



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Determinación Experimental del Inicio de Arrastre de  
Arenas del Estado de Quintana Roo, México**

**T E S I S**

Como requisito para obtener el título de  
**Ingeniero Civil**

Presenta

**VALERIA CHÁVEZ CERÓN**

DIRECTOR DE TESIS

Dr. RODOLFO SILVA CASARÍN



MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

---

A Dios, por todas sus bendiciones, su guía y por haberme permitido terminar esta etapa de mi vida llenándola de aprendizajes. Porque Tuyo, y por Ti, y para Ti, son todas las cosas (Romanos 11:36).

A mi madre, Aurora, y mis hermanos, Vania y Valter, por su amor, apoyo y comprensión incondicionales.

Al Dr. Rodolfo Silva Casarín y al Dr. Edgar Mendoza Baldwin por su confianza, paciencia, dirección y enseñanzas a lo largo de la realización de este trabajo.

A mis compañeros del Grupo de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería y del Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería por su compañerismo, consejos y motivación.

A Miguel Ángel, por acompañarme en este camino.





# Contenido

Introducción .....	3
Costas y litorales en México.....	3
Zona de Estudio.....	5
Objetivos.....	8
Organización del trabajo.....	8
I. Representación Matemática del Oleaje.....	11
I.1 Descripción del oleaje .....	11
I.1.1 Clasificación de las ondas oscilatorias.....	12
I.1.2 Efecto del oleaje bajo la superficie del mar .....	14
I.2 Hipótesis básicas del oleaje.....	14
I.2.1 Proceso estocástico .....	15
I.2.2 Proceso estacionario.....	15
I.2.3 Proceso ergódico.....	16
I.3 Análisis temporal del oleaje .....	16
I.3.1 Corrección del nivel medio .....	16
I.3.2 Discretización de la señal.....	18
I.3.3 Parámetros del oleaje .....	19
I.4 Distribuciones teóricas del oleaje.....	21
I.4.1 Distribuciones de desplazamientos de la superficie del agua .....	21
I.4.2 Distribuciones de los desplazamientos máximos.....	23
I.4.3 Distribuciones de altura de ola.....	23
I.4.4 Distribuciones conjuntas de periodo y altura de ola .....	25
I.4.5 Distribuciones de periodo de ola.....	26
II. Transporte de Sedimentos.....	29
II.1 Introducción.....	29
II.1.1 Tipos de transporte de sedimentos .....	29
II.1.2 Formas en el fondo marino .....	31
II.1.3 Tasa de transporte de sedimentos.....	32
II.2 Formulaciones para estimar el transporte de sedimentos.....	33
II.2.1 Esfuerzo cortante en el fondo.....	33
II.2.2 Transporte por fondo.....	35
II.2.3 Transporte por suspensión .....	38

II.3	Inicio de arrastre bajo oleaje .....	42
II.3.1	Esfuerzo cortante crítico .....	42
II.3.2	Parámetro de Shields crítico .....	45
III.	Evaluación del Inicio de Arrastre.....	49
III.1	Trabajo de Campo .....	49
III.2	Trabajo de Laboratorio.....	51
III.2.1	Propiedades físicas de las muestras .....	51
III.2.2	Selección de muestras representativas .....	53
III.2.3	Metodología experimental para la evaluación del inicio de arrastre.....	57
IV.	Análisis de Resultados .....	67
IV.1	Velocidades registradas.....	67
IV.1.1	Velocidades de inicio de arrastre: PIV.....	67
IV.1.2	Alturas y periodos de ola .....	70
IV.1.3	Velocidades: Vectrinos .....	70
IV.2	Estimación del esfuerzo cortante.....	73
IV.3	Comparación con resultados previos.....	75
IV.4	Curva propuesta.....	77
V.	Conclusiones y Futuras Líneas de Trabajo .....	81
Anexo 1.	Teoría lineal.....	91
Anexo 2.	Tablas de resultados .....	111

---



# Introducción

---



# Introducción

## Costas y litorales en México

En la zona costera se concentra la mayor diversidad de la flora y fauna marina y es ahí donde se llevan a cabo la mayor parte de las actividades humanas relacionadas con el mar. La pesca es una actividad estratégica, pues pueden fundarse sobre ella importantes proyectos de desarrollo local y regional con criterios de sustentabilidad, además de que permite continuar la tarea de salvaguardar la soberanía nacional sobre los recursos marinos y los ecosistemas lagunares costeros ubicados en la Zona Económica Exclusiva de ambos litorales del país. Existe, en el caso de las aguas nacionales, gran diversidad de recursos marinos, por ejemplo, la principal región pesquera del país, situada en el noroeste, es rica en atún, sardina, macarela, corvina, barrilete, bonito y mero; mientras que en las aguas del Golfo de México y del Mar Caribe abundan especies como huachinango, lisa, mojarra, corvina, robalo, jurel, sierra y mero, entre otras.

Por otra parte, los recursos petroleros localizados en la plataforma continental han sido explotados intensamente desde hace décadas, lo cual ha resultado benéfico para el país desde el punto de vista económico, sin embargo, ha generado impactos ambientales negativos a los ecosistemas marinos. Además de estas actividades, las costas mexicanas representan fuentes de generación de recursos económicos para México gracias al interés turístico y recreativo que existe en sus playas, tanto a nivel nacional como internacional.



Figura 1 Barco pesquero, Oaxaca (derecha) y plataforma petrolera AKAL B en Campeche (izquierda)

El Manual de Diseño de Obras Civiles de la Comisión Federal de Electricidad, en su apartado de Hidráulica Marítima, define a la costa como “la frontera entre el mar y la tierra” y a la playa como dicha frontera cuando “está formada por material suelto no consolidado”, indica también que un litoral

es “una porción mayor de la frontera entre el mar y la tierra”, lo cual incluye a la playa y a la región permanentemente cubierta por agua, hasta una zona de aproximadamente 20 metros de profundidad.

Se presentan a continuación datos proporcionados en la última versión de dicho manual, aún en etapa de edición, sobre las características del estado de las costas y litorales en México:

México cuenta con una línea de costa de 23 715 km, de los cuales 43.62% (10 544.45 km) corresponden a su costa frontal, 45.11% (10 697.94 km) a su costa interior y el 11.27% (2 673.12 km) a la línea de costa de sus islas. Del litoral frontal, el 75.73% (7984.66 km) corresponden a costas de arenas (arenas y gravas), el 22.38% (2 359.79 km) a costas rocosas (acantilados y terrazas) y el 1.89% (199.61 km) a bocas de lagunas. De la costa interior o de aguas protegidas, las barras interiores representan el 37.56% (4 017.72 km) y costa interior el 62.44% (6 680.21 km).

Por otra parte, el litoral de la costa del Golfo de México y Mar Caribe mexicanos tiene una longitud de costa frontal de 2 768.838 km, de los cuales 2 559.97 km (92.46%) corresponden a playas de arena, 146.495 km (5.29%) a costas rocosas, y 62.373 km (2.25%) a anchuras de bocananas. La margen interior continental suma una longitud total de 4 900.247 km, de los cuales 1 795.075 km (36.63%) corresponden a la parte interior de las barras y 3 105.172 km (63.37%) a la costa de los cuerpos interiores.

Entidad Federativa	Longitud de Litoral Continental (1)		Longitud de Litoral Continental (2)		Número de Municipios Costeros
	(km)	(%)	(km)	(%)	
<b>Océano Pacífico</b>	<b>8475.06</b>	<b>73.11%</b>	<b>7828</b>	<b>70.38%</b>	<b>99</b>
Baja California	1555.23	13.42%	1493	13.42%	4
Baja California Sur	2705.39	23.34%	2131	19.16%	5
Sonora	1207.81	10.42%	1209	10.87%	13
Sinaloa	640.17	5.52%	622	5.59%	10
Nayarit	300.41	2.59%	296	2.66%	8
Jalisco	341.93	2.95%	351	3.16%	5
Colima	139.22	1.20%	142	1.28%	3
Michoacán	246.76	2.13%	228	2.05%	3
Guerrero	484.94	4.18%	522	4.69%	12
Oaxaca	597.51	5.15%	568	5.11%	26
Chiapas	255.69	2.21%	266	2.39%	10
<b>Golfo de México y Mar Caribe</b>	<b>3117.71</b>	<b>26.89%</b>	<b>3298</b>	<b>29.62%</b>	<b>69</b>
Tamaulipas	457.72	3.95%	433	3.89%	6
Veracruz	745.14	6.43%	720	6.47%	32
Tabasco	183.86	1.59%	200	1.80%	3
Campeche	523.30	4.51%	425	3.82%	7
Yucatán	342.47	2.95%	340	3.06%	13
Quintana Roo	865.22	7.46%	1176	10.57%	8
<b>Total Nacional</b>	<b>11592.77</b>	<b>100.00%</b>	<b>11122</b>	<b>100.00%</b>	<b>168</b>

(1) Datos del Anuario Estadístico por Entidad Federativa, 2005.

(2) Datos obtenidos de la página electrónica <http://cuentame.inegi.org.mx/>

Tabla 1 Extensión de los litorales nacionales y número de municipios costeros por entidad federativa

## Zona de Estudio

De acuerdo con la regionalización costera realizada por Ortíz y De La Lanza (2006), el estado de Quintana Roo pertenece a la región número 14-Costa del Mar Caribe de las catorce en que está dividida la República Mexicana (Figura 2), formando parte de la zona del Caribe Mexicano en la vertiente de las costas del Atlántico.

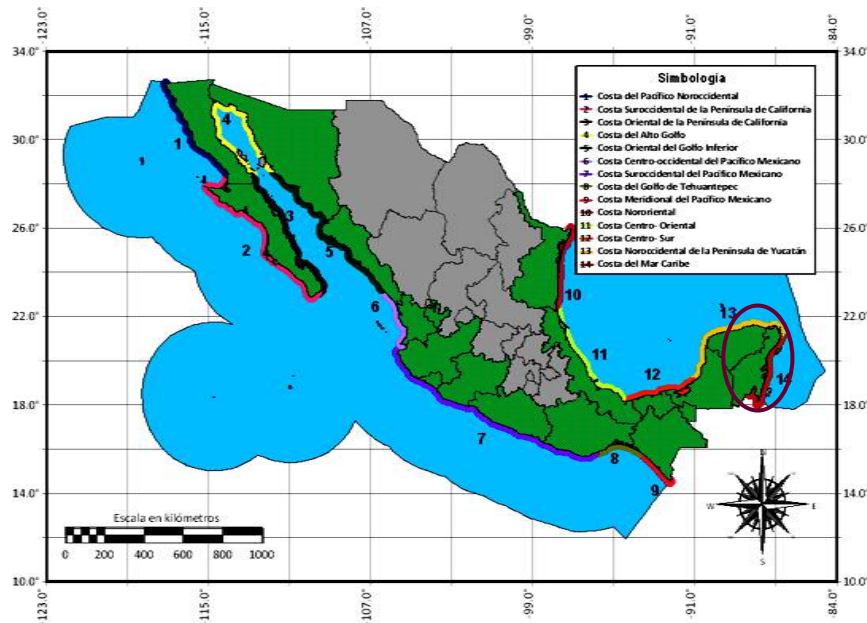


Figura 2 Zonificación del litoral mexicano en 14 regiones

En cuanto a las características específicas de la zona, el clima del estado de Quintana Roo es caliente subhúmedo con lluvias en verano, cuenta con una estrecha barrera arrecifal coralina que corre paralela a la línea de costa de todo el estado, con una traza casi continua absorbe gran parte de la energía que proviene del Mar Caribe y provoca la presencia de una laguna de barrera arrecifal somera.

En la costa son comunes las formas de disolución que se combinan con las de colapso, particularmente en la costa entre Cancún y Tulum. La costa entre Cabo Catoche y Cancún es dominada por cordones arenosos de dunas y de playa, las Bahías de Sian Ka'an constituyen un amplio humedal controlado por la cadena arrecifal, excepto en los trechos que comprende la entrada a las bahías. La costa maya es el último tramo de costa frontal, con bordo de cordón arenoso limitado por humedales y extensas ciénagas.

El sedimento de esta región posee un elevado contenido de carbonatos, superior al 75%, dominando de manera particular las arenas de origen biogénico. El alto contenido de carbonato es un reflejo de la presencia de los sistemas arrecifales localizados sobre la Plataforma Continental del borde oriental de la Península y del litoral de la isla de Cozumel.

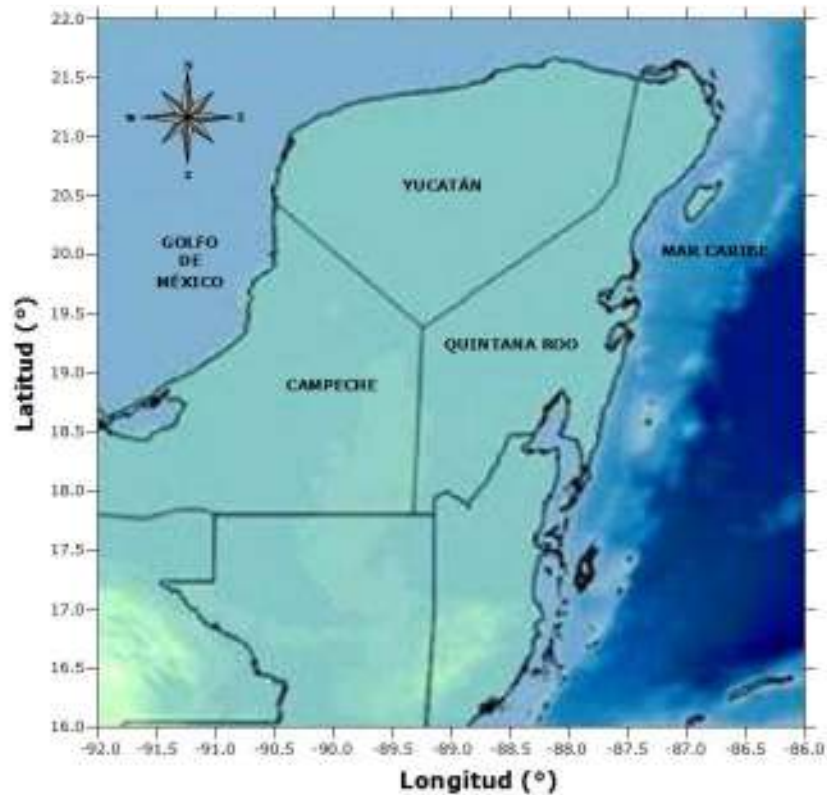


Figura 3 Zona de estudio: Quintana Roo, México

La situación actual de las playas del estado de Quintana Roo presenta grandes problemas de erosión provocada por el transporte de las arenas, lo que implica un alto impacto económico en recuperación y mantenimiento. Dicha erosión consiste en una reducción progresiva del ancho de sus playas ocasionada por la pérdida de arena, lo que resulta en un retroceso de la línea de costa.

La problemática de erosión de playas que se está presentando en la zona de Cancún (Figura 4) y Cozumel es resultado de la interacción de fenómenos naturales climáticos, meteorológicos, hidrodinámicos y sedimentarios, y de las acciones que el hombre lleva a cabo para explotar los recursos naturales sin considerar la sustentabilidad de los mismos.

- × Causas naturales: el estado de Quintana Roo se ubica dentro de la franja con mayor incidencia de trayectorias de huracanes a nivel nacional, lo que lo hace altamente vulnerable a los mismos. Como ejemplo de la dinámica debida a estos fenómenos meteorológicos, al paso de los huracanes Gilberto (1988) y Wilma (2005) tuvo lugar una fuerte erosión costera en las playas de Cancún y depositación en Akumal y Puerto Morelos.

La pérdida de densidad de los arrecifes arrecifes y los eventos climatológicos extremos también son causas de la erosión, así como el desprendimiento de material rocoso en Punta Cancún y la separación de las masas rocosas que conforman Punta Nizuc, lo que ayuda a la migración de sedimentos entre los grandes fragmentos de roca.

- × Causas antropogénicas: la construcción masiva de hoteles y vías de comunicación, la invasión de la duna litoral y de las playas, el acarreo y depósito de material que tuvieron como objetivo ensanchar la isla y preparar las zonas para su urbanización, la falta de políticas públicas asociadas a la conservación de playas como elemento de generación de riqueza y como hábitat de diversas especies de flora y fauna. Ha derivado en el deterioro que actualmente se observa en playas como la de Cancún.



Figura 4 Pérdida de playa en Cancún, Quintana Roo

La pérdida de playas ha llevado a tomar medidas, en algunos casos de emergencia, para reparar los daños, recuperar playas y prevenir la erosión, tales como la alimentación artificial de playas. Los costos de inversión de estas acciones son cuantiosos si se considera que requieren mantenimiento periódico. Además, la capacidad de recuperación de las playas después de los huracanes y el oleaje *swell* persistente en forma oblicua sobre las mismas son factores determinantes para la durabilidad de los proyectos de alimentación artificial de playas. Otro problema presente es que en playas como las de Playa del Carmen, los usuarios han colocado obras de protección en forma indiscriminada, las cuales han sido diseñadas de manera inadecuada, complicando a situación.

Es evidente que las medidas tomadas no han sido suficientes para solucionar el problema, por lo que caracterizar las playas para contar con los parámetros aplicables a ella en relación al transporte de sedimentos, que resulta, por ejemplo, en la erosión de las playas, permitirá entender la dinámica costera, la búsqueda de alternativas de solución y contribuirá a disminuir los grandes costos que este fenómeno ha generado. Dentro de los parámetros utilizados en las expresiones para determinar las tasas de transporte de sedimentos, se encuentra el valor de la velocidad de inicio de arrastre, por lo que en la presente tesis se abordará su estudio.

## Objetivos

Establecer una metodología experimental para la determinación de la velocidad de inicio de arrastre de arenas en presencia de oleaje.

Obtener una curva experimental que describa el comportamiento de la velocidad de inicio de arrastre para sedimentos de la zona, en función de las condiciones hidrodinámicas a las cuales se encuentra sometido, valor requerido en expresiones de tasas de transporte de sedimentos, para así contribuir con los trabajos previos y futuros sobre la caracterización del transporte de sedimentos de la región.

## Organización del trabajo

El presente trabajo está constituido por cinco capítulos, en los dos primeros se describe la teoría relacionada con los conceptos que se manejan en los capítulos posteriores, en el tercero y cuarto se presenta la metodología, resultados experimentales y el análisis de los mismos, finalmente, en el quinto capítulo se exponen las conclusiones del trabajo.

En el primer capítulo se incluyen las hipótesis y consideraciones necesarias para el análisis estadístico del oleaje, así como la metodología para llevarlo a cabo; además, se presentan las diferentes distribuciones que existen para la descripción de la superficie libre del mar y el cálculo de alturas, periodos y altura-periodo de ola.

El segundo capítulo expone la teoría sobre el transporte de sedimentos: la descripción de los tipos de transporte que existen, las formulaciones que han sido propuestas para su estimación, y finaliza con lo referente al inicio de arrastre, tema de estudio central de la presente tesis.

El capítulo tercero describe la metodología experimental utilizada para el estudio del inicio de arrastre de arenas, dividido en dos etapas: la primera consta del trabajo realizado en el campo para la obtención de las muestras analizadas y, la segunda, contiene la exposición del trabajo realizado en el canal de oleaje dentro del laboratorio.

Los resultados obtenidos en las pruebas y su análisis están comprendidos en el cuarto capítulo, verificando la validez de la aplicación de la teoría lineal al fenómeno por medio de los registros obtenidos de los diferentes equipos de medición utilizados, presentando comparaciones con estudios previos sobre el tema y mostrando la relación obtenida entre la velocidad de inicio de arrastre con las características hidrodinámicas del flujo.

En el último capítulo se expresan las conclusiones del estudio realizado y se proponen futuras líneas de investigación sobre el tema.

---



# Capítulo I

## Representación Matemática del oleaje

---



# I. Representación Matemática del Oleaje

## I.1 Descripción del oleaje

El conjunto de ondulaciones continuas que se forman en la superficie del agua, resultado de la acción de fuerzas externas, es conocido como oleaje y se presenta en mares, océanos, ríos, lagos, canales, etc., dichas ondulaciones son variables en el espacio y en el tiempo, pero de manera sencilla pueden idealizarse como una superposición de ondas sinusoidales que se desplazan en cierta dirección de propagación. A continuación se describen los principales parámetros que se identifican en el oleaje.

*Espaciales:*

- × Longitud de onda ( $L$ ): distancia horizontal entre dos crestas adyacentes.
- × Altura de la ola ( $H$ ): distancia vertical desde el máximo de la cresta hasta el mínimo del valle.
- × Amplitud ( $a$ ): distancia vertical desde el máximo de la cresta hasta el nivel medio del mar (NMM).
- × Profundidad ( $h$ ): distancia vertical del nivel medio del mar hasta el fondo del lugar donde se propaga el oleaje.

*Temporales:*

- × Periodo de onda ( $T$ ): tiempo en que dos crestas consecutivas pasan por un mismo punto.
- × Frecuencia ( $f$ ): inverso del periodo de onda.
- × Celeridad ( $c$ ): velocidad de desplazamiento de la onda.

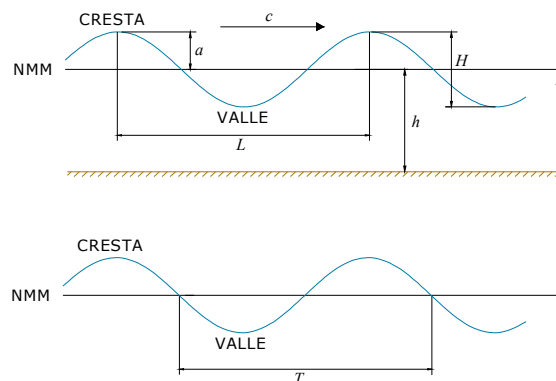


Figura I-1 Parámetros espaciales (arriba) y temporales (abajo) del oleaje

### I.1.1 Clasificación de las ondas oscilatorias

El fenómeno del oleaje es variable en espacio y tiempo, y puede ser clasificado de acuerdo con la profundidad relativa sobre la cual se propaga, la fuerza principal que lo genera o su periodo de onda.

#### Clasificación de acuerdo a la profundidad relativa

Se define como profundidad relativa a la relación de la profundidad ( $h$ ) y la longitud de la ola ( $L$ ), cuyo valor permite establecer el intervalo de clasificación de la zona de propagación del oleaje:

- × Aguas profundas: cuando la profundidad relativa es mayor o igual a  $\frac{1}{2}$ , en esta zona la profundidad no tiene influencia sobre el oleaje.
- × Aguas someras: cuando la profundidad relativa es menor o igual a  $\frac{1}{20}$ , bajo esta condición el oleaje está controlado por la profundidad del agua.
- × Aguas de transición: es la zona intermedia entre las aguas profundas y las aguas someras, es decir, cuando el valor la profundidad relativa se encuentra entre  $\frac{1}{20}$  y  $\frac{1}{2}$ .

#### Clasificación de acuerdo a las fuerza generadoras

- × Oleaje generado por fuerzas meteorológicas: las alteraciones producidas en la superficie del mar se deben a la acción del viento y la presión. En este tipo de oleaje se propaga la perturbación, no la masa de agua, excepto en casos de rotura.

Dentro de esta clasificación se distinguen dos categorías:

**OLEAJE TIPO SEA O LOCAL:** se forma y desarrolla en la zona donde existe acción directa y continua del viento en la superficie (*fetch*), generándose ondas elementales de altura, periodo, fase y dirección de propagación aleatorias e independientes, cuya interferencia da lugar a un aspecto caótico de la superficie del mar. Presenta generalmente ondas muy peraltadas con periodos y longitudes de onda pequeños, aunque en una amplia gama de frecuencias (Figura I-2).

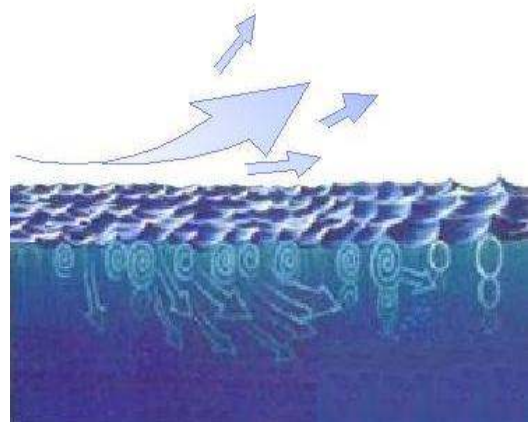


Figura I-2 Oleaje tipo Sea

**OLEAJE TIPO SWELL O DISTANTE:** una vez que el oleaje abandona el área de generación y se propaga a través de superficies marítimas hacia profundidades menores sin estar sometido a la acción significativa del viento, disminuyendo progresivamente hasta su extinción en la costa. Presenta olas menos peraltadas que el oleaje tipo *Sea*, con periodos y longitudes de onda grandes en una gama estrecha de frecuencias. Da lugar una perturbación ordenada y regular de la superficie (Figura I-3).



Figura I-3 Oleaje tipo Swell

- × Mareas: son ondas de periodo largo asociadas a las fuerzas generadoras resultado de de la atracción de la tierra y su hidrósfera por el sol, la luna y otros cuerpos celestes.
- × Tsunamis: olas generadas por fenómenos sísmicos, son desplazamientos bruscos de la masa de agua que se propagan con gran velocidad. La gran energía cinética que adquieren las partículas de agua mientras se desplazan es lo que hace peligroso este fenómeno.

### Clasificación de acuerdo a su periodo de onda

Las ondas que se presentan en el mar pueden clasificarse en diferentes tipos de onda de acuerdo a su periodo como se muestra en la siguiente figura, propuesta por Kinsman (1965), la cual incluye también la principal fuerza generadora, restauradora y la frecuencia a la cual corresponden:

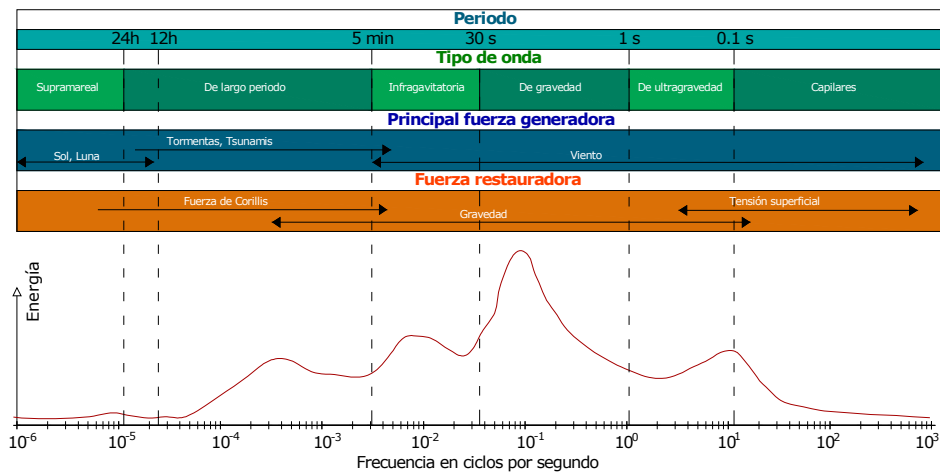


Figura I-4 Clasificación de las ondas

### I.1.2 Efecto del oleaje bajo la superficie del mar

En aguas profundas, el oleaje genera que las partículas del agua bajo la superficie se muevan cíclicamente describiendo trayectorias circulares, lo cual implica que mientras una partícula en la cresta de una ola se mueve en la dirección de propagación de la misma, otra partícula en el valle lo hace en sentido contrario, a este fenómeno se le conoce como **velocidad orbital**. Las partículas situadas en la misma vertical describen órbitas de igual fase, pero sus radios disminuyen con la profundidad, por lo que en profundidades mayores a  $L/2$ , la velocidad se considera despreciable (Figura I-5).

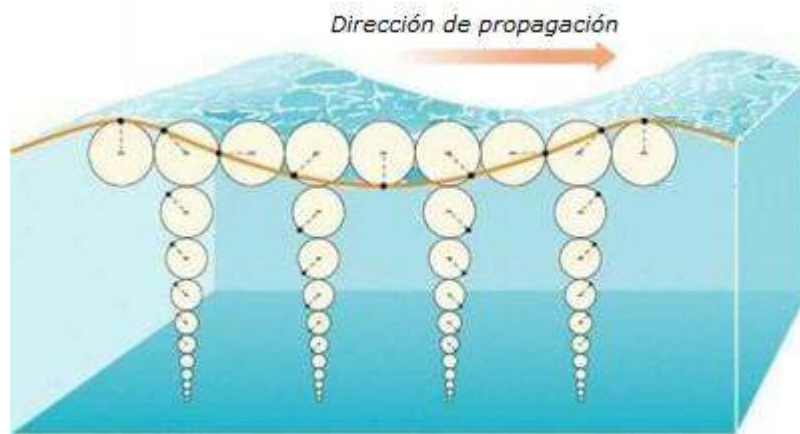


Figura I-5 Velocidades orbitales en aguas profundas

En aguas someras el fondo afecta al desplazamiento vertical de las órbitas provocando que tomen forma elíptica y, si la profundidad es muy pequeña, el movimiento vertical se anula y las trayectorias de las partículas son rectas horizontales.

## I.2 Hipótesis básicas del oleaje

Si se considera el oleaje generado por viento como la superposición lineal de ondas armónicas simples viajando en varias direcciones ( $\theta_i$ ), con diferentes amplitudes ( $a_i$ ), frecuencias angulares ( $\sigma_i$ ) y fases ( $\varepsilon_i$ ), el perfil de la superficie libre resultante (Figura I-6),  $\eta(x,y,t)$ , es:

$$\eta(x,y,t) = \sum_i a_i \cos \left[ \frac{\sigma_i^2}{g} (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - \sigma_i t + \varepsilon_i \right] \quad \text{Ec. I-1}$$

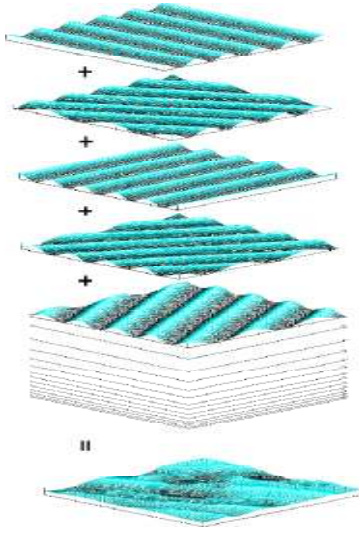


Figura I-6 Estructura del oleaje aleatorio (Pierson et al, 1978)

La ecuación Ec. I-1 expresa que el perfil en el tiempo  $t$  está dado por un número infinito de componentes de olas para todas las direcciones y para todas las frecuencias que pueden tomar valores dentro del intervalo  $0 \leq \theta_i \leq 2\pi$ , y  $0 \leq \sigma_i < \infty$ .

Para el análisis matemático del oleaje se requiere del manejo de los parámetros mencionados, los cuales se suponen variables aleatorias de un proceso estocástico, estacionario y ergódico. Estas hipótesis permiten definir las funciones estadísticas de distribución teóricas de los parámetros, dentro del dominio del tiempo y de la frecuencia, utilizando un número limitado de datos estadísticos obtenidos de una muestra del correspondiente proceso (señal).

### I.2.1 Proceso estocástico

Un proceso estocástico es un proceso empírico que involucra variables aleatorias y que evoluciona en función de otra variable, como el tiempo, donde dichas variables tienen una función de probabilidad que modela su comportamiento.

El oleaje se considera un proceso estocástico Gaussiano debido a que la elevación de la superficie del mar es un evento aleatorio,  $\eta(t)$ , el cual se observa como resultado de una medición, y se le atribuye una función de probabilidad normal, lo que implica que el proceso queda determinado por el valor de la media (Ec. I-2) y la función de autocorrelación (Ec. I-3).

$$\mu_{\eta}(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(t) dt \tag{Ec. I-2}$$

$$R_{\eta\eta}(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta_k(t) \eta_k(t + \tau) dt \tag{Ec. I-3}$$

### I.2.2 Proceso estacionario

Se considera al oleaje como un proceso estacionario por cierto periodo de tiempo, llamado estado de mar, cuando se supone al fenómeno estable energética y estadísticamente, lo cual representa

que durante este lapso el valor medio es una constante y la función de correlación sólo depende de la diferencia  $\tau = t + \tau$ .

### **I.2.3 Proceso ergódico**

Un proceso estacionario es ergódico si cada muestra es igualmente representativa estadísticamente de la totalidad del conjunto, por lo que la media y la función de correlación estadísticas son iguales a los temporales, es decir, con una sola muestra es posible obtener estos valores, aplicables al fenómeno dentro del estado de mar analizado.

## **I.3 Análisis temporal del oleaje**

La realización de un análisis estadístico de la señal del registro de la superficie libre del mar en el tiempo se requiere para obtener una serie de parámetros que sean representativos del estado de mar y, que al introducidos en las funciones de distribución teóricas, permitan la definición probabilística del parámetro y, en su caso, la recomposición, mediante simulación, de una muestra temporal del proceso. Los parámetros estadísticos de interés son: el número de sucesos, la media, la media cuadrática, la media de los  $N/n$  valores mayores y el valor máximo, todos ellos para la altura de ola y periodo.

Debido a que el registro medido es la fuente de datos muestrales para el análisis, se requiere de un tratamiento previo para evitar errores que puedan alterar la información estadística que se obtenga de ellos, el cual consiste en la corrección del nivel medio y la discretización de la señal, para posteriormente hacer la estimación de los parámetros y las velocidades orbitales y la determinación de la dirección del oleaje.

### **I.3.1 Corrección del nivel medio**

La corrección de nivel medio se realiza con la finalidad de eliminar la influencia de ondas largas sobre el nivel medio del registro; restando el valor medio ( $\bar{\eta}_i$ ) a cada uno de los datos ( $\eta_i$ ) se tendrán los valores corregidos.

---



El valor medio puede ser de orden cero (promedio aritmético), de primer orden (recta) o de segundo orden (parábola), teniendo diferentes aplicaciones cada uno de ellos.

### Promedio Aritmético

Cuando las ondas largas no causan un efecto significativo sobre el registro, utilizar la media aritmética resulta adecuado para la corrección:

$$\bar{\eta}_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \eta_n \quad \text{Ec. I-4}$$

### Corrección lineal

Si el registro está superpuesto a una onda de marea semidiurna y tiene una duración menor al periodo de la marea, y se encuentra en la franja de ascenso de la misma, es conveniente realizar la corrección utilizando el valor medio de orden cero, que implica realizar un ajuste por mínimos cuadrados para obtener una variación lineal:

$$\bar{\eta}_n = A_0 + A_1 n \quad : \quad n = 1, 2, \dots, N \quad \text{Ec. I-5}$$

donde

$$A_0 = \frac{N_2 Y_0 - N_1 Y_1}{N_0 N_2 - N_1^2}, \quad A_1 = \frac{N_0 Y_1 - N_1 Y_0}{N_0 N_2 - N_1^2}, \quad \text{Ec. I-6}$$

$$N_r = \sum_{n=1}^N n^r, \quad Y_r = \sum_{n=1}^N n^r \eta_n \quad \text{Ec. I-7}$$

### Corrección parabólica

La corrección parabólica se utiliza para registros en los que se observa una gran influencia de marea y la alteración provocada puede ajustarse a una parábola. Al igual que en la corrección lineal, se utiliza el método de mínimos cuadrados para realizar el ajuste:

$$\bar{\eta}_n = B_0 + B_1 n + B_2 n^2 \quad : \quad n = 1, 2, \dots, N \quad \text{Ec. I-8}$$


---

donde

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{1}{\Delta} \left[ Y_0 (N_2 N_4 - N_3^2) + Y_1 (N_2 N_3 - N_1 N_4) + Y_2 (N_1 N_3 - N_2^2) \right], \\
 B_1 &= \frac{1}{\Delta} \left[ Y_0 (N_2 N_3 - N_1 N_4) + Y_1 (N_0 N_4 - N_2^2) + Y_2 (N_1 N_2 - N_0 N_3) \right] \\
 B_2 &= \frac{1}{\Delta} \left[ Y_0 (N_1 N_3 - N_2^2) + Y_1 (N_1 N_2 - N_0 N_3) + Y_2 (N_0 N_2 - N_1^2) \right] \\
 \Delta &= N_0 N_2 N_4 + 2 N_1 N_2 N_3 - N_2^3 - N_0 N_3^2 - N_1^2 N_4
 \end{aligned}
 \tag{Ec. I-9}$$

### I.3.2 Discretización de la señal

Después de haber corregido el nivel medio, se requiere calcular las alturas y periodos de ola individuales, utilizando algunos de los siguientes procedimientos (Figura I-7):

- × Método de pasos ascendentes por cero
- × Método de pasos descendentes por cero
- × Método de distancia entre crestas
- × Método de distancia entre valles

#### Método de pasos ascendentes por cero

Para definir una ola, se buscan los datos  $\eta_i$  que cumplan con  $\eta_i \cdot \eta_{i+1} < 0$  y  $\eta_{i+1} > 0$ , los cuales serán los pasos ascendentes que delimitarán una ola. El tiempo que hay entre dos pasos ascendentes consecutivos es el periodo de la ola; la altura se determina como la diferencia del valor máximo y el mínimo encontrado dentro del periodo. Para determinar los valores máximos se buscan tres puntos que cumplan con  $\eta_{i-1} < \eta_i$  y  $\eta_i > \eta_{i+1}$ , y para lo mínimos  $\eta_{i-1} > \eta_i$  y  $\eta_i < \eta_{i+1}$  los cuales deben ser ajustados parabólicamente para encontrar el valor deseado.

#### Método de pasos descendentes por cero

Un paso descendente satisface la condición  $\eta_i \cdot \eta_{i+1} < 0$  y  $\eta_{i+1} < 0$ , y las olas, alturas y periodos quedan definidos de la misma manera que en el métodos de pasos ascendentes.

#### Método de distancia entre crestas

Cada ola queda delimitada por dos máximos (crestas) consecutivos.

### Método de distancia entre valles

Cada ola queda delimitada por dos mínimos (valles) consecutivos.

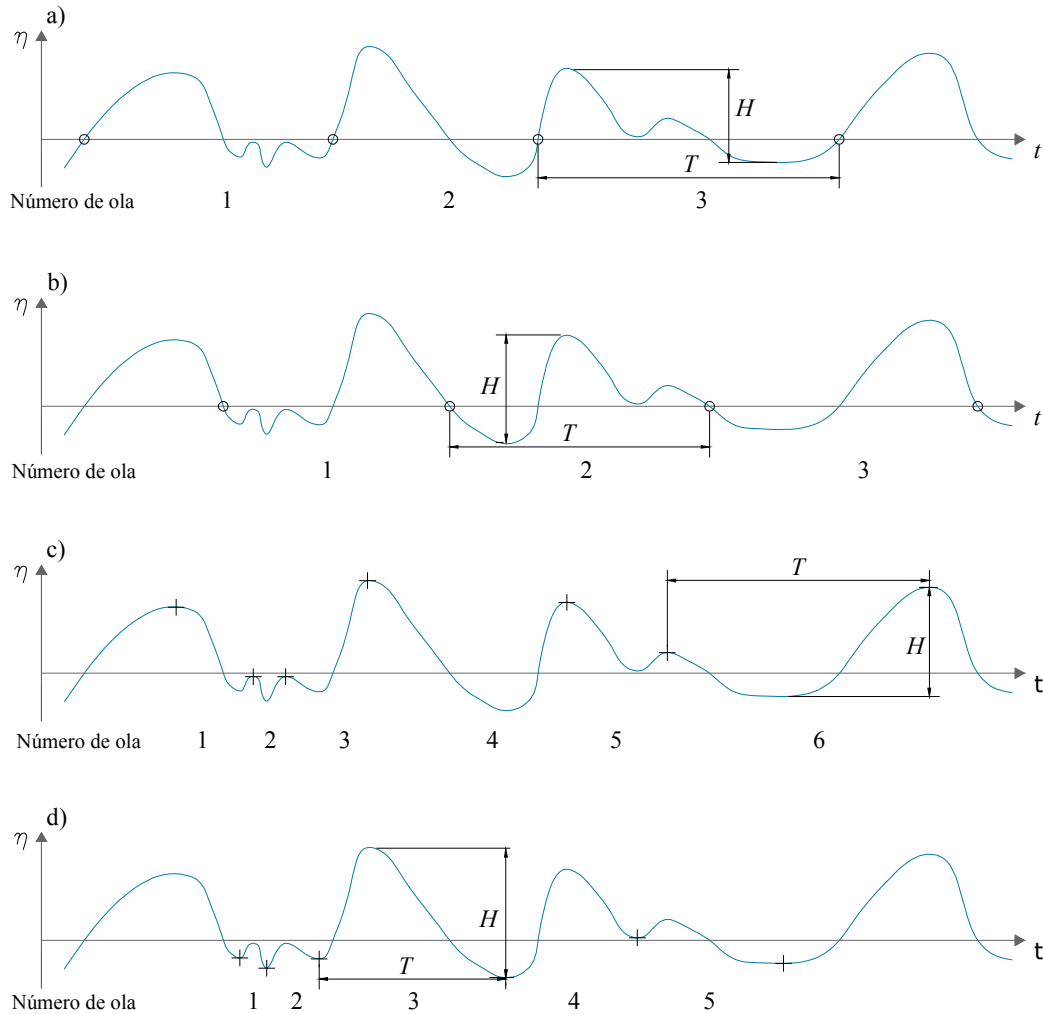


Figura I-7 Discretización de un registro de oleaje por los diferentes métodos. a) Pasos ascendentes por cero. b) Pasos descendentes por cero. c) Distancia entre crestas. d) Distancia entre valles

### I.3.3 Parámetros del oleaje

Una vez obtenidos los valores de las elevaciones de superficie del agua ( $\eta_i$ ), con el nivel medio corregido, para todos los datos recolectados ( $N$ ), y el número de olas ( $N_0$ ), sus alturas ( $H_i$ ) y periodos ( $T_i$ ), es posible determinar los parámetros estadísticos de interés previamente mencionados, que permitirán definir un estado de mar.

- × Variación del nivel medio del mar:

$$\bar{\eta}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i \quad \text{Ec. I-10}$$

- × Variación de la media cuadrática de superficie del agua:

$$\eta_{rms}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i^2 \quad \text{Ec. I-11}$$

- × Altura media y el periodo medio:

$$\bar{H} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} H_i \quad \text{Ec. I-12}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} T_i \quad \text{Ec. I-13}$$

- × Altura cuadrática media:

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} H_i^2} \quad \text{Ec. I-14}$$

- × Altura de ola 1/n, media aritmética de las N/n olas más altas:

$$H_{1/n} = \frac{n}{N} \sum_{i=1}^{N/n} H_i \quad \text{Ec. I-15}$$

- × Altura de ola significativa o altura un tercio, media aritmética del tercio de olas de mayor altura del registro:

$$H_s = H_{1/3} = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^{N/3} H_i \quad \text{Ec. I-16}$$

- × Periodo de ola 1/n, media aritmética de los N/n periodos correspondientes a las N/n olas más altas del registro:

$$T_{1/n} = \frac{n}{N} \sum_{i=1}^{N/n} T_i \quad \text{Ec. I-17}$$

---

- × Periodo de ola significativa o periodo un tercio, media aritmética del tercio de los periodos correspondientes al tercio olas de mayor altura del registro:

$$T_s = T_{1/3} = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^{N/3} T_i \quad \text{Ec. I-18}$$

### Parámetros de velocidades orbitales y dirección del oleaje

Si se tiene el registro de velocidades orbitales del oleaje, los parámetros de interés son los valores máximos y la media para sus componentes  $U_x$  y  $U_y$ . Ubicadas en un plano cartesiano XY, rotando el sistema de referencia lo grados que se encuentre rotado el aparato de medición respecto al Norte, la tendencia de los datos determinará la dirección del oleaje, cuyo sentido será hacia la costa.

## I.4 Distribuciones teóricas del oleaje

En ocasiones, los parámetros estadísticos más representativos para definir un estado de mar, resultan de alcance limitado para una descripción más detallada del oleaje, por lo que el uso de funciones de distribución de probabilidad es la herramienta adecuada para ello.

Las distribuciones de probabilidad existentes para el estudio de las características del oleaje se dividen en:

- × Distribuciones de desplazamientos de la superficie del agua (normal, no lineal)
- × Distribuciones de desplazamientos máximos
- × Distribuciones de altura de ola
- × Distribuciones de periodos de ola, y
- × Distribuciones conjuntas de periodo y altura de ola

### I.4.1 Distribuciones de desplazamientos de la superficie del agua

#### Distribución normal

Como se mencionó en la descripción de las hipótesis del oleaje, el análisis se simplifica considerándolo un proceso estocástico gaussiano y resultado de la superposición de numerosos trenes de olas, con media  $\bar{\eta}$  y varianza  $\bar{\sigma}_\eta^2$ . Utilizando el teorema del límite central se establece que la

variación de la superficie libre,  $\eta$ , es una variable aleatoria normalmente distribuida y se puede definir la función de densidad de probabilidad para dicha función como:

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}_\eta} e^{-\left[\frac{(\eta-\bar{\eta})^2}{2\bar{\sigma}_\eta^2}\right]} \quad \text{Ec. I-19}$$

La cual también puede escribirse también de la forma normalizada cambiando la variable  $\eta$  por  $\xi = \frac{\eta - \bar{\eta}}{\bar{\sigma}_\eta}$ , quedando definida como:

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)} \quad \text{Ec. I-20}$$

Esta distribución (Ec. I-20) tiene la propiedad de tener una media igual a cero y una varianza igual a 1,  $N(0,1)$ .

Para obtener la función de distribución de probabilidad, se tiene que  $p(\eta) = p(\xi) \frac{d\xi}{d\eta}$ , y considerando  $\bar{\eta} = 0$  y  $\bar{\sigma}_\eta = \eta_{rms}$ , la función de densidad de probabilidad finalmente resulta:

$$p(\eta) = \frac{1}{\eta_{rms}\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{\eta_{rms}^2}\right)} \quad \text{Ec. I-21}$$

## Distribución no lineal

Cuando el oleaje se propaga en profundidades bajas o intermedias, o experimenta el fenómeno de rotura, tiene un comportamiento que no puede ser descrito utilizando un modelo gaussiano, pues la superficie libre sufre alteraciones que lo alejan de dicho modelo. Para el estudio de estados de mar que tienen estas características existen las siguientes dos propuestas:

- × Series tipo A de Gram-Charlier, desarrollada por Longuet-Higgins (1963) aplicando la función de generación acumulada.
- × Distribución basada en un desarrollo de Stokes al segundo orden, desarrollada por Tayfun (1980).
- × Distribución basada en un desarrollo de Stokes al tercer orden, desarrollada por Huang *et al* (1983).

### I.4.2 Distribuciones de los desplazamientos máximos

Cartwright y Longuet-Higgins desarrollaron la siguiente expresión, basada en los trabajos de Rice (1945), para determinar la función distribución de probabilidad de los desplazamientos máximos o crestas:

$$P(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \varepsilon \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{\varepsilon} \right)^2 \right] + (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \beta \exp \left( -\frac{1}{2} \beta^2 \right) \cdot \int_{-\infty}^{\frac{\beta}{\varepsilon}(1-\varepsilon^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right] \quad \text{Ec. I-22}$$

donde

$$\varepsilon = \left[ 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \right]^{1/2} \quad (\text{parámetro de anchura espectral de cuarto orden}) \quad \text{Ec. I-23}$$

$$\beta = \frac{\eta_{\max}}{\sqrt{m_0}} \quad \text{Ec. I-24}$$

$m_0$  momento de orden cero

$m_2$  momento de segundo orden

$m_4$  momento de cuarto orden

Para obtener la distribución de desplazamientos mínimos se requiere sumar  $\pi$  a cada fase del modelo, logrando así no afectar el carácter aleatorio y cambiar los signos de los valores de superficie obtenidos en los máximos, esto implica que el resultado será una función de probabilidad simétrica, respecto al nivel medio, a la función de los desplazamientos máximos.

### I.4.3 Distribuciones de altura de ola

Al igual que en el caso de la superficie libre del mar, para la definición del comportamiento de la altura de ola por medio de una función de probabilidad deben aceptarse ciertas hipótesis que hagan posible el desarrollo de dicha función. Es importante mencionar que las propuestas que existen no aceptan todas las hipótesis, pues algunas de ellas son mutuamente excluyentes, pero, en general, todas ellas asumen que la distribución del desplazamiento de la superficie libre es normal y que se trata de un oleaje describe un espectro de banda estrecha (correspondiente a un oleaje de tipo *Swell*).

Por ejemplo, la distribución tipo Rayleigh, propuesta por Cartwright y Longuet-Higgins (1956), define la función de probabilidad del valor de las alturas de ola de un estado de mar tipo *Swell* puro, y,

basado en la existencia de una correlación perfecta entre crestas y valles, establece que la altura de ola es el doble del valor máximo ( $2\eta_{m\acute{a}x}$ ), por lo que la probabilidad de que la altura de ola tome un valor  $H/H_{rms}$  (de manera adimensional) queda expresada como:

$$p\left(\frac{H}{H_{rms}}\right) = 2\frac{H}{H_{rms}} e^{-\left(\frac{H}{H_{rms}}\right)^2} \quad \text{Ec. I-25}$$

Propuesta por Carter (1986), existe una distribución de altura de ola que asume que los valores de las crestas y los valles siguen una distribución tipo Rayleigh y que entre ellas no existe correlación alguna, lo cual resulta acertado para estados de mar muy desordenados. Partiendo de la distribución de probabilidad conjunta de ambas variables, Carter define la distribución de probabilidad de la altura de ola como:

$$p(H) = \frac{1}{4\sqrt{m_0}} e^{-\left(\frac{H^2}{4m_0}\right)} \left\{ 2\frac{H}{\sqrt{m_0}} e^{-\left(\frac{H^2}{4m_0}\right)} + \sqrt{\pi} \left(\frac{H^2}{m_0} - 2\right) \text{Erf}\left(\frac{H}{2\sqrt{m_0}}\right) \right\} \quad \text{Ec. I-26}$$

donde la función error, Erf, está definida como:

$$\text{Erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-u^2} du \quad \text{Ec. I-27}$$

para

$$u = \frac{y_2}{2} \quad \text{Ec. I-28}$$

$$y_2 = \beta_1 - \beta_2 \quad \text{Ec. I-29}$$

donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son las amplitudes de cresta y valle adimensionales, respectivamente.

Otra de las hipótesis existentes es que la correlación entre crestas y valles es intermedia, lo que implica que el valor de la misma toma un valor entre 1 y 0, y que su comportamiento está definido por una distribución tipo Rayleigh bivariada, lo cual establece la propuesta hecha por Rice (1944).

En aguas someras, como se ha mencionado, el oleaje se aleja de un comportamiento normal y está determinado por la profundidad del fondo. Glukhovskiy realizó una modificación a la distribución



tipo Rayleigh donde considera una profundidad finita, la cual afecta directamente el valor de las alturas de ola obtenidas con su distribución de probabilidad.

#### I.4.4 Distribuciones conjuntas de periodo y altura de ola

Existen fenómenos en que la variación del periodo de la ola tiene una importancia significativa, como es el caso del *run-up* o de la estabilidad de piezas en un rompeolas, por lo que la determinación de las distribuciones conjuntas de altura son de interés.

Si se considera una distribución normal, un espectro de banda estrecha para el oleaje y la asimetría en la distribución de los periodos, se tiene la distribución propuesta por Cavanié *et al*:

$$p(h, \tau) = \frac{\alpha^3 h^2}{4\sqrt{2\pi\varepsilon(1-\varepsilon^2)}\bar{\tau}^4 \tau^5} e^{-\frac{h^2(\bar{\tau}\tau)^4}{8\varepsilon^2}((\bar{\tau}^2\tau^2 - \alpha^2)^2 + \beta^2\alpha^4)} \quad \text{Ec. I-30}$$

donde

$$h = \frac{H}{\sqrt{m_0}} \quad \text{Ec. I-31}$$

$$\tau = \frac{T}{\bar{\tau}T_C} \quad \text{Ec. I-32}$$

$$T_C = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \quad \text{Ec. I-33}$$

$$\bar{\tau} = \left( \frac{T}{T_C} \right) \quad \text{Si } \varepsilon \leq 0.95 \rightarrow \bar{\tau} = 1 \quad \text{Ec. I-34}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right) \quad \text{Ec. I-35}$$

$$\beta^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \quad \text{Ec. I-36}$$

Como se observa, la distribución de Cavanié *et al* involucra el parámetro de anchura espectral de cuarto orden,  $\varepsilon$ , el cual, al elevar a la cuarta potencia la función de densidad espectral, provoca que cualquier error existente sea destacado, por lo que el uso de un parámetro de menor orden resulta

conveniente. La distribución de Longuet-Higgins presenta un parámetro de anchura espectral de segundo orden,  $\nu$ , la cual puede escribirse de manera dimensional de la siguiente manera:

$$p(H, T) = \left( \frac{H^2 \bar{T}}{8\nu \sqrt{2\pi m_0^{3/2} T^2}} \right) e^{-\frac{H^2}{8m_0} \left[ 1 + \frac{1}{\nu^2} \left( 1 - \frac{\bar{T}}{T} \right)^2 \right]} L(\nu) \quad \text{Ec. I-37}$$

#### I.4.5 Distribuciones de periodo de ola

Pueden escribirse también distribuciones que modelen la probabilidad de que el periodo tome ciertos valores sin involucrar la altura de ola. A partir de las distribuciones conjuntas de periodo y altura de ola, se han hecho las siguientes propuestas:

Distribución de Bretschneider (1959)

$$p(T) = 2.7 \frac{T^3}{\bar{T}^4} e^{-0.675 \left( \frac{T}{\bar{T}} \right)^4} \quad \text{Ec. I-38}$$

Distribución de Longuet-Higgins (1975)

$$p(T) = \frac{\nu^2 T_{01}^2}{2 \left[ \nu^2 T_{01}^2 + (T - T_{01})^2 \right]^{3/2}} \quad \text{Ec. I-39}$$

Distribución Cavanié et al. (1976)

$$p(T) = \frac{\alpha^3 \beta^2 \bar{\delta}^2 T}{\bar{T}^2 \left[ \left( \frac{\bar{\delta}^2 T^2}{\bar{T}^2} - \alpha^4 \beta^2 \right) \right]^{3/2}} \quad \text{Ec. I-40}$$

Distribución Longuet-Higgins (1983)

$$p(T) = \frac{L(\nu) \bar{T}}{2\nu T^2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\bar{T}}{T} \right)^2 \frac{1}{\nu^2} \right]^{-3/2} \quad \text{Ec. I-41}$$

# Capítulo II.

## Transporte de sedimentos

---



## II. Transporte de Sedimentos

### II.1 Introducción

Se da el nombre de sedimentos a las partículas procedentes de rocas o suelos no consolidados, las cuales son transportadas por el agua o por el viento, y que, después de cierto acarreo, son depositados a lo largo de los cauces de los ríos, en lagos, lagunas, en el mar y en las partes bajas de las cuencas.

Las arenas son aquellos sedimentos que pueden caracterizarse con un diámetro en el rango de 0.062 a 2 mm, de acuerdo a la escala de tamaños de grano de Wentworth. Los finos se clasifican en arcillas y limos, los cuales tienen diámetros menores a las arenas y sus propiedades son fuertemente influenciadas por el fenómeno de cohesión. Existen también las gravas, con diámetros mayores a 2 mm, para las cuales su permeabilidad es uno de los factores determinantes de su comportamiento. En la naturaleza se pueden encontrar zonas donde existan estos tipos de sedimentos o combinación de ellos, de forma que en esas condiciones sus propiedades se ven alteradas, por ejemplo, una mezcla de finos y arenas es más resistente a la erosión que fuera de la mezcla, o combinada grava con arena se reduce su permeabilidad.



Figura II-1 De izquierda a derecha: Grava, arenas y arcilla

#### II.1.1 Tipos de transporte de sedimentos

En el mar, las arenas pueden ser movidas por corrientes, por oleaje, o, como sucede comúnmente, por corrientes y oleaje en conjunto. El movimiento puede describirse en tres procesos: inicio de arrastre, transporte y sedimentación, los cuales ocurren simultáneamente y pueden interactuar entre ellos.

- × Inicio de Arrastre: cuando las fuerzas de arrastre que actúan sobre los granos tienen una magnitud tal que cualquier incremento produciría el movimiento, se dice que el sedimento se encuentra bajo condiciones críticas, y una vez superadas inicia el transporte. Las fuerzas que tienden a mover o arrastrar los sedimentos son la presión hidrodinámica y las fuerzas de viscosidad del flujo, mientras que las fuerzas que ofrecen resistencia al movimiento están relacionadas con el tamaño del grano y la distribución de los granos que existen en el fondo. Las fuerzas que resisten el movimiento para los sedimentos de mayor tamaño, tales como gravas y arenas, es el peso de la partícula, mientras que para los finos son las fuerzas cohesivas.
- × Transporte: una vez que se ha iniciado el movimiento, el transporte se clasifica en dos tipos, de acuerdo a la forma en que se realiza, y sumados conforman el transporte total del sedimento.
  - El instante en que los granos se encuentran rodando, en saltación o deslizándose sobre la cama de arena, se conoce como **transporte por fondo** y es la forma dominante de transporte para flujos de baja velocidad o granos de gran tamaño. El rodamiento ocurre cuando las partículas están en continuo contacto con fondo, en caso de que dicho fondo no sea uniforme, las partículas generalmente no se mantienen en contacto continuo sino que saltan.
  - Si la velocidad del flujo es mayor y los granos de menor tamaño, la arena sufre el **transporte por suspensión**, lo que implica, como su nombre lo indica, que los granos se suspenden una considerable altura sobre el fondo y siguen su movimiento gracias a las corrientes. En general, se puede considerar que granos de 2 mm en adelante, sufren transporte de fondo, y granos menores a 0.2 mm, por suspensión.

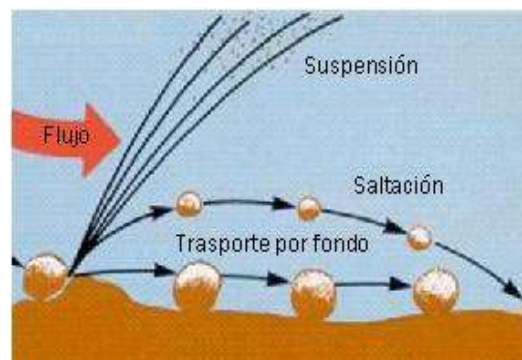


Figura II-2 Tipos de transporte de sedimentos

- × Sedimentación: es el proceso en el que los granos se depositan sobre el fondo después de haber sido transportados.

## II.1.2 Formas en el fondo marino

Como resultado del transporte, el fondo puede tomar diferentes configuraciones, las cuales son de gran importancia por su impacto en la resistencia al flujo, debido a la rugosidad que generan, y por su contribución al transporte. Las diferentes configuraciones que puede tomar el fondo del mar son: cama plana, rizos, dunas y antidunas.

- × **Cama plana sin movimiento:** se presenta un fondo plano si las condiciones hidrodinámicas no han superado las condiciones críticas, es decir, no se ha iniciado el movimiento.
- × **Rizos:** son ondulaciones triangulares que cuando son formados por corrientes, presentan una pendiente suave aguas arriba y una pendiente más brusca aguas abajo, su formación está condicionada por la velocidad del flujo y su tamaño por el tamaño de los granos. Bajo la acción del oleaje, tienden a orientarse paralelamente a las crestas de las olas y son simétricos respecto a su cresta, forman un patrón regular de líneas paralelas que puede ocasionalmente romperse por bifurcaciones en la configuración, y pueden presentarse en combinación con dunas. Reineeck et al. (1971) establecen como longitud máxima de la ondulación para considerarse rizo los 60 cm.

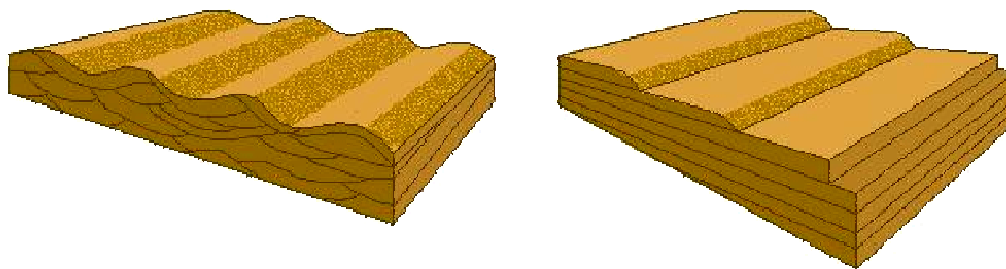


Figura II-3 Configuración de rizos formados por oleaje (izquierda) y por corriente (derecha)

- × **Dunas:** son ondulaciones de mayor longitud que los rizos, llegando a medir varios metros, con las mismas características de pendientes, pero para su formación se requiere de un flujo de mayor velocidad y un mayor transporte de sedimentos, la cual depende del tamaño de los granos, a diferencia de los rizos.
- × **Cama plana con movimiento:** también puede presentarse el fondo plano una vez formadas las ondulaciones. Si el flujo continúa con alta velocidad provoca que dichas ondulaciones sean lavadas, es decir, que desaparezcan, lo cual implica que la rugosidad del fondo disminuirá considerablemente.

- × **Antidunas:** son ondulaciones que se forman sobre el fondo plano, en función de las características del flujo y del sedimento, las cuales crecen en sentido contrario al flujo, presentándose en aguas someras y flujos severos. Poseen una inclinación baja en sentido contrario al flujo, lo cual permite identificarlas, aunque su preservación es de muy corta duración.

### II.1.3 Tasa de transporte de sedimentos

Un parámetro muy utilizado en la práctica es la tasa de transporte de sedimento, la cual indica la cantidad de sedimento que atraviesa un plano vertical de ancho unitario, perpendicular a la dirección del flujo, por unidad de tiempo. Dicha tasa se maneja, generalmente, en toneladas por metro por día ( $\text{ton m}^{-1} \text{d}^{-1}$  o  $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$  en S.I.), llamada **tasa de transporte másica**, aunque la cantidad de sedimento puede expresarse no sólo en masa, sino también en volumen ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$  en S.I.), y en tal caso es conocida como **tasa volumétrica de transporte**. Por ejemplo, una aplicación de ella es el estudio de la evolución morfológica de las playas, la cual depende de diferentes factores (Figura II-4) y puede analizarse por medio de las tasas de aporte y pérdida del sedimento. Se determina que una zona se encuentra en proceso de erosión si la pérdida es mayor que el aporte, en caso contrario, se encuentra en acreción.



Figura II-4 Balance sedimentario



## II.2 Formulaciones para estimar el transporte de sedimentos

El fenómeno físico que define cómo el agua mueve al sedimento no ha podido ser descrito con precisión, pues aún no es comprendido del todo, es por eso que existen numerosas fórmulas propuestas para predecir las tasas del transporte de sedimentos. Dichas tasas suelen estar en función de las propiedades del fluido, de las condiciones del flujo y de las propiedades del sedimento, tales como el tamaño del grano, forma, densidad, velocidad de caída y ángulo de reposo.

### II.2.1 Esfuerzo cortante en el fondo

Los efectos de las fuerzas hidrodinámicas del flujo sobre los sedimentos se reflejan, en primer lugar, a través de la fuerza cortante (o de fricción) que ejercen sobre el fondo. Esto se expresa en términos del **esfuerzo cortante en el fondo** ( $\tau_0$ ), que es esta fuerza ejercida por el flujo por unidad de área de la cama de sedimento, el cual suele manejarse en unidades de velocidad, conocida como **velocidad de cortante** ( $u_*$ ), definida de la siguiente manera:

$$u_* = \left( \frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{Ec. II-1}$$

donde  $\rho$  es la densidad del agua.

Es importante destacar que esta velocidad de cortante no corresponde a una velocidad real del flujo, pero se define de esa manera únicamente por conveniencia matemática.

Un manejo matemático muy común en el estudio del transporte de sedimentos es el uso del **parámetro de Shields** ( $\theta$ ), el cual es un valor adimensional del esfuerzo cortante ( $\tau_0$ ), expresado en términos de la aceleración de la gravedad ( $g$ ), la densidad del agua ( $\rho$ ), la densidad del sedimento ( $\rho_s$ ) y el diámetro de los granos ( $d$ ), quedando definido como:

$$\theta = \frac{\tau_0}{g(\rho_s - \rho)d} \quad \text{Ec. II-2}$$

El valor requerido del diámetro de los granos debe corresponder a un valor que sea representativo de la muestra en conjunto, pues incluso las camas de arena que tienen una forma ordenada en la naturaleza, tienen granos de diferentes tamaños dentro de cierto intervalo. El diámetro mediano de la muestra “ $d_{50}$ ” es el más utilizado, el cual es el valor que, en masa, la mitad de las

partículas tendrán diámetro mayor a él y la otra mitad serán de menor tamaño. En general, el diámetro  $d_n$  corresponde al valor para el cual el  $n\%$  de la masa de los granos de la muestra tiene diámetros menores.

El esfuerzo cortante total en el fondo ( $\tau_0$ ), está constituido por diferentes contribuciones y pueden manejarse con la siguiente notación (Soulsby, 1997):

Notación	Contribución	Descripción
$\tau_{0s}$	Fricción superficial	La fuerza producida por el flujo sobre la superficie del sedimento
$\tau_{0f}$	Por la forma del fondo	Presión asociada al flujo sobre rizados formados en el fondo
$\tau_{0r}$	Transporte de sedimento	Esfuerzo causado por el impulso transferido para mover los granos

De esta forma, el esfuerzo total queda determinado como la suma de las contribuciones descritas:

$$\tau_0 = \tau_{0s} + \tau_{0f} + \tau_{0r} \quad \text{Ec. II-3}$$

Cuando el fondo tiene configuración de cama plana, la única contribución presente es la de fricción superficial, por lo que el esfuerzo total será igual a  $\tau_{0s}$ . Esto puede ocurrir cuando se trata de sedimento grueso ( $d_{50} > 0.8$  mm), para sedimentos finos pueden presentarse tanto configuración en rizados como cama plana.

El esfuerzo generado no sólo depende de la velocidad del flujo, sino también de la rugosidad de la cama de sedimento, la cual puede ser determinada utilizando la rugosidad de Nikuradse ( $k_s$ ) o la longitud rugosa ( $z_0$ ), en el caso de fondo plano, relacionadas entre sí de la siguiente forma:

$$z_0 = \frac{k_s}{30} \quad \text{Ec. II-4}$$

Un valor comúnmente utilizado para la rugosidad se determina en función del diámetro del grano, partiendo de la convención de que el esfuerzo provocado por la fricción superficial sólo depende del tamaño de las partículas y de que se trata de un fondo plano, se escribe como:

$$k_s = 2.5d_{50} \quad \text{Ec. II-5}$$

Combinando la Ec. II-4 y la Ec. II-5 se puede escribir el valor de la longitud rugosa en función del diámetro:

$$z_0 = \frac{d_{50}}{12} \quad \text{Ec. II-6}$$

Por otro lado, existen diferentes mecanismos a través de los cuales se genera el esfuerzo cortante en el fondo, por lo cual resulta conveniente diferenciarlos en concepto y notación:

- × Generado por corriente, utiliza la notación general  $(\tau_0, u_*, \theta)$  que indica los valores promedio que puede tomar el esfuerzo cortante, su velocidad de cortante y el parámetro de Shields asociados.
- × Generado por oleaje, utiliza el subíndice “w”  $(\tau_w, u_{*w}, \theta_w)$  para denotar las amplitudes de los valores oscilatorios del esfuerzo cortante, su velocidad de cortante y el parámetro de Shields asociados.
- × Generado por corriente y oleaje en conjunto, utiliza el subíndice “m”  $(\tau_m, u_{*m}, \theta_m)$  que representa los valores promedio en un ciclo de ola y el subíndice “máx”  $(\tau_{máx}, u_{*máx}, \theta_{máx})$  para los valores máximos durante un ciclo de ola.

## II.2.2 Transporte por fondo

Como se mencionó, en el transporte por fondo los granos se mueven rodando, deslizándose o saltando a lo largo del fondo, bajo estas condiciones el peso de los granos es soportado por contacto con otros granos y no por los movimientos ascendentes del flujo como en el caso de los sedimentos suspendidos. Este tipo de transporte puede presentarse sobre cama plana y flujos de bajas velocidades, sobre un fondo con ondulaciones y flujos severos o sobre una cama plana y flujos muy severos para los casos en el que las ondulaciones ya han desaparecido.

Para flujos en los que las condiciones hidrodinámicas permiten que los granos se suspendan, el transporte por fondo ocurre simultáneamente aunque su aporte es mucho menor al transporte total, especialmente en el caso de arenas finas.

### Bajo corrientes

La tasa de transporte de sedimentos por fondo se ha propuesto en función del parámetro de Shields (Ec. II-2) y su valor crítico  $(\theta_{cr})$ , correspondiente el inicio de movimiento, mediante expresiones propuestas por distintos autores. La tasa se puede expresar como el volumen transportado por unidad de tiempo por unidad de ancho  $(q_b)$ , lo cual se conoce como tasa volumétrica de transporte

por fondo, o de manera adimensional ( $\Phi$ ), utilizando el valor de la gravedad ( $g$ ), la densidad relativa ( $s=\rho_s/\rho$ ) y el diámetro de los granos ( $d$ ). Ambas tasas se relacionan de la siguiente manera:

$$\Phi = \frac{q_b}{[g(s-1)d^3]^{1/2}} \quad \text{Ec. II-7}$$

Con la finalidad de obtener la tasa volumétrica de transporte por fondo, diferentes autores han propuesto diferentes expresiones como las que se muestran a continuación, las cuales aplican en condiciones de corrientes, es decir, flujos uniformes, como en el caso de los ríos.

Meyer-Peter and Müller (1948)

$$\Phi = 8(\theta - \theta_{cr})^{3/2} \quad \text{Ec. II-8}$$

donde  $\theta_{cr} = 0.047$

Yalin (1963)

$$\Phi = F_Y \theta^{1/2} (\theta - \theta_{cr}) \quad \text{Ec. II-9}$$

$$\text{donde } F_Y = \frac{0.635}{\theta_{cr}} \left[ 1 - \frac{1}{aT} \ln(1 + aT) \right]$$

$$a = 2.45 \theta_{cr}^{0.5} s^{-0.4}$$

$$T = \frac{(\theta - \theta_{cr})}{\theta_{cr}}$$

Nielsen

$$\Phi = 120 \theta^{1/2} (\theta - \theta_{cr}) \quad \text{Ec. II-10}$$

### Bajo oleaje

Si el oleaje presenta una superficie libre sinusoidal, el transporte neto sería nulo debido a que la velocidad orbital es simétrica. En el caso de un oleaje asimétrico (como por ejemplo con ondas tipo *cnoidal*), como el que se presenta en aguas someras, el transporte neto es diferente de cero, pues, generalmente, la cantidad transportada por el paso de la cresta es mayor que la correspondiente al valle, lo que resulta en un transporte en dirección de la propagación de la ola, por lo que el transporte neto será la diferencia entre ellos.

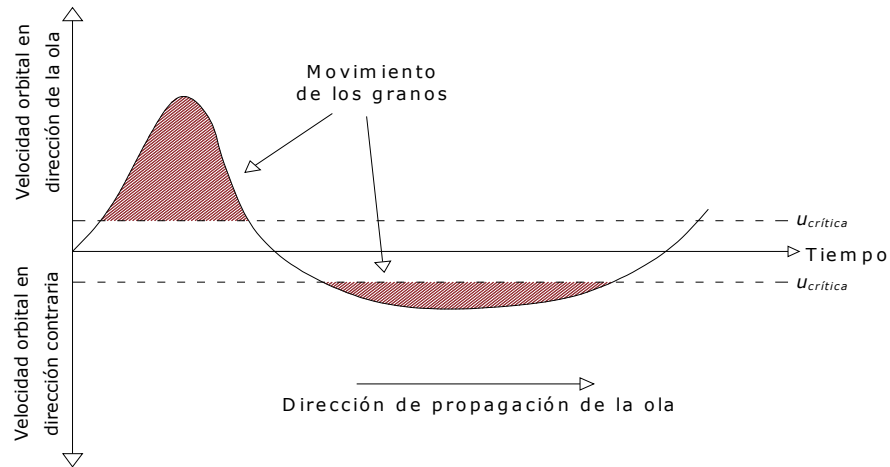


Figura II-5 Movimiento de los granos debido a la variación de la velocidad en un periodo de ola

Para calcular la tasa volumétrica de transporte por fondo para medio ciclo de la ola ( $q_{b1/2}$ ) existen las siguientes propuestas:

Madsen and Grant (1976)

$$q_{b1/2} = F_{MG} w_s d \theta_w^3 \tag{Ec. II-11}$$

donde

$$F_{MG} = 12.5 \quad \text{si } \theta_w \gg \theta_{cr}$$

$$F_{MG} \rightarrow 0 \quad \text{si } \theta_w \rightarrow \theta_{cr}$$

Sleath (1978)

$$q_{b1/2} = 47 \omega d^2 (\theta_w - \theta_{cr})^{3/2} \tag{Ec. II-12}$$

Soulsby (1997)

$$q_{b1/2} = 5.1 [g(s-1)d^3]^{1/2} (\theta_w - \theta_{cr})^{3/2} \tag{Ec. II-13}$$

### Bajo oleaje-corriente

Cuando el flujo está constituido por corrientes y oleaje simultáneamente, el sedimento queda sometido a dos mecanismos, por un lado, las olas mantienen a los granos en movimiento debido a la turbulencia, y por otro, la corriente permite un transporte neto diferente de cero. Una expresión que aún se utiliza comúnmente es la propuesta por Bijker (1967), la cual arroja la tasa volumétrica de transporte

neto promedio bajo un oleaje sinusoidal, está en función de la velocidad de cortante debido a una corriente ( $u_*$ ), el factor de rizadura ( $\mu$ ), la altura de los rizos ( $\Delta_r$ ), la amplitud de la velocidad orbital de la ola ( $U_w$ ), la velocidad de la corriente a la profundidad promedio ( $\bar{U}$ ) y la profundidad ( $h$ ), y se escribe de la siguiente manera:

$$q_b = A_B u_* d \exp \left[ \frac{-0.27 g (s-1) d}{\mu (u_*^2 + 0.016 U_w^2)} \right] \quad \text{Ec. II-14}$$

con

$$u_* = \frac{0.40 \bar{U}}{\ln(12h / \Delta_r)}$$

$$\mu = \left[ \frac{\ln(12h / \Delta_r)}{\ln(12h / d_{90})} \right]^{1.5}$$

$$A_B = 1 \quad \text{si las olas no rompen}$$

$$A_B = 5 \quad \text{si las olas rompen}$$

### II.2.3 Transporte por suspensión

Si las condiciones hidrodinámicas del flujo son considerablemente superiores a las que se requieren para el inicio de arrastre, las partículas se desprenden de la cama y se ponen suspensión, moviéndose a la misma velocidad de la corriente. El transporte por suspensión es una importante contribución al transporte total que sufre el sedimento, pues el transporte por fondo es sólo una pequeña fracción del total cuando ocurren simultáneamente, por lo que su estimación adecuada es de gran importancia.

#### Inicio de suspensión

Bagnold (1966) estableció que los granos pueden permanecer en suspensión sólo si su velocidad de caída ( $w_s$ ) es menor a la componente ascendente de la velocidad de los remolinos, la cual puede ser representada por intensidad vertical de la turbulencia, está relacionada con la velocidad asociada al esfuerzo cortante que experimentan los granos en el fondo debido a la fricción entre ellos y el flujo ( $u_{*s}$ ). De esta manera, se puede determinar un criterio de umbral de suspensión, quedando determinado por la siguiente relación:

$$u_{*s} = w_s \quad \text{Ec. II-15}$$

Si la cama de sedimentos es una mezcla bien graduada, sólo la fracción de finos se suspende, mientras que el material grueso se mueve por fondo. En este caso resulta conveniente dividir la muestra de sedimento en diferentes clases de acuerdo a su diámetro, en las cuales se incluya una banda de valores para poder así realizar los cálculos para cada clase por separado y finalmente sumar proporcionalmente el transporte de cada una de ellas. Puede también seleccionarse un solo diámetro representativo de la muestra, lo cual sería menos preciso pero más sencillo.

La mayoría de las expresiones propuestas para el cálculo de la velocidad de caída utilizan el valor del **diámetro adimensional**, que está en función de la gravedad, la viscosidad cinemática del agua, la densidad de los granos y su diámetro, definiéndose como:

$$D_* = \left[ \frac{g(s-1)}{\nu^2} \right]^{1/3} d \tag{Ec. II-16}$$

Por ejemplo, Van Rijn (1984) propuso una expresión para el cálculo de la velocidad de caída para arenas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} w_s &= \frac{\nu D_*^3}{18d} & \text{si } D_*^3 &\leq 39 \\ w_s &= \frac{\nu D_*^{2.1}}{6d} & \text{si } 39 < D_*^3 < 10^4 \\ w_s &= \frac{1.05\nu D_*^{1.5}}{d} & \text{si } 10^4 \leq D_*^3 < 3 \cdot 10^6 \end{aligned} \tag{Ec. II-17}$$

Otro parámetro de utilidad para el estudio del transporte por suspensión es la difusividad vertical del sedimento ( $\epsilon_v$ ), la cual es función de la rugosidad del fondo, el esfuerzo cortante, agitación principalmente debido a las olas) y la velocidad de sedimentación.

### Concentración de sedimento en suspensión

Van Rijn (1989) propone la concentración media temporal del sedimento en suspensión bajo condiciones de oleaje-corriente, por medio de la solución de la ecuación para la concentración sobre la profundidad, la cual está en función de la concentración promediada temporalmente a una altura  $z$ ,

$c(z)$ , de la declinación de la velocidad de caída debido a altas concentraciones,  $(1-c)^5$ , y del coeficiente de mezcla en el caso de oleaje-corriente ( $\varepsilon_{swc}$ ), definida como:

$$\frac{\partial c(z)}{\partial z} = -\frac{\omega_s c (1-c)^5}{\varepsilon_{swc}} \quad \text{Ec. II-18}$$

Van Rijn presenta también la tasa volumétrica de transporte por suspensión por medio de la integración de la ecuación de flujo de sedimentos sobre la profundidad:

$$q_s = \int_{z_a}^h \vec{u}(z) c(z) dz \quad \text{Ec. II-19}$$

donde

$$z_a = \max(k_{stc}, k_{stw})$$

$h$  es la profundidad del agua

$k_{stc}$  es la rugosidad total debida a la corriente

$k_{stw}$  es la rugosidad total debida al oleaje

$\vec{u}(z)$  es la velocidad promediada temporalmente a una altura  $z$

Camenen y Larson (2008) proponen una expresión para el cálculo de la tasa volumétrica de transporte por suspensión, en función de la concentración de referencia ( $c_R$ ), la velocidad promediada en la vertical ( $U_c = \vec{u}$ ) y la cantidad de sedimento disponible ( $F(c_R, \varepsilon)$ ):

$$q_s = U_c c_R \frac{\varepsilon}{\omega_s} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\omega_s h}{\varepsilon}\right) \right] = U_c F(c_R, \varepsilon) \quad \text{Ec. II-20}$$

donde

$$c_R = A_{cR} \theta_T \exp\left(-4.5 \frac{\theta_M}{\theta_{cr}}\right) \quad \text{Ec. II-21}$$

$\theta_T$  parámetro de Shields dependiente del transporte

$\theta_M$  parámetro máximo de Shields

$\theta_{cr}$  parámetro crítico de Shields

Los valores de la expresión anterior (Ec. II-20) dependen de las condiciones de flujo bajo las cuales se lleva a cabo el transporte como se define a continuación.



Bajo corriente:

$$\theta_T = \theta_M = \theta_{cr} \quad \text{Ec. II-22}$$

$$A_{cR} = 1.5 \times 10^{-3} \exp(-0.2d_*) \quad \text{Ec. II-23}$$

Bajo oleaje:

$$A_{cR} = 5 \times 10^{-4} \quad \text{Ec. II-24}$$

Bajo oleaje-corriente:

$$\theta_T = \theta_{wcm} = \sqrt{\theta_c^2 + \theta_{wm}^2 + 2\theta_{wm}\theta_c \cos \varphi} \quad \text{Ec. II-25}$$

$$\theta_M = \theta_{wc} = \sqrt{\theta_c^2 + \theta_w^2 + 2\theta_w\theta_c \cos \varphi} \quad \text{Ec. II-26}$$

En las expresiones anteriores  $\theta_m$  y  $\theta_M$  se refieren al valor medio y máximo del parámetro de Shields, respectivamente, y  $\varphi$  al ángulo formado entre la dirección del oleaje y la corriente.

Para tomar en cuenta un posible transporte de sedimentos en la dirección del oleaje, la Ec. II-20 se escribe para el transporte de dirección del oleaje ( $q_{sw}$ ) y para la dirección perpendicular ( $q_{sn}$ ) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q_{sw} &= (U_{wcp} - U_{wco}) F(c_R, \varepsilon) \\ q_{sn} &= U_c \text{sen } \varphi F(c_R, \varepsilon) \end{aligned} \quad \text{Ec. II-27}$$

donde

$U_{wej}$  es la media cuadrática de la velocidad  $u(t) = u_w(t) + U_c \cos \varphi$  en el semiperiodo  $T_{wj}$ . El subíndice  $j$  debe ser remplazado por  $p$  (hacia la playa para  $u(t) \geq 0$ ) u  $o$  (hacia mar adentro  $u(t) < 0$ )

$\varphi$  es el ángulo formado entre la corriente y el oleaje

---

## II.3 Inicio de arrastre bajo oleaje

Para flujos con bajas velocidades, la cama de arena permanece inmóvil, pero si la velocidad aumenta, se llegará a una velocidad a la que algunos granos comienzan a moverse, a este instante se le conoce como **inicio de arrastre o de movimiento** y a dicha velocidad se le llama **velocidad crítica**.

En el presente trabajo se analiza experimentalmente el inicio de arrastre en arenas bajo condiciones de oleaje, por lo que, a continuación, se presentan expresiones existentes para el cálculo de los parámetros que se involucran en dicho fenómeno bajo oleaje.

Bajo oleaje, el inicio de arrastre depende de la amplitud de la velocidad orbital del fondo ( $U_w$ ), del periodo de la ola y del diámetro y densidad del grano. La **velocidad orbital crítica** ( $U_{wcr}$ ), que pone en movimiento los granos, puede determinarse con las expresiones de Komar y Miller (1974):

$$\begin{aligned} U_{wcr} &= [0.118g(s-1)]^{2/3} d^{1/3} T^{1/3} && \text{para } d < 0.5 \text{ mm} \\ U_{wcr} &= [1.09g(s-1)]^{4/7} d^{3/7} T^{1/7} && \text{para } d > 0.5 \text{ mm} \end{aligned} \quad \text{Ec. II-28}$$

Estas expresiones son comúnmente utilizadas, pero tienen como limitante la discontinuidad que presentan cuando el diámetro es igual a 0.5 mm.

La velocidad orbital crítica puede deducirse también del valor del esfuerzo cortante crítico en el fondo, el cual depende de la forma del fondo y se obtiene como se describe en la siguiente sección (Soulsby 1997).

### II.3.1 Esfuerzo cortante crítico

El esfuerzo cortante en el fondo tiene una amplitud oscilatoria ( $\tau_w$ ) que puede escribirse en función de la velocidad orbital en el fondo ( $U_w$ ) y del factor de fricción bajo oleaje ( $f_w$ ) de la siguiente manera:

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho f_w U_w^2 \quad \text{Ec. II-29}$$

Si la velocidad orbital es la correspondiente velocidad crítica ( $U_{wcr}$ ), entonces puede obtenerse el esfuerzo cortante crítico en el fondo debido al oleaje ( $\tau_{wcr}$ ) con la Ec. II-29.

El factor de fricción bajo oleaje, requerido para calcular el esfuerzo cortante puede ser determinado por algunas propuestas, por medio de las cuales se obtienen dos valores diferentes, uno para fondo rugoso ( $f_{wr}$ ) y otro para fondo no rugoso ( $f_{ws}$ ), de ellos se utiliza el que tenga el valor mayor para introducirlo en la expresión del esfuerzo, esto debido a que el mayor indicará sobre qué tipo de fondo corre el flujo (rugoso o no rugoso). Se muestran a continuación expresiones para calcular los factores de fricción, las cuales son válidos para fondo plano y flujo turbulento.

Swart (1974)

$$\begin{aligned} f_{wr} &= 0.3 && \text{para } r \leq 1.57 \\ f_{wr} &= 0.00253 \exp(5.21r^{-0.19}) && \text{para } r > 1.57 \end{aligned} \quad \text{Ec. II-30}$$

Nielsen (1992)

$$f_{wr} = \exp(5.5r^{-0.2} - 6.3) \quad \text{Ec. II-31}$$

Soulsby (1997)

$$f_{wr} = 1.39 \left( \frac{A}{z_0} \right)^{-0.52} = 0.237r^{-0.52} \quad \text{Ec. II-32}$$

$$f_{ws} = BR_w^{-N} \quad \text{Ec. II-33}$$

donde

$r$  es la rugosidad relativa  $r = \frac{A}{k_s}$  Ec. II-34

$k_s$  como se define en la Ec. II-5

$A$  es la amplitud de la onda en el fondo  $A = \frac{U_w T}{2\pi}$  Ec. II-35

$z_0$  como se define en la Ec. II-4

$R_w$  es el número de Reynolds del oleaje  $R_w = \frac{U_w A}{\nu}$  Ec. II-36

para flujo laminar ( $R_w \leq 5 \cdot 10^5$ )  $B=2, N=0.5$

flujo suavemente turbulento ( $R_w > 5 \cdot 10^5$ )  $B=0.0521, N=0.187$

Como se explica en la sección II.2.1, cuando el fondo es plano, el esfuerzo total es igual al esfuerzo producido por la fricción superficial ( $\tau_0 = \tau_{0s}$ ), por lo que resulta de la Ec. II-29 con el factor de

fricción como se mencionó, pero en el caso de tener un fondo con ondulaciones, el esfuerzo total incluye además la contribución de la presión debida a las formas del fondo, si se trata de una cama con bajo transporte de sedimentos ( $\tau_0 = \tau_{0s} + \tau_{0f}$ ), como se considera generalmente, pero si existe un importante transporte, incluye las tres contribuciones ya definidas ( $\tau_0 = \tau_{0s} + \tau_{0f} + \tau_{0t}$ ). En tales casos resulta complicado el cálculo de las diferentes contribuciones, por lo que se ha simplificado a obtener el valor del esfuerzo por fricción superficial, pero utilizando un valor de rugosidad en el fondo que considere la presencia de las ondulaciones.

Es posible determinar un valor de la longitud rugosa que considere las diferentes contribuciones que constituyen el esfuerzo cortante total, para después relacionarlo con el valor de la rugosidad (Ec. II-4) y obtener así el factor de fricción. Para cada contribución se determina el valor de la longitud rugosa que, para el caso de las ondulaciones debidas al oleaje, puede realizarse de la siguiente manera:

- × Para el caso del esfuerzo  $\tau_{0s}$ , se calcula  $z_{0s}$  con la Ec. II-6.
- × Para el caso del esfuerzo  $\tau_{0f}$ , se calcula  $z_{0f}$

$$z_{0f} = a_r \frac{H_r^2}{L_r} \quad \text{Ec. II-37}$$

donde  $a_r$  varía entre 0.3 y 3, con un valor típico de 1.

Las características geométricas de dichas ondulaciones, longitud de la ondulación ( $L_r$ ) y altura ( $H_r$ ), se pueden aproximar en función de la amplitud del desplazamiento de la partícula ( $A$ ) y el parámetro de Shields efectivo debido a la fricción ( $\theta_{ms}$ ), considerando a  $k_s = 2.5d_{50}$ , de la siguiente manera:

$$L_r = 2A \quad \text{Ec. II-38}$$

$$\frac{H_r}{L_r} = 0.182 - 0.24(\theta_{ms})^{1.5} \quad \text{Ec. II-39}$$

- × Para el caso del esfuerzo  $\tau_{0t}$ , se calcula  $z_{0t}$

De acuerdo con Nilesen (1992), puede obtenerse este valor como:

$$z_{0t} = 5.67(\theta_{ws} - 0.05)^{0.5} d_{50} \quad \text{Ec. II-40}$$

Finalmente, el valor de  $z_0$  final se obtiene como la suma de los tres valores anteriores:

$$z_0 = z_{0s} + z_{0f} + z_{0t} \quad \text{Ec. II-41}$$

### II.3.2 Parámetro de Shields crítico

Si se maneja el parámetro de Shields (Ec. II-2) en condiciones críticas ( $\theta_{cr}$ ), su valor indica la relación que existe entre la fuerza ejercida por el esfuerzo actuante que mueve los granos de la cama y el peso sumergido de los granos contrarrestando esta acción.

$$\theta_{cr} = \frac{\tau_{cr}}{g(\rho_s - \rho)d} \tag{Ec. II-42}$$

Shields (1936) desarrolló una forma de cuantificar el inicio de arrastre bajo corrientes en función del esfuerzo cortante en el fondo por medio de una curva experimental (Figura II-6) que relaciona dicho esfuerzo con el número de Reynolds del grano, definido como:

$$Re_* = \frac{u_{*cr}d}{\nu} \tag{Ec. II-43}$$

donde  $u_{*cr} = (\tau_{cr} / \rho)^{1/2}$

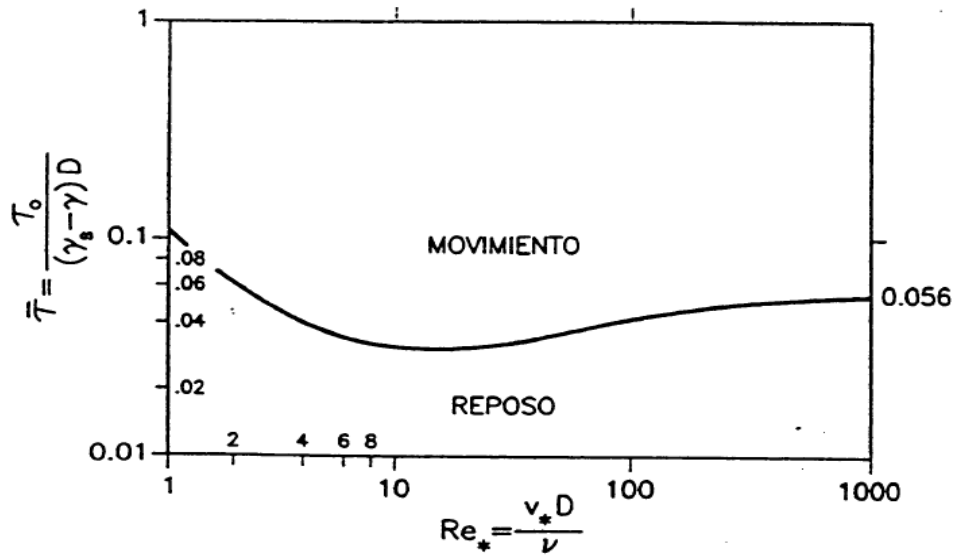


Figura II-6 Diagrama de Shields (Soulsby, 1997)

Como se observa, ambos ejes del diagrama involucran el valor de la velocidad de cortante crítica, por lo que obtener dicho valor implica un proceso iterativo. Una transformación matemática directa es representar gráficamente el esfuerzo cortante crítico con el diámetro adimensional (Ec. I-15).

En la Figura II-7 se muestra la curva propuesta por Soulsby y Whitehouse (1997), la cual define de manera muy cercana la curva propuesta por Shields (Ec. II-44), pero expresando el esfuerzo cortante crítico en función del diámetro adimensional. La figura contiene también puntos experimentales bajo corrientes, oleaje y oleaje-corriente, de lo cual se concluye que el trabajo realizado por Shields puede extenderse a estas condiciones y arroja buenos resultados, excepto para diámetros de partículas finas, por lo que Soulsby y Whitehouse, propusieron una corrección a la curva para conseguir mejor aproximación en este rango de valores

Ec. II-45).

$$\theta_{cr} = \frac{0.24}{D_*} + 0.055[1 - \exp(-0.020D_*)] \quad \text{Ec. II-44}$$

$$\theta_{cr} = \frac{0.30}{1 + 1.2D_*} + 0.055[1 - \exp(-0.020D_*)] \quad \text{Ec. II-45}$$

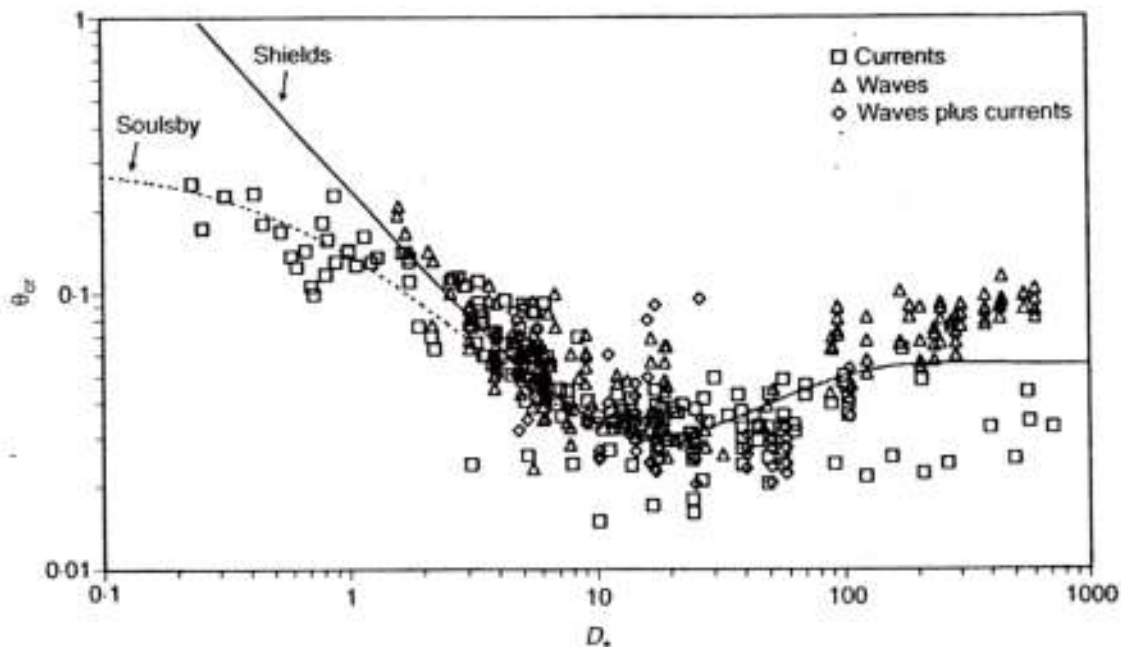


Figura II-7 Inicio de arrastre de sedimentos bajo corrientes, oleaje y oleaje-corriente (Soulsby, 1997)

# Capítulo III

## Evaluación del Inicio de Arrastre

---





## III. Evaluación del Inicio de Arrastre

Con el objetivo de contribuir a la caracterización de los sedimentos que se encuentran en las costas del estado de Quintana Roo, el presente capítulo expone una metodología para evaluar el inicio de arrastre de dichos sedimentos. Para ello, se describe el trabajo realizado en campo para la selección y recolección de muestras, así como la metodología seguida en el laboratorio.

### III.1 Trabajo de Campo

Las muestras utilizadas para el presente estudio fueron seleccionadas, recolectadas y extraídas durante las campañas de campo realizadas por el Grupo de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería de la UNAM, a lo largo de la Península de Yucatán, del año 2007 a 2010.

Se tomaron 145 muestras provenientes de 58 sitios en tres estados diferentes: 84.2 % del estado de Quintana Roo, 10.5% de Yucatán y 5.3% del estado de Campeche. Como se mencionó antes, la dificultad para acceder a algunos sitios produjo las diferencias entre los porcentajes de muestreo, especialmente en el estado de Yucatán, donde, por ejemplo, la Reserva de la Biósfera “Ría Lagartos”, contiene una franja considerable de litoral, cuya extensión es de aproximadamente 80 km en un área de 12580 has, lo que provoca que prácticamente no exista ningún camino de acceso. En el caso del estado de Campeche, existe una gran extensión de costas tipo manglar sin presencia de arenales (Alcérreca, 2011).

Las muestras, en cada sitio, fueron extraídas de tres zonas distintas de la playa con la finalidad de estudiar las características del sedimento que se ve sometido a la asimetría del oleaje. Las zonas muestreadas, esquematizadas en la Figura III-1, fueron:

- ✘ Zona seca o berma (Pb): es la zona que se extiende hacia tierra adentro, a partir de cresta de una berma o en su defecto del límite marcada por la línea de la marea alta, y hasta el límite del cambio fisiográfico o la presencia de la vegetación permanente.
  
- ✘ Zona de lavado (Pl): es la zona donde el agua avanza y retrocede sobre la cara de la playa, cubriéndola alternativamente, siendo ésta la zona de la playa mojada pero no sumergida en el

agua. Las muestras obtenidas de esta zona son sedimentos producto del mezclado de material, el cual se genera cuando la ola rompe sobre la pendiente de la playa y disipa su energía potencial, transformándose en una serie de oscilaciones semejantes a una onda solitaria.

- × Zona de rompientes (Pr): es la zona en donde las olas que llegan de la región alejada de la costa (playa exterior) se hacen inestables por el fenómeno de someramiento, por lo que empiezan a romper. Las muestras se tomaron aproximadamente a una profundidad de 1.5 m.



Figura III-1 Perfil de playa



Figura III-2 Campaña de recolección de muestras 2007.  
Zona de berma (derecha) y zona de lavado (izquierda)

En cada sitio de muestreo, se extrajeron aproximadamente dos kilogramos de material granular, el material fue obtenido de manera superficial, sin realizar pozos de sondeo. Un elemento primordial en las campañas de recolección de las muestras, fue registrar las coordenadas reales de los sitios de muestreo utilizando un equipo GPS (Ruiz, 2009).

## III.2 Trabajo de Laboratorio

### III.2.1 Propiedades físicas de las muestras

Una vez obtenidas las muestras, se realizaron diversas pruebas en el laboratorio sobre sus propiedades físicas, las cuales servirían a futuro como base para el estudio de otras características de los sedimentos, como es el caso del presente trabajo. A continuación se describe brevemente la metodología utilizada para esta etapa de caracterización.

#### Análisis granulométrico

Realizar un análisis granulométrico tiene como finalidad obtener la distribución por tamaño de las partículas presentes en una muestra, para lo cual se utilizaron tamices normalizados y numerados, dispuestos en orden decreciente. En el laboratorio, el análisis se llevó a cabo siguiendo las recomendaciones de la ASTM (American Society for Testing Materials) utilizando mallas de los siguientes números: 5 (4 mm), 8 (2.36 mm), 10 (2.00 mm), 14 (1.40 mm), 18 (1.00 mm), 25 (0.71 mm), 35 (0.50 mm), 45 (0.355 mm), 60 (0.25 mm), 80 (0.18 mm), 120 (0.125 mm), 170 (0.09 mm) y 230 (0.063 mm), donde el valor en milímetros indica el tamaño de la abertura de la malla. Una vez obtenidas las curvas granulométricas correspondientes a cada muestra, se determinaron los diámetros nominales de las partículas para finalmente clasificar las muestras mediante el sistema de clasificación del SUCS (Sistema Universal de Clasificación de Suelos), de la ASTM y de Wentworth.

#### Propiedades físicas

A continuación se definen las propiedades físicas determinadas en el laboratorio para las muestras recolectadas en estado seco.

- ✘ Densidad o peso volumétrico ( $\rho$ ): es la relación de la masa contenida en cierto volumen, por lo que se expresa en unidades de masa sobre volumen. Si la masa no pertenece a un cuerpo confinado, como en el caso de las arenas, se puede medir contenida en un recipiente de masa y volumen conocidos, para después aplicar la siguiente expresión.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{masa total} - \text{masa del contenedor}}{\text{volumen del contenedor}} = \frac{m_T - m_c}{V_c} \quad \text{Ec. III-1}$$

- ✦ Densidad relativa ( $S$ ): es una relación entre la densidad de una sustancia y otra que se toma como referencia, la cual es generalmente el agua con su valor máximo de densidad ( $1000 \text{ kg/m}^3$ , a  $4 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $1 \text{ atm}$ ), es de gran utilidad para el cálculo del volumen ocupado por un material granular en una mezcla. Es un valor adimensional y puede calcularse también como la relación entre masas o pesos de dos sustancias contenidas en igual volumen; en el caso de sólidos, como las arenas, puede determinarse como la relación entre peso del material seco ( $W_s$ ) sobre la suma de dicho material más el peso de un recipiente con agua ( $W_{fw}$ ) menos el peso del recipiente con agua y el material ( $W_{fsw}$ ), como lo determina la ASTM C 128, lo cual relaciona la cantidad de material con la cantidad de agua que desplaza en cierto volumen.

$$S = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{W_s}{W_s + W_{fw} - W_{fsw}} \quad \text{Ec. III-2}$$

- ✦ Peso específico ( $\gamma$ ): es la relación entre el peso de una sustancia sobre el volumen en que está contenida, expresada en unidades de fuerza sobre volumen. Puede escribirse también en términos de su densidad o su densidad relativa, en este último caso añadiendo el valor del peso específico del agua ( $\gamma_0$ ).

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g = \frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 g = S \gamma_0 \quad \text{Ec. III-3}$$

- ✦ Relación de vacíos: es una medida adimensional del volumen de los vacíos con respecto al volumen de las partículas sólidas que forman parte de una muestra. En el caso de material granular, puede ser determinado en función del peso específico del agua, de la densidad relativa del material, del peso del material seco y del volumen que ocupa ( $V_s$ ).

$$V_r = \frac{V_s S \gamma_0}{W_s} - 1 \quad \text{Ec. III-4}$$

- ✦ Ángulo de reposo: es la pendiente máxima que toma el material granular de manera natural, quedando estable y sin que haya deslizamiento. Esta pendiente es de importancia por el acomodo de las partículas en el fondo marino. Su determinación se realizó mediante la medición directa, dejando caer los granos libremente a cierta altura que permitiera, después de que se hubieran acomodado y estabilizado, de forma tal que se registró el ángulo que formaban respecto a la horizontal con ayuda de un transportador.

Para la aplicación de las expresiones descritas, se obtuvieron los valores de las masas requeridos mediante su medición en básculas electrónicas bajo las condiciones típicas para la realización de estos procedimientos para fines ingenieriles.

De los resultados obtenidos en esta etapa de caracterización, se muestran en la siguiente sección los valores de interés para el presente trabajo.

### **III.2.2 Selección de muestras representativas**

Con el fin de determinar experimentalmente la velocidad de inicio de arrastre de sedimentos de la zona de estudio, de las 145 muestras recolectadas se seleccionaron 10 que fueran representativas en cuanto a ubicación geográfica, granulometría y zona de extracción.

- ✘ Ubicación geográfica: se ubicaron muestras que abarcaran toda la longitud muestreada de las costas del estado con la finalidad de estudiar el comportamiento generalizado de la zona y considerar los diferentes materiales que se encuentran a lo largo de la costa.
- ✘ Granulometría: conocida la distribución del tamaño de los granos de cada muestra, se elaboró un histograma de frecuencias en siete intervalos para el  $d_{50}$  y se buscó que las muestras seleccionadas constituyeran un histograma con el mismo comportamiento, con el fin de representar la diversidad de tamaños y la frecuencia con que se presentan a lo largo de la costa.
- ✘ Zona de extracción: se trató representar a los sedimentos procedentes de las diferentes zonas de la playa de las que se obtuvieron las muestras (ver sección III.1).

Una vez analizadas las muestras del estado de Quintana Roo bajo estos criterios, se decidió incorporar una muestra del estado de Campeche y otra de Yucatán, con el fin de ampliar el alcance del estudio y permitir una primera aproximación al entendimiento y diferenciación del inicio de arrastre de los sedimentos de los tres estados que conforman la Península de Yucatán.

En la Tabla III-1 Características de las muestras seleccionadas Tabla III-1 se muestran las, para las muestras seleccionadas, características de determinadas en trabajos previos, durante en el trabajo de campo y en la primera etapa de caracterización. En la Figura III-3 se muestra la ubicación geográfica.

---

Sitio	Zona	Coordenadas		$d_{50}$ mm	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$S$	$\gamma$ kg <sub>f</sub> /m <sup>3</sup>	$V_r$	Ángulo de reposo °
		Longitud	Latitud						
Akumal II	Pl	-87.3191	20.3916	0.1438	2319.993	2.259	2259	1.7889	38.2
Puerto Morelos II	Pb	-86.8659	20.8708	0.17223	2752.36	2.68	2680	1.1784	37.4
Isla Mujeres	Pl	-86.7512	21.2602	0.21673	2600.364	2.532	2532	1.0293	38.2
Sian Ka'an	Pl	-87.4664	20.1197	0.25556	2684.578	2.614	2614	1.2452	41.8
Pto. E (Cancún)	Pr	-86.7854	21.1447	0.30352	2684.578	2.614	2614	1.2430	39.0
Chelem	Pb	-89.7481	21.2551	0.34529	2702.631	2.632	2632	1.0400	38.0
Pto. 10 (Cancún)	Pl	-86.7800	21.0369	0.38976	2703.064	2.632	2632	1.0865	39.0
Holbox	Pb	-87.3829	21.5232	0.48604	2625.012	2.556	2556	1.0327	42.7
Bahía Tortugas	Pl	-91.0361	19.0962	0.98078	2753.367	2.681	2681	1.0861	42.0
Pto. F (Cancún)	Pr	-86.8060	21.1767	2.0142	2482.259	2.210	2210	1.5114	36.5

Tabla III-1 Características de las muestras seleccionadas

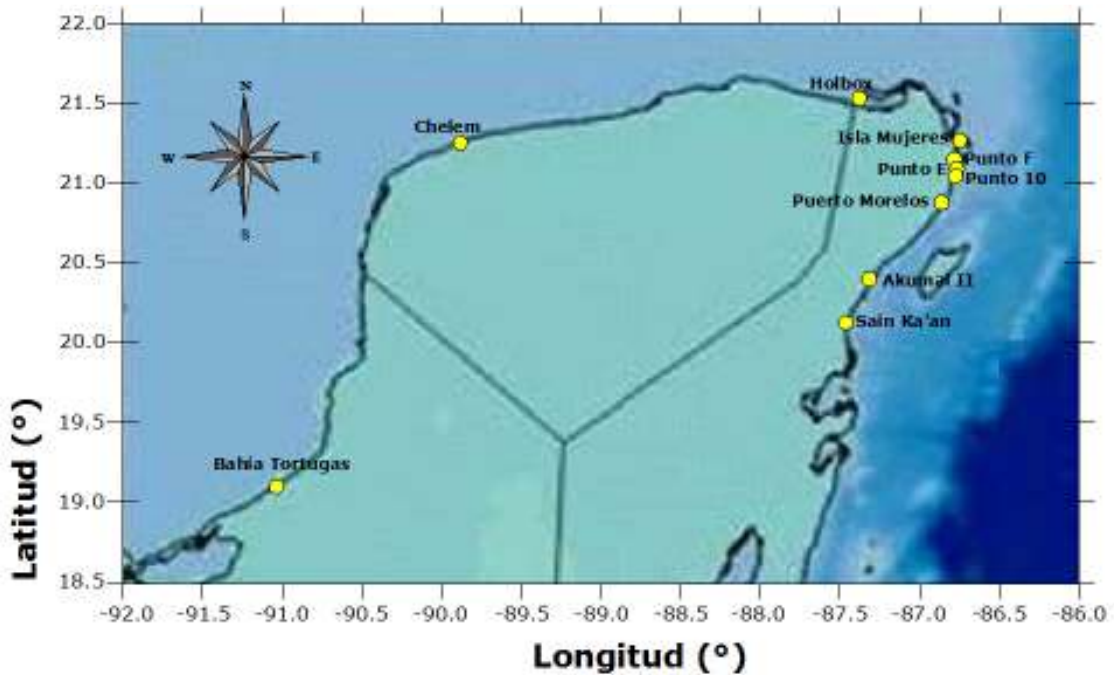


Figura III-3 Ubicación geográfica de las muestras seleccionadas

Figura III-4 Muestras seleccionadas

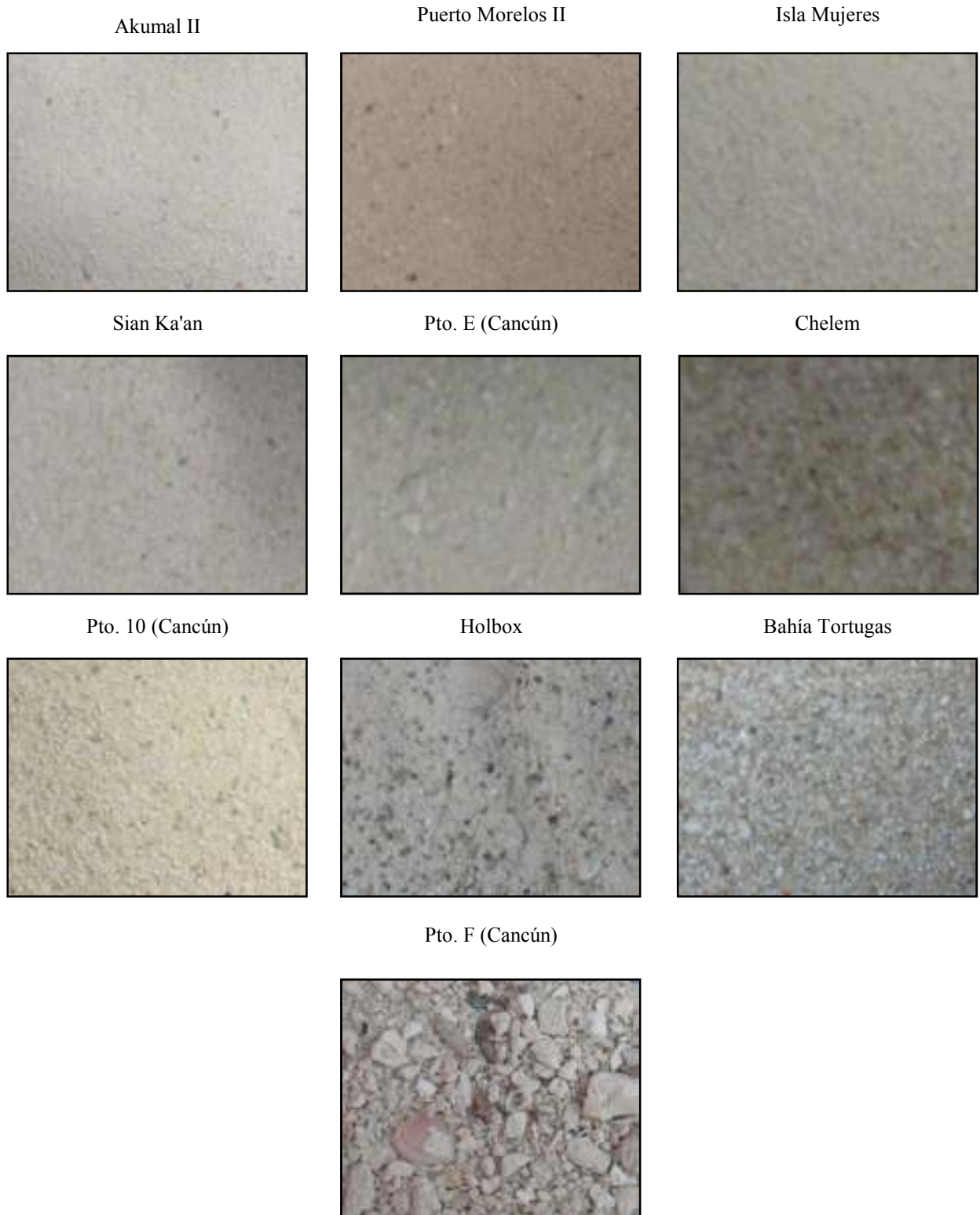


Figura III-5 Presentación a escala de algunas muestras seleccionadas.

Pto. F (Cancún)



Bahía Tortugas



Chelem



Puerto Morelos



En la Figura III-5 se muestran ordenadas, de mayor a menor diámetro representativo, cuatro de las muestras seleccionadas sobre una retícula de 1 mm<sup>2</sup>.

---



### III.2.3 Metodología experimental para la evaluación del inicio de arrastre

#### Modelo

Las pruebas se realizaron dentro del Laboratorio de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería de la UNAM en el canal de oleaje, el cual tiene una longitud de 37 m, 1.2 m de alto y 0.80 m de ancho, y cuenta con una pala mecánica (tipo pistón) generadora de oleaje regular e irregular que puede ser definido a través de la altura de la ola y del periodo o utilizando un espectro de oleaje.



Figura III-6 Canal de oleaje (izquierda) y pala generadora (derecha)

Para la colocación de las muestras dentro del canal, se fabricó una caja de policarbonato que tuviera una capacidad adecuada para la cantidad de material con el que se contaba de cada muestra. Se construyó con doble fondo, en el cual se colocaron cubos de concreto de 3 cm de lado, esto con el fin de evitar su flotación. Las placas de policarbonato utilizadas cuentan con espesor de 8 mm y el área exterior de la caja es de 30x30 cm con una altura de 7.5 cm, de la cual 1 cm corresponde a la altura libre para la colocación del material.



Figura III-7 Caja de policarbonato

Debido a la configuración determinada para la caja, fue necesario colocar un acomodo del fondo de manera que el oleaje no sufriera alteraciones importantes por el cambio de profundidad y de material al encontrarse con la muestra. Para ello se construyó una rampa de placas de policarbonato de 8 mm de espesor con una pendiente de 1:7, del ancho del canal y una altura de 9 cm, la cual fue llenada con arena para evitar su flotación; de esta manera fue posible acomodar tres filas de cubos de concreto de 3 cm de lado como continuación de la rampa. El inicio de la rampa se colocó a 15.7 m de la pala

generadora de oleaje. En el centro del ancho del canal, a 60 cm del final de la rampa, se colocó la caja sobre una fila de cubos de concreto de 3 cm de lado. Al inicio de la rampa, debido al espesor de las placas, se presentó un pequeño escalón, por lo que se colocó grava de origen calcáreo para continuar la pendiente hasta el fondo del canal. Finalmente, para nivelar la superficie, se colocó una cama de cubos de concreto de 1.5 cm de lado, con lo cual se logró posicionar la parte más alta de la caja, y por lo tanto de la muestra, al mismo nivel la zona que la rodearía. La elección de material para este acomodo responde a la similitud de rugosidad que tienen con las muestras, para que, como se mencionó, el flujo no se encuentre con un cambio brusco y pueda verse alterado. De esta manera, quedó instalado el modelo.



Figura III-8 Colocación del modelo



Figura III-9 Modelo en planta (arriba) y en perfil (abajo)

## Equipos

Se utilizaron tres equipos de medición diferentes, los cuales se describen brevemente a continuación.

### Sensores de nivel

Son sensores de resistividad que sirven para medir el nivel de la superficie del agua. Por medio de dos barras, miden la intensidad de corriente que circula por ellas, la cual depende del nivel de agua que haya a cada instante. Cuentan con un procesador que, por medio de una previa calibración, transforma la intensidad registrada a un valor de longitud correspondiente a la elevación de la superficie del agua respecto al nivel medio indicado (durante la calibración) y, con ayuda de programa de computadora, arroja el número de olas registradas, su altura y su periodo.



Figura III-10 Sensor de nivel

### Vectrinos

Utilizan el efecto Doppler para medir la velocidad del flujo. El efecto Doppler es el cambio en el tono que se escucha cuando la fuente del sonido o el receptor están en movimiento, en ambos casos, el cambio de tono indica qué tan rápido se está moviendo. El Vectrino transmite pares de pulsos de sonido, escucha sus ecos y, finalmente, mide el cambio en la frecuencia de regreso del sonido. Dichos pulsos son transmitidos por el transductor central, con un alcance de 5 cm por debajo de él, y el cambio Doppler introducido por los reflejos de las partículas suspendidas es capturado por cuatro receptores (Figura III-11). El sonido no se refleja en el agua, pero sí en las partículas suspendidas en ella, las cuales se mueven a una velocidad igual a la del agua. Por lo tanto, la velocidad registrada será la velocidad del agua.



Figura III-11 Vectrino (izquierda) y su funcionamiento (derecha)

### FlowMap PIV (*Positional Image Velocimetry*)

Utiliza una técnica de medición que permite obtener mapas de velocidades instantáneas, partiendo de que la velocidad es igual a una distancia dividida entre el tiempo en que se recorrió. El PIV mide la distancia que viajaron partículas sólidas suspendidas en el flujo en un intervalo de tiempo conocido, las cuales, en el caso del estudio presentado, se trata de los granos de arena. Para lograr percibir el movimiento, un láser lanza una pantalla en pulsos, lo que genera un efecto estroboscópico, congelando el movimiento de las partículas; el tiempo entre los pulsos es el requerido en el cálculo de la velocidad. Para detectar la posición de las partículas, una cámara se coloca perpendicular a la pantalla láser, la cual se sincroniza con el procesador FlowManager a una computadora, donde las partículas aparecerán como puntos iluminados en un fondo oscuro. Las fotografías se toman en dos cuadros por cada una, de manera que el primer pulso de la pantalla de láser corresponda al cuadro número 1 y el segundo pulso al cuadro número 2.

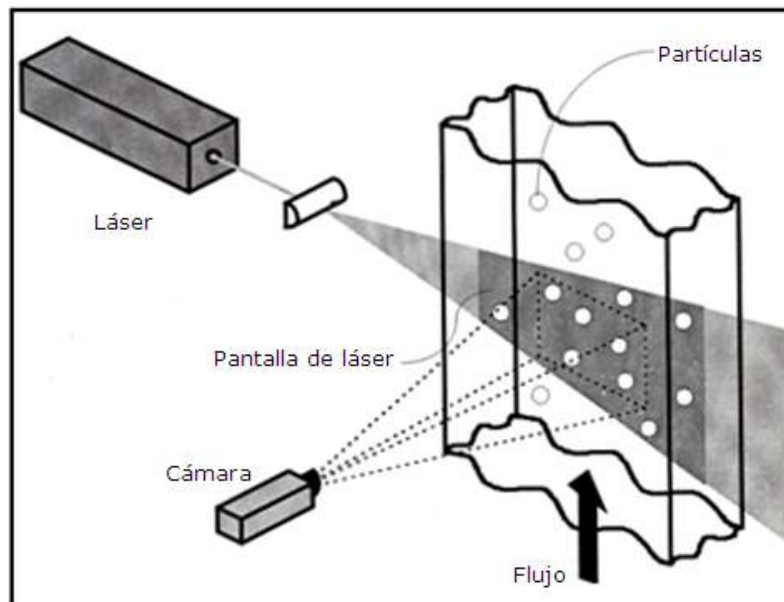


Figura III-12 Funcionamiento del PIV

Una vez tomadas las imágenes, con ayuda del procesador, se dividen en regiones rectangulares llamadas áreas de interrogación y, para cada una de ellas, la imagen del primer y segundo pulso de la pantalla láser son correlacionadas para generar un vector de desplazamiento promedio para la partícula, haciendo esto para todas las áreas de interrogación, se obtiene un mapa de vectores desplazamiento promedio de las partículas. Finalmente, dividido entre el tiempo que pasó entre las dos imágenes se genera el mapa de vectores velocidad.

## Ubicación de los equipos

Una vez colocado el modelo, se definió la ubicación de los equipos de medición con el fin de obtener datos útiles para el análisis, la ubicación longitudinal se referenció partiendo de la posición de la pala generadora de oleaje.

### Sensores de nivel

Se colocaron 3 sensores:

El primero (sensor 1) a 5 m de la pala, con el fin de registrar la altura y el periodo de las olas antes de sufrir alguna perturbación causada por la presencia del modelo.

El segundo (sensor 2) se colocó a 16.5 m de la pala, distancia correspondiente a la ubicación del final de la rampa, para así poder registrar una posible perturbación después de haber pasado por ella.

El tercero (sensor 3) se colocó a 20 m de la pala, encontrándose después del modelo y de los demás equipos de medición.

### Vectrinos

Se utilizaron 2 vectrinos ubicados a 17.05 (Vectrino 2) y 17.35 (Vectrino 1) metros de la pala con la finalidad de registrar la velocidad del flujo al inicio y a final de la muestra, de esta manera se tendrán los valores más cercanos sin que se obstruya el flujo, y principalmente la visibilidad en el área de la muestra. El transductor central se fijó a 10 cm del fondo de la cama de cubos, teniendo de esa manera el registro de la velocidad a 5 cm del mismo.

### PIV

El cañón que emite el láser se ubicó a 18 m de la pala, de manera que la pantalla tuviera el alcance necesario para cubrir la zona de la muestra pero que estuviera lo más lejos posible de ella para no perturbar el flujo. La cámara se colocó al nivel de la muestra y al centro de la misma.



Figura III-13 Ubicación de equipos de medición. De izquierda a derecha: cañón del PIV, vectrino 1, vectrino 2, sensor de nivel 2.

## Pruebas de inicio de arrastre

Previo al inicio de las pruebas de inicio de arrastre, se realizó una primera serie de pruebas con arena de Puerto Morelos, con el fin de determinar una altura de ola conveniente para registrar el inicio de arrastre, la cual sería constante en todas las pruebas, dado que se sabe de experimentaciones previas que el periodo de la ola es un factor más determinante que la altura de la ola para el inicio de arrastre. De lo cual resultó que una altura de 15 cm era adecuada, para lo que se requería una profundidad de 40 cm para evitar el rompimiento de las olas.

Una vez determinada la altura de ola de 15 cm, se buscó el periodo de ola que pusiera en movimiento a los granos, para lo que se inició la prueba con 0.9 s, apreciando un leve movimiento y dado que el diámetro de los granos de Puerto Morelos es de los menores respecto a las demás muestras seleccionadas, se decidió iniciar las pruebas con periodo igual a 1 s hasta llegar a 2 s, evaluando cada 0.2 s. Todos los ensayos se realizaron bajo condiciones de oleaje regular.

En cuanto a los parámetros de registro del PIV, debido a que el instante que se buscaba captar se mantiene un fracción de segundos y a la capacidad del equipo de cómputo, se determinó tomar 30 fotografías, separadas 0.125 s entre ellas, con 2 cuadros cada una y un tiempo entre pulsos de 0.150 ms, con lo que se tiene un tiempo total de grabación de 3.75 s.

Las pruebas realizadas a cada una de las muestras seleccionadas se basaron en la siguiente metodología:

- 1) Colocar la muestra dentro de la caja de policarbonato, cuidando que la superficie quede al ras con el borde de la caja y plana.
- 2) Establecer 40 cm de profundidad de agua en el canal y calibrar los sensores de nivel.
- 3) Iniciar la generación del oleaje bajo la condición determinada y la medición con los Vectrinos y los sensores de nivel.

Para la primera condición (altura de 15 cm, periodo de 1 s y cama plana) se enciende la pala y de manera prácticamente simultánea, el inicio de registro de los Vectrinos y de los sensores de nivel, el cual se determinó fuera de 1 min para ambos equipos.

- 4) Iniciar la grabación con el PIV.

Debido a que el movimiento de la pala comienza sobre el agua cuando está en reposo, las ondulaciones en la superficie del agua comienzan a establecerse hasta que después de algunos

---

segundos la altura de la ola se constituye regular. A partir del instante en que dicha ola llega a la muestra se inicia la grabación con el PIV. Debido a esto se presenta un desfase entre los registros de los Vectrinos y sensores de nivel con el del PIV, por lo que se toma el tiempo de dicho desfase para poder empatarlos posteriormente.

5) Permitir la formación de rizos.

Al finalizar el tiempo de grabación del PIV, continúa la generación de oleaje con el fin de permitir la formación de los rizos, cuando se hayan formado, se detiene la pala y se permite que el agua quede en reposo. Después, se repite el paso 3, ahora con formaciones de rizos en el fondo.

6) Aplanado de la cama.

Finalizada la grabación del PIV, se detiene la pala mecánica y se aplanan la cama de arena para la siguiente prueba.



Figura III-14 Aplanado de la cama de arena

7) Repetir los pasos 3, 4, 5 y 6 para las demás condiciones de oleaje.

Altura de 15 cm y periodos de 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2 s.



Figura III-15 Pruebas de inicio de arrastre

Las pruebas realizadas bajo todas las condiciones de oleaje, en cama plana y rizos, para todas las muestras, suman un total de 120 ensayos, 3600 fotografías y 7200 cuadros tomados por la cámara del PIV, 240 registros de los Vectrinos y 360 registros de los sensores de nivel, cuyo análisis se presenta en el capítulo siguiente.





# Capítulo IV

## Análisis de Resultados

---



## IV. Análisis de Resultados

### IV.1 Velocidades registradas

#### IV.1.1 Velocidades de inicio de arrastre: PIV

Como se mencionó en la sección III.2.3, a partir de las imágenes capturadas por la cámara del PIV, se obtienen los mapas de velocidades correspondientes. Tras una revisión de las imágenes de cada prueba, se eligieron aquellas en las que se observaba el inicio de arrastre, como se ejemplifica en las siguientes figuras: en la Figura IV-1 se presenta un fondo plano y en la Figura IV-2 fondo con rizos, la imagen 1 corresponde al instante en que los granos aún no se encuentran en movimiento y la imagen 2 aparecen desprendidos de la cama, en esta segunda imagen se observan por primera vez en movimiento los granos, por lo que se consideró que esa imagen correspondía al inicio de arrastre. Una vez encontrada esta imagen, utilizando el procesador del equipo (FlowManager), se generó el mapa de velocidades correspondiente (Figura IV-3), del cual se tomaron los valores de las velocidades en dirección del flujo ( $u$ ) del área que ocupaban los granos, para de esta manera obtener un promedio que correspondiera a la velocidad de inicio de arrastre. Las velocidades obtenidas se muestran en la Tabla IV-1.

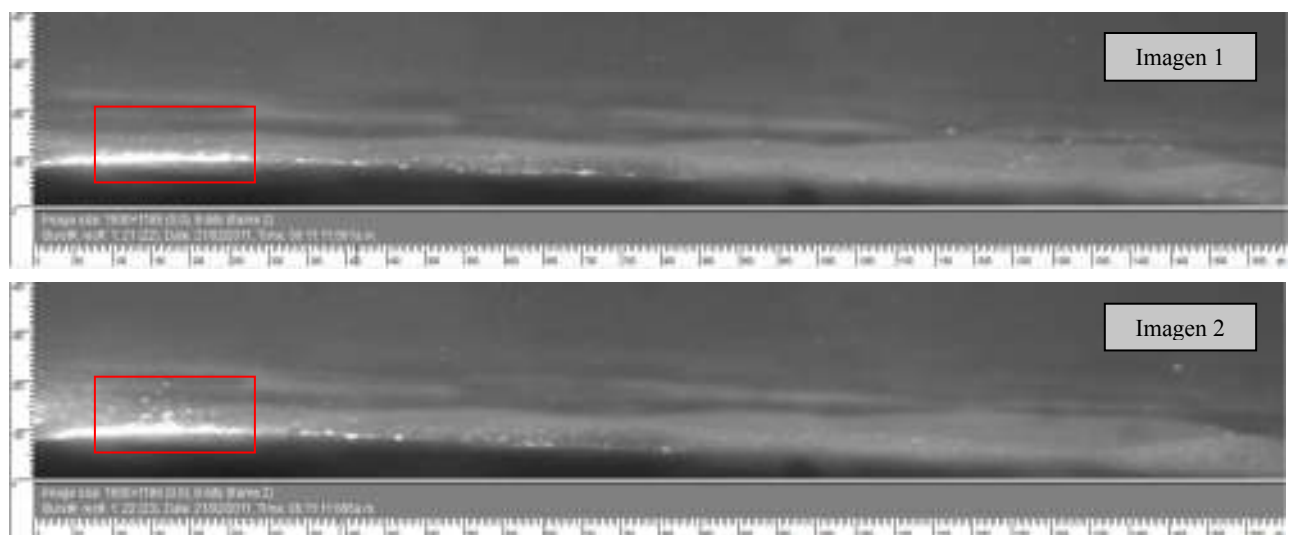


Figura IV-1 Ensayo: Akumal,  $T = 1.4$  s, cama plana

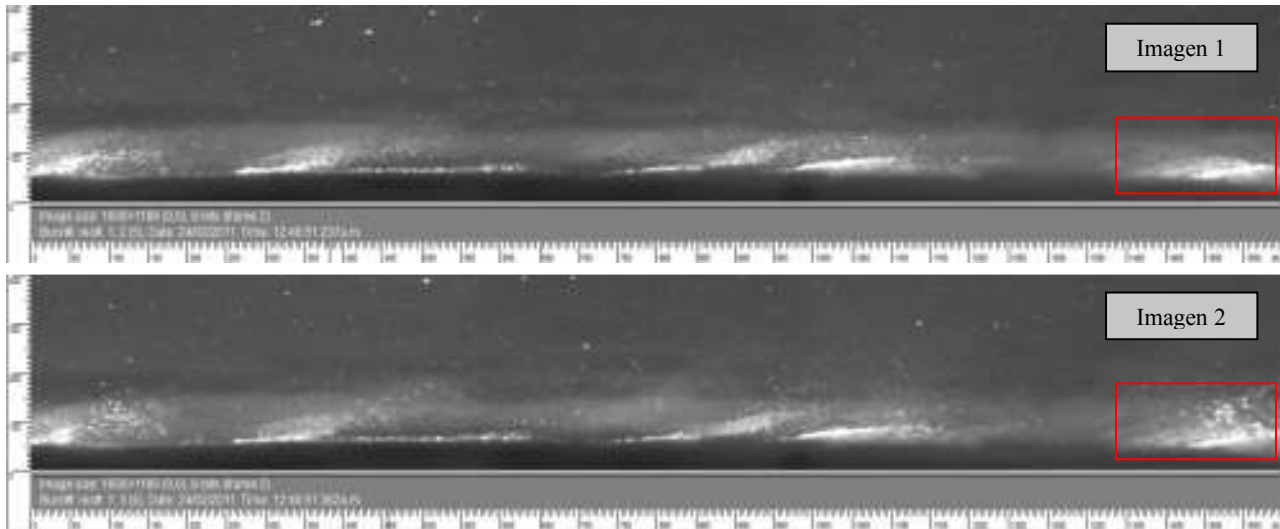


Figura IV-2 Ensayo: Chelem, T = 1.0 s, cama con rizos

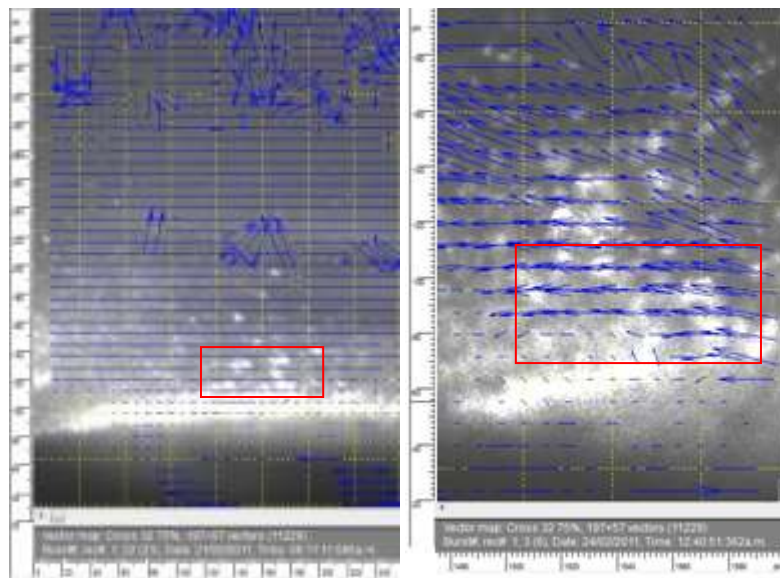


Figura IV-3 Mapas de velocidades para los cúmulos detectados en movimiento

Velocidades ( $u_{cr}$ ) en mm/s							
Muestra		T s					
		1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
Akumal	Cama Plana	82.30	157.50	91.28	-106.71	208.67	205.07
	Rizos	-123.50	140.02	-88.70	129.63	-127.69	-116.10
Puerto Morelos	Cama Plana	70.08	116.81	-169.98	-246.74	-134.25	-105.87
	Rizos	83.35	-106.34	112.90	-237.96	-182.66	-216.36
Sian ka'an	Cama Plana	-63.26	134.20	164.51	-191.08	-115.11	106.93
	Rizos	172.79	122.60	-125.90	80.11	-141.02	-142.07
Isla Mujeres	Cama Plana	-67.59	138.75	80.09	141.66	128.24	190.91
	Rizos	-56.29	-67.64	-135.83	-77.24	-71.53	-99.79
Pto. E	Cama Plana	-94.09	94.84	100.36	-107.53	-150.09	167.61
	Rizos	70.36	-95.52	-95.14	-89.77	-103.77	-105.06
Pto. 10	Cama Plana	62.12	87.62	-103.13	-123.46	-146.62	-124.83
	Rizos	60.88	-83.58		83.36	-82.42	-86.88
Holbox	Cama Plana	-49.29	141.26	-107.83	-152.66	-176.09	119.45
	Rizos		105.75		-91.75	-113.28	-106.02
Chelem	Cama Plana	50.92	-102.91	-135.37	-120.07	-204.18	-154.01
	Rizos	72.30	71.18	-130.22	-70.81	80.79	-250.09
Bahía Tortugas	Cama Plana	51.60	92.80	-168.24	-118.25	178.40	-137.55
	Rizos		83.71	-82.07	70.69	-65.47	101.77

Tabla IV-1 Velocidades registradas con el PIV

Los resultados excluyen la muestra de Pto. F (Cancún) debido a que bajo las condiciones de oleaje ensayadas no se observó ningún movimiento, de la misma manera ocurre en el caso de las celdas sombreadas de la

Tabla IV-1, en las que no se captó algún movimiento definido de los granos. Las velocidades con valores negativos indican que el inicio de movimiento se dio en sentido contrario al flujo. Para el análisis que se realiza en el presente trabajo, sólo se utilizaron valores absolutos de las velocidades, ya que el objetivo es evaluar la condición en la cual el sedimento se pone en movimiento.

### IV.1.2 Alturas y periodos de ola

Como se mencionó en el capítulo anterior, las condiciones de generación de oleaje fueron: altura de 15 cm y periodos de 1.0, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8 y 2.0 s. Debido al funcionamiento del equipo mecánico y a las posibles perturbaciones producidas por el cambio en el nivel del fondo, se determinaron las alturas medias de ola y los periodos medios presentes en cada ensayo con los registros de los sensores de nivel, siendo de especial interés los valores obtenidos del sensor 2, que se encontraba al final de la rampa, los cuales fueron utilizados para análisis posteriores debido a su cercanía con la muestra. De dichos valores se observa que el valor del periodo es prácticamente el establecido, pero en cuanto a la altura de ola, se encuentran valores menores a los 15 cm, entre 10 y 13 cm, observando que, en general, el valor aumenta con el periodo. Los valores se presentan en la Tabla A2 - 1, en la Figura IV-4 se muestra, a manera de ejemplo, uno de los registros graficados.

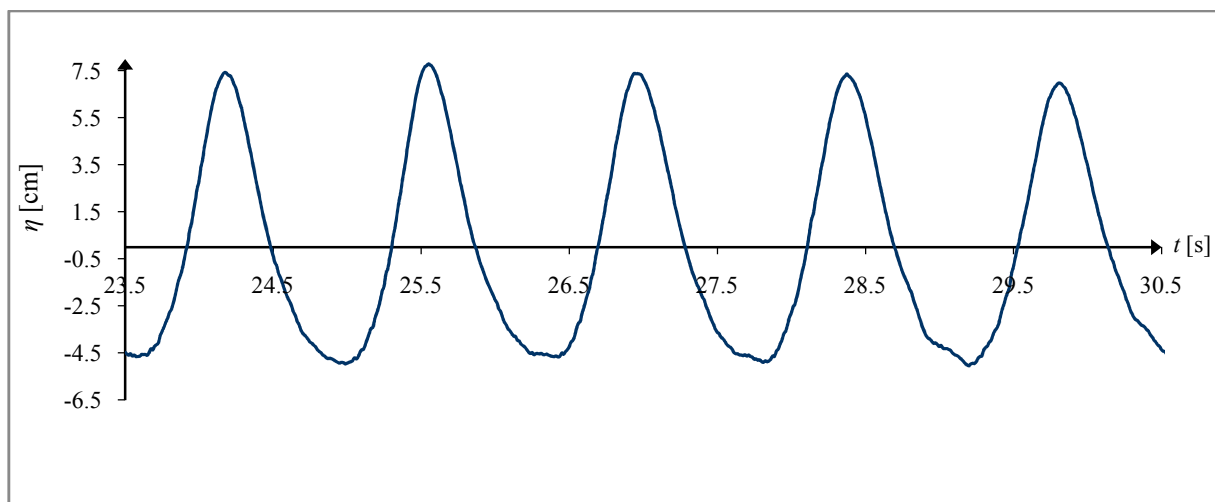


Figura IV-4 Valores correspondientes al sensor 2 para el ensayo de Chelem,  $T = 1.4$  s

### IV.1.3 Velocidades: Vectrinos

El programa para el análisis de las señales registrada por los Vectrinos arroja los valores de las componentes de las velocidades cada 0.02 s. Estos registros fueron procesados en un programa que calcula el valor de velocidad máxima ( $U_{m\acute{a}x}$ ), mínima ( $U_{m\acute{i}n}$ ), media ( $U_{med}$ ) y cuadrática media ( $U_{rms}$ ), en la dirección del flujo. Los resultados se presentan en el Anexo 2, Tabla A2 - 2.

Posteriormente se verificó que las señales de oleaje fueran semejantes a las calculadas con teoría lineal (ver Anexo 1) y de esa forma simplificar el análisis del flujo, como se describe a continuación:

Se representaron gráficamente los valores correspondientes a las velocidades en dirección del flujo registradas por los Vectrinos en el mismo plano que los valores obtenidos con teoría lineal utilizando la ecuación 76 del Anexo 1. Para estos cálculos se emplearon los valores de altura de ola y periodo mostrados en la Tabla A2 - 1, un intervalo de tiempo igual al del registro de los Vectrinos (0.02 s), una profundidad de 0.295 cm (profundidad a la que se ubica el registro del Vectrino) y un valor de la gravedad de  $9.81 \text{ m/s}^2$ . Para poder visualizar las mediciones de ambos Vectrinos en la misma fase de la onda del flujo, la señal registrada por el del Vectrino 2 se desfasó, debido a la distancia que había respecto al Vectrino 1. Para dos periodos de ola diferentes, en la Figura IV-5 se muestran segmentos de dos registros de dos diferentes ensayos.

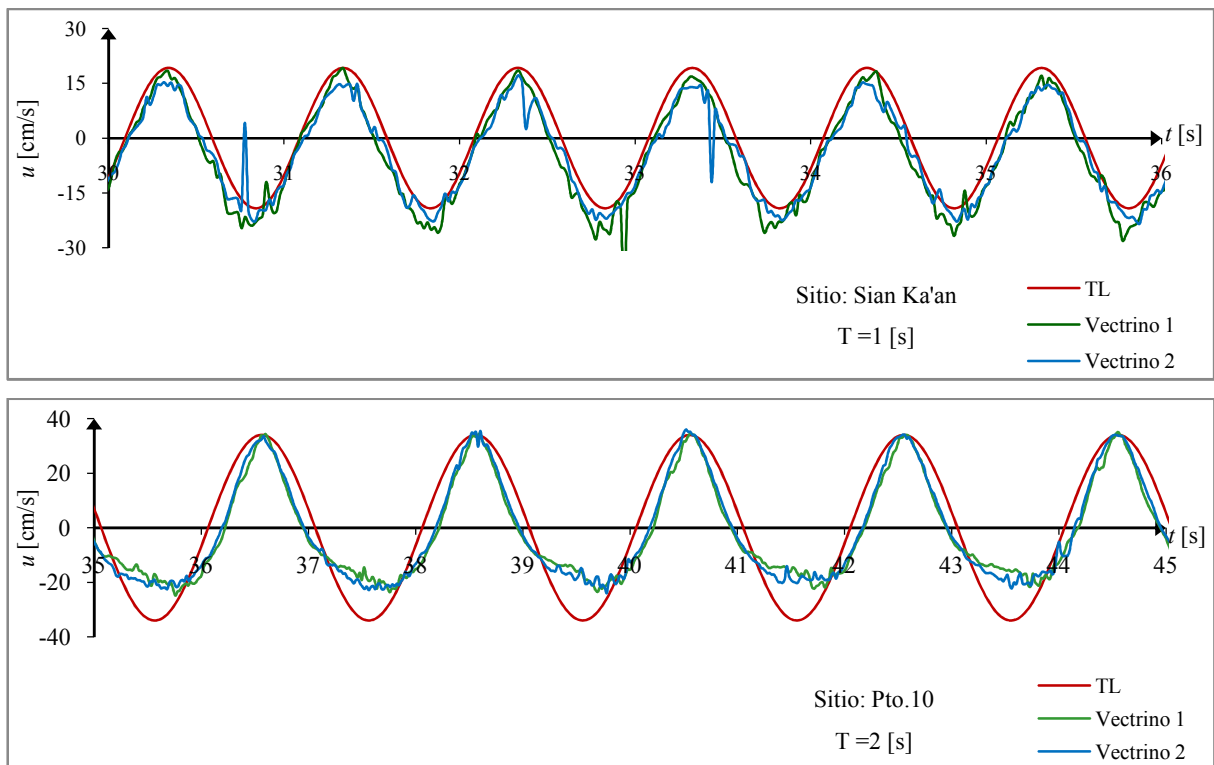


Figura IV-5

En las gráficas anteriores se observa que para el periodo de 1 s los registros se aproximan aceptablemente a un comportamiento lineal, aunque en el caso de los valores mínimos las velocidades teóricas quedan ligeramente por debajo de los registrados. Conforme el periodo aumenta los valles se

vuelven más amplios, siendo menores que los valores proporcionados por la teoría lineal, sin embargo también se observa que para el periodo más largo de los ensayados (2 s), los valores máximos presentan resultados adecuados. Por ello se acepta que el comportamiento es lineal y que el uso de los valores máximos de las velocidades es adecuado. Se comprueba también, que con el aumento del periodo existe un aumento en la velocidad en el fondo.

Posteriormente se analizó la variación entre el registro de los Vectrino respecto a la velocidad que se obtiene en el fondo utilizando teoría lineal. En la Figura IV-6 se muestra gráficamente la comparación de dichos valores, para los mismos casos ejemplificados. De dicha comparación se concluye que para el menor de los periodos utilizados, la velocidad en el fondo es igual a la velocidad registrada por los Vectrinos, y al aumentar el periodo, son ligeramente menores en las crestas y en el caso de los valles, como ya se mencionó, varían considerablemente, como se observa para el periodo más grande. De esta manera se aceptó también el uso de los valores máximos medidos con los Vectrinos como los valores máximos de las velocidades en el fondo, tomando como valor final el promedio de ambos para tener una mejor aproximación.

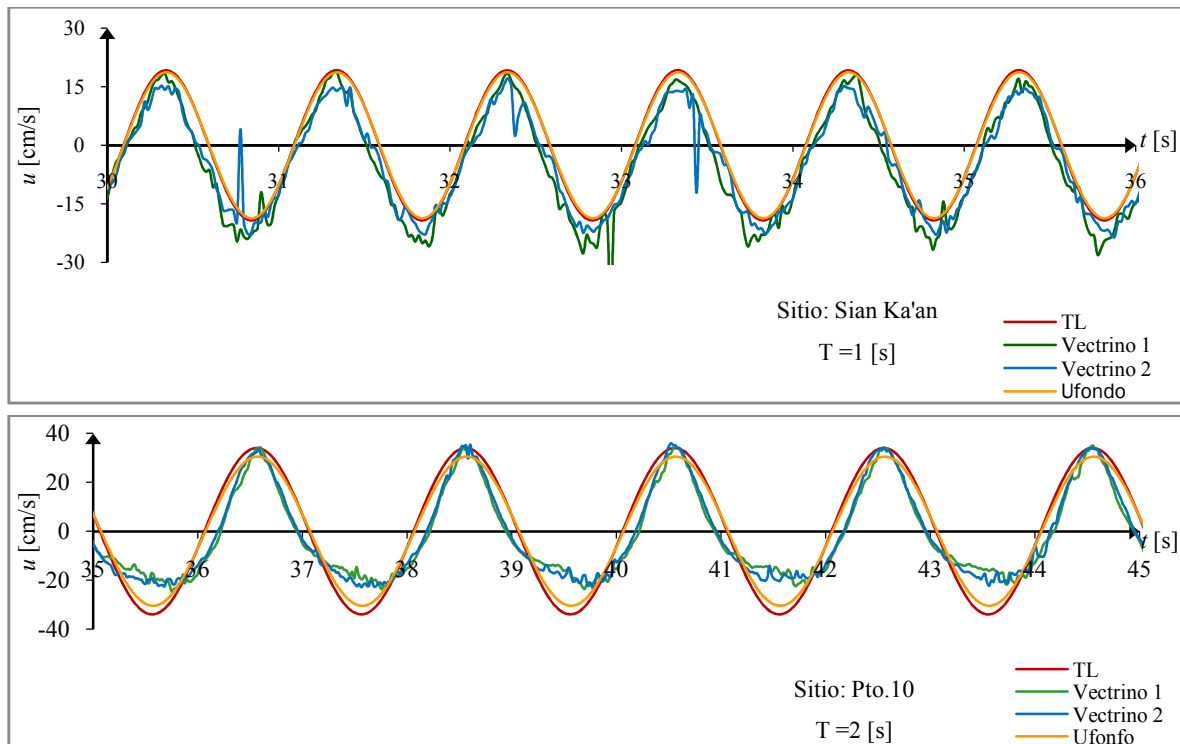


Figura IV-6



Comparando estos valores con los obtenidos por el PIV se observa que en ningún caso se presenta el inicio de arrastre con la velocidad máxima, positiva ni negativa, por lo que se determina que el inicio de arrastre no ocurre con la velocidad máxima del flujo, sino que comienza con velocidades menores, cuyo valor, al igual que el de la velocidad máxima, varía con el periodo.

## IV.2 Estimación del esfuerzo cortante

Utilizando la metodología presentada en la sección II.3.1, se presentan en la Tabla A2 - 3 los resultados obtenidos del esfuerzo cortante en el fondo, del parámetro de Shields y del diámetro adimensional para cada ensayo, tomando para cada caso las respectivas consideraciones debidas al tipo de fondo que presentaba la cama de arena y los valores registrados de los granos con ayuda del PIV.

A partir de estos valores, se ubicaron los puntos en el diagrama de propuesto por Soulsby, basado en el trabajo de Shields (Figura IV-7). Se presentan diferenciadas en color las muestras del estado de Quintana Roo con las de Yucatán y Campeche.

En general se observa un comportamiento similar al propuesto por la curva, pero con una dispersión vertical, debido a que este valor depende las velocidades obtenidas del PIV, por lo que influyen las variables propias de dichos valores.

Por otro lado, la curva queda por debajo de los puntos graficados en la mayoría de los casos, lo que implica que se tuvieron velocidades de inicio de arrastre mayores a las que se determinan en el diagrama y por lo tanto, el esfuerzo crítico es mayor, obteniendo una sobreestimación de los valores que esulta conservadora para el cálculo del transporte de sedimentos. Dicho comportamiento se observa también en los puntos experimentales presentados por Soulsby (1997) bajo la misma curva, en la Figura II-7. En el caso de la muestra con el diámetro mayor (Bahía Tortugas, Campeche), los valores quedan claramente por debajo de la curva y alejados de los demás puntos. Esto se atribuye a que su diámetro  $d_{50}$  es considerablemente mayor al de las otras muestras, a la forma de los granos, que es aplanada (como se observa en la

Figura III-5), y a que es una mezcla de fragmentos de concha y de aportes fluviales de materiales terrígenos (las demás muestras son únicamente de origen biogénico).

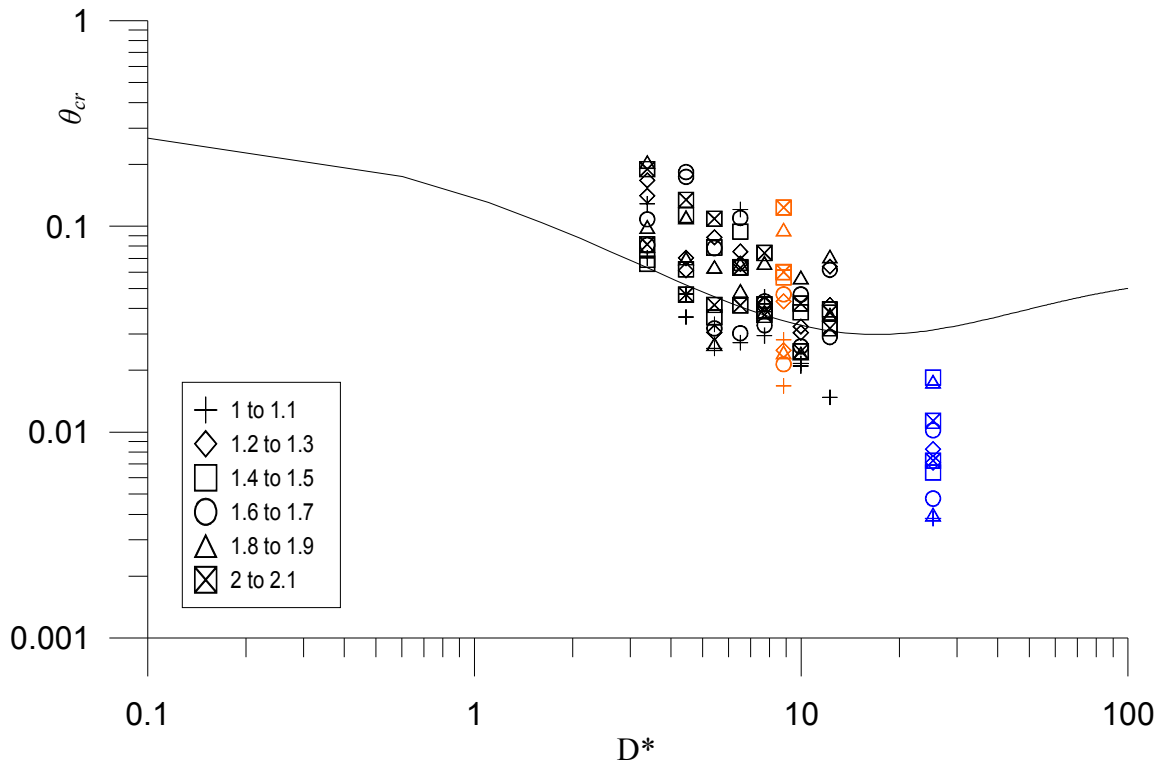


Figura IV-7 Esfuerzo cortante crítico. Los símbolos en color negro representan las muestras del estado de Quintana Roo, en color rojo la de Yucatán (Chelem) y en azul la de Campeche (Bahía Tortugas).

El trabajo realizado por Shields para corrientes fue ampliado por Soulsby para oleaje, pero la curva no considera de forma directa el valor del periodo del oleaje. En la Figura IV-7 se identificaron con diferentes símbolos los puntos de acuerdo al periodo que pertenecen, de lo cual se infiere una tendencia del parámetro de Shields a aumentar cuando el periodo aumenta, si esto ocurre, se espera que de igual manera, la velocidad crítica lo haga, lo cual puede determinarse en un análisis del periodo, o alguna otra condición hidrodinámica dependiente de él, y las velocidades críticas, como se presenta en la sección IV.4.

Otro diámetro que puede resultar representativo en el caso de los sedimentos, es el diámetro nominal ( $d_N = \sqrt[3]{abc}$ ) que relaciona los ejes  $a$ ,  $b$  y  $c$  que tendría un elipsoide con la forma de la partícula para obtener el diámetro de una esfera de mismo volumen. Utilizando los valores promedios de los diámetros nominales de las muestras (del Valle, 2010), se representan gráficamente en la Figura IV-8 los resultados obtenidos.

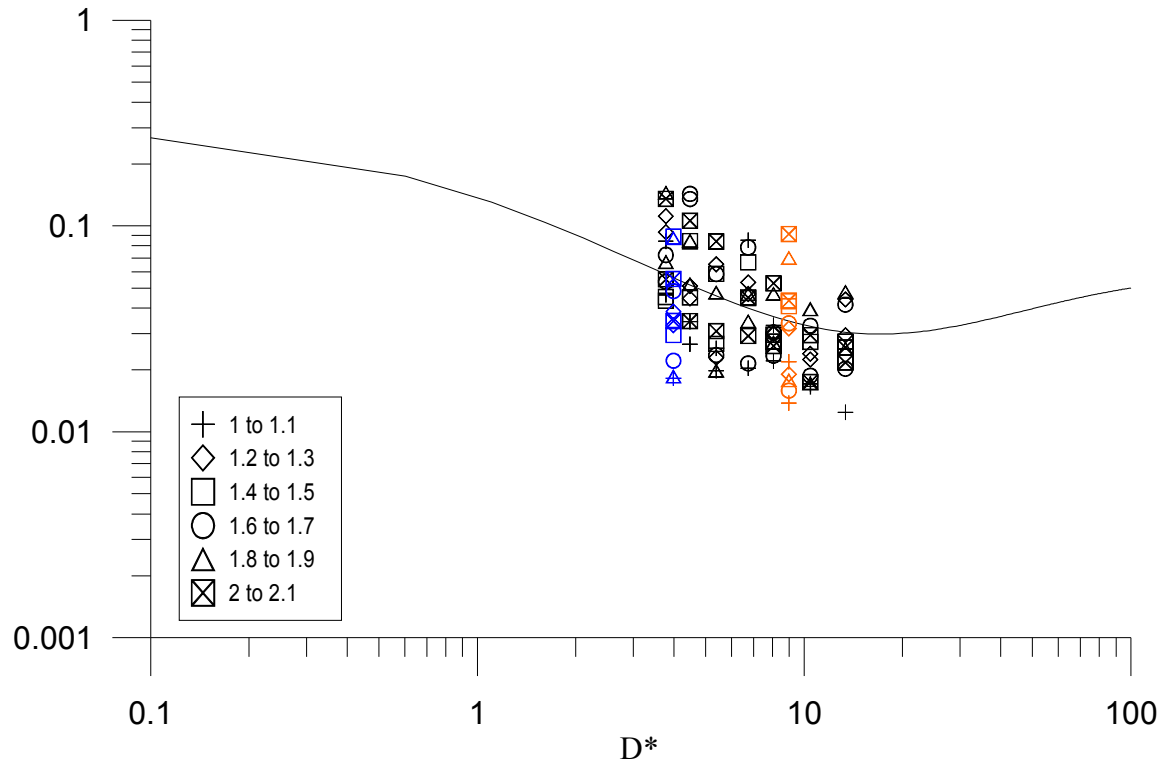


Figura IV-8 Esfuerzo cortante crítico, utilizando el diámetro nominal de las muestras. Los símbolos en color negro representan las muestras del estado de Quintana Roo, en color rojo la de Yucatán (Chelem) y en azul la de Campeche (Bahía Tortugas).

Como se observa en la Figura IV-8, al utilizar el valor del diámetro nominal, los valores se ajustan de mejor a la curva, quedando dispersos de manera simétrica en sentido vertical, y, en el caso de Bahía Tortugas, los puntos presentan el mismo comportamiento que las demás muestras. Esto indica que el valor del esfuerzo cortante crítico resulta muy sensible al valor del diámetro que se utilice para su cálculo, por lo tanto, una adecuada selección del valor representativo del diámetro de la muestra basada en un análisis morfológico de las partículas es lo más conveniente. En el caso de Bahía Tortugas, como se mencionó, las partículas tienen una forma aplanada, por lo que resultó más adecuado el uso del diámetro nominal respecto al  $d_{50}$ .

### IV.3 Comparación con resultados previos

Además de presentar los resultados en el diagrama anterior, se representaron gráficamente los resultados obtenidos sobre el nomograma realizado por van Rijn (1989), donde relaciona el periodo de la ola con la velocidad de crítica en el fondo, presentando curvas para diferentes valores de diámetros (Figura IV-9). Para graficar los puntos experimentales se tienen rangos de diámetros, diferenciados por

diferentes símbolos. A diferencia del trabajo de Soulsby, van Rijn toma en cuenta de forma directa el valor del periodo que presenta el oleaje bajo el cual se sometieron las muestras, observándose en sus curvas para diferentes valores de diámetros, que la velocidad crítica aumenta con el periodo de la ola, coincidiendo con lo determinado de la Figura IV-7.

Debido a que las curvas inician en un periodo de 4 s y a que en el estudio realizado se tienen periodos menores, se continuaron las curvas con la tendencia observada para poder ubicarlos. Como se observa en los resultados representados gráficamente en diferentes colores, correspondientes a los valores obtenidos por el PIV, se tienen velocidades que muestran aproximadamente el mismo orden de dispersión que los resultados reportados por van Rijn.

Con los resultados obtenidos en este trabajo, como ocurre en la expresiones propuestas por Komar y Miller (1974), se observa que para un mismo periodo, la velocidad crítica que pone movimiento los granos será mayor si el diámetro aumenta, pues requiere un mayor esfuerzo para hacerlo, y para un mismo valor del diámetro, si el periodo aumenta, la velocidad también lo hará. En general, en los trabajos experimentales sobre sedimentos se obtienen resultados con grandes dispersiones, como puede observarse en los trabajos realizados que relacionan el parámetro de Shields crítico con características de los sedimentos (Camenen, 2007).

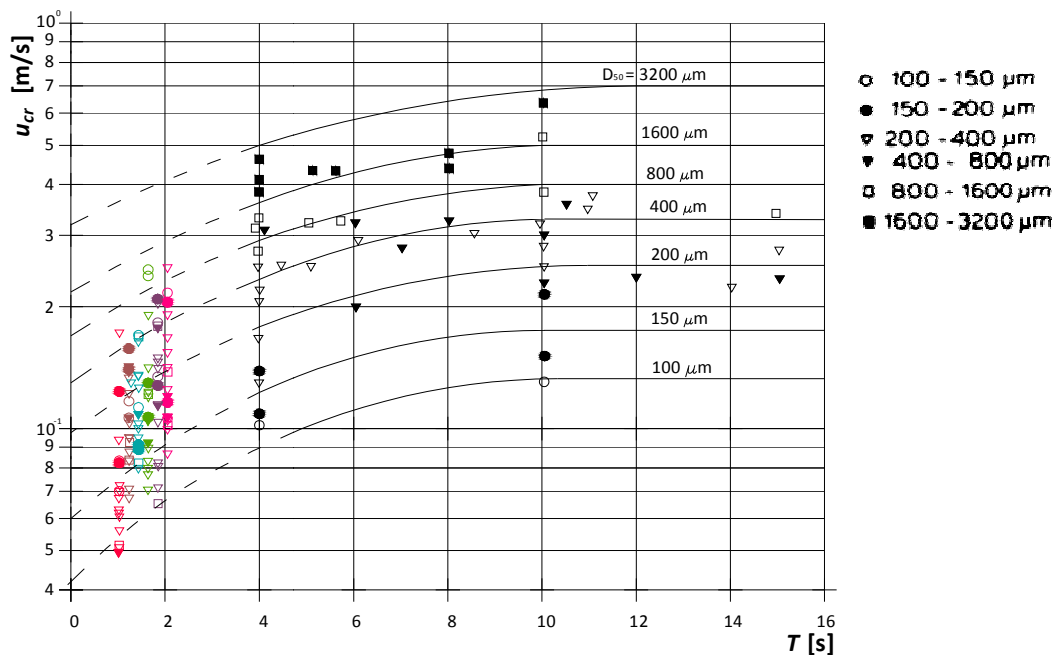


Figura IV-9 Velocidades críticas para diferentes periodos y diámetros

## IV.4 Curva propuesta

Con la finalidad de determinar una relación entre las velocidades de inicio de arrastre de los granos y las características hidrodinámicas del flujo que puedan ser medidas experimentalmente, se buscó un ajuste matemático entre las velocidades medidas por el PIV y las velocidades máximas en el fondo, las cuales, como se mencionó, se asumen iguales a las medidas por los Vectrinos. Utilizando el programa CurveExpert Professional se buscó el mejor ajuste para los puntos, de los cuales se eligió el que generara una mejor correlación y que su forma matemática fuera sencilla matemáticamente (lineal, logarítmica, exponencial, etc.). La mejor correlación fue la obtenida para un ajuste lineal de la forma  $y = a + b*x$ . Además, se muestran las bandas de confianza al 95% (indican que un punto tiene el 95% de probabilidad de caer dentro de ellas), las bandas de probabilidad, también al 95% (indican que el 95% de los puntos graficados quedan dentro de ellas) y la expresión del ajuste.

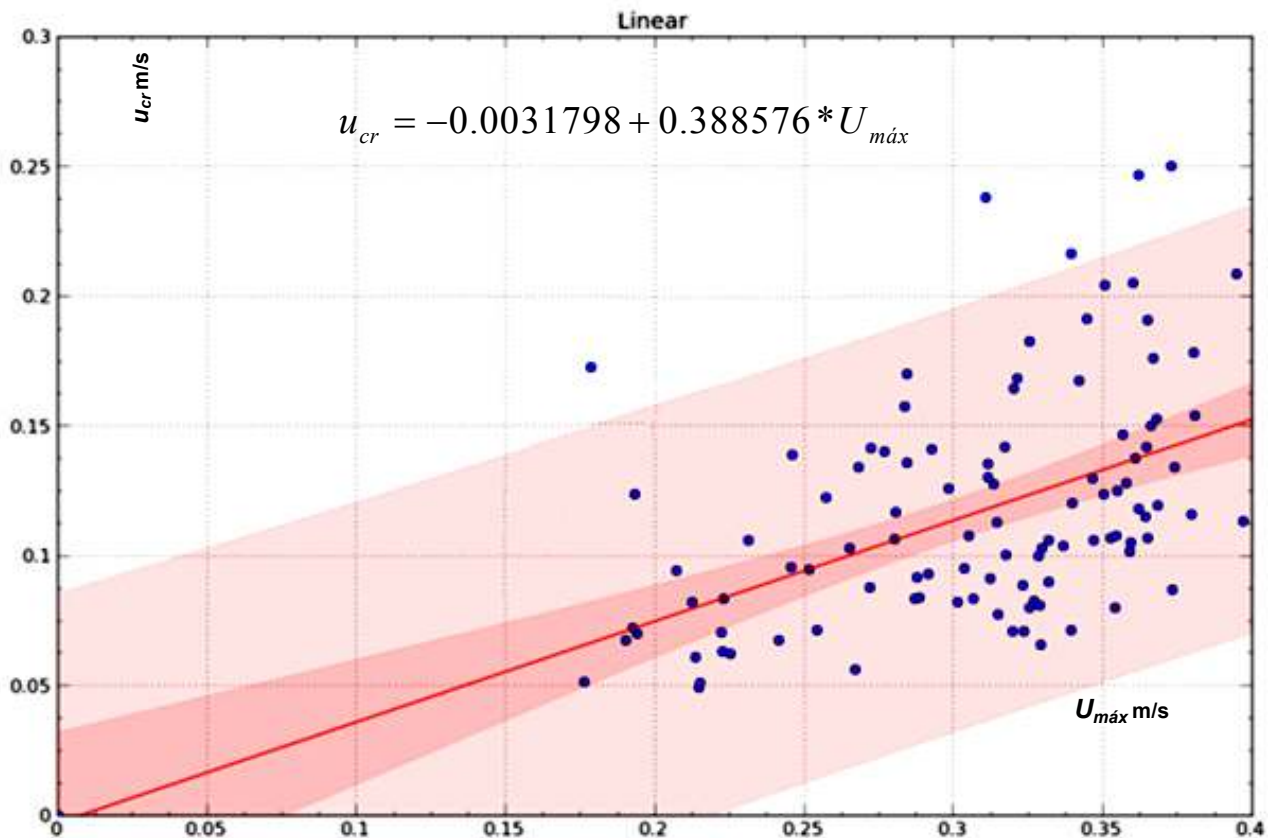


Figura IV-10 Curva de ajuste

De la curva obtenida se observa que se tiene una correlación muy baja, lo que implica que el ajuste encuentra una relación limitada entre las variables, pero debe tomarse en cuenta la variabilidad en la obtención de las velocidades registradas por el PIV, por lo que no puede concluirse que no existe una relación de la velocidad de inicio de arrastre con las condiciones del flujo, representadas por la velocidad máxima. El comportamiento que se deduce es que entre mayor sea la velocidad en el fondo, también lo será la de inicio de arrastre.

---

# Capítulo V

## Conclusiones y Futuras Líneas de Trabajo

---





## V. Conclusiones y Futuras Líneas de Trabajo

El inicio de arrastre de sedimentos resulta un tema complejo debido a la cantidad de variables involucradas. Durante décadas se han realizado trabajos con el fin de determinar cuáles son las variables más trascendentes y en qué forma se relacionan, tanto las características de los sedimentos como las condiciones hidrodinámicas de flujo.

También, debido a la variabilidad del fenómeno, no ha sido posible establecer matemáticamente un modelo que represente el inicio de arrastre basado en la física que lo determina, por lo que los trabajos encontrados son aproximaciones experimentales, que quedan limitadas por la metodología empleada y las características de los materiales utilizados, pero que representan una posibilidad de cálculo de las condiciones del inicio de arrastre.

En el presente trabajo se expone una metodología basada en la utilización de equipos con tecnología actual que permite una mejor aproximación a los valores de las variables que intervienen en el fenómeno, especialmente en el caso del PIV, que hasta ahora no ha sido utilizado para evaluación de esta condición crítica.

En cuanto a los valores obtenidos de los registros de los sensores de nivel y de los Vectrinos, los resultados son confiables, como se comprobó, por lo que permiten hacer deducciones válidas a partir de ellos. Respecto a las velocidades determinadas con el PIV puede determinarse un comportamiento en general de los resultados y una similitud con los valores determinados en experimentaciones previas, pero no un buen ajuste. Dichas velocidades, como se mencionó, corresponden a las velocidades que el programa calcula a partir de la correlación de la localización de partículas, asumiendo que la velocidad del agua es igual a la de las mismas, como se consideró en este trabajo, pero en estricta definición, se trata de las velocidades de los granos, determinada con una altísima precisión, lo cual puede resultar de gran aporte para los trabajos sobre el tema, pero de igual forma exigen la misma precisión en todas las demás variables que se involucran en el ensayo.

Una comparación entre las velocidades del agua y de los granos en el mismo instante sería determinante para concluir si los granos se levantan con la misma velocidad que lleva el agua en ese instante y si resultados obtenidos del PIV son comparables con los trabajos previos, lo cuales manejan la velocidad del agua. Debido a que en el fondo, los rangos de variabilidad de la velocidad orbital son muy pequeños, todos podrían considerarse del orden, por lo que determinar la velocidad en el instante

---

exacto sería necesario; para ello podría tenerse el registro de la velocidad en el fondo (medidos por los Vectrinos) y ubicarse en tiempo el instante de inicio de movimiento, para así determinarse la velocidad del agua y posteriormente compararla con la velocidad determinada con el PIV y poder realizar la conclusión pertinente. Esta propuesta presenta el inconveniente de que una alta precisión sería requerida, por la sensibilidad del corto rango de valores, y con los equipos utilizados en este trabajo se tienen las siguientes condiciones:

- ✘ El inicio de arrastre fue determinado por la apreciación del instante en que ocurre en las imágenes capturadas por el PIV, aunque la separación en tiempo es aparentemente mínima, el instante podría haber ocurrido antes, por lo que los granos podrían presentar ya una aceleración, y por lo tanto una velocidad mayor a la de inicio de arrastre.
- ✘ El tiempo entre el inicio de los registros fue determinado con ayuda de un cronómetro, sincronizando primero el de los sensores de nivel, y posteriormente el de los Vectrinos, por lo cual existe un desfase en tiempo no cuantificado.

Debido a esto sería conveniente que la captura del ensayo se hiciera con un equipo con la capacidad de disminuir de manera importante el tiempo entre imágenes, y así poder determinar con mayor precisión el inicio de arrastre, además de sincronizar de manera adecuada los registros. Además de la variabilidad en el valor de la velocidad, se atribuye cierta variación al valor del diámetro utilizado, pues, por ejemplo, en la Figura IV-9 se involucra en ambos ejes el valor del diámetro, el cual, como se explica en la sección II.2.1, suele manejarse como el diámetro mediano de la muestra ( $d_{50}$ ), pero dicha consideración es sólo una aproximación, pues resulta altamente probable que los granos que se hayan levantado no tengan ese diámetro, pues se espera que los primeros en iniciar el movimiento sean granos de diámetros menores respecto a los que se encuentran sobre la cama, aunque de ello también depende el acomodo que tengan las partículas en el fondo. Con el fin de concluir si esta situación afecta considerablemente los resultados, se propone una revisión de la metodología utilizando partículas esféricas de densidad constante, pues en caso de observar que la dispersión disminuye bajo estas condiciones, entonces se atribuirá la variabilidad de los resultados a los sedimentos, y no a la metodología propuesta.

Por otro lado se observó en la curva propuesta, que la relación entre las velocidades máximas del fondo presenta una baja correlación con las determinadas por el PIV, por lo que podría concluirse que no existe alguna relación entre dichas variables, para el conjunto de datos obtenidos. Dicha interacción buscada resulta independiente del hecho de que la velocidad registrada por el PIV corresponda a la del agua o a la de los granos, pero sí puede observarse que conforme la velocidad máxima del fondo aumenta, también lo hace la de los granos, pero en ello podrían influir variables como el diámetro y densidad de los granos, pues como se observó en la Figura IV-9, el origen de los

---

sedimentos puede influir de manera importante en su comportamiento. El número de datos analizados se considera importante, pero un mayor número de ensayos, sobre todo la repetitividad de los mismos, y abarcando un mayor rango de condiciones hidrodinámicas, podrían aportar mejores resultados.

Como parte de los trabajos que han sido realizados para caracterizar los sedimentos de la Península de Yucatán, este trabajo presenta una primera aproximación al comportamiento de los mismos ante el inicio de arrastre y se propone una mejora en la metodología de evaluación, tomando las consideraciones expuestas, con el fin de obtener valores de la velocidad del inicio de arrastre que permita un estudio más aproximado a la realidad en cuanto al tema del transporte de sedimentos de la región, el cual se traduce en un gran impacto económico y su adecuada predicción sería de gran utilidad. Es importante mencionar que partiendo de la gran precisión que puede obtenerse con el uso tecnología actual, es decir, del PIV, sobre el valor de las velocidades, no se espera que los resultados se ajusten a trabajos previos, realizados con equipos menos precisos, pero sí se esperaría encontrar un comportamiento definido para los sedimentos de la región.



## Bibliografía

---



# Bibliografía

Alcérreca Huerta, J. C. (2011). *Determinación de los umbrales de movimiento de arenas de la Península de Yucatán*. México: Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Camenen, B., & Larson, M. (2007). *A Unified Sdeiment Trasnpot Formulation for Coastal Inlet Application*. US Army Corps of Engeneers.

Carranza Edwards, A. (2009). *Causas y consecuencias de la erosión de playas*. México: Instituto de Ciencias del MAr y Limnología, UNAM.

Cavazos, D. R. (2009). *Zonificación de la Península de Yucatán a partir de un análisis sedimentológico*. México: Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Comisión Federal de Electricidad. (en edición). *Manual de Diseño de Obras Civiles*.

Del Valle Morales, J. (2010). *Velocidad de caída de arenas costeras de la Península de Yucatán, México*. México: Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Environmental and Water Resources Institute. (2008). *edimentation Engineering: Processes, Measurements, Modeling, and Practice*. Estados Unidos: ASCE Publications.

*FlowManager software and Introduction to PIV Instrumentation*. (2002). Dante Dynamics.

Gutiérrez Barba, B. E., & Herrera Colmenero, N. (2001). *La ingeniería ambiental en México*. México: Limusa.

Instituto Nacional de Ecología. (s.f.). *El mar, las islas y sus recursos*. Recuperado el 25 de marzo de 2011, de Importancia y conceptualización: <http://www2.ine.gob.mx>

Medina, R., Losada, I., Losada, M. A., & Vida, I. C. (1995). Variabilidad de los perfiles de playa: forma y distribución granulométrica. *Ingeniería del Agua* , 133-145.

Mendoza Baldwin, E. G. (2002). *Diques arrecife como elementos de protección litoral*. México: Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Richardson, E. V., Simons, D. B., & Haushild, W. L. *Boundary form and resistance to flow in alluvial channels*. Colorado: U.S. Geological Survey.

Ruiz Martínez, G. (2009). *Determinación del estado morfodinámico de segmentos de playa que poseen obstáculos sumergidos y emergidos*. México: Tesis Doctoral, Facultad de de Ingeniería, UNAM.

Silva Casarín, R. (2005). *Análisis y descripción estadística del oleaje*. México: Instituto de Ingeniería, UNAM.

Sorensen, R. M. (2006). *Basic coastal engineering*. Estados Unidos: Springer Science.

Soulsby, R. (1997). *DYNAMICS OF MARINE SANDS*. Gran Bretaña: Thomas Telford Publications.

Svendsen, I. A. (2006). *Introduction to nearshore hydrodynamics*. World Scientific.

Van Rijn, L. C. (1984b). Suspended load transport. *Journal of Hydrulic Engineering, ASCE, Núm. 11* , 1613-1641.

Van Rijn, L. C. (2007a). United view of sediment transport by currents and waves I: Initiation of motion, Bed roughness and Bed loas trasnport. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE Vol 133, No. 6* , 649-667.

Van Rijn, L. C. (2007b). United view of sediment transport by currents and waves II: Suspended transport. *Journal of Hydrulic Engineering, ASCE. Vol. 133, No. 6* , 668-689.

*Vectrino Velocimeter. User Guide*. (2004). Nortek AS.

---



# Anexo 1

## Teoría lineal

---



## Anexo 1. Teoría lineal

Las perturbaciones presentes en la superficie libre del mar se traducen en variaciones de la elevación de la superficie libre en el tiempo y el espacio. Dichas perturbaciones se propagan en un fluido viscoso sobre un fondo irregular de permeabilidad variable. En general, la propagación de oleaje en un fluido es movimiento oscilatorio no lineal, sin embargo se puede simplificar su análisis físico y matemático para conocer sus características cinemáticas y dinámicas con algunas consideraciones:

- ✗ Las fuerzas principales responsables del movimiento ondulatorio son las de gravedad y las producidas por las diferencias de presión.
  - ✗ Fluido no viscoso. En virtud que los efectos viscosos solo son significativos en las proximidades de los contornos, y para el movimiento oscilatorio el espesor de la capa limite es del orden de milímetros, por lo que se puede aceptar que la viscosidad es propiamente nula y no hay tensiones tangenciales.
  - ✗ El movimiento oscilatorio puede suponerse irrotacional.
  - ✗ Fluido incompresible y homogéneo. El agua puede tratarse como un fluido casi incompresible.
  - ✗ La presión en la superficie libre del mar es uniforme y constante.
  - ✗ No existe interacción del oleaje con ningún otro movimiento marino.
  - ✗ El efecto de Coriolis.
  - ✗ El fondo se tomara fijo e impermeable.
  - ✗ Amplitud de onda pequeña respecto a la profundidad e invariable en tiempo y espacio.
  - ✗ Ondas de gran longitud respecto a su amplitud.
  - ✗ El periodo es constante.
-

## Condiciones de contorno

### Condición de contorno cinemática

Para encontrar una expresión que represente una condición cinemática de contorno puede emplearse la ecuación que describe dicho contorno, considérese entonces que cualquier superficie fija o móvil puede ser expresada como:

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad \text{Ec. 1}$$

La dependencia del tiempo se incluye ya que el fenómeno físico en estudio, una onda propagándose en el agua, así lo manifiesta. Esto conlleva a que la derivada total de la superficie con respecto al tiempo sea cero, esto es:

$$\left. \frac{DF(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{F(x, y, z, t)=0} = 0 \quad \text{Ec. 2}$$

Lo cual también puede escribirse como:

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \bar{u} \cdot \nabla F = \bar{u} \cdot n |\nabla F| \quad \text{Ec. 3}$$

donde  $n$  es un vector unitario normal a la superficie libre, definido por

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad \text{Ec. 4}$$

Reagrupando, la condición cinemática de contorno puede ser expresada como:

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{en} \quad F(x, y, z, t) = 0 \quad \text{Ec. 5}$$

donde

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad \text{Ec. 6}$$

**Condición cinemática en el fondo**

Si el fondo es impermeable:

$$\bar{u} \cdot n = 0 \tag{Ec. 7}$$

La ecuación que describe el fondo es:

$$F(x, y) = z + h(x, y) = 0 \tag{Ec. 8}$$

Sustituyendo la ecuación (8) en la ecuación (4), se obtiene:

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x}i + \frac{\partial h}{\partial y}j + 1k}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \tag{Ec. 9}$$

Realizando el producto punto de  $\bar{u}$  por  $n$ , multiplicando por la raíz cuadrada del denominador se obtiene:

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en} \quad z = -h(x, y) \tag{Ec. 10}$$

donde

$$w = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi \quad \text{en} \quad z = -h(x, y) \tag{Ec. 11}$$

$$\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$$

Para fondo horizontal, la ecuación (11) queda:

$$w = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \tag{Ec. 12}$$

La cual es la condición de contorno cinemática en el fondo.

**Condición cinemática en la superficie libre**

La superficie libre del agua puede ser descrita por medio de la siguiente expresión:

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \tag{Ec. 13}$$

donde  $\eta$  es el desplazamiento de la superficie libre del agua sobre el nivel  $z$ .

Sustituyendo la ecuación (13) en la ecuación (5), se obtiene la siguiente expresión:

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad \text{Ec. 14}$$

Por otro lado, de sustituir la ecuación (13) en la ecuación (4), se obtiene:

$$n = \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + 1k}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{Ec. 15}$$

Realizando el producto punto de  $\bar{u}$  por  $n$ , ecuación (15) e igualando con la ecuación (14), se obtiene:

$$\bar{u} \cdot n = \bar{u} \cdot \frac{\left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + 1k\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{Ec. 16}$$

operando igual que en el caso anterior se llega a:

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad \text{Ec. 17}$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad \text{Ec. 18}$$

La ecuación (18) es la condición de contorno cinemática de superficie libre.

### **Condición de contorno dinámica**

La condición dinámica de superficie libre queda definida la ecuación de Bernoulli (19), la cual también puede ser expresada como se muestra en la ecuación (20).

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad \text{Ec. 19}$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad \text{Ec. 20}$$

Cuando el movimiento es considerado irrotacional, se desprecian los términos cuadráticos, por tanto, la solución del problema consiste en determinar la función del potencial de velocidades  $\Phi(x,y,z,t)$  que satisface las condiciones de contorno en la superficie libre y en el fondo.

### **Condición de contorno mixta de superficie libre**

Bajo la hipótesis de fluido incompresible, la conservación de la masa se define como:

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \text{Ec. 21}$$

donde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \quad \text{Ec. 22}$$

$$\bar{u} = (u, v, w) \quad \text{Ec. 23}$$

La condición de irrotacionalidad en el flujo se expresa por:

$$\nabla \times \bar{u} = \bar{W} = 0 \quad \text{Ec. 24}$$

donde  $\bar{W}$  es la vorticidad del fluido.

Si el flujo es irrotacional, entonces se puede demostrar que existe una función potencial  $\Phi(x,y,z,t)$ , tal que:

$$\bar{u} = -\nabla \Phi \quad \text{Ec. 25}$$

Bajo este supuesto, la expresión de la conservación de la masa se puede expresar por la ecuación de Laplace como:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Ec. 26}$$

Para integrar esta ecuación, se deben establecer condiciones en el contorno del dominio de integración, las cuales corresponden a las condiciones cinemáticas, ecuaciones (10) y (18), y dinámica, ecuación (20), presentadas .

Para obtener una condición de contorno mixta de superficie, las ecuaciones (17) y (20) se pueden combinar, para tal efecto, primero considérese la derivada total de la ecuación (20):

$$\begin{aligned}
g \frac{d\eta}{dt} &= g \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\
&\text{en } z = \eta(x, y, t)
\end{aligned} \tag{Ec. 27}$$

La cual también se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
g \left( -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \\
\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) &\left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \\
&\text{en } z = \eta(x, y, t)
\end{aligned} \tag{Ec. 28}$$

Sustituyendo la ecuación (28) en (18), se obtiene:

$$\begin{aligned}
g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \\
\left( -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) &\left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \\
&\text{en } z = \eta(x, y, t)
\end{aligned} \tag{Ec. 29}$$

Dado que no es posible evaluar  $\eta(x, y, z, t)$  *a priori*, se puede hacer una estimación haciendo uso de una expansión en serie de Taylor, tal que:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_m \tag{Ec. 30}$$

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \eta_m \tag{Ec. 31}$$

donde  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño que tiene que ser evaluado, y cada potencial de velocidades debe satisfacer la ecuación de Laplace (Ec. 26)



Las condiciones de contorno de superficie libre (20) y (28) se expanden en series de Taylor sobre el nivel de reposo del agua  $\eta = 0$ , dando como resultado:

$$\eta = -\frac{1}{g} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] \quad \text{en } z=0 \quad \text{Ec. 32}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left( -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad \text{en } z=0 \quad \text{Ec. 33}$$

### ***Teoría de ondas de pequeña amplitud sobre fondo horizontal***

La teoría de oleaje más simple es la teoría de ondas de pequeña amplitud, también denominada teoría de (Airy 1845) o (Stokes 1847) de primer orden. Aunque con limitaciones a su aplicabilidad, la teoría lineal es muy útil si las hipótesis de partida se cumplen:

- ✦ El fondo del mar constituye un límite horizontal, fijo e impermeable, lo que implica que la velocidad vertical a través de él es nula.
- ✦ La amplitud de onda es pequeña y su forma es invariable en el tiempo y espacio.
- ✦ Las ondas son planas (de dos dimensiones).
- ✦ La relación entre altura de ola  $H$  y longitud de onda  $L$  debe ser pequeña.

La teoría de ondas de pequeña amplitud es esencialmente una teoría lineal, los términos de inercia convectivos no lineales son considerados pequeños. Es llamada teoría de pequeña amplitud porque las ecuaciones son teóricamente exactas cuando el movimiento tiende a cero. Esta hipótesis es útil porque la elevación de la superficie libre puede ser despreciada *a priori* y tal solución es asumida válida aunque el movimiento del oleaje sea diferente de cero.

Considérese la expansión en series de Taylor de primer orden, de una onda viajando en la dirección  $\mathbf{x}(x,y)$  sobre un fondo horizontal. Entonces  $\partial h/\partial x = 0$  y  $\partial h/\partial y = 0$ , y la expresión 10 queda:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \quad \text{Ec. 34}$$

Despreciando los términos de segundo orden o mayores, las condiciones de contorno de superficie libre y dinámica (32) y (33), respectivamente, son:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad z = 0 \quad \text{Ec. 35}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad \text{Ec. 36}$$

Para la condición completa del dominio de integración, es necesario definir dos condiciones laterales, las cuales dependen del problema. Si el movimiento del fluido es armónico (con período  $T$ ) y longitud de onda  $L$ , las condiciones laterales se reducen a una condición de periodicidad. Por ejemplo, para la propagación en el plano  $\mathbf{x}$  es:

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Phi(\mathbf{x} + L, z, t) \quad \text{Ec. 37}$$

donde  $\mathbf{x} = f(x, y)$ , y la condición de periodicidad temporal puede ser considerada como una condición inicial del problema.

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Phi(\mathbf{x}, z, t + T) \quad \text{Ec. 38}$$

A partir de aquí, se aplica el método de separación de variables para encontrar las soluciones del problema de contorno definido por la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno en  $z = 0$ ,  $z = -h$  y las condiciones laterales. Dado que la ecuación de Laplace no incluye derivadas temporales, el problema analizado se reduce al caso de un tren periódico  $T$ ; así, la función potencial  $\Phi$  se puede escribir:

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re[\phi^*(\mathbf{x}, z)e^{i\sigma t}] \quad \text{Ec. 39}$$

donde  $\Re$  indica la parte real de la función compleja y  $\sigma$  es la frecuencia angular (Ec. 40).

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Ec. 40}$$

Con lo que la ecuación de Laplace queda ahora en función de  $\phi^*$  :

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Ec. 41}$$

Es decir, en el caso y a diferencia de otras ecuaciones en derivadas parciales, la separación de la variable tiempo no ha impedido que el problema de contorno estudiado siga siendo una ecuación en derivadas parciales. Las condiciones de contorno de este problema son homogéneas para la variable  $z$ , por lo que se cumple la condición exigida para aplicar el método de separación de variables, es decir, la ecuación diferencial lineal y homogénea, con condiciones de contorno lineales y homogéneas.

Partiendo de las condiciones del problema analizado, se considera ahora la siguiente separación de variables:

$$\phi^*(\mathbf{x}, z) = \phi(\mathbf{x}) \cdot f(z) \quad \text{Ec. 42}$$

donde  $\phi(\mathbf{x})$  es una función todavía desconocida de las variables  $x$  e  $y$ , que se denominará potencial de velocidades plano.

Un caso particular del problema rectangular es el movimiento que se realiza en la dirección del eje  $x$ , que no está confinado en el sentido  $y$ . Este caso, que se conoce con el nombre de ondas de crestas largas, se reduce al problema en dos dimensiones  $(x, z)$ . Todos aquellos dominios o regiones que no son rectangulares o circulares no admiten una separación del potencial plano  $\phi(x, y)$ . Para dichos casos, esta metodología no es válida.

Sustituyendo la descomposición de la función potencial  $\Phi^*$  en la ecuación de Laplace (41) se obtiene:

$$f(z) \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Ec. 43}$$

Dividiendo la ecuación anterior por el producto  $\phi(\mathbf{x})f(z)$ , resulta:

$$\frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + \frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Ec. 44}$$


---

El primer término de la ecuación depende solamente de la variable  $\mathbf{x}$ , mientras que el segundo depende solamente de  $z$ . Por tanto, es posible escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] = -\frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -\mathbf{k}^2 \quad \text{Ec. 45}$$

donde  $\mathbf{k}$  debe ser una constante.

Se han obtenido de esta forma dos ecuaciones:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - \mathbf{k}^2 \cdot f(z) = 0 \quad \text{Ec. 46}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + \mathbf{k}^2 \cdot \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{Ec. 47}$$

La segunda ecuación, (47), sigue siendo una ecuación en derivadas parciales, que se conoce con el nombre de ecuación de Helmholtz. La constante se ha expresado  $-\mathbf{k}^2$  porque, como se verá más adelante, de esta forma se obtiene para  $\mathbf{k}^2 > 0$  una dependencia en  $\mathbf{x}$  que no es oscilatoria, sino exponencial (o decreciente con la profundidad). Sin embargo, más adelante se considerarán los casos  $\mathbf{k}^2 < 0$  y en ellos el movimiento en  $z$  será oscilatorio, lo cual corresponde a los llamados modos evanescentes.

Con la separación anterior se ha obtenido un problema de contorno homogéneo con condiciones de contorno homogéneas en  $z$ , ecuación (46). Aplicando las condiciones de contorno establecidas en las ecuaciones (34) y (36), resulta:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} = \phi \frac{df(z)}{dz} = 0; \quad \frac{df(z)}{dz} = 0 \quad z = -h \quad \text{Ec. 48}$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \phi^* = \phi \left[ \frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) \right] = 0; \quad \frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) = 0 \quad z = 0 \quad \text{Ec. 49}$$

**Separación de la variable profundidad**

En la Tabla A1 - 1 Posibles soluciones a la ecuación de Lapalce, basados en la técnica de separación de variables, Dean y Dalrymple (1984) se presentan las posibles soluciones que tiene la ecuación de Laplace. De estas, se obvia la correspondiente a  $k^2 = 0$ , dado que la solución sería trivial. Para incluir las soluciones imaginaria y real en una sola, la primera se puede expresar como la correspondiente a  $k^2 > 0$ , se define, entonces:

$$k^2 = -\mu^2 \quad -\mu^2 > 0 \quad \text{Ec. 50}$$

Con ello la solución se puede escribir:

$$f(z) = A \cos(\mu z) + B \text{sen}(\mu z) = A \cos(ikz) + B \text{sen}(ikz) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad \text{Ec. 51}$$

$k^2 > 0$	$k^2 = 0$	$k^2 < 0, \quad k = i k $ $ k  = \text{magnitud de } k$
$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} -  k ^2 X = 0$
$X(x) = A \cos kx + B \text{sen } kx$	$X(x) = Ax + B$	$X(x) = Ae^{ k x} + Be^{- k x}$
$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$	$\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$	$\frac{d^2 Z}{dz^2} +  k ^2 Z = 0$
$Z(z) = Ce^{kz} + De^{-kz}$	$Z(z) = Cz + D$	$f(z) = C \cos  k z + D \text{sen }  k z$

Tabla A1 - 1 Posibles soluciones a la ecuación de Lapalce, basados en la técnica de separación de variables, Dean y Dalrymple (1984)

Adoptando la misma estructura de solución para los casos  $k^2 > 0$  y  $k^2 < 0$ , la aplicación de la condición en el fondo, ecuación (48), conduce a:

$$k [ Ae^{-kh} - Be^{+kh} ] = 0 \quad \text{Ec. 52}$$

$$A = B \cdot e^{2kh} \quad \text{Ec. 53}$$

$$f(z) = 2Be^{kh} \left[ \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \right] = B' \cosh \mathbf{k}(h+z) \quad \text{Ec. 54}$$

Sustituyendo este valor en la condición de contorno mixta en la superficie,  $z = 0$ , ecuación (49), se obtiene:

$$B' \mathbf{k} \sinh \mathbf{k}h - \frac{\sigma^2}{g} B' \cosh \mathbf{k}h = 0 \quad \text{Ec. 55}$$

o expresado de otra forma

$$\sigma^2 = g \mathbf{k} \tanh \mathbf{k}h \quad \text{Ec. 56}$$

La ecuación (56) relaciona  $\mathbf{k}$ , a partir de aquí llamado número de onda, con  $\sigma$  y permite identificar los autovalores del problema de contorno estudiado. Conocidos estos, se está en condiciones de analizar las soluciones del problema definido por la ecuación (47). La relación de dispersión, ecuación (56), tiene una solución real e infinitas soluciones imaginarias puras, conocidos como modos evanescentes, para  $\mathbf{k}$ .

### Condición de periodicidad espacial

La ecuación (47), ahora debe de cumplir con la condición de contorno lateral dada por la condición de periodicidad espacial:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} + L) \quad \text{Ec. 57}$$

El problema en  $\mathbf{x}$  no tiene la estructura del problema regular de Sturm-Liouville, es decir, no tiene dos condiciones de contorno homogéneas y lineales. En este caso no se cumple el teorema por el cual a cada autovalor le corresponde una única autofunción. De hecho, en la resolución de la ecuación diferencial se obtienen dos autofunciones (seno y coseno) linealmente independientes para el mismo autovalor. Este problema se dice que es un problema singular (o no regular) de Sturm-Liouville y al cual se le pueden aplicar la mayoría de los teoremas correspondientes al problema regular, en particular el correspondiente a la ortogonalidad de las autofunciones; si bien para ello, en algunos casos, es necesario aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Por conveniencia para desarrollos posteriores, la solución de  $\phi(\mathbf{x})$ , se escribirá en forma compleja, dada la posibilidad de aplicar el principio de superposición.

La solución adoptada en este desarrollo es:

$$\phi(\mathbf{x}) = Ae^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad \text{Ec. 58}$$

Aplicando la condición de periodicidad, (57), se tiene:

$$e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{x}} = e^{\pm i\mathbf{k}(\mathbf{x}+L)} \quad \text{Ec. 59}$$

$$e^{\pm i\mathbf{k}L} = 1 \quad \text{Ec. 60}$$

Dicha ecuación se puede expresar como:

$$\cos \mathbf{k}L = 1 \quad \text{Ec. 61}$$

$$\text{sen} \mathbf{k}L = 0 \quad \text{Ec. 62}$$

por tanto,

$$\mathbf{k}L = n\pi \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad \text{Ec. 63}$$

Las dos soluciones iniciales,  $n = 0$  y  $n = 2$ , corresponden a las dos primeras repeticiones del movimiento periódico, por tanto,

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \quad \text{Ec. 64}$$

### ***Solución general***

De la condición dinámica en el nivel medio,  $z = 0$ , ecuación **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se obtiene una relación entre el potencial total,  $\Phi(\mathbf{x}, z, t)$ , y la superficie libre,  $\eta$ , dada por:

$$\eta = + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad z = 0 \quad \text{Ec. 65}$$

$$\eta = \Re \left[ - \frac{i\sigma}{g} \cosh(\mathbf{k}h) \cdot A \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \sigma t)} \right] \quad \text{Ec. 66}$$

Dado que se busca una solución periódica de la superficie libre que represente una onda progresiva, se define:

---

$$\eta = \Re \left[ a e^{i(\mathbf{kx} - \sigma t)} \right] \quad \text{Ec. 67}$$

donde  $a = H/2$  es la amplitud del movimiento y  $H$  la altura de ola.

Comparando las expresiones (66) y (67), se obtiene:

$$A = -\frac{g}{i\sigma} \frac{a}{\cosh \mathbf{k}h} \quad \text{Ec. 68}$$

Sustituyendo (68) en el potencial resulta:

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re \left[ -\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h} e^{+i(\mathbf{kx} - \sigma t)} \right] \quad \text{Ec. 69}$$

Finalmente, tomando el signo negativo en la exponencial se puede escribir:

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re \left[ -\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h} e^{-i(\mathbf{kx} - \sigma t)} \right] \quad \text{Ec. 70}$$

La ecuación (70) es la solución general del potencial de velocidades para una onda propagándose sobre un fondo horizontal. A partir de esta ecuación se derivan las llamadas propiedades ingenieriles de la teoría lineal, que son las expresiones con las que se determinan las características del flujo.

La solución lineal del potencial de velocidades obtenida, permite estudiar las variables hidrodinámicas fundamentales del movimiento oscilatorio para ondas de pequeña amplitud, mismas que son la base de muchas aplicaciones en el campo de la ingeniería.

Las variables cinemáticas fundamentales son la velocidad y la aceleración. La aceleración se ha descompuesto en aceleración local y aceleraciones convectivas. Estas últimas provienen de la variación espacial del cuadrado de la velocidad, por ello, en el marco de la teoría lineal son despreciables frente a la aceleración local.

Las variables dinámicas son las fuerzas, que, en general, se descomponen en fuerzas normales y tangenciales. Los fluidos perfectos, ideales o no viscosos no tienen mecanismos para producir esfuerzos tangenciales, por ello, en teoría de ondas, en general, las variables dinámicas son las fuerzas normales por unidad de superficie o presiones.



Una vez conocido el valor de estas variables o de una combinación de ellas, se puede proceder a su integración en toda la columna de agua. De este modo se puede calcular la energía instantánea o los flujos instantáneos de masa, cantidad de movimiento y energía.

La descripción de estas variables hidrodinámicas se puede hacer desde el punto de vista Euleriano, estableciendo un punto fijo de referencia con respecto al cual se estudia como es el movimiento, bien mediante una descripción Lagrangiana, analizando el comportamiento del fluido siguiendo el movimiento de una partícula.

Aplicando dichas descripciones, resultan las siguientes expresiones que permiten el cálculo de los parámetros de interés que intervienen en el oleaje.

Variación de la superficie libre:  $\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$  Ec. 71

Energía media total por unidad de superficie:  $E = \frac{1}{8} \rho g H^2$  Ec. 72

Longitud de onda:  $L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh)$  Ec. 73

Celeridad:  $C = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k} = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kh)$  Ec. 74

Celeridad de grupo:  $C_g = nC = \frac{C}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$  Ec. 75

Velocidad de las partículas:  
Horizontal  $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$  Ec. 76

Vertical  $w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$

Aceleración de las partículas:  
Horizontal  $a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = agk \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$  Ec. 77

Vertical

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -agk \frac{\sinh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h} \sin(\mathbf{k}x - \sigma t)$$

Desplazamiento de las partículas:  
Horizontal  $\zeta = \int u dt = -a \frac{gk}{\sigma^2} \frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h} \sin(\mathbf{k}x - \sigma t)$  Ec. 78

Vertical  $\xi = \int w dt = a \frac{gk}{\sigma^2} \frac{\sinh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h} \cos(\mathbf{k}x - \sigma t)$

Presión total:  
(hidrostática + dinámica)  $p = -\rho gz + \rho g \frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h} \cos(\mathbf{k}x - \sigma t)$  Ec. 79

Flujo de energía  $\bar{F} = \left( \frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \frac{\sigma}{k} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right]$  Ec. 80

Las ecuaciones anteriores se pueden simplificar, para aplicaciones de tipo ingenieril, cuando:

- ×  $kh \rightarrow 0$ , la  $\tanh(kh) \rightarrow kh$ , por lo tanto se dice que el oleaje se propaga en aguas relativamente someras.
- ×  $kh \rightarrow \infty$ , (p.e. la  $\tanh(kh) \rightarrow 1$ ), por lo tanto se dice que el oleaje se propaga en aguas relativamente profundas.

Para fines prácticos, si se asume que el error máximo permisible entre la solución exacta y una aproximación debe de ser menor que el 1%, estos límites se pueden situar de la siguiente forma: para aguas someras,  $kh < \pi / 10$ , y para aguas profundas  $kh > \pi$ . A continuación se presentan las aproximaciones para aguas someras, en transición y aguas profundas.

### ***Para aguas someras***

Longitud de onda :  $L = T \sqrt{gh}$  Ec. 81

Celeridad:  $C = \frac{L}{T} = \sqrt{gh}$  Ec. 82

Celeridad de grupo:  $C_g = C = \sqrt{gh}$  Ec. 83

Velocidad de las partículas:  
Horizontal  $u = a\sqrt{\frac{g}{h}} \cos(kx - \sigma t)$  Ec. 84

Vertical  $w = a\sigma \left(1 + \frac{z}{h}\right) \sin(kx - \sigma t)$

Aceleración de las partículas:  
Horizontal  $a_x = a\sigma\sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \sigma t)$  Ec. 85

Vertical  $a_z = -a\sigma^2 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos(kx - \sigma t)$

Desplazamiento de las partículas:  
Horizontal  $\zeta = -a\sigma\sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \sigma t)$  Ec. 86

Vertical  $\xi = a \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos(kx - \sigma t)$

Presión total:  
(hidrostática + dinámica)  $p = -\rho gz + \rho g \eta$  Ec. 87

Flujo de energía:  $\bar{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2\right) \sqrt{gh}$  Ec. 88

***Para aguas profundas***

Longitud de onda :  $L = \frac{gT^2}{2\pi}$  Ec. 89

Celeridad:  $C = \frac{gT}{2\pi}$  Ec. 90

Celeridad de grupo:  $C_g = \frac{C}{2}$  Ec. 91

Velocidad de las partículas:  
Horizontal  $u = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$  Ec. 92

Vertical  $w = a\sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$

Aceleración de las partículas:  
Horizontal  $a_x = a\sigma^2 e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$  Ec. 93

Vertical  $a_z = -a\sigma^2 e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$

Desplazamiento de las partículas:  
Horizontal  $\zeta = -ae^{kz} \sin(kx - \sigma t)$  Ec. 94

Vertical  $\xi = ae^{kz} \cos(kx - \sigma t)$

Presión total:  
(hidrostática + dinámica)  $p = -\rho gz + \rho g \eta e^{kz}$  Ec. 95

Flujo de energía:  $\bar{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2\right) \frac{1}{2} C$  Ec. 96

---

# Anexo 2

## Tablas de resultados

---



## Anexo 2. Tablas de resultados

Tabla A2 - 1 Alturas y periodos de ola medios (sensor 2)										
Sitio	T(s)	Cama	Hm (cm)	Tm (s)	Muestra	T(s)	Cama	Hm (cm)	Tm (s)	
Akumal	1.0	Plana	11.01	1.00	Pto. E	1.4	Rizos	12.28	1.41	
	1.0	Rizos	10.98	1.00		1.6	Plana	11.11	1.59	
	1.2	Plana	12.11	1.20		1.6	Rizos	11.14	1.58	
	1.2	Rizos	11.92	1.22		1.8	Plana	11.27	1.79	
	1.4	Plana	12.32	1.41		1.8	Rizos	11.37	1.79	
	1.4	Rizos	12.31	1.42		2.0	Plana	11.67	2.01	
	1.6	Plana	11.22	1.59		2.0	Rizos	11.92	2.01	
	1.6	Rizos	11.22	1.59		Pto.10	1.0	Plana	10.70	1.00
	1.8	Plana	10.99	1.79			1.0	Rizos	10.70	1.00
	1.8	Rizos	11.11	1.78			1.2	Plana	11.83	1.21
	2.0	Plana	11.38	2.02			1.2	Rizos	11.87	1.22
	2.0	Rizos	11.66	2.01			1.4	Plana	12.19	1.40
Puerto Morelos	1.0	Plana	13.46	1.00	1.4		Rizos	12.72	1.41	
	1.0	Rizos	13.43	1.00	1.6		Plana	11.28	1.58	
	1.2	Plana	11.88	1.21	1.6		Rizos	11.28	1.58	
	1.2	Rizos	10.29	1.21	1.8		Plana	11.64	1.79	
	1.4	Plana	11.85	1.41	1.8		Rizos	11.70	1.79	
	1.4	Rizos	12.03	1.41	2.0		Plana	11.73	2.00	
	1.6	Plana	13.19	1.59	2.0		Rizos	11.70	2.01	
	1.6	Rizos	13.45	1.59	Holbox	1.0	Plana	10.78	1.00	
	1.8	Plana	10.25	1.79		1.2	Plana	11.87	1.20	
	1.8	Rizos	10.32	1.81		1.2	Rizos	11.80	1.20	
	2.0	Plana	11.05	2.01		1.4	Plana	12.29	1.41	
	2.0	Rizos	11.30	2.03		1.6	Plana	11.25	1.59	
Sian Ka'an	1.0	Plana	10.86	1.00		1.6	Rizos			
	1.0	Rizos	11.11	0.99		1.8	Plana	11.68	1.78	
	1.2	Plana	11.87	1.20		1.8	Rizos	11.90	1.78	
	1.2	Rizos	11.95	1.20		2.0	Plana	11.91	2.01	
	1.4	Plana	12.15	1.41		2.0	Rizos	12.03	2.01	
	1.4	Rizos	12.38	1.40		Chelem	1.0	Plana	10.54	1.00
	1.6	Plana	11.21	1.58			1.0	Rizos	10.66	1.00
	1.6	Rizos	11.30	1.58	1.2		Plana	11.87	1.20	
	1.8	Plana	11.77	1.79	1.2		Rizos	11.83	1.21	
	1.8	Rizos	11.63	1.79	1.4		Plana	11.92	1.41	
	2.0	Plana	11.66	2.00	1.4		Rizos	11.94	1.39	
	2.0	Rizos	11.59	2.00	1.6		Plana	11.14	1.58	
Isla Mujeres	1.0	Plana	10.77	1.00	1.6		Rizos	11.38	1.58	
	1.0	Rizos	11.15	1.00	1.8		Plana	10.85	1.78	
	1.2	Plana	12.03	1.20	1.8		Rizos	10.80	1.79	
	1.2	Rizos	12.09	1.20	2.0		Plana	11.68	2.01	
	1.4	Plana	12.19	1.40	2.0		Rizos	12.17	2.01	
	1.4	Rizos	12.14	1.41	Bahía Tortugas	1.0	Plana	10.73	1.00	
	1.6	Plana	11.26	1.58		1.0	Rizos	10.84	1.01	
	1.6	Rizos	11.41	1.58		1.2	Plana	11.91	1.21	
	1.8	Plana	11.78	1.78		1.2	Rizos	12.26	1.20	
	1.8	Rizos	12.29	1.78		1.4	Plana	12.28	1.41	
	2.0	Plana	11.89	2.01		1.4	Rizos	12.15	1.42	
	2.0	Rizos	11.85	2.01		1.6	Plana	11.33	1.58	
Pto. E	1.0	Plana	10.51	1.01		1.6	Rizos	11.44	1.59	
	1.0	Rizos	10.78	1.00		1.8	Plana	11.43	1.80	
	1.2	Plana	11.76	1.20		1.8	Rizos	10.90	1.79	
	1.2	Rizos	11.89	1.20		2.0	Plana	11.90	2.01	
	1.4	Plana	12.02	1.41		2.0	Rizos	11.80	2.01	

Tabla A2 - 2 Velocidades en dirección del flujo registradas por los Vectrinos										
Sitio	T(s)	Cama	Vectrino 1 cm/s				Vectrino 2 cm/s			
			$U_{rms}$	$U_{máx}$	$U_{mín}$	$U_{med}$	$U_{rms}$	$U_{máx}$	$U_{mín}$	$U_{med}$
Akumal	1.0	Plana	14.92	22.45	-31.06	-4.59	13.83	20.03	-27.06	-4.30
	1.0	Rizos	15.17	18.86	-30.41	-5.92	14.14	19.76	-27.70	-3.86
	1.2	Plana	16.59	26.24	-30.37	-3.38	17.09	30.47	-28.62	-2.92
	1.2	Rizos	16.98	25.56	-30.47	-4.90	17.41	29.83	-32.93	-3.44
	1.4	Plana	17.43	29.17	-29.81	-3.62	18.30	33.26	-26.94	0.42
	1.4	Rizos	17.71	31.48	-33.28	-4.09	18.47	33.20	-32.32	-4.17
	1.6	Plana	18.50	35.55	-29.73	-2.83	19.21	34.95	-28.92	-0.59
	1.6	Rizos	18.66	33.58	-31.15	-3.20	18.59	35.75	-32.36	-2.19
	1.8	Plana	18.27	41.35	-29.30	-2.47	18.63	37.59	-27.75	-2.16
	1.8	Rizos	18.16	29.43	-27.58	-5.25	18.52	33.29	-29.14	-4.67
	2.0	Plana	18.07	35.37	-27.23	-2.40	18.43	36.67	-26.05	-2.24
2.0	Rizos	17.87	37.31	-26.98	-2.63	18.42	38.64	-25.85	-2.41	
Puerto Morelos	1.0	Plana					14.18	19.41	-29.94	-3.68
	1.0	Rizos	14.64	21.91	-28.40	-2.44	14.06	22.66	-28.51	-1.85
	1.2	Plana	16.56	28.29	-44.41	-2.91	18.11	27.82	-35.29	-2.23
	1.2	Rizos	16.73	26.77	-33.09	-0.81	17.67	29.24	-31.22	-0.97
	1.4	Plana	17.37	29.79	-32.23	-2.90	19.31	27.09	-31.93	-6.22
	1.4	Rizos	16.45	30.84	-31.44	-2.72	18.75	32.10	-24.88	-0.74
	1.6	Plana	18.93	37.21	-27.25	0.33	19.91	35.18	-32.71	-1.92
	1.6	Rizos	17.93	27.89	-31.29	-4.83	19.68	34.25	-26.78	1.83
	1.8	Plana	18.05	38.30	-25.73	-1.49	19.87	36.49	-28.39	-2.44
	1.8	Rizos	17.54	33.03	-29.20	-2.72	18.75	32.09	-28.11	-3.74
	2.0	Plana	18.30	32.00	-30.21	-2.10	19.27	34.35	-27.19	-4.70
2.0	Rizos	19.00	36.31	-29.00	-3.50	18.94	31.57	-28.99	-4.27	
Sian Ka'an	1.0	Plana	13.72	22.23	-23.45	-0.53	13.21	22.26	-33.74	-0.73
	1.0	Rizos	14.54	19.81	-28.25	-4.66	12.85	15.88	-22.54	-2.67
	1.2	Plana	16.45	24.19	-30.16	-3.56	16.42	29.47	-30.04	-2.46
	1.2	Rizos	16.72	26.65	-29.12	-3.59	16.39	24.81	-30.21	-3.27
	1.4	Plana	16.85	32.57	-27.70	-0.77	17.94	31.48	-30.19	-2.51
	1.4	Rizos	18.00	28.92	-29.24	-4.11	17.59	30.76	-31.76	-2.41
	1.6	Plana	18.24	35.88	-29.58	-2.02	18.33	33.05	-29.57	-1.86
	1.6	Rizos	18.47	34.67	-28.75	-2.60	18.14	30.44	-30.30	-2.54
	1.8	Plana	17.73	37.41	-28.69	-2.13	17.87	35.42	-26.92	-2.35
	1.8	Rizos	17.95	30.94	-28.59	-3.66	17.45	27.61	-29.00	-4.36
	2.0	Plana	17.51	38.79	-28.61	-1.37	17.67	34.18	-22.77	-0.58
2.0	Rizos	18.54	36.45	-28.77	-2.98					
Isla Mujeres	1.0	Plana	14.52	16.85	-25.91	-4.93	14.07	21.16	-29.82	-3.13
	1.0	Rizos	14.49	16.76	-26.49	-4.95	12.73	36.67	-29.35	-3.07
	1.2	Plana	16.15	23.94	-29.79	-3.56	17.41	25.28	-34.84	-4.84
	1.2	Rizos	16.79	23.76	-29.52	-4.99	17.79	24.50	-31.07	-5.06
	1.4	Plana	17.22	29.11	-29.46	-3.23	18.90	41.68	-31.78	-2.89
	1.4	Rizos	17.33	28.44	-28.87	-4.33				
	1.6	Plana	17.55	27.57	-27.46	-2.69	19.49	35.86	-31.18	-2.14
	1.6	Rizos	17.89	29.50	-28.62	-2.89	18.97	33.45	-31.82	-4.09
	1.8	Plana	17.44	35.30	-26.37	-2.17	18.75	36.29	-28.09	-1.11
	1.8	Rizos	17.54	36.45	-27.48	-0.62	18.16	31.47	-26.19	-1.38
	2.0	Plana	18.50	36.10	-29.00	-3.01	19.04	36.94	-26.26	-2.07
2.0	Rizos	16.16	32.84	-23.09	-2.40					
Pto. E	1.0	Plana	14.58	22.25	-24.18	-1.63	14.19	19.18	-28.46	-1.94
	1.0	Rizos	14.85	22.63	-28.03	-2.47	13.92	21.82	-26.39	-2.05
	1.2	Plana	16.47	20.87	-29.89	-4.95	17.36	29.48	-27.92	-1.46
	1.2	Rizos	16.61	23.30	-30.31	-4.45	17.47	25.85	-34.36	-4.27
	1.4	Plana	16.91	30.75	-27.31	-0.73	19.00	32.79	-31.11	-1.96
	1.4	Rizos	17.60	29.46	-29.14	-3.65	18.92	31.23	-31.76	-3.87
1.6	Plana	18.00	36.06	-30.27	-2.00	19.27	34.84	-31.36	-2.09	



	1.6	Rizos	17.71	32.00	-27.29	-4.01	19.26	34.37	-32.72	-3.92	
	1.8	Plana	17.49	35.70	-28.01	-2.13	18.81	37.51	-29.62	-3.09	
	1.8	Rizos	17.83	34.01	-27.95	-1.72	18.44	33.37	-28.16	-2.68	
	2.0	Plana	19.18	32.88	-28.25	-4.27	18.91	35.53	-28.86	-2.52	
	2.0	Rizos	16.58	37.21	-19.78	-0.23	18.48	34.63	-27.26	-2.25	
Pto.10	1.0	Plana	14.60	23.26	-28.33	-3.08	14.48	21.77	-28.33	-2.83	
	1.0	Rizos	14.94	20.38	-30.04	-4.11	14.19	22.33	-29.24	-2.79	
	1.2	Plana	16.02	24.99	-28.91	-2.28	17.26	29.42	-29.98	-1.99	
	1.2	Rizos	16.95	29.91	-31.00	-3.42	17.82	27.52	-32.40	-3.40	
	1.4	Plana	17.19	31.88	-29.02	-2.88	18.88	34.03	-32.09	-2.09	
	1.4	Rizos	17.24	30.03	-33.13	-3.62	19.08	29.89	-30.94	-4.81	
	1.6	Plana	18.24	35.82	-28.70	-2.39	19.36	34.22	-31.82	-2.53	
	1.6	Rizos	17.75	29.19	-27.10	-3.81	18.80	32.11	-32.28	-4.57	
	1.8	Plana	18.01	34.55	-27.25	-3.00	19.01	36.82	-31.05	-2.62	
	1.8	Rizos	18.02	34.69	-28.01	-3.07	19.12	30.71	-28.24	-7.03	
	2.0	Plana	18.82	34.46	-31.39	-4.53	18.70	36.51	-29.74	-3.01	
	2.0	Rizos	18.92	37.33	-26.08	-1.12					
	Holbox	1.0	Plana	14.39	22.21	-26.86	-3.99	13.71	20.70	-25.23	-1.14
		1.2	Plana	15.86	26.79	-28.07	-2.23	17.20	27.69	-31.58	-2.89
1.2		Rizos	16.78	21.97	-29.46	-4.23	17.61	24.27	-31.96	-4.65	
1.4		Plana	17.33	28.33	-33.51	-4.05	18.83	32.67	-31.08	-2.47	
1.6		Plana	17.92	38.11	-29.83	-1.98	19.36	35.51	-31.44	-1.78	
1.6		Rizos	17.47	29.22	-26.96	-4.64	18.24	28.34	-28.92	-4.48	
1.8		Plana	17.59	38.85	-26.43	-0.95	18.92	34.54	-29.60	-2.25	
1.8		Rizos	17.56	35.25	-26.02	-2.23	19.01	44.12	-45.97	-3.02	
2.0		Plana	18.05	39.93	-28.27	-1.19	18.91	33.77	-28.57	-6.23	
2.0		Rizos	18.43	34.71	-28.36	-4.17					
Chelem	1.0	Plana	14.18	22.17	-26.12	-4.06	13.73	20.88	-25.42	-2.28	
	1.0	Rizos	14.49	20.75	-29.08	-4.13	14.04	17.74	-30.95	-3.93	
	1.2	Plana	16.04	24.02	-27.68	-2.19	17.15	29.06	-27.44	-0.57	
	1.2	Rizos	16.54	24.93	-30.41	-5.06	17.61	25.95	-31.36	-4.95	
	1.4	Plana	17.06	29.79	-32.13	-2.93	18.72	32.51	-29.35	-1.77	
	1.4	Rizos	17.40	33.52	-27.52	-3.03	18.65	28.77	-28.93	-4.31	
	1.6	Plana	18.09	35.61	-31.70	-1.68	19.22	32.34	-32.58	-2.93	
	1.6	Rizos	17.67	30.79	-28.42	-3.00	19.80	33.17	-33.57	-5.03	
	1.8	Plana	17.75	37.33	-27.22	-2.14	18.70	32.80	-29.13	-4.59	
	1.8	Rizos	17.17	32.90	-25.43	-3.09					
	2.0	Plana	17.04	38.14	-20.69	0.73	18.75	38.03	-30.98	-3.70	
	2.0	Rizos	19.07	37.99	-29.76	-1.41	18.86	36.57	-26.79	-0.21	
Bahía Tortugas	1.0	Plana	14.49	16.93	-34.75	-4.89	14.82	18.35	-30.83	-5.36	
	1.0	Rizos	14.21	20.74	-24.60	-2.94	14.07	20.10	-27.60	-3.05	
	1.2	Plana	16.04	27.51	-31.68	-2.48	17.65	30.76	-27.39	-0.14	
	1.2	Rizos	17.17	28.70	-30.97	-3.00	17.90	28.99	-31.43	-3.13	
	1.4	Plana	17.15	31.49	-31.10	-1.93	18.98	32.81	-29.93	-2.73	
	1.4	Rizos	17.27	30.13	-30.41	-4.20					
	1.6	Plana	18.15	34.89	-29.24	-2.05	19.73	37.48	-28.25	0.25	
	1.6	Rizos	17.53	32.37	-28.25	-2.87					
	1.8	Plana	17.66	37.99	-29.80	-1.96	19.28	38.10	-28.97	-2.27	
	1.8	Rizos	17.49	32.93	-27.19	-3.28					
	2.0	Plana	18.77	32.70	-27.50	-3.88	19.09	39.50	-28.43	-2.24	
	2.0	Rizos	18.80	35.90	-26.98	-2.45					

Tabla A2 - 3 Esfuerzo cortante crítico

Sitio	T(s)	Cama	$\tau_{cr}$	$\theta_{cr}$	D*	Muestra	T(s)	Cama	$\tau_{cr}$	$\theta_{cr}$	D*
Akumal	1.0	Plana	0.1311	0.0704	3.377	Pto. E	1.4	Rizos	0.1940	0.0387	7.731
	1.0	Rizos	0.2390	0.1283	3.377		1.6	Plana	0.2170	0.0433	7.731
	1.2	Plana	0.3116	0.1673	3.377		1.6	Rizos	0.1661	0.0331	7.731
	1.2	Rizos	0.2618	0.1406	3.377		1.8	Plana	0.3343	0.0666	7.731
	1.4	Plana	0.1283	0.0689	3.377		1.8	Rizos	0.1936	0.0386	7.731
	1.4	Rizos	0.1229	0.0660	3.377		2.0	Plana	0.3726	0.0743	7.731
	1.6	Plana	0.1508	0.0810	3.377	2.0	Rizos	0.1866	0.0372	7.731	
	1.6	Rizos	0.2011	0.1080	3.377	Pto.10	1.0	Plana	0.1405	0.0216	9.964
	1.8	Plana	0.3826	0.2055	3.377		1.0	Rizos	0.1363	0.0209	9.964
	1.8	Rizos	0.1850	0.0993	3.377		1.2	Plana	0.2126	0.0326	9.964
	2.0	Plana	0.3530	0.1896	3.377		1.2	Rizos	0.1982	0.0304	9.964
	2.0	Rizos	0.1521	0.0817	3.377		1.4	Plana	0.2497	0.0383	9.964
					1.4		Rizos				
Puerto Morelos	1.0	Plana	0.1076	0.0363	4.445	Holbox	1.6	Plana	0.3041	0.0467	9.964
	1.0	Rizos	0.1391	0.0470	4.445		1.6	Rizos	0.1700	0.0261	9.964
	1.2	Plana	0.2085	0.0704	4.445		1.8	Plana	0.3688	0.0566	9.964
	1.2	Rizos	0.1814	0.0613	4.445		1.8	Rizos	0.1573	0.0241	9.964
	1.4	Plana	0.3352	0.1132	4.445		2.0	Plana	0.2752	0.0423	9.964
	1.4	Rizos	0.1830	0.0618	4.445		2.0	Rizos	0.1609	0.0247	9.964
	1.6	Plana	0.5429	0.1834	4.445	Chelem	1.0	Plana	0.1144	0.0148	12.232
	1.6	Rizos	0.5146	0.1738	4.445		1.2	Plana	0.4943	0.0638	12.232
	1.8	Plana	0.2075	0.0701	4.445		1.2	Rizos	0.3220	0.0416	12.232
	1.8	Rizos	0.3272	0.1105	4.445		1.4	Plana	0.3059	0.0395	12.232
	2.0	Plana	0.1382	0.0467	4.445		1.6	Plana	0.4774	0.0616	12.232
	2.0	Rizos	0.3980	0.1344	4.445		1.6	Rizos	0.2247	0.0290	12.232
Sian Ka'an	1.0	Plana	0.1151	0.0273	6.509	Bahía Tortugas	1.8	Plana	0.5547	0.0716	12.232
	1.0	Rizos	0.5094	0.1206	6.509		1.8	Rizos	0.2888	0.0373	12.232
	1.2	Plana	0.3188	0.0755	6.509		2.0	Plana	0.2957	0.0382	12.232
	1.2	Rizos	0.2788	0.0660	6.509		2.0	Rizos	0.2478	0.0320	12.232
	1.4	Plana	0.3977	0.0942	6.509		1.0	Plana	0.0968	0.0168	8.826
	1.4	Rizos	0.2677	0.0634	6.509		1.0	Rizos	0.1626	0.0282	8.826
	1.6	Plana	0.4631	0.1096	6.509	1.2	Plana	0.2494	0.0432	8.826	
	1.6	Rizos	0.1279	0.0303	6.509	1.2	Rizos	0.1445	0.0251	8.826	
	1.8	Plana	0.2057	0.0487	6.509	1.4	Plana	0.3453	0.0599	8.826	
	1.8	Rizos	0.2778	0.0658	6.509	1.4	Rizos	0.3261	0.0565	8.826	
	2.0	Plana	0.1746	0.0413	6.509	1.6	Plana	0.2698	0.0468	8.826	
	2.0	Rizos	0.2659	0.0630	6.509	1.6	Rizos	0.1235	0.0214	8.826	
Isla Mujeres	1.0	Plana	0.1140	0.0335	5.427	1.8	Plana	0.5567	0.0965	8.826	
	1.0	Rizos	0.0869	0.0256	5.427	1.8	Rizos	0.1412	0.0245	8.826	
	1.2	Plana	0.3006	0.0883	5.427	2.0	Plana	0.3472	0.0602	8.826	
	1.2	Rizos	0.1038	0.0305	5.427	2.0	Rizos	0.7116	0.1234	8.826	
	1.4	Plana	0.1230	0.0361	5.427	1.0	Plana	0.0643	0.0038	25.317	
	1.4	Rizos	0.2688	0.0790	5.427	1.0	Rizos				
	1.6	Plana	0.2669	0.0784	5.427	1.2	Plana	0.1395	0.0083	25.317	
	1.6	Rizos	0.1088	0.0320	5.427	1.2	Rizos	0.1198	0.0071	25.317	
	1.8	Plana	0.2166	0.0637	5.427	1.4	Plana	0.3106	0.0184	25.317	
	1.8	Rizos	0.0913	0.0268	5.427	1.4	Rizos	0.1073	0.0064	25.317	
	2.0	Plana	0.3696	0.1086	5.427	1.6	Plana	0.1719	0.0102	25.317	
	2.0	Rizos	0.1415	0.0416	5.427	1.6	Rizos	0.0803	0.0048	25.317	
Pto. E	1.0	Plana	0.2274	0.0453	7.731	1.8	Plana	0.2973	0.0176	25.317	
	1.0	Rizos	0.1479	0.0295	7.731	1.8	Rizos	0.0674	0.0040	25.317	
	1.2	Plana	0.2092	0.0417	7.731	2.0	Plana	0.1915	0.0114	25.317	
	1.2	Rizos	0.2114	0.0422	7.731	2.0	Rizos	0.1226	0.0073	25.317	
	1.4	Plana	0.2100	0.0419	7.731						