x^2\right)^{5/2}} = \int \frac{4\cos\theta\, d\theta}{1024\cos^5\theta} = \frac{1}{256}\int \frac{d\theta}{\cos^4\theta} = \frac{1}{256}\int \sec^4\theta\, d\theta$$

$x = 4\operatorname{sen}\theta$ $\qquad$ $\left(16-x^2\right)^{5/2} = 1024\cos^5\theta$

$dx = 4\cos\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{256}\left[\frac{1}{3}\tan\theta\sec^2\theta + \frac{2}{3}\int \sec^2\theta\, d\theta\right] + C$$

$$= \frac{1}{256}\left[\frac{1}{3}\tan\theta\sec^2\theta + \frac{2}{3}\tan\theta\right] + C$$

$$= \frac{1}{256}\left[\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{16}{16-x^2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{256}\left[\frac{2x}{3\sqrt{16-x^2}}\left(\frac{8}{16-x^2} + 1\right)\right] + C$$

13) $$\int \sqrt{9-4x^2}\, dx = \frac{9}{2}\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\left[\frac{1}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\right] + C$$

$x = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta$ $\qquad$ $x^2 = \frac{9}{4}\operatorname{sen}^2\theta$

$dx = \frac{3}{2}\cos\theta$ $\qquad$ $\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$

$$= \frac{9}{4}\left[\operatorname{sen}^{-1}\frac{2x}{3} + \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)\right) \cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\right] + C$$

14) $$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2\theta + 1}}{\tan\theta}\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{\sec\theta \sec^2\theta}{\tan\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta \sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta = \int \frac{(1+\tan^2\theta)\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta + \int \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\cos\theta}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \int \csc\theta\, d\theta + \int \sec\theta\, d\theta = \ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

15) $$\int \frac{x\,dx}{16 - x^2}$$

$x = 4\operatorname{sen}\theta \qquad x^2 = 16\operatorname{sen}^2\theta$

$dx = 4\cos\theta\, d\theta \qquad \cos\theta = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$

$$= \int \frac{(4\operatorname{sen}\theta)(4\cos\theta)}{16\cos^2\theta}\, d\theta = \int \tan\theta\, d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta = \ln\left|\sec\theta\right| + C = \ln\left|\frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\right| + C$$

16) $$\int x\sqrt{x^2 - 9}\, dx$$

$x = 3\sec\theta \qquad x^2 = 9\sec^2\theta$

$dx = 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta \qquad \sqrt{x^2 - 9} = 3\tan\theta$

$$= \int (3\sec\theta)(3\tan\theta)(3\sec\theta\tan\theta)\, d\theta = 27\int \sec^2\theta\tan^2\theta\, d\theta = 27\int u^2\, du$$

$$= 27\frac{u^3}{3} + C = 9\tan^3\theta + C = 9\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3}\right)^3 + C = \frac{(x^2 - 9)^{3/2}}{3} + C$$

17) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9x^2+49}}$

$$\tan\theta = \frac{3x}{7} \rightarrow x = \frac{7}{3}\tan\theta$$

$$dx = \frac{7}{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{9x^2+49}}{7}$$

$$= \frac{343}{81}\int \frac{\tan^3\theta \sec^2\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \frac{343}{81}\int \tan^3\theta \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{343}{81}\int (\sec^2\theta - 1)\tan\theta \sec\theta\, d\theta = \frac{343}{81}\int u^2\, du - \frac{343}{81}\int \tan\theta \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{343}{243}\sec^3\theta - \frac{343}{81}\sec\theta + C$$

$$= \frac{1}{243}\sqrt{\left(9x^2+49\right)^3} - \frac{49}{81}\sqrt{9x^2+49} + C$$

18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2+16}}$

$$x = \frac{4}{5}\tan\theta \qquad x^2 = \frac{16}{25}\tan^2\theta$$

$$dx = \frac{4}{5}\sec^2\theta\, d\theta \qquad \sqrt{25x^2+16} = 4\sec\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta \sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \csc\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{25x^2+16}}{5x} - \frac{4}{5x}\right| + C$$

19) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

$\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{3}}$ $\quad x = \sqrt{3}\sec\theta \quad x^2 = 3\sec^2\theta \quad x^4 = 9\sec^4\theta$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}$ $\quad dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{9\sec^4\theta\,\sqrt{3}\tan\theta} = \frac{1}{9}\int\frac{d\theta}{\sec^3\theta} = \frac{1}{9}\int \cos^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\int\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{9}\int\cos\theta\, d\theta - \frac{1}{9}\int \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{27}\operatorname{sen}^3\theta + C = \frac{\sqrt{x^2-3}}{9x} - \frac{\sqrt{(x^2-3)^3}}{27x^3} + C$$

20) $\int \frac{x^2\, dx}{\left(1-9x^2\right)^{3/2}}$

$x = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta \qquad x^2 = \frac{1}{9}\operatorname{sen}^2\theta$

$dx = \frac{1}{3}\cos\theta\, d\theta \qquad \sqrt{1-9x^2} = \cos\theta$

$$= \frac{1}{27}\int\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{27}\int\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{27}\int\tan^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{27}\left(\tan\theta - \theta + C\right) = \frac{1}{27}\left(\frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}3x\right) + C$$

21) $\int\frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^{2x}+2e^x+1}} = \int\frac{e^x\, dx}{\sqrt{\left(e^x+1\right)^2}} = \int\frac{e^x\, dx}{e^x+1} = 2\int\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta\sec^2\theta}$

$e^x = \tan^2\theta \qquad \sec^2\theta = e^x+1$

$dx = \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta}$

$$= 2\int\tan\theta\, d\theta = 2\ln\left|\sec\theta\right| + C = 2\ln\left|\sqrt{e^x+1}\right| + C$$

22) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 3}}$

$$\cos^2 x - 2\cos x + 3 = (\cos x - 1)^2 + 2$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{(\cos x - 1)^2 + 2}}\, dx \quad = \quad - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2}}$$

$u = \cos x - 1$ $\qquad$ $\tan\theta = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{u^2+2}}{\sqrt{2}}$

$du = -\operatorname{sen} x\, dx$ $\qquad$ $\sqrt{2}\tan\theta = u$ $\qquad$ $\sqrt{2}\sec\theta = \sqrt{u^2+2}$

$\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta = du$

$$= - \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\, d\theta = - \int \sec\theta\, d\theta = - \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+2}}{\sqrt{2}} + \frac{u}{\sqrt{2}}\right| + C = -\ln\left|\frac{\sqrt{(\cos x - 1)^2 + 2} + \cos x - 1}{\sqrt{2}}\right| + C$$

23) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\tan^2 x + 3\tan x + 4}} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\left(\tan x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{7}{4}}}$

$u = \tan x + \dfrac{3}{2}$

$du = \sec^2 x\, dx$

Integrando por sustitución trigonométrica

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{7}{4}}}$$

$\tan\theta = \dfrac{2u}{\sqrt{7}}$

$u = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\tan\theta$

$du = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \frac{\sqrt{7}}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\frac{7}{4}\tan^2\theta + \frac{7}{4}}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\frac{7}{4}(\tan^2\theta + 1)}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\frac{7}{4}\sec^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + \frac{7}{4}}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} + \frac{u}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{\left(\tan x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + \frac{\tan x + \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right| + C$$

24) $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4 - x^2 + 3x}} = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{-x^2 + 3x + 4}} = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{-(x^2 - 3x - 4)}} = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{-\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]}}$$

$$u = x - \frac{3}{2} \qquad x = u + \frac{3}{2}$$

$$du = dx$$

$$= \int \frac{\left(u + \frac{3}{2}\right) du}{\sqrt{-u^2 + \frac{25}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{2u + 3}{\sqrt{\frac{25}{4} - u^2}}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{\left[2\left(\frac{5}{2}\operatorname{sen}\theta\right) + 3\right]\left(\frac{5}{2}\cos\theta\ d\theta\right)}{\frac{5}{2}\cos\theta}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{5/2} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{\frac{25}{4} - u^2}}{5/2}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2u}{5}\right) \qquad \frac{5}{2}\cos\theta = \sqrt{\frac{25}{4} - u^2}$$

$$u = \frac{5}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$du = \frac{5}{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(5\,\mathrm{sen}\,\theta + 3)\left(\frac{5}{2}\cos\theta\right)}{\frac{5}{2}\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{5}\int \frac{\left(\frac{25}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \frac{15}{2}\cos\theta\right)}{\cos}\, d\theta$$

$$= \frac{5}{2}\int \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta + \frac{3}{2}\int d\theta = -\frac{5}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\theta + C$$

$$= -\frac{5}{2}\cos\left[\mathrm{sen}^{-1}\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{5}\right] + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}^{-1}\left[\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{5}\right] + C$$

3.5 Integrales de la forma $sen^m\, u\, cos^n\, u$, con m y n є $\mathbb{Z}^+$

Existen algunas formas comunes de integrales trigonométricas, en las cuales es necesario hacer uso de las siguientes identidades

$\mathbf{sen^2\, x + cos^2\, x = 1}$ Identidad Pitagórica

$\mathbf{sen^2\, x = \frac{1 - cos\, 2x}{2}}$ Identidad del ángulo medio para $sen^2\, x$

$\mathbf{cos^2\, x = \frac{1 + cos\, 2x}{2}}$ Identidad del ángulo medio para $cos^2\, x$

con la finalidad de obtener las antiderivadas de integrales de la forma $sen^m\, u\, cos^n\, u$. Para ello se parte de los siguientes casos representados en forma general en donde m y n $\in \mathbb{Z}^+$.

1) $\int sen^m u\, du$ y/o $\int cos^m u\, du$

2) $\int sen^m u\, cos^n u\, du$

3) $\int tan^m u\, du$ ó $\int cot^m u\, du$

4) $\int tan^m u\, sec^n u\, du$ ó $\int cot^m u\, csc^n u\, du$

Se analiza cada una de estas expresiones y se indica el proceso a seguir para resolver integrales que se apeguen a estos modelos matemáticos.

Para integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m u\,du \quad \text{ó} \quad \int \cos^m u\,du \quad \text{si } m \in Z^+$$

se sugiere:

1) Representar al integrando como

$$\int \left(\operatorname{sen}^2 u\right)^n \operatorname{sen} u\,du \quad \text{ó} \quad \int \left(\cos^2 u\right)^n \cos u\,du$$

2) Sustituir la función $\operatorname{sen}^2 u$ ó $\cos^2 u$ por la identidad trigonométrica conveniente.

3) Elevar el binomio a la potencia indicada.

4) Integrar término a término, en algunos de éstos tal vez sea necesario integrar por sustitución.

NOTA: Si m=2, no es necesario descomponer el integrando como un producto de dos factores, únicamente sustituir la función $\operatorname{sen}^2 u$ ó $\cos^2 u$ por la identidad del ángulo medio correspondiente.

Para el caso

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx, \quad \text{con } m \text{ o } n \text{ entero positivo impar}$$

escribir $\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{m-1}x \ \operatorname{sen} x$, como $\operatorname{sen}^{m-1}x$ es par considerar $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y hacer $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Si n es entero positivo impar, proseguir de forma análoga.

Si la integral es de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx, \quad \text{con } m \text{ y } n \text{ pares}$$

se recomienda sustituir cada función trigonométrica por

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

De forma repetida según lo indique el ejercicio. En algunos casos se obtendrán potencias impares del seno o del coseno, de ser así, retomar el proceso descrito anteriormente para obtener finalmente la solución de la integral.

3.6 Integrales de la forma $\tan^m u \sec^n u$ con m y n є Z^+

Existen integrales cuyo integrando está constituido por potencias de funciones tangente, cotangente, secante,… y que para resolverlas es necesario tener como base las siguientes identidades trigonométricas, así como también algunas formas básicas de integrales trigonométricas, a saber

Identidades trigonométricas:

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Algunas formas básicas de integrales trigonométricas:

1) $\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C$

2) $\int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

3) $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

4) $\int \csc u \, du = -\ln|\csc u - \cot u| + C$

5) $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

6) $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$

7) $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$

8) $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$

Reglas establecidas para evaluar este tipo de integrales.

Si la integral a evaluar corresponde a uno de estos modelos

$$\int \tan^n u \, du \quad \text{ó} \quad \int \cot^n u \, du \quad \text{con } n \in Z^+\text{, y n par}$$

se reescribe la integral de la siguiente manera

$$\int \tan^n u\,du = \int \tan^{n-2} u \tan^2 u\,du = \int \tan^{n-2} u(\sec^2 u - 1)\,du$$

ó

$$\int \cot^n u\,du = \int \cot^{n-2} u \cot^2 u\,du = \int \cot^{n-2} u(\csc^2 u - 1)\,du$$

El proceso es similar para integrales de la forma:

$$\int \sec^n u\,du \quad \text{ó} \quad \int \csc^n u\,du \quad \text{con } n \in Z^+, \text{ y n par}$$

En integrales de la forma

$$\int \tan^m u \sec^n u\,du \quad \text{ó} \quad \int \cot^m u \csc^n u\,du \quad \text{con m, } n \in Z^+, \text{ y n par}$$

Es conveniente:

1) representar $\int \tan^m u \sec^n u\,du = \int \tan^m u \sec^{n-2} u \sec^2 u\,du$
2) utilizar la identidad trigonométrica $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ y sustituirla en el integral, al realizar la sustitución, quedan integrales en términos de $\tan x$ y $\sec^2 x$, cuya solución es “inmediata”.
3) para integrales de la forma $\int \cot^m u \csc^n u\,du$, es conveniente reescribirla como $\int \cot^m u \csc^{n-2} u \csc^2 u\,du$ y como $\csc^{n-2} u$ es par, sustituir $\cot^2 x + 1$ por $\csc^2 x$ para obtener integrandos en términos de cotangentes y $\csc^2 x$, de esta manera llegaremos a la solución en forma más accesible.

Si se tienen integrales

$$\int \tan^m u \sec^n u\,du \quad \text{con m, } n \in Z^+, \text{ y m impar}$$

Es recomendable lo siguiente:

1) reescribir la integral como $\int \tan^{m-1} u \sec^{n-1} u \sec u \tan u\,du$
2) puesto que $\tan^{m-1} u$ es par, utilizar $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$ y sustituirla en el integrando
3) dejar el integrando en términos de la potencia de secante y sec u tan u, de esta manera, podremos llegar a un resultado sin mayor dificultad.

3.7 Integrales de la forma $\cot^m u \csc^n u$ con m, n $\in \mathbb{Z}^+$ y n es par

Si trabajamos con expresiones como $\int \cot^m u \csc^n u\, du$

1) Es correcto factorizar la cosecante para obtener una nueva integral cuyo modelo sea $\int \cot^m u \csc^{n-2} u \csc^2 u\, du$
2) Como $\csc^{n-2} u$ es par, es conveniente utilizar la identidad trigonométrica $\csc^2 u = \cot^2 u + 1$
3) Finalmente los integrandos quedarán en términos de cotangentes y $\csc^2 u$, lo que nos facilitará la evaluación respectiva.

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Utilizar lo descrito en las secciones 3.5, 3.6 y 3.7 en la resolución de los siguientes ejemplos.

1) $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

Representar el integrando como $(\operatorname{sen}^2 x)^2$ y utilizar la identidad

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

Integrar por cambio de variable $\cos 2x$, y utilizar la identidad $\cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$ para integrar $\cos^2 2x$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$$

$$+ \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$$

2) $\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \ = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\int dx$

$+ \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$

$+ \ \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$

3) $\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos u\,du$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} u + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + C$

4) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$

$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)^2 (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x\right) dx$

$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \left(\cos^2 2x\right)(\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx + \frac{1}{8}\int \left(1-\operatorname{sen}^2 2x\right)(\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx$

$- \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x$

$- \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}\int u^2\,du = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$

5) $\int \cos^7 x\, dx = \int \left(\cos^2 x\right)^3 \cos x\, dx = \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^3 \cos x\, dx$

$= \int \left[1 - 3\operatorname{sen}^2 x + 3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 - \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^3\right] \cos x\, dx = \int \cos x\, dx$

$- 3\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx + 3\int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cos x\, dx - \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^3 \cos x\, dx$

$= \int \cos x\, dx - 3\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx + 3\int (\operatorname{sen} x)^4 \cos x\, dx$

$- \int (\operatorname{sen} x)^6 \cos x\, dx = \operatorname{sen} x - 3\int u^2\, du + 3\int u^4\, du - \int u^6\, du$

$= \operatorname{sen} x - u^3 + \frac{3}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + C = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$

$+ \frac{3}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C$

6) $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \operatorname{sen} x \cos^3 x\, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \operatorname{sen} x \cos^3 x\, dx$

integrando por cambio de variable, sea $u = \cos x$ y $du = -\operatorname{sen} x\, dx$

$= -\int \left(1 - u^2\right)^2 u^3\, du = -\int u^3\, du + 2\int u^5\, du - \int u^7 du = -\frac{u^4}{4} + \frac{2u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + C$

$= -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{3}\cos^6 x - \frac{1}{8}\cos^8 x + C$

7) $\int \operatorname{sen}^6 x\, dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^3 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x\, dx$

$+ \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x\, dx$

$+ \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x\, dx$

$+ \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \left(1 - \operatorname{sen}^2 2x\right) \cos 2x\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x\, dx$

$$+\frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$+\frac{3}{16}\int \cos^2 u\,du + \frac{1}{16}\int u^2\,du = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{16}\left(x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right)$$

$$+\frac{1}{16}\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3} + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x$$

$$\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C = \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$$

8) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)\left(1 + \cos 2x\right) dx = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx$$

$$-\frac{1}{4}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x + \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{8}\int dx$$

$$-\frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{8}\cos^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\cos^3 2x\,dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx$$

$$-\frac{1}{8}\int \cos^2 2x + \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{8}x$$

$$-\frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right) + \frac{1}{16}\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3} + C = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$$

9) $\int \tan^5 x \sec^4 x\,dx = \int \tan^5 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx = \int \left(\tan^5 x\right)\left(\tan^2 + 1\right)\sec^2 x\,dx$

$$= \tan^7 x \sec^2 x\,dx + \int \tan^5 x \sec^2 x\,dx = \int u^7 du + \int u^5 du = \frac{\tan^8 x}{8} + \frac{\tan^6 x}{6} + C$$

10) $\int \sec^6 x\,dx = \int \sec^4 x \sec^2 x\,dx = \int \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \sec^2 x\,dx$

$$= \int \left(1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x\right)\sec^2 x\,dx = \int \sec^2 x\,dx$$

$$+2\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx + \int \tan^4 x \sec^2 x\,dx = \tan x$$

$$+2\int u^2 du + \int u^4\,du = \tan x + \frac{2\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$$

11) $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \tan^2 x \tan x \sec^2 x \sec x\, dx$

$\int \left(\sec^2 x - 1\right) \tan x \sec^2 x \sec x\, dx = \int \sec^4 x \sec x \tan x\, dx$

$- \int \sec^2 x \sec x \tan x\, dx = \int u^4\, du - \int u^2\, du = \dfrac{\sec^5 x}{5} - \dfrac{\sec^3 x}{3} + C$

12) $\int \tan^5 x \sec x\, dx = \int \tan^4 x \tan x \sec x\, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \tan x \sec x\, dx$

$= \int \left(\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1\right) \tan x \sec x\, dx = \int \sec^4 x \tan x \sec x\, dx$

$= -2\int \sec^2 x \tan x \sec x\, dx + \int \tan x \sec x\, dx = \int u^4\, du - 2\int u^2\, du$

$+ \sec x + C = \dfrac{\sec^5 x}{5} - \dfrac{2\sec^3 x}{3} + \sec x + C$

13) $\int \tan^6 x\, dx = \int \tan^4 x \tan^2 x\, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) \tan^4 x\, dx$

$= \int \sec^2 x \tan^4 x\, dx - \int \tan^4 x\, dx = \int \sec^2 x \tan^4 x\, dx - \int \left(\sec^2 x - 1\right) \tan^2 x\, dx$

$= \int \sec^2 x \tan^4 x\, dx - \int \sec^2 x \tan^2 x\, dx + \int \tan^2 x\, dx = \int u^4\, du - \int u^2\, du$

$+ \int \tan^2 x\, dx = \dfrac{\tan^5 x}{5} - \dfrac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$

14).- $\int \cot^4 x\, dx = \int \cot^2 x \cot^2 x\, dx = \int \cot^2 x \left(\csc^2 x - 1\right) dx = \int \cot^2 x \csc^2 x\, dx -$

$- \int \cot^2 x\, dx = - \int u^2\, du - \int \cot^2 x\, dx = - \dfrac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + C$

15) $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx = \int \operatorname{sen}^{1/2} x \cos x \cos^2 x\, dx = \int \operatorname{sen}^{1/2} x \cos x \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) dx$

$= \int \operatorname{sen}^{1/2} x \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^{5/2} x \cos x\, dx = \int u^{1/2}\, du - \int u^{5/2}\, du$

$= \dfrac{2}{3} u^{3/2} - \dfrac{2}{7} u^{7/2} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{\operatorname{sen}^3 x} - \dfrac{2}{7}\sqrt{\operatorname{sen}^7 x} + C$

16) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\text{sen } x}} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sqrt{\text{sen } x}} dx = \int \frac{\left(1-\text{sen}^2 x\right)\cos x}{\sqrt{\text{sen } x}} dx$

$= \int (\text{sen}x)^{-1/2}\left(1-\text{sen}^2 x\right)\cos x\, dx = \int (\text{sen}x)^{-1/2} \cos x\, dx - \int \text{sen}^{3/2} x \cos x\, dx$

$= \int u^{-1/2}\, du \; - \int u^{3/2}\, du = 2u^{1/2} - \frac{2}{5}u^{5/2} + C = 2\sqrt{\text{sen } x} - \frac{2}{5}\sqrt{\text{sen}^5 x} + C$

17) $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx = \int \left(\tan^2 x + 2\tan x \cot x + \cot^2 x\right) dx$

$= \int \tan^2 x\, dx + 2\int \tan x \cot x\, dx + \int \cot^2 x\, dx$

$= \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx + 2\int \left(\frac{1}{\cot x}\right) \cot x\, dx + \int \cot^2 x\, dx$

$= \int \sec^2 x\, dx - \int dx + 2\int dx + \int \cot^2 x\, dx$

$= \int \sec^2 x\, dx + \int dx + \int \cot^2 x\, dx = \tan x + x - x - \cot x + C$

$= \tan x - \cot x + C$

18) $\int \cot^3 x \csc^3 x\, dx = \int \csc^2 x \csc x \cot^2 x \cot x\, dx$

$= \int \left(\csc^2 x \; - \; 1\right)\csc^2 x \csc x \cot x\, dx = \int \csc^4 x \csc x \cot x dx$

$-\int \csc^2 x \csc x \cot x\, dx = -\int u^4\, du + \int u^2\, du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C$

$= -\frac{\csc^5 x}{5} + \frac{\csc^3 x}{3} + C$

19) $\int_0^{\pi/4} \text{sen}^3 x\, dx = \int_0^{\pi/4} \text{sen}^2 x\, \text{sen}x\, dx \; = \int_0^{\pi/4} \left(1-\cos^2 x\right)\text{sen}x\, dx = \int_0^{\pi/4} \text{sen}x\, dx$

$-\int_0^{\pi/4} \text{sen}x \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/4} \text{sen}x\, dx + \int_0^{\pi/4} u^2\, du$

$-\cos x\Big|_0^{\pi/4} + \frac{\cos^3 x}{3}\Bigg|_0^{\pi/4} = 0.077$

20) $\int_0^1 \tan^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx = \int_0^1\left[\sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right]dx = \int_0^1 \sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx - \int_0^1 dx$

$= \frac{4}{\pi}\int_0^1 \sec^2 u\, du - \int_0^1 dx = \frac{4}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - x = 0.273$

21) $\int \operatorname{sen} 3x \cos\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\int(\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen}x)dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 5x\, dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}x\, dx$

$= \frac{1}{10}\int \operatorname{sen} u\, du - \frac{1}{2}\cos x = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$

22) $\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx = \int \tan\left(\sec^2 x - 1\right)dx = \int \tan x \sec^2 x\, dx$

$-\int \tan x\, dx = \int u\, du - \int \tan x\, dx = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln\left|\cos x\right| + C$

23) $\int \csc^6 x\, dx = \int\left(\csc^2 x\right)^2 \csc^2 x\, dx = \int\left(1+\cot^2 x\right)^2 \csc^2 x\, dx = \int \csc^2 x\, dx$

$+ 2\int \cot^2 x \csc^2 x\, dx + \int \cot^4 x \csc^2 x\, dx = -\cot x - 2\int u^2\, du - \int u^4\, du$

$= -\cot x - \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{\cot^5 x}{5} + C$

24) $\int \tan^5 x \sec^7 x\, dx = \int\left(\tan^2 x\right)^2\left(\sec^6 x\right)\sec x \tan x\, dx$

$\int\left(\sec^2 - 1\right)^2 \sec^2 x\sec x\tan x dx =$

$\int\left(\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1\right)\sec^6 x\sec x\tan x dx = \int \sec^{10} x\sec x\tan x dx$

$-2\int \sec^8 x \sec x \tan x\, dx + \int \sec^6 x \sec x \tan x\, dx = \int u^{10} du - 2\int u^8 du$

$+\int u^6 du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sec^{11} x}{11} - \frac{2\sec^9 x}{9} + \frac{\sec^7 x}{7} + C$

24) $\int \tan^5 x \sec^7 x\, dx = \int \left(\tan^2 x\right)^2 \left(\sec^6 x\right) \sec x \tan x\, dx$

$$\int \left(\sec^2 - 1\right)^2 \sec^2 x \sec x \tan x dx =$$

$$\int \left(\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1\right) \sec^6 x \sec x \tan x dx = \int \sec^{10} x \sec x \tan x dx$$

$$- 2\int \sec^8 x \sec x \tan x\, dx + \int \sec^6 x \sec x \tan x\, dx = \int u^{10} du - 2\int u^8 du$$

$$+ \int u^6 du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sec^{11} x}{11} - \frac{2\sec^9 x}{9} + \frac{\sec^7 x}{7} + C$$

25) $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \int \tan^6 x \sec^2 x\, dx$ M

$$+ \int \tan^8 x \sec^2 x\, dx = \int u^6\, du + \int u^8\, du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{\tan^7 x}{7} - \frac{\tan^9 x}{9} + C$$

26) $\int (\sec 5x + \csc 5x)^2\, dx = \int \sec^2 5x\, dx + 2\int \sec 5x \csc 5x\, dx + \int \csc^2 5x\, dx$

$$= \frac{1}{5}\int \sec^2 u\, du + 2\int \sec 5x \csc 5x\, dx + \frac{1}{5}\int \csc^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{5}\tan 5x + 2\int \sec 5x \csc 5x\, dx - \frac{1}{5}\cot 5x$$

$$2\int \sec 5x \csc 5x\, dx = 2\int \frac{1}{\cos 5x}\frac{1}{\mathrm{sen} 5x} dx = 2\int \frac{1}{\mathrm{sen} 5x \cos 5x} dx$$

sen 2a = 2 sen a cos a

$$\frac{1}{2}\mathrm{sen}\, 2a = \mathrm{sen}\, a \cos a$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{sen}\, 2(5x) = \mathrm{sen}\, 5x \cos 5x$$

$$= 4\int \frac{1}{\mathrm{sen}\, 10x} dx = 4\int \csc 10x\, dx = 4\int \frac{\csc 10x \left(\csc 10x - \cot 10x\right)}{\csc 10x - \cot 10x} dx$$

$$= 4\int \frac{\csc^2 10x - \csc 10x \cot 10x}{\csc 10x - \cot 10x}\, dx = \frac{4}{10}\int \frac{\csc^2 u - \csc u \cot u}{\csc u - \cot u}\, du$$

$u = 10x\ dx$ $\qquad\qquad$ $v = \csc u - \cot u$

$\frac{1}{10} du = dx$ $\qquad\qquad$ $dv = -\csc u \cot u + \csc^2 u\ du$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dv}{v} = \frac{2}{5}\ln\left|\csc u - \cot u\right| + C = \frac{2}{5}\ln\left|\csc 10x - \cot 10x\right| + C$$

y por lo tanto

$$\int (\sec 5x + \csc\ 5x)^2\ dx = \frac{1}{5}\tan 5x + \frac{2}{5}\ln\left|\csc 10x - \cot 10x\right| - \frac{1}{5}\cot 5x + C$$

27) $\displaystyle\int \frac{\tan^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \tan^3 u\, du = 2\int \tan^2 u \tan u\, du = 2\int \left(\sec^2 u - 1\right)\tan u\, du$

$$= 2\int \sec^2 u \tan u\, du\ = -2\int \tan u\, du\ = 2\int u\, du - 2\int \tan u\, du$$

$$= u^2 - 2\ln\left|\sec u\right| + C = \tan^2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sec\sqrt{x}\right| + C$$

28) $\displaystyle\int \frac{\sec^3 x}{\tan^4 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^3 x}\frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx = \int \operatorname{sen}^{-4} x \cos x\, dx$

$$= \int u^{-4}\ du = \frac{u^{-3}}{-3} + C\ =\ -\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$$

29) $\displaystyle\int e^x \tan^4 e^x\, dx = \int e^x \left(\tan^2 e^x\right)\left(\tan^2 e^x\right) dx = \int e^x \left(\tan^2 e^x\right)\left(\sec^2 e^x - 1\right) dx\ Z$

$$= \int e^x \left(\tan^2 e^x\right)\left(\sec^2 e^x\right) dx = -\int e^x \left(\tan^2 e^x\right) dx = \int u^2 du - \int \tan^2 u\, du$$

$$= \frac{u^3}{3} - \tan u + u + C\ =\ \frac{\tan^3 e^x}{3} - \tan e^x + e^x + C$$

3.8 Integración de funciones racionales por fracciones parciales

Otra de las técnicas de integración que se utiliza para integrar algunas funciones racionales es la de “integración por fracciones parciales”, que consiste en la descomposición del integrando en fracciones parciales, es decir, en una suma más simple de funciones racionales y cuyo proceso de integración es el siguiente.

Las funciones racionales propias se caracterizan porque el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador. Cuando se desea integrar funciones racionales impropias como $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ con P(x) ≥ Q(x), se sugiere dividir el polinomio del numerador por el polinomio del denominador, de tal manera que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ quede representado como la suma de un polinomio C(x) y una fracción propia $\frac{R(x)}{Q(x)}$, esto es: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

Para integrales con expresiones propias, se sugiere expresarlas como una suma de fracciones parciales que serán de gran utilidad en la solución de integrales mediante esta técnica de integración, a saber

Fracción propia	Suma de fracciones parciales	Descripción
a) $\frac{\text{numerador}}{(x-r_1)(x-r_2)}$	$\frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)}$	Denominador con factores lineales diferentes
b) $\frac{\text{numerador}}{(x-r_1)^n}$	$\frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-r_1)^n}$	Denominador con factores lineales repetidos
c) $\frac{\text{numerador}}{(x^2+r_1)(x^2+r_2)}$	$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+r_1)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+r_2)}$	Denominador con factores cuadráticos diferentes
d) $\frac{\text{numerador}}{(ax^2+bx+c)^n}$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$	Denominador con factores cuadráticos repetidos
e) $\frac{\text{numerador}}{(x-r_1)(ax^2+bx+c)^n}$	$\frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$	Denominador con factores lineales, y factores cuadráticos repetidos

Tabla 1. Representación de algunas fracciones propias

Nota: I = b^2 - 4ac < 0 para el caso c, d y e

Para integrar funciones racionales por medio de facciones parciales se sugiere lo siguiente:

1) Dado el integrando, factorizar el polinomio del denominador, en caso necesario.
2) Utilizar la tabla 1 para representar el integrando como una suma de fracciones parciales, en donde el numerador de cada fracción estará representado por letra(s) mayúsculas que llamaremos coeficientes indeterminados, mientras no se determine su valor específico.
3) Sumar las fracciones e igualar el resultado con el integrando.
4) Multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador obtenido en la suma de fracciones, hasta encontrar una ecuación básica.
5) Encontrar cada uno de los valores de los coeficientes indeterminados asignándole a x un valor específico para cada determinación. En algunos casos se obtiene un sistema de ecuaciones que se sugiere resolver por matrices.
6) Una vez definidos los coeficientes de la suma de fracciones, se sustituyen resultados y se integra término a término.

Para llevar a cabo el proceso de integración, una vez proporcionada la información anterior, se consideran los siguientes casos.

Dada la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado $P(x) <$ grado $Q(x)$ y $Q(x) \neq 0$

Caso a) Denominador con factores lineales y diferentes.

Reescribir

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \ \dots \ + \frac{A_n}{(x - r_n)}$$

donde r_i es la raíz de q(x), esto es q(x) = $\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}(x - r_i)$ y los valores de las A_i se determinan para i = 1, 2, …, n

Caso b) Denominador con factores lineales y repetidos

Para este caso escribimos

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{(x-r_1)^k}+\frac{A_2}{(x-r_1)^{k-1}}+\frac{A_3}{(x-r_1)^{k-2}}+\ ...+\frac{A_{n-1}}{(x-r_1)^2}+\frac{A_n}{x-r_n}$$

Caso c) Denominador con factores cuadráticos diferentes

El denominador es de la forma: ax^2+c, con $x\in\Re$ e $I<0$

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+c_2}+\ ...\ +\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+c_n}$$

Nótese que cada factor de q(x) es cuadrático

Caso d) Denominador con factores cuadráticos repetidos

El denominador es de la forma: ax^2+bx+c, con $x\in\Re$ e $I<0$

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{(a_nx^2+b_nx+c_n)^n}+\frac{A_2x+B_2}{(a_{n-1}x^2+b_{n-1}x+c_{n-1})^{n-1}}+\ ...\ +\frac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}+\frac{A_nx+B_n}{a_1x^2+b_1x+c_1}$$

Caso e) Denominador con factores lineales y factores cuadráticos repetidos

El denominador es de la forma: $x-r_i$ y ax^2+bx+c, con $x\in\Re$ e $I<0$

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{(x-r_1)}+\frac{A_2x+B_2}{(a_nx^2+b_nx+c_n)^n}+\frac{A_3x+B_3}{(a_{n-1}x^2+b_{n-1}x+c_{n-1})^{n-1}}+\ ...\ +\frac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}+\frac{A_nx+B_n}{a_1x^2+b_1x+c_1}$$

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES POR FRACCIONES PARCIALES

Para la resolución de los siguientes ejemplos utiliza lo descrito en la sección 3.8

Caso a. Los factores del denominador son lineales y diferentes

1) $\int \frac{3x-8}{x(x-6)}dx$

$$\frac{3x-8}{x(x-6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-6} = \frac{A(x-6)+Bx}{x(x-6)}$$

$$3x-8 = A(x-6)+Bx$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x=6 & \text{Si } x=0 \\ 10=6B & -8=-6A \\ B=\frac{5}{3} & A=\frac{4}{3} \end{array}$$

$$\int \frac{3x-8}{x(x-6)}dx = \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-6} = \frac{4}{3}\ln|x| + \frac{5}{3}\int\frac{du}{u} = \frac{4}{3}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-6| + C$$

2) $\int \frac{x+32}{(x-6)(x+2)}dx$

$$\frac{x+32}{(x-6)(x+2)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-6)}{(x-6)(x+2)}$$

$$x+32 = A(x+2)+B(x-6)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x=-2 & \text{Si } x=6 \\ 30=-8B & 38=8A \\ B=-\frac{15}{4} & A=\frac{19}{4} \end{array}$$

$$\int \frac{x+32}{(x-6)(x+2)}dx = \frac{19}{4}\int \frac{dx}{x-6} - \frac{15}{4}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{19}{4}\int \frac{du}{u} - \frac{15}{4}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{19}{4}\ln|x-6| - \frac{15}{4}\ln|x+2| + C$$

3) $\int \frac{32-11x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

$$\frac{32-11x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+3)} =$$

$$32-11x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

$$\frac{A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Si $x=-2$	Si $x=-1$	Si $x=-3$
$-54=B$	$43=2A$	$65=2C$
	$A=\frac{43}{2}$	$C=\frac{65}{2}$

$$\int \frac{32-11x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx = \frac{43}{2}\int \frac{dx}{x+1} - 54\int \frac{dx}{x+2} + \frac{65}{2}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$\frac{43}{2}\int \frac{du}{u} - 54\int \frac{du}{u} + \frac{65}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{43}{2}\ln|x+1| - 54\ln|x+2| + \frac{65}{2}\ln|x+3| + C$$

4) $\int \frac{4x^2+54x+134}{(x-1)(x+5)(x+3)}dx$

$$\frac{4x^2+54x+134}{(x-1)(x+5)(x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+5)} + \frac{C}{(x+3)} =$$

$$= \frac{A(x+5)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+5)(x+3)}$$

$$4x^2+54x+134 = A(x+5)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+5)$$

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x=-5 & \text{Si } x=-3 & \text{Si } x=1 \\ -36=12B & 8=-8C & 192=24A \\ B=-3 & C=-1 & A=8 \end{array}$$

$$\int \frac{4x^2+54x+134}{(x-1)(x+5)(x+3)}dx = 8\int \frac{du}{u} - 3\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u}$$

$$= 8\ln|x-1| - 3\ln|x+5| - \ln|x+3| + C$$

Caso b. Los factores del denominador son lineales y algunos se repiten

5) $\int \frac{6x-11}{(x-1)^2}dx$

$$\frac{6x-11}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

$$6x-11 = A(x-1)+B = Ax+(B-A)$$

Igualar los términos lineales del primer miembro con los del segundo miembro de la ecuación y realizar el mismo proceso con los términos independientes, esto es

Si $x=1$ entonces $6x=Ax \rightarrow A=6$

$-11=B-A$ sabiendo que $A=6$, entonces $B=-5$

$$\int \frac{6x-11}{(x-1)^2}dx = 6\int \frac{dx}{x-1} - 5\int \frac{dx}{(x-1)^2} = 6\ln|x-1| - 5\int \frac{du}{u^2} = 6\ln|x-1| + \frac{5}{x-1} + C$$

6) $\int \frac{-19x^2+50x-25}{x^2(3x-5)}dx$

$$\frac{-19x^2+50x-25}{x^2(3x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{3x-5} = \frac{A(x)(3x-5)+B(3x-5)+C(x^2)}{x^2(3x-5)}$$

$$-19x^2+50x-25 = A(x)(3x-5)+B(3x-5)+C(x^2)$$

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x=0 & \text{Si } x=\frac{5}{3} & \text{Si } x=1,\ B=5 \text{ y } C=2 \\ -25=-5B & \frac{50}{9}=\frac{25}{9}C & 6=-2A-10+2 \\ B=5 & C=2 & A=-7 \end{array}$$

$$= -7\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{3x-5} = -7\ln|x| - \frac{5}{x} + \frac{2}{3}\ln|3x-5| + C$$

7) $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^2+2x-8}dx = \int \frac{x+6}{(x+4)(x-2)}dx$

$$\frac{x+6}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{(x+4)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

$$x+6 = A(x-2)+B(x+4)$$

Si $x=2$ Si $x=-4$

$8=6B$ $2=-6A$

$\frac{4}{3}=B$ $A=-\frac{1}{3}$

$$\int \frac{x+6}{x^2+2x-8}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+4} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} + \frac{4}{3}\int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+4| + \frac{4}{3}\ln|x-2| + C$$

8) $\displaystyle\int \frac{11x+2}{2x^2-5x-3}dx = \int \frac{11x+2}{(2x-6)\left(x+\frac{1}{2}\right)}dx$

$$\frac{11x+2}{(2x-6)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{2x-6} + \frac{B}{x+\frac{1}{2}} = \frac{A\left(x+\frac{1}{2}\right)+B(2x-6)}{(2x-6)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$11x+2 = A\left(x+\frac{1}{2}\right)+B(2x-6)$$

De la ecuación anterior se deduce:
si x = -1/2, entonces B = ½
si x = 3, entonces A = 10

$$\int \frac{11x+2}{2x^2-5x-3}\,dx = 10\int \frac{dx}{2x-6} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{10}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = 5\ln|2x-6| + \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right| + C$$

9) $\displaystyle \int \frac{5x^2-10x-8}{x^3-4x}\,dx = \int \frac{5x^2-10x-8}{x(x+2)(x-2)}\,dx$

$$\frac{5x^2-10x-8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+2)(x-2) + B\,x(x-2) + C\,x(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

$5x^2 - 10x – 8 = A(x+2)(x-2) + B\ x(x-2) + C\ x(x+2)$

De la ecuación anterior se deduce:
si x = -2, B = 4
si x = 2 , C = -1
si x = 0,   A = 2

$$\int \frac{5x^2-10x-8}{x^3-4x}\,dx = 2\int \frac{dx}{x} + 4\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= 2\ln|x| + 4\ln|x+2| - \ln|x-2| + C$$

10) $\displaystyle \int \frac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}\,dx = \int \frac{4x^2-5x-15}{x(x-5)(x+1)}\,dx$

$$\frac{4x^2-5x-15}{x(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-5)(x+1) + B\,x(x+1) + C\,x(x-5)}{x(x-5)(x+1)}$$

$4x^2 – 5x – 15 = A(x – 5)(x + 1) + B\ x(x + 1) + C\ x(x - 5)$

De la ecuación anterior se deduce:
si x = 0,   A = 3
si x = 5,   B = 2
si x = -1, C = -1

$$\int \frac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}\,dx = 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-5} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= 3\ln|x| + 2\ln|x-5| - \ln|x+1| + C$$

11) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 25x - 23}{(x+1)^2(x-5)}\,dx$

$$\frac{2x^2 - 25x - 23}{(x+1)^2(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-5} = \frac{A(x+1)(x-5) + B(x-5) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-5)}$$

$2x^2 - 25x - 23 = A(x + 1)(x - 5) + B(x - 5) + C(x + 1)^2$

De la ecuación anterior se deduce:
si x =-1, B = -2/3
si x = 5, C = -49/18
si x = 0, A = 85/18

$$\int \frac{2x^2 - 25x - 23}{(x+1)^2(x-5)}\,dx = \frac{85}{18}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{49}{18}\int \frac{dx}{x-5}$$

$$= \frac{85}{18}\ln|x+1| - \frac{2}{3}\int \frac{du}{u^2} - \frac{49}{18}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{85}{18}\ln|x+1| - \frac{2}{3(x+1)} - \frac{49}{18}\ln|x-5| + C$$

12) $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 30x + 43}{(x+3)^3}\,dx$

$$\frac{5x^2 + 30x + 43}{(x+3)^3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} = \frac{A(x+3)^2 + B(x+3) + C}{(x+3)^3}$$

$5x^2 + 30x + 43 = A(x + 3)^2 + B(x + 3) + C$

De la ecuación anterior se deduce:
si x = -3, C = -2
si x = -1, 20 = 4A + 2B
si x = 0, 45 = 9A + 3B

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 20 &= 4A + 2B \\ 45 &= 9A + 3B \end{aligned}$$

obtenemos que A = 5 y por lo tanto B = 0

$$\int \frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}\,dx = 5\int \frac{dx}{x+3} - 2\int \frac{dx}{(x+3)^3} = 5\int \frac{du}{u} - 2\int \frac{du}{u^3}$$

$$= 5\ln|x+3| + \frac{1}{(x+3)^2} + C$$

Caso c) Factores cuadráticos diferentes

13) $\displaystyle\int \frac{x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 5}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx$

$$\frac{x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 5}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+4}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1)(x^2+4) + (Ex+F)(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$$

$$x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 5 = Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^5 + 5Cx^3 + 4Cx$$

$$+ Dx^4 + 5Dx^2 + 4D + Ex^5 + 2Ex^3 + Ex + Fx^4 + 2Fx^2 + F$$

Resolviendo la ecuación anterior

$x^5 = Cx^5 + Ex^5$ si $x = 1$ tenemos que $E = 1 - C$
$-x^4 = Dx^4 + Fx^4$ si $x = 1$ tenemos que $F = -1 - D$
$-2x^3 = Ax^3 + 5Cx^3 + 2Ex^3$
$4x^2 = Bx^2 + 5Dx^2 + 2Fx^2$
$-15x = 4Ax + 4Cx + Ex$
$5 = 4B + 4D + F$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$A = -4$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 2$, $E = 1$ y $F = -3$

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 5}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = -4\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x-3}{x^2+4}\,dx$$

$$= -2\int \frac{du}{u^2} + 2\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^2\theta + 1} + \int \frac{2\tan\theta - 3}{4\tan^2\theta + 4}\,d\theta$$

$$= \frac{-2}{-u} + 2\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta + \int \frac{2\tan\theta - 3}{4\left(\tan^2\theta + 1\right)}\, 2\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{x^2+1} + 2\int d\theta + \frac{1}{2}\int \frac{2\tan\theta - 3}{\sec^2\theta}\,\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{x^2+1} + 2\int d\theta + \int \tan\theta\, d\theta - \frac{3}{2}\int d\theta = \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int d\theta + \int \tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln\left|\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right| + C$$

Caso d) Algunos factores cuadráticos repetidos. En cada factor $b^2 - 4ac < 0$.

14) $\displaystyle\int \frac{7x^3 + 16x^2 + 20x + 5}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2}\, dx$

$$\frac{7x^3 + 16x^2 + 20x + 5}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2} = \frac{Ax + B}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$$

$$= \frac{Ax + B + (Cx + D)\left(x^2 + 2x + 2\right)}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2}$$

$$7x^3 + 16x^2 + 20x + 5 = Ax + B + Cx^3 + 2Cx^2 + 2Cx + Dx^2 + 2Dx + 2D$$

De la ecuación anterior, se tiene que

$7x^3 = Cx^3$
$16x^2 = 2Cx^2 + Dx^2$
$20x = Ax + 2Cx + 2Dx$
$5 = B + 2D$

Del siguiente sistema se deduce que: $A = 2$, $B = 1$, $C = 7$ y $D = 2$

$$\int \frac{7x^3 + 16x^2 + 20x + 5}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2}\, dx = \int \frac{2x + 1}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2}\, dx + \int \frac{7x + 2}{x^2 + 2x + 2}\, dx$$

$$= \int \frac{2x + 2 - 1}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2}\, dx + \int \frac{7x + 2}{(x+1)^2 + 1}\, dx$$

$$= \int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\,dx - \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2} + \int \frac{7x+2}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\,dx - \int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+1\right]^2} + \int \frac{7x+2}{(x+1)^2+1}\,dx$$

Integrando $\int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\,dx$ por cambio de variable e integrando $\int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}$ y $\int \frac{7x+2}{(x+1)^2+1}\,dx$ por sustitución trigonométrica, se tiene:

$$= \int \frac{du}{u^2} - \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(\tan^2\theta+1\right)^2} + \int \frac{7(\tan\theta-1)+2}{\tan^2\theta+1}\left(\sec^2\theta\, d\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{u} - \int \frac{\sec^2\theta}{\left(\sec^2\theta\right)^2}\,d\theta + \int \frac{7\tan\theta-5}{\sec^2\theta}\left(\sec^2\theta\, d\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{u} - \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} + 7\int \tan\theta\, d\theta - 5\int d\theta$$

$$= -\frac{1}{u} - \int \cos^2\theta\, d\theta + 7\int \tan\theta\, d\theta - 5\int d\theta = -\frac{1}{u} - \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta + 7\int \tan\theta\, d\theta - 5\int d\theta$$

$$= -\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\int d\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta + 7\int \tan\theta\, d\theta - 5\int d\theta$$

$$= -\frac{1}{u} - \frac{11}{2}\int d\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta + 7\int \tan\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)} - \frac{11}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta - 7\ln\left|\cos\theta\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)} - \frac{11}{2}\tan^{-1}(x+1) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2\left(\tan^{-1}(x+1)\right)\right)$$

$$-7\ln\left|\cos\left(\tan^{-1}(x+1)\right)\right| + C$$

Caso e) Algunos factores lineales y cuadráticos. En cada factor $b^2 - 4ac < 0$.

15) $\displaystyle\int \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)\left(x^2+x+6\right)}dx$

$$\frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)\left(x^2+x+6\right)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+6} = \frac{A\left(x^2+x+6\right)+(Bx+C)(2x-1)}{(2x-1)\left(x^2+x+6\right)}$$

$6x^2+22x-23 = A\ (x^2 + x + 6) + (Bx + C)(2x - 1)$ ecuación✱
$6x^2+22x-23 = Ax^2 + Ax + 6A + 2Bx^2 - Bx + 2Cx - C$

De la ecuación✱ si $x = \dfrac{1}{2}$, entonces

$$\frac{-21}{2} = \frac{27}{4}A$$

Despejando a A, tenemos

$$A = \frac{-14}{9}$$

$6x^2 = Ax^2 + 2Bx^2$

$$6 = \frac{-14}{9} + 2B$$

Despejando a B, tenemos

$$B = \frac{34}{9}$$

$-23 = 6A - C$

$$-23 = 6\left(\frac{-14}{9}\right) - C$$

Despejando a C, tenemos

$$C = \frac{41}{3}$$

$$\int \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)\left(x^2+x+6\right)}dx = -\frac{14}{9}\int \frac{dx}{2x-1} + \int \frac{(34/9)x+(41/3)}{x^2+x+6}\,dx$$

$$= -\frac{14}{9}\int \frac{dx}{2x-1} + \frac{34}{9}\int \frac{x\,dx}{x^2+x+6} + \frac{41}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+6}$$

$$= -\frac{14}{18}\int \frac{du}{u} + \frac{34}{9}\int \frac{x\,dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}} + \frac{41}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}}$$

$$= \frac{-7}{9}\ln(2x-1) + \frac{34}{9}\int \frac{\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\tan\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\sec^2\theta\right)}{\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\tan\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}}\, d\theta$$

$$+ \frac{41}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{23}}{2}\sec^2\theta}{\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\tan\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}}\, d\theta = -\frac{7}{9}\ln|2x-1|$$

$$+ \frac{34}{9}\int \frac{\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta}{\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\tan\theta\right)^2 + \frac{23}{4}} - \frac{41\sqrt{23}}{6}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\tan\theta\right)^2 + \frac{23}{4}}$$

$$= -\frac{7}{9}\ln|2x-1| + \frac{34}{9}\int \frac{\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^2\theta + 1} - 0.787\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^2\theta + 1}$$

$$+ 5.69\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^2\theta + 1} = -\frac{7}{9}\ln|2x-1| + \frac{34}{9}\int \frac{\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$+ 4.9\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^2\theta} = -\frac{7}{9}\ln|2x-1| + \frac{34}{9}\int \tan\theta\, d\theta + 4.9\int d\theta$$

$$= -\frac{7}{9}\ln|2x-1| - \frac{34}{9}\ln|\cos\theta| + 4.9\,\theta + C$$

$$= -\frac{7}{9}\ln|2x-1| - \frac{34}{9}\ln\left|\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{23}}\right)\right)\right| + 4.9\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{23}}\right) + C$$

3.9 Algunos tópicos

Para las siguientes integrales cuyo integrando es una expresión racional de senos y cosenos, hacer la sustitución

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}; \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2} \quad \text{donde} \quad z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

1) $$\int \sec x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2\left(1+z^2\right)}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)}dz = 2\int \frac{dz}{1-z^2} = 2\int \frac{dz}{(1-z)(1+z)}$$

$$\frac{2}{(1-z)(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} = \frac{A(1+z)+B(1-z)}{(1-z)(1+z)}$$

2 = A(1 + z) + B(1 – z)

Si z =1
2 = 2A
A = 1

Si z = -1
2 = -2B
B = 1

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{dz}{1-z} + \int \frac{dz}{1+z} = -\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u} = -\ln|1-z| + \ln|1+z| + C$$

$$= -\ln\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

2) $$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+2z}{1+z^2}} = \int \frac{2\left(1+z^2\right)dz}{\left(1+z^2\right)\left(z^2+2z+1\right)}$$

$$= \int \frac{2\left(1+z^2\right)dz}{\left(1+z^2\right)(z+1)^2} = 2\int \frac{dz}{(z+1)^2} = 2\int \frac{du}{u^2} = 2\int u^{-2}du = \frac{2u^{-1}}{-1} + C$$

$$u = z+1$$
$$du = dz$$

$$= \frac{-2}{u} + C = \frac{-2}{z+1} + C = \frac{-2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1} + C$$

3) $$\int \frac{dx}{1-\cos x} = 2\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1-\frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2-1+z^2}{1+z^2}} = 2\int \frac{\left(1+z^2\right)dz}{\left(1+z^2\right)\left(2z^2\right)}$$

$$= 2\int \frac{dz}{2z^2} = \int \frac{dz}{z^2} = \int z^{-2}\,dz = \frac{z^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + C$$

4) $$\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = 2\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1-\frac{2z}{1+z^2}} = 2\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2-2z}{1+z^2}} = 2\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{z^2-2z+1}{1+z^2}}$$

$$= 2\int \frac{\left(1+z^2\right)dz}{\left(1+z^2\right)\left(z-1\right)} = 2\int \frac{dz}{\left(z-1\right)^2} = 2\int \frac{du}{u} = -\frac{2}{z-1} + C = -\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1} + C$$

$$u = z-1$$
$$du = dz$$

5) $$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{2+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{2+2z^2+1-z^2}{1+z^2}} = 2\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{z^2+3}{1+z^2}} = 2\int \frac{\left(1+z^2\right)dz}{\left(1+z^2\right)\left(z^2+3\right)}$$

Integrando por sustitución trigonométrica

$$= 2\int \frac{dz}{z^2+3}$$

$$z = \sqrt{3}\tan\theta \quad \Rightarrow \quad z^2 = 3\tan^2\theta$$
$$dz = \sqrt{3}\sec^2\theta$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{3}}$$

tenemos que:

$$= 2\sqrt{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{3\tan^2\theta + 3} = 2\sqrt{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{3\left(\tan^2\theta + 1\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\theta + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C$$

6) $$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 + \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+2z+1-z^2}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z+2}{1+z^2}} = \int \frac{2\left(1+z^2\right)}{2\left(1+z^2\right)(z+1)}dz = \int \frac{dz}{z+1} = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|z+1| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| + C$$

7) $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{z^2+2z-1}{1+z^2}}$$

$$= 2\int \frac{1+z^2}{\left(1+z^2\right)\left(z^2+2z-1\right)}dz = 2\int \frac{dz}{z^2+2z-1} = 2\int \frac{dz}{(z+1)^2-2}$$

Integrando por cambio de variable

$$= 2\int \frac{du}{u^2-2} = 2\int \frac{du}{\left(u-\sqrt{2}\right)\left(u+\sqrt{2}\right)}$$

Integrando por fracciones parciales

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{u+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|u-\sqrt{2}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|u+\sqrt{2}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|z + 1 - \sqrt{2}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|z + 1 + \sqrt{2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - \sqrt{2}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 + \sqrt{2}\right| + C$$

8) $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \tan x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} + \frac{\frac{2z}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} + \frac{2z\left(1+z^2\right)}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} + \frac{2z}{1-z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z - 2z^3 + 2z + 2z^3}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{1-z^2}{z} dz = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\int z\, dz = \frac{1}{2}\ln|z| - \frac{1}{4}z^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{1}{4}\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

9) $$\int \frac{dx}{1 + 2\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 + 2\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 + \frac{4z}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+4z}{1+z^2}} = 2\int \frac{1+z^2\, dz}{\left(1+z^2\right)\left(z^2+4z+1\right)}$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} = 2\int \frac{dz}{(z+2)^2 - 3} = 2\int \frac{du}{u^2 - 3} = 2\int \frac{du}{\left(u - \sqrt{3}\right)\left(u + \sqrt{3}\right)}$$

$u = z + 2$
$du = dz$

$$\frac{2}{\left(u-\sqrt{3}\right)\left(u+\sqrt{3}\right)}=\frac{A}{u-\sqrt{3}}+\frac{B}{u+\sqrt{3}}=\frac{A\left(u+\sqrt{3}\right)+B\left(u-\sqrt{3}\right)}{\left(u-\sqrt{3}\right)\left(u+\sqrt{3}\right)}$$

$$2=A\left(u+\sqrt{3}\right)+B\left(u-\sqrt{3}\right)$$

si $u=\sqrt{3}$, entonces $A=\frac{1}{\sqrt{3}}$

si $u=-\sqrt{3}$, entonces $B=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{du}{u-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{du}{u+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dv}{v}-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dv}{v}$$

Integrando por cambio de variable

$$v=u-\sqrt{3} \qquad v=u+\sqrt{3}$$
$$dv=du \qquad dv=du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln v-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln v=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|u-\sqrt{3}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|u+\sqrt{3}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|z+2-\sqrt{3}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|z+2+\sqrt{3}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+2-\sqrt{3}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+2+\sqrt{3}\right|+C$$

10) $$\int\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx=2\int\frac{u}{u^2-1}u\,du=2\int\frac{u^2}{u^2-1}du=2\int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du=2\int du+2\int\frac{du}{u^2-1}$$

$$u^2=x\rightarrow u=\sqrt{x}$$
$$2u\,du=dx$$

Integrando $2\int\frac{du}{u^2-1}$ por fracciones parciales

$$=2\int du+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u-1}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u+1}=2\int du+\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v}-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v}$$

$$=2u+\frac{1}{2}\ln|v|-\frac{1}{2}\ln|v|=2u+\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|+C$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x} - 1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x} + 1\right| + C$$

$$= 2\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + 1\right| + C$$

11) $\displaystyle\int \frac{x}{x^{1/2} - x^{1/3}}\,dx = \int \frac{u^6}{\left(u^6\right)^{1/2} - \left(u^6\right)^{1/3}}.6u^5du = 6\int \frac{u^{11}}{u^3 - u^2}du$

$x = u^6$

$dx = 6u^5$

$$\frac{u^{11}}{u^3 - u^2} = u^8 + u^7 + u^6 + u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 + \frac{u^2}{u^3 - u^2}$$

$$= \int\left(u^8 + u^7 + u^6 + u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 + \frac{u^2}{u^3 - u^2}\right)du$$

$$= \frac{6u^9}{9} + \frac{6u^8}{8} + \frac{6u^7}{7} + \frac{6u^6}{6} + \frac{6u^5}{5} + \frac{6u^4}{4} + \frac{6u^3}{3} + \frac{6u^2}{2} + 6u + 6\int \frac{u^2}{u^3 - u^2}du$$

$$= \frac{2}{3}u^9 + \frac{3}{4}u^8 + \frac{6}{7}u^7 + u^6 + \frac{6}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^4 + 2u^3 + 3u^2 + 6u + 6\int \frac{u^2}{u^2\,(u-1)}du$$

$$= \frac{2}{3}u^9 + \frac{3}{4}u^8 + \frac{6}{7}u^7 + u^6 + \frac{6}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^4 + 2u^3 + 3u^2 + 6u + 6\int \frac{du}{u-1} + \ln\left|u - 1\right|$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt[6]{x^9} + \frac{3}{4}\sqrt[6]{x^8} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[6]{x^6} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} + 2\sqrt[6]{x^3}$$

$$+3\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{6}{7}x^{7/6} + x$$

$$+\frac{6}{5}x^{5/6} + \frac{3}{2}x^{2/3} + 2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6\ln\left|x^{1/6} - 1\right| + C$$

12) $$\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\alpha} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2} + \frac{6z}{4\left(1+z^2\right)}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4\left(1-z^2\right)+6z}{4\left(1+z^2\right)}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4-4z^2+6z}{4\left(1+z^2\right)}} = \int \frac{8\left(1+z^2\right)dz}{\left(1+z^2\right)2\left(3z-2z^2+2\right)} = 4\int \frac{dz}{2+3z-2z^2} = 4\int \frac{dz}{(2-z)(1+2z)}$$

Integrando $4\int \frac{dz}{(2-z)(1+2z)}$ por fracciones parciales

$$\frac{4A}{(2-z)(1+2z)} = \frac{B}{2-z} + \frac{}{1+2z} = \frac{A(1+2z)+B(2-z)}{(2-z)(1+2z)}$$

$$4 = A(1+2z) + B(2-z)$$

Si $z = 2$, $A = \frac{4}{5}$

Si $z = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{8}{5}$

$$4\int \frac{dz}{(2-z)(1+2z)} = \frac{4}{5}\int \frac{dz}{2-z} + \frac{8}{5}\int \frac{dz}{1+2z} = -\frac{4}{5}\int \frac{du}{u} + \frac{8}{10}\int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{4}{5}\ln|2-z| + \frac{4}{5}\ln|1+2z| + C = -\frac{4}{5}\ln\left|2-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{4}{5}\ln\left|1+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

13) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}} = \int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}} = 2\int \frac{zdz}{3+z} = 2\int \left(\frac{-3}{3+z} + 1 \right) dz$

$$z = \sqrt{x+2}$$
$$z^2 = x + 2$$
$$2z\,dz = dx$$

$$= 6\int \frac{dz}{3+z} + 2\int dz = -6\int \frac{du}{u} + 2\int dz = -6\ln|3+z| + 2z + C$$

$$u = 3 + z$$
$$du = dz$$

$$= -6\ln\left|3 + \sqrt{x+2}\right| + 2\sqrt{x+2} + C$$

14) $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} = \int \frac{dx}{2x^{1/3} + x^{1/2}} = 6\int \frac{u^5 du}{2\left(u^6\right)^{1/3} + \left(u^6\right)^{1/2}} = 6\int \frac{u^5 du}{2u^2 + u^3} =$

Dividiendo

$$\frac{u^5}{u^3 + 2u^2} = u^2 - 2u + 4 - \frac{8u^2}{u^3 + 2u^2}$$

$$= 6\int u^2 - 2u + 4 - \frac{8u^2}{u^3 + 2u^2} du = \frac{6u^3}{3} - \frac{12u^2}{2} + 24u - 48\int \frac{u^2}{u^3 + 2u^2} du$$

$$= 2u^3 - 6u^2 + 24u - 48\int \frac{u^2}{u^2(u+2)} du = 2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 - 6\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 + 24\sqrt[6]{x} - 48\int \frac{du}{u+2}$$

$$= 2x^{1/2} - 6x^{1/3} + 24x^{1/6} - 48\int \frac{dz}{z} = 2x^{1/2} - 6x^{1/3} + 24x^{1/6} - 48\ln|u+2| + C$$

$$= 2x^{1/2} - 6x^{1/3} + 24x^{1/6} - 48\ln\left|\sqrt[6]{x} + 2\right| + C$$

3.10 Recomendaciones para el proceso de integración

En la asignatura de Cálculo I impartida en la Facultad de Química, es básico que el alumno tenga conocimientos de álgebra, trigonometría, geometría analítica y principalmente de la derivada, entre otros; cuyo objetivo es el de poder distinguir el integrando respectivo y así aplicar la técnica adecuada para que el proceso de integración le sea más accesible.

Se le sugiere además dominar cada una de las técnicas de integración, y para ello debe analizar el integrando y determinar que técnica aplicar en la resolución del ejercicio, esto es:

- Si el integrando está constituido por un polinomio, se sugiere aplicar las reglas básicas de integración.
- Si lo que se va a integrar es una función compuesta, entonces es conveniente utilizar integración por cambio de variable.
- En la mayoría de los casos en los que el integrando sea un producto de dos funciones (polinomiales y/o trascendentes) es recomendable la integración por partes.
- Se aplica integración por sustitución trigonométrica cuando el integrando presenta expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, ó bien $\sqrt{x^2 - a^2}$; donde a > 0.
- Si el integrando está compuesto por una función que presenta potencias trigonométricas, es decir, funciones como sen^m u, cos^m u, sen^m u cos^n u, tan^m u, cot^m u, sec^m u, csc^m u, tan^m u sec^n u, cot^m u csc^n u, es conveniente aplicar integración de potencias de las funciones trigonométricas.
- La integración por fracciones parciales se aplica cuando el integrando es una función racional. Las funciones racionales propias se integran aplicando directamente esta técnica y en caso de tener funciones racionales impropias, es conveniente representarlas como una suma de una función polinomial y una función racional propia.

Se le recomienda al alumno no perder de vista el concepto de integral, recuerda que en matemáticas no se trata únicamente de mecanizar, también es muy importante analizar. En el caso de las aplicaciones de la integral se sugiere leer el problema, representar a través de un dibujo el proceso indicado en el enunciado, analizar y resolver.

CAPITULO IV. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL EN EL ÁREA DE LA QUÍMICA.

4.1 Pasos a seguir para la resolución de problemas de aplicación de la integral.

Una vez que se ha repasado y ejercitado las técnicas de integración, pasamos a la aplicación de la integral en el área de la Química.

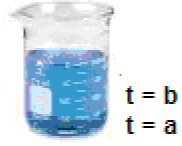
Para la primera parte de este capítulo, se presentan una serie de pasos necesarios para la resolución de las aplicaciones de la integral en el área de la Química, considerando los siguientes problemas como ejemplos.

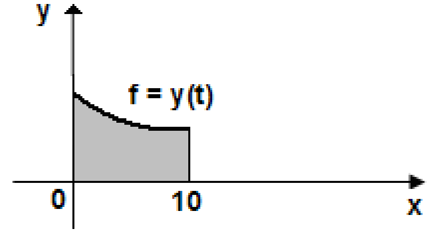
Una vez que se ha proporcionado el enunciado del problema

> *Mediante una reacción química se lleva a cabo la precipitación de una determinada sustancia con una rapidez de y gramos por segundo, donde y varia con el tiempo t. ¿Cuál es la precipitación total desde t = 0 hasta t = 10 segundos?*

Se sugiere:

1. Leer y analizar el enunciado, comprender el proceso descrito en el problema y representarlo a través de un diagrama.





2. Representación matemática.

Este problema nos pide determinar la precipitación total de la sustancia durante los 10 primeros segundos, lo cual se obtiene integrando la función y(t), esto es

$$\int_0^{10} y(t)\,dt$$

3. Solución del problema

Para este paso, se recomienda retomar el capítulo III, referido a las diferentes técnicas de integración, localizando la técnica adecuada para la resolución de la integral de acuerdo al integrando que se tiene o simplemente haciendo uso de las formas básicas de integración.

$$\int_0^{10} y(t)\,dt = F(10) - F(0)$$

4. Comprobación del resultado

Diferenciar el resultado obtenido y posteriormente evaluar la integral.

El otro ejemplo es:

Una partícula se desplaza por una recta, que será el eje de las y, cuya velocidad en el tiempo t es v(t) (en metros por segundo). ¿Cuál será el desplazamiento total de la partícula desde el instante t = a hasta t = b?

1. Leyendo este enunciado, se hace el siguiente análisis

Una partícula se desplaza por una recta, que será el eje de las y, si nos imaginamos la partícula, podemos pensar a la vez en sus posibles desplazamientos, de momento podemos imaginar que la partícula puede desplazarse hacia arriba, hacia abajo o en ambos sentidos. Se recomienda hacer un diagrama del proceso descrito en el problema.

El enunciado continua con, *cuya velocidad en el tiempo t está dada por v(t),* en esta parte del enunciado ya podemos imaginar y considerar algunos aspectos, primeramente, que si la partícula se desplaza hacia arriba la velocidad será positiva, y si se desplaza hacia abajo, la velocidad será negativa, y si se desplaza en ambos sentidos (aumentos y disminuciones en y) tendremos que v podrá ser positiva o negativa, en momentos distintos. Por otro lado, se tiene la idea de que mientras el tiempo transcurre la velocidad cambia.

2. Representación matemática.

En este problema se tiene como referencia que la derivada de la función de desplazamiento es la velocidad, entonces si lo que deseamos determinar es el desplazamiento total de la partícula desde el instante t = a hasta t = b, integramos la función v(t).

$$\int_a^b v(t)\,dt$$

3. Solución del problema

Se sugiere consultar el capítulo III, en caso de que se le presente alguna dificultad al integrar.

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

4. Comprobación del resultado

Se recomienda al alumno, antes de evaluar el resultado obtenido en la integral, corroborarlo a través del proceso de diferenciación y una vez que esté seguro de haber obtenido un resultado correcto, evaluar la integral en $t = b$ y $t = a$.

Con estos dos ejemplos enfocados en el área de la Química, se pretendió mostrar en forma generalizada el proceso a seguir en la resolución de problemas de aplicaciones de la integral.

4.2 Algunas aplicaciones de la integral en el área de la Química.

Este apartado es el tema medular de este trabajo, dado que es aquí donde se hace el enlace entre las matemáticas y la química.

Considerando la comprensión y utilización de los pasos antes mencionados, proseguimos con algunas aplicaciones de la integral en algunos problemas planteados, donde vamos a poder ver con mayor claridad la aplicación de algunas de las técnicas de integración.

4.2.1 Ecuación de Clapeyron

La ecuación de Clapeyron se utiliza en el análisis del equilibrio entre dos fases de una sustancia pura y representa la dependencia cuantitativa de la temperatura (T) de equilibrio con la presión (p)

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\Delta V}{\Delta S}$$

o la variación de la presión de equilibrio con la temperatura

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

donde ΔS es la entropía molar de la fusión a una temperatura T y es igual a $\frac{\Delta H_{fusión}}{T}$, y ΔV es el cambio en el volumen molar que se lleva a cabo durante la fusión. Para el equilibrio sólido-líquido la ecuación es

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S_{fusión}}{\Delta V_{fusión}} = \frac{\Delta H_{fusión}}{T\,\Delta V_{fusión}}$$

$$dp = \frac{\Delta H_{fusión}}{\Delta V_{fusión}} \frac{dT}{T}$$

Si

entonces,

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \frac{\Delta H_{fusión}}{\Delta V_{fusión}} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$\Delta H_{fusión}$ y $\Delta V_{fusión}$ se consideran constantes debido a que el cambio con la temperatura y la presión es mínimo.

Integrando, obtenemos

$$p\Big|_{p_1}^{p_2} = \frac{\Delta H_{fusión}}{\Delta V_{fusión}} \ln T\Big|_{T_1}^{T_2}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\Delta H_{fusión}}{\Delta V_{fusión}} \left(\ln T_2 - \ln T_1\right)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\Delta H_{fusión}}{\Delta V_{fusión}} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Donde T_2 es la temperatura de fusión con p_2, y T_1 es la temperatura de fusión con p_1. Debido a que la diferencia $T_2 – T_1$ es muy pequeña, el logaritmo obtenido en la ecuación anterior puede desarrollarse como

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \ln\left(1 + \frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

Así obtenemos que

$$p_2 = \frac{\Delta H_{fusión}}{\Delta V_{fusión}} \frac{T_2 - T_1}{T_1} + p_1$$

Finalmente la expresión obtenida representa la ecuación de una recta con pendiente $\frac{\Delta H_{fusión}}{\Delta V_{fusión}}$, donde p_2 está en función de T_2. Cuando el sistema se encuentra en equilibrio, se tiene una presión (p_1) y una temperatura (T_1), si T_1 cambia a T_2, entonces hay una perturbación en el equilibrio que para reestablecerlo es necesario llevarlo hasta una presión (p_2). Gráficamente queda representada de la siguiente manera (figura 4.2.1).

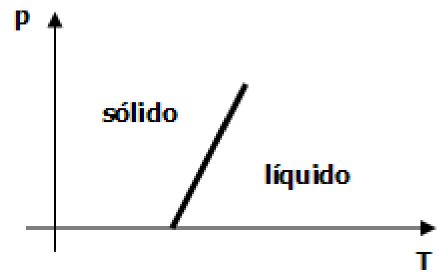


Fig. 4.2.1

En la gráfica se tiene una recta con pendiente $\frac{\Delta H_{fusión}}{\Delta V_{fusión}}$, constituida por todos los puntos (T, p) en los cuales el sólido y el líquido están en equilibrio. A la izquierda de la recta, la fase sólida se mantiene estable y todos los puntos (T, p) que se encuentran en esta zona presentan temperaturas menores a la temperatura de fusión. Los puntos (T, p) que se encuentran a la derecha de la recta presentan temperaturas mayores a la de fusión, estos presentan las condiciones necesarias para que la fase líquida permanezca estable.

4.2.2 Principio de incertidumbre de Heisenberg

Los electrones se comportan en algunas ocasiones como partículas y en otras como ondas, dependiendo del experimento que se vaya a realizar para observar estas características (de onda o de partícula).

Al tratar de medir simultáneamente la posición y el momento de una partícula microscópica, ocurre durante el proceso de medición una perturbación incontrolable en el sistema sobre el que se realiza la medida, provocando una incertidumbre inevitable entre el equipo de medición y el sistema cuántico. Cuanto mayor sea la precisión con la que se determine la posición, menor será la precisión que se obtenga para el momento. La limitación presente en la medición es la que establece el Principio de incertidumbre de Heisenberg.

Uno de los postulados fundamentales de la formulación matemática de la mecánica cuántica hace mención al Principio de incertidumbre de Heisenberg: para el caso de las variables típicas de posición (x) y momento (p_x) se tiene que:

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

ó

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

Donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, siendo h la constante de Planck = 6.6260693 x 10^{-34} J/s,

Δx y Δp_x las incertidumbres representadas por la raíz cuadrada de la varianza, esto es:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

y

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$$

$\langle x \rangle$ y $\langle p_x \rangle$ son los valores esperados (valores medios) que proporcionan la probabilidad de encontrar a la partícula en un punto específico y la probabilidad que existe de que la partícula se mueva en la dirección +x o –x respectivamente.

En mecánica cuántica $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx$, donde ψ es la función de onda y ψ^* es el conjugado de la función de onda que se obtiene de resolver la ecuación de Schrödinger. Por ejemplo, las funciones de onda para una caja unidimensional están dadas por

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde L es la longitud de la caja y n es el número cuántico. Cada valor de n diferente proporciona una función de onda y un estado diferente. Si tomamos n=1, tenemos

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\left[\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L\left[x^2 - x^2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]dx = \frac{1}{L}\int_0^L x^2 dx - \frac{1}{L}\int x^2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

Integrando por partes

$$\frac{1}{L}\int x^2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$\text{sea } u = x^2 \qquad dv = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$du = 2x\,dx \qquad \int dv = \int\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$\int dv = \frac{L}{2\pi}\int\cos u\,du$$

$$v = \frac{L}{2\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L x^2 dx - \frac{1}{L}\left[\frac{Lx^2}{2\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{L}{\pi}\int x\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L x^2 dx - \frac{x^2}{2\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{\pi}\int x\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$u = x \qquad dv = \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$du = dx \qquad \int dv = \int \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$v = -\frac{L}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{x^3}{3L} - \frac{Lx^2}{4\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{Lx}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{L}{2\pi}\int \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx\right]$$

$$= \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{Lx^2}{4\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{L^2 x}{2\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{L^3}{4\pi^3}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^L = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2}$$

$$\boldsymbol{\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2}}$$

$$\text{Si } \langle x \rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$u = x \qquad dv = \text{sen}^2\frac{\pi x}{L}dv$$

$$du = dx$$

$$\text{si } u = \frac{\pi x}{L}, \quad du = \frac{\pi}{L}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{\pi}du = dx$$

$$\int dv = \frac{L}{\pi}\int \text{sen}^2 u\,du$$

$$v = \frac{L}{\pi}\left[\frac{\pi x}{2L} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

$$v = \frac{x}{2} - \frac{L}{4\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{2}{L}\left[\frac{x^2}{4} - \frac{Lx}{4\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{1}{2}\int x\,dx + \frac{L}{4\pi}\int \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx\right]\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{x^2}{L} - \frac{x}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{x^2}{2L} + \frac{L}{4\pi^2}\int \operatorname{sen} u\,du$$

$$= \left[\frac{x^2}{L} - \frac{x}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{x^2}{2L} + \frac{L}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]\Bigg|_0^L$$

Evaluando obtenemos

$$= L - \frac{L}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi) - \frac{L}{2} - \frac{L}{4\pi^2}\cos(2\pi) + \frac{L}{4\pi^2} = L - \frac{L}{2} - \frac{L}{4\pi^2} + \frac{L}{4\pi^2} = \frac{L}{2}$$

Y por lo tanto si $\langle x\rangle = \frac{L}{2}$ entonces para el nivel de energía más baja (n = 1), existe una mayor probabilidad de encontrar a la partícula en el centro de la caja.

$$\boldsymbol{\langle x\rangle^2 = \frac{L^2}{4}}$$

Para el caso del operador de momento p_x definido por $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, y para el valor esperado o valor medio se tiene que:

$$\langle p_x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x,t)^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,t)\,dx$$

$$\langle p_x\rangle = -i\hbar\int_0^L\left(\frac{2}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = -\frac{2i\hbar}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)dx$$

$$\langle p_x \rangle = \frac{-2\pi i\hbar}{L^2}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{-2\pi i\hbar}{L^2\pi}\left[\frac{L}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$= \frac{-i\hbar}{L}\operatorname{sen}^2(\pi) - \frac{i\hbar}{L}\operatorname{sen}^2(0) = 0$$

El hecho de que $\langle p_x \rangle = 0$ significa que existe la misma probabilidad de que la partícula se mueva en la dirección +x o en la –x.

$$\langle p_x^2 \rangle = \frac{2h^2}{L}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2h^2\pi^2}{L^3}\left[\frac{x}{2} - \frac{L}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L = \frac{h^2\pi^2}{L^2}$$

$$\boldsymbol{\langle p_x^2 \rangle = \frac{h^2\pi^2}{L^2}}$$

Si

$$\Delta x = \sqrt{\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2} - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\pi^2L^2 - 6L^2 - 3\pi^2L^2}{12\pi^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2L^2 - 6L^2}{12\pi^2}} = \sqrt{\frac{L^2(\pi^2 - 6)}{12\pi^2}} = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}}$$

y

$\Delta p_x = \sqrt{\frac{\hbar^2 \pi^2}{L^2}} = \frac{\hbar\pi}{\pi\ L}$, sabiendo que $\hbar = \frac{h}{2}$, tenemos que

$$\Delta p_x = \frac{h}{2L}$$

entonces

$$\Delta x\ \Delta p_x = \left(\frac{L\pi}{\pi}\sqrt{\frac{-6}{12}}\right)\left(\frac{h}{2L}\right) = \frac{h}{2\pi}\pi\sqrt{\frac{-6}{12}} = 5.98850x10^{-35}$$

Si $\frac{h}{4\pi} = 5.27285 \times 10^{-35}$, entonces se cumple que

$$\Delta x\ \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

4.2.3 Rapidez de reacción

En el área de la química, es muy común involucrarnos en el tema de cinética química porque es la que se encarga de estudiar la rapidez con la que ocurren las reacciones químicas. La rapidez de las reacciones puede verse afectada por factores tales como la concentración de reactivos, la temperatura a la cual se lleva a cabo la reacción, la presencia de catalizadores y el área superficial de los reactivos o catalizadores.

Las colisiones que se llevan a cabo entre las partículas, dependen de la concentración de los reactivos (moles/l). Al inicio de una reacción, se tiene una mayor concentración en los reactivos, esto hace que la rapidez de la reacción sea mayor porque las colisiones entre las moléculas es mayor. A medida que la concentración de reactivos disminuye conforme avanza la reacción, las colisiones entre moléculas también disminuye, y por lo tanto la rapidez también. Las unidades en las que se mide la rapidez de una reacción están dadas en moles/l·s (unidades de concentración/tiempo).

Orden de reacción

El orden de las reacciones depende del reactivo que se analice y se determina experimentalmente. Cada reacción está representada por una ecuación característica que describe el número de partículas del reactivo que reaccionan entre si mismas, para formar una cierta cantidad de partículas del producto.

En este trabajo de investigación se ha seleccionado una ecuación de segundo orden, representada por la reacción

$$A + B \rightarrow P$$

de la cual se tiene que la rapidez de reacción está dada por

$$r = -\frac{d[a]}{dt} = -\frac{d[b]}{dt} = \frac{d[x]}{dt} = k[a][b]$$

con la finalidad de determinar una ecuación que nos proporcione la rapidez con la que se lleva a cabo la reacción, en cualquier instante t.

La rapidez se puede expresar como:

$$r = -\frac{d[a-x]}{dt} = -\frac{d[b-x]}{dt} = \frac{d[x]}{dt} = k[a-x][b-x]$$

Donde:

$[a]$ es la concentración inicial del reactivo A

$[b]$ es la concentración inicial del reactivo B

$[a - x]$ es la concentración del reactivo A, en el instante de tiempo t.

$[b - x]$ es la concentración inicial del reactivo B, en el instante de tiempo t.

$[x]$ es la concentración del producto P, en el instante de tiempo t.

Entonces se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d[x]}{dt} = k[a-x][b-x]$$

y

$$\frac{d[x]}{[a-x][b-x]} = k\,dt$$

Integrando, obtenemos

$$\int_0^x \frac{d[x]}{[a-x][b-x]} = k\int_0^t dt$$

Resolviendo la integral por fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{1}{[a-x][b-x]} = \frac{A}{[a-x]} + \frac{B}{[b-x]} = \frac{A[b-x]+B[a-x]}{[a-x][b-x]}$$

$$1 = A[b-x]+B[a-x]$$

Si x = b, entonces B = $\frac{1}{[a-b]}$

Si x = a, entonces A = $\frac{1}{[b-a]}$

$$\int_0^x \frac{d[x]}{[a-x][b-x]} = \int_0^x \frac{1}{[a-x][b-a]}d[x] + \int_0^x \frac{1}{[b-x][a-b]}d[x] = kt$$

$$\frac{1}{[b-a]}\int_o^x \frac{1}{[a-x]}d[x] + \frac{1}{[a-b]}\int_o^x \frac{1}{[b-x]}d[x] = kt$$

Integrando por cambio de variable

$$-\frac{1}{[b-a]}\int_o^x \frac{du}{u} - \frac{1}{[a-b]}\int_o^x \frac{du}{u} = kt$$

$$\frac{1}{[a-b]}\ln u\Big|_0^x - \frac{1}{[a-b]}\ln u\Big|_0^x = kt$$

$$\frac{1}{[a-b]}\ln[a-x]\Big|_0^x - \frac{1}{[a-b]}\ln[b-x]\Big|_0^x = kt$$

Evaluando

$$-\frac{1}{[b-a]}\{\ln[a-x]-\ln[a]\} - \frac{1}{[a-b]}\{\ln[b-x]-\ln[b]\} = kt$$

$$-\frac{1}{[b-a]}\ln\frac{[a-x]}{[a]} + \frac{1}{[b-a]}\ln\frac{[b-x]}{[b]} = kt$$

$$\frac{1}{[b-a]}\left[\ln\frac{[b-x]}{[b]} - \ln\frac{[a-x]}{[a]}\right] = kt$$

$$\frac{1}{[b-a]}\ln\frac{[b-x][a]}{[a-x][b]} = kt$$

$$\ln\frac{[b-x]}{[a-x]} + \ln\frac{[a]}{[b]} = [b-a]kt$$

Considerando que [a] < [b], se tiene que

$$\ln\frac{[b-x]}{[a-x]} = [b-a]kt + \ln\frac{[b]}{[a]} \quad \ldots \; ✱$$

La ecuación resultante es característica de una función lineal (figura 4.2.3), cuya pendiente es $[b-a]k$.

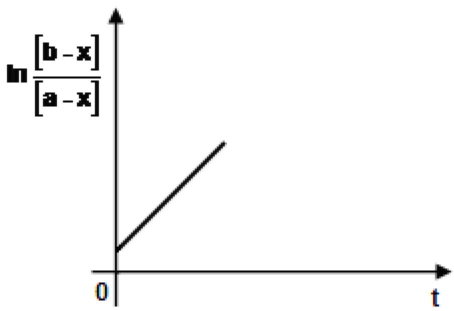


Fig. 4.2.3

De la ecuación ❋ se puede determinar la constante cinética K, puesto que [a] y [b] se conocen y [a - x] y [b - x] se determinan por cromatografía para cualquier instante t. Una vez que se ha calculado el valor de k, se determina la rapidez de reacción mediante la ecuación

$$r = k\,[a]\,[b]$$

4.2.4 Determinación de la velocidad media de un flujo en tubos circulares

El siguiente problema representa una de las tantas aplicaciones de la integral que existen en el área de la Química. El ejemplo hace referencia a un flujo laminar en tubos circulares, del cual podemos determinar la velocidad media.

Para ello vamos a considerar un fluido de densidad constante a través de un tubo circular horizontal de radio R y longitud L, se considera un tubo "muy largo" lo cual implica que no se tendrán efectos finales. Se utilizarán coordenadas cilíndricas porque son las coordenadas adecuadas para describir las posiciones en una tubería circular.

Cuando el fluido fluye en una tubería circular (figura 4.2.2), al medir las velocidades a diferentes distancias de la pared al centro se demuestra que en el flujo laminar el fluido que está en el centro del tubo se desplaza con mayor rapidez que el que está cercano a las paredes. Estas mediciones se efectúan a una distancia razonable de la entrada a la tubería.

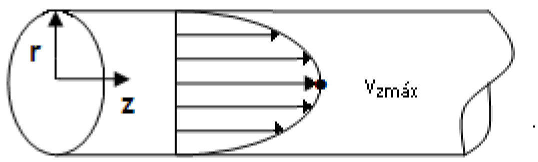


Fig. 4.2.2

Si r es el radio del tubo, la velocidad máxima se presenta cuando r = 0, y está dada por la ecuación

$$v_{z\,máx} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L}$$

Si la distribución de velocidad está representada de la siguiente manera

$$v_z(r) = \frac{(P_0 - P_L)\,R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

la cual nos indica que la distribución de velocidad para el flujo laminar de un fluido incomprensible es parabólica (v_z aumenta cuando R disminuye), entonces la velocidad media $\langle v_z \rangle$ se puede determinar sumando todas las velocidades en una sección transversal (figura 4.2.3) y dividiendo por el área de la misma sección, así $\langle v_z \rangle$ está dada por

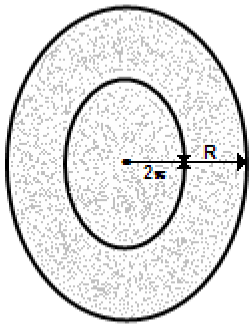


Fig. 4.2.3

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_z(r)\, r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\, dr\, d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\Delta P\, R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\, dr\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{\Delta P\, R^2}{4\mu L}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left[r - \frac{r^3}{R^2}\right] dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\, dr\, d\theta} = \frac{\frac{\Delta P\, R^2}{4\mu L}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{R}\left[r - \frac{r^3}{R^2}\right] dr\right] d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\, dr\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{\Delta P\, R^2}{4\mu L}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R d\theta}{\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\theta} = \frac{\frac{\Delta P\, R^2}{4\mu L}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right]_0^R d\theta}{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\, d\theta}$$

$$
= \frac{\frac{\Delta P\, R^2}{4\mu L}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{4}\right]_0^R d\theta}{\frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi} d\theta} = \frac{\frac{\Delta P\, R^2}{4\mu L}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}R^2 d\theta}{\frac{1}{2}R^2\left[\theta\right]_0^{2\pi}} = \frac{\frac{\Delta P\, R^4}{16\mu L}\int_0^{2\pi} d\theta}{\frac{1}{2}R^2\left[2\pi\right]}
$$

$$
= \frac{\frac{\Delta P\, R^4}{16\mu L}\left[\theta\right]_0^{2\pi}}{\frac{1}{2}R^2\left[2\pi\right]} = \frac{\frac{\Delta P\, R^4\, 2\pi}{16\mu L}}{\frac{1}{2}R^2\left[2\pi\right]} = \frac{2\Delta P\, R^4\, 2\pi}{16\mu L R^2\, 2\pi} = \frac{\Delta P\, R^2}{8\mu L}
$$

Finalmente la velocidad media $<v_z>$ queda representada como

$$
< v_z >= \frac{(P_0 - P_L)\, R^2}{8\mu\, L}
$$

De lo anterior se deduce que $v_{z\,máx} = 2\,\langle v_z\rangle$.

CONCLUSIONES

Este proceso de investigación me ha llevado a descubrir ciertas limitaciones del material bibliográfico porque las personas dedicadas al área de la química introducen el proceso de integración en problemas relacionados con esta área, proporcionan el planteamiento del problema y el resultado esperado, pero no desarrollan la parte matemática. El objetivo principal de este trabajo ha sido el de conjuntar las matemáticas con la química a través del cálculo integral por medio de problemas de aplicación de la integral, en los que se vieran involucradas las diferentes técnicas de integración.

El tema de integración representa un conflicto en los alumnos, principalmente en las aplicaciones de las técnicas de integración, así como también en las aplicaciones de la integral. Los capítulos (II, III y IV) tienen una insoluble secuencia, el segundo es consecuencia del anterior y antecedente del posterior, de tal manera que el alumno pueda llevar el desarrollo lógico matemático, de un nivel general a lo particular, de un nivel de repaso y comprensión a uno de conocimiento y aplicación, es así como este trabajo fue elaborado para facilitar el proceso de comprensión de la integral, dominar las técnicas de integración y la aplicación de la integral. El haber participado en el programa de asesorías en el Departamento de Matemáticas, motivó a abordar este tema, este proyecto fue elaborado pensando en que fuera de gran apoyo para los alumnos de la Facultad de Química y con la finalidad de que comprendan el proceso de integración lo cual les permitirá entender con mayor facilidad temas en los que intervenga dicho proceso, se pretende además que sirva como material de consulta para los alumnos, y a la vez como material de apoyo en las materias de cálculo, física, termodinámica, estadística, entre otras.

Previo a este trabajo, los conocimientos que había adquirido de matemáticas aplicadas al área de la química, habían sido, los suficientes para comprender y acreditar una materia, gracias a este proceso, he conocido y comprendido con mayor profundidad el enlace entre el área de la química con las matemáticas, por lo que debo reconocer la oportunidad brindada por los especialistas del Departamento de Matemáticas, por permitirme colaborar con ellos en el programa de asesorías, sus enriquecedores diálogos, sus amplios conocimientos y constante actualización, que me han permitido llegar hasta este momento; en conclusión, la atención en las asesorías, no sólo me ha beneficiado profesionalmente, sino también ha sido una excelente estrategia para brindar a los alumnos el apoyo que ellos requieren.

Este trabajo surge de la idea de cumplir con el proceso de titulación, sin embargo logré adquirir una experiencia significativa al momento de elaborar cada uno de los capítulos como si fueran una guía que lleva al alumno al conocimiento y a la aplicación de un tema.

APÉNDICE

Tabla de derivadas

1) $\frac{d}{dx}[c] = 0$

2) $\frac{d}{dx}[x] = 1$

3) $\frac{d}{dx}\left[u^n\right] = n\,u^{n+1}\,u'$

4) $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$

5) $\frac{d}{dx}[u\,v] = u\,v' + v\,u'$

6) $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2} \pm \frac{n!}{r!(n-r)!}$

7) $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u}\,u'$

8) $\frac{d}{dx}\left[e^u\right] = e^u\,u'$

9) $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)\,u'$

10) $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)\,u'$

11) $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)\,u'$

12) $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)\,u'$

13) $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u\ \tan u)\,u'$

14) $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u\ \cot u)\,u'$

Tabla de integrales

Potencias

1) $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq 1$

2) $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$

Exponenciales

3) $\int e^u \, du = e^u + C$

4) $\int u \, e^u \, du = u \, e^u - e^u + C$

Senos y Cosenos

5) $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$

6) $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$

7) $\int \operatorname{sen}^2 u \, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u + C$

8) $\int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \operatorname{sen} u + C$

Tangentes y Secantes

9) $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$

10) $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

11) $\int \tan^2 u \, du = \tan u - u + C$

12) $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

Cotangentes y Cosecantes

13) $\int \cot u \, du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$

14) $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C$

15) $\int \cot^2 u \, du = -\cot u - u + C$

16) $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$

Trigonometría

Identidades recíprocas

$\text{sen } x = \dfrac{1}{\csc x}$ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$

$\csc x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$ $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$ $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Identidades de tangente y cotangente

$\tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$ $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

Identidades pitagóricas

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Fórmulas de ángulos dobles

$\text{sen } 2u = 2 \text{ sen } u \cos u$

$\cos 2u = \cos^2 u - \text{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2 u$

$\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$

Fórmulas para reducir la potencia

$\text{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$

$\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$

$\tan^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$

BIBLIOGRAFÍA

1) Atkins, Peter. Química física. Estados Unidos de América, Médica Panamericana, 2008. 1001 p.

2) Bird, Byron. Fenómenos de transporte. España, Reverté, 2004. 22-29 p.

3) Bruce, Munson. Fundamentos de mecánica de fluidos. México, Limusa, 1999. 867 p.

4) Castellan, Gilbert. Fisicoquímica. México, Addison – Wesley Iberoamericana, 1987. 1057 p.

5) Courant, Richard; Robbins Herbert. ¿Qué es la matemática?. España, Aguilar, 1971. 533 p.

6) Currie, I. G. Fundamental mechanics of fluids. U.S.A, Marcel Dekker, 2003. 525 p.

7) Levine, Ira. Química cuántica. España, Prentice Hall, 2001. 714 p.

8) Newman, James. Sigma, El mundo de las matemáticas. España, Grijalbo, 1968. 430 p.

9) Levenspiel, Octave. Ingeniería de las reacciones químicas. España, Reverté, 1986. 638 p.

10) Salas Hille, Etgen. Calculus. España, Reverté, 2002. 708 p.

11) Segel, Irwin. Cálculos de bioquímica. España, Acribia, 1982. 564 p.

12) Spivak, Michael. Calculus. España, Reverté, 2004. 926 p.

13) Wilfred, Kaplan, Donald, Lewis. Cálculo y álgebra lineal. México, Limusa, 1978. 854 p.