



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

T E S I S

Para obtener el Título de Ingeniero Eléctrico  
Electrónico

“CONTROL DE POSICIÓN POR MODOS  
DESLIZANTES BASADO EN UNA  
APLICACIÓN INDUSTRIAL”

Presentado por:

Luis Fernando Hurtado Leguízamo



DIRECTOR DE TESIS:  
Mtro. Rafael Iriarte V. Balderrama

2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Primeramente agradezco a Dios.

A mi madre por haberme formado como un hombre de bien. A mis abuelos que siempre estuvieron y siguen estando conmigo. A mis tías Ana, Guilla Paty y Lupita y a mis tíos Félix y Tony, quienes siempre me estimularon para ver más allá de lo común y buscar siempre algo mejor.

A la amistad que he mantenido con todos mis amigos.

A la UNAM que me ha dado más de lo que hubiera soñado y a todos los profesores que guiaron mi formación a través de la Facultad de Ingeniería. Al Dr. Leonid Fridman, quien me ha apoyado y ha confiado ciegamente en mí para entrar a un mundo dentro de la comunidad científica internacional. Al Mtro. Rafael Iriarte, a quien agradezco enormemente que me haya iniciado en el camino por el que ahora me conduzco. A la Mtra. Nayelli Manzanarez por su apoyo y amistad.

A todo el equipo de Modos Deslizantes, en especial a Tenoch González por su gran apoyo durante el desarrollo de esta tesis. Al Dr. Jaime Moreno por su apoyo y consejo. A Héctor Ríos por sus aportes y sugerencias para este trabajo.

Finalmente, agradezco a Jan Komsta de Bosch Rexroth por haber seguido de cerca este trabajo a pesar de la distancia y en quien he encontrado un gran amigo también.

*Fernando Leguízamo*



# Presentación

La teoría de control es sin duda una de las áreas más importantes e interesantes dentro de la ingeniería. Sus orígenes se remontan al mundo antiguo de los griegos y árabes, quienes empezaron a notar la necesidad de controlar el nivel de algún fluido en relojes de agua, lámparas de aceite y contenedores de vino o en aplicaciones de hidráulica y neumática en construcciones arquitectónicas. Durante el siglo XVII, sistemas de control más elaborados empezaron a aplicarse en la regulación de máquinas de vapor, controles de temperatura y en controles mecánicos para molinos. Posteriormente, el siglo XIX vió el desarrollo de criterios de estabilidad (Routh en Inglaterra y Hurwitz en Suiza), lo cual ayudo enormemente al desarrollo de controles de velocidad en turbinas hidráulicas y de vapor.

Sin embargo, fue hasta la Segunda Guerra Mundial cuando ingenieros eléctricos, electrónicos, mecánicos y matemáticos trabajaron en conjunto para dar solución a problemas emergentes durante la guerra. La necesidad de desarrollar sistemas automatizados de defensa antiaéreas, eran cada vez más importantes y decisivos. El trabajo de 14 operadores en conjunto era requerido para la detección de un avión mediante el uso del radar, después realizar los cálculos necesarios para determinar el rango de alcance de las armas antiaéreas respecto a la predicción de la ruta de la aeronave, y finalmente apuntar y disparar [2].

Desde el comienzo de la era del “Control Clásico” (1930-1950) hasta lo que en la actualidad se conoce como “Control Moderno”, el desarrollo tecnológico ha permitido la implementación de algoritmos de control que en otros tiempos hubiera sido imposible. Sin embargo, esta evolución también trae consigo nuevos retos a superar.

El desarrollo y diseño de algoritmos de control en presencia de incertidumbres es uno de los mayores retos que enfrenta la teoría de control. La discrepancia entre las dinámicas reales de la planta y las de su modelo matemático, implica la aparición de parámetros desconocidos, perturbaciones externas y dinámicas no modeladas. Esto ha impulsado el desarrollo del tan llamado control *robusto*, el cual en principio, debería resolver estos problemas.

El control por modos deslizantes (sliding mode control, **SMC** por sus siglas en inglés), es quizá, el acercamiento más exitoso para el manejo de incertidumbres/perturbaciones acotadas y de dinámicas no modeladas. Históricamente, los **modos deslizantes** fueron descubiertos como un caso especial dentro de los sistemas de estructura variable (variable structure systems, **VSS** por sus siglas en inglés). Los sistemas de estructura variable abarcan varias estructuras que requieren de reglas exactas para conmutar entre sí, con la finalidad de lograr

un desempeño adecuado en el sistema. El desarrollo de estas ideas comenzaron en la Unión Soviética a finales de los años 1950 [16].

## Motivación: Los Modos Deslizantes en la Industria

En la actualidad, Bosch Rexroth AG<sup>1</sup> muestra interés en la aplicación de los *modos deslizantes* como opción para el desarrollo de controladores y además, determinar la viabilidad de su implementación a nivel industrial [10].

Pruebas experimentales con equipo industrial mostrado en la Figura 1 y detalladas en [9] para aplicaciones en actuadores electro-hidráulicos, han mostrado las siguientes ventajas al recurrir a los modos deslizantes:

- ✓ Robustez frente a incertidumbres del modelo
- ✓ Seguimiento perfecto de trayectorias dadas
- ✓ Implementación sencilla
- ✓ No hay necesidad de llevar a cabo una identificación exacta de la planta
- ✓ La instalación es rápida y sencilla



**Figura 1:** Equipo hidráulico experimental para pruebas de algoritmos de control por modos deslizantes [10]

Dichas ventajas pueden ser aprovechadas en aplicaciones electro-hidráulicas, por ejemplo en turbinas de viento o en vehículos de carga (ver Figuras 2 y 3, respectivamente) demandan alta robustez contra perturbaciones. En el caso de las turbinas, se requiere de alta precisión en el mecanismo de orientación del rotor para el accionamiento eficiente en la caja de engranes y robustez en los actuadores hidráulicos de las aspas para propósitos de seguimiento del viento, ver video en [4]. En el caso del vehículo de carga, la carga es variable y/o desconocida para

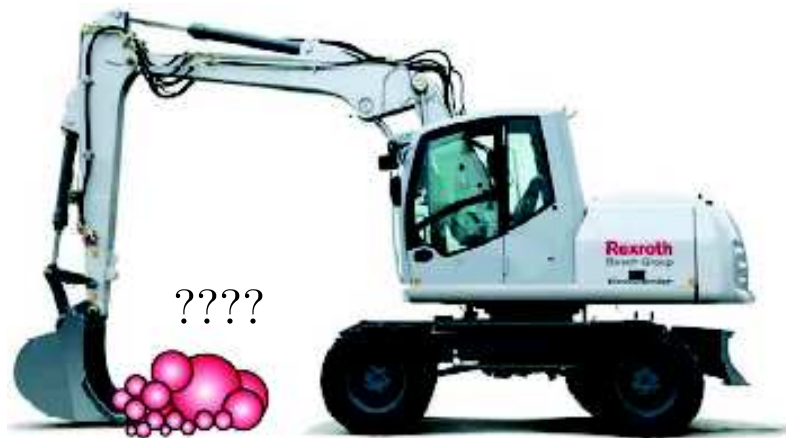
---

<sup>1</sup>Compañía dedicada a la manufactura de tecnología para la automatización de procesos mediante componentes hidráulicos, neumáticos, servo accionamientos, controladores, etc [15].

cada ocasión en la que el brazo levanta su carga. Versiones modificadas de este vehículo son utilizadas para la tala de árboles y maquinaria para procesar la madera, ver video en [6]. Datos técnicos de maquinaria Bosch Rexroth en [15].



**Figura 2:** Componentes electro-hidráulicos en una turbina de viento [15]



**Figura 3:** Vehículo de carga con equipo hidráulico [9]

No sería de extrañar que otras compañías empiecen a considerar las ventajas de implementar controladores por modos deslizantes en sus equipos industriales, por lo que podría generarse un gran campo de oportunidades para ingenieros interesados en la aplicación de los modos deslizantes.



## Desventajas de los Modos Deslizantes

En la práctica e implementación de los modos deslizantes, los ingenieros pueden experimentar un fenómeno indeseable llamado “*chattering*” [18]. Este fenómeno consiste en oscilaciones de frecuencia y amplitud finita. Desde la primera etapa del desarrollo de la teoría de control por modos deslizantes, el *chattering* ha sido el principal obstáculo para su aplicación. El *chattering* es un fenómeno perjudicial porque conduce a una baja precisión de control, alto desgaste en piezas móviles mecánicas y altas pérdidas de calor en circuitos de potencia.

Hay dos razones que pueden originar *chattering*. Puede ser causado por dinámicas rápidas que fueron ignoradas en el modelo ideal. Dichas dinámicas con constantes de tiempo pequeñas, suelen ser ignoradas en los modelos de servomecanismos, sensores y procesadores de datos. La segunda razón, es la utilización de controladores digitales con periodo finito de muestreo, lo que provoca el llamado “discretization chatter”. En teoría, el modo deslizante ideal supone frecuencia de conmutación infinita, pero puesto que el control es constante en un intervalo de muestreo, la frecuencia de conmutación no puede ser superior a la de muestreo, lo cual genera *chattering* también.

Para efectos de reducción de *chattering* [17], en este trabajo se abordará el concepto de control equivalente (uso de filtros paso-bajas) y modos deslizantes de orden superior (modos deslizantes de segundo orden, algoritmo Super Twisting), los cuales serán descritos en el primer capítulo de esta tesis.

## Formulación del Problema

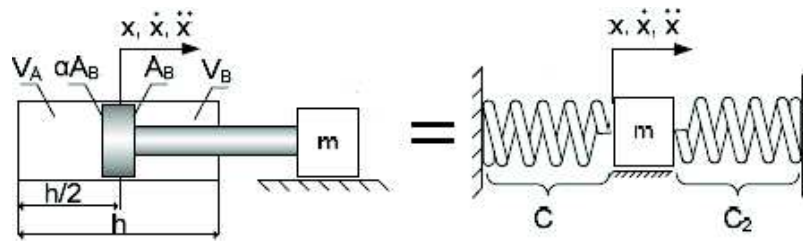
La presencia de perturbaciones desconocidas y de incertidumbres en los parámetros de una planta, es un problema presente en la industria. En la actualidad, existen aplicaciones industriales que requieren de gran exactitud en el control de posición de sus mecanismos, aún ante perturbaciones desconocidas e incertidumbres en sus parámetros. Esto lleva a buscar nuevas metodologías de control en el campo industrial, como por ejemplo los modos deslizantes.

De manera análoga (ver Figura 4), una unidad electro-hidráulica puede ser estudiada a partir de un sistema masa amortiguador resorte.

El presente trabajo de tesis, está enfocado a la implementación de algoritmos de control por modos deslizantes en una planta electromecánica<sup>2</sup> masa amortiguador resorte. Básicamente el sistema está compuesto por dos masas interconectadas entre sí por medio de un resorte. De esta forma, el problema que se considera en este trabajo, es el control de la posición de la primera masa en presencia de una perturbación generada por la segunda masa.

---

<sup>2</sup>El sistema Rectilinear Plant 210 de ECP es descrito a detalle en el Capítulo 3



**Figura 4:** Analogía del funcionamiento de un cilindro hidráulico con un sistema masa resorte [9]

## Objetivos

1. El objetivo principal de este trabajo de tesis, consiste en **controlar la posición** de una masa aplicando un método propuesto para fines industriales, la cual involucra a los **modos deslizantes**.

2. Los objetivos secundarios se refieren a la implementación y comparación del desempeño de distintos algoritmos de control que pueden ser utilizados en la metodología propuesta, y son:

**PID:** Control proporcional integral derivativo

**PD:** Control proporcional derivativo

**FOSM:** First order sliding mode - Modo deslizante de primer orden

**FOSM VAR:** First order sliding mode variable gain - Modo deslizante de primer orden de ganancia variable

**ST FIL:** Super Twisting con filtro

**ST:** Super Twisting

3. La validación de las propiedades de los modos deslizantes (insensibilidad ante incertidumbres en los parámetros de la planta, perturbaciones desconocidas y máxima exactitud) son también puntos de interés para este trabajo de tesis.

## Metodología

Para cumplir el objetivo, se realizarán pruebas experimentales utilizando como base el artículo *Input-output linearization and integral sliding mode disturbance compensation for electro-hydraulic drives* (J. Komsta 2010) [10]. Los experimentos se llevarán a cabo en un sistema masa amortiguador resorte, en donde se busca lograr el control de la posición de una masa determinada en presencia de una perturbación desconocida, pero acotada por los elementos de una segunda masa dentro del sistema.

## Contribución

Las principales contribuciones de este trabajo se enlistan a continuación:

1. Implementación de un diferenciador combinado (diferenciador de Levant y diferenciación por método de la secante).
2. Resultados experimentales de modos deslizantes de primer orden de ganancia variable.
3. Resultados experimentales de modos deslizantes de segundo orden (Super Twisting), el cual incluye un término lineal.
4. Desempeño del algoritmo Super Twisting con y sin el uso de un filtro paso-bajas.

## Contenido de la Tesis

El presente escrito está dividido en 7 capítulos. El primer Capítulo corresponde a un acercamiento teórico de los modos deslizantes mediante un ejemplo ilustrativo. En él se abordan los conceptos de control por modos deslizantes (primer y segundo orden), control equivalente y modos deslizantes integrales. El Capítulo dos describe la metodología basada en una aplicación industrial, la cual incluye un compensador de perturbaciones por modos deslizantes en distintas configuraciones: modo deslizante de primer orden, modo deslizante de primer orden de ganancia variable y modo deslizante de segundo orden (Super Twisting). El Capítulo tres se enfoca en la descripción del sistema físico utilizado para aplicar los algoritmos de control descritos en el Capítulo dos. En el Capítulo cuatro se presenta el modelo matemático del sistema físico, tanto el modelo completo que incluye las dos masas como el modelo reducido que solo toma en cuenta los elementos de la primera masa y considera los elementos de la segunda como perturbación. El Capítulo cinco muestra los métodos de sintonización utilizados para encontrar las ganancias de los distintos algoritmos de control implementados. El Capítulo seis muestra los resultados experimentales conseguidos y finalmente, el Capítulo siete contiene las conclusiones de este trabajo de tesis.

También se cuenta con una sección de anexos en la que se contempla los métodos de sintonización para un control PID y la interface en Matlab para el desarrollo experimental de este trabajo de tesis.

# Índice general

<b>1. Conceptos Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1. Modos Deslizantes . . . . .	2
1.1.1. Introducción . . . . .	2
1.1.2. Ejemplo Introdutorio a los Modos Deslizantes . . . . .	3
1.2. Control Equivalente . . . . .	9
1.2.1. Introducción . . . . .	9
1.2.2. Propiedades del Control Equivalente . . . . .	11
1.3. Modos Deslizantes Integrales . . . . .	12
1.3.1. Introducción . . . . .	12
1.4. Algoritmo Super Twisting . . . . .	13
1.4.1. Introducción . . . . .	13
1.4.2. Propiedades del Super Twisting . . . . .	16
<b>2. Control de Posición</b>	<b>17</b>
2.0.3. Introducción . . . . .	17
2.0.4. Modelado de la Planta . . . . .	18
2.0.5. Diseño del Controlador . . . . .	19
2.0.6. Compensador de Perturbaciones por Modos Deslizantes . . . . .	21
2.1. Ganancia Variable . . . . .	23
2.1.1. Introducción . . . . .	23
2.1.2. Ley de Adaptación de Control por Modos Deslizantes . . . . .	24
2.2. Algoritmo Super Twisting . . . . .	24
2.2.1. Introducción . . . . .	24

2.2.2. Ley de Control . . . . .	25
<b>3. Planta</b>	<b>26</b>
3.1. Descripción de la Planta . . . . .	26
3.1.1. Implementación del Control en Tiempo-Real . . . . .	30
3.1.2. Motor . . . . .	30
3.1.3. Sensores . . . . .	31
<b>4. Modelado Matemático</b>	<b>32</b>
4.1. Modelo Matemático . . . . .	32
4.1.1. Representación en Espacio de Estados . . . . .	34
4.1.2. Modelo Matemático Reducido . . . . .	36
<b>5. Diseño del Controlador</b>	<b>38</b>
5.1. Control $v$ . . . . .	39
5.1.1. Configuración PID . . . . .	39
5.1.2. Configuración PD . . . . .	40
5.2. Control por Modos Deslizantes . . . . .	42
5.2.1. Modo Deslizante de Primer Orden . . . . .	42
5.2.2. Modo Deslizante de Primer Orden de Ganancia Variable . . . . .	43
5.2.3. Super Twisting . . . . .	45
5.3. Estimación de la Velocidad . . . . .	47
5.3.1. Diferenciador . . . . .	47
<b>6. Resultados Experimentales</b>	<b>50</b>
6.1. Primer Experimento . . . . .	50
6.2. Segundo Experimento . . . . .	58
<b>7. Conclusiones</b>	<b>64</b>
<b>A. Control Proporcional Integral Derivativo PID</b>	<b>67</b>
A.1. Sintonización PID . . . . .	68

B. Entorno Simulink

70

# Índice de figuras

1.	Equipo hidráulico experimental para pruebas de algoritmos de control por modos deslizantes [10] . . . . .	II
2.	Componentes electro-hidráulicos en una turbina de viento [15] . . . . .	III
3.	Vehículo de carga con equipo hidráulico [9] . . . . .	III
4.	Analogía del funcionamiento de un cilindro hidráulico con un sistema masa resorte [9] . . . . .	V
1.1.	Movimiento uni-dimensional de una masa unitaria . . . . .	3
1.2.	Convergencia asintótica para $f(x_1, x_2, t) \equiv 0$ . . . . .	4
1.3.	Convergencia al dominio $\Omega$ para $f(x_1, x_2, t) = \sin 2t$ . . . . .	4
1.4.	Variable deslizante . . . . .	8
1.5.	Convergencia asintótica para $f(x_1, x_2, t) = \sin 2t$ . . . . .	8
1.6.	Plano de fase . . . . .	9
1.7.	Acercamiento en el plano de fase . . . . .	9
1.8.	Control por modos deslizantes (SMC) . . . . .	10
1.9.	Acercamiento al control por modos deslizantes (SMC) . . . . .	10
1.10.	Estimación del control equivalente . . . . .	12
1.11.	Estimación de la perturbación . . . . .	12
1.12.	Variable deslizante $\sigma$ . . . . .	15
1.13.	Control Super Twisting . . . . .	15
1.14.	Seguimiento de la trayectoria . . . . .	15
3.1.	Sistema masa-amortiguador-resorte Modelo 210 de ECP . . . . .	26
3.2.	Sistema Experimental de Control . . . . .	27
3.3.	Descripción del Sistema Físico . . . . .	28

3.4. Componentes del sistema 210 de ECP . . . . .	29
3.5. Vista transversal de un motor típico de DC sin escobillas (cuatro polos) . . .	31
3.6. Principio de Operación de un Encoder Óptico Incremental . . . . .	31
4.1. Diagrama de bloques del sistema masa-resorte-amortiguador . . . . .	32
4.2. Diagrama de cuerpo libre de la masa 1 . . . . .	33
4.3. Diagrama de cuerpo libre de la masa 2 . . . . .	33
4.4. Diagrama de Bloques del Sistema dividido en dos secciones . . . . .	36
4.5. Diagrama de bloque reducido considerando perturbaciones . . . . .	37
5.1. Oscilaciones sostenidas obtenidas experimentalmente aplicando el segundo método de Ziegler-Nichols con $K_{cr} = 2796$ y $P_{cr} = 0.2[s]$ . . . . .	39
5.2. Diagrama del Control $v$ con configuración PID en Simulink . . . . .	40
5.3. Frecuencia natural del sistema en función de la masa . . . . .	41
5.4. Respuesta escalón de $G(s)$ para distintos valores de $\omega_n$ . . . . .	41
5.5. Diagrama del Control $v$ con configuración PD en Simulink . . . . .	42
5.6. Superficie deslizante $s$ correspondiente a una ganancia $L = 9$ . . . . .	42
5.7. Diagrama del controlador SMC de primer orden en Simulink . . . . .	43
5.8. Diagrama del controlador SMC de primer orden de ganancia variable en Simulink	43
5.9. Diagrama de la adaptación de ganancia Simulink . . . . .	44
5.10. Superficie $s$ y ganancia adaptable $L$ . . . . .	44
5.11. Diagrama del controlador SMC Super Twisting en Simulink . . . . .	45
5.12. Diagrama del controlador Super Twisting con filtro en Simulink . . . . .	45
5.13. Diagrama del bloque Super Twisting sin filtro en Simulink . . . . .	46
5.14. Superficie $s$ para Super Twisting con y sin filtro paso-bajas . . . . .	46
5.15. Comparación de la velocidad estimada en el sistema y la respuesta simulada de la función de transferencia $G(s)$ . . . . .	48
5.16. Diagrama del Diferenciador en Simulink . . . . .	49
5.17. Diagrama del Diferenciador Numérico basado en el Método de la Secante en Simulink . . . . .	49
5.18. Diagrama del Diferenciador de Levant en Simulink . . . . .	49



6.1. Comparación de la posición alcanzada con los distintos algoritmos de control a una referencia dada de 1 [cm] . . . . .	51
6.2. Zoom de la posición en la respuesta transitoria . . . . .	51
6.3. Zoom de la posición en el estado permanente . . . . .	52
6.4. Error $e$ . . . . .	53
6.5. Zoom Error $e$ . . . . .	53
6.6. Velocidades del sistema . . . . .	54
6.7. Zoom de las velocidades del sistema . . . . .	54
6.8. Control $v$ . . . . .	55
6.9. Zoom del control $v$ . . . . .	56
6.10. Control $u$ . . . . .	56
6.11. Zoom del control $u$ . . . . .	57
6.12. Comparación de la posición alcanzada con los distintos algoritmos de control a una referencia dada de 1 [cm], en presencia de perturbaciones . . . . .	58
6.13. Zoom de la posición en la respuesta transitoria . . . . .	59
6.14. Zoom de la posición en el estado permanente . . . . .	60
6.15. Velocidades del sistema . . . . .	60
6.16. Zoom de las velocidades del sistema . . . . .	61
6.17. Control $v$ . . . . .	61
6.18. Zoom del control $v$ . . . . .	62
6.19. Control $u$ . . . . .	62
6.20. Zoom del control $u$ . . . . .	63
A.1. Oscilaciones sostenidas aplicando el método de lazo cerrado de Ziegler-Nichols	68
A.2. Curva de respuesta en forma de $S$ aplicando el método de lazo abierto de Ziegler-Nichols . . . . .	69
B.1. Parámetros de Configuración del RTW . . . . .	70
B.2. Bloque de Reset en Simulink . . . . .	71
B.3. Diagrama de la planta en Simulink . . . . .	71

# Capítulo 1

## Conceptos Preliminares

Este capítulo está dedicado al marco teórico necesario para el desarrollo del presente trabajo de tesis. Se dedicará especial énfasis a la teoría de control por modos deslizantes (SMC) para destacar las ventajas que ofrece esta estructura de control.

### 1.1. Modos Deslizantes

#### 1.1.1. Introducción

La idea del control por modos deslizantes (SMC) se basa en la introducción de una función diseñada a medida, la cual recibe el nombre de variable *deslizante*. Tan pronto como la variable *deslizante* se vuelve igual a cero, la **superficie deslizante** es definida. El diseño apropiado de la variable deslizante asegura un desempeño adecuado del sistema en lazo cerrado, siempre que las trayectorias del sistema permanezcan en la superficie deslizante. La idea del (SMC) es guiar la trayectoria del sistema a la superficie deslizante y una vez ahí, mantener el movimiento sobre la superficie deslizante por acción de control y así entonces, explotar las principales características de los modos deslizantes: **insensibilidad a perturbaciones** (internas y externas) acopladas a la señal de control, **máxima exactitud** y **convergencia en tiempo finito**.

Para 1980, la parte fundamental de la teoría clásica de (SMC) había sido ya concretada, dejando en claro un procedimiento de **dos pasos** para el diseño de controladores por modos deslizantes.

El primer paso involucra el diseño de una **función de conmutación** necesaria para que el movimiento del sistema sobre la superficie deslizante, denominado *el movimiento de deslizamiento*, satisfaga las especificaciones de diseño.

El segundo paso se refiere a la selección de una **ley de control**, tal que los estados del sistema sean atraídos a la superficie deslizante, aún en presencia de perturbaciones/incertidumbres

internas y externas.

### 1.1.2. Ejemplo Introductorio a los Modos Deslizantes

Considerando el movimiento uni-dimensional de una masa unitaria representada por la Figura 1.1

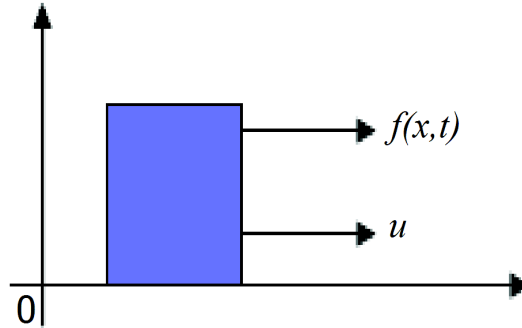


Figura 1.1: Movimiento uni-dimensional de una masa unitaria

se puede obtener una descripción en variables de estado del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t) & x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad (1.1)$$

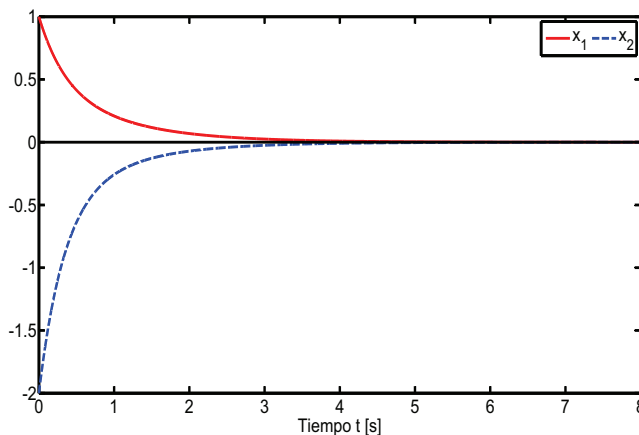
en donde  $x_1 = x$  y  $x_2 = \dot{x}_1$  representan la posición y la velocidad respectivamente,  $u$  la señal de control y el término  $f(x_1, x_2, t)$  la perturbación en el sistema (fricción seca y viscosa, y cualquier otra fuerza de resistencia). La perturbación se asume acotada por  $|f(x_1, x_2, t)| \leq L > 0$ .

Ahora el punto es diseñar una ley de control  $u = u(x_1, x_2)$  que lleve a las variables de estado a cero:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1, x_2 = 0$ , aún en la presencia de la perturbación desconocida, pero acotada,  $f(x_1, x_2, t)$ . Para ilustrar y entender mejor este problema, se parte de un ejemplo basado en una ley de control por retroalimentación de estados

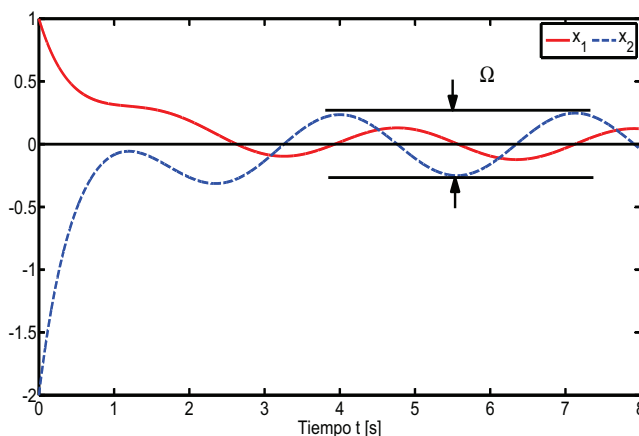
$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0 \quad (1.2)$$

la cual solamente puede asegurar convergencia asintótica para  $f(x_1, x_2, t) \equiv 0$ , o el traslado de los estados a un dominio acotado  $\Omega(k_1, k_2, L)$  cuando  $|f(x_1, x_2, t)| \leq L > 0$ .

**Experimento 1.** El sistema (1.1) es simulado implementando la ley de control (1.2), con  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -2$ ,  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$  y  $f(x_1, x_2, t) = \sin 2t$ .



**Figura 1.2:** Convergencia asintótica para  $f(x_1, x_2, t) \equiv 0$



**Figura 1.3:** Convergencia al dominio  $\Omega$  para  $f(x_1, x_2, t) = \sin 2t$

Los resultados de la convergencia asintótica y de la convergencia al dominio acotado  $\Omega(k_1, k_2, L)$ , se muestran en las Figuras 1.2 y 1.3, respectivamente.

Ahora el dilema se concreta a la solución del problema de control formulado anteriormente (lograr convergencia asintótica en presencia de la perturbación desconocida, pero acotada,  $f(x_1, x_2, t)$ ), utilizando solamente el intervalo de la perturbación desconocida.

Para lograr resolver este problema de control, es necesaria la introducción de una dinámica compensada para el sistema (1.1). Una buena elección para dicho fin, es una ecuación diferencial lineal homogénea invariante en el tiempo

$$\dot{x}_1 + cx_1 = 0, \quad c > 0 \quad (1.3)$$

Recordando que  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ , se observa que tanto la solución general de la ecuación (1.3) co-

mo su derivada, convergen a cero asintóticamente y no existe efecto alguno de la perturbación  $f(x_1, x_2, t)$  en las dinámicas compensadas de los estados

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1 \exp(-ct) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = -cx_1(0) \exp(-ct) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para obtener estas compensaciones dinámicas, se debe introducir en primer lugar, una variable en el espacio de estados del sistema (1.1)

$$\sigma = \sigma(x_1, x_2) = x_2 + cx_1, \quad c > 0 \quad (1.5)$$

Para lograr llevar a las variables de estado  $x_1, x_2$  a cero, a pesar de la perturbación acotada  $f(x_1, x_2, t)$ , la variable  $\sigma$  tiene que ser llevada a **cero** en tiempo finito por la acción del control  $u$ . Esta tarea puede ser alcanzada aplicando técnicas basadas en funciones de Lyapunov a las dinámicas de  $\sigma$ , las cuales se derivan de las ecuaciones (1.1) y (1.5)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= cx_1 + \dot{x}_2 \\ \dot{\sigma} &= cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Para las dinámicas de  $\sigma$  en (1.6), se introduce una función candidata de Lyapunov de la forma

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (1.7)$$

La convergencia global asintótica de la ecuación (1.6) alrededor del punto de equilibrio  $\sigma = 0$ , se asegura mediante el cumplimiento de las siguientes condiciones [16]:

- (a)  $\dot{V} < 0$ , y
- (b)  $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$

El cumplimiento de la condición (b) es obvia. Por otro lado, para lograr la convergencia en tiempo finito (estabilidad global en tiempo finito), la condición (a) puede modificarse a

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2}, \quad \alpha > 0 \quad (1.8)$$

De hecho, integrando la desigualdad (1.8) en el intervalo de tiempo  $0 \leq \tau \leq t$  se obtiene

$$V^{1/2}(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{1/2}(0) \quad (1.9)$$

En consecuencia,  $V(t)$  llega a cero en un tiempo finito  $t_r$  acotado por

$$t_r \leq \frac{2V^{1/2}(0)}{\alpha} \quad (1.10)$$

El control  $u$  que es calculado para satisfacer la ecuación (1.8), conducirá a la variable  $\sigma$  a cero en tiempo finito y la mantendrá en ese valor, aún después de haber llegado ahí.

La derivada de  $V$  queda como:

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} = \sigma(cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u) \quad (1.11)$$

Asumiendo  $u = -cx_2 + v$  y substituyendo en (1.11), se obtiene

$$\dot{V} = \sigma(f(x_1, x_2, t) + v) = \sigma f(x_1, x_2, t) + \sigma v \leq |\sigma|L + \sigma v \quad (1.12)$$

Seleccionando  $v = -\rho \text{sign}(\sigma)$ ,  $\rho > 0$  y substituyendo en (1.12), se llega a

$$\dot{V} \leq |\sigma|L - |\sigma|\rho = -|\sigma|(\rho - L) \quad (1.13)$$

Tomando en cuenta la ecuación (1.7), la condición (1.8) puede reescribirse como

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma|, \quad \alpha > 0 \quad (1.14)$$

Combinando las ecuaciones (1.13) y (1.14) se obtiene

$$\dot{V} \leq -|\sigma|(\rho - L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma| \quad (1.15)$$

Finalmente la ganancia del control  $\rho$  es calculada como

$$\rho = L \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad (1.16)$$

Por lo tanto, la ley de control  $u$  que lleva a  $\sigma$  a cero en tiempo finito  $t_r$  es

$$u = -cx_2 - \rho \text{sign}(\sigma) \quad (1.17)$$

### Observaciones

1. La condición (1.8) es equivalente a

$$\sigma \dot{\sigma} \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma| \quad (1.18)$$

y es llamada *condición de alcance* y puede ser utilizada para el diseño de controladores por modos deslizantes.

2. Es obvio que  $\dot{\sigma}$  debe ser una función del control  $u$ . Esto es necesario para que el diseño del **(SMC)** sea el correcto basado en la ecuación (1.8) ó (1.18). Esta observación debe ser tomada en cuenta en el diseño de la variable deslizante (1.5).

3. El primer término de la ganancia del control (1.16) está enfocado para compensar la perturbación acotada  $f(x_1, x_2, t)$ . El segundo término  $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$  es responsable del tiempo (1.10) de llegada de la superficie deslizante. Mientras más grande sea  $\alpha$ , menor será el tiempo  $t_r$ .

Es necesario recurrir a algunas definiciones para interpretar la variable (1.5), las dinámicas compensadas deseadas (1.3) y la función de control (1.17).

**Definición 1.** La variable (1.5) es llamada *variable deslizante*.

**Definición 2.** Las ecuaciones (1.3) y (1.5) reescritas en la forma

$$\sigma = x_2 + cx_1 = 0, \quad c > 0 \quad (1.19)$$

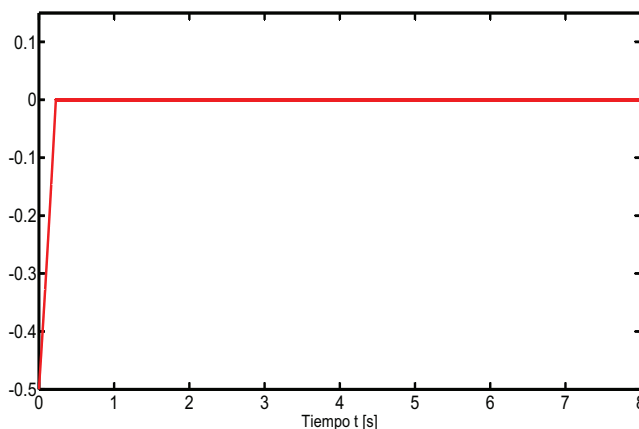
corresponden a una línea recta en las variables de espacio del sistema (1.1), la cual es conocida como *superficie deslizante*. El cumplimiento de la condición de *alcance* o *existencia* (1.18), implica que la trayectoria  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  del sistema (1.1) es llevada directamente a la superficie deslizante (1.19) y además permanece ahí después de haber llegado.

**Definición 3.** El control  $u = u(x_1, x_2)$  en (1.17), es conocido como *control por modos deslizantes (SMC)*. Dicho control es responsable de llevar las variables de estado  $x_1, x_2$  a la superficie deslizante (1.18) en un tiempo finito  $t_r$  y de mantenerlas ahí posteriormente a pesar de la presencia de la perturbación acotada  $f(x_1, x_2, t)$ . Se dice que un *modo deslizante ideal* toma lugar en el sistema (1.1) para todo tiempo  $t > t_r$ .

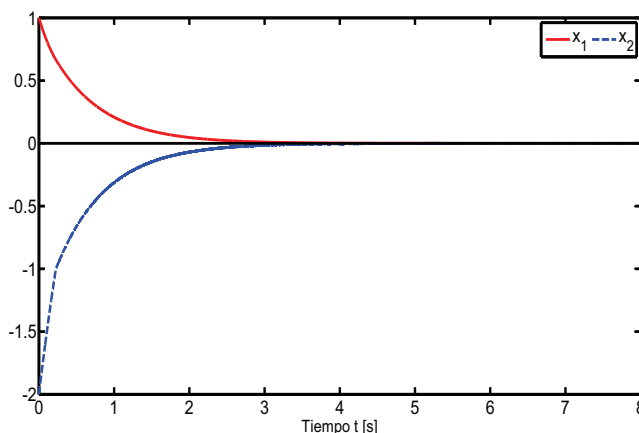
**Experimento 2.** Los resultados de la simulación del sistema (1.1) con la ley de control por modos deslizantes **(SMC)** compuesta por (1.5) y (1.17), con condiciones iniciales  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -2$ , ganancia de control  $\rho = 2$ , parámetro  $c = 1.5$  y con la perturbación  $f(x_1, x_2, t) = \sin 2t$ , son presentados en las Figuras 1.4 a 1.7.

**Análisis.** La Figura 1.4 ilustra la convergencia a cero en tiempo finito de la variable deslizante. La convergencia asintótica a cero de las variables de estado  $x_1, x_2$ , en presencia de la perturbación externa acotada  $f(x_1, x_2, t) = \sin 2t$ , es mostrada en la Figura 1.5.

El *plano de fase* representado por la Figura 1.6, muestra el fenómeno de la *fase de alcance* (cuando la trayectoria del estado es llevada directamente hacia la superficie deslizante) y la



**Figura 1.4:** Variable deslizante



**Figura 1.5:** Convergencia asintótica para  $f(x_1, x_2, t) = \sin 2t$

*fase deslizante* (cuando la trayectoria del estado se mueve a lo largo de la superficie deslizante en dirección directa al origen).

Haciendo un acercamiento a un segmento de la *plano de fase* (ver Figura 1.7), se observa un movimiento en “zigzag” de las variables de estado cuando están en el *modo deslizante*. Este movimiento presenta pequeña amplitud y alta frecuencia.

El control por modos deslizantes (**SMC**) presentado en las Figuras 1.8 y 1.9, es una función de control que conmuta a alta frecuencia. La frecuencia de conmutación es inversamente proporcional al tiempo de muestreo implementado en la simulación ( $10^{-5}$ [s]). Aparentemente, esta acción de control de alta frecuencia, causa un movimiento en zigzag en el modo deslizante (Figura 1.7). Idealmente, la frecuencia de conmutación de un modo deslizante tiende a infinito, mientras que la amplitud del movimiento en zigzag tiende a cero.

Como se puede apreciar en las figuras 1.7 y 1.9, la imperfección de la función signo



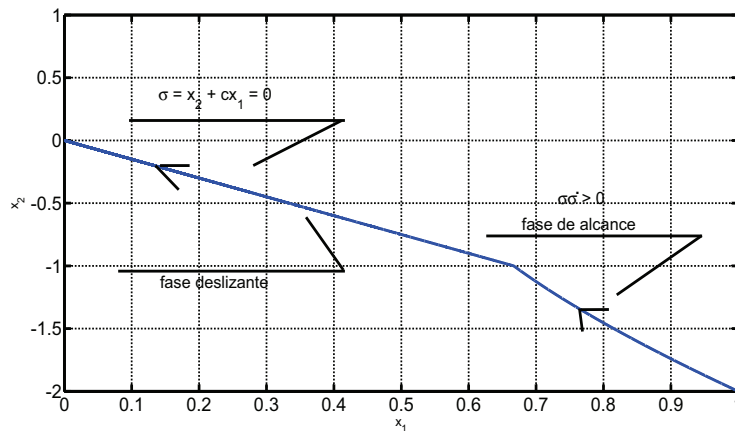


Figura 1.6: Plano de fase

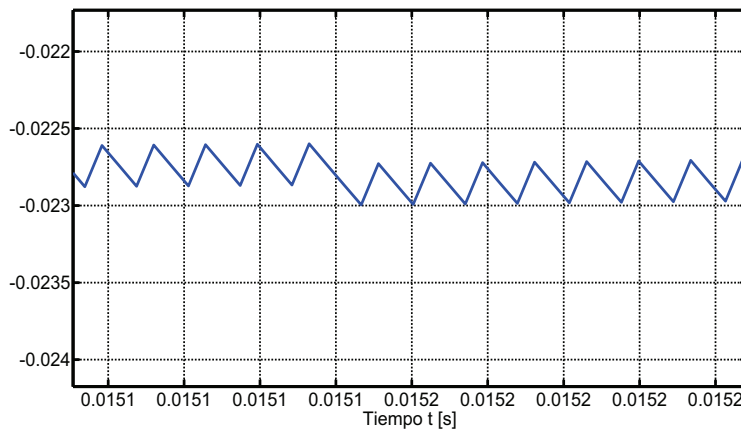


Figura 1.7: Acercamiento en el plano de fase

implementada produce una amplitud y frecuencia finita en el movimiento de zigzag del modo deslizante. Esto es debido a la naturaleza del tiempo discreto de la simulación hecha por computadora. Este efecto es conocido como **chattering**.

## 1.2. Control Equivalente

### 1.2.1. Introducción

En la práctica de ingeniería de control, es de suma importancia evitar el **chattering** en la señal de control. Esto se puede lograr mediante señales que sean continuas/suaves, ya que por ejemplo, las superficies dinámicas de un aeroplano no pueden hacer movimientos de alta frecuencia hacia atrás, pero al mismo tiempo es deseable retener la robustez del sistema de

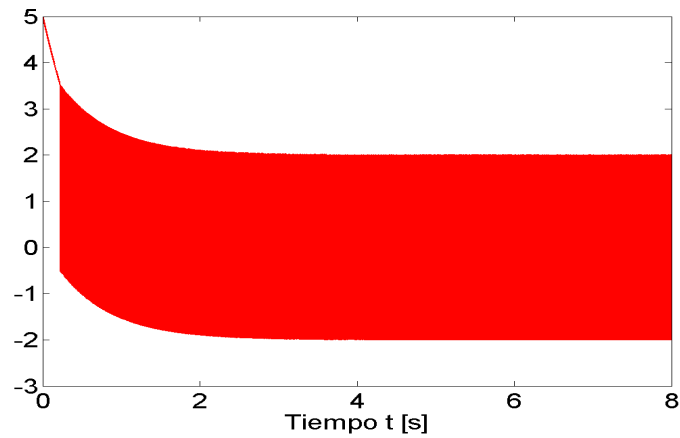


Figura 1.8: Control por modos deslizantes (SMC)

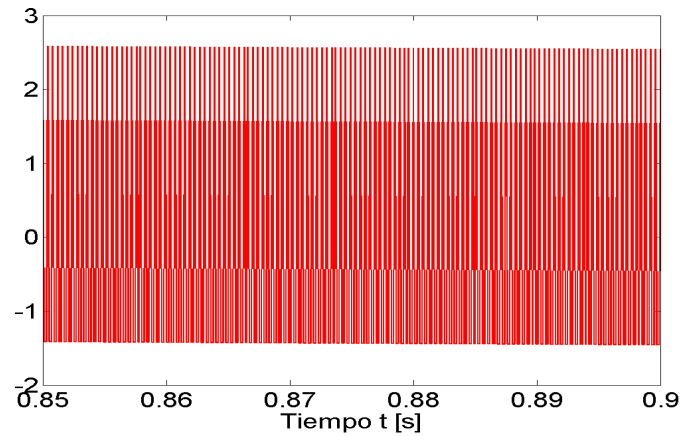


Figura 1.9: Acercamiento al control por modos deslizantes (SMC)

control a incertidumbres y perturbaciones externas acotadas. Una forma de evitar, o por lo menos reducir, el chattering es mediante el *control equivalente*.

Suponiendo que en un tiempo  $t_r$  la superficie deslizante  $\sigma = x_2 + cx_1 = 0$  es alcanzada y la trayectoria  $x_1(t), x_2(t)$  permanezca en la superficie deslizante en tiempos posteriores por acción del control por modos deslizantes (**SMC**) dado por (1.5) y (1.17). Esto implica que  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$  para todo  $t \geq t_r$ . La condición  $\dot{\sigma} = 0$  produce

$$\dot{\sigma} = cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u = 0, \quad \sigma(t_r) = 0 \quad (1.20)$$

Una función de control que satisface la ecuación (1.20) puede ser fácilmente calculada como

$$u_{eq} = -cx_2 - f(x_1, x_2, t) \quad (1.21)$$

**Definición 4.** La función de control (1.21) es conocida como *control equivalente*. Esta función puede ser aplicada al sistema (1.1) después de haber alcanzado la superficie deslizante  $\sigma = 0$ , de tal forma que la trayectoria del sistema permanece sobre la superficie en tiempos posteriores.

### 1.2.2. Propiedades del Control Equivalente

La función de control (1.21), no es la función que termina siendo aplicada al sistema (1.1) tan pronto como la superficie deslizante es alcanzada. Más aún, normalmente la función de control (1.21) no puede ser aplicada, esto debido a que la perturbación acotada  $f(x_1, x_2, t)$  es desconocida. La acción del control equivalente, describe el "promedio" del control de conmutación de alta frecuencia (1.17) sobre el sistema (1.1). Este *promedio* puede ser logrado por medio de un filtro paso-bajas (low pass filtering, LPF por sus siglas en inglés) que actúa en el término de conmutación de alta frecuencia  $\rho \text{sign}(\sigma)$  en la ley de control (1.17). Por lo tanto, el control equivalente puede ser estimado de la siguiente forma

$$\hat{u}_{eq} = -cx_2 - \rho \text{LPF}(\text{sign}(\sigma)), \quad t \geq t_r \quad (1.22)$$

Para efectos prácticos, el filtro paso-bajas puede ser implementado como una ecuación diferencial de primer orden

$$\begin{aligned} \tau \dot{z} &= -z + \text{sign}(\sigma) \\ \hat{u} &= cx_2 + \rho z \end{aligned} \quad (1.23)$$

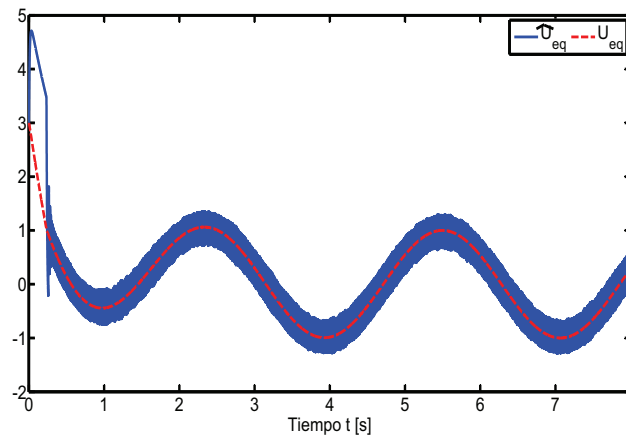
en donde  $\tau$  es un valor escalar positivo pequeño y representa la constante de tiempo del filtro. La señal  $u_{eq}$  puede ser estimada de forma muy precisa mediante el término  $\hat{u}_{eq}$ , haciendo  $\tau$  tan pequeño como sea posible, pero más grande que el tiempo de muestreo del filtro paso-bajas implementado [16].

Comparando las ecuaciones (1.21) y (1.22), el término de la perturbación puede ser fácilmente estimado como

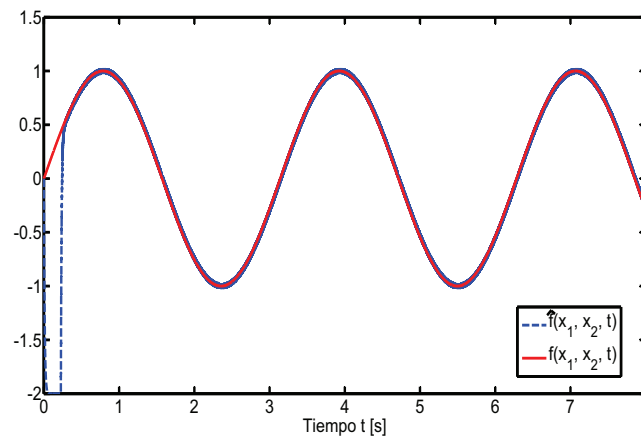
$$f(x_1, x_2, t) = \rho \text{LPF}(\text{sign}(\sigma)), \quad t \geq t_r \quad (1.24)$$

**Experimento 3.** El sistema (1.1) con el (SMC) (1.5), (1.17), condiciones iniciales  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -2$ , la ganancia de control  $\rho = 2$ , el parámetro  $c = 1.5$  y la perturbación  $f(x_1, x_2, t) = \sin 2t$ , utilizada solamente con propósitos de simulación. El control equivalente y la perturbación son estimados utilizando las ecuaciones (1.23) y (1.24) con  $\tau = 0.01$ . Para

efectos comparativos, el control equivalente ideal es graficado en cumplimiento de la ecuación (1.22). Los resultados se muestran en las figuras 1.10 y 1.11.



**Figura 1.10:** Estimación del control equivalente



**Figura 1.11:** Estimación de la perturbación

Como se puede observar en las figuras anteriores, existe una muy alta precisión en términos de la estimación del control equivalente y de la perturbación.

## 1.3. Modos Deslizantes Integrales

### 1.3.1. Introducción

En el control convencional por modos deslizantes, la robustez a la variación de parámetros del sistema y a perturbaciones externas sólo puede ser lograda después de que ocurre el modo

deslizante. Dicho de otro modo, la robustez no puede ser garantizada durante la *fase de alcance*.

Los modos deslizantes integrales (integral sliding mode, **ISM** por sus siglas en inglés) buscan eliminar la *fase de alcance* mediante el enforzamiento del modo deslizante en la respuesta completa del sistema de principio a fin. A diferencia del enfoque de diseño convencional, en los **ISM** el orden de la ecuación de movimiento es igual al del modelo de la planta, por lo que el modo deslizante es establecido sin una *fase de alcance*. La invariancia del sistema a incertidumbres paramétricas y a perturbaciones externas es garantizada entonces, desde el primer instante de tiempo.

Los (**ISM**) son empleados también para prevenir el *chattering* en un lazo de control, comúnmente causado por las dinámicas no modeladas que son excitadas por las discontinuidades del controlador. En este caso, el término discontinuo del control es filtrado por un filtro paso-bajas antes de ser alimentado a la planta, por lo que la discontinuidad es asignada a un lazo de control auxiliar, en donde las dinámicas no modeladas no serán excitadas. El control filtrado actúa como un *compensador* de perturbaciones, preservando la propiedad de invariancia de los modos deslizantes [17].

## 1.4. Algoritmo Super Twisting

### 1.4.1. Introducción

El algoritmo Super Twisting es un *control por modos deslizantes de segundo orden*. Anteriormente se detalló que los modos deslizantes clásicos (o de primer orden) se caracterizan por su convergencia en tiempo finito y por la robustez que presentan ante perturbaciones e incertidumbres en los parámetros de una planta. Por otro lado, los modos deslizantes de segundo orden (Second Order Sliding Modes, **SOSM** por sus siglas en inglés) presentan trayectorias suaves, evitando el fuerte efecto del *chattering* presente en los modos deslizantes clásicos.

Retomando el sistema (1.1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t) & x_2(0) = x_{20} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.25)$$

Las dinámicas de entrada-salida [16] y [7], son de grado relativo 2:

$$\ddot{y} = u + f(y, \dot{y}, t) \quad (1.26)$$

El término  $\sigma$  necesario para el diseño de la superficie deslizante, es rediseñado para compensar las dinámicas del error de seguimiento de *entrada-salida*

$$\sigma = \dot{e} + re = 0, \quad c > 0 \quad e = y_c(t) - y(t) \quad (1.27)$$

en donde  $e$  es el error de seguimiento de salida,  $y_d(t)$  la referencia deseada y  $y(t)$  la salida del sistema.

Las dinámicas de la variable deslizante son derivadas como

$$\dot{\sigma} = \underbrace{\ddot{y}_d + r\dot{y}_d - f(y, \dot{y}, t) - r\dot{y}}_{\varphi(y, \dot{y}, t)} - u \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma} = \varphi(y, \dot{y}, t) - u \quad (1.28)$$

El término de perturbación acumulada  $\varphi(y, \dot{y}, t)$  se asume acotado por  $|\varphi(y, \dot{y}, t)| \leq C$ .

Entonces la ley de control que describe al Super Twisting [16], es la siguiente

$$u = c|\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + b \int \text{sign}(\sigma) dt, \quad c = 1.5\sqrt{C}, \quad b = 1.1C, \quad |\dot{\varphi}(y, \dot{y}, t)| \leq C \quad (1.29)$$

en donde  $\varphi(y, \dot{y}, t)$  es el término de la perturbación y  $C$  una constante mayor o igual a la derivada de la perturbación.

Para fines de esta tesis, se trabajará con una versión modificada de la ley de control (1.29). Esta modificación consiste en agregar un término lineal  $\rho$  propuesto en [12], el cual multiplica directamente a la superficie deslizante  $\sigma$ , por lo tanto, la nueva ley de control modificada es:

$$u = c|\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + b \int \text{sign}(\sigma) dt + \rho\sigma \quad (1.30)$$

**Experimento 4.** Los resultados siguientes corresponden a simulaciones efectuadas en el sistema (1.25), implementando el control super twisting (1.27), (1.29), con condiciones iniciales  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -2$ , ganancias de control  $c = 13.5$ ,  $b = 88$  y el parámetro  $r = 1.5$ , la referencia del sistema  $y_c = 2 \cos t$  y la perturbación  $f(x_1, x_2, t) = \sin 2t$ . El término  $\dot{e}$  en (1.27) es obtenido mediante diferenciación numérica.

**Análisis.** La *variable deslizante*  $\sigma$  es llevada a cero en tiempo finito (ver Figura 1.12) por acción del control continuo Super Twisting mostrado en la Figura 1.13.

La alta exactitud en el seguimiento de la trayectoria se muestra en la Figura 1.14, la cual es similar a los resultados anteriores.

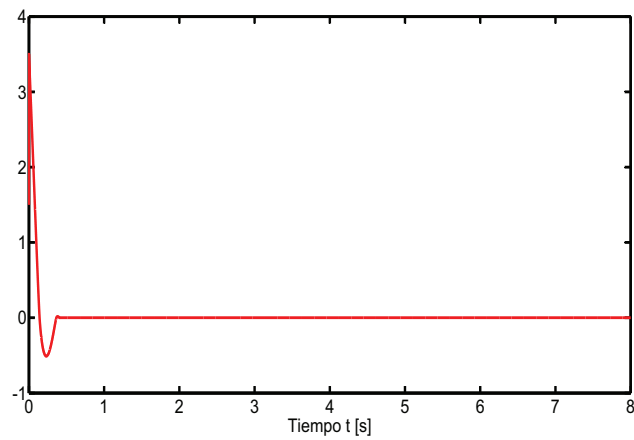


Figura 1.12: Variable deslizante  $\sigma$

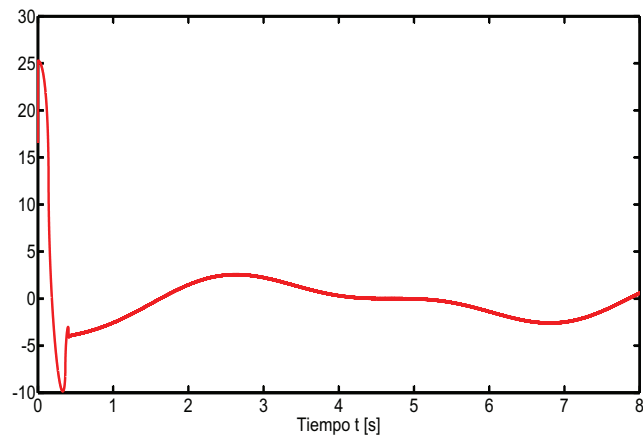


Figura 1.13: Control Super Twisting

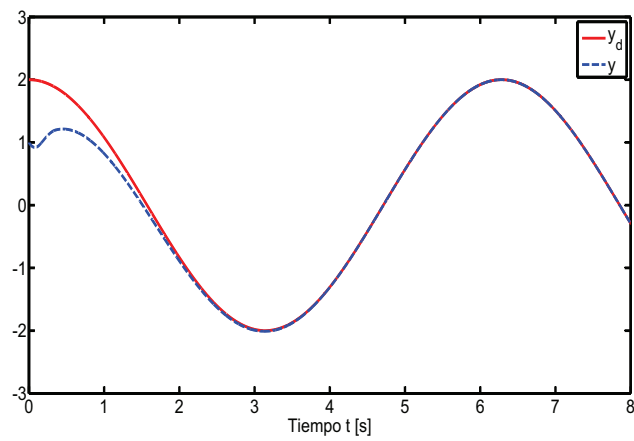


Figura 1.14: Seguimiento de la trayectoria

### 1.4.2. Propiedades del Super Twisting

Se dice que el control Super Twisting es un *control por modos deslizantes de segundo orden*, ya que lleve a las variables  $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$  en tiempo finito.

El Super Twisting es una función continua, ya que los términos  $c|\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma)$  y  $b \int \text{sign}(\sigma)dt$  son continuos, por lo que el término de conmutación de alta frecuencia  $\text{sign}(\sigma)$  está “escondido” debajo de una integral.

El término lineal  $\varrho\sigma$  propuesto en [12], permite que el sistema pueda hacer frente a perturbaciones de crecimiento lineal, las cuales no son soportadas por el algoritmo Super Twisting básico. También sirve para incrementar la ganancia cuando el sistema está lejos de la referencia, evitando que el sistema se vuelva inestable. Contribuye además, a mejorar el seguimiento de la trayectoria de una forma más exacta.



# Capítulo 2

## Control de Posición

Este capítulo va a describir la metodología a seguir para lograr controlar la posición de una masa en un sistema físico real. La metodología general está basada en una aplicación práctica<sup>1</sup> propuesta en el artículo *Input-Output Linearization and Integral Sliding Mode Disturbance Compensation for Electro-Hydraulic Drives* (Jan Komsta 2010) [10]. Sin embargo, este trabajo de tesis busca explorar otras opciones de **(SMC)**, ya que la estructura aplicada permite generalizar el modo deslizante, de tal forma que el algoritmo de **SMC** pueda ser un modo deslizante de primer orden de ganancia variable o un modo deslizante de segundo orden **(SOSM)** Super Twisting. El algoritmo que permite ajustar la ganancia de un **SMC** está basado en el artículo *New methodologies for adaptive sliding mode control* [14].

### 2.0.3. Introducción

Esta sección mostrará la adaptación del algoritmo publicado en el artículo *Input-Output Linearization and Integral Sliding Mode Disturbance Compensation for Electro-Hydraulic Drives* [10] al Modelo **210: Rectilinear Plant de Educational Control Products**, con la finalidad de poder controlar la posición del sistema.

El SMC es bien conocido por su robustez contra incertidumbres en el modelo, variaciones en los parámetros de la planta y perturbaciones externas. Esta propiedad permite la eliminación de las complicaciones en la identificación de un sistema, lo cual simplifica y reduce el proceso de sintonización en las ganancias del control.

Recurrir a un control “continuo” o “suave”, generalmente es la solución más común al problema del *chattering*, aunque resulte en la pérdida parcial de robustez en el sistema y en la disminución del rendimiento en el seguimiento. Por esta razón, se recurre a la combinación del control de linealización por entrada-salida con un modo deslizante integral como estimador de la perturbación. Este enfoque permite que el control discontinuo tenga lugar solamente en el cómputo de un controlador interno y por lo tanto, no es alimentado en forma directa

---

<sup>1</sup>Metodología implementada en el Departamento de Ingeniería Avanzada de Bosch Rexroth AG, Alemania.

a la entrada de la planta. La señal continua utilizada para compensar la perturbación, es obtenida de la acción de un filtro paso-bajas a la señal de conmutación del SMC, la cual es generada en un proceso dinámico interno auxiliar. Este método puede mejorar la robustez general de la linealización por entrada-salida [1], sin el riesgo de la ocurrencia de chattering.

Esta metodología prestó gran atención a la introducción de un algoritmo preciso y robusto, que a su vez sea sencillo de usar.

Una ventaja importante del compensador de perturbación propuesto, es la sencillez de su estructura. Considerando que el control clásico basado en la linealización de entrada-salida y sus métodos de sintonización han sido aceptados por un gran grupo de ingenieros, solo se busca mejorar dicho algoritmo ya existente mediante la adición del compensador por modos deslizantes en lugar de introducir un algoritmo de control que sea completamente nuevo.

#### 2.0.4. Modelado de la Planta

Considere el siguiente sistema de una entrada, una salida (Simple-Input Simple-Output, **SISO** por sus siglas en inglés) en representación de espacio de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (2.1)$$

en donde  $u$  es la entrada de la planta (salida del controlador) y  $y$  es la salida de la planta (posición<sup>2</sup> por ejemplo).

En la práctica, algunos de los términos contenidos en  $A$  y  $B$  del sistema (2.1) son inciertos o incluso desconocidos (por ejemplo: coeficientes de fuga, cargas de masa, fuerzas de fricción y carga, etc.). En muchos casos resulta imposible obtener una identificación precisa del sistema durante la puesta en marcha del mismo (debido a modificaciones en el sistema, procesos naturales de desgaste o algunos cambios no esperados en el ambiente de trabajo). Por lo tanto, en la práctica solo es posible obtener una estimación imprecisa de las dinámicas del sistema, por ejemplo

$$\hat{\dot{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u, \quad y = Cx \quad (2.2)$$

en donde  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  denotan aproximaciones de los términos  $A$  y  $B$  en el sistema (2.1), respectivamente.

Para cuestiones estrictamente de implementación y sintonización de controladores en entornos industriales, la estimación de las dinámicas del sistema (2.2) deben ser basadas únicamente en los parámetros nominales de los datos técnicos (*data sheets*) y de algún conocimien-

---

<sup>2</sup>Tanto para ejemplificar el contenido de este artículo [10], como para finalidades del sistema implementado en esta tesis, la salida medible de la planta es la posición.

to limitado de los expertos. Para el caso de esta tesis, un modelo<sup>3</sup> simple cuyos valores son obtenidos de las hojas técnicas del sistema, es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

en donde  $m_1$  denota la masa del carro y  $k_1$  la constante del resorte.

### 2.0.5. Diseño del Controlador

La idea principal del control por linealización entrada-salida, es transformar primero las dinámicas no lineales de un sistema en dinámicas lineales y después aplicar una técnica simple de control lineal para conseguir el desempeño deseado en lazo cerrado. Desafortunadamente, este concepto de control es sensible a las inexactitudes del modelo y a las perturbaciones desconocidas, por lo que requiere de una parametrización muy precisa del sistema. Sin embargo, la combinación de esta técnica de control con **SMC** puede incrementar extremadamente la robustez general contra las perturbaciones del sistema.

#### A. Linealización entrada-salida

Para el desarrollo del controlador de linealización por retroalimentación, la salida del sistema  $y = Cx$  debe ser derivada hasta obtener una relación directa con la entrada del sistema (grado relativo). Para el caso del sistema físico implementado en esta tesis, cuyo modelo matemático se detalla en el Capítulo 5, se tiene:

$$y = Cx = x_1 \quad (2.5)$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \quad (2.6)$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{1}{m_1}u \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) representa una relación explícita entre la entrada del sistema  $u$  y la salida  $y$ , por lo que puede ser ajustada a la forma de la ley de control por linealización entrada-salida

$$u = \frac{v - \alpha(x)}{\beta(x)} \quad (2.8)$$

en donde  $\ddot{y} = v$ ,  $\alpha(x) = -\frac{k_1}{m_1}x_1$  y  $\beta(x) = \frac{1}{m_1}$ .

---

<sup>3</sup>En el capítulo 5 se muestra a detalle el modelado del sistema.

La nueva variable  $v$ , representa una ley de control proporcional derivativa **PD**, como se expone en [10] y [13]

$$v = \ddot{y}_d + K_d \dot{e} + K_p e, \quad e = y_d - y \quad (2.9)$$

en donde  $y_d$  denota la posición demandada de la masa  $m_1$  y  $K_d, K_p$  son constantes estrictamente positivas.

Sustituyendo las ecuaciones (2.8) y (2.9) en la entrada del sistema  $u$  en (2.7), se obtienen las dinámicas ideales de un sistema de segundo orden

$$\ddot{y} = \alpha(x) + \beta(x) \left( \frac{v - \alpha(x)}{\beta(x)} \right) = v \quad (2.10)$$

sustituyendo (2.9) en (2.10)

$$\ddot{y} = \ddot{y}_d + K_d \dot{e} + K_p e \quad (2.11)$$

$$0 = \ddot{y}_d - \ddot{y} + K_d \dot{e} + K_p e \quad (2.12)$$

$$0 = \ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) se identifica con la de un sistema de segundo orden, cuya frecuencia angular  $\omega_n$  deseada en lazo cerrado y coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  vienen dados por

$$K_p = \omega_n^2 \quad y \quad K_d = 2\xi\omega_n \quad (2.14)$$

A fin de validar que el algoritmo propuesto ofrece las dinámicas deseadas en lazo cerrado, la respuesta real del sistema será comparada con la respuesta ideal de un sistema de segundo orden  $G(s)$ , definido por la asignación de polos deseados

$$G(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_d s + K_p} \quad (2.15)$$

Recordando que solo se cuenta con la estimación imprecisa de las dinámicas (2.2), la aproximación de la ley de control (2.8) queda como

$$\hat{u} = \frac{v - \hat{\alpha}(x)}{\hat{\beta}(x)} \quad (2.16)$$

Debido al modelo impreciso (2.2), existirá un error en los parámetros. La aproximación de este error es desconocida, sin embargo sus cotas pueden ser evaluadas como

$$|\hat{\alpha}(x) - \alpha(x)| \leq \Delta\alpha \quad (2.17)$$

y

$$0 < \beta_{min} \leq \beta(x) \leq \beta_{max}, \quad \Delta\beta^{-1} \leq \frac{\hat{\beta}(x)}{\beta(x)} \leq \Delta\beta, \quad \Delta\beta = \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \quad (2.18)$$

Por razones del error estimado, no es posible llegar a completar una linealización exacta, por lo que una perturbación dinámica, desconocida pero acotada,  $\Delta(x)$  aparece

$$\ddot{y} = \alpha(x) + \beta(x)\hat{u} \quad (2.19)$$

$$\ddot{y} = \alpha(x) + \beta(x) \left( \frac{v - \hat{\alpha}(x)}{\hat{\beta}(x)} \right) \quad (2.20)$$

$$\ddot{y} = \alpha(x) + v \frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} - \hat{\alpha}(x) \frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} \quad (2.21)$$

$$\ddot{y} = v - \hat{\alpha}(x) \frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} + \alpha(x) - v + v \frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} \quad (2.22)$$

$$\ddot{y} = v - \left( \hat{\alpha}(x) \frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} - \alpha(x) + v \left( 1 - \frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} \right) \right) \quad (2.23)$$

$$\ddot{y} = v - \Delta(x), \quad |\Delta(x)| < \Delta_{max} \quad (2.24)$$

La ley de control PD, como se mostrará en los resultados más adelante, es suficiente para alcanzar la posición deseada al utilizar el compensador por modos deslizantes, lo cual supone la anulación de las perturbaciones. Sin embargo, para efectos de estudio de esta tesis y dar seguimiento al plan de estudios de la licenciatura, se probará una ley de control proporcional derivativa integral **PID** sin la compensación por modos deslizantes. El control nuevamente está dado por la variable  $v$  como en [13]:

$$v = \ddot{y}_d + K_d \dot{e} + K_p e + K_i \int e dt, \quad e = y_d - y \quad (2.25)$$

## 2.0.6. Compensador de Perturbaciones por Modos Deslizantes

La meta ahora es estimar el error desconocido, pero acotado,  $\Delta(x)$  y generar una señal de compensación adecuada  $\Delta_{comp}$ , la cual será definida más adelante

$$\ddot{y} = v - \Delta(x) + \Delta_{comp}, \quad \Delta_{comp} \rightarrow \Delta(x) \quad (2.26)$$

Para fines de la estimación de la desviación dinámica, se recurre a la creación de sistema auxiliar virtual  $\dot{z}$

$$\dot{z} = v - \Delta_{SMC} + \Delta_{comp} \quad (2.27)$$

en donde

$$\Delta_{SMC} = L \text{sign}(s), \quad L > 0, \quad \sigma = z - \dot{y} \quad (2.28)$$

La diferenciación de la función de conmutación  $s$  y la sustitución de (2.26) en (2.27) produce

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{z} - \ddot{y} = v - L \text{sign}(s) + \Delta_{comp} - v + \Delta(x) - \Delta_{comp} \\ \dot{s} &= \Delta(x) - L \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para garantizar la estabilidad de la superficie deslizante  $s$ , se debe recurrir a una función apropiada de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2}s^2 \quad (2.30)$$

Si la ganancia  $L$  se elige como

$$L \geq \Delta_{max} + \eta, \quad \eta > 0 \quad (2.31)$$

la diferenciación de (2.30) junto con la sustitución de (2.29) se llega a

$$\dot{V}(t) = s\dot{s} = s\Delta(x) - sL \text{sign}(s) < |s|\Delta_{max} - L|s| \leq -\eta|s| \quad (2.32)$$

asegurando de esta manera la ocurrencia del modo deslizante en tiempo finito.

Como la velocidad del sistema tiene que ser medida o estimada, la condición inicial de la integral del proceso auxiliar puede ser definida en el cálculo de la variable deslizante  $s$  como

$$z(t=0) = \dot{y}(t=0) \rightarrow s(t=0) = 0 \quad (2.33)$$

eliminando de esta manera la fase de alcance, lo cual implica que el modo deslizante ocurra desde el primer instante de tiempo<sup>4</sup>.

En el modo deslizante, la variable auxiliar  $z$  sigue la velocidad del sistema

---

<sup>4</sup>Esta condición es posible por los modos deslizantes integrales.

$$s = 0 \rightarrow z = \dot{y} \quad (2.34)$$

Analizando el sistema bajo el enfoque del método de *control equivalente*, se puede probar que la señal del control equivalente coincide con la perturbación  $\Delta(x)$ . Una vez que un modo deslizante estable ocurre, la trayectoria del sistema permanece sobre el plano deslizante  $\sigma = 0$ , para lo cual debe cumplirse la siguiente condición

$$\dot{s} = \dot{z} - \ddot{y} = 0 \quad (2.35)$$

De las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.35) se obtiene una expresión para un control equivalente continuo  $\Delta_{eq}$ , el cual puede ser interpretado como una ley de control que podría mantener las condiciones (2.23) y (2.35) si las dinámicas del sistema fueran perfectamente conocidas.

$$v - \Delta_{eq} + \Delta_{comp} - v + \Delta(x) - \Delta_{comp} = 0 \Rightarrow \Delta_{eq} = \Delta(x) \quad (2.36)$$

La señal de control equivalente puede ser aproximada por el valor promedio del término  $\Delta_{av}$ , el cual se obtiene por el paso del modo deslizante a través de un filtro paso-bajas

$$\Delta_{eq} \approx \Delta_{av} = \frac{1}{Ts + 1} \Delta_{SMC} \quad (2.37)$$

en donde  $T^5$  es la constante del filtro. Si el ancho de banda del filtro cubre las frecuencias de las perturbaciones, utilizando (2.36) y (2.37) se obtiene

$$\ddot{y} = v - \Delta(x) + \Delta_{comp} \approx v \quad \text{con} \quad \Delta_{comp} = \Delta_{av} \quad (2.38)$$

## 2.1. Ganancia Variable

### 2.1.1. Introducción

Esta sección tomará elementos del artículo *New methodologies for adaptive sliding mode control* [14] con el fin de adaptar la ganancia  $L$  del término  $\Delta_{SMC}$  en (2.28).

La meta es obtener una ley de control robusta, basada en un modo deslizante de ganancia adaptable, respecto a incertidumbres y perturbaciones sin el conocimiento de sus cotas (solo se sabe que cumplen con la propiedad de ser acotadas). Debido a la utilización de funciones

---

<sup>5</sup>La sugerencia para elegir el valor de  $T$ , es tomar como base el valor de la raíz cuadrada del tiempo de muestreo [16]

discontinuas y alta ganancia en el control, los modos deslizantes se caracterizan por su robustez en sistemas de lazo cerrado y por su convergencia en tiempo finito. Sin embargo, su diseño requiere del conocimiento de las cotas de las incertidumbres, lo cual comunmente en la práctica es una tarea complicada. Lo que sucede entonces, es que las cotas son sobrestimadas, lo que implica una ganancia excesiva. Luego, el gran inconveniente del **SMC**, el *chattering*, se vuelve un elemento de importancia y podría dañar a los actuadores y a los sistemas.

Al no requerir del conocimiento de las cotas de las incertidumbres, el camino a seguir entonces es por medio de un modo deslizante adaptable, con la finalidad de asegurar una adaptación dinámica de la ley de control para que ésta sea tan pequeña como sea posible, pero suficiente para contrarrestar las incertidumbres/perturbaciones.

### 2.1.2. Ley de Adaptación de Control por Modos Deslizantes

El controlador mostrado en esta sección no estima el límite de la perturbación ni de la incertidumbre. Sin embargo, esta nueva estrategia garantiza un verdadero modo deslizante.

Retomando el término  $\Delta_{SMC}$  en (2.28), con la ganancia  $L(t)$  definida ahora como

$$\dot{L} = \begin{cases} \bar{L} \cdot |s| \cdot \text{sign}(|s| - \epsilon) & \text{si } L > \mu \\ \mu & \text{si } L \leq \mu \end{cases} \quad (2.39)$$

con  $L(0) > 0$ ,  $\bar{L} > 0$ ,  $\epsilon(t) = 4TL(t)$  y  $\mu > 0$  muy pequeña. El parámetro  $\mu$  es introducido para asegurar solamente valores positivos de  $L$ . Por conveniencia, se supone que  $L(t) > \mu$  para todo  $t > 0$ .

Una vez que el modo deslizante es establecido con respecto a  $s$ , la ley propuesta de *ganancia adaptable* (2.39) permite que la ganancia  $L$  disminuya (mientras  $|s| < \epsilon$ ). Es decir, la ganancia  $L$  será mantenida en el nivel más bajo que permita la estabilización de  $s$  con una precisión dada. Esta ley de adaptación permite obtener una ganancia adecuada con respecto a las magnitudes de las incertidumbres/perturbaciones.

## 2.2. Algoritmo Super Twisting

### 2.2.1. Introducción

En el Capítulo anterior se describieron las propiedades del control Super Twisting, resaltando su característica de contener una señal de control continua y suave. Por otro lado, la señal de compensación  $\Delta_{comp}$  surge del paso del modo deslizante  $\Delta_{SMC}$  a través de un filtro paso-bajas para obtener una señal suave y así reducir los efectos del *chattering* [3]. Por esta razón, se probará el algoritmo Super Twisting (1.30) con y sin el filtro paso-bajas.



### 2.2.2. Ley de Control

Modificando el término  $\Delta_{SMC}$  con la ley de control del Super Twisting, se obtiene ahora

$$\Delta_{SMC} = c|\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma) + b \int \text{sign}(\sigma)dt + \varrho\sigma \quad (2.40)$$

Finalmente, el término  $\Delta_{comp}$  relacionado con la ecuación (2.40) se implementará con el filtro paso-bajas

$$\Delta_{comp} = \Delta_{eq} \approx \Delta_{av} = \frac{1}{T_s + 1} \Delta_{SMC} \quad (2.41)$$

y sin el filtro paso-bajas

$$\Delta_{comp} = \Delta_{SMC} \quad (2.42)$$

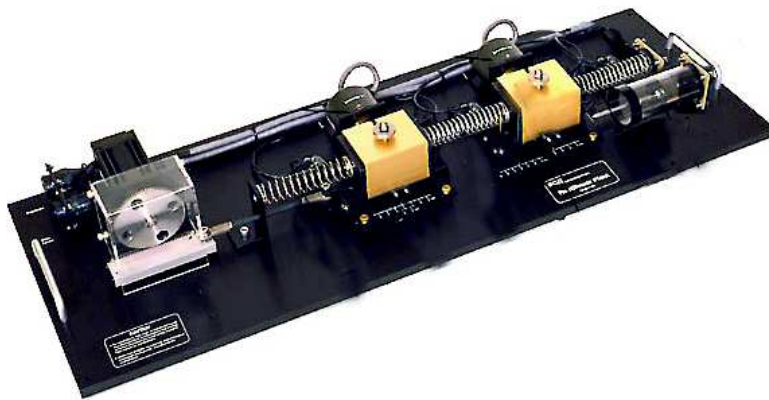
# Capítulo 3

## Planta

En este capítulo se va a mostrar y a describir los componentes de la planta. Para este trabajo, todos los experimentos fueron desarrollados e implementados en un sistema masa amortiguador resorte.

### 3.1. Descripción de la Planta

El Modelo 210: Rectilinear Plant de Educational Control Products (ver Figura 3.1) [5], viene provisto de masas, resortes y amortiguadores de distintos valores, lo que permite armar y probar distintas configuraciones del sistema. Esta versatilidad permite validar la robustez de los algoritmos propuestos ante incertidumbres del sistema, esto debido a que los valores nominales de las constantes son aproximaciones obtenidas de las hojas de datos provistas por el fabricante.



**Figura 3.1:** Sistema masa-amortiguador-resorte Modelo 210 de ECP

Por otra parte, el presente sistema puede ser considerado como un ejemplo de estudio

clásico que aparece en la gran mayoría de la literatura de modelado de sistemas físicos y de sistemas de control. Además el sistema presenta analogías de un pistón y por lo tanto, permite estudiar problemas que se requieren resolver en aplicaciones industriales, como el control de la posición de alguna masa mediante equipo hidráulico [10].

El sistema experimental de control está conformado por tres subsistemas mostrados en la Figura 3.2. El primer subsistema es una planta electromecánica constituida por un mecanismo masa amortiguador resorte, actuador y sensores.

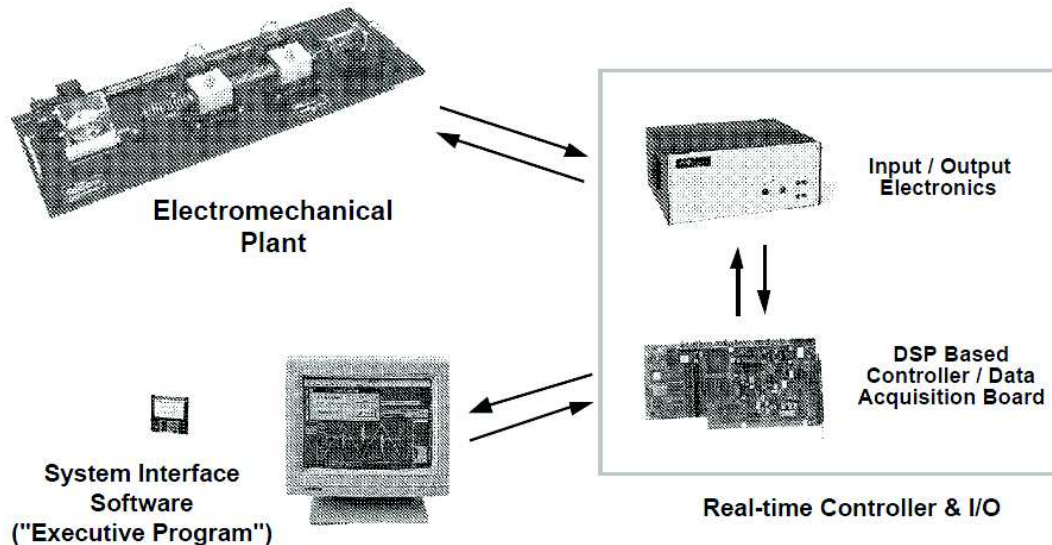


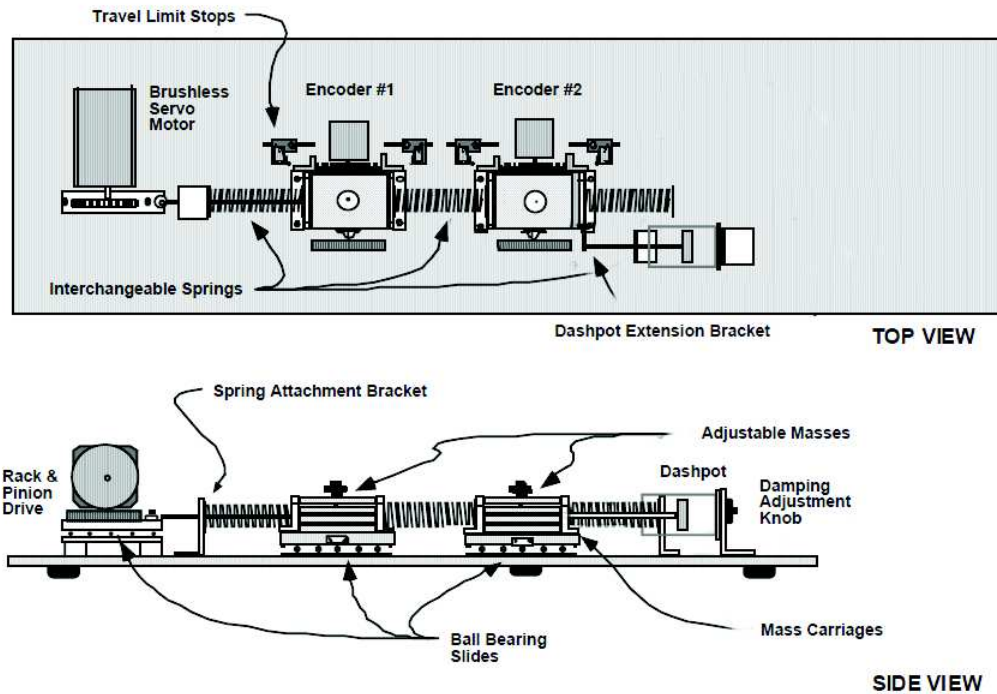
Figura 3.2: Sistema Experimental de Control

El siguiente subsistema está formado por la unidad de controlador en tiempo-real (**DSP**), basada en un controlador en tiempo-real, las interfaces servo/actuador, el servo amplificador y los suministros de energía auxiliar. El DSP es capaz de ejecutar leyes de control a altas frecuencias de muestreo, permitiendo que la aplicación pueda ser modelada en tiempo continuo o discreto.

Finalmente, el tercer subsistema es un programa ejecutable desde una PC. Este programa ejecutable puede ser el proporcionado por el fabricante o bien, mediante la interface Simulink R13 de Mathworks.

El mecanismo mostrado en la Figura 3.3 está diseñado para emular una amplia gama de aplicaciones del mundo real: 1 grado de libertad en cuerpos rígidos, flexibilidad en mecanismos lineales, engranes y correas, y otros sistemas oscilatorios discretos acoplados. El *Modelo 210: Rectilinear Plant de Educational Control Products* (ver Figura 3.3), consiste en dos carros que pueden llevar hasta cuatro masas independientes de 500 [g] cada una. Los carros están interconectados por resortes bi-direccionales. La suspensión de los carros consiste de un sistema de rodamiento anti-fricción, permitiendo un movimiento de  $\pm 3$  [cm]. El mecanismo lineal se compone de un riel dentado suspendido en un carro anti-fricción y un piñón

(diámetro del engrane 7.2 [cm]) acoplado al eje del servo motor. Los encoders ópticos miden la posición de los carros por medio de un sistema similar de riel dentado con piñón, cuyo diámetro es de 3.18 [cm].



**Figura 3.3:** Descripción del Sistema Físico

Los resortes son intercambiables y están provistos en valores nominales de 175 [N/m], 450 [N/m] y 800 [N/m]. El amortiguador de aire se puede conectar directamente a cualquiera de los carros. La constante de amortiguamiento puede ser ajustada mediante la válvula del flujo de aire, situada en la parte posterior del amortiguador. Los valores de la inercia pueden variar cambiando el número de barras de latón (hasta 4 barras de  $500 \pm 5$  [g] c/u) en los carros.

Como se puede observar en la Figura 3.4, el sistema cuenta de dos encoders que permiten medir la posición de dos masas de manera independiente, un actuador, dos masas variables independientes, tres resortes y un amortiguador. Los valores nominales de los parámetros de la planta utilizados durante el desarrollo de este trabajo se muestran en la tabla 3.1.

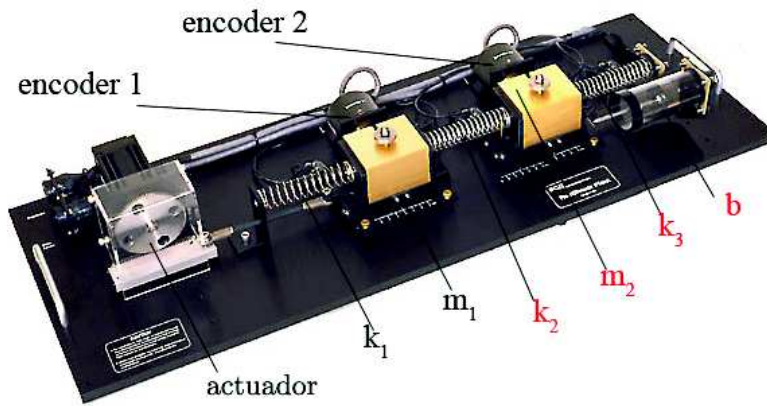


Figura 3.4: Componentes del sistema 210 de ECP

Cuadro 3.1: Valores Nominales de los elementos de la planta

Elemento	Valor nominal
$m_1$	1.28 [kg]
$m_2$	1.05 [kg]
$k_1$	450 [N/m]
$k_2$	175 [N/m]
$k_3$	450 [N/m]
$b$	15 [N·s/m]

### 3.1.1. Implementación del Control en Tiempo-Real

El sistema de control está conformado por tres subsistemas: El mecanismo que incluye al motor y sensores, el controlador y mecanismos electrónicos en tiempo-real y el software de interface con el usuario o sistema.

El usuario especifica el algoritmo de control en el programa ejecutor, Simulink R13 de Mathworks para este caso, y se carga a la tarjeta controladora (**DSP**) en tiempo-real. La DSP ejecuta el algoritmo en la frecuencia de muestreo especificada (1 [kHz]). Este proceso involucra la lectura de la entrada de referencia y los valores de retroalimentación de los sensores (encoders ópticos), el cómputo del algoritmo y el procesamiento de la señal digital de la salida del control al convertidor digital-analógico (**DAC**).

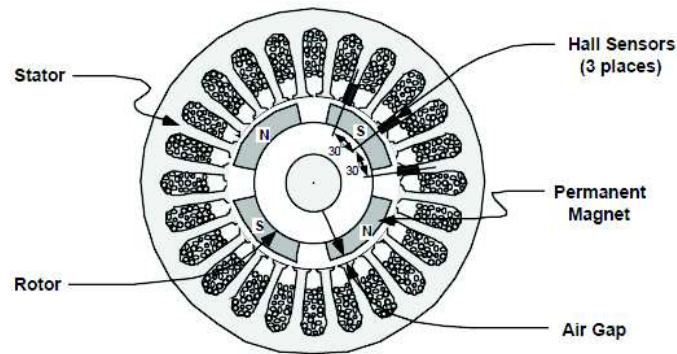
El DAC convierte el flujo de palabras digitales resultante en un voltaje analógico, el cual se transforma en corriente por el módulo de potencia y luego en torque en el motor. El mecanismo de riel y el piñón convierte el torque en una fuerza. El mecanismo transforma la entrada del motor en movimiento hacia la salida deseada de acuerdo a las dinámicas de la planta. Estas salidas de la planta son medidas por los encoders, dando como salida un flujo de pulsos. Los pulsos son decodificados por un contador en la tarjeta DSP y puestos a disposición como una palabra digital de la posición en el algoritmo de control en tiempo-real. La salida analógica del DAC está en el rango de  $\pm 10$  volts, los cuales corresponden de +32767 a -32768 cuentas. Es de vital importancia hacer notar que estos últimos valores están dados en **cuentas** y no en grados o radianes. El DAC trabaja con 16 bits ( $2^{15}$ ), por lo que +32767 cuentas corresponden a +9.999 volts y -32768 cuentas a -10 volts.

Durante todo el proceso, cualquier información especificada por el usuario es capturada y almacenada en la memoria de la tarjeta. Una vez terminado el proceso, la información es cargada a la memoria de la computadora, ya sea para graficación o almacenamiento de la información.

### 3.1.2. Motor

La principal ventaja de un motor de corriente continua (**DC**) sin escobillas (también conocido como un motor síncrono de imanes permanentes) sobre el motor convencional de corriente continua con escobillas, es la eliminación de la fricción y el desgaste asociados a las escobillas.

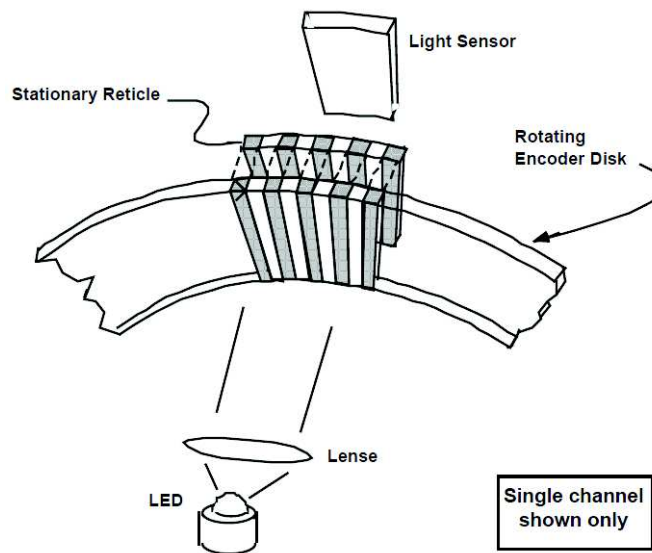
La Figura 3.5 muestra una vista transversal de un motor típico de DC sin escobillas. En contraste con el motor de DC convencional con escobillas, los imanes permanentes están fijos al rotor.



**Figura 3.5:** Vista transversal de un motor típico de DC sin escobillas (cuatro polos)

### 3.1.3. Sensores

El sistema cuenta con tres encoders incrementales de eje rotatorio. Dos de ellos se utilizan para medir la posición de las masas de forma independiente. Cada encoder tiene una resolución de 4000 pulsos por revolución, cuyo equivalente es de 160 [cuentas/mm], lo cual significa que el valor mínimo que puede detectar el encoder es de  $6.25 \mu\text{m}$ . El tercer encoder está acoplado directamente al motor y solo se utiliza para propósitos de conmutación. Este último encoder tiene una resolución de 1000 pulsos por revolución. Los encoders son ópticos y su principio de funcionamiento se muestra en la Figura 3.6.



**Figura 3.6:** Principio de Operación de un Encoder Óptico Incremental

# Capítulo 4

## Modelado Matemático

### 4.1. Modelo Matemático

Para obtener el modelo matemático del sistema masa-resorte-amortiguador, se parte por estudiar un diagrama de bloques que incluya todos los elementos de interés del sistema real. El diagrama de bloques de la Figura 4.1 muestra la representación del sistema real.

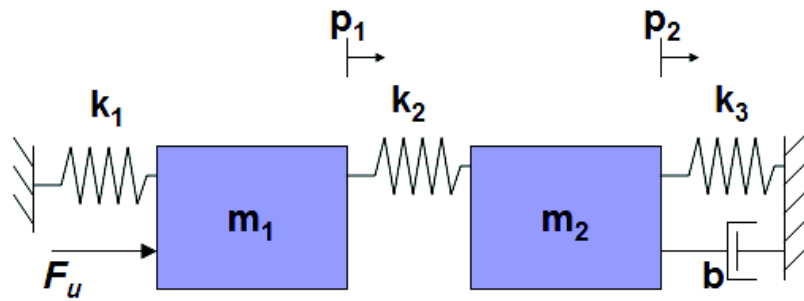


Figura 4.1: Diagrama de bloques del sistema masa-resorte-amortiguador

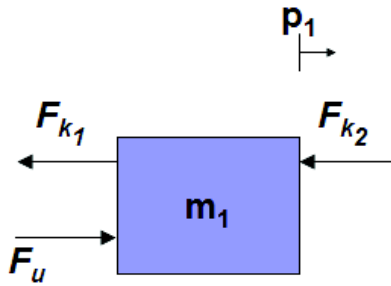
En el estudio de la dinámica de este sistema,  $p_1$  y  $p_2$  representan la posición de las masas 1 y 2, respectivamente. De manera análoga, la velocidad de ambas masas estará dada por las derivadas de sus posiciones ( $\dot{p}_1$  y  $\dot{p}_2$ ). Finalmente, la aceleración de las masas resulta de la derivación de sus velocidades ( $\ddot{p}_1$  y  $\ddot{p}_2$ ).

Los valores de las constantes de los resortes están dados por  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ . El valor de la constante de amortiguamiento es representada por  $b$ . La fuerza que actúa sobre el sistema proveniente del actuador está dada por  $F_u$ .

Una forma de ayudar a comprender mejor las dinámicas y fuerzas que actúan sobre el sistema, es mediante un diagrama de cuerpo libre para ambas masas.

La Figura 4.2 corresponde al diagrama de cuerpo libre de la primera masa  $m_1$ .



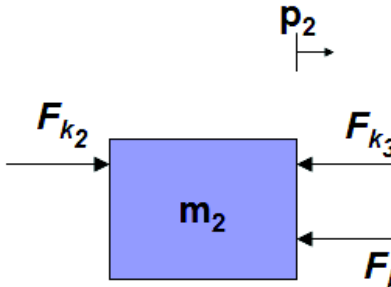


**Figura 4.2:** Diagrama de cuerpo libre de la masa 1

Siguiendo con el estudio de la dinámica de la primera masa, el sistema de ecuaciones (4.1) presenta las ecuaciones de elemento del diagrama de cuerpo libre de dicha masa.

$$\begin{aligned}
 F_{m_1} &= m_1 \ddot{p}_1 \\
 F_{k_1} &= k_1 p_1 \\
 F_{k_2} &= k_2 (p_1 - p_2) \\
 F_u &= F_u
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

De manera similar, la Figura 4.3 corresponde al diagrama de cuerpo libre de la segunda masa  $m_2$ .



**Figura 4.3:** Diagrama de cuerpo libre de la masa 2

El sistema de ecuaciones (4.2) presenta las ecuaciones de elemento del diagrama de cuerpo libre de la segunda masa.

$$\begin{aligned}
 F_{m_2} &= m_2 \ddot{p}_2 \\
 F_{k_2} &= k_2 (p_2 - p_1) \\
 F_{k_3} &= k_3 p_2 \\
 F_b &= b \dot{p}_2
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Con el planteamiento de las ecuaciones de elemento descritas anteriormente, resulta muy simple obtener las ecuaciones de conjunto. Las ecuaciones de conjunto (4.3) y (4.4), relacionan

el equilibrio de fuerzas existente en cada masa.

$$F - F_{m_1} - F_{k_1} - F_{k_2} = 0 \quad (4.3)$$

$$F_{m_2} + F_{k_3} + F_b + F_{k_2} = 0 \quad (4.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones de elemento (4.1) y (4.2) en las ecuaciones de conjunto (4.3) y (4.4), respectivamente, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$m_1 \ddot{p}_1 + (k_1 + k_2)p_1 - k_2 p_2 = F_u \quad (4.5)$$

$$m_2 \ddot{p}_2 + (k_2 + k_3)p_2 + b\dot{p}_2 - k_2 p_1 = 0 \quad (4.6)$$

#### 4.1.1. Representación en Espacio de Estados

La teoría de control clásica está basada en el empleo de funciones de transferencia o *cajas negras*.<sup>1</sup>

Por otro lado, la teoría de control moderna se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. La notación matricial simplifica la representación matemática de los sistemas de ecuaciones [8].

De forma general, una representación en el espacio de estados está dada por el sistema de ecuaciones (4.7) y (4.8).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.7)$$

$$y = Cx \quad (4.8)$$

en donde

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  son matrices de dimensiones correspondientes

$x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados

$u \in \mathbb{R}^r$  es el vector de control

$y \in \mathbb{R}^m$  es el vector de salida

Para la representación en espacio de estados del sistema de interés, es necesario comenzar por proponer los estados del sistema. Comúnmente para sistemas mecánicos, los estados serán

<sup>1</sup>Estas funciones relacionan únicamente los parámetros de entrada y salida, lo que impide conocer lo que sucede con los estados del sistema.

posiciones y velocidades. Para este caso en particular, se tienen dos masas independientes y por lo tanto, los estados para este sistema serán las posiciones y velocidades de ambas masas. El vector de estados para el estudio del sistema masa-amortiguador-resorte está dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1 &= p_1 \\x_2 &= \dot{p}_1 \\x_3 &= p_2 \\x_4 &= \dot{p}_2\end{aligned}\tag{4.9}$$

y considerando como entrada

$$u = F_u\tag{4.10}$$

Las ecuaciones del modelo general (4.5) y (4.6), pueden ser transformadas a la forma descrita por el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{(k_1+k_2)}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{1}{m_1}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{(k_2+k_3)}{m_2}x_3 - \frac{b}{m_2}x_4\end{aligned}\tag{4.11}$$

Las cuales corresponden a la representación en espacio de estados  $\dot{x} = Ax + Bu$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}\tag{4.12}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{4.13}$$

Substituyendo los valores nominales de los parámetros de la planta (3.1) en el sistema (4.11) se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -488.28 & 0 & 136.72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 166.67 & 0 & -595.24 & -14.28 \end{bmatrix}\tag{4.14}$$

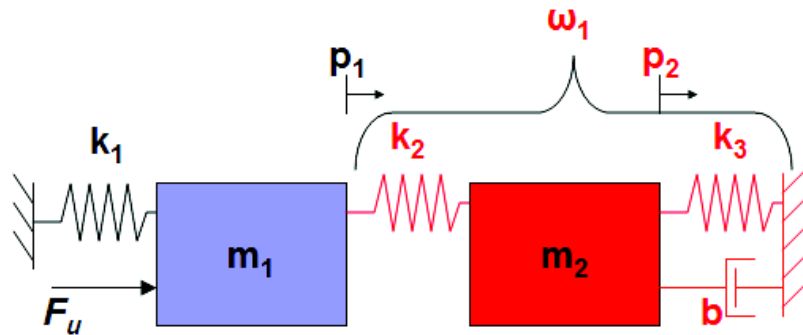
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.78 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

El sistema solo permite obtener las mediciones de las posiciones  $x_1$  y  $x_3$ , por lo que la matriz  $C$  queda definida por

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

#### 4.1.2. Modelo Matemático Reducido

Para efectos prácticos en el desarrollo de este trabajo, se tiene como finalidad la controlabilidad de una planta con incertidumbres en sus parámetros y en presencia de perturbaciones. Para lograr dicho propósito, se implementará un modelo matemático dividido en dos secciones. La primera sección sólo considerará parámetros de la primera masa (actuador, resorte  $k_1$  y  $m_1$ ), mientras que la segunda sección  $\omega_1$  será considerada como perturbación de parámetros desconocidos<sup>2</sup>, tal y como se muestra en la Figura 4.4.



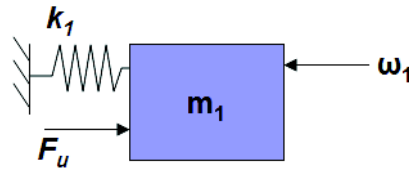
**Figura 4.4:** Diagrama de Bloques del Sistema dividido en dos secciones

De esta forma el sistema que será implementado corresponde a la Figura 4.5.

Reescribiendo el nuevo modelo considerando perturbaciones, se obtiene el siguiente sistema compuesto

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{1}{m_1}u + \omega_1, \quad \omega_1 = \frac{k_2}{m_1}(x_3 - x_1) \end{aligned} \quad (4.17)$$

<sup>2</sup>Aunque anteriormente se definió el modelo completo del sistema, se intenta dar un enfoque a situaciones reales encontradas en la industria, en donde será complicado obtener modelos completos y los parámetros de la planta son referidos de hojas de datos. Ver [10].



**Figura 4.5:** Diagrama de bloque reducido considerando perturbaciones

De esta forma, las nuevas matrices  $A$  y  $B$  que serán consideradas para el desarrollo de esta tesis son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Substituyendo los valores nominales de los parámetros de la planta (3.1) en el sistema (4.17), se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -351.56 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.78 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

La matriz  $C$  queda como

$$C = [ 1 \ 0 ] \quad (4.22)$$

# Capítulo 5

## Diseño del Controlador

En el capítulo 3 se describió la metodología a seguir para el desarrollo experimental en este trabajo de tesis, en donde la meta es lograr la implementación de un algoritmo de control utilizado en la industria, el cual a su vez requiere de la utilización de los modos deslizantes.

Como se explica en [10], el objetivo de la metodología empleada no busca implementar un algoritmo completamente nuevo y desconocido, sino una combinación de una metodología bien conocida por los ingenieros en control que laboran en la industria junto con las propiedades de robustez de los modos deslizantes.

Básicamente, el diseño de controlador está conformado por *dos controles*: el control  $v$  (**PID** sin el compensador por modos deslizantes, **PD** en el caso de utilizar el compensador por modos deslizantes) y otro que funciona como compensador de perturbaciones recurriendo a los modos deslizantes. El compensador por modos deslizantes, denominado como  $\Delta_{SMC}$ , será sustituido por los siguientes algoritmos:

1. **FOSM**: First order sliding mode - Modo deslizante de primer orden
2. **FOSM VAR**: First order sliding mode variable gain - Modo deslizante de primer orden de ganancia variable
3. **ST FIL**: Super Twisting con filtro
4. **ST**: Super Twisting

De esta forma se busca determinar el desempeño de los modos deslizantes experimentalmente, lo cual también se enfoca a la viabilidad de su implementación en la industria, complementando la metodología propuesta en [10].

Por consiguiente, este capítulo va a describir la manera de sintonizar e implementar dichos algoritmos en el entorno Simulink de Matlab. Finalmente también se detallará la sintonización de un controlador **PID**, y de esta forma tener opciones suficientes para hacer una comparación de controladores.

## 5.1. Control $v$

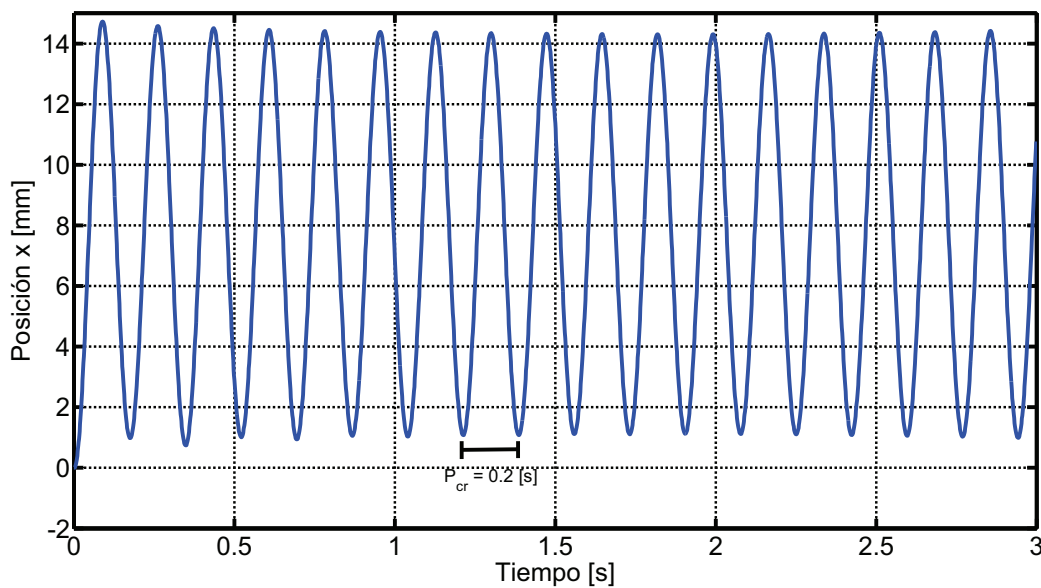
### 5.1.1. Configuración PID

Aunque la técnica para seguimiento de trayectorias está basada en la acción **PD**, la acción integral favorece la eliminación de perturbaciones.

La ecuación de un controlador PID está dada por

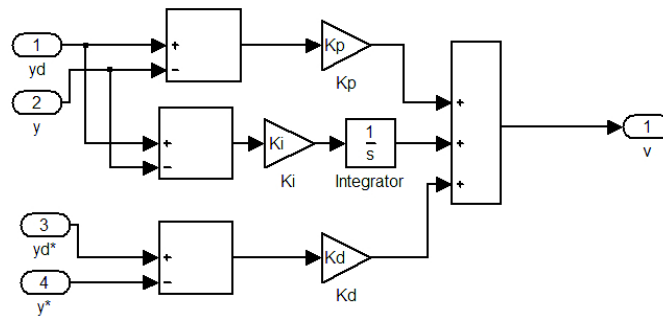
$$u_{PID} = K_p e + K_i \int_0^t e dt + K_d \frac{de}{dt} \quad (5.1)$$

en donde  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $K_i$  la ganancia integral y  $K_d$  la ganancia derivativa y son sintonizadas utilizando el segundo método de sintonización de controladores PID de Ziegler-Nichols [8]. Los términos  $K_{cr}$  y  $P_{cr}$  se determinan experimentalmente (ver Figura 5.1) y se aplican directamente conforme a la tabla A.1 (ver Anexo A).



**Figura 5.1:** Oscilaciones sostenidas obtenidas experimentalmente aplicando el segundo método de Ziegler-Nichols con  $K_{cr} = 2796$  y  $P_{cr} = 0.2[s]$

Finalmente la representación del control PID en bloques de Simulink se muestra en la Figura 5.2.



**Figura 5.2:** Diagrama del Control  $v$  con configuración PID en Simulink

### 5.1.2. Configuración PD

Se busca un modelo dinámico ideal  $G(s)$  que contenga los parámetros de diseño deseados, tales como la frecuencia natural del sistema  $\omega_n$  y el coeficiente de amortiguamiento deseado  $\xi$ .

$$G(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_d s + K_p} \quad (5.2)$$

Partiendo de la función de transferencia  $G(s)_{sis}$  del sistema reducido descrito en la Figura 4.5 del capítulo anterior, se observa que la frecuencia natural  $\omega_n$  del sistema está dada por

$$G(s)_{sis} = \frac{\frac{1}{k} \frac{k}{m}}{s^2 + \frac{k}{m}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.3)$$

Recordando que la masa  $m$  puede variar entre  $0.3 \leq m \leq 2.3$  [kg], la figura 5.3 muestra la gráfica que describe el comportamiento de la frecuencia natural del sistema en función de la masa del mismo.

La figura 5.4 muestra el comportamiento dinámico de  $G(s)$  dependiendo de la frecuencia natural del sistema. Como se puede apreciar, la respuesta más rápida corresponde cuando  $\omega_n = 25.16$  [rad/s], misma que será elegida para la construcción del control  $v$ .

El coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  se elige como 1, ya que se busca obtener una respuesta críticamente amortiguada para evitar el sobrepaso lo más posible.

Sustituyendo los valores de  $\omega_n = 25.16$  [rad/s] y  $\xi = 1$  en (2.14), se obtiene

$$K_p = 633 \quad y \quad K_d = 50 \quad (5.4)$$

Finalmente la representación del control PD en bloques de Simulink se muestra en la Figura 5.5.



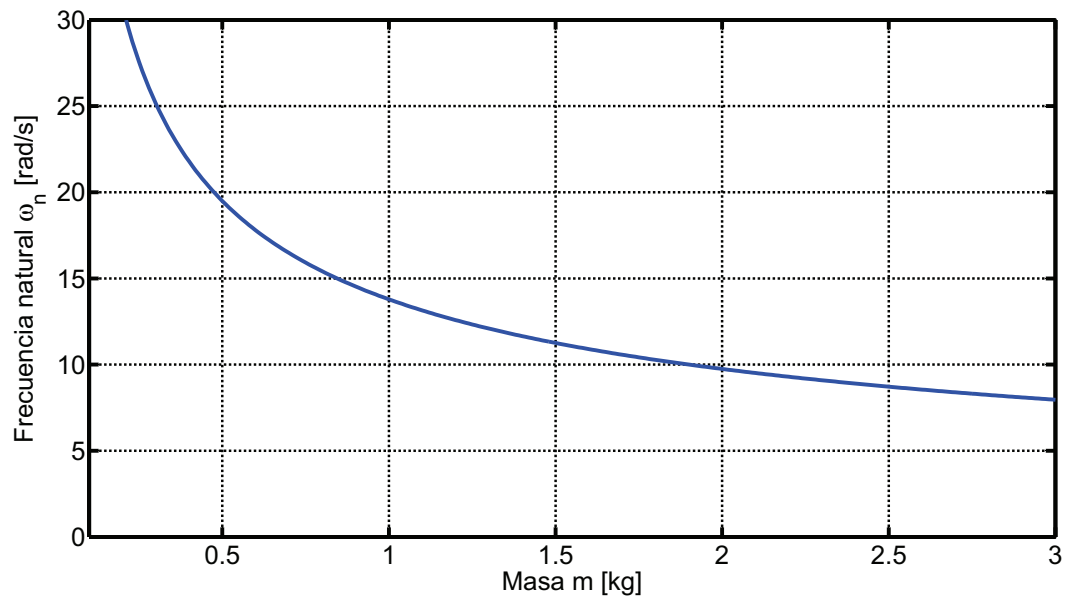


Figura 5.3: Frecuencia natural del sistema en función de la masa

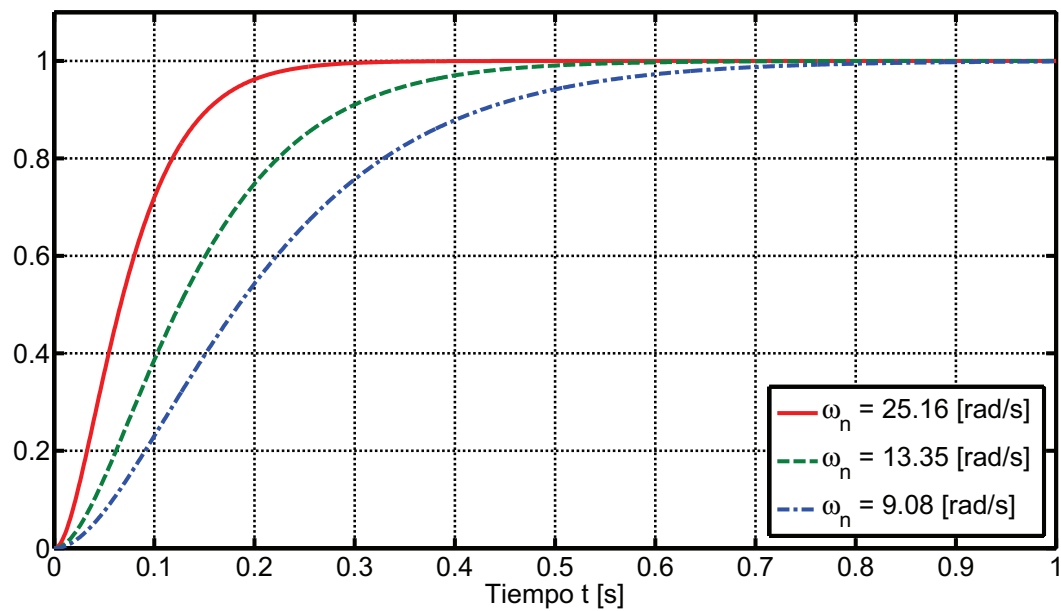


Figura 5.4: Respuesta escalón de  $G(s)$  para distintos valores de  $\omega_n$

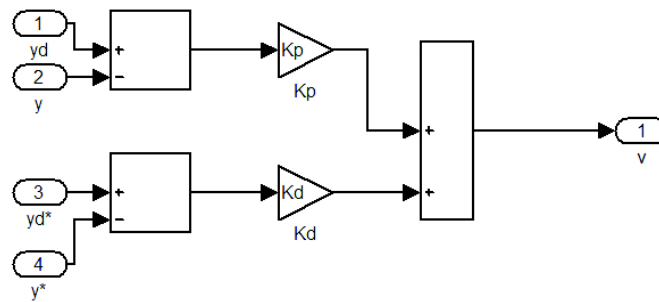


Figura 5.5: Diagrama del Control  $v$  con configuración PD en Simulink

## 5.2. Control por Modos Deslizantes

### 5.2.1. Modo Deslizante de Primer Orden

Para este algoritmo de control, los parámetros de diseño son reducidos a la ganancia  $L$  del SMC y la constante de tiempo  $T$  para el filtro paso-bajas, los cuales corresponden a las ecuaciones (2.31) y (2.37), respectivamente.

La ganancia  $L \leq 9$  permite alcanzar la condición  $s = 0$  (ver Figura 5.6). En este caso en particular, se va a considerar la implementación de la ganancia mínima suficiente para lograr la compensación del término  $\Delta(x)$  con  $L = 9$ .

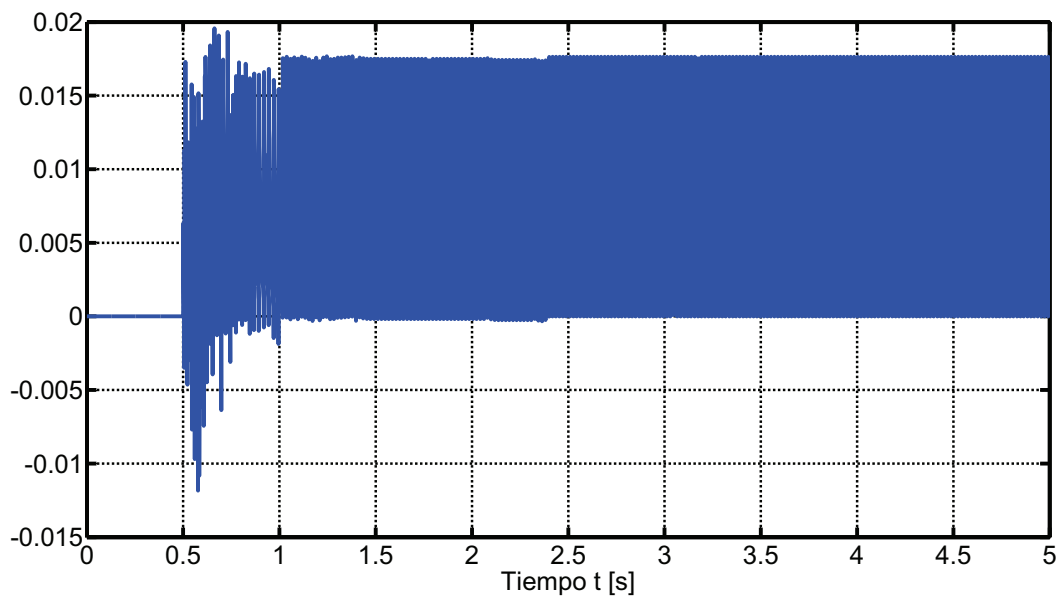


Figura 5.6: Superficie deslizante  $s$  correspondiente a una ganancia  $L = 9$

Por otro lado, la constante de tiempo  $T$  del filtro paso-bajas se elige como  $T = 0.01$ .

Los bloques de Simulink que conforman este algoritmo, se pueden ver en la Figura 5.7.

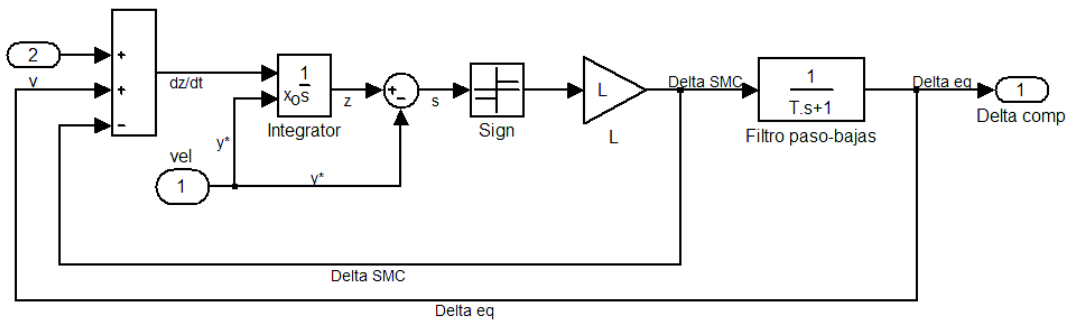


Figura 5.7: Diagrama del controlador SMC de primer orden en Simulink

### 5.2.2. Modo Deslizante de Primer Orden de Ganancia Variable

Los parámetros de diseño para este algoritmo son  $\bar{L}$ ,  $\mu$  y  $\epsilon$ , descritos en la ley de adaptación (2.39).

De [14], se eligen  $L(0) = 10$ ,  $\bar{L} = 1000$ ,  $\mu = 0.1$  y  $\epsilon = 0.004L(t)$ .

La representación de esta ley de control en bloques de Simulink, se muestra en las Figuras 5.8 y 5.9.

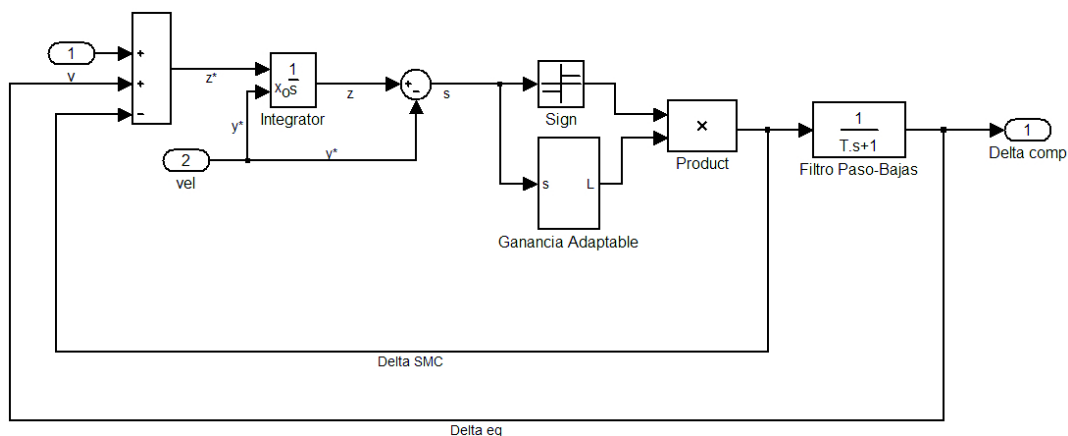


Figura 5.8: Diagrama del controlador SMC de primer orden de ganancia variable en Simulink

El comportamiento de la superficie  $s$  en relación con la ganancia variable  $L$ , se muestra en la Figura 5.10. Como se puede apreciar, la superficie se mantiene sobre cero hasta que la

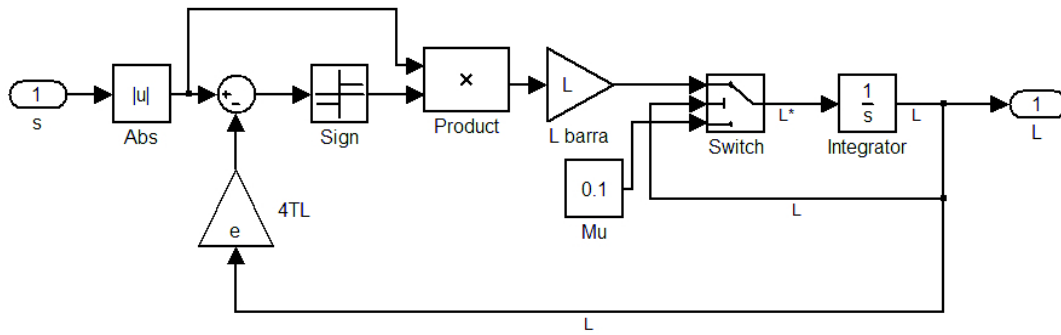


Figura 5.9: Diagrama de la adaptación de ganancia Simulink

ganancia  $L$  comienza a disminuir. Cuando  $L$  llega a su valor mínimo,  $L$  vuelve a aumentar hasta que la superficie deja de estar alrededor cero y pasa a la región  $\epsilon = 0.032$ .

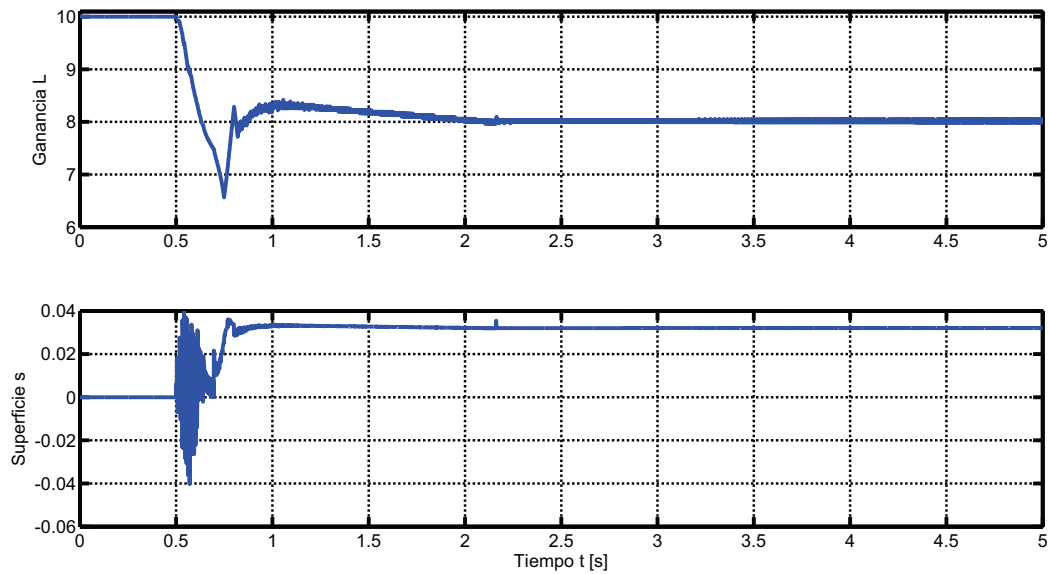


Figura 5.10: Superficie  $s$  y ganancia adaptable  $L$

### 5.2.3. Super Twisting

Para el caso del Super Twisting, se consideran dos casos. Uno en donde se considera la implementación de un filtro, Figura 5.12, y el otro en donde no se recurre a tal filtro, Figura 5.13. La representación en Simulink del Super Twisting se muestra en la Figura 5.11.

Las ganancias del control Super Twisting se eligen como  $c = 25$ ,  $b = 50$  y  $\rho = 500$ .

Para el caso en el que se requiere del filtro paso-bajas, la constante de tiempo  $T$  se elige como  $T = 0.005$ .

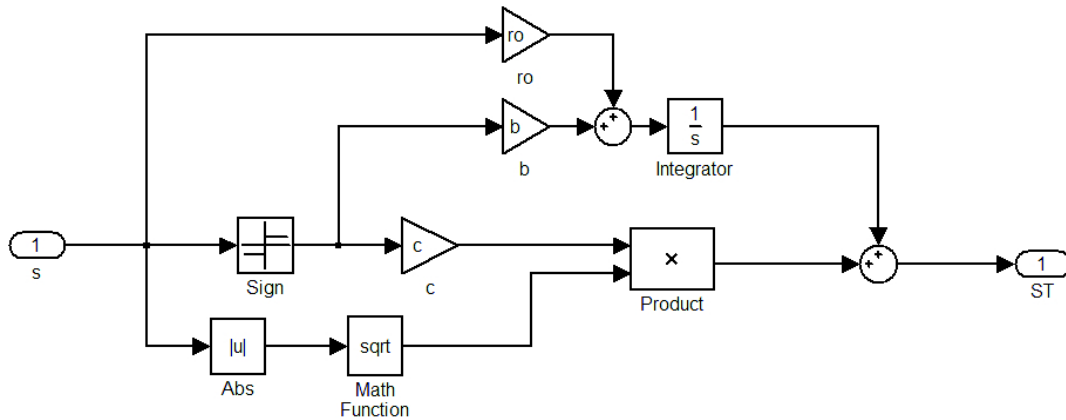


Figura 5.11: Diagrama del controlador SMC Super Twisting en Simulink

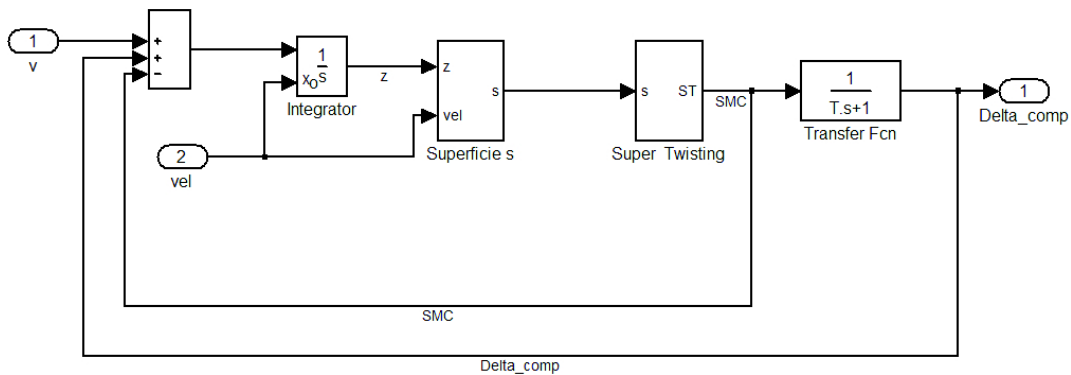


Figura 5.12: Diagrama del controlador Super Twisting con filtro en Simulink

El comportamiento de las superficies deslizantes  $s$  para ambos casos, se muestra en la Figura 5.14. El filtro funciona para que la superficie se mantenga lo más cerca posible de cero, evitando oscilaciones. Por otro lado, en la ausencia del filtro, la superficie se mantiene alrededor de cero pero con oscilaciones de una amplitud mayor, lo que afectará el comportamiento de la posición controlada  $y$ .

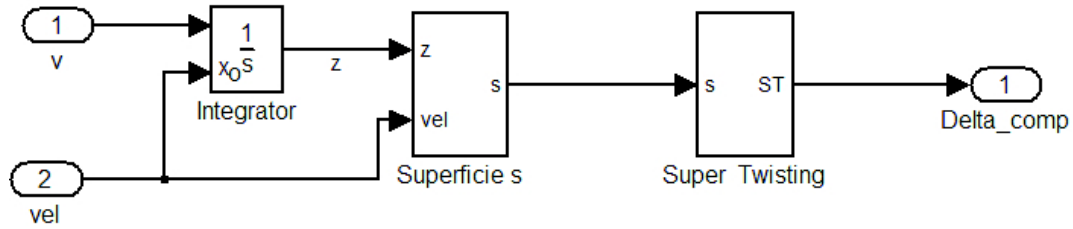


Figura 5.13: Diagrama del bloque Super Twisting sin filtro en Simulink

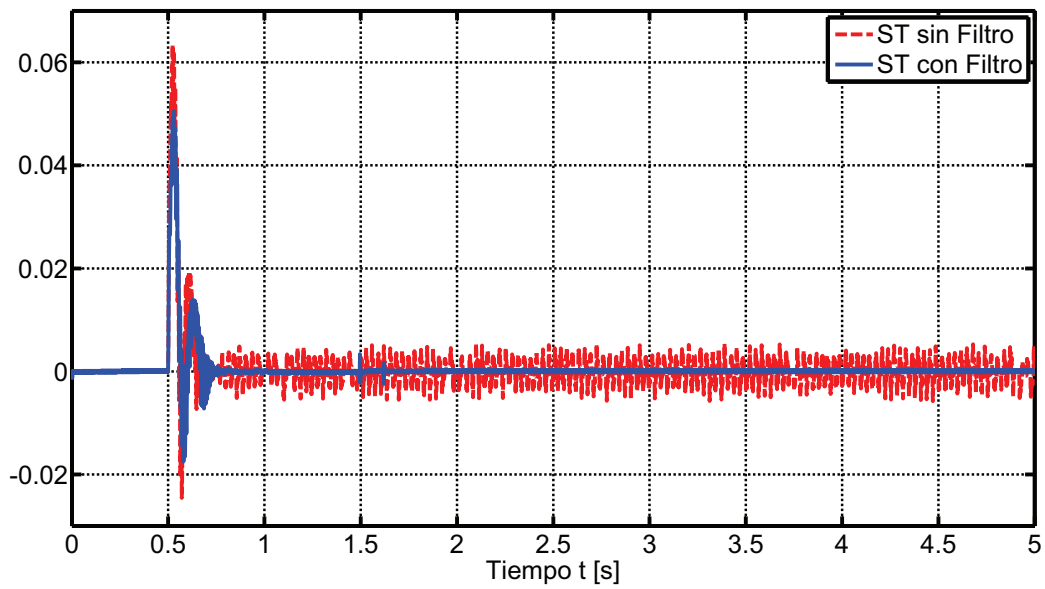


Figura 5.14: Superficie  $s$  para Super Twisting con y sin filtro paso-bajas

### 5.3. Estimación de la Velocidad

En las secciones previas se ha detallado que la metodología propuesta requiere de la medición o de la estimación de la posición y de la velocidad. El sistema físico cuenta con sensores de posición, sin embargo no existe sensor alguno para la medición de la velocidad.

La forma más sencilla de estimar de la velocidad es mediante diferenciación numérica por medio del método de la secante. Por otro lado, y como parte de la teoría de los modos deslizantes, existen diferenciadores exactos, como el propuesto por A. Levant [11].

Ambas metodologías muestran ventajas y desventajas, las cuales serán descritas en este capítulo para finalmente proponer un diferenciador combinado.

#### 5.3.1. Diferenciador

La forma más sencilla de obtener la estimación de la velocidad es mediante una diferenciación numérica por medio del método de la secante [10]

$$\hat{y}(k) = \frac{[y(k) - y(k - i)]}{iT_p}, \quad i = 2 \quad y \quad T_p = 0.001 [s] \quad (5.5)$$

en donde  $i$  denota el número de períodos de muestreo de  $T_p$  que son requeridos para el proceso.

Por otro lado, el diferenciador de Levant [11] tiene como objetivo encontrar estimaciones robustas en tiempo real de la variable  $y(t)$

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= z_1 - \lambda_0 |(z_0 - y(t))|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_0 - y(t)) \\ \dot{z}_1 &= -\lambda_1 \text{sign}(z_0 - y(t)) \end{aligned} \quad (5.6)$$

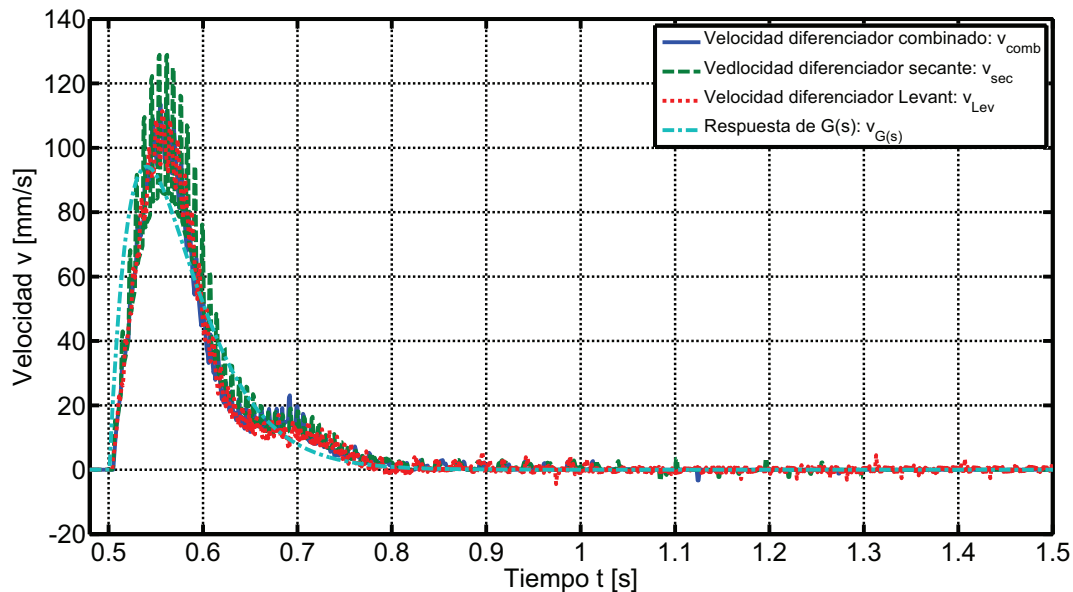
en donde las constantes  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$  son los parámetros de ajuste del diferenciador y  $z_1$  la función diferenciada de interés, en este caso la *velocidad*. La técnica de ajuste para el ajuste de las ganancias del diferenciador de Levant quedan como:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1.1M \\ \lambda_1 &= 1.5M^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

en donde  $M$  es el valor máximo de la señal estimada.

La Figura 5.15 muestra el comportamiento de los diferenciadores contemplados con la comparación de la velocidad ideal de la función de transferencia  $G(s)$ . Por un lado, el método de la secante tiene un sobre paso en la señal estimada mayor al obtenido con el diferenciador de Levant, sin embargo, al detenerse el sistema la señal estimada por medio del diferenciador

de Levant muestra oscilaciones<sup>1</sup> alrededor de cero, mientras que el diferenciador numérico permanece en cero una vez que el sistema ha llegado a la posición deseada. De esta forma, el diferenciador propuesto obtiene la velocidad estimada con el diferenciador de Levant mientras el sistema está en movimiento y cambia al diferenciador numérico cuando la posición deseada ha llegado al 90 % de su valor final.



**Figura 5.15:** Comparación de la velocidad estimada en el sistema y la respuesta simulada de la función de transferencia  $G(s)$

El otro bloque que es común para todos los controladores, es el diferenciador para la estimación de la velocidad. Las Figuras 5.16, 5.17 y 5.18 muestran los componentes del diferenciador combinado utilizado en los experimentos.

<sup>1</sup>Estas oscilaciones se ven reflejadas en la posición final del sistema, lo cual no permite la convergencia a la posición deseada.



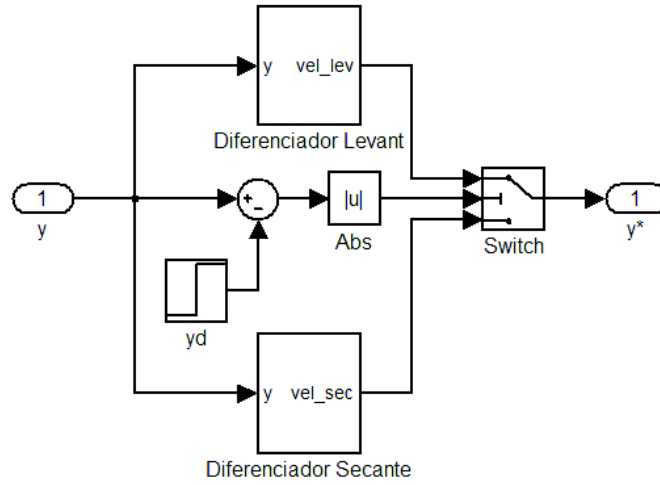


Figura 5.16: Diagrama del Diferenciador en Simulink

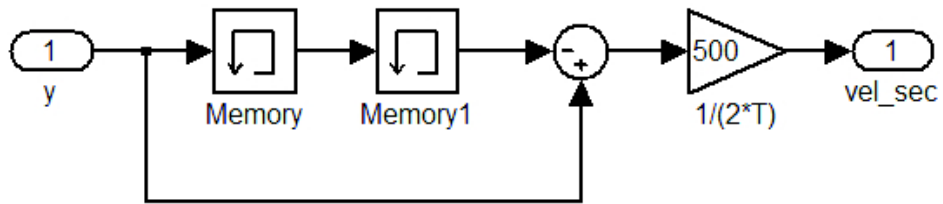


Figura 5.17: Diagrama del Diferenciador Numérico basado en el Método de la Secante en Simulink

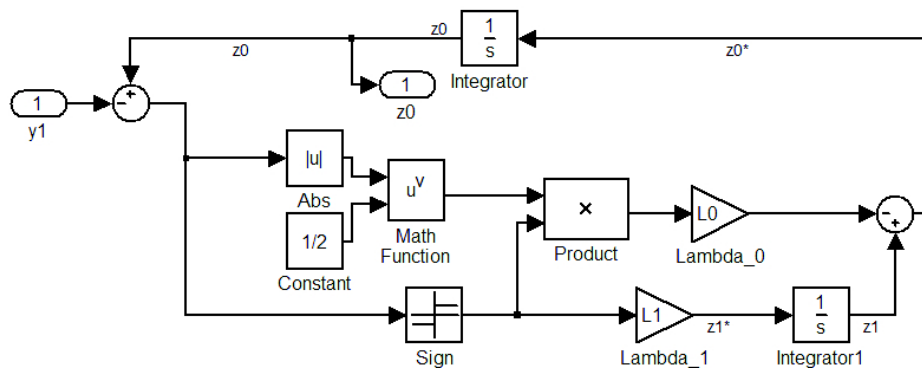


Figura 5.18: Diagrama del Diferenciador de Levant en Simulink

# Capítulo 6

## Resultados Experimentales

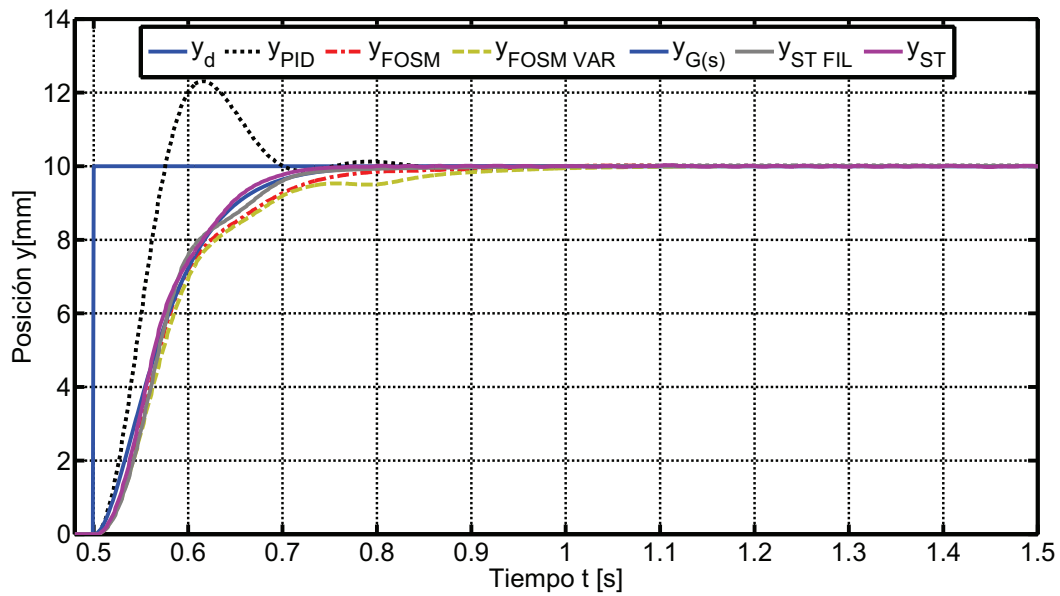
Este Capítulo se enfoca a los resultados obtenidos experimentalmente en el sistema masa amortiguador resorte. Se efectuaron dos experimentos diferentes, probando cada uno de los algoritmos vistos durante este trabajo. Los experimentos consisten en lo siguiente:

1. El primer experimento consiste en alcanzar una posición dada como referencia en la primera masa, en presencia de una perturbación estática (segunda masa). Este experimento busca comparar la exactitud de los algoritmos.
2. El segundo experimento consiste en causar oscilaciones de  $\pm 2$  [cm] de amplitud en la segunda masa, lo cual implica que la primera masa también oscile. Estando el sistema en movimiento, se activa el control mientras continúan las oscilaciones en la segunda masa, buscando que la primera masa consiga llegar a una referencia dada, a pesar de la perturbación dinámica. La finalidad de este experimento, es comparar la robustez de los algoritmos ante perturbaciones más violentas.

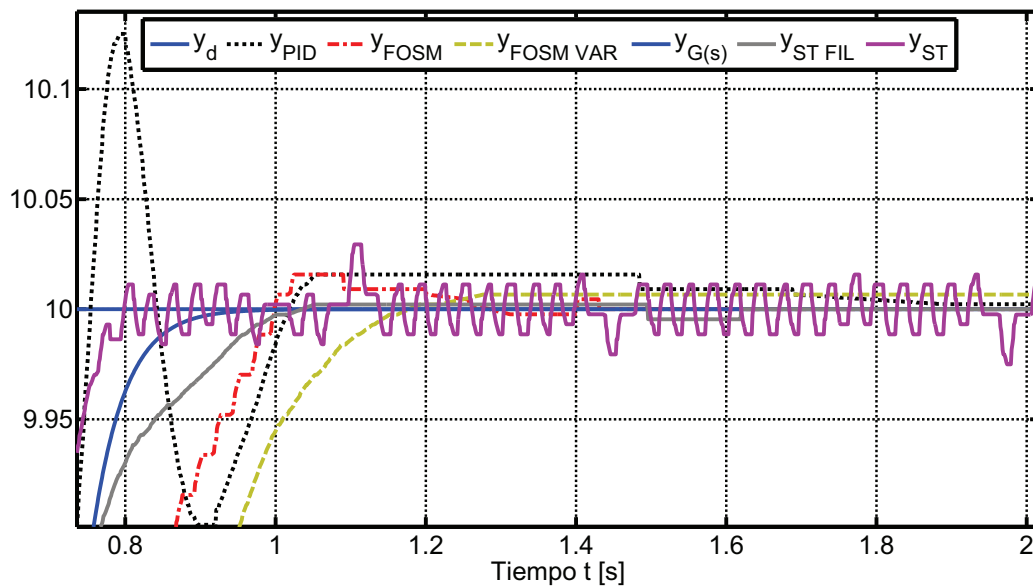
### 6.1. Primer Experimento

Las Figuras 6.1, 6.2 y 6.3 muestran el comportamiento de la salida del sistema con los distintos algoritmos de control propuestos.

En la Figura 6.1 se aprecia inmediatamente el **sobrepaso** correspondiente al controlador **PID**, mientras que los demás controladores por modos deslizantes aparentemente siguen la trayectoria deseada.

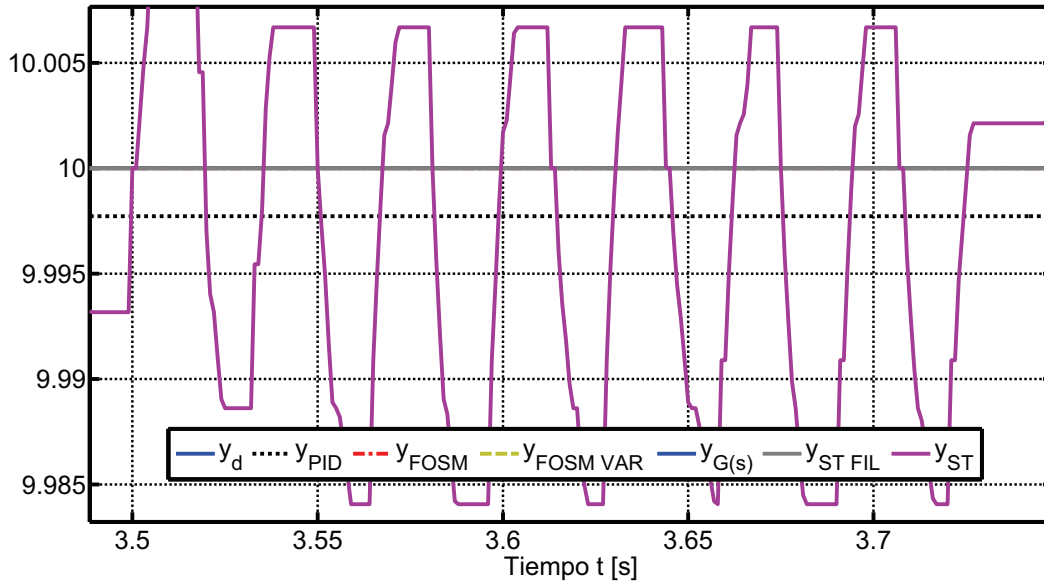


**Figura 6.1:** Comparación de la posición alcanzada con los distintos algoritmos de control a una referencia dada de 1 [cm]



**Figura 6.2:** Zoom de la posición en la respuesta transitoria

La Figura 6.2 muestra un acercamiento de las respuestas de todas las señales de control. Se puede observar que el controlador **PID oscila** antes de intentar llegar a la referencia final y además presenta un **error** constante en estado permanente. Los demás controladores por modos deslizantes presentan sobrepasos muy pequeños en comparación con el controlador PID, además logran convergencia en tiempo finito (error cero en estado permanente). Solamente el algoritmo Super Twisting sin filtro presenta oscilaciones permanentes, por lo que nunca logra convergencia al valor deseado.



**Figura 6.3:** Zoom de la posición en el estado permanente

La Figura 6.3 hace un acercamiento en el estado permanente de las respuestas de los controladores. Se puede observar que solamente el controlador **PID** y el **Super Twisting sin filtro** no logran convergencia al valor deseado, sin embargo los controladores restantes por modos deslizantes sí lo consiguen.

El comportamiento del error  $e = y_d - d$  se muestra en las Figuras 6.4 y 6.5. Nuevamente se puede apreciar que el controlador PID y el Super Twisting sin filtro, no consiguen llegar a error **cero** en estado permanente.

La estimación de las velocidades del sistema con los distintos algoritmos de control se observa en la Figura 6.6. Todas las velocidades logran acentarse en cero cuando el sistema ha llegado a la posición final, sin embargo, el Super Twisting sin filtro no logra quedarse “quieto”, esto es por su naturaleza de responder súbitamente a cualquier perturbación. Se puede decir que está en alerta todo el tiempo.

La Figura 6.7 presenta un acercamiento cuando ya se ha logrado llegar a la posición final (velocidad = 0). Sin embargo, el Super Twisting sin filtro presenta oscilaciones que se heredan a la señal de control  $u$ , evitando que el sistema converja a la posición final.

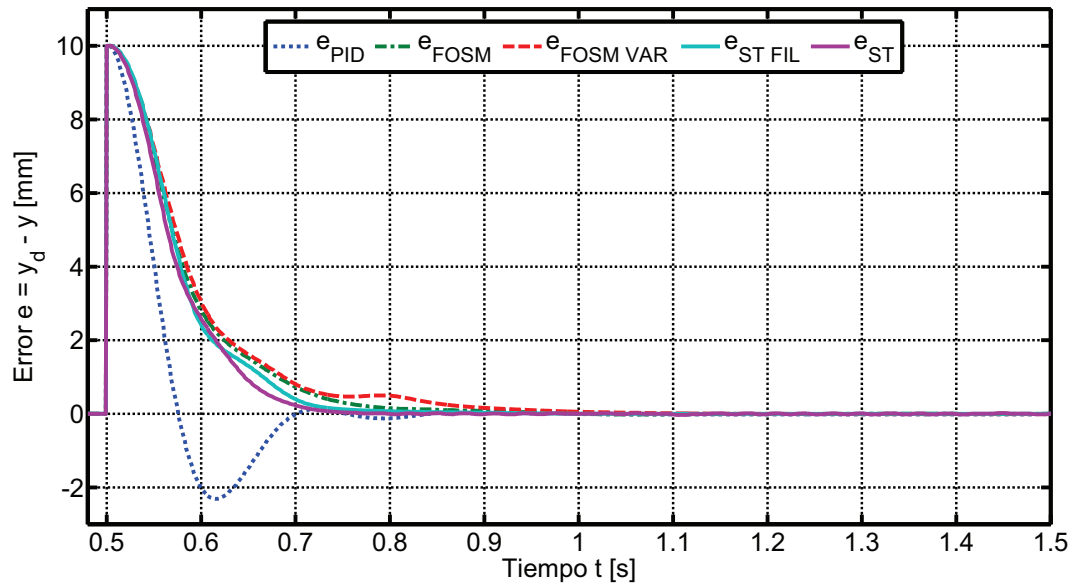


Figura 6.4: Error e

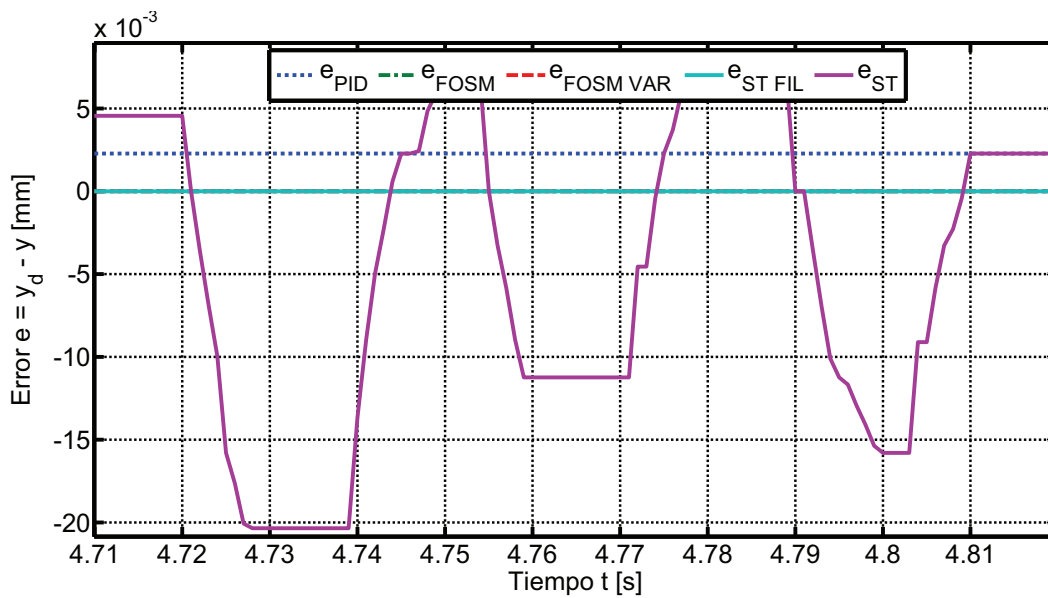


Figura 6.5: Zoom Error e

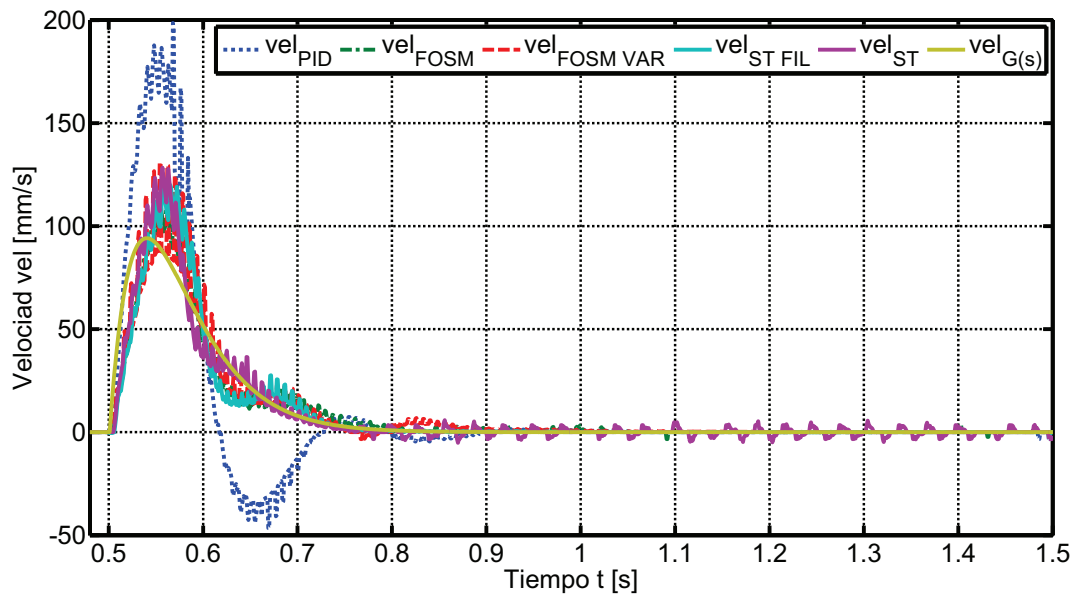


Figura 6.6: Velocidades del sistema

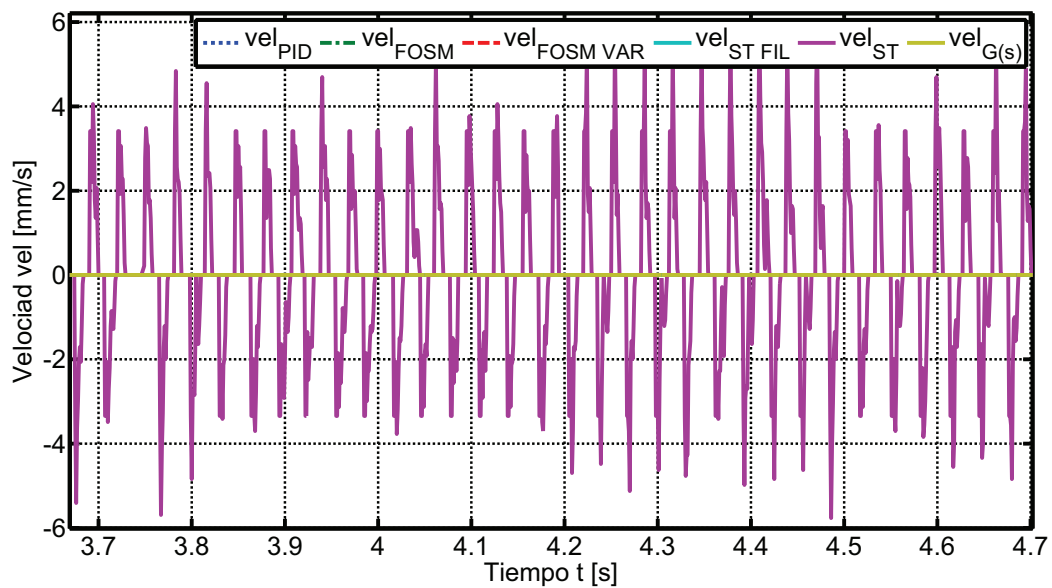
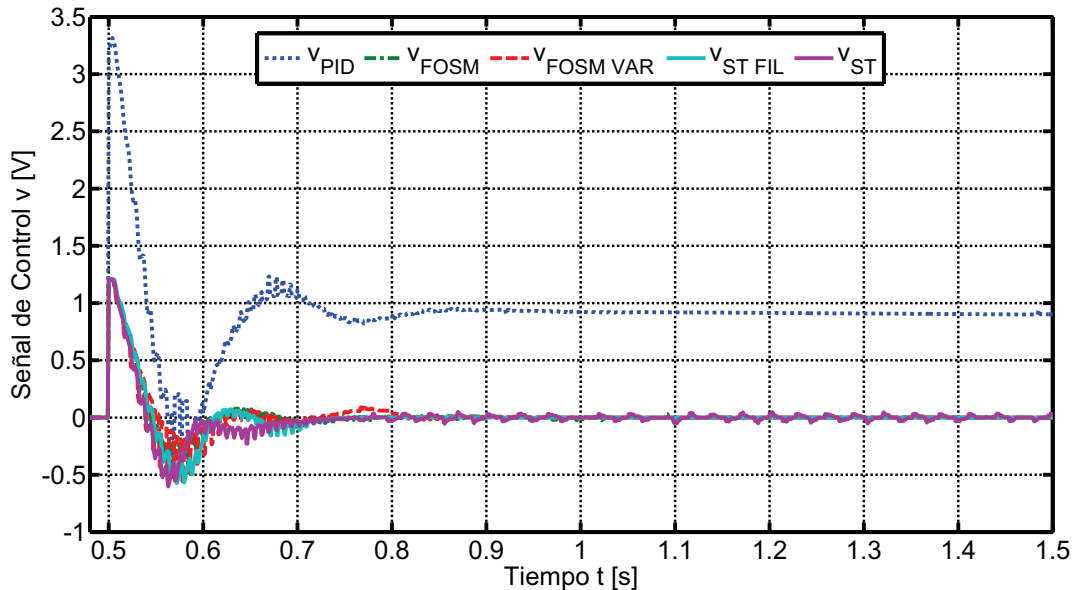


Figura 6.7: Zoom de las velocidades del sistema

Las señales del control  $v$  se muestran en las Figuras 6.8 y 6.9.



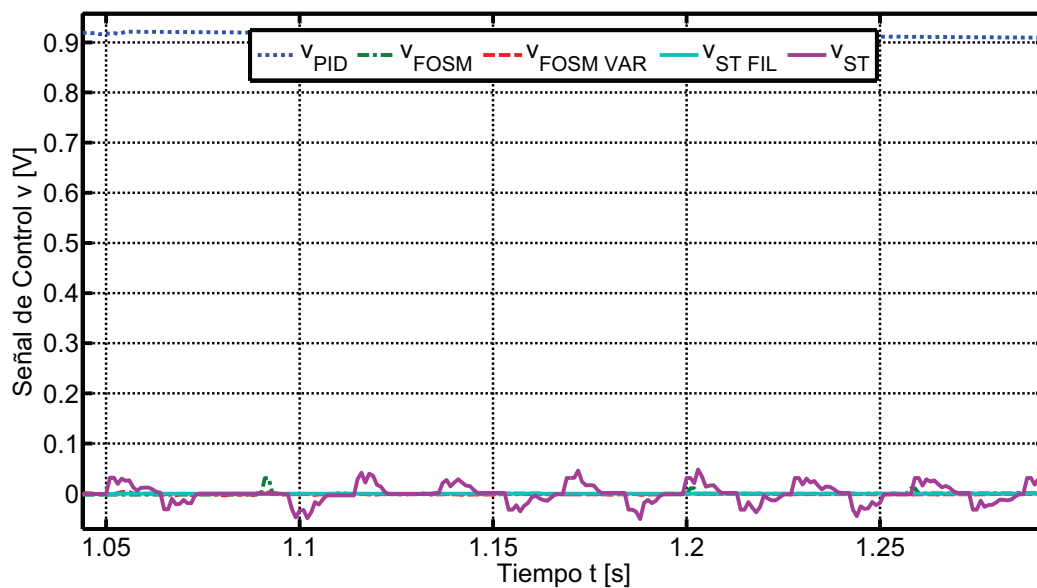
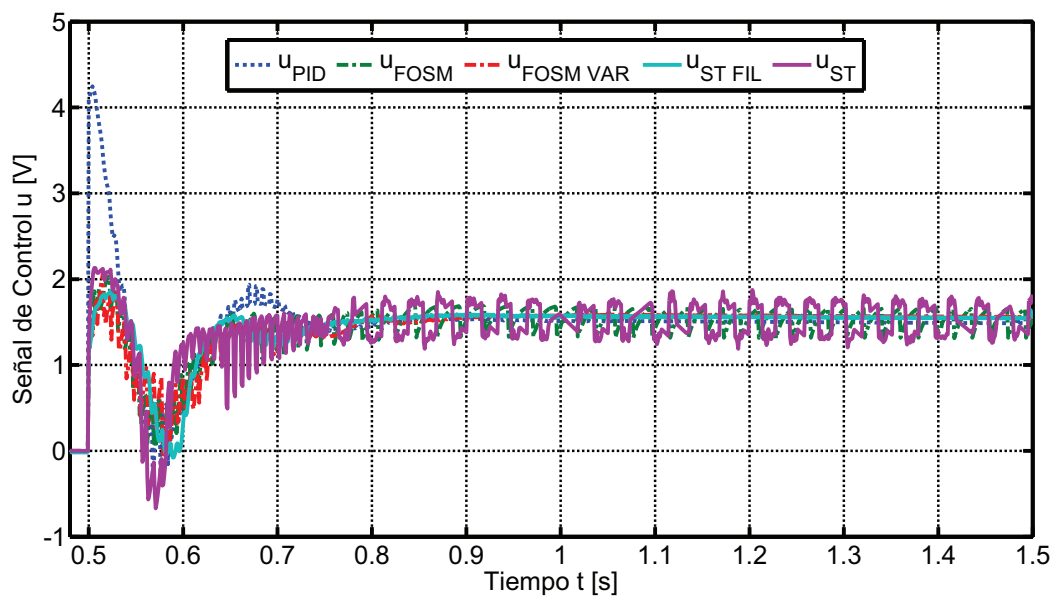
**Figura 6.8:** Control  $v$

En el caso de la Figura 6.8 hay una clara diferencia entre la señal de control  $v$  del PID y de los demás controladores. El control PID no está sujeto a la ayuda de los modos deslizantes, por lo que está entrando directamente como señal de control  $u$  a la planta. En el caso cuando se utilizan los modos deslizantes, el control  $v$  prácticamente se vuelve cero y la acción dominante de control proviene del mismo controlador por modos deslizantes, como se podrá apreciar en las siguientes figuras.

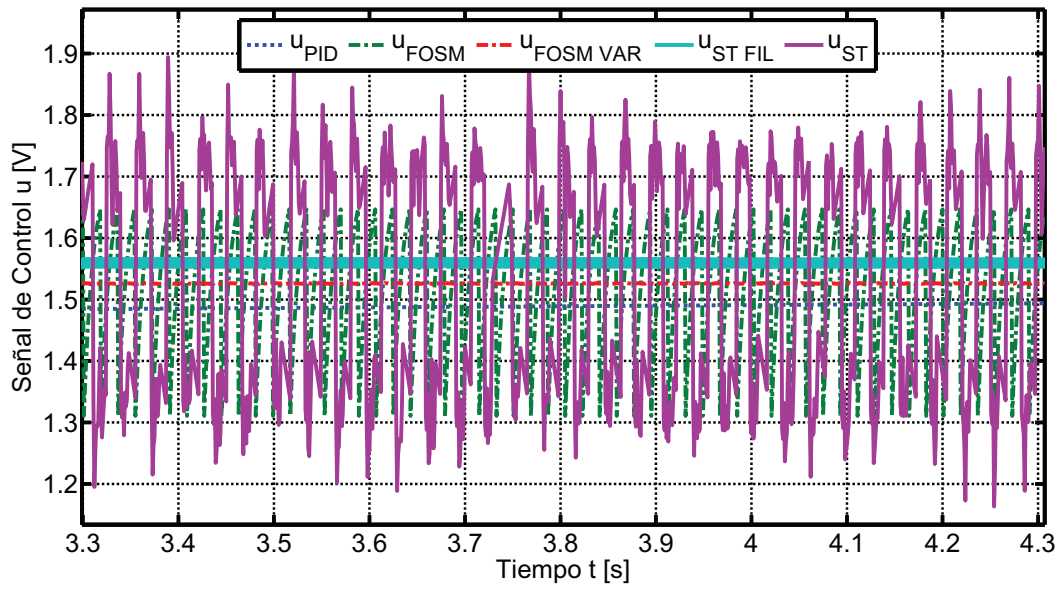
Haciendo un acercamiento de las señales de control  $v$ , Figura 6.9, se puede ver que ésta es una señal continua y suave.

Por otro lado, la acción de control que está siendo inyectada al sistema, es el control  $u$ . En la Figura 6.10 se observa que algunas señales presentan oscilaciones, sobre todo aquellas correspondientes a los algoritmos por modos deslizantes. Sin embargo, el acercamiento mostrado en la Figura 6.11, permite ver que los controladores PID, modos deslizantes de primer orden de ganancia variable y Super Twisting con filtro, poseen una señal continua y uniforme. Por otro lado, los controladores por modos deslizantes de primer orden y Super Twisting sin filtro presentan oscilaciones, lo cual puede llegar a ser perjudicial para el actuador.

Finalmente la tabla 6.1, hace un recuento de datos cuantitativos que resumen los resultados hasta ahora mostrados.

Figura 6.9: Zoom del control  $v$ Figura 6.10: Control  $u$



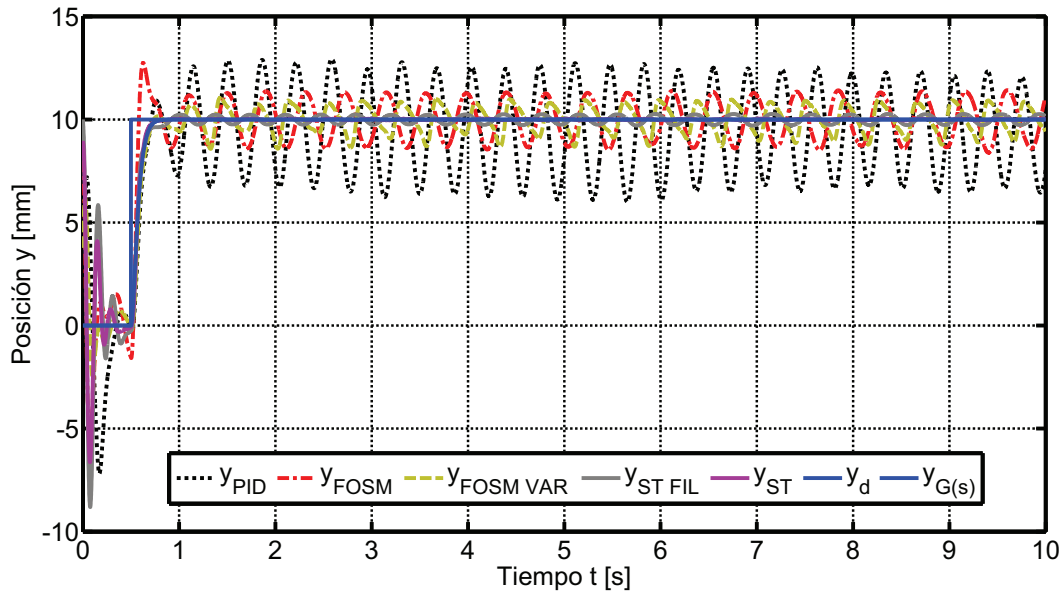
Figura 6.11: Zoom del control  $u$ 

Cuadro 6.1: Resumen de resultados del primer experimento

Controlador	Sobre pa- so máximo [ $\mu m$ ]	Convergencia en tiempo finito	Tiempo de con- vergencia [s]	Error en estado per- manente [ $\mu m$ ]	Nivel de ruido en la señal de control $\Delta u$
PID	2400	<i>No</i>	–	2	700 [ $\mu$ V]
FOSM	16	<i>Si</i>	0.93	0	300 [mV]
FOSM VAR	7	<i>Si</i>	1.66	0	300 [ $\mu$ V]
ST FIL	3	<i>Si</i>	1.12	0	1.4 [mV]
ST	2	<i>No</i>	–	25	710 [mV]

## 6.2. Segundo Experimento

Las Figuras 6.2, 6.13 y 6.14 muestran el comportamiento de la salida del sistema con los distintos algoritmos de control propuestos.



**Figura 6.12:** Comparación de la posición alcanzada con los distintos algoritmos de control a una referencia dada de 1 [cm], en presencia de perturbaciones

A simple vista puede observarse en la Figura que el controlador que presenta mayor amplitud en sus oscilaciones, es el PID. Por otro lado, los controladores por modos deslizantes presentan oscilaciones de menor amplitud.

En la Figura 6.13, se aprecia un acercamiento del estado permanente de las respuestas. Aquí se ve claramente como el algoritmo Super Twisting supera a los demás algoritmos de control. De hecho, es necesario hacer un acercamiento mayor para poder apreciar la amplitud de las oscilaciones del algoritmo Super Twisting sin filtro, ver Figura 6.14

El comportamiento de las velocidades del sistema con los distintos algoritmos de control se observa en las Figuras 6.15 y 6.16. En estas figuras se puede observar que el controlador PID genera velocidades mayores que el Super Twisting.

Cabe mencionar que el diferenciador combinado que fue propuesto para esta tesis, ayuda a estimar señales más suaves cuando el sistema está en movimiento, lo cual ayuda a generar señales de control igualmente suaves para ser inyectadas al sistema.

Las señales del control  $v$  se muestran en las Figuras 6.17 y 6.18. De nuevo, la señal de control  $v$  en el controlador PID, es la misma que la señal de control  $u$ .

Las señales del control  $u$  se muestran en las Figuras 6.19 y 6.20.

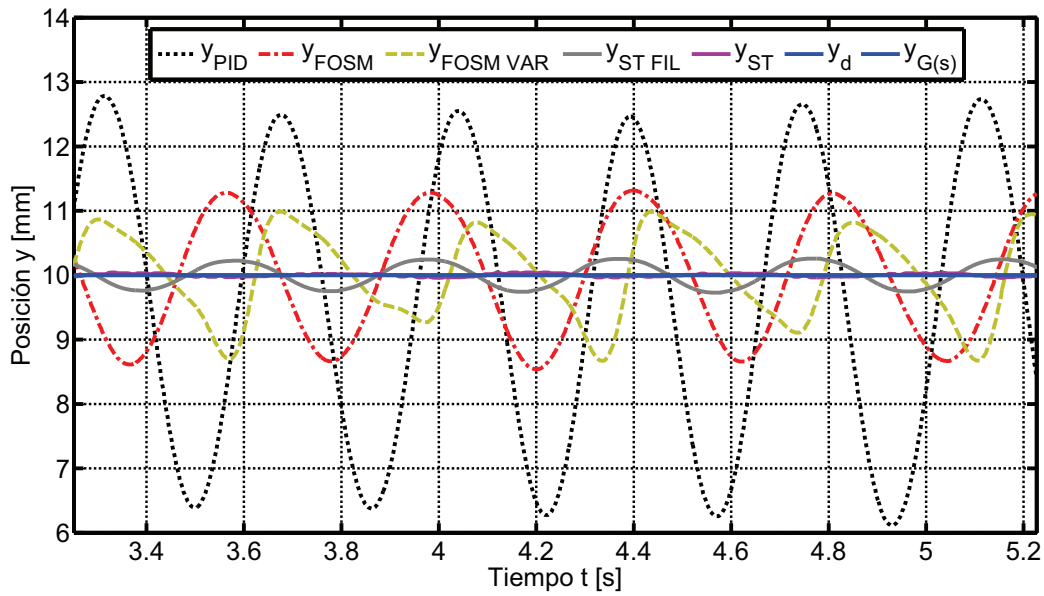


Figura 6.13: Zoom de la posición en la respuesta transitoria

La Figura 6.19 muestra las señales de control  $u$  que son inyectadas al sistema. El mejor desempeño se logra con el Super Twisting sin filtro.

En la Figura 6.20 se aprecia que este controlador tiene la señal menos suave, sin embargo es la señal que mejor logra compensar las perturbaciones.

Finalmente, las amplitudes de las oscilaciones alcanzadas con los distintos algoritmos de control, se resumen en la tabla 6.2.

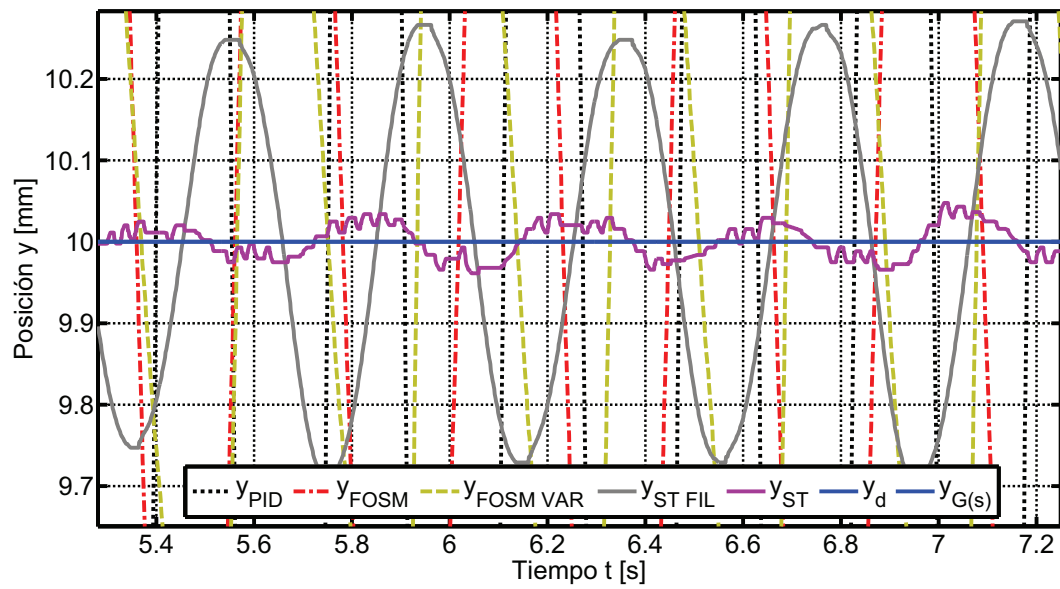


Figura 6.14: Zoom de la posición en el estado permanente

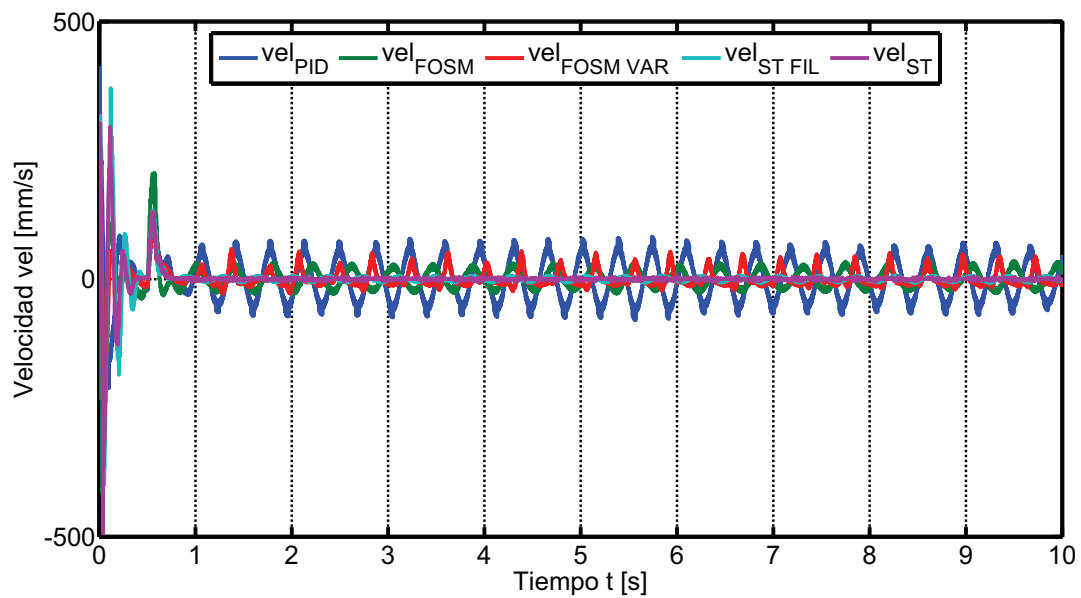


Figura 6.15: Velocidades del sistema

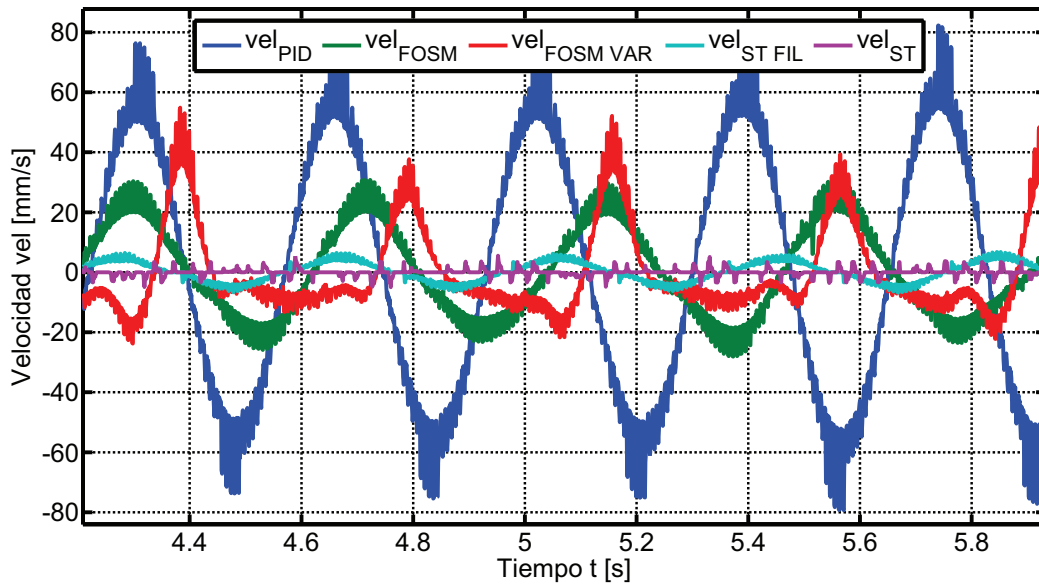
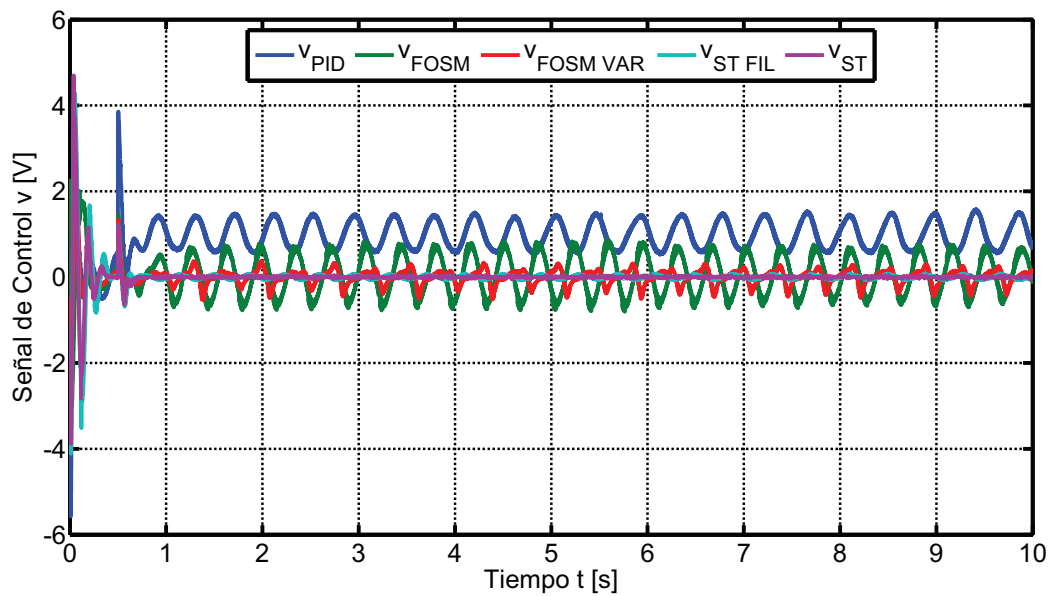
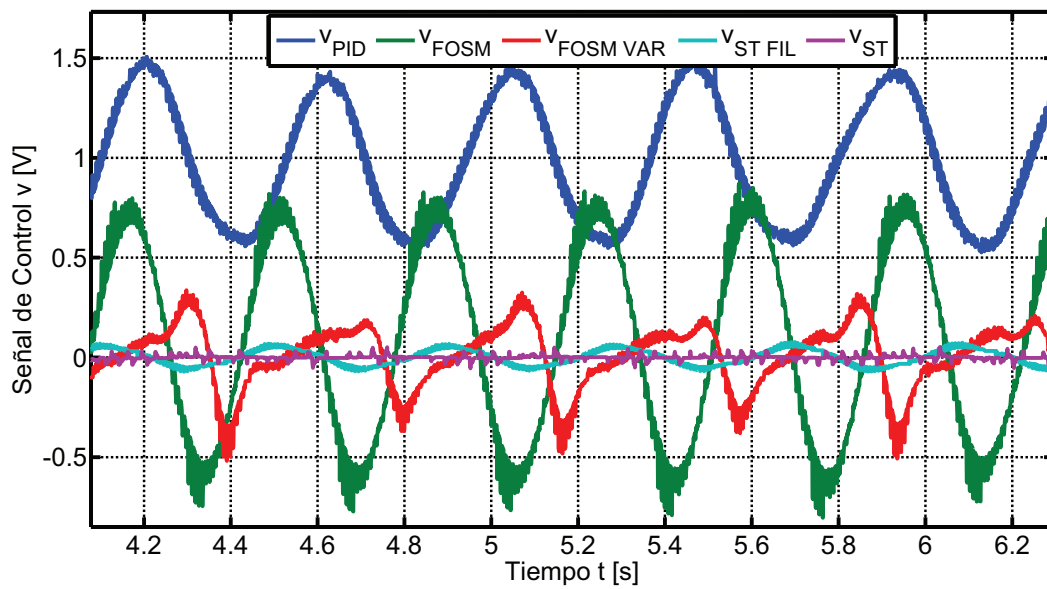
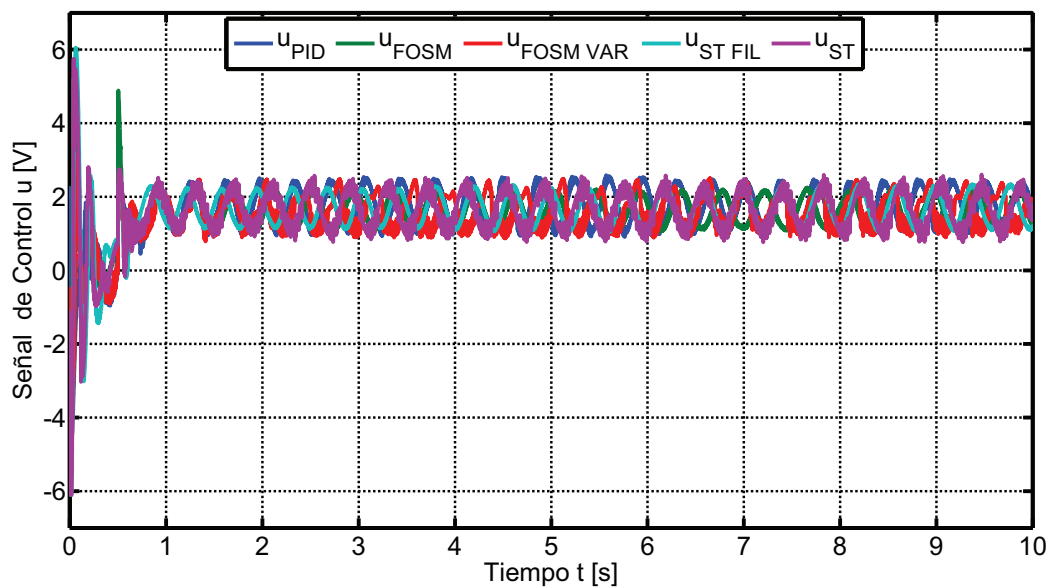


Figura 6.16: Zoom de las velocidades del sistema

Figura 6.17: Control  $v$

Figura 6.18: Zoom del control  $v$ Figura 6.19: Control  $u$

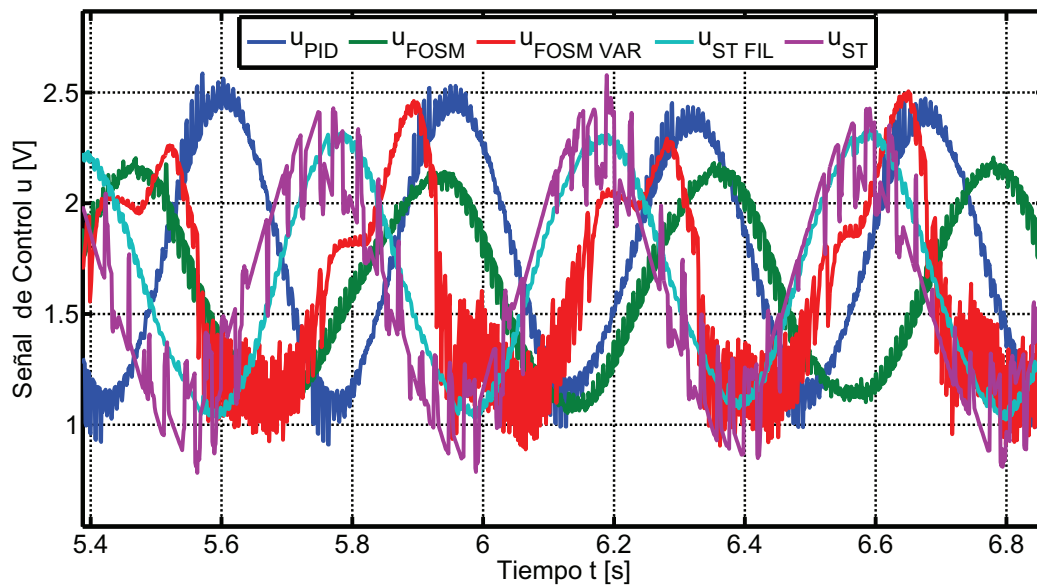


Figura 6.20: Zoom del control  $u$

**Cuadro 6.2:** Resumen de resultados del segundo experimento

Controlador	Amplitud de las oscilaciones en la salida[mm]
PID	6.11
FOSM	2.78
FOSM VAR	2.16
ST FIL	0.47
ST	0.069

# Capítulo 7

## Conclusiones

El objetivo principal de la tesis fue alcanzado con éxito. Se logró controlar la posición de una masa siguiendo un método para fines industriales. También fue posible implementar los distintos algoritmos de control propuestos en el objetivo y además validar experimentalmente las propiedades de los modos deslizantes. Trabajar con un modelo reducido y con datos obtenidos directamente de las hojas de datos, ahorran mucho tiempo en la puesta en marcha de una planta. Los modos deslizantes son una gran opción para tales casos y además, su diseño e implementación, no necesariamente tienen que ser complicados.

En lo referente a la aplicación de controladores, el control **PID** tiene métodos de sintonización que facilitan su implementación en casos en los que no se cuenta con un modelo exacto de la planta, como se mostró en el desarrollo de esta tesis, aplicando directamente el segundo método de sintonización de Ziegler-Nichols. La implementación del control PID también es sencilla y conocida ampliamente en el campo del control. Los resultados conseguidos con este controlador suelen ser suficientemente buenos. En este trabajo en particular, la respuesta en estado permanente del primer experimento conseguida con un control PID, muestra un error de aproximadamente  $2 [\mu m]$ , error que podría ser considerado despreciable en la mayoría de las aplicaciones industriales. Sin embargo, existen aplicaciones en la fabricación de chips y componentes electrónicos que demandan precisión de micras, por lo que un error de  $2 [\mu m]$  sería inaceptable.

Por otro lado, los controladores basados en algoritmos por modos deslizantes, también pueden ser sintonizados experimentalmente, aunque la mejor opción se encuentra con los métodos de ganancia variable que permiten que las ganancias se ajusten en tiempo real a las necesidades del sistema. Con excepción del algoritmo Super Twisting sin filtro, todos los algoritmos por modos deslizantes lograron convergencia en tiempo finito en el estado permanente del primer experimento.

Concretamente, en el caso de los resultados conseguidos en el primer experimento, todos los algoritmos por modos **deslizantes** lograron convergencia al valor deseado en tiempo finito (con excepción del Super Twisting sin filtro), mientras que el control **PID** presentó un error en estado permanente de aproximadamente  $2 [\mu m]$ . Sin embargo, la diferencia importante



la da la señal de control, ya que si su nivel de ruido es muy grande, se pueden percibir los efectos del *chattering* directamente en el actuador, aunque las gráficas no lo muestren así. El *chattering* no solo afecta visualmente la señal medible de la posición, también causa fatiga en los actuadores, originando desperfectos y fallas en los componentes, lo cual se traduce en pérdidas de tiempo y de costos. En el caso del Super Twisting, el término lineal también ayudó enormemente en el seguimiento de la trayectoria deseada.

En el segundo experimento, todos los algoritmos por modos deslizantes mostraron oscilaciones de menor amplitud en comparación con el control PID. El Super Twisting (con filtro y sin filtro) mostró un gran desempeño en la compensación de perturbaciones más violentas (oscilaciones hasta 88 veces de menor amplitud en comparación con el control PID).

Se puede decir que el Super Twisting trabaja mejor en presencia de perturbaciones que intentan excitar al sistema de forma constante, ya que de otra forma el algoritmo tratará de seguir compensando a pesar de que ya haya anulado la perturbación, lo cual origina oscilaciones como se observó en el primer experimento, de ahí la necesidad de recurrir a la implementación de un filtro.

La viabilidad de aplicar este tipo de metodologías a nivel industrial es posible, ya que su implementación es sencilla y no requiere de un conocimiento profundo de la teoría, en especial si se trata de algoritmos adaptables. Al igual que en el controlador PID, se pueden ajustar las ganancias experimentalmente, basta con buscar una ganancia tal que mantenga a la superficie deslizante alrededor de cero para asegurar la ocurrencia de las propiedades de los modos deslizantes, aunque lo mejor sería recurrir a algoritmos de ganancias variables que se ajusten de forma automática.

Como trabajo futuro está la implementación del Super Twisting de ganancia variable. Lo que se busca es eliminar el filtro paso-bajas y así evitar al máximo cualquier retraso dentro del sistema.

Finalmente, solo queda trabajar la esperanza de que más compañías recurran a la implementación de algoritmos de control por modos deslizantes.



# Apéndice A

## Control Proporcional Integral Derivativo PID

El control más recurrido en la industria es el Control Proporcional Integral Derivativo **PID**, cuya ecuación es

$$u_{PID} = K_p e + \frac{K_p}{T_i} \int e dt + K_p T_d \frac{de}{dt} \quad (\text{A.1})$$

en donde  $u_{PID}$  es propiamente la señal de control,  $e$  es la señal de error generada entre la referencia y la salida medida,  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $T_i$  el tiempo integral y  $T_d$  el tiempo derivativo.

La acción proporcional es un amplificador de ganancia ajustable. La acción derivativa ayuda a mejorar la respuesta transitoria de un sistema, oponiéndose al cambio en la señal de error. Como desventaja tiene que amplifica las señales de ruido y puede provocar un efecto de saturación en el actuador.

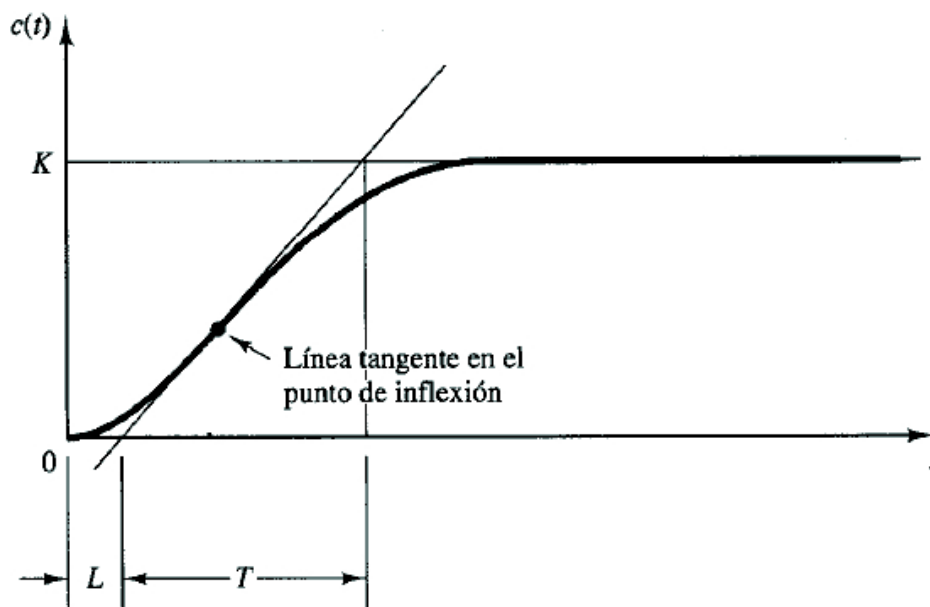
Cuando no se cuenta con un integrador, existe un error en estado permanente o desplazamiento (offset) en la respuesta para una entrada escalón. Tal error se elimina por medio de la acción de control integral en el controlador. La combinación de una acción de control proporcional, una acción de control integral y una acción de control derivativa se denomina acción de control proporcional-integral-derivativa (PID). Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales [8].



Por otro lado, el método de sintonización basado en lazo abierto, establece que la planta debe ser excitada con un escalón unitario con el fin de obtener una respuesta en forma de  $S$  (ver Figura A.2), en donde se miden el tiempo de retardo  $L$  y la constante de tiempo  $T$  experimentalmente y se evalúan de acuerdo a la siguiente tabla

**Cuadro A.2:** Reglas de sintonización de Ziegler-Nichols en lazo abierto

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{L}$	$\infty$	0
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{1}{3}L$	0
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

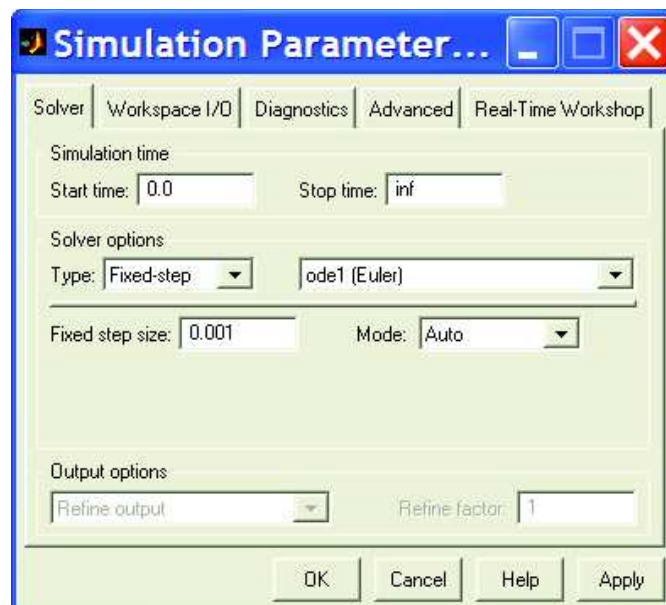


**Figura A.2:** Curva de respuesta en forma de  $S$  aplicando el método de lazo abierto de Ziegler-Nichols

# Apéndice B

## Entorno Simulink

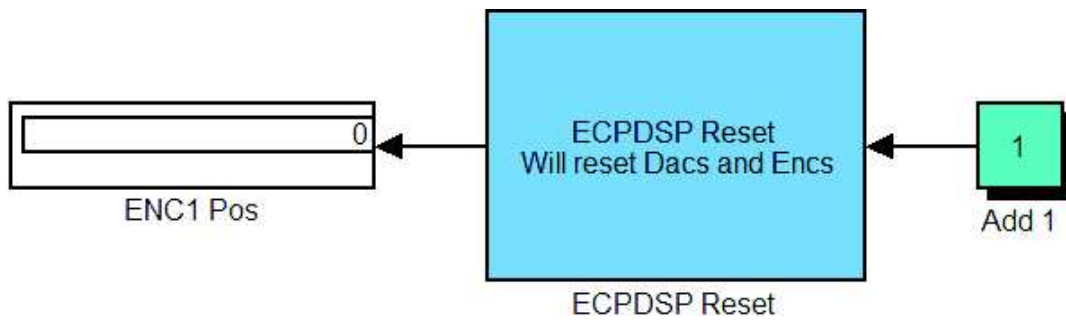
Simulink de Matlab trabaja con el Real-Time-Workshop (**RTW**), herramienta que permite la realización de experimentos en tiempo real. Los parámetros utilizados durante la fase experimental en el **RTW**, se muestran en la Figura B.1.



**Figura B.1:** Parámetros de Configuración del RTW

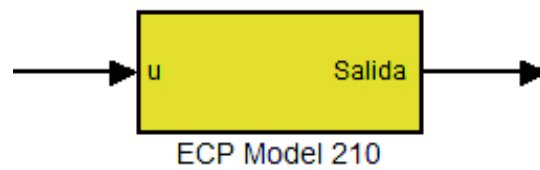
Por otra parte, antes de iniciar cualquier experimento, es necesario realizar un Reset al sistema. Esto con el fin de garantizar la anulación de cualquier offset durante los experimentos. El bloque de Reset se muestra en la Figura B.2.

El Modelo 210: Rectilinear Plant de Educational Control Products viene provisto de un bloque representativo en Simulink, ver Figura B.3. Este archivo permite programar cualquier estructura de control y obtener una salida basada en la posición de las masas del sistema (en



**Figura B.2:** Bloque de Reset en Simulink

este caso solo importa la posición de la primera masa  $m_1$ ).



**Figura B.3:** Diagrama de la planta en Simulink





# Bibliografía

- [1] J. Adamy. *Nichtlineare Regelungen*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [2] C. Bissell. *Springer Handbook of Automation*. Springer, 2009.
- [3] J. Dávila, L. Fridman, and A. Levant. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 11, pages 1785–1789, November 2005.
- [4] Drive and C. T. for Wind Turbines. <http://www.youtube.com/watch?v=W7ZHB9VS2b8/>.
- [5] Ecp. *Manual Model 210 - Rectilinear Plant*.
- [6] R. für die Holzindustrie. <http://www.youtube.com/watch?v=bqLlBq-vFQ/>.
- [7] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [8] K.Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall, México, 2003.
- [9] J. Komsta. Control of modern electro-hydraulic drives -theory and industrial practice. *Advanced Engineering Bosch Rexroth, Lohr am Main, Germany*, 2010.
- [10] J. Komsta, J. Adamy, and P. Antoszkiewicz. Input-output linearization and integral sliding mode disturbance compensation for electro-hydraulic drives. *2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pages 446–451, June 2010.
- [11] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica vol. 34*, pages 379–384, 1998.
- [12] J. A. Moreno and M. Osorio. A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2856–2861, December 2008.
- [13] M. Pérez, J. Rocamora, J. Berná, and J. Chica. Control por linealización exacta entrada salida de un manipulador plano subactuado. *XXIV Jornadas de Automática*, pages 1–10, Septiembre 2003.

- 
- [14] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Brégeault, and A. Poznyak. New methodologies for adaptive sliding mode control. *International Journal of Control*, pages 1907–1919, July 2010.
- [15] Rexroth. <http://www.boschrexroth.com/>.
- [16] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhauser Boston.
- [17] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis, London, 1999.
- [18] V. Utkin and L. Hoon. Chattering problem in sliding mode control systems. *VSS06 International Workshop on Variable Structure Systems*, pages 346–350, June 2006.