UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

NAVEGANDO POR EL HIPERESPACIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

PALOMA HERNÁNDEZ ZAPATA

DIRECTOR DE TESIS: DOCTOR HÉCTOR MÉNDEZ LANGO

MÉXICO, D.F. ABRIL, 2011

Navegando por el hiperespacio

Paloma Hernández Zapata

28 de abril de 2011

Índice general

Prefacio

Los sistemas dinámicos estudian lo que sucede con los elementos de un espacio métrico, por lo general compacto, X bajo sucesivas aplicaciones de una función continua $f\colon X \to X$. Una de las direcciones que ha tomado el estudio de sistemas dinámicos discretos en los últimos años, consiste en construir, a partir de (X, f), un nuevo sistema dinámico, considerando subconjuntos de X, y sus sucesivas imágenes bajo la función f.

Podría decirse coloquialmente que el estudio de lo que sucede con los puntos de un espacio X, bajo sucesivas aplicaciones de la función f, es estudiar la *dinámica individual* y, en cambio, estudiar lo que sucede con las sucesivas imágenes bajo f de subconjuntos de X es estudiar la *dinámica colectiva*. El interés principal al considerar estas dos dinámicas es encontrar las relaciones entre ambas. Es decir, cuándo la presencia de una propiedad dinámica en la función f implica la presencia de la misma (u otra) propiedad dinámica en la nueva función y viceversa.

La búsqueda de conjuntos invariantes, es decir, conjuntos tales que $f(A) = A$, es importante cuando se estudia la dinámica de una función. Estos conjuntos, desde el punto de vista de la dinámica colectiva resultan ser los puntos fijos de la nueva función.

El estudio de las relaciones entre ambas dinámicas no tiene mucho de haberse iniciado. Es aceptado que el primer trabajo que abordó este tema de manera explícita fue el artículo *Topological Dynamics of Transformations Induced on the Space of Probability Measures*, escrito por W. Bauer y K. Sigmund en el año de 1975, ver [6]. A este evento siguió un *silencio* de un poco más de 27 años. Es sólo hasta los primeros años del nuevo siglo en los que el tema es retomado. Del año 2003 al presente se han publicado un poco más de 20 artículos al respecto en distintas revistas.

A los espacios formados por los subconjuntos de un espacio métrico X se les llama hiperespacios de X. Dado un espacio métrico compacto X, se suelen estudiar varios de sus hiperespacios. Por ejemplo el espacio de todos los subconjuntos compactos, conexos y no vacíos de X; el espacio formado por todos los subconjuntos no vacíos de cardinalidad menor o igual que cierto número entero positivo n, etc.

En esta tesis nuestro interés es estudiar lo que sucede en el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X. A este hiperespacio se le denota 2^X. En 2^X se definen la métrica de Hausdorff H y la topología de Vietoris. Ambas son compatibles.

A la función definida en el hiperespacio 2^X que consiste en tomar un subconjunto compacto de X y obtener su imagen bajo la función f se le llama la función inducida por f en el hiperespacio. Esta función se denota $2^f\colon 2^X \to 2^X$.

Dado un elemento x del espacio X, al conjunto $\{x, f(x), f(f(x)), \ldots\}$ se le conoce como la órbita de x bajo f.

La propiedad dinámica que más nos interesan en este trabajo, es la transitividad topológica. Una función f es topológicamente transitiva, si dada cualquier pareja de conjuntos abiertos y no vacíos U y V, existe un punto en U que bajo alguna iteración de la función f cae en V. Lo que nos interesa son las condiciones que tenemos que pedir a una función f para garantizar que la función inducida 2^f es topológicamente transitiva. Es un teorema conocido que esto se cumple si la función f es débilmente mezclante. Esto es, que dadas cualesquiera dos parejas de conjuntos abiertos no vacíos (U_1, U_2) y (V_1, V_2) hay un punto en U_1 y un punto en U_2 que bajo la misma iteración de f caen en V_1 y en V_2 respectivamente.

A primera vista puede parecer que estas dos propiedades son equivalentes, pero por ejemplo, si tenemos el espacio S^1 y α un número irracional, entonces r_α definida como la rotación de S^1 en un ángulo α, resulta ser topológicamente transitiva pero no débilmente mezclante.

Se sabe que si una función f es topológicamente transitiva, en un espacio X sin puntos aislados, existe $x \in X$ tal que su órbita bajo f es un conjunto denso en X. Si sabemos entonces que la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es topológicamente transitiva, tenemos que existe $A \in 2^X$, es decir un subconjunto compacto de X, que bajo sucesivas aplicaciones de la función 2^f se acerca tanto como queramos a todos los subconjuntos compactos de X.

Las características de este conjunto A han sido poco estudiadas. En esencia lo único que se sabe es que para toda $n \geq 0$ se tiene que $int(f^n(A)) = \emptyset$ y que la cardinalidad de $f^n(A)$ no es finita.

El objetivo central de este trabajo es encontrar explicitamente un subconjunto compacto de X cuya órbita bajo 2^f sea densa en 2^X.

En el Capítulo 1, se dan los elementos básicos para plantear el problema de la relación entre dinámica individual y dinámica colectiva de manera más formal.

En el Capítulo 2 se estudian las relaciones entre las propiedades dinámicas de una función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ y las propiedades dinámicas de la función inducida en el hiperespacio $2^{[0,1]}$.

En el Capítulo 3 se estudian las condiciones que es necesario pedir a la función original para garantizar que la función inducida tiene transitividad topológica. Como dijimos esto se cumple si la función f es débilmente mezclante. Al final del capitulo se estudian también otras propiedades dinámicas de la función 2^f y sus relaciones con el hecho de que la función f sea débilmente mezclante.

En el Capítulo 4, Enunciamos y demostramos los siguientes resultados

Por un lado, utilizando el espacio generado por dos símbolos, Σ_2, y la función corrimiento, $\sigma\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$, construimos explícitamente un conjunto compacto $A \subseteq \Sigma_2$ que tiene órbita densa bajo 2^σ. Hacemos esta construcción de tal manera que A tiene un solo punto de acumulación. Es decir, A resulta ser una sucesión convergente.

Teorema 4.1.2 *Existen un espacio X, una función $f\colon X \to X$, y un* *conjunto* $A \in 2^X$ *de la forma* $A = \{\overline{a_n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\overline{a_0}\}$*,con* $lim_{n\to\infty}\overline{a_n} = \overline{a_0}$*. tales que* $o(A, 2^f)$ *es un conjunto denso en* 2^X*.*

Este Teorema, muestra que conjuntos compactos muy sencillos pueden, aplicando iteraciones de σ, pasar cerca de todo subconjunto compacto de Σ_2.

Por otro lado en el Teorema 4.1.4 se generaliza lo hecho en el Teorema 4.1.2. Demostramos que si X no tiene puntos aislados y $2^f : 2^X \to 2^X$ es topológicamente transitiva entonces existe una sucesión convergente $A \in 2^X$ tal que su órbita bajo 2^f es un conjunto denso en el hiperespacio 2^X.

Teorema 4.1.4 *Sea* $f : X \to X$ *tal que* $2^f : 2^X \to 2^X$ *es transitiva. Entonces existe* $\mathcal{A} \in 2^X$ *de la forma* $\mathcal{A} = \{a_0\} \cup \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, donde* $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$*, tal que su órbita bajo* 2^f *es un conjunto denso en* 2^X*.*

Una de las funciones más estudiadas en sistemas dinámicos, la función tienda $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es débilmente mezclante. Esto implica que la función inducida por la tienda, a la que llamamos hipertienda, $2^T : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$, es topológicamente transitiva. El Teorema 4.1.4 nos dice que existe en el intervalo $[0, 1]$ una sucesión convergente $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que junto con su punto límite, $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{a_0\}$, forma un conjunto compacto cuya órbita bajo 2^T es de lo más interesante. Resulta que para todo $E \in 2^{[0,1]}$ y para toda $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$H(E, (2^T)^n(A)) < \varepsilon.$$

Esta propiedad de ninguna manera es evidente cuando uno inicia el estudio de la función T.

Supongamos que tenemos un conjunto $A \in 2^X$ con órbita densa bajo la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$. Mencionamos ya que la cardinalidad de A no puede ser finita. Como A es un conjunto compacto, entonces tiene al menos un punto de acumulación. Tomando como criterio la cantidad de puntos de acumulación, el Teorema 4.1.4 nos dice que si 2^f es transitiva, entonces existe en X un conjunto compacto muy sencillo (un solo punto de acumulación) tal que su órbita bajo 2^f es un conjunto denso en 2^X.

Capítulo 1

Definiciones básicas

Estudiaremos cómo se relaciona lo que sucede a los elementos de un espacio métrico X bajo sucesivas aplicaciones de una función $f\colon X \to X$, con lo que sucede a subconjuntos de X al tomar sus sucesivas imágenes bajo la función f. Para plantear el problema más formalmente necesitamos las definiciones que revisamos en este capítulo.

1.1. Funciones caóticas

Un *sistema dinámico* consta de un espacio métrico compacto X y una función continua f, definida del espacio X en sí mismo.

Dado $x \in X$, se define la *órbita de x bajo f*, como la sucesión

$$o(x, f) = \{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots\}.$$

Abreviaremos la notación llamando f^n a la composición de f consigo misma n veces y escribiremos la órbita de x bajo f como sigue

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}.$$

Cuando se analiza un sistema dinámico (X, f), lo que interesa estudiar es el desarrollo de las órbitas de todos los elementos del espacio X bajo la función f.

En adelante X será un espacio métrico, compacto y no vacío. Consideraremos además que X es no degenerado, es decir que X tiene más de un punto. Representaremos por d la métrica en X. Y la función $f\colon X \to X$ será siempre una función continua en X. La letra $\mathbb{N}$ representará al conjunto de los números naturales, es decir, de los enteros positivos.

Con $Int_X(A)$ representaremos el interior del conjunto A en X, y con $Cl_X(A)$ representaremos la cerradura de A en X. Si no hay ambigüedad acerca del espacio en el que estamos trabajando, $Int_X(A) = Int(A)$ y $Cl_X(A) = Cl(A) = \overline{A}$.

Dados un elemento $x \in X$ y un número positivo ε, denotaremos por $\mathcal{B}_X(\varepsilon, x)$ a la bola en el espacio métrico X, con centro en x y radio ε,

$$\mathcal{B}_X(\varepsilon, x) = \{y \in X|\ d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Según su comportamiento, las órbitas se clasifican dependiendo de si son o no sucesiones convergentes, de si constan sólo de un número finito de elementos diferentes del espacio X, de si tienen un número finito de puntos límite, etc.

Se dice que un punto p es un *punto periódico* de la función f, si su órbita después de pasar por un cierto número de elementos de X regresa al valor original, es decir si existe un número entero positivo N, tal que $f^N(p) = p$. En este caso, al menor numero entero positivo N para el cual $f^N(p) = p$ se le llama el periodo de p. Los puntos fijos de la función f son, desde este punto de vista, los puntos periódicos de periodo 1. El conjunto formado por todos los puntos periódicos de f se denota $Per(f)$.

Dados p y x en X, decimos que x es un *punto límite* de la órbita de p si existe una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ de números naturales tales que $f^{n_i}(p)$ tiende a x cuando i tiende a infinito. Todos los puntos límite de la órbita de p forman el *omega conjunto límite*. Lo denotamos $\omega(p, f)$.

Los puntos periódicos de f juegan un papel importante para el estudio del sistema dinámico (X, f) debido a la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1. *Si la órbita de un punto $x \in X$ bajo la función $f\colon X \to X$ es una sucesión que converge a $x_0 \in X$, entonces x_0 es un punto fijo de f.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$. Como f es una función continua y $\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x) = x_0$, entonces

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0,$$

por lo que x_0 es punto fijo de f. $\square$

En vista de la proposición anterior si la órbita bajo la función f^N, de un punto x_0 converge, lo hace a un punto fijo de la función f^N. Es decir a un punto $p \in X$ tal que $f^N(p) = p$. En otras palabras, la órbita de p bajo f, $o(p,f) = \{p, f(p), \ldots, f^{N-1}(p)\}$ es el conjunto de puntos límite de la órbita de x_0, $o(p,f) = \omega(x_0,f)$. En este caso decimos que el punto x_0 es *asintóticamente periódico.*

Existen funciones, con reglas de correspondencia muy sencillas, para las cuales las órbitas tienen un comportamiento extremadamente complicado. Es decir, hay órbitas periódicas de una infinidad de periodos diferentes, hay también órbitas que forman un conjunto denso en el espacio X, algunas órbitas convergen, otras son asintóticamente periódicas, etc.

La variedad de comportamientos de las órbitas puede ser tan grande que el problema de estudiar dicho sistema dinámico, en el sentido de caracterizar el comportamiento de las órbitas de todos los puntos del espacio bajo la función, se convierte en un problema muy difícil.

En 1985 R. Devaney (ver [8]) propuso una forma de caracterizar a las funciones que tienen el comportamiento complicado de que hablamos, conocidas como *funciones caóticas.* Cabe mencionar que ésta no es la única definición de función caótica, aunque sí, quizá, la más popular. Antes de escribir la definición propuesta por Devaney, necesitamos las siguientes dos definiciones:

Definición 1.1.2. *Se dice que una función $f\colon X \to X$ tiene* ***sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales****, si existe un número δ mayor que cero, tal que para todo $x \in X$ y para todo conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$, existen z en U y un número entero positivo n tales que la distancia* *entre $f^n(x)$ y $f^n(z)$ es mayor o igual que δ. Al número δ se le suele llamar una* ***constante de sensibilidad****.*

Definición 1.1.3. *Se dice que una función $f\colon X \to X$ tiene* ***transitividad topológica****, o bien que es* ***topológicamente transitiva****, si para todo par de conjuntos abiertos U y V de X, distintos del vacío, existe un número entero positivo n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Contando con las definiciones anteriores, estamos listos para escribir la definición de función caótica.

Definición 1.1.4. *Una función $f\colon X \to X$ se dice que es* ***caótica*** *en X si:*

1) *el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X; y*

2) *f es topológicamente transitiva.*

Originalmente la definición propuesta por R. Devaney pedía, además de las dos condiciones anteriores, que la función f tuviera sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. En este trabajo utilizaremos la definición anterior debido a la siguiente observación.

Observación 1.1.5. *En 1990 se demostró (ver [3]), que las tres condiciones propuestas por Devaney no son independientes. Si el espacio X no tiene puntos aislados, es suficiente pedir que la función $f\colon X \to X$ tenga un conjunto de puntos periódicos denso en X, y que sea topológicamente transitiva, para garantizar que tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales, es decir, que es caótica según la definición de R. Devaney.*

En vista de lo anterior es natural preguntarse si es posible elegir algún otro par de las condiciones propuestas en la definición original de Devaney y demostrar a partir de ellas la tercera condición. La respuesta es negativa, hay ejemplos de sistemas dinámicos que tienen densidad de puntos periódicos y sensibilidad pero no transitividad topológica. Y hay también ejemplos que tienen transitividad topológica y sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales, pero no un conjunto denso de puntos periódicos, ver [13, Ejemplos 2.3.2 y 2.3.3] y [3].

En relación a la presencia de transitividad topológica, en el libro de L.S. Block y W. A. Coppel (ver [7, Proposición 39]), se puede encontrar el siguiente resultado que cobrará gran importancia en el Capítulo 4.

Observación 1.1.6. *Sea X un espacio métrico compacto sin puntos aislados. Entonces $f\colon X \to X$ es topológicamente transitiva si y sólo si existe un elemento x_0 de X cuya órbita $o(x_0, f)$ es un conjunto denso en X.*

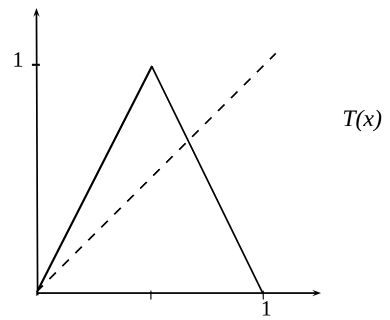
1.2. La función tienda

A continuación veremos una función caótica según la definición de R. Devaney. Se llama función *tienda* y es famosa por ser un ejemplo de una función muy sencilla, cuya dinámica es caótica.

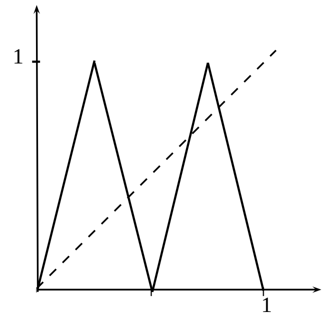
Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la función definida por

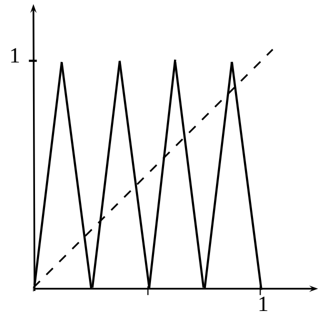
$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La siguiente es la gráfica de la función tienda.



Y las siguientes dos gráficas, son las de las funciones T^2 y T^3 respectivamente.





No es difícil imaginar cómo son las gráficas de las iteraciones T^n para $n > 3$. El siguiente lema (ver [2, Lema 9]), nos permitirá demostrar propiedades interesantes de la función tienda.

Lema 1.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ se tiene que:*

$$T^n|_{\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right] \to [0, 1] \tag{1.1}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Demostraremos el resultado utilizando inducción matemática.

Veamos que la afirmación es cierta para $n = 1$. En este caso, $\ell \in \{0, 1\}$.

Es inmediato que $T \colon \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ es homeomorfismo, ya que en este intervalo $T(x) = 2x$. De manera análoga, es inmediato que $T \colon \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [0, 1]$ es homeomorfismo ya que en este conjunto, $T(x) = 2 - 2x$.

Supogamos válida la afirmación para $n = k$, y demostremos el caso $n = k + 1$.

Sea $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$. Observemos que $\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ si $\ell \leq 2^k - 1$, y $\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ si $\ell \geq 2^k$.

Si $\ell \leq 2^k - 1$, entonces la función T^{k+1} se puede expresar así:

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell+1}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1].$$

Ambas funciones son homeomorfismos (la segunda de ellas, T^k, por hipótesis de inducción). Por lo tanto

$$T^{k+1}\big|_{\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right]} : \left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \to [0,1]$$

es un homeomorfismo.

Si $\ell \geq 2^k$, entonces

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1} - \ell - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - \ell}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1].$$

Es inmediato que la primera función es un homeomorfismo. Y como

$$2^k \leq \ell \leq 2^{k+1} - 1,$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} -2^k & \geq & -\ell \geq 1 - 2^{k+1}, \\ 2^{k+1} - 2^k - 1 & \geq & 2^{k+1} - \ell - 1 \geq 0, \\ 2^k - 1 & \geq & 2^{k+1} - \ell - 1 \geq 0. \end{array}$$

Así la segunda función, por hipótesis de inducción, también es un homeomorfismo.

$\square$

Definición 1.2.2. *Una función $f\colon X \to X$ se dice que es* ***exacta*** *si para todo conjunto abierto no vacío A de X, existe un entero positivo n tal que $f^n(A) = X$.*

Observación 1.2.3. *Si $f\colon X \to X$ es exacta entonces es suprayectiva.*

Demostración. Sea $y \in X$. Como X es un conjunto abierto en X, existe un natural n tal que $f^n(X) = X$. Esto implica que existe $x \in X$ tal que $f^n(x) = y$. Entonces $f(f^{n-1}(x)) = y$. Por lo que f es suprayectiva.

$\square$

El siguiente resultado es un corolario del Lema 1.2.1.

Proposición 1.2.4. *La función $T\colon [0,1] \to [0,1]$ es exacta.*

Demostración. Sea A un conjunto abierto no vacío, $A \subseteq [0,1]$. Entonces existe un intervalo abierto $(a,b) \subseteq A$. Como $a < b$, existe un entero positivo N tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Por lo que existe un valor ℓ en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ tal que $\left[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}\right] \subset (a,b)$. Ahora, por el Lema 1.2.1, tenemos que $T^N(a,b) = [0,1]$. Por lo que T es exacta.

$\square$

Y como corolarios de esta última propiedad, tenemos que la función $T\colon [0,1] \to [0,1]$ tiene un conjunto de puntos periódicos denso en $[0,1]$, y que es topológicamente transitiva. Es decir que es caótica. Así la siguiente proposición estÃ¡ demostrada.

Proposición 1.2.5. *La función $T\colon [0,1] \to [0,1]$ es caótica.*

Observación 1.2.6. *Si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es exacta, entonces $Per(f)$ es denso en $[0,1]$.*

Demostración. Dado $(a,b) \subseteq [0,1]$, $a < b$, Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N((a,b)) = [0,1]$. Por tanto existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f^N(x_0) = x_0$. $\square$

1.3. Hiperespacios

Dado un espacio métrico compacto X, sus hiperespacios son familias de subconjuntos de X. Es decir, subconjuntos del conjunto potencia de X.

Dado un subconjunto $A \neq \emptyset$ de X. La nube de radio ε con centro en A se define como la unión de todas las bolas de radio ε con centro en cada uno de los elementos de A, es decir,

$$\mathcal{N}(\varepsilon, A) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}_X(\varepsilon, x).$$

Dados dos subconjuntos A y B de X, es decir entre dos elementos del hiperespacio, consideramos el ínfimo de los valores de ε que necesitamos para que la nube de radio ε con centro en A contenga a B y para que, al mismo tiempo, la nube de radio ε con centro en B contenga a A,

$$H(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 |\ A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)\}.$$

Notemos que si $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$ entonces $H(A, B) = d(a, b)$.

Observemos que la función H así definida no es una métrica para el conjunto potencia de X pues, por ejemplo, si X es el intervalo $[0, 1]$ y $A = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, entonces la distancia entre A y el interior de A, sería cero, aun cuando $A \neq Int(A)$.

No es difícil demostrar (ver [15, Proposición 2.1]), que H resulta ser una métrica para el conjunto

$$2^X = \{A \subseteq X |\ A \text{ es un cerrado no vacío}\}.$$

La métrica H es conocida como la *métrica de Hausdorff*. Con la métrica de Hausdorff el conjunto 2^X es un espacio métrico compacto (ver [15, Teorema 4.2]).

A lo largo de la tesis haremos uso del siguiente resultado.

Lema 1.3.1. *Sean* $A, B \in 2^X$, *entonces* $H(A,B) < \varepsilon$ *si y sólo si,*

$$A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B) \;\; y \;\; B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$$

Demostración. Supongamos primero que $H(A,B) < \varepsilon$, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $H(A,B) < \varepsilon_0 < \varepsilon$ y tal que $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon_0, B) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon_0, A) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$.

Supongamos que $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$. Para cada elemento $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$. y existe $\delta_a > 0$ tal que $d(a,b) < \delta_a < \varepsilon$.

Como $a \in \mathcal{N}(\delta_a, B)$, la familia $\{\mathcal{N}(\delta_a, B) \;\; | \;\; a \in A\}$ es una cubierta de A. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n$ tales que $\{\mathcal{N}(\delta_{a_1}, B), \ldots, \mathcal{N}(\delta_{a_n}, B)\}$ es una cubierta de A. Sea $\delta_B = máx\{\delta_{a_i}\} < \varepsilon$. Entonces $A \subseteq \mathcal{N}(\delta_B, B)$.

De manera análoga podemos encontrar $\delta_A < \varepsilon$ tal que $B \subseteq \mathcal{N}(\delta_A, A)$.

Sea $\delta = máx\{\delta_A, \delta_B\} < \varepsilon$. Como $A \subseteq \mathcal{N}(\delta_B, B) \subseteq \mathcal{N}(\delta, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\delta_A, A) \subseteq \mathcal{N}(\delta, A)$. Esto implica que $H(A,B) \leq \delta < \varepsilon$.

□

Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ una familia finita de conjuntos no vacíos en X. Definimos $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ como el conjunto de todos los conjuntos cerrados no vacíos de X, contenidos en la unión de los conjuntos U_i y que intersectan a cada uno de ellos, es decir,

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \{A \in 2^X |\; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

La familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \;\; | \;\; n \in \mathbb{N} \text{ y los conjuntos } U_i \text{ son abiertos de } X\}$$

es una base para una topología del hiperespacio 2^X conocida como la *topología de Vietoris* ver [14, Teorema 1.2]. A los elementos básicos de esta topología se les conoce como *vietóricos*.

Sea $\widehat{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ un vietórico. A los conjuntos U_i, $1 \leq i \leq n$, los llamaremos las *entradas* de $\widehat{U}$.

Observación 1.3.2. *Dados dos conjuntos abiertos básicos,* $\widehat{U}$ *y* $\widehat{V}$ *podemos escribirlos de manera que ambos tengan el mismo número de entradas.*

En efecto, el conjunto $\langle U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n\rangle$ es igual que el conjunto $\langle U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n, \ldots, U_n\rangle$, donde la entrada U_n se repite un número finito de veces.

Probaremos que la topología de Vietoris coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Esto implica, que los vietóricos son una base para la topología inducida por la métrica de Hausdorff.

Proposición 1.3.3. *La topología de Vietoris es equivalente a la topología inducida por la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto no vacío en 2^X con la topología inducida por la métrica de Haussdorff. Demostraremos primero que U es un conjunto abierto con la topología de Vietoris.

Sea $A \in U$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $V = \mathcal{B}_{2^X}(\varepsilon, A) \subseteq U$.

Basta encontrar un conjunto abierto básico de la topología de Vietoris, $\widehat{U}$, tal que $A \in \widehat{U}$ y $\widehat{U} \subseteq V$.

La colección $\{\mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a) | a \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Como A es un conjunto compacto, existen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elementos de A tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_i).$$

Como además $\mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_i) \cap A \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, tenemos que:

$$A \in \langle \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_1), \ldots, \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_k)\rangle.$$

Demostraremos que $\widehat{U} = \langle \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_1), \ldots, \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_k)\rangle$ es el conjunto abierto básico que buscamos, es decir, que está contenido en V.

Sea $C \in \langle \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_1), \ldots, \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_k)\rangle$.

Queremos demostrar que $H(C, A) < \varepsilon$.

Sabemos que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_i) \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A)$.

Por otro lado $C \cap \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ tomemos $c_i \in C \cap \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_i)$. Entonces la distancia entre c_i y a_i cumple, $d(c_i, a_i) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Para cualquier elemento $a \in A$, ya que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_i)$, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $d(a, a_j) < \frac{\varepsilon}{4}$, lo que implica que

$$d(a, c_j) < d(a, a_j) + d(a_j, c_j) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto $A \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, C)$. Lo que implica que $H(A, C) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Por lo tanto $C \in \mathcal{B}_{2^X}(\varepsilon, A)$.

Es decir $\langle \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_1), \ldots, \mathcal{B}_X(\frac{\varepsilon}{4}, a_k) \rangle \subseteq V$.

Tomemos ahora $\widehat{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ un conjunto abierto básico no vacío de la topología de Vietoris. Demostraremos que es un conjunto abierto con la topología inducida por la métrica de Hausdorff.

Sea $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Esto implica por un lado que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Como A y $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ son dos conjuntos compactos ajenos, existen un elemento $a \in A$ y un elemento $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ tales que la distancia $d(a, x) = m$ es mínima.

Por otro lado, tenemos que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tomemos para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ un elemento $a_i \in A \cap U_i$. Ya que U_i es un conjunto abierto, existe un número positivo δ_i tal que $\mathcal{B}_X(\delta_i, a_i) \subseteq U_i$.

Sea $\delta = min\{\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{\frac{m}{2}\}\}$. Demostraremos que $\mathcal{B}_{2^X}(\delta, A) \subseteq \widehat{U}$.

Sea $B \in \mathcal{B}_{2^X}(\delta, A)$. Entonces $B \subseteq \mathcal{N}(\delta, A)$ y ya que $\delta \leq \frac{m}{2}$ tenemos que si $y \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ entonces $d(y, a) \geq m > \frac{m}{2}$ para todo $a \in A$, lo que implica que $y \in X \setminus N(\delta, A)$ Por lo tanto

$$\mathcal{N}(\delta, A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Por lo que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Por otro lado tenemos que $A \subseteq \mathcal{N}(\delta, B)$ entonces para $a_i \in U_i$ existe $b_i \in B$ tal que $d(a_i, b_i) < \delta \leq \delta_i$, lo que implica que $b_i \in \mathcal{B}_X(\delta_i, a_i) \subseteq U_i$. Con lo que tenemos que $B \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por lo que $\mathcal{B}_{2^X}(\delta, A) \subseteq \widehat{U}$.

Con lo que tenemos demostrada la proposición. □

Demostraremos además, el siguiente resultado que nos será muy útil en el Capítulo 4.

Lema 1.3.4. *Sea $\varepsilon > 0$ y Sean $U_1, \ldots, U_n$ conjuntos abiertos básicos no vacíos, tales que $diam(U_i) < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces para cualquier par de conjuntos $A, B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.*

$$H(A, B) < \varepsilon.$$

Esto implica además que $diam(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle) \leq \varepsilon$.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $U_1, \ldots, U_2$ conjuntos abiertos básicos no vacíos con $diam(U_i) < \varepsilon$. Sean $A, B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.

Como $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ tenemos que $A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \cup \cdots \cup (A \cap U_n)$.

Ya que $B \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ podemos tomar $b_i \in B$ tales que $b_i \in U_i$. Entonces $(A \cap U_i) \subseteq U_i \subseteq \mathcal{B}(\varepsilon, b_i)$ lo que implica que $A \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\varepsilon, b_i) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$.

Analogamente $B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ y por lo tanto $H(A, B) < \varepsilon$.

□

Observación 1.3.5. *Si cada U_i es cerrado y $diam(U_i) < \varepsilon$, entonces con argumentos análogos a los de la demostración anterior se tiene que*

$$diam(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle) < \varepsilon.$$

En algunos casos pediremos que el conjunto X sea conexo, además de ser un espacio métrico compacto y no degenerado. Es decir, pediremos que sea un *continuo* no degenerado. En ese caso puede probarse (ver [15, Teorema 6.10 y Corolarios 6.11 y 6.12]), que el hiperespacio 2^X es también un continuo no degenerado.

Otros hiperespacios muy estudiados son los siguientes:

$C(X) = \{A \in 2^X |\ A \text{ es conexo}\}$.

$C_n(X) = \{A \in 2^X |\ A \text{ está formado por a lo más } n \text{ componentes}\}$.

$F_n(X) = \{A \in 2^X |\ A \text{ consta de a lo más } n \text{ elementos}\}$.

Probaremos, ya que nos será muy útil más adelante, el siguiente resultado.

Proposición 1.3.6. *El espacio $F(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i(X)$ de los subconjuntos finitos de X es un conjunto denso en 2^X.*

Demostración. Sea $\widehat{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ un conjunto abierto básico no vacío cualquiera en 2^X. Si tomamos un punto $x_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un elemento de $\widehat{U}$. Lo que demuestra que $F(X)$ es denso en 2^X.

□

1.4. Funciones inducidas

A partir de una función continua $f\colon X \to X$ se puede definir de manera natural una función $2^f\colon 2^X \to 2^X$ asociando a cada $A \in 2^X$ su imagen bajo la función f. Es decir, $2^f(A) = f(A)$.

Como la función f es continua, la función 2^f así definida está bien definida, pues la imagen bajo f de un elemento en 2^X es nuevamente un elemento en 2^X.

Probaremos que entonces que la función 2^f, a la que llamaremos la *función inducida*, resulta ser también una función continua.

Proposición 1.4.1. *La función inducida* $2^f\colon 2^X \to 2^X$ *es continua.*

Demostración. Sea $\widehat{V} = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ un conjunto abierto básico y no vacío en 2^X. Queremos demostrar que $(2^f)^{-1}(V) = \langle f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_m) \rangle$.

Si $A \in (2^f)^{-1}(\widehat{V})$, entonces $2^f(A) \in \widehat{V}$. Es decir $2^f(A) = f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$. Lo que implica que

$$A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^m V_i\right) = \bigcup_{i=1}^m f^{-1}(V_i).$$

Como además $2^f(A) \cap V_i = f(A) \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que $A \cap f^{-1}(V_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo que $A \in \langle f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_m) \rangle$.

Por tanto

$$(2^f)^{-1}(\widehat{V}) \subseteq \langle f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_m) \rangle.$$

Ahora si $A \in \langle f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_m) \rangle$ implica que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^m f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^m V_i\right).$$

Entonces

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i.$$

Además como $A \cap f^{-1}(V_i) \neq \emptyset$ implica que $f(A) \cap V_i \neq \emptyset$, tenemos que $f(A) \in \widehat{V}$, lo que implica que $A \in f^{-1}(\widehat{V})$

Como f es continua $f^{-1}(V_i)$ es un abierto en X para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$, lo que implica que $(2^f)^{-1}(\widehat{V})$ es un abierto en 2^X. Y por lo tanto la función inducida 2^f es continua.

□

En vista de las definiciones anteriores la temática en la que está inmerso este trabajo, puede describirse como el estudio de las relaciones entre las propiedades de la función $f\colon X \to X$ y las propiedades de la función inducida por f, $2^f\colon 2^X \to 2^X$ en el hiperespacio 2^X.

Capítulo 2

Dinámica colectiva en el intervalo

Como dijimos en el capítulo anterior, estudiaremos ahora las relaciones entre la dinámica de una función continua $f\colon X \to X$, y la dinámica de la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$.

Consideraremos principalmente las propiedades involucradas en la definición de función caótica propuesta por R. Devaney (ver Definición 1.1.4).

Una primera observación, que resulta muy natural, es la siguiente:

Observación 2.0.2. *Si la función $f\colon X \to X$ tiene puntos periódicos de todos los periodos, entonces la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ tiene puntos periódicos de todos los periodos.*

En efecto, ya que la función $g\colon X \to 2^X$ definida por $g(x) = \{x\}$ es una isometría, entonces el hiperespacio $F_1(X)$ que consta de los subconjuntos de X con cardinalidad exactamente 1, es un subespacio de 2^X y la dinámica de la función 2^f restringida a $F_1(X)$ es la misma que la de la función f, por lo que se sigue la observación.

En este capítulo demostraremos que si tenemos una función $f\colon [0,1] \to [0,1]$, y sabemos que la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ satisface alguna de las propiedades dinámicas de la definición de R. Devaney, entonces la función f satisface esa misma propiedad. Esto no sucede para funciones definidas en otros espacios métricos, en particular veremos en el Capítulo 3 que la densidad de puntos periódicos en el sistema $(2^X, 2^f)$ no siempre se hereda al sistema dinámico (X, f).

Lo anterior nos motiva a tratar en este capítulo el caso en que el conjunto X es el intervalo $[0,1]$, para en capítulos posteriores, analizar posibles generalizaciones de los resultados estudiados aquí.

2.1. La función hipertienda

Para iniciar el análisis partiremos del ejemplo ya conocido de la función tienda que presentamos en el capítulo anterior.

Conocemos ya algunas de las propiedades dinámicas de T, queremos ver qué propiedades dinámicas satisface la función inducida por T, en el hiperespacio $2^{[0,1]}$ a la que llamaremos la *hipertienda*, $2^T\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$. Demostraremos que la función 2^T satisface las siguientes propiedades:

Proposición 2.1.1. *El conjunto $Per(2^T)$ es denso en $2^{[0,1]}$.*

Proposición 2.1.2. *La función $2^T\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es topológicamente transitiva.*

Y con esto el siguiente teorema:

Teorema 2.1.3. *La función hipertienda, $2^T\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$, es caótica según la definición de Devaney.*

Ya que las demostraciones de los siguientes resultados más generales son análogas, en lugar de demostrar las proposiciones 2.1.1 y 2.1.2 demostraremos los dos siguientes teoremas.

Teorema 2.1.4. *Si el conjunto de puntos periódicos de $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es denso en $[0,1]$, entonces el conjunto de puntos periódicos de $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es denso en $2^{[0,1]}$.*

Demostración. Consideremos $\widehat{U}$ un conjunto abierto básico no vacío de $2^{[0,1]}$. Como sabemos $\widehat{U}$ puede escribirse de la siguiente manera: $\widehat{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle$, donde cada U_i es un conjunto abierto no vacío de $[0, 1]$.

Encontraremos un punto periódico de la función 2^f en el conjunto $\widehat{U}$. Como la función f tiene densidad de puntos periódicos, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $p_i \in U_i$ un punto periódico bajo f de periodo n_i, esto es $f^{n_i}(p_i) = p_i$.

Consideremos N el mínimo común múltiplo de $\{n_i |\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$. Entonces $f^N(p_i) = p_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

El conjunto $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ es un elemento de $\langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle$ y es un punto periódico que tiene periodo N bajo la función 2^f, es decir, $(2^f)^N(A) = A$.

Por lo tanto los puntos periódicos de la función 2^f forman un conjunto denso en $2^{[0,1]}$.

$\square$

Teorema 2.1.5. *Si la función $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ es exacta, entonces la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es topológicamente transitiva.*

Demostración. Sean $\widehat{U}$ y $\widehat{V}$ dos conjuntos abiertos básicos no vacíos en $2^{[0,1]}$.

Por la Observación 1.3.2 podemos escribirlos de manera que ambos tengan el mismo número de entradas $\widehat{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle$ y $\widehat{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_k \rangle$.

Como cada U_i es un conjunto abierto de $[0, 1]$ y la función f es exacta, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ existe un entero positivo N_i tal que $f^{N_i}(U_i) = [0, 1]$.

Consideremos N el máximo de $\{N_i |\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$. Entonces $f^N(U_i) = [0, 1]$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, pues f es suprayectiva.

Lo anterior implica que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $q_i \in U_i$ tal que $f^N(q_i) \in V_i$.

Entonces el conjunto $A = \{q_i, ..., q_k\}$ es un elemento de $\langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle$, tal que bajo $(2^f)^N$ cae en $\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle$. Es decir,

$$(2^f)^N(\{q_1, \ldots, q_k\}) = \{f^N(q_1), \ldots, f^N(q_k)\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle.$$

Por lo tanto $(2^f)^N(\widehat{U}) \cap \widehat{V} \neq \emptyset$ y, así, 2^f es topológicamente transitiva.

$\square$

Dado que $T\colon [0,1] \to [0,1]$ es exacta, entonces $2^T\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es transitiva.

Como $2^{[0,1]}$ es un continuo no degenerado, no tiene puntos aislados. Por la Observación 1.1.5 los dos teoremas anteriores implican que $2^T\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ también tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. Sin embargo, ya que nuestra búsqueda es estudiar las propiedades dinámicas de la función inducida, a partir de las de la función f, a continuación demostramos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. *Si la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es exacta, entonces la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.*

Demostración. Sean $C \in 2^{[0,1]}$ y $\widehat{U} = \langle U_1, \ldots, U_k\rangle$ un conjunto abierto básico en $2^{[0,1]}$ tal que $C \in \widehat{U}$. Encontraremos F en $\widehat{U}$ y un número natural N tales que

$$H((2^f)^N(C), (2^f)^N(F)) \geq \frac{1}{2}.$$

Como cada U_i es un conjunto abierto de $[0,1]$ y la función f es exacta, para cada $i \in \{1, ..., k\}$ existe un número entero positivo N_i tal que $f^{N_i}(U_i) = [0,1]$.

Sea N el máximo de $\{N_i |\ i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Entonces $f^N(U_i) = [0,1]$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Entonces para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existen dos puntos p_i y q_i en U_i tales que

$$f^N(p_i) = 0 \text{ y } f^N(q_i) = 1.$$

De aquí tenemos que $\{p_1, \ldots, p_k\} \in \widehat{U}$ y $\{q_1, \ldots, q_k\} \in \widehat{U}$. Además

$$H(f^N(\{p_1, \dots, p_k\}), f^N(\{q_1, \dots, q_k\})) = 1.$$

Lo que implica que se cumple al menos una de las dos siguientes desigualdades

$$H(f^N(\{p_1, \dots, p_k\}), f^N(C)) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{o} \quad H(f^N(\{q_1, ..., q_k\}), f^N(C)) \geq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto 2^f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = \frac{1}{2}$.

□

Con lo que queda demostrado el teorema 2.1.3. Y con la Observación 1.3.5 tenemos el siguiente resultado más general.

Teorema 2.1.7. *Si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es exacta, entonces la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es caótica.*

2.2. Dinámica en el intervalo

En vista del Teorema 2.1.3 es natural preguntarnos si será cierto que siempre que la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es caótica en $[0,1]$, la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ resulta ser también caótica en $2^{[0,1]}$.

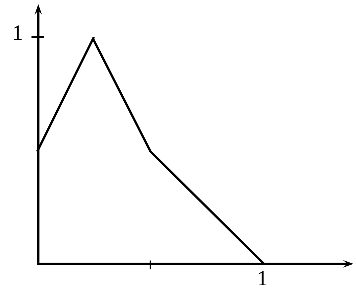
También resulta interesante estudiar cada propiedad dinámica por separado. Es decir, preguntarnos si siempre que la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ satisface alguna de las propiedades de la definición de caos propuesta por Devaney, la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ la satisface también.

A continuación veremos qué podemos decir sobre estas preguntas. El siguiente resultado muestra que no es suficiente pedir que la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ sea topológicamente transitiva para garantizar que la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ lo sea también.

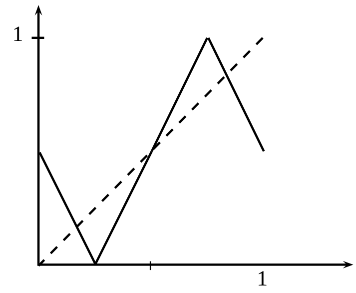
Ejemplo 2.2.1. *Considermos $f\colon [0,1] \to [0,1]$ la función lineal a pedazos definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & si\ x \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \frac{3}{2} - 2x, & si\ x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ 1 - x, & si\ x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La gráfica de esta función es la siguiente:



Y la siguiente es la gráfica de la función f^2.



Demostraremos primero que la función f es topológicamente transitiva en $[0,1]$. Para ello observemos que:

1. $f^2([0,\frac{1}{2}]) = [0,\frac{1}{2}]$ y $f^2([\frac{1}{2},1]) = [\frac{1}{2},1]$.

2. Para cada conjunto abierto no vacío $U \subseteq [\frac{1}{2},1]$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{2N}(U) = [\frac{1}{2},1]$.

Ahora, sean U y V dos conjuntos abiertos no vacíos en $[0,1]$. Supongamos primero que $U \cap [\frac{1}{2},1] \neq \emptyset$. Entonces, hay un conjunto abierto $(a,b) \subseteq U \cap [\frac{1}{2},1]$, $a < b$, y por la Observación 2, para (a,b), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{2N}(U) \supseteq f^{2N}((a,b)) = \left[\frac{1}{2},1\right].$$

Además
$$f^{2N+1}(U) = f(f^{2N}(U)) \supseteq f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Por lo tanto sucede que $f^{2N}(U) \cap V \neq \emptyset$, o bien que $f^{2N+1}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Si, por el contrario, $U \cap [\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$ entonces $U \subseteq [0, \frac{1}{2}]$, lo que implica que $f(U)$ es un conjunto abierto, no vacío, contenido en $[\frac{1}{2}, 1]$. Y siguiendo el mismo razonamiento que antes, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{2N}(f(U)) \cap V \neq \emptyset$, o bien $f^{2N+1}(f(U)) \cap V \neq \emptyset$. Lo que también implica que $f^{2N+1}(U) \cap V \neq \emptyset$, o bien que $f^{2N+2}(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto f es topológicamente transitiva.

Sin embargo, como demostraremos a continuación, la función inducida $2^f : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ no es topológicamente transitiva.

Los conjuntos $U_1 = [0, \frac{1}{2})$ y $U_2 = (\frac{1}{2}, 1]$ son abiertos en $[0, 1]$. Entonces los conjuntos $\langle U_1 \rangle$ y $\langle U_1, U_2 \rangle$ son abiertos en $2^{[0,1]}$.

Veremos que ningún elemento de $\langle U_1 \rangle$ cae bajo alguna iteración en $\langle U_1, U_2 \rangle$.

Sea $A \in \langle U_1 \rangle$, esto implica que $A \subseteq U_1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(2^f)^n(A) = f^n(A) \subseteq [0, \frac{1}{2}]$ si n es par, y entonces $(2^f)^n(A) \cap U_2 = \emptyset$. O bien $(2^f)^n(A) = f^n(A) \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$ si n es impar, y entonces $(2^f)^n(A) \cap U_1 = \emptyset$. Por lo que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(2^f)^n(A) \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Esto implica que 2^f no es topológicamente transitiva.

Del ejemplo anterior podemos concluir que el hecho de que $f: [0, 1] \to [0, 1]$ sea topológicamente transitiva, no implica que la función inducida $2^f : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ lo sea

Todavía más en [19, página 353] se demuestra que si una función $f: [0, 1] \to [0, 1]$, es transitiva automáticamente es caótica por lo que la función del ejemplo anterior es caótica. Esto muestra que el siguiente resultado es válido.

Teorema 2.2.2. *El hecho de que $f: [0, 1] \to [0, 1]$ sea caótica, no implica que la función inducida $2^f : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ sea topológicamente transitiva.*

Por otro lado, sin embargo, en el Teorema 2.1.5, pudimos demostrar que la función 2^f es topológicamente transitiva siempre y cuando la función f sea exacta. La función del ejemplo anterior no lo es.

Otro resultado que demostramos con base en la hipótesis de que la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es exacta, es que la función $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.

En [16, Teorema 3.10] se demuestra que la sola presencia de sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales para el sistema dinámico $([0,1], f)$, implica la presencia de sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales para el sistema dinámico inducido $(2^{[0,1]}, 2^f)$. No incluiremos la demostración de dicho resultado en este trabajo ya nos desviaría mucho de nuestro objetivo.

Es importante mencionar sin embargo que, en general, la sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales de una función $f\colon X \to X$ no implica la sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales de la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$. En [16, Proposiciones 2.1 y 2.2] y en [18, Ejemplo 2.11] se pueden encontrar ejemplos que lo muestran.

2.3. Implicaciones de la dinámica colectiva sobre la dinámica individual

En esta sección analizaremos las consecuencias que tienen sobre la dinámica de la función original, las propiedades dinámicas de la función inducida.

Teorema 2.3.1. *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Si la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ tiene un conjunto de puntos periódicos denso en $2^{[0,1]}$, entonces el conjunto de puntos periódicos de f, es denso en $[0,1]$.*

Demostración. Sean $x_0 \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$. El conjunto $\mathcal{B}_\varepsilon(x_0) \cap [0,1]$ es abierto y no vacío en $[0,1]$, por lo que el conjunto $\langle \mathcal{B}_\varepsilon(x_0) \cap [0,1] \rangle$ es abierto en $2^{[0,1]}$.

Como 2^f tiene un conjunto de puntos periódicos denso en $2^{[0,1]}$, en el conjunto $\langle \mathcal{B}_\varepsilon(x_0) \cap [0,1] \rangle$ hay un punto periódico de la función 2^f. Es decir, existen $A \in \langle \mathcal{B}_\varepsilon(x_0) \cap [0,1] \rangle$ y un número entero positivo N tales que $(2^f)^N(A) = A$. Esto es, tales que $f^N(A) = A$.

Como A es un conjunto compacto y

$$A \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(x_0) \cap [0,1] = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [0,1],$$

existen $\alpha = \text{mínA}$ y $\beta = \text{máx}A$. Y como $f^N(A) = A$, entonces $f^N(\alpha) \geq \alpha$ y $f^N(\beta) \leq \beta$. Lo que implica, por el Teorema del Valor Intermedio, que existe $c \in [\alpha, \beta] \subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [0,1]$ tal que $f^N(c) = c$.

Por lo tanto la función f tiene un conjunto de puntos periódicos denso en $[0,1]$.

□

Notemos que, como señalamos al inicio de este capítulo, la demostración anterior depende fuertemente del hecho de que la función f está definida en el intervalo, pues utilizamos el teorema del valor intermedio.

Teorema 2.3.2. *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Si la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es topológicamente transitiva, entonces la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ también lo es.*

Demostración. Sean U y V dos conjuntos abiertos no vacíos en $[0,1]$. Queremos demostrar que existen un número entero positivo N y un elemento $x \in U$ tales que $f^N(x) \in V$.

Los conjuntos $\langle U \rangle$ y $\langle V \rangle$ son abiertos básicos de $2^{[0,1]}$. Como 2^f es topológicamente transitiva, existen $A \in \langle U \rangle$ y un número entero positivo N tales que $(2^f)^N(A) \in \langle V \rangle$. Esto es, la imagen de A bajo la función f^N está contenida en V. Por lo que para cualquier x en A, $A \subseteq U$, $f^N(x)$ está en V. Por lo tanto la función f es topológicamente transitiva.

□

Teorema 2.3.3. *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Si la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es sensible con respecto a las condiciones iniciales, entonces la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ también lo es.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ una constante de sensibilidad de 2^f. Sean $a \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos el conjunto $\{a\}$ que es un elemento de $2^{[0,1]}$. Como

2^f es sensible con respecto a las condiciones iniciales, existen un elemento $B \in \mathcal{B}^H_\varepsilon(\{a\})$ y un número entero positivo N tales que

$$H((2^f)^N(B), (2^f)^N(\{a\})) \geq \delta.$$

De aquí tenemos que existen $y \in (2^f)^N(B) = f^N(B)$ y $z \in (2^f)^N(\{a\}) = \{f^N(a)\}$ tales que $d(y, z) \geq \delta$. Así, por un lado, $z = f^N(a)$ y, por otro, existe $x \in B \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(a)$ tal que $f^N(x) = y$. Es decir $d(f^N(x), f^N(a)) \geq \delta$.

Por lo tanto la función f es sensible con respecto a las condiciones iniciales con la misma constante de sensibilidad δ.

$\square$

Teorema 2.3.4. *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Si la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es caótica, entonces la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ también lo es.*

2.4. Comentarios

Como puede verse, cuando tenemos una función $f\colon [0,1] \to [0,1]$, aunque no siempre las propiedades del sistema dinámico $([0,1], f)$ se heredan al sistema dinámico inducido $(2^{[0,1]}, 2^f)$. Las propiedades dinámicas del sistema $(2^{[0,1]}, 2^f)$ sí implican las mismas propiedades dinámicas en el sistema $([0,1], f)$.

En los siguientes capítulos, abordaremos las posibles generalizaciones de estos resultados a otros espacios métricos compactos. En particular veremos que la densidad de puntos periódicos en el sistema $(2^X, 2^f)$ no siempre se hereda al sistema dinámico (X, f).

Los resultados contenidos en este capítulo son conocidos, el lector puede encontrar demostraciones de ellos en [2, páginas 59-67]. Aquí presentamos demostraciones ligeramente diferentes.

En relación al ejemplo que usamos para demostrar el Teorema 2.2.2, daremos a continuación un ejemplo de un sistema dinámico más sencillo definido en S^1, con transitividad topológica y que induce un sistema dinámico que carece de esta propiedad.

Ejemplo 2.4.1. *Sean S^1 la circunferencia unitaria contenida en $\mathbb{R}^2$, α un ángulo irracional y $r_\alpha : S^1 \to S^1$, la rotación de S^1 en un ángulo α.*

El sistema dinámico (S^1, r_α) tiene transitividad topológica ver [8, Teorema 3.13]. Sin embargo, como veremos a continuación el sistema inducido $(2^{S^1}, 2^{r_\alpha})$ no tiene esta propiedad.

Demostración. Consideremos en S^1 la métrica inducida por la métrica usual en $\mathbb{R}^2$. Tomemos $A = \{(0,1)\}$. Observemos que para todo $B \in \langle \mathcal{B}(\sqrt{2}, A) \rangle$ se tiene que $B \subseteq S^1 \cap \{(x,y) \ \mid \ x \geq 0\} = C$. Como r_α es una isometría, se tiene que para todo $B \in \langle \mathcal{B}(\sqrt{2}, A) \rangle$,

$$H((2^f)^n(B), S^1) \geq H((2^f)^n(C), S^1) = H(C, S^1) = \sqrt{2}.$$

Por lo tanto, para todo $B \in \langle \mathcal{B}(\sqrt{2}, A) \rangle$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $(2^f)^n(B) \nsubseteq \mathcal{B}(\sqrt{2}, S^1)$. Es decir, $(2^f)^n(B) \notin \langle \mathcal{B}(\sqrt{2}, S^1) \rangle$.

Por lo tanto 2^σ no es topológicamente transitiva.

$\square$

Capítulo 3

Transitividad topológica

En este capítulo y el siguiente, trataremos de dar un panorama de las relaciones entre las propiedades dinámicas de una función $f\colon X \to X$ y las propiedades dinámicas de la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ desde un punto de vista más general. Es decir, consideraremos X, un espacio métrico compacto y no degenerado cualquiera.

Concentraremos nuestra atención en la transitividad topológica, ya que será muy importante para los resultados que discutiremos en el Capítulo 4. Presentaremos sin embargo al final del capítulo algunos resultados relacionados con la sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales y la densidad de puntos periódicos.

3.1. Funciones exactas

En el capítulo anterior, mostramos ejemplos de funciones que tienen transitividad topológica y tales que la función inducida no tiene esta propiedad. Nuestro objetivo ahora consiste en encontrar qué propiedades debemos pedir a la función $f\colon X \to X$ para garantizar que la función inducida es topológicamente transitiva.

Observemos que la demostración que hicimos para el Teorema 2.1.5, puede generalizarse para demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.1.1. *Si la función $f\colon X \to X$ es exacta, entonces la función* *inducida* $2^f\colon 2^X \to 2^X$ *es topológicamente transitiva.*

Pero a continuación demostraremos un resultado más fuerte, probaremos que si $f\colon X \to X$ es exacta, entonces $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es también exacta. De hecho demostraremos que es equivalente que la función f sea exacta en X a que la función inducida 2^f sea exacta en 2^X.

Teorema 3.1.2. *La función* $f\colon X \to X$ *es exacta si y solamente si la función inducida* $2^f\colon 2^X \to 2^X$ *es exacta.*

Demostración. Supongamos primero que f es exacta y demostraremos que 2^f es también exacta.

Sea $U = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ un conjunto abierto básico no vacío en 2^X. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideremos un conjunto abierto, no vacío, $V_i \subseteq U_i$ tal que $\overline{V}_i \subseteq U_i$.

Como f es exacta, para cada i, existe un número entero positivo N_i tal que $f^{N_i}(V_i) = X$.

Sea N el máximo de $\{N_1, \ldots, N_n\}$. Entonces $f^N(V_i) = X$ para toda i, pues f es suprayectiva.

Sean $A \in 2^X$ e $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $A \subseteq X = f^N(V_i)$, entonces $B_i = f^{-N}(A) \cap \overline{V_i}$ es un conjunto cerrado, no vacío, tal que $f^N(B_i) = A$.

Sea $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$. Entonces B es un conjunto cerrado, no vacío, que es elemento de $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ y tal que $f^N(B) = A$. Por lo tanto $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es exacta.

Supongamos ahora que 2^f es exacta y demostraremos que f es también una función exacta.

Sea U un subconjunto abierto de X. Entonces $\langle U\rangle$ es un subconjunto abierto de 2^X. Como 2^f es exacta, existe un número entero positivo N tal que $(2^f)^N(\langle U\rangle) = 2^X$. Ya que $X \in 2^X$, esto implica que existe $A \in \langle U\rangle$ tal que $(2^f)^N(A) = X$. Tenemos entonces que $A \subseteq U$ y que $f^N(A) = X$. Por lo tanto, $f^N(U) = X$. Luego f es exacta.

□

Si pedimos entonces que $f\colon X \to X$ sea exacta, garantizamos no sólo que $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es topológicamente transitiva, sino que además es una función exacta. El hecho de que existen funciones topológicamente transitivas que no son exactas, como lo mencionamos para la función del Ejemplo 2.2.2, hace pensar que no es necesario pedir tanto, y que quizá pueda encontrarse una propiedad más débil para f que garantice la transitividad topológica de la función $2^f\colon 2^X \to 2^X$. Buscaremos entonces tal propiedad.

3.2. Funciones débilmente mezclantes

La transitividad topológica no obliga a que las órbitas de los puntos de X se mezclen, por ejemplo, una rotación irracional de la circunferencia unitaria, es topológicamente transitiva y las órbitas no se mezclan bajo esta función, ya que dados dos elementos distintos en S^1, al aplicar la rotación, sus posiciones relativas siguen siendo las mismas no importando cuantas veces la apliquemos.

Veremos ahora una propiedad que sí hace que las órbitas se mezclen.

Definición 3.2.1. *Sea $f : X \to X$ una función en X. Decimos que f es **débilmente mezclante** si dadas dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, existe un número entero positivo n tal que simultáneamente $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.*

De las definiciones correspondientes se desprende la relación dada por el siguiente esquema:

$$f \text{ exacta } \Rightarrow f \text{ débilmente mezclante } \Rightarrow f \text{ transitiva} .$$

El ejemplo usado para demostrar el Teorema 2.2.2 muestra que hay funciones transitivas que no son débilmente mezclantes. Además en [17, Ejemplo 2.1.25] se muestra que el hecho de que f sea exacta, no implica que sea débilmente mezclante. De manera que las implicaciones recíprocas no son válidas.

Demostraremos ahora que pedir que la función $f\colon X \to X$ sea débilmente mezclante, garantiza que la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es topológicamente transitiva. Más aun, demostraremos que esta propiedad es lo menos que podemos pedirle a la función f para que 2^f sea topológicamente transitiva. Para hacerlo necesitamos algunos resultados previos.

El siguiente resultado es conocido como Teorema de Furstenberg.

Teorema 3.2.2. *Sean $f\colon X \to X$ una función débilmente mezclante, k un número entero mayor o igual que 2, y $(U_1, \ldots, U_k)$, $(V_1, \ldots, V_k)$ dos colecciones de conjuntos abiertos no vacíos en X. Entonces existe un entero positivo n tal que $f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

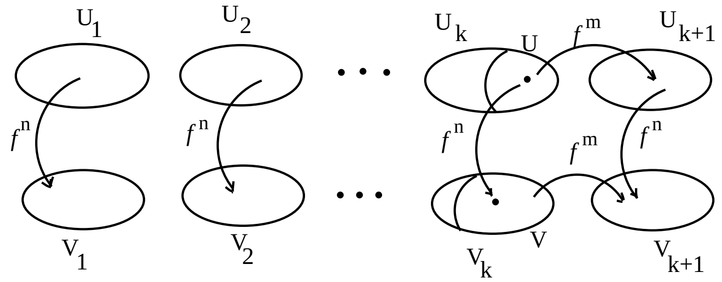
Demostración. Sea $f\colon X \to X$ una función débilmente mezclante.

Sean $(U_1, \ldots, U_k)$ y $(V_1, \ldots, V_k)$ dos colecciones de conjuntos abiertos, no vacíos en X. Procederemos por inducción sobre k.

Si $k = 2$, la definición de que f es débilmente mezclante, nos garantiza que se cumple el resultado.

Supondremos el resultado para k y lo demostraremos para $k + 1$.

Sean $(U_1, \ldots, U_{k+1})$ y $(V_1, \ldots, V_{k+1})$ dos colecciones de conjuntos abiertos, no vacíos en X. Ya que la función f es débilmente mezclante, existe un número entero positivo m tal que $f^m(U_k) \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ y $f^m(V_k) \cap V_{k+1} \neq \emptyset$.



Entonces los conjuntos

$$U = U_k \cap (f^m)^{-1}(U_{k+1}) \quad \text{y} \quad V = V_k \cap (f^m)^{-1}(V_{k+1})$$

son abiertos y no vacíos. Por lo que $(U_1, \ldots, U_{k-1}, U)$ y $(V_1, \ldots, V_{k-1}, V)$ son dos colecciones de conjuntos abiertos y no vacíos con k elementos cada una. Aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que existe un número entero positivo n tal que $f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ y además $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Como $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, entonces $f^n(U_k) \cap V_k \neq \emptyset$.

Consideremos ahora un elemento $x \in U$, tal que $f^n(x) \in V$. Por la construcción de los conjuntos U y V, sabemos que $f^m(f^n(x)) \in V_{k+1}$ y que $f^m(x) \in U_{k+1}$. Como además

$$f^n(f^m(x)) = f^m(f^n(x)) \in V_{k+1},$$

tenemos que $f^m(x)$ es un elemento de U_{k+1} que bajo la función f^n cae en V_{k+1}. De manera que $f^n(U_{k+1}) \cap V_{k+1} \neq \emptyset$, y así se tiene el resultado deseado. □

Lema 3.2.3. *Una función $f\colon X \to X$ es débilmente mezclante si y sólo si, para cualesquiera tres conjuntos abiertos no vacíos U, V y W de X, existe un número entero positivo n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^n(U) \cap W \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante.

Sean U, V y W tres subconjuntos abiertos no vacíos de X. Consideremos las parejas (U, U) y (V, W). Entonces existe un número entero positivo n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^n(U) \cap W \neq \emptyset$.

Veamos ahora la afirmación recíproca.

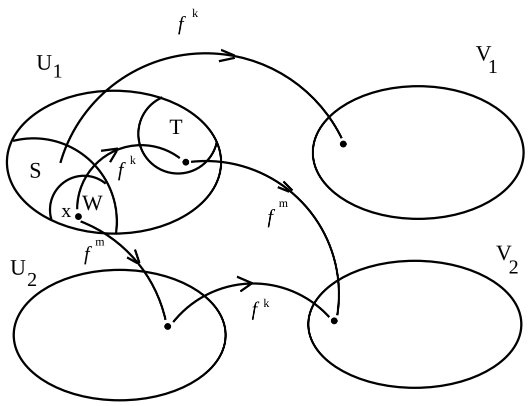
Consideremos (U_1, U_2) y (V_1, V_2) dos parejas de conjuntos abiertos y no vacíos de X. Para U_1, U_2 y V_2 por hipótesis, tenemos que existe un entero positivo m tal que

$$f^m(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^m(U_1) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Sean $S = U_1 \cap f^{-m}(U_2)$ y $T = U_1 \cap f^{-m}(V_2)$. Como ambos conjuntos son abiertos no vacíos, aplicando nuevamente la hipótesis a S, T y V_1 tenemos que existe un número positivo k tal que

$$f^k(S) \cap T \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^k(S) \cap V_1 \neq \emptyset.$$

Como $S \subseteq U_1$ tenemos que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$.



Por otro lado el conjunto $W = S \cap f^{-k}(T)$ es un abierto no vacío.

Sea $x \in W$. Entonces como $W \subseteq S \subseteq f^{-m}(U_2)$ tenemos que $f^m(x) \in U_2$. Además como $x \in W \subseteq f^{-k}(T)$, entonces $f^k(x) \in T$. Pero $T \subseteq f^{-m}(V_2)$ lo que implica que $f^m(f^k(x)) = f^k(f^m(x)) \in V_2$ por lo que tenemos que $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Por lo tanto f es débilmente mezclante.

□

Teorema 3.2.4. *Sea $f\colon X \to X$. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:*
a) f es débilmente mezclante.
b) 2^f es débilmente mezclante.
c) 2^f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante. Queremos demostrar que 2^f es también débilmente mezclante.

Sean $(\widehat{U}_1, \widehat{U}_2)$ y $(\widehat{V}_1, \widehat{V}_2)$ dos parejas de conjuntos abiertos básicos no vacíos en 2^X. Por la Observación 1.3.2 podemos escribirlos de manera que todos tengan el mismo número de entradas.

$$\widehat{U}_1 = \langle U_1^1, \ldots, U_k^1 \rangle, \qquad \widehat{U}_2 = \langle U_1^2, \ldots, U_k^2 \rangle,$$

$$\widehat{V}_1 = \langle V_1^1, \ldots, V_k^1 \rangle \quad \text{y} \quad \widehat{V}_2 = \langle V_1^2, \ldots, V_k^2 \rangle.$$

Queremos demostrar que existe un número entero positivo N tal que

$$(2^f)^N(\widehat{U}_1) \cap \widehat{V}_1 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad (2^f)^N(\widehat{U}_2) \cap \widehat{V}_2 \neq \emptyset.$$

Consideremos las colecciones de conjuntos abiertos

$$(U_1^1, \ldots, U_k^1, U_1^2, \ldots, U_k^2) \text{ y } (V_1^1, \ldots, V_k^1, V_1^2, \ldots, V_k^2).$$

Como f es débilmente mezclante, por el teorema de Furstenberg, existe un número entero positivo N tal que $f^N(U_i^j) \cap V_i^j \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ y para todo $j \in \{1, 2\}$. Para cada i y j, sean $q_i^j \in U_i^j \cap (f^N)^{-1}(V_i^j)$. Entonces $\{q_1^1, \ldots, q_k^1\}$ es un elemento de $\widehat{U}_1$ que bajo $(2^f)^N$ cae en $\widehat{V}_1$ y $\{q_1^2, \ldots, q_k^2\}$ es un elemento de $\widehat{U}_2$ tal que bajo $(2^f)^N$ cae en $\widehat{V}_2$. Lo que implica que 2^f es débilmente mezclante.

La afirmación b) implica c) es inmediata. Como 2^f es débilmente mezclante, automáticamente 2^f es topológicamente transitiva.

Falta demostrar que c) implica a), es decir, que 2^f transitiva implica que f es débilmente mezclante.

Sean U, V y W, tres conjuntos abiertos no vacíos de X. Por el Lema 3.2.3, basta demostrar que existe un número entero positivo N tal que

$$f^N(U) \cap V \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^N(U) \cap W \neq \emptyset.$$

Los conjuntos $\langle U \rangle$ y $\langle V, W \rangle$ son abiertos no vacíos en 2^X. Como 2^f es transitiva, existe un número entero positivo N tal que

$$(2^f)^N(\langle U \rangle) \cap \langle V, W \rangle \neq \emptyset.$$

Sea $B \in \langle U \rangle \cap ((2^f)^N)^{-1}(\langle V, W \rangle)$. Entonces B es un conjunto que está contenido en U tal que $f^N(B) \cap V \neq \emptyset$ y $f^N(B) \cap W \neq \emptyset$. Lo que implica que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f^N(U) \cap W \neq \emptyset$. Así f es débilmente mezclante.

□

3.3. Mezclado débil y sensibilidad

También en el capítulo anterior probamos que si una función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es exacta, entonces la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ (Teorema 2.1.6), tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. Con argumentos similares podríamos probar el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Si la función $f\colon X \to X$ es exacta, entonces la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.*

La sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales de 2^f es una propiedad que también está relacionada con que la función f sea débilmente mezclante. En lugar del resultado anterior, probaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.2. *Si $f\colon X \to X$ es una función débilmente mezclante, entonces la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.*

Para demostrarlo, probaremos primero que si $f\colon X \to X$ es débilmente mezclante, entonces también es sensible con respecto a las condiciones iniciales.

Teorema 3.3.3. *Si $f\colon X \to X$ es débilmente mezclante, entonces f es sensible con respecto a las condiciones iniciales.*

Demostración. Sea $f\colon X \to X$ una función débilmente mezclante. Sea $\delta = diam(X)$. Veremos que $\frac{\delta}{4}$ es una constante de sensibilidad. Tomemos $x \in X$ y un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$. Como X es compacto, existen a y b elementos de X, tales que $d(a,b) = \delta$. Sean $V = \mathcal{B}(\frac{\delta}{8}, a)$ y $W = \mathcal{B}(\frac{\delta}{8}, b)$.

Como f es débilmente mezclante, aplicando el Lema 3.2.3 a los conjuntos abiertos y no vacíos U, V y W, tenemos que existe un número entero positivo N tal que

$$f^N(U) \cap V \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^N(U) \cap W \neq \emptyset.$$

Sean $y \in U \cap (f^N)^{-1}(V)$ y $z \in U \cap (f^N)^{-1}(W)$. Tenemos que $f^N(y) \in V$

y $f^N(z) \in W$. Además

$$\delta = d(a,b) \leq d(a, f^N(y)) + d(f^N(y), f^N(z)) + d(f^N(z), b).$$

Lo que implica que

$$d(f^N(y), f^N(z)) \geq \delta - d(a, f^N(y)) - d(f^N(z), b) > \delta - \frac{\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3}{4}\delta.$$

Por lo tanto $d(f^N(y), f^N(z)) > \frac{\delta}{2}$.

Y como $d(f^N(y), f^N(z)) \leq d(f^N(y), f^N(x)) + d(f^N(x), f^N(z))$, tenemos que $d(f^N(x), f^N(y)) > \frac{\delta}{4}$ o bien $d(f^N(x), f^N(z) > \frac{\delta}{4}$. Por lo que f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales y $\frac{\delta}{4}$ es, en efecto, una constante de sensibilidad.

$\square$

Ahora, si tenemos que la función $f\colon X \to X$ es débilmente mezclante, por el Teorema 3.2.4 sabemos que la función $2^f\colon 2^X \to 2^X$ lo es también. Lo que implica, por el resultado anterior, que 2^f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. Con lo que queda demostrado el Teorema 3.3.2.

3.4. Comentarios

Observemos que del Teorema 3.2.4 podemos decir que, aún cuando existen funciones transitivas que no son débilmente mezclantes, esto no puede pasar si se trata de una función inducida en el hiperespacio 2^X. Es decir, toda función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ que es transitiva es, simultáneamente, débilmente mezclante.

En el capítulo anterior probamos que si una función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es tal que el conjunto $Per(f)$ es denso en $[0,1]$, entonces el conjunto de puntos periódicos de la función inducida $Per(2^f)$ es denso en $2^{[0,1]}$. Siguiendo paso a paso la demostración de este resultado podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.4.1. *Si el conjunto de puntos periódicos de $f\colon X \to X$ es denso en X, entonces el conjunto de puntos periódicos de $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es denso en 2^X.*

Con lo que hasta ahora hemos visto, si la función f es débilmente mezclante, la función inducida 2^f es topológicamente transitiva, de hecho débilmente mezclante. De modo que tomando en cuenta el resultado anterior tenemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 3.4.2. *Si $f\colon X \to X$ es débilmente mezclante y tiene además un conjunto de puntos periódicos denso en X, entonces la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es caótica según la definición de Devaney.*

En el capítulo anterior también mostramos que si tenemos una función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ y sabemos que la función inducida $2^f\colon 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ tiene transitividad topológica, podemos concluir que la función f tiene también esta propiedad (Teorema 2.3.2). Y que si sabemos que 2^f tiene sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales entonces f también es también sensible con respecto a las condiciones iniciales (Teorema 2.3.3). Como puede observarse, las demostraciones que hicimos para esos dos teoremas no dependen de que la función f esté definida en el intervalo y, de hecho, con los mismos argumentos podemos demostrar los siguientes resultados.

Teorema 3.4.3. *Sea $f\colon X \to X$ una función. Si la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es topológicamente transitiva, entonces la función $f\colon X \to X$ también lo es.*

Teorema 3.4.4. *Sea $f\colon X \to X$. Si la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es sensible con respecto a las condiciones iniciales, entonces la función $f\colon X \to X$ también lo es.*

A diferencia de las dos demostraciones mencionadas, la del Teorema 2.3.1 depende fuertemente de que la función f esté definida en un intervalo, pues se basa en el Teorema del Valor Intemedio, por lo que no puede generalizarse a funciones definidas en otros espacios métricos compactos. De hecho, daremos a continuación un ejemplo de una función $f\colon X \to X$ que induce una función con un conjunto de puntos periódicos denso en el hiperespacio 2^X, pero que ella mismas no tiene puntos periódicos.

Este hecho no deja de ser sorprendente, pues dado un elemento de X, digamos x_0, en cualquier vecindad de él hay un conjunto cerrado que regresa a sí mismo bajo alguna iteración de 2^f. Con esto todos los elementos de dicho conjunto regresan a la vecindad. Sin embargo eso no es suficiente para garantizar que hay un punto que regresa en sí mismo.

Ejemplo 3.4.5. *Sea S^1 la circunferencia unitaria, $S^1 = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = 1\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n\colon S^1 \to S^1$ la función definida por $f_n(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + \frac{2\pi}{n})}$. Es decir cada función f_n es una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$. Observemos que entonces cada elemento $t \in S^1$ tiene periodo n bajo f_n.*

Sea $X = \prod_{n=1}^{\infty} S^1$. Es decir

$$X = \{\overline{t} = (t_1, t_2, \ldots)|t_n \in S^1, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definimos una métrica $\overline{d}$ en X de la siguiente manera:

$$\overline{d}(\overline{t}, \overline{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(t_n, s_n)}{2^n}$$

donde d es la métrica usual en S^1. Sea $f\colon X \to X$ la función definida por:

$$f(\overline{t}) = f(t_1, t_2, \ldots) = (f_1(t_1), f_2(t_2), \ldots).$$

Puede demostrarse que X es un compacto y que la función f es una función continua. Demostraremos primero que la función $f\colon X \to X$ así definida no tiene puntos periódicos.

Demostración. Supongamos que existe un punto $\overline{t} \in X$ y un número $N \in \mathbb{N}$ tales que $f^N(\overline{t}) = \overline{t}$. Esto implica que $f_n^N(t_n) = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $f_n^n(t_n) = t_n$ y, si $n \geq 2$, $f_n^j(t_n) \neq t_n$ para $1 \leq j < n$. Por lo que n divide a N para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto f no tiene puntos periódicos.

□

Demostraremos ahora que a pesar de que la función f no tiene puntos periódicos, la función inducida 2^f tiene un conjunto de puntos periódicos denso en 2^X.

Demostración. Empezaremos por demostrar que si $A \in 2^X$ es un conjunto de cardinalidad 1, entonces existe un conjunto $B \in 2^X$, cercano a A, que es periódico bajo 2^f.

Sean $\overline{t} = (t_1, t_2, \dots) \in X$, $A = \{\overline{t}\}$ y ε un número positivo. Tomemos $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea N el mínimo común múltiplo de $\{1, 2, 3, \dots, M\}$. Recordemos que t_i es un punto periódico de periodo i bajo f_i. Así si $1 \leq i \leq M$, tenemos que $f_i^N(t_i) = t_i$.

Entonces para cualquier $j \in \mathbb{N}$ las primeras M coordenadas de $\overline{t}$ y de $f^{jN}(\overline{t})$ coinciden lo que implica que

$$\overline{d}(\overline{t}, f^{jN}(\overline{t})) \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dado lo anterior si consideramos los elementos de la órbita de $\overline{t}$ bajo f^N, $o(\overline{t}, f^N)$, estaremos siempre dentro de la bola $\mathcal{B}(\frac{\varepsilon}{2}, \overline{t})$. De esta manera el conjunto $B = \omega(\overline{t}, f^N)$ está dentro de la cerradura de esa bola y por lo tanto en la bola $\mathcal{B}(\varepsilon, \overline{t})$.

Sabemos que B es invariante bajo f^N y es cerrado, ver [7, Lema 4.2], por lo que cumple las condiciones que necesitamos. Es decir,

$$B \in 2^X,\ (2^f)^N(B) = B \text{ y } H(B, \{\overline{t}\}) < \varepsilon.$$

Tomemos ahora A, un elemento cualquiera de 2^X, y un número positivo ε. Como A es un conjunto compacto, existe un conjunto finito $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_l}\}$ contenido en A, tal que:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{B}_{2^X}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \overline{a_i}\right).$$

Aplicando lo que hicimos en la primera parte de esta demostración para cada conjunto $\{\overline{a_i}\}$ encontramos un conjunto cerrado B_i y un número natural N_i tales que $B_i \in \mathcal{B}_{2^X}(\frac{\varepsilon}{2}, \{\overline{a_i}\})$ y $f^{N_i}(B_i) = B_i$.

Sea N el mínimo común múltiplo de $\{N_1, \ldots, N_l\}$. Entonces el conjunto $B = \bigcup_{i=1}^{l} B_i$ cumple lo siguiente: $H(B, \{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_l}\}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Y como

$$H(\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_l}\}, A) < \frac{\varepsilon}{2},$$

tenemos que

$$H(B, A) < \varepsilon.$$

Además B es un punto periódico de periodo N bajo 2^f.

Por lo tanto el conjunto $Per(2^f)$ es denso en 2^X.

□

Los resultados contenidos en este capítulo son ya conocidos y el lector puede encontrar sus demostraciones en los siguiente artículos: Una demostración del Teorema 3.1.2 puede consultarse en [10, Lema 5]. El Teorema 3.2.2 puede consultarse en [11, Lema 1.3] y el Lema 3.2.3 en [4, Lema 5]. Demostraciones del Teorema 3.2.4 pueden encontrarse en [5, Teorema 2], en [11, Corolario 2.1] y en [1, Teorema 3.2]. El ejemplo 3.4.5 puede encontrarse en [2, páginas 66-67].

Capítulo 4

Un conjunto muy maleable

En este capítulo supondremos que la función $f\colon X \to X$ es débilmente mezclante. Como ya vimos esto implica que la función $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es también débilmente mezclante y por lo tanto transitiva. Consideraremos también que X es un espacio métrico compacto sin puntos aislados. Lo que implica que 2^X no tiene puntos aislados.

4.1. Un ejemplo en Σ_2

El hecho de que la función inducida sea transitiva en un espacio métrico compacto sin puntos aislados, llama nuestra atención pues esto implica que existe un conjunto $A \in 2^X$ que tiene órbita densa bajo 2^f, (Observación 1.1.6). Es decir hay un subconjunto compacto de X cuya imagen bajo iteraciones de f pasa tan cerca como queramos de cualquier otro subconjunto compacto de X.

No deja de sorprender el hecho de que exista un conjunto tan maleable, es decir, que pueda parecerse mucho a conjuntos tan diferentes unos de otros como pueden ser todos los subconjuntos compactos de X.

Nos surge entonces la pregunta, ¿cómo es tal compacto A?, ¿qué características debería tener para poder aproximarse a todos los subconjuntos compactos de X?

Es inmediato que A no puede ser finito y que las órbitas de todos los elementos de A deben acercarse bajo iteraciones de f a todos los elementos de X, es decir las órbitas de los elementos de A deben ser densas en X. Además en [1, Teorema 4.7] se demuestra que A tiene interior vacío. Aquí presentamos una demsotración un poco diferente.

Teorema 4.1.1. *Si $A \in 2^X$ es tal que $\omega(A, 2^f) = 2^X$, entonces $Int_X(A) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $A \in 2^X$ tal que $\omega(A, 2^f) = 2^X$.

Supongamos que $Int_X(A) \neq \emptyset$. Sean $x \in Int_X(A)$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_X(\varepsilon, x) \subseteq A$.

Ya que $\{x\} \in \omega(A, 2^f)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(f^k(A), \{x\}) < \varepsilon$. Entonces $f^k(A) \subseteq \mathcal{B}_X(\varepsilon, x) \subseteq A$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$f^{kn}(f^k(A)) \subseteq f^{kn}(A),$$

es decir

$$f^{k(n+1)}(A) \subseteq f^{kn}(A).$$

Por lo tanto $\{f^{kn}(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que converge a $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{kn}(A)$. Esto implica por la Proposición 1.1.1, que $f^k(C) = C$ y por lo tanto $\omega(A, 2^f) = o(C, 2^f)$. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $Int_X(A) = \emptyset$.

$\square$

Para ver qué información adicional podemos obtener del conjunto A, encontraremos primero un conjunto con órbita densa en un sistema dinámico sencillo.

Teorema 4.1.2. *Existen un espacio X, una función $f\colon X \to X$, y un conjunto $A \in 2^X$ de la forma $A = \{\overline{a_n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\overline{a_0}\}$,con $lim_{n\to\infty}\overline{a_n} = \overline{a_0}$. tales que $o(A, 2^f)$ es un conjunto denso en 2^X.*

Demostración. El espacio

$$\Sigma_2 = \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) |\ x_i \in \{0, 1\} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\},$$

es un espacio métrico compacto (de hecho es un conjunto de Cantor), con la distancia definida de la siguiente manera:

Sean $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ y $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ dos elementos de Σ_2. Supongamos que $x_i = y_i$ para todo $i < k$ y que $x_k \neq y_k$. Entonces la distancia entre $\overline{x}$ y $\overline{y}$ está dada por $d(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{k}$. Si para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_k = y_k$ entonces $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.

La función $\sigma \colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ definida por $\sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$, conocida como el corrimiento, es continua. Demostraremos que σ es exacta y por lo tanto débilmente mezclate. Así $2^\sigma \colon 2^{\Sigma_2} \to 2^{\Sigma_2}$ resulta ser transitiva.

- Demostraremos que la función $\sigma \colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es exacta.

Sea U un conjunto abierto no vacío, sea $\overline{x} \in U$ y tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(\varepsilon, \overline{x}) \subseteq U$. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$.

Entonces

$$W = \{\overline{y} \in \Sigma_2 \quad | \quad y_i = x_i \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\}\} \subseteq \mathcal{B}(\varepsilon, \overline{x}) \subseteq U.$$

Es claro que entonces $\sigma^k(W) = \Sigma_2$ y, por lo tanto, $\sigma^k(U) = \Sigma_2$

Por ser 2^σ transitiva y debido a la Observación 1.1.6, sabemos entonces que existe un conjunto compacto $A \in 2^{\Sigma_2}$, cuya órbita bajo 2^σ es un conjunto denso en 2^{Σ_2}.

Construiremos ahora uno de tales conjuntos. De hecho construiremos un conjunto compacto $A \in 2^{\Sigma_2}$ de la forma

$$A = \{\overline{a_0}\} \cup \{\overline{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}},$$

donde $\lim_{n \to \infty} \overline{a_n} = \overline{a_0}$. Es decir A es una sucesión convergente junto con su límite, tal que $o(A, 2^\sigma)$ es un conjunto denso en 2^{Σ_2}.

Para construir tal sucesión $\{\overline{a_n}\}$ procederemos de la siguiente forma: Construiremos una matriz con un número infinito de renglones y un número infinito de columnas, y definiremos los términos de nuestra sucesión como los renglones de dicha matriz.

$$M = (a_{ij}) \text{ donde } i, j \in \mathbb{N}.$$

Es decir haremos $\overline{a_n} = (a_{nj})$ con $j \in \mathbb{N}$

El primer paso para constrir dicha matriz, consiste en determinar como 0 y 1 las dos primeras entradas del primer renglón,

$$a_{11} = 0 \text{ y } a_{12} = 1.$$

Copiamos este bloque para todos los siguientes renglones de la matriz, es decir, hacemos $a_{i1} = 0$ y $a_{i2} = 1$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Con esto logramos que bajo alguna iteración de σ la sucesión completa se acerque con precisión de una cifra a todos los subconjuntos de Σ_2 de cardinalidad 1.

El segundo paso es agregar un segundo bloque que construimos como sigue:

Con elementos del conjunto $\{0, 1\}$ se pueden formar cuatro parejas diferentes,

$$00,\ 01,\ 10,\ 11.$$

Construimos ahora todas las parejas que se pueden formar usando los cuatro elementos anteriores. Obtenemos 16 arreglos de 2×2:

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}, \quad \ldots \quad , \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Reuniendo todos estos arreglos de 2×2 formamos el segundo bloque:

$$\begin{matrix} 00 & 00 & 00 & 00 & 01 & 01 & 01 & 01 & 10 & 10 & 10 & 10 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 00 & 01 & 10 & 11 & 00 & 01 & 10 & 11 & 00 & 01 & 10 & 11 & 00 & 01 & 10 & 11 \end{matrix}$$

Las entradas (a_{ij}) con $i \in \{1,2\}$ y $j \in \{3,...,34\}$ las definimos agregando este segundo bloque.

En el primer paso ya habíamos definido las dos primeras coordenadas de $\overline{a_1}$ y $\overline{a_2}$ al agregar el segundo bloque, definimos ahora sus siguientes 32 coordenadas.

$$\overline{a_1} = 0\ 1\ 00\ 00\ 00\ 00\ 01\ 01\ 01\ 01\ 10\ 10\ 10\ 10\ 11\ 11\ 11\ 11\ldots$$

$$\overline{a_2} = 0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 00\ 01\ 10\ 11\ 00\ 01\ 10\ 11\ 00\ 01\ 10\ 11\ldots$$

Para terminar el segundo paso, para cada $i \geq 3$ hacemos las entradas de la matriz $a_{ij} = a_{2j}$ para $j \in \{1, \ldots, 2 + 2 \times 2^4 = 34\}$. Con lo que hemos determinado las primeras 34 coordenadas de todos los términos de la sucesión.

En este paso logramos que toda la sucesión se acerque bajo alguna iteración de σ con precisión de dos cifras a todos los subconjuntos de Σ_2 de cardinalidad menor o igual que 2.

El tercer paso consiste en agregar un tercer bloque construido de la siguiente manera:

Formamos las 2^3 ternas posibles usando los elementos del conjunto $\{0,1\}$:

$$000,\ 001,\ 010,\ 011, \ldots,\ 111.$$

Con ellas, tomadas de 3 en 3, formamos todos los posibles $2^{3\times 3}$ arreglos de 3×3:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\ ,\quad \cdots\quad ,\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Reuniendo todos estos arreglos de 3×3 formamos el tercer bloque, este bloque tiene tres filas y $3 \times 2^{3\times 3}$ columnas:

$$\begin{array}{ccccccc} 000 & 000 & 000 & 000 & 000 & \dots & 111 \\ 000 & 000 & 000 & 000 & 000 & \dots & 111 \\ 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & \dots & 111 \end{array}$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, determinamos las entradas a_{ij} con

$$j \in \{2 + 2 \times 2^{2\times2} + 1, \dots, 2 + 2 \times 2^{2\times2} + 3 \times 2^{3\times3\}}$$

agregando este tercer bloque.

Hasta ahora hemos determinado $3 \times 2^{3\times3}$ entradas adicionales a las 34 ya definidas en el paso anterior para los primeros tres términos de la sucesión.

Para terminar este paso, para cada $i \geq 4$ hacemos $a_{ij} = a_{3j}$ para toda $j \leq 2 + 2 \times 2^{2\times2} + 3 \times 2^{3\times3}$

Con este tercer paso logramos que toda la sucesión se acerque bajo alguna iteración de σ con precisión de tres cifras a todos los subconjuntos de Σ_2 de cardinalidad menor o igual que 3.

Siguiendo este proceso indefinidamente. En el n-ésimo paso agregamos un bloque formado por todos los posibles arreglos de $n \times n$ contruidos con los elementos de $\{0, 1\}$. Determinamos así las siguientes $n \times 2^{n\times n}$ entradas a_{ij} con $i \in \{1, \dots, n\}$ y

$$j \in \{2+2\times2^{2\times2}+3\times2^{3\times3}+\dots+(n-1)\times2^{(n-1)\times(n-1)}+1, \dots, 2+2\times2^{2\times2}+3\times2^{3\times3}+\dots+n\times2^{n\times n}\}.$$

Y, finalmente, para $i \geq n + 1$ hacemos $a_{ij} = a_{nj}$ para toda

$$j \leq 2 + 2 \times 2^{2\times2} + 3 \times 2^{3\times3} + \dots + n \times 2^{n\times n}$$

$$
\begin{array}{rcccccc}
\overline{a_1} = & 0\,1 & 00\,00\cdots 11 & 000\,000\cdots 111 & 0000\,0000\cdots 1111 & 00000\,00000\cdots 11111 & \\
\overline{a_2} = & 0\,1 & 00\,01\cdots 11 & 000\,000\cdots 111 & 0000\,0000\cdots 1111 & 00000\,00000\cdots 11111 & \\
\overline{a_3} = & 0\,1 & 00\,01\cdots 11 & 000\,001\cdots 111 & 0000\,0000\cdots 1111 & 00000\,00000\cdots 11111 & \cdots \\
\overline{a_4} = & 0\,1 & 00\,01\cdots 11 & 000\,001\cdots 111 & 0000\,0001\cdots 1111 & 00000\,00000\cdots 11111 & \\
\overline{a_5} = & 0\,1 & 00\,01\cdots 11 & 000\,001\cdots 111 & 0000\,0001\cdots 1111 & 00000\,00001\cdots 11111 & \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Al agregar este n-ésimo bloque nos aseguramos de que toda la sucesión, bajo alguna iteración de σ se acerque con precisión de n cifras a los subconjuntos de Σ_2 de cardinalidad menor o igual que n.

Observación 4.1.3. *La sucesión definida por los renglones de la matriz construida converge.*

Efectivamente, como a partir del enésimo paso se tiene que las primeras n cifras (de hecho muchas más) de los términos $\overline{a_k}$ con $k > n$, coinciden, la sucesión construida es convergente. Tomamos entonces la cerradura de $\{\overline{a_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y ese será nuestro conjunto A.

$$A = Cl(\{\overline{a_k}\}_{k\in\mathbb{N}}).$$

Debido a la forma en que construimos A, sabemos que el espacio de todos los subconjuntos finitos de Σ_2, $F(\Sigma_2)$, está contenido en la cerradura de $o(A, 2^\sigma)$. De aquí que $o(A, 2^\sigma)$ es un conjunto denso en 2^{Σ_2}.

□

Es quizá más sorprendente el hecho de que se puede demostrar el siguiente resultado general.

Teorema 4.1.4. *Sea $f\colon X \to X$ tal que $2^f : 2^X \to 2^X$ es transitiva. Entonces existe $\mathcal{A} \in 2^X$ de la forma $\mathcal{A} = \{a_0\} \cup \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$, tal que su órbita bajo 2^f es un conjunto denso en 2^X.*

Para demostrarlo seguiremos una idea muy parecida a lo que hicimos para Σ_2, probaremos primero el siguiente lema.

Lema 4.1.5. *Sea $f\colon X \to X$ una función débilmente mezclante. Dada una colección de conjuntos abiertos no vacíos $W_1, \ldots, W_m$ en X y dados $\widehat{U_1}, \ldots, \widehat{U_n}$ conjuntos abiertos básicos de 2^X de la forma $\widehat{U}_i = \langle U_1^i, \ldots, U_m^i \rangle$, existen m conjuntos abiertos no vacíos de X, $V_i \subseteq W_i$, y un número entero positivo N tales que si $A \in 2^X$ es tal que $A \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$, entonces para cada $1 \leq i \leq n$*

$$\{A, f(A), \ldots, f^N(A)\} \cap \widehat{U}_i \neq \emptyset.$$

Demostración. Sea $(W_1, \ldots, W_m)$ una colección de m conjuntos abiertos no vacíos en X y consideremos n conjuntos abiertos básicos no vacíos $\widehat{U_1}, \ldots, \widehat{U_n}$ de 2^X de la forma $\widehat{U}_i = \langle U_1^i, \ldots, U_m^i \rangle$. Procederemos por inducción sobre n.

Para $n = 1$, tenemos el conjunto $\widehat{U}_1 = \langle U_1^1, \ldots, U_m^1 \rangle$.

Las colecciones $(W_1, \ldots, W_m)$ y $(U_1^1, \ldots, U_m^1)$ constan de m conjuntos abiertos en X cada una.

Como f es débilmente mezclante, por el teorema de Furstenberg, existe un número entero positivo N, tal que $f^N(W_i) \cap U_i^1 \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces $V_i = W_i \cap f^{-N}(U_i^1)$ es un conjunto abierto no vacío contenido en W_i.

Sea $A \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. Entonces ya que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$, tenemos que

$$f^N(A) \subseteq f^N\left(\bigcup_{i=1}^m V_i\right) = \bigcup_{i=1}^m f^N(V_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i^1,$$

y ya que $A \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos que

$$\emptyset \neq f^N(A \cap V_i) \subseteq f^N(A) \cap f^N(V_i) \subseteq f^N(A) \cap U_i^1.$$

Lo que implica que $f^N(A) \in \widehat{U}_1$.

Supongamos ahora que la propiedad se cumple para cada colección de n conjuntos abiertos básicos y no vacíos de 2^X de m entradas cada uno.

Sean $\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{n+1}$ conjuntos abiertos básicos y no vacíos en 2^X, donde cada $\widehat{U}_i$ puede escribirse como $\widehat{U}_i = \langle U_1^i, \ldots, U_m^i \rangle$.

Usando nuevamente el Teorema de Furstenberg, tenemos que existe un número entero positivo N_1 tal que

$$f^{N_1}(U_j^n) \cap U_j^{n+1} \neq \emptyset$$

para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Sea $V_j^* = U_j^n \cap f^{-N_1}(U_j^{n+1})$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$.

El conjunto $V^* = \langle V_1^*, \ldots, V_m^* \rangle$ es un abierto no vacío y está contenido en $\widehat{U}_n$. Además $\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{n-1}, V^*$ son n conjuntos abiertos básicos y no vacíos en 2^X, que pueden escribirse con m entradas. Por hipótesis de inducción, existen un entero positivo M y conjuntos abiertos no vacíos $V_i \subseteq W_i$, $1 \leq i \leq m$, tales que si $A \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$, entonces

$$\{A, f(A), \ldots, f^M(A)\} \cap \widehat{U}_j \neq \emptyset$$

para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ y, además,

$$\{A, f(A), \ldots, f^M(A)\} \cap V^* \neq \emptyset.$$

Esto último implica que $f^J(A)$ es un elemento de 2^X tal que $f^J(A) \in V^* \subseteq \widehat{U}_n$ para alguna $0 \leq J \leq M$. Además

$$f^{J+N_1}(A) = f^{J+N_1}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(A \cap V_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n-1} f^{N_1}\left(f^J(A \cap V_i)\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i^{n+1}.$$

Por otro lado, $f^{J+N_1}(A \cap V_i) \subseteq U_i^{n+1}$ y como además $A \cap V_i \neq \emptyset$ entonces $f^{J+N_1}(A \cap V_i) \cap U_i^{n+1} \neq \emptyset$ para toda $i \in \{i, \ldots, m\}$. Esto implica que $f^{J+N_1}(A) \cap U_i^{n+1} \neq \emptyset$ y por lo tanto $f^{J+N_1}(A) \in \widehat{U}_{n+1}$.

Por lo tanto

$$\{A, f(A), \ldots, f^{M+N_1}(A)\} \cap \widehat{U}_i \neq \emptyset$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$.

$\square$

Demostraremos ahora el resultado prometido, el Teorema 4.1.4, es decir que para cualquier función f débilmente mezclante, existe un elemento de 2^X con órbita densa bajo 2^f, que es la cerradura de una sucesión convergente en X.

La idea es la siguiente: si el diámetro de X es ε_0, construiremos una sucesión cuya órbita bajo la función 2^f, pase a una distancia menor que $\frac{\varepsilon_0}{2}$ de todos los conjuntos de cardinalidad 1; que pase a una distancia menor que $\frac{\varepsilon_0}{2^2}$ de todos los conjuntos de cardinalidad menor o igual que 2 y, en general, que pase a distancia menor que $\frac{\varepsilon_0}{2^n}$ de todos los conjuntos de cardinalidad menor o igual que n. De esta manera la órbita de dicha sucesión pasará tan cerca como queramos de todos los subconjuntos finitos de X y dado que $F(X)$ es denso en 2^X, entonces la órbita pasará también tan cerca como queramos de todos los elementos de 2^X.

Demostración. (Teorema 4.1.4)

Sea $\varepsilon_0 = diam(X)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_0}{2^n}$.

Como probamos en la Proposición 1.3.6, el conjunto $F(X)$, de los subconjuntos finitos de X, es un conjunto denso en 2^X. Por lo que basta encontrar un conjunto $\mathcal{A}$ que sea la cerradura de una sucesión convergente y que, bajo la función 2^f, tenga una órbita cuya cerradura contenga a $F(X)$.

Construiremos entonces tal conjunto $\mathcal{A}$. Consideremos primero una colección numerable de cubiertas abiertas finitas de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\widehat{U}_n = \{U_{n1}, \ldots, U_{nr_n}\},$$

una cubierta abierta de X tal que, para toda $i \in \{1, \ldots, r_n\}$, U_{ni} es no vacío y $diam(U_{ni}) < \varepsilon_n$.

Consideremos la cubierta $\widehat{U}_1$.

Por el Lema 4.1.5 aplicado al abierto U_{11} de X y a los r_1 abiertos básicos y no vacíos $\langle U_{11} \rangle, \ldots, \langle U_{1r_1} \rangle$ de 2^X, existen un conjunto abierto no vacío $U_1 \subseteq U_{11}$ y un número entero positivo N_1 tal que si $A \in \langle U_1 \rangle$, entonces

$$\{A, f(A), \ldots, f^{N_1}(A)\} \cap \langle U_{1i} \rangle \neq \emptyset$$

para todo $i \in \{1, \ldots, r_1\}$.

Sea W_1 un conjunto abierto no vacío de X tal que

$$W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq U_1.$$

Hagamos $C_1 = \overline{W_1}$ y $\mathcal{C}_1 = \langle C_1 \rangle$.

Observemos que para todo $A \in 2^X$ contenido en $\overline{W_1}$ se tiene que, dado $\{a\} \in F_1(X)$ existe $U_{1k} \in \widehat{U}_1$ tal que $\{a\} \in \langle U_{1k} \rangle$. Sabemos que existe $j \in \{1, \ldots, N_1\}$ tal que $f^j(A) \in \langle U_{1k} \rangle$ y por el Lema 1.3.4 esto implica que $H(\{a\}, f^j(A)) < \varepsilon_1$.

Sean V_1 y V_2 conjuntos abiertos no vacíos contenidos en C_1, tales que $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$ y $diam(\overline{V_j}) < \varepsilon_2$ para cada $j \in \{1, 2\}$.

Aplicando el Lema 4.1.5 para la pareja de conjuntos V_1 y V_2 y todos los abiertos básicos y no vacíos de la forma $\langle U_{2s_1}, U_{2s_2} \rangle$ con $s_1, s_2 \in \{1, 2, \ldots, r_2\}$, tenemos que existen conjuntos abiertos no vacíos $V_1^* \subseteq V_1$ y $V_2^* \subseteq V_2$ y existe un número entero positivo N_2 tales que, para todo $A \in 2^X$ tal que $A \in \langle V_1^*, V_2^* \rangle$, se tiene que

$$\{A, f(A), \ldots, f^{N_2}(A)\} \cap \langle U_{2s_1}, U_{2s_2} \rangle \neq \emptyset,$$

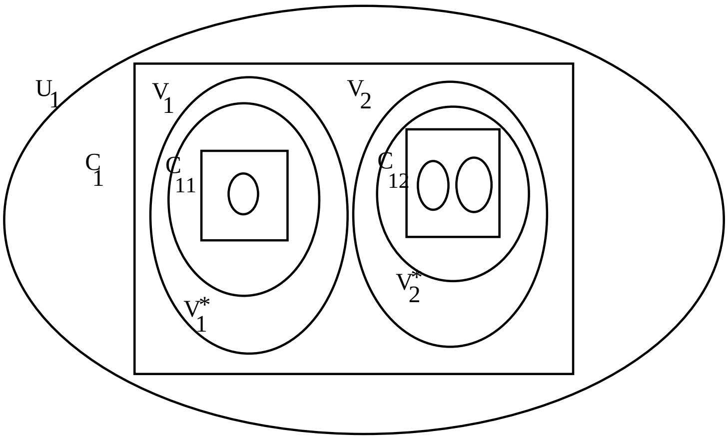
para toda pareja $(s_1, s_2) \in \{1, \ldots, r_2\} \times \{1, \ldots, r_2\}$.

Sean W_{11} y W_{12} conjuntos abiertos no vacíos de X tales que

$$W_{11} \subseteq \overline{W_{11}} \subseteq V_1^* \text{ y } W_{12} \subseteq \overline{W_{12}} \subseteq V_2^*.$$

Sean $C_{11} = \overline{W_{11}}$, $C_{12} = \overline{W_{12}}$ y $\mathcal{C}_2 = \langle C_{11}, C_{12} \rangle$.

Así para todo $A \in 2^X$ tal que $A \in \langle C_{11}, C_{12} \rangle$ se tiene que, si tomamos un elemento E de $F_2(X)$, existen $U_{2k_1}, U_{2k_2} \in \widehat{U}_2$, no necesariamente distintos, tales que $E \in \langle U_{2k_1}, U_{2k_2} \rangle$. Sabemos que existe $j \in \{1, \ldots, N_2\}$ tal que $f^j(A) \in \langle U_{2k_1}, U_{2k_2} \rangle$ y por el Lema 1.3.4 esto implica que $H(E, f^j(A)) < \varepsilon_2$.



Sea V_{111} un conjunto abierto no vacío contenido en C_{11} y sean V_{121} y V_{122} conjuntos abiertos no vacíos contenidos en C_{12}, tales que los conjuntos $\overline{V_{p_1 p_2 p_3}}$ sean ajenos dos a dos y tengan diámetro menor que ε_3.

Por el Lema 4.1.5 existen, un número entero positivo N_3 y conjuntos abiertos no vacíos

$$V_{111}^* \subseteq V_{111},\ V_{121}^* \subseteq V_{121} \text{ y } V_{122}^* \subseteq V_{122}$$

tales que si $A \in \langle V_{111}^*, V_{121}^*, V_{122}^* \rangle$ entonces

$$\{A, f(A), \ldots, f^{N_3}(A)\} \cap \langle U_{3s_1}, U_{3s_2}, U_{3s_3} \rangle \neq \emptyset$$

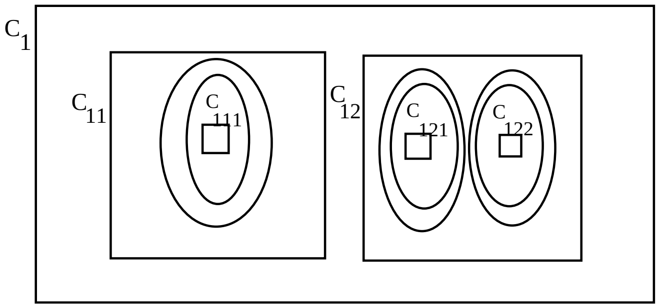
para toda terna $(s_1, s_2, s_3) \in \{1, \ldots, r_3\} \times \{1, \ldots, r_3\} \times \{1, \ldots, r_3\}$.

Sean W_{111}, W_{121}, W_{122} conjuntos abiertos no vacíos tales que

$$W_{111} \subseteq \overline{W_{111}} \subseteq V_{111}^*, \quad W_{121} \subseteq \overline{W_{121}} \subseteq V_{121}^* \quad \text{y} \quad W_{122} \subseteq \overline{W_{122}} \subseteq V_{122}^*.$$

Hagamos

$$C_{111} = \overline{W_{111}},\ C_{121} = \overline{W_{121}},\ C_{122} = \overline{W_{122}}, \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_3 = \langle C_{111}, C_{121}, C_{122} \rangle.$$



Hasta aquí tenemos lo siguiente: para todo $A \in \langle C_{111}, C_{121}, C_{122} \rangle$, y para todo E de $F_3(X)$, existen $U_{3k_1}, U_{3k_2}, U_{3k_3} \in \widehat{U}_3$, no necesariamente distintos, tales que $E \in \langle U_{3k_1}, U_{3k_2}, U_{3k_3} \rangle$. Sabemos que existe $j \in \{1, 2, \ldots, N_3\}$ tal que $f^j(A) \in \langle U_{3k_1}, U_{3k_2}, U_{3k_3} \rangle$ y, por el Lema 1.3.4, esto implica que $H(f^j(A), E) < \varepsilon_3$.

En general, para construir el conjunto $\mathcal{C}_n$ a partir de $\mathcal{C}_{n-1}$, tomamos un conjunto abierto no vacío $V_{p_1 p_2 \ldots p_{n-1} 1}$ contenido en cada entrada $C_{p_1 \ldots p_{n-1}}$ de $\mathcal{C}_{n-1}$. Y, si el último dígito de $p_1 \ldots p_{n-1}$ es $p_{n-1} = 2$, tomamos además un abierto no vacío $V_{p_1 p_2 \ldots p_{n-1} 2} \subseteq C_{p_1 \ldots p_{n-1}}$ de forma que los conjuntos $\overline{V_{p_1 p_2 \ldots p_n}}$ sean ajenos dos a dos y tengan diámetro menor que ε_n.

Por el Lema 4.1.5 existen un conjunto abierto no vacío $V^*_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ contenido en cada $V_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ y un número $N_n \in \mathbb{N}$ tales que si

$$A \in \langle V^*_{11\ldots1}, V^*_{121\ldots1}, V^*_{1221\ldots1}, \ldots, V^*_{122\ldots2} \rangle,$$

entonces

$$\{A, f(A), \ldots, f^{N_n}(A)\} \cap \langle U_{ns_1}, \ldots, U_{ns_n} \rangle \neq \emptyset$$

para todo $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{1, \ldots, r_n\}^n$.

Tomemos abiertos

$$W_{p_1 p_2 \ldots p_n} \subseteq \overline{W_{p_1 p_2 \ldots p_n}} \subseteq V^*_{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

y sea $C_{p_1 p_2 \ldots p_n} = \overline{W_{p_1 p_2 \ldots p_n}}$.

El conjunto $\mathcal{C}_n$ se define entonces como

$$\mathcal{C}_n = \langle C_{11\ldots1}, C_{1211\ldots1}, \ldots, C_{122\ldots2} \rangle.$$

La situación se ilustra en el siguiente esquema donde las flechas hacia arriba indican contención:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\mathcal{C}_1 = & \langle & C_1 & & \rangle & & & & \\
 & & \uparrow & \nwarrow & & & & & \\
\mathcal{C}_2 = & \langle & C_{11} & & C_{12} & \rangle & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & \nwarrow & & & \\
\mathcal{C}_3 = & \langle & C_{111} & & C_{121} & & C_{122} & \rangle & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \nwarrow & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

De manera que si $A \in \mathcal{C}_n$ entonces para todo elemento E de $F_n(X)$, existen $U_{nk_1}, U_{nk_2}, \ldots, U_{nk_n} \in \widehat{U}_n$, no necesariamente distintos, tales que

$$E \in \langle U_{nk_1}, U_{nk_2}, \ldots, U_{nk_n} \rangle.$$

Tenemos que existe $j \in \{1, \ldots, N_n\}$ tal que $f^j(A) \in \langle U_{nk_1}, U_{nk_2}, \ldots, U_{nk_n} \rangle$ y por el Lema 1.3.4 esto implica que $H(f^j(A), E) < \varepsilon_n$.

Definimos entonces el conjunto $\widehat{A}$ de la siguiente manera:

$$\widehat{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

Como la sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión anidada de conjuntos compactos, sabemos que $\widehat{A}$ es un conjunto compacto no vacío.

Observemos que cada una de las entradas de $\mathcal{C}_n$,

$$C_{111..,1},\ C_{121...1},\ldots,C_{122...2}$$

tiene diámetro menor que ε_n. Por lo tanto $diam(\mathcal{C}_n) < \varepsilon_n$. Entonces, como ε_n tiende a cero, $\widehat{A}$ está formado por un sólo elemento de 2^X, $\widehat{A} = \{\mathcal{A}\}$.

Demostraremos que el conjunto $\mathcal{A}$, así definido, es como queríamos: la cerradura de una sucesión convergente, y es tal que la cerradura de su órbita bajo 2^f contiene a $F(X)$.

Para demostrar que $\mathcal{A}$ es la cerradura de una sucesión convergente definamos una función de la siguiente manera:

Dada $p_1p_2\ldots p_n$ tal que $p_i \in \{1,2\}$, sea $g(p_1,\ldots,p_n)$ la cardinalidad del conjunto $\{i \in \{1,\ldots,n\} |\ p_i = 2\}$.

Observemos lo siguiente:

1.- La colección $\{C_1, C_{11}, C_{111}, \ldots\}$ forma una sucesión anidada de conjuntos compactos no vacíos cuyo diámetro tiende a cero.

2.- Los conjuntos $C_{p_1p_2\ldots p_n}$ tales que $g(p_1p_2\ldots p_n)$ es constante, forman una sucesión anidada de conjuntos compactos no vacíos cuyo diámetro tiende a cero.

3.- Los conjuntos $C_{p_1p_2\ldots p_n}$ tales que $p_n = 2$ forman también una sucesión anidada de compactos no vacíos cuyo diámetro tiende a cero.

4.- Sean $C_{p_1p_2\ldots p_n}$ y $C_{q_1q_2\ldots q_m}$ tales que $g(p_1p_2\ldots p_n) \neq g(q_1q_2\ldots q_m)$ y tales que $p_n = q_m = 1$, entonces $C_{p_1p_2\ldots p_n} \cap C_{p_1p_2\ldots p_m} = \emptyset$.

Sea a_1 la intersección de la colección $\{C_1, C_{11}, C_{111}, \ldots\}$.

Sea a_k la intersección de todos los conjuntos

$$C_{p_1p_2\ldots p_n} \text{ tales que } g(p_1p_2\ldots p_n) = k-1$$

y sea a_0 la intersección de todos los conjuntos $C_{p_1p_2\ldots p_n}$ tales que $p_n = 2$.

Sea $A^* = \{a_1, a_2, \ldots\} \cup \{a_0\}$.

Observemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $A^* \in \mathcal{C}_n$. Lo que implica que $A^* = \mathcal{A}$.

- Demostraremos que a_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{A}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como el diámetro de $C_{p_1p_2\ldots p_n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, existen $N \in \mathbb{N}$ y $C_{p_1p_2\ldots p_N}$ con $p_N = 2$, tal que $C_{p_1p_2\ldots p_N} \subseteq \mathcal{B}(\varepsilon, a_0)$. Como $C_{p_1p_2\ldots p_N 1}$ está contenido en $C_{p_1p_2\ldots p_N}$ y además

$$C_{p_1p_2\ldots p_N 1} \cap C_{p_1p_2\ldots p_N 2} = \emptyset,$$

entonces a_N es un elemento de $\mathcal{A}$ diferente de a_0 que está en $\mathcal{B}(\varepsilon, a_0)$. Por lo tanto a_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{A}$.

- Demostraremos ahora que a_k es un punto aislado de $\mathcal{A}$ para todo $k \neq 0$.

Sea $k \neq 0$. Existen $N \in \mathbb{N}$ y $C_{p_1p_2\ldots p_N}$ tales que $g(p_1p_2\ldots p_N) = k - 1$ y $p_N = 1$. Sabemos que $a_k \in C_{p_1p_2\ldots p_N}$. Como las entradas de $\mathcal{C}_N$ son ajenas dos a dos, existe $\varepsilon > 0$ tal que siempre que $(q_1q_2\ldots q_N) \neq (p_1p_2\ldots p_N)$ se tiene que $\mathcal{B}(\varepsilon, a_k) \cap C_{q_1q_2\ldots q_N} = \emptyset$. Esto implica que

$$\mathcal{B}(\varepsilon, a_k) \cap \mathcal{A} = \{a_k\}.$$

Por lo tanto para $k \neq 0$, a_k es un punto aislado.

Los dos puntos anteriores implican que $\mathcal{A}$ es un conjunto compacto de la forma

$$\mathcal{A} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a_0\}$$

donde a_n tiende a a_0 cuando n tiende a infinito.

- Demostraremos ahora que la cerradura de la órbita de $\mathcal{A}$ bajo la función 2^f contiene a $F(X)$.

Sean $B = \{b_1, \ldots, b_s\} \in F(X)$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que L es un número natural tal que $\varepsilon_L < \varepsilon$ y $s \leq L$. Consideremos la cubierta $\widehat{U}_L$ y tomemos elementos de la cubierta que contengan a los elementos de B, es decir, $U_{Lk_1}, \ldots, U_{Lk_s}$ tales que $b_i \in U_{Lk_i}$. Por la construcción que hicimos, tenemos que ya que $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_L$, entonces existe un número entero $1 \leq M \leq N_L$ tal que

$$H(f^M(\mathcal{A}), B) = H((2^f)^M(\mathcal{A}), B) < \varepsilon.$$

Por lo que $F(X)$ está contenido en la cerradura de la órbita de $\mathcal{A}$ bajo 2^f.

Así $o(\mathcal{A}, 2^f)$ es un conjunto denso en 2^X.

$\square$

4.2. Comentarios

Cuando emprendimos la búsqueda de un conjunto que tuviera órbita densa bajo la función 2^f, teníamos la idea de que este tendría por fuerza una topología complicada, pensábamos que probablemente tendría que ser un conjunto de Cantor. La sorpresa fue entonces encontrar que dicho conjunto con órbita densa podía ser un conjunto más sencillo.

Con argumentos parecidos a los de la demostración del teorema 4.1.4 puede demostrarse que existe también un conjunto de Cantor $E \in 2^X$ tal que bajo 2^f tiene órbita densa en 2^X. Más aun, puede demostrarse que hay un conjunto de Cantor en 2^X que tiene la propiedad de que todos sus subconjuntos infinitos y cerrados, tienen órbita densa bajo la función 2^f. Ver [12].

Bibliografía

[1] G. Acosta, A Illanes y H. Méndez, *The transitivity of induced maps.* Topology Appl. 156 (2009), no. 5, 1013-1033.

[2] G. Arenas, R. Isaacs, S. Sabogal y H. Méndez, *Sistemas dinámicos discretos y fractales.* Vínculos Matemáticos, Facultad de Ciencias, UNAM. No. 87, 2009.

[3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos.* Amer. Math. Monthly, 99 (1992), no. 4, 332-334.

[4] J. Banks, *Topological mapping properties defined by digraphs.* Discrete Contin. Dynam. Systems, 5, (1999), no. 1, 83-92.

[5] J. Banks, *Chaos for Induced Hyperspace Maps.* Chaos Solitons Fractals, 25, (2005), no. 3, 681-685.

[6] W. Bauer y K. Sigmund, *Topological Dynamics of Transformations Induced on the Space of Probability Measures.* Monatsh. Math., **79** (1975), 81-92.

[7] L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension.* Lecture Notes in Mathematics, 1513. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[8] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.

[9] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in diophantine approximation.* Theory of Computing Systems, Vol. **1**, No. 1, 1967, 1-49.

[10] J. L. García, D. Kwietniak, M. Lampart y P. Oprocha, *Chaos on Hyperspaces.* Nonlinear Analysis, 71 (2009), no. 1-2, 1-8.

[11] L. Gongfu, W. Lidong Z. Yucheng, *Transitivity, mixing and chaos for a class of set-valued mappings*. Science in China: Series A Mathematics, 2006, Vol. **49**, No. 1, 1-8.

[12] P. Hernández, J. King y H. Méndez, *Compact sets with dense orbit in* 2^X, manuscrito.

[13] P. Hernández, *El solenoide como atractor dinámico*. Tesis Licenciatura de Matemáticas. Facultad de Ciencias UNAM, 2008.

[14] A. Illanes, S. B. Nadler, *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances* Pure and Applied Mathematics, 216, Marcel Dekker, Inc. New York. 1999.

[15] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*. Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, No. 28, 2004.

[16] H. Liu, E. Shi, G. Liao *Sensitivity of set-valued discrete systems*. Nonlinear Analysis, 71, (2009), no. 12, 6122-6125.

[17] S. Ruette, *Chaos for continuous interval maps*. Notas disponibles en la dirección electrónica: http://www.math.u-psud.fr/∼ruette/abstracts/abstract-chaos-int.html.

[18] P. Sharma, A. Nagar, *Inducing sensitivity on hyperspaces*. Topology Appl. 157, (2010), no. 13, 2052-2058.

[19] M. Vellekoop y R. Berglund, *On intervals, transitivity = chaos*, Amer. Math. Monthly. 101, (1994), no. 4, 353-355.