UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GAVILLAS Y COHOMOLOGÍA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

PRESENTA:

ELIZABETH RAMÍREZ RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR.ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA

2011

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno
   Ramírez
   Ramírez
   Elizabeth
   51 12 99 46
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   403006986

2. Datos del tutor
   Dr.
   Elizondo
   Huerta
   Enrique Javier

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Zaldívar
   Cruz
   Felipe de Jesús

4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Snoussi
   Jawad

5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Cisneros
   Molina
   José Luis

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   del Ángel
   Rodríguez
   Pedro Luis

7. Datos del trabajo escrito
   Gavillas y cohomología
   73 p. 2011

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a un gran número de personas que de diferentes maneras me han brindado su apoyo a lo largo de los años transcurridos desde que inicie este proyecto.

Quiero agradecer a mi maestro, el Dr. Javier Elizondo por todo su apoyo, confianza y paciencia durante largos años de duda. Agradezco también a mis sinodales: el Dr. Felipe Zaldívar, el Dr. José Luis Cisneros y el Dr. Jawad Snoussi y en especial al Dr. Pedro Luis del Ángel por sus sugerencias y consejos.

A mi Facultad de Ciencias y a mis maestros por todas las enseñanzas recibidas. En especial al profesor Gabriel Ocampo, al profesor Fidel Casarrubias y a Ulises Ariet Ramos por sus clases y por su apoyo. A Ricardo Ríos por enseñarme a usar LaTeXy resolver mis dudas.

A quienes me han escuchado y animado: Anahí, Alejandro, Miguel. Gracias Carlos por tus clases y sugerencias. Y por compartir este proyecto conmigo, gracias Anaid.

Agradecezco profundamente a mis padres Aurelia y Margarito quienes me han entregado de manera incondicional todo el afecto, la confianza y el apoyo para lograr lo que soy. A mis hermanos: Israel, Tere, René y Janet por su comprensión, amistad y paciencia.

Finalmente agradezco al proyecto número IN100109, “Cálculo de Schubert y Variedades Tóricas”, del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) y a la UNAM por la beca recibida para la realización de esta tesis.

Índice general

Introducción

Las gavillas son una herramienta de la geometría algebraica, topología y geometría diferencial y son usadas siempre que se quiere obtener información de los datos algebraicos que varían con cada conjunto abierto del objeto geométrico dado.

Al estudiar objetos que varían localmente (es decir, dependiendo del conjunto abierto) las gavillas permiten obtener información global. Además funcionan como instrumentos naturales para el estudio del comportamiento global de entidades que son de naturaleza local, como los conjuntos abiertos, o las funciones continuas, analíticas, diferenciables, etc.

Las gavillas fueron introducidas por Cartan y Leray con el fin de calcular la cohomología de variedades algebraicas definidas por funciones de variables complejas. La idea esencial era construir un objeto algebraico a partir de anillos de funciones analíticas definidas sobre subespacios abiertos de la variedad.

Posteriormente Kodaira y Spencer demuestran una generalización del teorema de Riemann-Roch para superficies de dimensión compleja uno.

En 1955 Serre publica su trabajo "Faisceaux Algébriques Cohérents"en Annals of Mathematics, el cual desarrolla la teoría de gavillas y su cohomología con el fin de aplicar los resultados al estudio de variedades algebraicas definidas sobre cualquier campo y no sólo en los complejos.

En el presente trabajo se hace un estudio de las gavillas basado en el artículo de Serre y está dividido en cuatro capítulos cuyos contenidos son los siguientes:

Capítulo 1. En este capítulo estudiamos la estructura de gavilla en un espacio topológico, así como las propiedades que estas poseen. Posteriormente vemos la equivalencia de la definición de gavilla con un homeomorfismo local, el cual es llamado espacio étale. También se dan las condiciones para encontrar la gavilla asociada a una pregavilla y con esto se definen: subgavilla, gavilla cociente, gavilla imagen y gavilla cokernel. Finalmente se dan algunas propiedades de una sucesión exacta de gavillas.

Capítulo 2. Se da la definición de gavillas con estructura algebraica (anillos y módulos), así como las propiedades que satisface la suma directa, el producto tensorial, los homomorfismos y las gavilla de gérmenes de una gavilla en otra gavilla.

Capítulo 3. Se estudia un tipo especial de gavillas, llamadas gavillas coherentes las cuales poseen la propiedad de ser finitamente generadas. Vemos las operaciones con gavillas coherentes tales como suma directa, producto tensorial y homomorfismos, así como cambio de anillo y extensión y restricción de una gavilla coherente.

Capítulo 4. Las gavillas guardan información local y la información global se obtiene a partir de los grupos de cohomología. Así que en este capítulo damos la construcción de grupos de cohomología de gavillas partiendo de la definición de cocadenas, complejos en cocadenas y refinamiento. Después vemos los homomorfismos de gavillas en complejos y grupos de cohomología y con esto hacemos la construcción de una sucesión exacta de gavillas de tal forma que al considerar la sucesión exacta de complejos esta sea exacta y la condición que damos es que el espacio topológico en el que se debe trabajar es paracompacto.

Capítulo 1

Gavillas

1.1. Pregavillas sobre un espacio topológico

Definición 1.1.1. Sea X un espacio topológico.

Decimos que una pregavilla $\mathscr{F}$ de conjuntos en X es una asignación de un conjunto $\mathscr{F}(U)$ para cada abierto $U \subseteq X$, con $U \neq \emptyset$ y una colección de morfismos restricción $\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ tales que para cada par de conjuntos abiertos $V \subseteq U$ de X se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $\rho_U^U = \mathbf{1}_{\mathscr{F}(U)}$

(2) Para $W \subseteq V \subseteq U$ abiertos, $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[rr, "\rho_W^U"] \arrow[dr, "\rho_V^U"'] & & \mathscr{F}(W) \\ & \mathscr{F}(V) \arrow[ur, "\rho_W^V"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Los elementos de $\mathscr{F}(U)$ son llamados secciones de $\mathscr{F}$ sobre U y también usamos la notación $\Gamma(U, \mathscr{F})$. Los elementos de $\mathscr{F}(X)$ son llamados secciones globales.

Ejemplo 1.1.2. Sea A un conjunto y X un espacio topológico. Definimos la pregavilla $\mathscr{A}$ sobre X como sigue:

(a) $\mathscr{A}(U) = A$ para cada abierto $U \subseteq X$

(b) $\rho_V^U = \mathbf{1}_A : \mathscr{A}(U) \to \mathscr{A}(V)$ para $V \subseteq U$ abierto en X.

Ejemplo 1.1.3. Sea M un espacio topológico y $\mathscr{F}(U) := \{\varphi : M \to M \,|\, \varphi \text{ es continua}\}$. Sea $\rho_V^U : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ la restricción de funciones de V a U. Entonces $\mathscr{F}$ es una pregavilla llamada la pregavilla de funciones continuas en M.

Ejemplo 1.1.4. Sea $X = \mathbb{C}$. Definimos la pregavilla $\mathcal{A}$ en X por

$$\mathcal{A}(U) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\text{: f es analítica compleja definida en } U\}.$$

Los morfismos restricción $\rho_V^U : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$, con $V \subseteq U$, son simplemente la restricción de funciones. Es fácil ver que $\mathcal{A}$ es una pregavilla.

Ejemplo 1.1.5. Sea X una variedad algebraica sobre un campo algebraicamente cerrado K. Definimos $\mathcal{O}(U)$ como el anillo de funciones regulares en U. Un elemento de $\mathcal{O}(U)$ es una función $f : U \to K$ tal que para cada $x \in U$ hay una vecindad V de x tal que f es el cociente de funciones polinomiales en V, y el denominador no se hace cero en ningún punto de V. Si $V \subseteq U$, entonces el morfismo restricción $\rho_V^U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ es simplemente la restricción de funciones. Esto nos define una pregavilla $\mathcal{O}$ llamada la pregavilla de funciones regulares en X.

1.2. Tallos de pregavillas

Definición 1.2.1. Sea $\mathscr{F}$ una pregavilla en un espacio topológico X. Consideremos un punto $x \in X$. Definimos $\mathscr{M} = \{s \in \mathscr{F}(U) \,|\, x \in U\}$. Decimos que $s \in \mathscr{F}(U)$ y $t \in \mathscr{F}(V)$ son equivalentes si existe $W \subseteq U \cap V$ vecindad de x en X tal que $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$. Las clases de equivalencia de $\mathscr{M}$, bajo esta relación, son llamadas los gérmenes de $\mathscr{F}$ en x. La clase de equivalencia que contiene $s \in \mathscr{F}(U)$ es llamada el germen de s en $x \in U$.

Proposición 1.2.2. *La relación definida es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sea $s \in M$, entonces existe U vecindad de x en X tal que $\rho_U^U(s) = \mathbf{1}$ y por tanto $s \sim s$, es decir, la relación es reflexiva.
Ahora, sean $s \in M$ y $t \in M$ tales que $s \sim t$, entonces existe $W \subseteq U \cap V$ vecindad de x en X tal que $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$. Considero $W = U \cap V = V \cap U$ vecindad de x en X, entonces $\rho_W^U(t) = \rho_W^V(s)$, es decir $t \sim s$ de donde la relación es simétrica.
Finalmente, sean $s, t, u \in M$ tales que $s \sim t$ y $t \sim u$. Entonces existen $\sigma = U \cap V$ y $\tau = V \cap W$ vecindades de $x \in X$ tales que $\rho_\sigma^U(s) = \rho_\sigma^V(t)$ y $\rho_\tau^V(t) = \rho_\tau^W(U)$. Sea $\chi = U \cap V \cap W$ vecindad de x en X, entonces $\rho_\chi^U(s) = \rho_\chi^W(U)$. Es decir, la relación es transitiva. $\square$

Definición 1.2.3. Sea $\mathscr{F}$ una pregavilla y X un espacio topológico. Para $x \in X$ definimos el tallo $\mathscr{F}_x$ de $\mathscr{F}$ en x como el límite directo [1] de los conjuntos $\mathscr{F}(U)$ sobre todas las vecindades abiertas de x en X, es decir,

[1] Apéndice A

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U) = \left\{ \bigsqcup_{U\supseteq x} \mathscr{F}(U)/\sim \right\}$$

Donde $\sigma \sim \tau$ si $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ y $\tau \in \mathscr{F}(V)$ y existe W vecindad abierta de x, donde $W \subseteq U \cap V$ es tal que $\rho^U_W(\sigma) = \rho^V_W(\tau)$

Luego, dada U vecindad abierta de X, con $x \in U$ existe un morfismo que va de las secciones a los tallos, esto es:

$$\mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}_x$$

$$s \longmapsto s_x$$

donde s_x denota la clase de equivalencia de la sección s.

Proposición 1.2.4. *(a) Cada germen $t \in \mathscr{F}_x$ puede verse como $t = s_x$ para algún $s \in \mathscr{F}(U)$, $U \subseteq X$ abierto, $x \in U$.*

(b) Dos germenes $s_x, t_x \in \mathscr{F}_x$ con $s \in \mathscr{F}(U), t \in \mathscr{F}(V)$ son iguales $s_x = t_x$ si y sólo si existe una vecindad $W \subseteq U \cap V$ abierta tal que $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$.

Demostración. (a) Sea $t \in \mathscr{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U)$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\rho^U_V"'] & & \mathscr{F}_x \\ & \mathscr{F}(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

conmuta.
Ahora, como $\mathscr{F}_x$ es un tallo, existe una única función $f : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}_x$ tal que $\varphi = f \circ \rho^U_V$ y por tanto existe $t \in \mathscr{F}_x$ tal que $t = s_x$.

(b) Supongamos que $s_x = t_x$ son germenes de $\mathscr{F}_x$. Considero el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F}_x & \\ \mathscr{F}(U) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\rho^U_W"'] & \mathscr{F}(W) \arrow[u, "\varphi"'] & \mathscr{F}(V) \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[l, "\rho^U_V"] \end{tikzcd}$$

Como cada diagrama conmuta por propiedad del tallo, entonces por la propiedad universal del límite directo, el único morfismo que hace que el diagrama conmute es $\mathbf{1}_{\mathscr{F}(U)} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$ y por lo tanto $\rho^U_W(s) = \mathscr{F}$.

$\square$

1.3. Morfismos de pregavillas

Definición 1.3.1. Sean $\mathscr{F},\mathscr{G}$ pregavillas de conjuntos sobre X. Un morfismo de pregavillas $f:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ es una colección de morfismos $\{f(U):\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U)|\, U\subseteq X \text{ abierto}\}$ tal que cuando $V\subseteq U$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\overline{\rho}_V^U"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "f(V)"'] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\overline{\rho}_V^U f(U)=f(V)\rho_V^U$.

Definición 1.3.2. Si $\mathscr{F}\xrightarrow{f}\mathscr{G}\xrightarrow{g}\mathscr{H}$, definimos la composición de morfismos como $(g\circ f)(U)=g(U)\circ f(U)$.

Definición 1.3.3. $f:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ es un isomorfismo de pregavillas si y sólo si existe $g:\mathscr{G}\to\mathscr{F}$ morfismo tal que $f\circ g=\mathbf{1}_{\mathscr{G}}$ y $g\circ f=\mathbf{1}_{\mathscr{F}}$. Además $\mathbf{1}_{\mathscr{F}}:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ es tal que $\mathbf{1}_{\mathscr{F}}(U)=\mathbf{1}_{\mathscr{F}(U)}$ para todo $U\subseteq X$ abierto.

Proposición 1.3.4. *$f:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ es un isomorfismo de pregavillas si y sólo si para cada $U\subseteq X$ abierto, $f(U)$ es isomorfismo si y sólo si para cada $U\subseteq X$ abierto, $f(U)$ es biyectivo.*

Demostración. f es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ existe $g:\mathscr{G}\to\mathscr{F}$ tal que $f\circ g=\mathbf{1}_{\mathscr{G}}$ y $g\circ f=\mathbf{1}_{\mathscr{F}}$ $\Leftrightarrow$ existe g tal que para todo $U\subseteq X$, $(f\circ g)(U)=f(U)\circ g(U)=\mathbf{1}_{\mathscr{G}(U)}$ y $(g\circ f)(U)=g(U)\circ f(U)=\mathbf{1}_{\mathscr{F}(U)}$ $\Leftrightarrow$ para cada $U\subseteq X$, $f(U)$ es isomorfismo.
Ahora considero el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\overline{\rho}_V^U"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "f(V)"'] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

Por hipótesis el diagrama conmuta, es decir, $\overline{\rho}_V^U\circ f(U)=f(V)\circ\rho_V^U$.
Por demostrar que $g(V)\circ\overline{\rho}_V^U=\rho_V^U\circ g(U)$: Por hipótesis, para cada $U\subseteq X$, $f^{-1}(U)=g(U)$ y $f^{-1}(V)=g(V)$, entonces $\overline{\rho}_V^U\circ f(U)=f(V)\circ\rho_V^U \Leftrightarrow \overline{\rho}_V^U=f(V)\circ\rho_V^U\circ f^{-1}(U)\Leftrightarrow f(V)\circ\rho_V^U\circ g(U)\Leftrightarrow f^{-1}(V)\circ\overline{\rho}_V^U=\rho_V^U\circ g(U)\Leftrightarrow g(V)\circ\overline{\rho}_V^U=\rho_V^U\circ g(V)$. □

Observación: Veremos que dado un morfismo $f:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ de pregavillas en X induce un morfismo $f_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$ en los tallos para un punto $x\in X$. La construcción del mapeo inducido es como sigue. Dado $x\in X$ definimos f_x como sigue: Cada elemento $t\in\mathscr{F}_x$ es de la forma $t=s_x$ para algún $s\in\mathscr{F}(U)$ y alguna vecindad $U\ni x$. Entonces tomo el germen de la imagen de s dado por $f_x(t)=(f(U)(s))_x$. Ahora, si $t=s_x=\sigma_x$ donde $\sigma\in\mathscr{F}(V)$, entonces existe $W\subseteq U\cap V$, $x\in U$ y $\rho_W^U(s)=\rho_W^V(\sigma)$. Es decir, $\rho_W^U(f(U)(s))=f(W)\rho_W^U(s)=f(W)\rho_W^V(\sigma)=\rho_W^V(f(V)(\sigma))$. Por lo que $(f(U)(s))_x=(f(V)(\sigma))_x$.

Esto es equivalente a ver que para cualquier vecindad abierta U, V de $x \in X$ con $V \subseteq U$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(V) \arrow[r, "f_V"] & \mathscr{G}(V) \\ \mathscr{F}(U) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "f_U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo y pasando al límite directo sobre las vecindades de $x \in X$ tengo el morfismo inducido en los tallos

$$f_x : \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U) \to \varinjlim_{x\in U} \mathscr{G}(U)$$

1.4. Gavillas

Definición 1.4.1. Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ una pregavilla de conjuntos en X, y $U \subseteq X$ abierto.

(M) $\mathscr{F}$ es llamada una monopregavilla si dado U abierto en X y $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ cubierta abierta de U y $s, t \in \mathscr{F}(U)$ dos secciones de $\mathscr{F}$ tales que para cada $\lambda \in \Lambda$ se tiene $\rho^U_{U_\lambda}(s) = \rho^U_{U_\lambda}(t)$ entonces $s = t$.

(G) $\mathscr{F}$ satisface la "condición de pegado" si dado U abierto en X y $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ cubierta abierta de U y elementos $\{s_\lambda \in \mathcal{F}(U_\lambda)\}$ que satisfacen $\rho^{U\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\lambda) = \rho^{U^\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\mu)$ para cada $\lambda, \mu \in \Lambda$ entonces existe $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\rho^U_{U_\lambda}(s) = s_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$.

(S) $\mathscr{F}$ es una gavilla de conjuntos si satisface (M) y (G).

Definición 1.4.2. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla de conjuntos en un espacio topológico X. Decimos que $\mathscr{F}$ es una gavilla de grupos abelianos en X si

1. $\mathscr{F}$ es una pregavilla de grupos abelianos en X, es decir, para cada $U \subseteq X$ abierto, $\mathscr{F}(U)$ tiene una estructura de grupo abeliano y cada morfismo restricción ρ^U_V es un homomorfismo de grupos con respecto a esas estructuras.

2. La pregavilla de grupos abelianos satisface (M) y (G).

Observación:

1. La sección global $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s\mid_{U_i} = s_i$ para cada $i \in \Lambda$ en la definición de gavilla es la única con esta propiedad por la condición (M).

2. $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$ ya que $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} U_i$ y entonces para cualquier $s, s' \in \mathscr{F}(\emptyset)$ se tiene $s\mid_{U_i} = s'\mid_{U_j}$ para cada $i, j \in \emptyset$ y como es monopregavilla, $s = s'$, entonces $\mathscr{F}$ tiene un único elemento ya que para cualquier $i, j \in \emptyset$, todas las secciones $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ cumplen que $s_i\mid_{U_i\cap U_j} = s_j\mid_{U_i\cap U_j}$. Entonces por la condición de pegado, existe $s \in \mathscr{F}(\emptyset)$ tal que $s\mid_{U_i} = s_i$.

3. Dada una gavilla $\mathscr{F}$, una sección $s \in \mathscr{F}(U)$ de $\mathscr{F}$ sobre U está determinada por su imagen en los tallos $\mathscr{F}_x$ para cada $x \in U$. Así tenemos que $s = 0 \Leftrightarrow s_x = 0$ para cada $x \in U$, entonces por definición de gavilla, para cada x existe una vecindad U_x de x en X tal que $\rho^U_{U_x}(s) = 0$, de donde $s = 0$ en $\mathscr{F}(U)$.

Ejemplo 1.4.3. El ejemplo 1.1.3 es una gavilla llamada la gavilla de funciones continuas.

Ejemplo 1.4.4. Pregavilla que no es gavilla.
Sea $X = \mathbb{R}^2$ y para cada abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, defino $\mathcal{P}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es constante}\}$. Si $U \subseteq V$ defino $\rho^V_U : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(U)$ como el morfismo restricción dado por $s \mapsto s\mid_U$. Entonces $\mathcal{P}$ es una pregavilla de grupos abelianos sobre $\mathbb{R}^2$, pero no es una gavilla ya que no satisface el axioma de pegado. Por ejemplo, para $U = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son conjuntos abiertos disjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^2$. Defino $s_1 \in \mathcal{P}(U_1)$ por $s_1(u_1) = 0$ para todo $u_1 \in U_1$ y $s_2 \in \mathcal{P}(U_2)$ por $s_2(u_2) = 5$ para todo $u_2 \in U_2$. Ahora como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ no existe una función constante $s \in \mathcal{P}(U)$ tal que $s\mid_{U_i} = s_i$ para $i = 1, 2$ y por lo tanto no se satisface el axioma de pegado.

Proposición 1.4.5. *Sea $\mathscr{F}$ una pregavilla, $\mathscr{G}$ una monopregavilla y sean $f, g : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ dos morfismos de pregavillas tales que para cada $x \in X$ tenemos que $f_x = g_x$, entonces $f = g$.*

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto y $s \in \mathscr{F}(U)$, entonces tomar el morfismo en los tallos $f_x = g_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ es equivalente a $f_x = g_x : \bigcup\{\mathscr{F}(U) : x \in U\}/\sim \longrightarrow \bigcup\{\mathscr{G}(U) : x \in V\}/\sim$. Así tengo

$$\begin{tikzcd}
{[t \in \mathscr{F}(V)]_{V \ni x}} \arrow[r, "f_x"] \arrow[dr, "g_x"'] & {[f_V(t) \in \mathscr{G}(V)]_{V \ni x}} \arrow[d, equal] \\
 & {[g_V(t) \in \mathscr{G}(V)]_{V \ni x}}
\end{tikzcd}$$

Ahora como $f_x(s_x) = g_x(s_x)$ entonces existe una vecindad abierta donde las clases de equivalencia son iguales, es decir, existe $U_x \subseteq U$ tal que $\rho^U_{U_x}(f(s)) = \rho^U_{U_x}(g(s)) \in \mathscr{G}(U_\lambda)$. Así considero la cubierta abierta $\{U_x\}_{x \in U}$ de U, luego como $\mathscr{G}$ es monopregavilla tengo $f(s) = g(s)$. □

Definición 1.4.6. Si $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ son gavillas y $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de pregavillas, entonces f es un morfismo de gavillas.

Ejemplo 1.4.7. Si $\mathscr{F}$ es una pregavilla en X, entonces $\mathbf{1} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ definido como $\mathbf{1}_u : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$ el morfismo identidad es un morfismo de gavillas llamado el morfismo identidad.

Proposición 1.4.8. *Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X, entonces φ es un isomorfismo si y sólo si el morfismo inducido en los tallos $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ es un isomorfismo para cada $x \in X$.*

Demostración. $(\Leftarrow)$ Por hipótesis tengo que $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ es un isomorfismo para cada $x \in X$
Queremos ver que para cada vecindad abierta $U \subseteq X$, $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es un isomorfismo de grupos.

1. $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es inyectiva.
   Sea $s \in \mathscr{F}(U)$ una sección con $\varphi(s) \in \mathscr{G}(U)$ y $\varphi(s) = 0$ entonces para todo $x \in U$, $\varphi(s)_x = 0$. Pero φ_x es inyectivo, entonces $s_x = 0 \in \mathscr{F}_x$ y por tanto $s = 0$. Luego, existe $W_x \subseteq U$ vecindad de x tal que $\rho^U_{W_x}(s) = 0$ para cada $x \in U$, pero $U = \bigcup_{x\in U} W_x$, entonces $s = 0$ en U por ser $\mathscr{F}$ gavilla y por lo tanto $\varphi(U)$ es inyectiva.

2. Veamos ahora que $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es suprayectiva.
   Sea $t \in \mathscr{G}(U)$, entonces para cada $x \in U$, denotemos por $t_x \in \mathscr{G}_x$ su germen. Como φ_x es suprayectiva, existe $s_x \in \mathscr{F}_x$ tal que $\varphi_x(s_x) = t_x$. Sea $s \in \mathscr{F}(V_x)$, con $V_x \subset U$, un representante de s_x, entonces $\varphi(s)$ y $\rho^U_{V_x}(t)$ tienen el mismo germen. Así que puedo suponer que $\varphi(s) = \rho^U_{V_x}(t)$ en $\mathscr{G}(V_x)$. Pero $U = \bigcup_{x\in X} V_x$ y en cada V_x hay un $s \in \mathscr{F}(V_x)$. Ahora, si x y y son dos puntos entonces $\rho^U_{V_y\cap V_x}(s_x)$ y $\rho^U_{V_y\cap V_x}(s_y)$ son dos secciones de $\mathscr{F}(V_y \cap V_x)$ tales que bajo φ son enviadas a $\rho^U_{V_x\cap V_y}(t)$, entonces por la inyectividad de φ son iguales y por ser gavilla existe una única sección global $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\rho^U_{U_x}(s) = s(x)$ para cada $x \in U$.
   Finalmente veamos que $\varphi(s) = t \in \mathscr{F}(U)$.
   Como $\rho^U_{V_x}(\varphi(s)) = \rho^U_{V_x}(U)$, entonces como $\mathscr{G}$ es gavilla y usando el hecho de que $\varphi(s) - t = 0$ tengo que $\varphi(s) = t$ y por lo tanto, $\varphi(U)$ es suprayectiva.

($\Rightarrow$) Supongamos que φ es un isomorfismo. Entonces $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ tiene un inverso $\varphi(U)^{-1}$ para cada conjunto abierto U.
Sea $f_x \in \ker(\varphi_x)$. Podemos representar a f_x por un elemento f en un conjunto abierto U y $\varphi(f)_x = 0$ implica que hay un conjunto abierto $V \subseteq U$ tal que $\rho^U_V(\varphi(f)) = 0$. Como $\varphi(U)$ es inyectiva, entonces $f_x = 0$ y por lo tanto φ_x es inyectiva.
Sea ahora $g_x \in \mathscr{G}_x$ y representamos g_x por un elemento $g \in \mathscr{G}(U)$ para algún conjunto abierto U. Como $\varphi(U)$ es suprayectiva, $g = \varphi(U)(f)$ para algún $f \in \mathscr{F}(V)$, entonces $g_x = \varphi(U)(f)_x = \varphi_x(f_x)$ y por lo tanto φ_x es suprayectiva.

□

1.5. Gavilla asociada a una pregavilla

Dada una pregavilla $\mathscr{F}$ existe una gavilla $\mathscr{F}^+$, llamada la gavilla asociada a la pregavilla $\mathscr{F}$, y un morfismo $\theta : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}^+$ tal que para cualquier gavilla $\mathscr{G}$, y cualquier morfismo $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$, existe un único morfismo $\psi : \mathscr{F}^+ \longrightarrow \mathscr{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$. Además $(\mathscr{F}^+, \theta)$ es único bajo isomorfismo. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathscr{F}^+ \arrow[dl, "\exists!\,\psi"] \\ \mathscr{G} & \end{tikzcd}$$

La construcción de $\mathscr{F}^+$ es de la siguiente manera. Consideramos la función $s : U \longrightarrow \bigcup_{x\in X} \mathscr{F}_x$ tal que

1. $s(x) \in \mathscr{F}_x$ para cada $x \in U$

2. Para todo $x \in U$ existe $V \subseteq U$, vecindad de x, y $t \in \mathscr{F}(V)$, tal que para todo $y \in V$ se tiene $t_y = s(y)$

Entonces consideramos $\mathscr{F}^+(U) = \{s : U \longrightarrow \bigcup_{x\in U} \mathscr{F}_x \mid s$ satisface las condiciones 1 y 2$\}$. Debemos probar que $\mathscr{F}^+$ es gavilla y que satisface la propiedad universal.

Demostración. Sea $t \in \mathscr{F}(U)$. Definimos $s : U \longrightarrow \bigcup_{x\in X} \mathscr{F}_x$ por $x \longmapsto t_x \in \mathscr{F}_x$, entonces $s \in \mathscr{F}^+$ y por tanto $\mathscr{F}^+ \neq \emptyset$. Los morfismos restricción son de la siguiente forma. Para $V \subseteq U$ se tiene que $\rho^U_V : \mathscr{F}^+(U) \longrightarrow \mathscr{F}^+(V)$ es la restricción de $s|_U$ en $s|_V$. Así que $\rho^U_U = \mathbf{1}$ y si $W \subseteq V \subseteq U$, entonces tenemos que $\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$. Por lo tanto $\mathscr{F}^+$ es pregavilla.

Falta por probar que satisface las propiedades (M) y (G).

Empecemos por la propiedad (M). Sea $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de U. Si $s \in \mathscr{F}^+(U)$ es tal que $\rho^U_{V_\lambda}(s) = 0$, para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces por la definición del morfismo restricción $s(x) = 0_x$ para todo $x \in U$. Pero 0_x es el elemento cero de $\mathscr{G}_x$, entonces $s = 0$ y por tanto se satisface (M).

Ahora probemos la propiedad (G). Supongamos que $s_\lambda \in \mathscr{F}^+(V_\lambda)$, para toda$\lambda \in \Lambda$, satisface que $\rho^{V_\lambda}_{V_\lambda\cap V_\mu}(s_\lambda) = \rho^{V_\mu}_{V_\lambda\cap V_\mu}(s_\mu)$ para $V_\lambda \cap V_\mu \neq \emptyset$. Es decir, dado $z \in V_\lambda \cap V_\mu$ se tiene $s_\lambda(z) = s_\mu(z) \in \mathscr{F}_z$. Entonces, para $x \in U$ elegimos V_λ de tal forma que $x \in V_\lambda$. Ahora, consideramos $s : U \longrightarrow \bigcup_{x\in U} \mathscr{F}_x$ de tal forma que $s(x) = s_\lambda(x)$. Luego como para $x \in V_\mu$ tengo $s_\lambda(x) = s_\mu(x)$, entonces s está bien definida. Ahora bien, como $s_\lambda \in \mathscr{F}^+(V_\lambda)$ puedo encontrar una vecindad $W \subseteq V_\lambda$ que contenga a s y $t \in \mathscr{F}(W)$. Así que $s_\lambda(y) = t_y$, $y \in W$. Luego, como $W \subseteq U$ entonces $s \in \mathscr{F}^+(U)$ y por la construcción de s tengo $\rho^U_{V_\lambda}(s) = s_\lambda$. Es decir, se satisface (G) y por lo tanto $\mathscr{F}^+$ es gavilla.

Todavía tenemos que ver que satisface la propiedad universal.

Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo con $\mathscr{G}$ gavilla. Para definir un morfismo $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ tenemos que definir $\psi(U)(f)$, para cada $U \subset X$ y toda $f \in \mathscr{F}^+(U)$. Lo haremos usando el axioma de pegado de gavillas.

De la definición de $\mathscr{F}^+$, sabemos que existe una cubierta abierta $\{U_\lambda\}$ de U tal que en U_λ existe $s_\lambda \in \mathscr{F}(U_\lambda)$ con la propiedad de que $f(x) = (s_\lambda)_x$, para todo $x \in U_\lambda$. Sea $g_\lambda = \varphi(U_\lambda)(s_\lambda) \in \mathscr{G}(U_\lambda)$.
Queremos ver que si $\rho^U_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\lambda) = \rho^U_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\mu)$ para cada λ y μ, entonces existe una única $g \in \mathscr{G}(U)$ tal que $\rho^U_{U_\lambda}(g) = g_\lambda$. Ahora bien, si $x \in U_\lambda \cap U_\mu$, entonces $f(x) = (s_\lambda)_x = (s_\mu)_x$, por lo tanto $\rho^U_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\lambda) - \rho^U_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\mu)$ tiene tallo cero en cada punto de $U_\lambda \cap U_\mu$. Aplicando φ, tenemos que $\rho^U_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\lambda) - \rho^U_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\mu)$ tiene tallo cero en cada punto. Por la aplicación de tallos tenemos $\rho^U_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\lambda) - \rho^U_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\mu) = 0$. Ahora, como $\mathscr{G}$ es gavilla, tal g existe.

Finalmente, debemos ver que si definimos $\psi(U)(f) = 0$, entonces tenemos un morfismo de gavillas, bien definido, que satisface $\varphi = \psi \circ \theta$. Si $f = \theta(U)(s)$, entonces $\psi(f) = \varphi(s)$. Por lo tanto, si $f \in \mathscr{F}^+(U)$, entonces existe una cubierta abierta $\{U_\lambda\}$ de U y elementos $s_\lambda \in \mathscr{F}(U_\lambda)$ con $\rho^U_{U_\lambda}(f) = \theta_{U_\lambda}(s_\lambda)$. De donde $\psi_{U_\lambda}(\rho^U_{U_\lambda}(f)) = \varphi_{U_\lambda}(s_\lambda)$, y por lo tanto $\psi_U(f)$ es el único elemento que es obtenido por pegado de $\varphi_{U_\lambda}(s_\lambda)$.

□

1.6. Espacios con gavilla

Definición 1.6.1. Sea X un espacio topológico. Un espacio, con gavilla, sobre X, es un par (E, π) con E un espacio topológico, y $\pi : E \to X$ un morfismo continuo tal que π es un homeomorfismo local, es decir, para cada $y \in E$ existe una vecindad $V \ni y$ y una vecindad $U \ni \pi(y)$ tal que $\pi|_V : V \to U$ es un homeomorfismo de V sobre U

Definición 1.6.2. Un morfismo de espacios con gavilla $f : (E, \pi) \to (E', \pi')$ es un morfismo continuo $f : E \to E'$ tal que el diagrama
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
conmuta, es decir, $\pi = \pi' \circ f$

Ejemplo 1.6.3. Sea E una hélice en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, \sin t, \cos t) \in E \subset \mathbb{R}^3$ con la topología inducida por $\mathbb{R}^3$. Consideremos el morfismo proyección $\rho : E \to \mathbb{R}^2$ dado por $(t, \sin t, \cos t) \mapsto (\sin t, \cos t)$. Como $\rho : E \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo local, (E, ρ) induce un espacio con gavilla.

1.7. Gavilla de secciones

Definición 1.7.1. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla sobre el espacio X y sea $U \subseteq X$ abierto. Una sección de $\mathscr{F}$ sobre U es una función continua $\sigma : U \longrightarrow \mathscr{F}$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathbf{1}_U$, es decir tal que el siguiente diagrama es conmutativo.
$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F} \arrow[dr, "\pi"] & \\ U \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\mathbf{1}"'] & & X \end{tikzcd}$$

Sean $V \subseteq U$ abiertos en X y consideramos el morfismo restrición $\rho^U_V : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$. Tenemos que para todo $x \in U$, σ da una elección continua de un punto $\sigma(x) \in \pi^{-1}(x)$ (el tallo de π sobre x), es decir, $\sigma(x) \in \mathscr{F}_x$ para cada $x \in U$.

Proposición 1.7.2. *Si dos secciones son iguales en un punto $x \in U$, entonces son iguales en todos los puntos de una vecindad de x.*

Demostración. Sean $\sigma_1 : U_1 \longrightarrow \mathscr{F}$ y $\sigma_2 : U_2 \longrightarrow \mathscr{F}$ son tales que $V_i = \sigma_i(U_i)$, $i = 1, 2$. Supongamos que $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) \in \mathscr{F}_x$, entonces $\pi \circ \sigma_1|_{U_1 \cap U_2} = \pi \circ \sigma_2|_{U_1 \cap U_2}$. Luego como π es inyectiva sobre cada V_i, entonces $\sigma_1 = \sigma_2$. □

Construcción de una gavilla $\mathscr{F}$ de secciones de σ:
Sean X y E espacios topológicos y $\pi : E \to X$ un morfismo continuo. Dado $U \subseteq X$ abierto, sea

$$\mathscr{F}(U) = \left\{ \sigma : U \to E \text{ morfismos continuos tales que } \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r] & X \end{tikzcd} \text{ conmuta, es decir, } \pi \circ \sigma = \mathbf{1}_U \right\}$$

Si $U \supseteq V$ son abiertos en X, entonces

$$\rho^U_V : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$$

$$\sigma \mapsto \sigma\,|_V$$

1.8. Espacio étalé

Definición 1.8.1. Dada una pregavilla $\mathscr{F}$ en X, construimos el espacio étalé $\widetilde{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$ de la siguiente forma.

Consideremos el conjunto $\widetilde{\mathscr{F}} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{F}_x$ y el mapeo proyección

$$\pi : \widetilde{\mathscr{F}} \to X$$

donde $\pi(s) = x$ si $s \in \mathscr{F}_x$

Así que para cada $U \subseteq X$ abierto y para cada $s \in \mathscr{F}(U)$ obtengo un morfismo

$$\bar{s} : U \to \widetilde{\mathscr{F}}$$

$$x \longmapsto s_x$$

Este morfismo tiene la propiedad de que $\pi \circ \bar{s} = \mathbf{1}_U$, es decir, es una sección de π sobre U y se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathscr{F}} \arrow[r, "\pi"] & X \\ U \arrow[u, "\bar{s}"] \arrow[ur, "\mathbf{1}_U"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora damos a $\widetilde{\mathscr{F}}$ la topología más fuerte de tal forma que todos los morfismos $\bar{s} : U \to \widetilde{\mathscr{F}}$ sean continuos, para cada $U \subseteq X$ y para cada $s \in \mathscr{F}(U)$.

Teorema 1.8.2. *Toda gavilla de conjuntos en X es isomorfa a una gavilla de secciones de un espacio étalé en X.*

Demostración. Sea $(\mathscr{F}, \pi)$ un espacio étalé en X y sea $\widetilde{\mathscr{F}}(U)$ el conjunto de secciones de $\widetilde{\mathscr{F}}$ en U. Entonces tenemos un morfismo de gavillas que consta de las aplicaciones canónicas $\varphi : \mathscr{F}(U) \to \widetilde{\mathscr{F}}(U)$. Debemos probar que φ es biyectiva si y sólo si $\mathscr{F}$ es gavilla.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathscr{F}$ es gavilla, entonces

(a) Sean $s, s' \in \mathscr{F}(U)$ tales que definen la misma sección de $\widetilde{\mathscr{F}}$ en U. Como $\overline{s}(x) = \overline{s}'(x)$, entonces existe una vecindad de x en la cual las restricciones son iguales. Así que existe una cubierta abierta para U, digamos $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ tal que $\rho^U_{U_\lambda}(s) = \rho^U_{U_\lambda}(s')$ y como $\mathscr{F}$ es gavilla, entonces $s = s'$. Por lo que φ es inyectiva.

(b) Sea $f : U \to \widetilde{\mathscr{F}}$ una sección. Como dos secciones que coinciden en un punto coinciden en una vecindad podemos considerar una cubierta abierta $U = \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ y $s_\lambda \in \mathscr{F}(U_\lambda)$ tal que $\overline{s}_\lambda = f \in U_\lambda$. Como $\overline{s}_\lambda = \overline{s}'_\mu \in U_\lambda \cap U_\mu$, y como se cumple (M) de la definición de gavilla, tenemos que $\rho^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\mu)$, entonces por el axioma de pegado existe $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\rho^U_{U_\lambda}(s) = s_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$, es decir, $\overline{s} = f$ en U. Por lo tanto φ es suprayectiva.

Entonces por (a) y (b) φ es biyectivo.

($\Rightarrow$) Esta implicación es sencilla. □

Observemos que el teorema muestra que toda pregavilla de conjuntos $\mathscr{F}$ define canónicamente un espacio étalé en X, es decir, una gavilla de conjuntos en X.

Además tenemos las siguientes observaciones:

I. Dada la proyección $\pi : \mathscr{F} \longrightarrow X$, donde $\pi(f) = x$ si $f \in \mathscr{F}_x$, entonces π es un homeomorfismo local, es decir, que para toda $f \in \mathscr{F}$ existe una vecindad V de f y una vecindad U de $\pi(f)$ tal que $\pi\mid_V$ es un homeomorfismo de V sobre U. Denotamos por $\mathscr{F} + \mathscr{F}$ al subconjunto de $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ tal que si $(f, g) \in \mathscr{F} + \mathscr{F}$ entonces $\pi(f) = \pi(g)$. Aquí estamos definiendo las clases de equivalencia de los tallos.

II. La operación de grupo y de inverso son continuas, es decir, $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$ es tal que $f \mapsto -f$ y $\varphi : \mathscr{F} + \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$ satisface $(f, g) \mapsto f + g$

Definición 1.8.3. Si $U \subseteq X$ es un abierto, la colección de $\mathscr{F}_x$ para $x \in U$, dotada de la topología inducida por $\mathscr{F}$ es una gavilla sobre U, que se denota como $\mathscr{F}(U)$ y es llamada la gavilla inducida por $\mathscr{F}$ sobre U.

1.9. Homomorfismos

Definición 1.9.1. Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ gavillas de conjuntos en X. Un homomorfismo de gavillas es un morfismo de las pregavillas correspondientes $f(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$. Se denota por $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ al conjunto de homomorfismos de $\mathscr{F}$ a $\mathscr{G}$.

Así, dados $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ y $g \in \mathrm{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{H})$, la composición se define como $(g, f) \mapsto g \circ f$ y cumple

1. Dado $\mathbf{1}_{\mathscr{F}} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{F})$ y $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $f \circ \mathbf{1}_{\mathscr{F}} = f$ y para $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{F})$, $\mathbf{1}_{\mathscr{F}} \circ f = f$.
2. Dados $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $g \in \mathrm{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{H})$, $h \in \mathrm{Hom}(\mathscr{H},\mathscr{I})$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Definiremos ahora las pregavillas núcleo, imagen y conúcleo de un homomorfismo y veremos las condiciones que garantizan que sean gavillas.

Definición 1.9.2. Sea $f : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X. Para $U \subseteq X$ abierto sea $\mathscr{F}(U) = \{s \in \mathscr{G}(U) : f(U)(s) = 0\}$, entonces $\mathscr{F}$ es una gavilla de grupos aditivos sobre X llamada núcleo y denotada $\ker(f)$.

Demostración. Sea $V \subseteq U$ abierto en X y sean $\rho^U_V : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(V)$ y $\overline{\rho}^U_V : \mathscr{H}(U) \to \mathscr{H}(V)$ los morfismos restricción de las gavillas $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$. De la definición de homomorfismo de gavillas, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] & \mathscr{H}(U) \arrow[d, "\overline{\rho}^U_V"] \\ \mathscr{G}(V) \arrow[r, "f(V)"'] & \mathscr{H}(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Entonces tengo $\rho^U_V(\mathscr{G}(\mathscr{F})(U)) \subseteq \mathscr{F}(V)$. Definimos el morfismo restricción $\rho^U_V : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ como la restricción $\rho^U_V : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(V)$ a $\mathscr{F}(U)$, entonces $\mathscr{F}$ es una pregavilla de grupos aditivos sobre X.
Veamos que $\mathscr{F}$ satisface (M) y (G).
Como $\mathscr{G}$ es una gavilla, entonces $\mathscr{F}$ satisface (M).
Ahora, para $U \subseteq X$ abierto, sea $U = \bigcup_{\lambda\in\lambda} U_\lambda$ una cubierta abierta de U. Supongamos que para $U_{\lambda\mu} = U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ se tiene $\rho^{U_\lambda}_{U_{\lambda\mu}}(s_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_{\lambda\mu}}(s_\mu)$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y $s_\lambda \in \mathscr{F}(U_\lambda)$. Tomando $s_\lambda \in \mathscr{G}(U_\lambda)$ existe $s \in \mathscr{G}(U)$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$, $\rho^U_{U_\lambda}(s) = s_\lambda$ en $\mathscr{G}$. Sea $t = f(U)(s)$ y $t_\lambda = \rho^U_{U_\lambda}(t)$ en $\mathscr{H}$. Entonces $t_\lambda = f(U_\lambda)(\rho^U_{U_\lambda}(s)) = f(U_\lambda)(s_\lambda) = 0$, (con la restricción en $\mathscr{G}$). Luego como $\mathscr{H}$ es gavilla, entonces $t = 0$ y por lo tanto $s \in \mathscr{F}(U)$ satisface (G). □

Proposición 1.9.3. *Si $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de pregavillas, entonces $(kerf)_x = kerf_x$*

Demostración. $t \in (kerf)_x \Leftrightarrow$ existe $U \ni x$ abierto y $s \in ker(f)(U)$ tal que $t = s_x \Leftrightarrow$ existe $U \ni x$ abierto y $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $t = s_x$ y $f(U)(s) = 0 \Leftrightarrow f_x(t) = 0$ □

Sea ahora $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de gavillas, entonces la pregavilla imagen $\mathrm{im}\, f \subseteq \mathscr{G}$ no es en general una gavilla. El siguiente ejemplo muestra un caso en que esto pasa:

Ejemplo 1.9.4. Sea $X = \mathbb{C} - 0$. Para cada conjunto abierto U sea $\mathscr{F}(U)$ el grupo aditivo de funciones holomorfas y $\mathscr{G}(U)$ el grupo multiplicativo de funciones holomorfas que no se anulan en ninguna parte, en U. Sea $\exp : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ dado por $\exp(f) = e^{2\pi i f}$. Entonces im(exp) no es una gavilla. Para ver esto considero una rama de la función logaritmo, $\exp(\log z) = z \in \mathrm{im}(\exp)$ en el subconjunto abierto de X definido por la rama. Esos conjuntos abiertos cubren X, pero $f(z) = z$ no tiene preimagen global en todo X, es decir, no existe f tal que $\exp(f)\mid_{U_j} = s_j$. Así no puedo encontrar una sección global $t \in \mathrm{im}(\exp)$ tal que $t\mid_{U_j} = s_j$ y por tanto im(exp) no es gavilla. En otras palabras, $e^{2\pi i f}$ es localmente invertible, pero no tiene inversa holomorfa en todo X.

La gavilla asociada a la pregavilla imagen es denotada como $\Im(f)$ y ésta se dice que es la imagen del morfismo $f : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$.
Con esto puedo definir el conúcleo de un homomorfismo como sigue:

Definición 1.9.5. Sea $f : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ un homomorfismo. Para cada $U \subseteq X$ abierto, definimos $C(U) = \operatorname{coker} f(U) = \mathscr{H}(U)/\Im f(U)$.

Afirmación: coker es una pregavilla de grupos aditivos.

Demostración. Sean $V \subseteq U$ abiertos en X. El morfismo $\rho_V^U : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(V)/\Im f(V)$ es tal que si $s \in \mathscr{F}(U)$, entonces $\rho_V^U(\Im f(U)(s)) = f(V)\rho_V^U(s) \in \Im f(V)$. Por tanto doy un morfismo inducido $\rho_V^U : C(U) \to C(V)$, de donde C se vuelve pregavilla.
Así tengo que $C(U)$ es una pregavilla de grupos aditivos. □

Definición 1.9.6. Sea $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de gavillas.

1. f es monomorfismo si $\ker f = 0$
2. f es epimorfismo si $\mathrm{im}\, f \approx \mathscr{G}$

1.10. Subgavilla y gavilla cociente

Definición 1.10.1. Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas en X y $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un monomorfismo. Entonces $\mathscr{F}$ es subgavilla de $\mathscr{G}$.

Ejemplo 1.10.2. La gavilla cero es una subgavilla de cada gavilla.

Ejemplo 1.10.3. Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{F}'$ son subgavillas de una gavilla G, entonces $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$ si y sólo si tienen los mismos tallos, es decir, $\mathscr{F}_x = \mathscr{F}'_x$ para cada $x \in X$.

Definición 1.10.4. Sea $\mathscr{R}$ subgavilla de $\mathscr{F}$. Definimos la gavilla cociente como la gavilla asociada a la pregavilla

$$U \to \mathscr{F}(U)/\mathscr{R}(U)$$

.

Veamos cómo se hace la construcción.
Sea $\mathscr{R}$ una subgavilla de conjuntos en X y supongamos que para todo $U \subseteq X$ abierto hay una relación de equivalencia $\mathscr{R}(U)$ en el conjunto $\mathscr{F}(U)$. Es decir, se satisface la siguiente relación $s \equiv t \bmod \mathscr{R}(U)$ si y sólo si $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es tal que para todo λ, $\rho^U_{U_\lambda}(s) \equiv \rho^U_{U_\lambda}(t) \bmod \mathscr{R}(U_\lambda)$. Si esto pasa doto a la familia de conjuntos cociente $\mathscr{F}(U)/\mathscr{R}(U)$ de una estructura de pregavilla. Así para $V \subseteq U$ definimos el morfismo restricción por:

$$\rho^U_V : \mathscr{F}(U)/\mathscr{R}(U) \to \mathscr{F}(V)/\mathscr{R}(V)$$

Con esto tengo que $\rho^U_U = \mathbf{1}_U$ y $\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$ y por lo tanto es una pregavilla.
Ahora veamos que es monopregavilla.
Sea $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ una cubierta abierta de X y sean $s, t \in \mathscr{F}(U)/\mathscr{R}(U)$ tales que para todo $\lambda \in \Lambda$ se tiene $\rho^U_{U_\lambda}(s) = \rho^U_{U_\lambda}(t)$. Esto pasa si y sólo si $\rho^U_{U_\lambda}(s) - \rho^U_{U_\lambda}(t) = 0 \Leftrightarrow \rho^U_{U_\lambda}(s) - \rho^U_{U_\lambda}(t) \equiv 0 \bmod \mathscr{R}(U_\lambda) \Leftrightarrow \rho^U_{U_\lambda}(s-t) \equiv 0 \bmod \mathscr{R}(U_\lambda) \Leftrightarrow s - t \equiv 0 \bmod \mathscr{R}(U_\lambda) \Leftrightarrow s = t$ y por lo tanto se tiene (M).

El axioma (G) no se cumple en general.

Así, para que la pregavilla cociente sea una gavilla, hacemos lo siguiente:
Dado el morfismo

$$\mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(U)/\mathscr{R}(U) = (\mathscr{F}/\mathscr{R})(U)$$

$$\mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{F}_x/\mathscr{R}_x = \mathscr{H}_x$$

Dotamos al conjunto $\mathscr{H} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{H}_x$ de la topología cociente, inducida por la topología de $\mathscr{F}$. Veamos que es gavilla.
Sea $f_x \in \mathscr{F}_x$ y $U \subseteq X$ abierto, con $U = \bigcup_{x\in X} U_x$ cubierta abierta de U. Primero observamos que es una monopregavilla ya que $\rho^U_{U_x}(f_x) = \rho^U_{U_x}(g_x) \Leftrightarrow f_x - g_x \equiv 0 \bmod \mathscr{R}_x \Leftrightarrow f = g$ por la proposición 1.4.5. Ahora bien, el axioma de pegado se cumple porque $\mathscr{H}$ tiene la topología cociente. Entonces la pregavilla cociente es una gavilla.

1.11. Suma directa

Definición 1.11.1. Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas.
Definimos la pregavilla $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ (suma directa) por

$$\rho^U_V : \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(V) \oplus \mathscr{G}(V)$$

$$(s,t) \longmapsto (\rho_V^U(s), \rho_V^U(t))$$

para $V \subseteq U$ abierto en X.

Proposición 1.11.2. *($\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$) es una gavilla.*

Demostración. Veamos que satisface los axiomas M y G.
Sea $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ una cubierta abierta de U. Sean $(s,t),(s',t') \in \mathscr{F}(U)\oplus\mathscr{G}(U)$ tales que $\rho^U_{U_\lambda}(s,t) = \rho^U_{U_\lambda}(s',t')$. Entonces $(\rho^U_{U_\lambda}(s),\rho^U_{U_\lambda}(t)) = (\rho^U_{U_\lambda}(s'),\rho^U_{U_\lambda}(t')) \Leftrightarrow \rho^U_{U_\lambda}(s) = \rho^U_{U_\lambda}(s')$ y $\rho^U_{U_\lambda}(t) = \rho^U_{U_\lambda}(t')$. Pero como $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son gavillas, entonces $s = s'$ y $t = t'$. Por lo tanto es monopregavilla.

Ahora, sea $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ una cubierta abierta de U y sea $(s_\lambda,t_\lambda) \in \mathscr{F}(U_\lambda)\oplus\mathscr{G}(U_\lambda)$ tal que para todo $\lambda \in \Lambda$ se tenga $\rho^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\lambda,t_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\mu,t_\mu)$. Denotemos a $U_\lambda \cap U_\mu$ por $U_{\lambda\mu}$, donde $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$. Veamos que existe $(s,t) \in \mathscr{F}(U_\lambda)\oplus\mathscr{G}(U_\lambda)$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ se tiene $\rho^U_{U_\lambda}(s,t) = (s_\lambda,t_\lambda)$. Entonces $(\rho^{U_\lambda}_{U_{\lambda\mu}}(s_\lambda),\rho^{U_\lambda}_{U_{\lambda\mu}}(t_\lambda)) = (\rho^{U_\mu}_{U_{\lambda\mu}}(s_\mu),\rho^{U_\mu}_{U_{\lambda\mu}}(t_\mu)) \Leftrightarrow \rho^{U_\lambda}_{U_{\lambda\mu}}(s_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_{\lambda\mu}}(s_\mu)$ y $\rho^{U_\lambda}_{U_{\lambda\mu}}(t_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_{\lambda\mu}}(t_\mu)$. Como $\mathscr{F}$ es gavilla entonces existe $s \in \mathscr{F}(U_\lambda)$ tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, $\rho^U_{U_\lambda}(s) = s_\lambda$. Análogamente como $\mathscr{G}$ es gavilla, existe $t \in \mathscr{G}(U_\lambda)$ tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, $\rho^U_{U_\lambda}(t) = t_\lambda$. Es decir, existe $(s,t) \in \mathscr{F}(U_\lambda)\oplus\mathscr{G}(U_\lambda)$ tal que $\rho^U_{U_\lambda}(s,t) = (s_\lambda,t_\lambda)$. Por lo tanto ($\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$) es gavilla. □

Ejemplo 1.11.3. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla, entonces $\mathscr{F}^m = \mathscr{F} \oplus \ldots \oplus \mathscr{F}$ es la suma directa de m copias de la gavilla $\mathscr{F}$.

1.12. Sucesiones exactas

Definición 1.12.1. Sea X un espacio topológico y sean $\mathscr{F},\mathscr{G},\mathscr{H}$ gavillas sobre X y $\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\gamma} \mathscr{H}$ una sucesión de morfismos de gavillas, entonces la sucesión es exacta en $\mathscr{G}$ si la sucesión inducida en los tallos $\mathscr{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathscr{G}_x \xrightarrow{\gamma_x} \mathscr{H}_x$ es exacta para todo $x \in X$.

Definición 1.12.2. Una sucesión exacta corta es una sucesión $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ que es exacta en $\mathscr{F},\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$, donde 0 denota la gavilla constante cero.

Observación La exactitud es una propiedad local ya que una sucesión exacta de pregavillas no necesariamente es una sucesión exacta de gavillas.

Teorema 1.12.3. *Sea $f_x : \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$ el homomorfismo inducido en los tallos en x de un homorfismo $f : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ de gavillas de grupos aditivos. Entonces los tallos* $(\ker f)_x, (\operatorname{im} f)_x, (\operatorname{coker} f)_x$ *de* $\ker f, \operatorname{im} f, \operatorname{coker} f$ *respectivamente, coinciden en x con el núcleo, imagen y conúcleo de un homomorfismo de grupos aditivos f_x, es decir,* $(\ker f)_x = \ker f_x, (\operatorname{im} f)_x = \operatorname{im} f_x, (\operatorname{coker} f)_x = \operatorname{coker} f_x$.

Demostración. Para $U \subseteq X$ abierto, sea $\mathscr{F}(U) = \ker\{f(U) : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{H}(U)\}$, $\mathfrak{I}(U) = f(V)(\mathscr{G}(U))$ y $C(U) = \mathscr{H}(U)/\mathfrak{I}(U)$. Entonces tengo la siguiente sucesión exacta de grupos aditivos:

$$0 \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U) \to \mathfrak{I}(U) \to 0$$

$$0 \to \mathfrak{I}(U) \to \mathscr{H}(U) \to C(U) \to 0$$

Como el límite inductivo preserva la exactitud [2], entonces las sucesiones siguientes son exactas.

$$0 \to \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U) \to \varinjlim_{x\in U} \mathscr{G}(U) \to \varinjlim_{x\in U} \mathfrak{I}(U) \to 0$$
$$0 \to \varinjlim_{x\in U} \mathfrak{I}(U) \to \varinjlim_{x\in U} \mathscr{H}(U) \to \varinjlim_{x\in U} C(U) \to 0$$

Ahora, como para una pregavilla $\mathscr{G}$ y su gavilla asociada sobre un espacio topológico X, sus tallos en x coinciden, entonces

$$0 \to (\ker f)_x \to \mathscr{G}_x \to (\operatorname{im} f)_x \to 0$$

$$0 \to (\operatorname{im} f)_x \to \mathscr{H}_x \to (\operatorname{coker} f)_x \to 0$$

Como f_x es el morfismo $\mathscr{G}_x \to (\operatorname{im} f)_x \to \mathscr{H}_x$ que se obtiene de la sucesión exacta anterior, tengo la prueba del teorema. □

1.13. Extensión y restricción de una gavilla

Definición 1.13.1. Sea X un espacio topológico, Y un subespacio de X, $\mathscr{F}$ una gavilla sobre X. Decimos que $\mathscr{F}$ está concentrado sobre Y o es nulo fuera de Y si $\mathscr{F}_x = 0$ para cada $x \in X - Y$.

Proposición 1.13.2. *Si la gavilla $\mathscr{F}$ está concentrada sobre Y, el homomorfismo $\rho_Y^X : \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(Y, \mathscr{F}(Y))$ es biyectivo.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla sobre X y sea $\sigma \in \Gamma(X, \mathscr{F})$. Como $\mathscr{F}$ está concentrada en Y, entonces para todo $x \notin Y$ tenemos $\mathscr{F}_x = 0$, así que si $\rho_Y^X(\sigma) = 0$, se tiene que $\sigma = 0$ y por lo tanto ρ_Y^X es inyectivo. Por otra parte, sea $\sigma \in \Gamma(Y, \mathscr{F}(Y))$. Entonces tengo dos casos:

1. Si $x \notin Y$, $\sigma(x) = 0$ y la aplicación $x \mapsto s(x)$ es continua en $X - Y$.
2. Si $x \in Y$ entonces existe una sección de $\mathscr{F}$ en una vecindad U de x, digamos s tal que $s(x) = \sigma(x)$. Como σ es continua sobre Y, entonces existe $V \subseteq U$ vecindad de x tal que para todo $y \in V \cap Y$ se tiene $s(y) = \sigma(y)$. Nuevamente tengo dos casos:

[2] Vea el teorema A.0.4

1' Si $y \notin Y$ entonces $s(y) = 0$ y $\mathscr{F}_y = 0$.

2' Si $y \in Y$ entonces $s(y) = \sigma(y)$ en la vecindad $V - V \cap Y$, es decir, σ y s coinciden en la vecindad V. Entonces σ es continua en una vecindad de Y y por lo tanto es continua en todas partes.

En resumen tengo:

$$\sigma(x) = \begin{cases} s(x) & \text{si } x \in Y \\ 0 & \text{si } x \notin Y \end{cases}$$

Es decir, $\rho^X_Y(\sigma) = s$ y por lo tanto el homomorfismo es suprayectivo. □

Proposición 1.13.3. *Sea Y un subespacio cerrado de X y sea $\mathscr{G}$ una gavilla en Y. Sea*

$$\mathscr{F}_x = \begin{cases} \mathscr{G}_x & \texttt{si } x \in Y \\ 0 & \texttt{si } x \notin Y \end{cases}$$

y sea $\mathscr{F} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{F}_x$. Entonces podemos dotar a $\mathscr{F}$ de una única estructura de gavilla sobre X tal que $\mathscr{F}|_Y = \mathscr{G}$.

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto y sea $\sigma \in \Gamma(U \cap Y, \mathscr{G})$ tal que para $x \in X$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U - U \cap Y \\ s(x) & \text{si } x \in U \cap Y \end{cases}$$

Entonces $\mathscr{F}$ está concentrada sobre $U \cap Y$. Luego por la proposición anterior tengo que el morfismo

$$\rho^X_Y : \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(U \cap Y, \mathscr{G})$$

es biyectivo. Y por lo tanto $\mathscr{F}|_Y = \mathscr{G}$. Así que los tallos están dados por:

$$\mathscr{F}_x = \begin{cases} \mathscr{G}_x & \text{si } x \in Y \\ 0 & \text{si } x \in X - Y \end{cases}$$

Ahora extendamos σ por cero sobre $U - U \cap Y$. Entonces para U abierto en Y existe un morfismo inyectivo

$$\Gamma(U, \mathscr{G}) \to \Gamma(U \cap X, \mathscr{F})$$

$$\sigma \longmapsto \rho^U_{U \cap X}(\sigma)$$

y una sección $s \in \Gamma(U \cap X, \mathscr{F})$ está en la imagen de este morfismo si y sólo si s es continua cuando es extendida a U por la definición $s(y) = 0$ si $y \in U - (U \cap X)$. Esto pasa si y sólo si $\{x \in U \cap X : s(x) \neq 0\}$ es cerrado en U. Esta condición es independiente de $\mathscr{F}(Y)$ y por lo tanto $\mathscr{F}(Y)$ es única bajo isomorfismo.
Para su existencia sea $(\mathscr{F}, \Pi)$ el espacio con gavilla de $\mathscr{F}$ sobre X y $E = \mathscr{F} \coprod Y/\sim$, donde $\sim$ es la relación

de equivalencia más chica tal que $x \sim 0_x$ para cada $x \in X$, donde 0_x es el elemento cero del tallo $\Pi^{-1}(x)$ en x. Doto a E de la topología cociente. Sea $\Pi' : E \to Y$ el morfismo natural. Entonces $\mathscr{F}(Y) = \mathscr{G}$ es la gavilla asociada donde $\mathscr{F}(Y)$ es una extensión por cero.
Así tengo que la gavilla $\mathscr{F}(Y)$ existe. □

Decimos que $\mathscr{F}$ es la gavilla obtenida al extender $\mathscr{G}$ por cero fuera de Y y la denotamos por $\mathscr{G}^Y$.

Definición 1.13.4. Sean X y Y espacios topológicos y $\varphi : X \to Y$ un morfismo continuo. Sea $\mathscr{F}$ una pregavilla en X. La pregavilla $\varphi_*\mathscr{F}$ en Y es llamada la imagen directa de $\mathscr{F}$ por φ y para $V \subseteq U$ abierto en Y está dada por

$$\varphi_*\mathscr{F} = \begin{cases} (\varphi_*\mathscr{F})(U) & = \mathscr{F}(\varphi^{-1}U) \\ \rho_V^U & = \rho_{\varphi^{-1}(V)}^{\varphi^{-1}(U)} \end{cases}$$

Ejemplo 1.13.5. Sea $Y = \mathbb{R}^2$ y $X \subseteq Y$ un disco abierto. Sea $\varphi : X \hookrightarrow Y$ y sea $\mathscr{F}$ la gavilla constante en X con tallo $\mathbb{Z}$. Sea $\mathscr{G}$ la gavilla constante $\mathbb{Z}$ en Y. Entonces para el conjunto abierto V se tiene $\Gamma(V, \varphi_*\mathscr{F}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $\Gamma(V, \mathscr{G}) = \mathbb{Z}$. El tallo de $\varphi_*\mathscr{F}$ es

$$(\varphi_*\mathscr{F}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } x \in \overline{X} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto $\varphi_*\mathscr{F}$ no es una gavilla constante en Y, es decir, $\varphi_*\mathscr{F}$ no necesariamente es una extensión por cero.

Capítulo 2

Gavillas de anillos y gavillas de módulos

En este capítulo estudiaremos gavillas con una estructura algebraica, la cual al ser considerada en los tallos se preserva topológicamente en el espacio con gavilla.

2.1. Gavillas de anillos

Definición 2.1.1. Una gavilla de anillos $\mathcal{A}$ es una gavilla de grupos abelianos $\mathcal{A}_x$ con $x \in X$, donde cada $\mathcal{A}_x$ está dotado de una estructura de anillo tal que la aplicación

$$\mathcal{A} + \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

$$(f, g) \longrightarrow f \cdot g$$

es continua. Supondremos siempre que cada $\mathcal{A}_x$ posee un elemento unidad que varía continuamente con x.

Así tengo las siguientes observaciones:

1. Si $\mathcal{A}$ es una gavilla de anillos en X, entonces para cada $U \subseteq X$ abierto, los conjuntos $\mathcal{A}(U)$ son anillos.
2. $\rho_V^U : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ es un homomorfismo de anillos para toda $V \subseteq U$.
3. $\mathcal{A}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{A}(U)$ está dotado de una estructura de anillo.
4. Un punto visto desde los espacios étalé en $\mathcal{A}$ de la forma

$$(f, g) \mapsto f + g$$

y

$$(f, g) \mapsto fg$$

definido por $\pi(u) = \pi(v)$ induce sobre cada tallo $\mathcal{A}_x$ una estructura de anillo que además es continua.

5. Si $s, t \in \Gamma(U, \mathcal{A})$, entonces $s + t$ y st son las secciones dadas por $x \mapsto s(x) + t(x)$ y $x \mapsto s(x)t(x)$.

Ejemplo 2.1.2. La estructura de gavilla de $X = Spec(\mathcal{A})$

Sea $\mathcal{A}$ un anillo conmutativo con 1. Un ideal $P \neq \mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ es primo si el anillo $\mathcal{A}/P$ es dominio entero. Sea $X = \operatorname{Spec} \mathcal{A}$= $\{P$ ideal de $\mathcal{A}$ tal que P es primo$\}$.
Defino una topología en X, (la topología de Zariski), en la cual los conjuntos cerrados son de la forma:

$V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} \mathcal{A} : P \supseteq I\} = \{P \in \operatorname{Spec} \mathcal{A} : f(P) = 0$ para cada $f \in I\}$, donde I es un ideal de A.
Quiero definir una gavilla de anillos sobre X.
Así que tomo K el campo de fracciones de $\mathcal{A}$. Si P es un ideal primo de $\mathcal{A}$, tomo $\mathcal{A}_P = \left\{\frac{x}{y} \in K : x, y \in \mathcal{A}, y \notin P\right\}$.
Este anillo tiene como único ideal maximal ${}_P\mathcal{A}_P$, es decir, para todo $U \subseteq X$ abierto, no vacío se define: $\mathcal{A}(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{A}_P$.
Ahora, para cada $U \supseteq V$ defino el mapeo restricción

$$\rho_V^U : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$$

que tiene sentido porque $\mathcal{A}(U) \subseteq \mathcal{A}(V)$.
Por otra parte sea $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de abiertos no vacíos. Sea $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ y $s_\lambda \in \mathcal{A}(U_\lambda)$ tal que para cualquier λ, μ se tiene $\rho(s_\lambda) = \rho(s_\mu)$. Como $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, entonces $s_\lambda \in K$ es independiente de λ. Luego $s \in \mathcal{A}(U) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}(U_\lambda)$. Así que hay un sólo elemento que es inducido por s_λ en cada U_λ.
Por lo tanto $\mathcal{A}(U)$ es una gavilla de anillos sobre X.

2.2. Gavillas de módulos

Definición 2.2.1. Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de anillos sobre un espacio topológico X. Decimos que $\mathscr{F}$ es una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos si para cada $x \in X$, $\mathscr{F}_x$ está dotado de una estructura de $\mathcal{A}_x$-módulo.

De la definición tengo las siguientes observaciones:

1. Para todo $U \subseteq X$ abierto, el conjunto $\mathscr{F}(U)$ tiene una estructura de módulo sobre el anillo $\mathcal{A}(U)$ y es tal que para $V \subseteq U$,
$$\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$$
es un homomorfismo de módulos compatible con el homomorfismo de anillos
$$\rho_V^U : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$$

2. Si considero sobre X las gavillas producto $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ y $\mathcal{A} \times \mathscr{F}$ obtengo los homomorfismos de gavillas de conjuntos:
$$\mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$$

$$\mathcal{A} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$$

Y para cada $x \in X$

$$\mathscr{F}_x \times \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x$$

$$\mathcal{A}_x \times \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x$$

definen sobre $\mathscr{F}_x$ una estructura de módulo sobre el anillo $\mathcal{A}_x$.

2.3. Subgavilla y gavilla cociente

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de anillos, $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos. Sea $\mathscr{G}_x \subseteq \mathscr{F}_x$ para todo $x \in X$. Decimos que $\mathscr{G} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{G}_x$ es una subgavilla de $\mathscr{F}$ si:

(a) $\mathscr{G}_x$ es un $\mathcal{A}_x$ submódulo de $\mathscr{F}_x$ para cada $x \in X$.

(b) $\mathscr{G}$ es un subconjunto abierto de $\mathscr{F}$.

La condición (b) puede expresarse como:

(b') Si $x \in X$ y $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ en una vecindad U de x tal que si $s(x) \in \mathscr{G}_x$, entonces $s(y) \in \mathscr{G}_y$ para todo y suficientemente cercano a x.

Definición 2.3.2. Sea $\mathscr{G}$ una subgavilla de $\mathscr{F}$ y defino $\mathscr{H}_x = \mathscr{F}_x / \mathscr{G}_x$ para todo $x \in X$. Dotamos $\mathscr{H} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{H}_x$ con la topología cociente de la topología de $\mathscr{F}$. Entonces $\mathscr{H}$ es una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos llamada gavilla cociente de $\mathscr{F}$ por $\mathscr{G}$ y denotada $\mathscr{F}/\mathscr{G}$.

Demostración. Para cada $U \subseteq X$ abierto sea $\mathscr{H}(U) = \Gamma(U, \mathscr{F})/\Gamma(U, \mathscr{G})$. Si $V \subseteq U$ defino $\rho_V^U : \mathscr{H}(U) \to \mathscr{H}(V)$ por medio de los homomorfismos inducidos en los módulos cociente por los homomorfismos de restricción usuales $\rho_V^U : \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(V, \mathscr{F})$. Si dos secciones son equivalentes mod $\Gamma(U, \mathscr{G})$, su equivalencia se preserva al tomar el límite directo. Por lo que la gavilla definida por $\mathscr{H}(U)$ y ρ_V^U es $\mathscr{H}$. □

2.4. Homomorfismos

Definición 2.4.1. Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de anillos, $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas de $\mathcal{A}$-módulos. Un $\mathcal{A}$-homomorfismo de $\mathscr{F}$ en $\mathscr{G}$ es tal que si $\varphi_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$ es un $\mathcal{A}_x$-homomorfismo para todo $x \in X$, la aplicación definida por φ_x es continua.
Esto es equivalente a decir que si $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, entonces $x \mapsto \varphi_x(s(x)) \in \Gamma(U, \mathscr{G})$ y lo denotamos por $\varphi(s)$.

Proposición 2.4.2. *Sea $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un homomorfismo. Sea $\mathscr{N}_x = \ker \varphi_x$ y sea $\mathscr{I}_x$ la imagen de φ_x. Entonces $\mathscr{N} = \bigcup \mathscr{N}_x$ es una subgavilla de $\mathscr{F}$, $\mathscr{I} = \bigcup \mathscr{I}_x$ es una subgavilla de $\mathscr{G}$ y φ define un isomorfismo de $\mathscr{F}/\mathscr{N}$ sobre $\mathscr{I}$.*

Demostración. Sea $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ un $\mathcal{A}_x$-homomorfismo. Entonces para $x \in X$, $\mathscr{N}_x = \ker(\varphi_x) \subseteq \mathscr{F}_x$ y $\mathscr{I}_x = \mathrm{im}(\varphi_x) \subseteq \mathscr{G}_x$ son submódulos de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ respectivamente. Entonces φ_x define un isomorfismo $\mathscr{F}_x/\mathscr{N}_x \cong \mathscr{I}_x$.

Por otra parte, para $x \in U$, si $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ es una sección local tal que $s(x) \in \mathscr{N}_x$, entonces $\varphi \circ s(x) = 0 \in \Gamma(U, \mathscr{G})$ y para y suficientemente cercano a x, $\varphi \circ s(y) = 0$, de donde $s(y) \in \mathscr{N}_y$, entonces $\mathscr{N}$ es una subgavilla de $\mathscr{F}$.

Sea ahora $t \in \Gamma(U, \mathscr{G})$ una sección local tal que $t(x) \in \mathscr{I}_x$, entonces existe una sección local $s \in \mathscr{F}$ tal que $\varphi \circ s(x) = t(x)$. Así que para y suficientemente cercano a x se tiene $\varphi \circ s(y) = t(y) \in \mathscr{I}_y$, por lo que $\mathscr{I}$ es una subgavilla de $\mathscr{G}$ isomorfa a la gavilla cociente $\mathscr{F}/\mathscr{N}$. □

Llamamos a la gavilla $\mathscr{N}$ núcleo de φ y lo denotamos $\ker(\varphi)$, a la gavilla $\mathscr{I}$ la llamamos imagen de φ y la denotamos por $\mathrm{im}(\varphi)$ y la gavilla $\mathscr{G}/\mathscr{I}$ es llamada conúcleo de φ y se denota por $\mathrm{coker}\,(\varphi)$.

Decimos que un homomorfismo φ es inyectivo si cada φ_x es inyectivo, esto es equivalente a ver que $\ker(\varphi) = 0$, φ es suprayectivo si cada φ_x lo es, es decir, $\mathrm{coker}\,(\varphi) = 0$ y es biyectivo si es inyectivo y suprayectivo.

Las propiedades de homomorfismos de módulos se conservan en una gavilla de módulos. Tenemos por ejemplo que una sucesión de homomorfismos es exacta si la imagen de cada homomorfismo coincide con el núcleo del siguiente homomorfismo. Además si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un homomorfismo, las sucesiones siguientes son exactas.

$$0 \to \ker(\varphi) \to \mathscr{F} \to \mathrm{im}(\varphi) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{im}(\varphi) \to \mathscr{G} \to \mathrm{coker}\,(\varphi) \to 0$$

2.5. Suma directa de gavillas

Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de anillos, $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas de $\mathcal{A}$-módulos. Para todo $x \in X$ considero la suma directa de $\mathscr{F}_x$ y $\mathscr{G}_x$ dada por $\mathscr{F}_x \oplus \mathscr{G}_x$. Entonces la pareja $(f, g) \in \mathscr{F}_x \oplus \mathscr{G}_x$, donde $f \in \mathscr{F}_x$ y $g \in \mathscr{G}_x$.
Definimos $\mathscr{H} = \bigcup_{x \in X}(\mathscr{F}_x \oplus \mathscr{G}_x)$ y dotamos a $\mathscr{H}$ con la topología inducida por $\mathscr{F} \times \mathscr{G}$.

Definición 2.5.1. $\mathscr{H}$ es una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos llamada suma directa de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ y se denota por $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$.

Demostración. Como $\mathscr{F}_x$ y $\mathscr{G}_x$ son gavillas de $\mathcal{A}$-módulos, entonces para todo $x \in X$ la suma directa de los tallos $\mathscr{F}_x \oplus \mathscr{G}_x$ es una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos y por tanto lo es $\mathscr{H}$. □

Observemos que $s \in \Gamma(U, \mathscr{H})$ si x es de la forma $(s(x), t(x))$ con $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ y $t \in \Gamma(U, \mathscr{G})$. Con esto tengo que $\Gamma(U, \mathscr{F} \oplus \mathscr{G}) \cong \Gamma(U, \mathscr{F}) \oplus \Gamma(U, \mathscr{G})$.

2.6. Producto tensorial de gavillas

Definición 2.6.1. Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de anillos sobre X, $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos derechos, $\mathscr{G}$ una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos izquierdos.
Sea $U \subseteq X$ abierto. $\mathscr{F}(U) \otimes \mathscr{G}(U)$ es una pregavilla de $\mathcal{A}$-módulos.

Para $V \subseteq U$, el mapeo restricción está dado por

$$\mathscr{F}(U) \otimes \mathscr{G}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(V) \otimes \mathscr{G}(V)$$

$$\rho_V^U(f \otimes g) = \rho_V^U(f) \otimes \rho_V^U(g)$$

Entonces para cada $x \in X$ sea $\mathscr{H}_x = \mathscr{F}_x \otimes \mathscr{G}_x$ y sea $\mathscr{H} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{H}_x$.

Proposición 2.6.2. *Existe una única estructura de gavilla sobre $\mathscr{H}$ tal que si $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ y $t \in \Gamma(U, \mathscr{G})$, entonces $x \longmapsto s(x) \otimes t(x) \in \mathscr{H}_x$ es una sección de $\Gamma(U, \mathscr{H})$.*

Demostración. Veamos la unicidad:
Sea $\mathscr{H}$ dotada de una estructura de gavilla como en el enunciado y para $U \subseteq X$ abierto sean $s_\lambda \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, $t_\lambda \in \Gamma(U, \mathscr{G})$. La aplicación $x \longmapsto \sum s_\lambda(x) \otimes t_\lambda(x)$ es una sección de $\mathscr{H}$ en U. Observemos que todo $h \in \mathscr{H}_x$ se puede escribir como $h = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) \otimes g_\lambda(x)$, donde $f_\lambda \in \mathscr{F}_x$ y $g_\lambda \in \mathscr{G}_x$. Entonces para todo $h \in \Gamma(U, \mathscr{H})$, $h = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda(x) \otimes t_\lambda(x)$, donde s_λ y t_λ son secciones de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ respectivamente sobre un abierto U. Además $s_\lambda(x) = f_\lambda$ y $t_\lambda(x) = g_\lambda$. Por lo tanto toda sección de $\mathscr{H}$ se puede escribir de la forma anterior y con esto los grupos de secciones están determinados de forma única.
Ahora probemos la existencia:
Supongamos que $\mathcal{A}, \mathscr{F}, \mathscr{G}$ están definidos por

$$\varphi_V^U : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(V)$$

tal que $\varphi_V^U \circ \varphi_U^W = \varphi_V^W$, donde la gavilla así dada es una gavilla de anillos.

$$\psi_V^U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(V)$$

donde cada $\mathscr{F}(U)$ es un $\mathcal{A}(U)$-módulo con $\psi_V^U(a \cdot f) = \varphi_V^U(\mathcal{A})\psi_V^U(f)$, con $a \in \mathcal{A}(U)$, $f \in \mathscr{F}(U)$. Entonces $\mathscr{F}$ es una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos.

$$\chi_V^U : \mathscr{G}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(V)$$

donde cada $\mathscr{G}(U)$ es un $\mathcal{A}(U)$-módulo con $\chi_V^U(a \cdot g) = \varphi_V^U(\mathcal{A})\chi_V^U(g)$, con $a \in \mathcal{A}(U), g \in \mathscr{G}(U)$, entonces $\mathscr{G}$ es una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos.
Sea $\mathscr{H}(U) = \mathscr{F}(U) \otimes \mathscr{G}(U)$ el producto tensorial sobre $\mathcal{A}(U)$. Entonces ψ_V^U y χ_V^U al pasar al producto tensorial definen un homomorfismo

$$\eta_V^U : \mathscr{H}(U) \longrightarrow \mathscr{H}(V)$$

Por definición de gavilla asociada:

$$(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}) = \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U) \otimes \mathscr{G}(U)$$

Para $U \ni x$ abierto, el $\mathcal{A}(U)$ homomorfismo de módulos

$$\mathscr{F}(U) \otimes \mathscr{G}(U) \longrightarrow \mathscr{F}_x \otimes \mathscr{G}_x$$

induce un homomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos, dado por:

$$\eta : (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})_x \longrightarrow \mathscr{F}_x \otimes \mathscr{G}_x$$

Así puedo definir un homomorfismo bilineal de $\mathcal{A}$-módulos

$$\kappa : \mathscr{F}_x \times \mathscr{G}_x \longrightarrow (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})_x$$

Luego para $f_x \in \mathscr{F}_x$ y $g_x \in \mathscr{G}_x$ elijo $U \subseteq X$ abierto, $U \ni x$ y $f \in \mathscr{F}(U), g \in \mathscr{G}(U)$ tal que los tallos de f y g en x son f_x y g_x respectivamente.
Sea $\kappa(f_x, g_x) \in (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})_x$ determinado por $(f, g) \in \mathscr{F}(U) \otimes \mathscr{G}(U)$.
Como U es arbitrario, entonces $\kappa(f_x, g_x)$ es independiente de U y de f, g.
Ahora como κ es un homomorfismo bilineal, para $a_x, b_x \in \mathcal{A}_x, f_x, f_{1x}, f_{2x} \in \mathscr{F}_x$ y $g_x, g_{1x}, g_{2x} \in \mathscr{G}_x$ tengo
$\kappa(a_x f_{1x} + b_x f_{2x}, g_x) = a_x\kappa(f_{1x}, g_x) + b_x\kappa(f_{2x}, g_x)$
$\kappa(f_x, a_x g_{1x} + b_x g_{2x}) = a_x\kappa(f_x, g_{1x}) + b_x\kappa(f_x, g_{2x})$
Luego por la propiedad universal para el mapeo de producto tensorial tengo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_x \times \mathscr{G}_x \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & \mathscr{F}_x \otimes \mathscr{G}_x \arrow[dl, "\Lambda"] \\
& (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})_x &
\end{tikzcd}$$

donde Λ es el $\mathcal{A}$-homomorfismo determinado por la unicidad.
Ahora como $\eta(\kappa(f_x, g_x)) = f_x \otimes g_x$, entonces $\eta \circ \Lambda = \mathbf{1}$.
Luego por definición de η, tengo $\eta((f \otimes g)_x) = f_x \otimes g_x \in \mathscr{F}_x \otimes \mathscr{G}_x$ y por la definición de Λ, $\Lambda(f_x, g_x) = (f \otimes g)_x$, es decir, $\Lambda \circ \eta = \mathbf{1}$.

Por lo tanto Λ y η son isomorfismos de $\mathcal{A}$-módulos.
Así tengo que
$\varinjlim_{x\in U} \mathscr{H}(U) = \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U)\otimes\mathscr{G}(U) = \mathscr{H}_x$.
Por lo tanto $\mathscr{H}$ es una gavilla que satisface la condición del enunciado. □

Proposición 2.6.3. *Para una sucesión exacta de $\mathcal{A}$-módulos $\mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$, la sucesión obtenida por tensorar con un $\mathcal{A}$-módulo $\mathscr{G}$ sobre $\mathcal{A}_x$, $\mathscr{F}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G} \to \mathscr{F}_2 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G} \to \mathscr{F}_3 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G} \to 0$ es exacta.*

Demostración. Por propiedades del producto tensorial tengo que la siguiente sucesión

$$(\mathscr{F}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G})_x \to (\mathscr{F}_2 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G})_x \to (\mathscr{F}_3 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G})_x \to (0 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G})_x$$

es exacta y por la proposición 2.6.2 para $\lambda = 1,2,3$, $(\mathscr{F}_\lambda \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G}) = \mathscr{F}_{\lambda x} \otimes_{\mathcal{A}_x} \mathscr{G}_x$, es decir la sucesión en los tallos

$$\mathscr{F}_{1x} \otimes_{\mathcal{A}_x} \to \mathscr{F}_{2x} \otimes_{\mathcal{A}_x} \to \mathscr{F}_{3x} \otimes_{\mathcal{A}_x} \to 0$$

es exacta y por lo tanto $\mathscr{F}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G} \to \mathscr{F}_2 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G} \to \mathscr{F}_3 \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G} \to 0$ es exacta. □

En general todas las propiedades del producto tensorial de módulos se preservan en el producto tensorial de gavillas, con lo que tengo los siguientes isomorfismos canónicos

1. $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathscr{G} \oplus \mathscr{G}) \cong (\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G}) \oplus (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}_2)$
2. $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \cong \mathscr{F}$

   Si suponemos que $\mathcal{A}_x$ es conmutativo

3. $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G} \cong \mathscr{G} \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{F}$,
4. $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathscr{G} \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{K}) \cong (\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{A}} G) \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{K}$

2.7. Gavilla de gérmenes de homomorfismos de una gavilla en otra gavilla

Definición 2.7.1. Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de anillos y sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ gavillas de $\mathcal{A}$-módulos. Sea $U \subseteq X$ abierto y considero $\mathscr{H}(U) = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}(U), \mathscr{G}(U))$. Defino la restricción para $U \supseteq V$ como $\varphi_V^U : \mathscr{H}(U) \longrightarrow \mathscr{H}(V)$. La gavilla definida por $\mathscr{H}(U)$ y φ_V^U es llamada la gavilla de gérmenes de homomorfismos de $\mathscr{F}$ en $\mathscr{G}$ y la denoto por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.

Con base a la definición tengo las siguientes observaciones:

1. La pregavilla $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}|_U}(\mathscr{F}\,|_U, \mathscr{G}\,|_U)$ es una gavilla.

Demostración. Sea $\mathscr{H}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}|_U}(\mathscr{G}\mid_U, \mathscr{G}\mid_U)$. Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de U y sea $f \in \mathscr{H}(U)$. Defino la restricción por

$$\rho^U_{U_\lambda} : \mathscr{H}(U) \to \mathscr{H}(U_\lambda)$$

Con esto, $\mathscr{H}$ es una pregavilla de $\mathcal{A}$-módulos.
Supongamos que para $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda = \rho^U_{U_\lambda}(f) = 0$. Para $V \subseteq U$ abierto y $s \in \Gamma(V, \mathscr{F})$, sea $V_\lambda = U_\lambda \cap V$, entonces para $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda(V_\lambda)(\rho^V_{V_\lambda}(s)) = 0$. Entonces $f(V)(s) = 0$ y por lo tanto $f = 0$.
Ahora sea $f_\lambda \in \mathscr{H}(U_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ y supongamos que $\rho^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\mu)$. Para $V \subseteq U$ y $s \in (V, \mathscr{F})$, sea $t_\mu = f_\lambda(V_\lambda)(\rho^V_{V_\lambda}(s))$, $\lambda \in \Lambda$, entonces $\rho^{V_\lambda}_{V_\lambda\cap V_\mu}(t_\lambda) = \rho^{V_\mu}_{V_\lambda\cap V_\mu}(t_\mu)$ en $\mathscr{G}$.
Por lo tanto existe $t \in \mathscr{F}(U)$ tal que $\rho^V_{V_\lambda}(t) = t_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.
Por lo tanto t está determinada únicamente.
Así defino $f(V)(s) = t$, entonces $f(V) \in \mathscr{H}(V)$.
Como V es arbitrario, tengo la existencia de $f \in \mathscr{H}(U)$ tal que $f_\lambda = \rho^U_{U_\lambda}(f)$, $\lambda \in \Lambda$.
Por lo tanto $\mathscr{H}$ es gavilla.

□

2. Si los $\mathcal{A}_x$ son conmutativos, entonces cada $\mathscr{H}(U)$ es un $\Gamma(U, \mathcal{A})$-módulo y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos.

3. $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x$ define un $\mathcal{A}_x$ homomorfismo de $\mathscr{F}_x$ en $\mathscr{G}_x$. El homomorfismo canónico está dado por $\rho : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x)$ que en general no es inyectivo ni suprayectivo, ya que todo gérmen del homomorfismo en x proviene de una vecindad de x. Veremos en el siguiente capítulo las condiciones para tener la biyección.

4. Si $\varphi : \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$ y $\psi : \mathscr{G}' \to \mathscr{G}$ son homomorfismos podemos definir un homomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\varphi, \psi) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}', \mathscr{G}')$, dado por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\varphi, \psi)(f) = \psi \circ f \circ \varphi$.

Proposición 2.7.2. *Toda sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{H}_2 \xrightarrow{g} \mathscr{H}_3 \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta de $\mathcal{A}$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{H}_3, \mathscr{F}) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{H}_2, \mathscr{F}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{H}_1, \mathscr{F})$$

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto y sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathscr{H}_3\mid_U, \mathscr{F}\mid_U)$ y supongo que $\varphi \circ g\mid_U = 0$. Sea $V \subseteq X$ abierto y sea $t \in \mathscr{H}_3(V)$, entonces de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{H}_3, \mathscr{F}) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{H}_2, \mathscr{F}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{H}_1, \mathscr{F})$$

tengo que para $V \subseteq U$ abiertos,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathscr{H}_3 \mid_U, \mathscr{F} \mid_U) \arrow[r, "g_U^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathscr{H}_2 \mid_U, \mathscr{F} \mid_U) \arrow[r, "f_U^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathscr{H}_1 \mid_U, \mathscr{F} \mid_U) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_V}(\mathscr{H}_3 \mid_V, \mathscr{F} \mid_V) \arrow[r, "g_V^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_V}(\mathscr{H}_2 \mid_V, \mathscr{F} \mid_V) \arrow[r, "f_V^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_V}(\mathscr{H}_1 \mid_V, \mathscr{F} \mid_V) \end{tikzcd}$$

el diagrama es conmutativo. Entonces elijo una cubierta abierta $\{W_\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ y $s_\mu \in \mathscr{H}(W_\mu)$ tal que $g_{W_\mu}(s_\mu) = \rho^V_{W_\mu}(t)$. Entonces

$$\varphi_{W_\mu}(\rho^V_{W_\mu}(t)) = \varphi_{W_\mu}(g_{W_\mu}(s_i)) = 0$$

así que $\varphi = 0$ y por lo tanto g^* es inyectiva.

Ahora veamos si es suprayectiva. Sea $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathscr{H}_2 \mid_U, \mathscr{F}_U)$ tal que $\psi \circ f \mid_U = 0$. Entonces ψ así definida es el mapeo cero en $\mathrm{im}\, f \mid_U$, de donde puedo considerar

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathscr{H}_2(\mathrm{im}\, f) \mid_U, \mathscr{F} \mid_U)$$

Entonces existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathscr{H}_1 \mid_U, \mathscr{F} \mid_U)$ tal que $\varphi = \psi \circ f \mid_U$.

Por lo tanto $\mathrm{im}\, g^* = \ker f^*$, es decir, la sucesión es exacta. □

Proposición 2.7.3. *Para $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$ $\mathcal{A}$-módulos se tiene*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}, \mathscr{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{H}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{G}, \mathscr{H})$$

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto.
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U), \mathscr{H}(U)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathscr{G}(U), \mathscr{H}(U)) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathscr{G}(U), \mathscr{H}(U))$.
Así tengo el isomorfismo. □

Proposición 2.7.4. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G} \oplus \mathscr{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{H})$

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto.
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathscr{F}(U), \mathscr{G}(U) \oplus \mathscr{H}(U)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathscr{F}(U), \mathscr{G}(U)) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathscr{F}(U), \mathscr{H}(U))$
Con esto tengo el isomorfismo. □

Capítulo 3

Gavillas coherentes

En este capítulo estudiaremos una clase especial de gavillas cuya característica es que son finitamente generadas. También trataremos sobre sus propiedades y operaciones que se pueden realizar con ellas.

3.1. Definiciones

Sea X un espacio topológico, $\mathcal{A}$ una gavilla de anillos sobre X y supongamos que para todo $x \in X$, $\mathcal{A}_x$ es conmutativo y posee un elemento unidad que varía continuamente con x.

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de anillos, $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos y sean $s_1, \ldots s_p \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ secciones de $\mathscr{F}$ sobre $U \subseteq X$ abierto. Decimos que $\mathscr{F}$ es de tipo finito si es localmente generada por un número finito de secciones. En otras palabras, tengo un homomorfismo suprayectivo

$$\varphi : \mathcal{A}^p(U) \to \mathscr{F}(U)$$

donde para cada $x \in U$ y $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{A}_x$

$$(f_1, \ldots, f_p) \mapsto \sum f_i s_i(x) \in \mathscr{F}_x$$

.

De la definición tenemos las siguientes observaciones:

1. $\ker(\varphi) = \mathcal{R}(s_1 \ldots s_p) = \bigcup_{x \in U}\{(f_{1_x}, \ldots, f_{p_x}) \in (\mathcal{A}^p)_x : \sum_{i=1}^p f_i s_i = 0\}$ es una subgavilla de $\mathcal{A}^p$ llamada gavilla de relaciones entre los s_i y $\mathrm{im}(\varphi)$ es la subgavilla de $\mathscr{F}$ generada por los $s_i(x)$, con $x \in U$.

2. Todo homomorfismo $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathscr{F}$ define una familia de p secciones $s_1 \ldots s_p \in \mathscr{F}$ por las fórmulas $s_1(x) = \varphi_x(1, 0, \ldots, 0), \ldots, s_p(x) = \varphi_x(0, \ldots, 0, 1)$.

Ejemplo 3.1.2. 1. Todas las gavillas $\mathcal{A}^p$ con $1 \leq p \leq \infty$ son de tipo finito en X. Las secciones $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ con $1 \leq i \leq p$ generan $\mathcal{A}^p$ sobre X.

2. Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un epimorfismo y si $\mathscr{F}$ es de tipo finito en $x \in X$, entonces $\mathscr{G}$ es de tipo finito en x. Más aún, la gavilla de cocientes de gavillas de tipo finito es de tipo finito.

Proposición 3.1.3. *Sea $\mathscr{F}$ una gavilla de tipo finito. Si $s_1, \ldots, s_p$ son secciones de $\mathscr{F}(U)$ tales que $s_1, \ldots, s_p$ generan a $\mathscr{F}_x$, entonces existe una vecindad $V \subseteq U$ tal que para todo $y \in V$ suficientemente cercano a x, $s_1, \ldots, s_p$ genera a $\mathscr{F}_y$*

Demostración. Como $\mathscr{F}$ es una gavilla de tipo finito, existe un número finito de secciones $s_1, \ldots, s_p \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ en una vecindad U de x. Y para y suficientemente cercano a x existen secciones $t_1, \ldots, t_q$ tales que $f = \sum_{i=1}^{q} a_i \cdot t_i(y)$, con $a_i \in \mathcal{A}_y$.

Por hipótesis los $s_1, \ldots, s_p$ generan a F_x, entonces existen secciones f_{ij} de $\mathcal{A}$ en una vecindad V de x tales que $t_i(x) = \sum_{j=1}^{j=p} f_{ij}(x) \cdot s_j(x)$. Entonces existe $W = U \cap V$ tal que para y suficientemente cercano a x se tiene $t_i(y) = \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x) \cdot s_j(y)$ para cada $y \in W$. Como $t_1, \ldots, t_q$ generan a $\mathscr{F}_y$, entonces $s_1, \ldots, s_p$ generan a $\mathscr{F}_y$. □

Definición 3.1.4. Una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos es coherente si:

(a) $\mathscr{F}$ es de tipo finito.

(b) Si $s_1, \ldots, s_p$ son secciones de $\mathscr{F}$ en un abierto $U \subseteq X$ arbitrario, la gavilla de relaciones entre los s_i es una gavilla de tipo finito sobre U.

Observemos que la condición (b) es equivalente a

(b') Dados $s_1, \ldots, s_p \in \mathscr{F}(U)$ y $V \subseteq U$ donde $s_1 |_v, \ldots, s_p |_v \in \mathscr{F}(V)$ se tiene el morfismo

$$\mathcal{A}^p(V) \xrightarrow{\psi_V} \mathscr{F}(V)$$

$$(f_1 \ldots, f_p) \mapsto \sum f_i \cdot s_i |_v$$

entonces $\psi : \mathcal{A}^p |_U \to \mathscr{F} |_U$, donde pedimos que $ker(\psi)$ sea de tipo finito.

Proposición 3.1.5. *Localmente toda gavilla coherente es isomorfa al conúcleo de un homomorfismo $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^q$*

Demostración. Como $\mathscr{F}$ es una gavilla coherente entonces es de tipo finito y dadas $s_1, \ldots, s_p \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, la gavilla de relaciones $\mathcal{R}(s_1, \ldots, s_p)$ es de tipo finito, de donde $\mathscr{F} \cong \mathcal{A}^q / \mathcal{R}(s_1, \ldots, s_p)$.

Considero el morfismo suprayectivo $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^q$, entonces localmente se induce un isomorfismo de coker $(\varphi) = \mathcal{A}^q/\varphi(\mathcal{A}^p)$.
Y por la primera observación tengo $\mathscr{F} \cong$ coker (φ). □

Proposición 3.1.6. *Sea $\mathscr{F}$ una gavilla coherente de $\mathcal{A}$-módulos y $\mathscr{G}$ una subgavilla de $\mathcal{A}$-módulos de $\mathscr{F}$, entonces $\mathscr{G}$ es coherente.*

Demostración. Como $\mathscr{G}$ es subgavilla de $\mathscr{F}$, entonces $\mathscr{G}$ es de tipo finito. Falta ver que satisface la condición (b) de la definición.
Sea $\{s_1, \dots, s_p\} \in \Gamma(U, \mathscr{G})$. Como $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ entonces $\{s_1, \dots, s_p\} \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ para $U \subseteq X$ abierto. Entonces $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_p)$ en $\mathscr{G}$ es de tipo finito. Por lo tanto $\mathscr{G}$ es coherente. □

3.2. Principales propiedades de las gavillas coherentes

Teorema 3.2.1. *Sea $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ una sucesión exacta de homomorfismos. Si dos de las tres gavillas $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$ son coherentes, entonces la tercera también lo es.*

Demostración. Lo haremos por casos:

Caso 1: Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas coherentes.
Como $\mathscr{G}$ es de tipo finito, entonces $\mathscr{H}$ es de tipo finito. Falta ver que cumple la condición (b) de la definición.
Sean $\{s_1, \dots, s_n\} \in \Gamma(U, \mathscr{H})$, con $x \in U$. Supongamos que existen $\{s'_1, \dots, s'_n\} \in \Gamma(U, \mathscr{G})$ tales que $s_i = \beta(s'_i)$. Sean $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ en una vecindad de x, tales que para y suficientemente cercano a x, $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle = \mathscr{F}_y$. Entonces $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}_y$ es tal que $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{R}(s_1, \dots, s_n)_y$ si y sólo si existen $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{A}_y$ tales que $\sum_{i=1}^n f_i \cdot s'_i = \sum_{j=1}^m g_j \cdot \alpha(t_j)$ en y. Como $\mathscr{F}$ es coherente, la gavilla de relaciones entre los s'_i y los $\alpha(n_j)$ es de tipo finito. Luego, la gavilla $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_n)$ (imagen que procede de la proyección canónica de $\mathcal{A}^{n+m}$ sobre $\mathcal{A}$) es de tipo finito y por tanto $\mathscr{H}$ es coherente.

Caso 2: Supongamos que $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$ son gavillas coherentes, entonces por la proposición 3.1.5, existe localmente un homomorfismo sobre $\gamma : \mathcal{A}^n \to \mathscr{G}$. Sea $\mathcal{I} = ker(\beta \circ \gamma)$, entonces como $\mathscr{H}$ es coherente, $\mathcal{I}$ es una gavilla de tipo finito (esto por la condición b) y en consecuencia $\gamma(\mathcal{I})$ es una gavilla de tipo finito y por la proposición 3.1.6 es una gavilla coherente. Ahora, como α es un isomorfismo de $\mathscr{F}$ sobre $\gamma(\mathcal{I})$, tengo que $\mathscr{F}$ es coherente.

Caso 3: Supongamos que $\mathscr{F}$ y $\mathscr{H}$ son coherentes.La cuestión es local, así que puedo suponer que $\mathscr{F}$ (respectivamente $\mathscr{H}$) es generado por un número finito de secciones $t_1 \dots, t_m$ (respectivamente $s_1 \dots, s_n$). Puedo suponer que existen secciones $s'_i \in \mathscr{G}$ tales que $s_i = \beta(s'_i)$. Entonces las secciones s'_i y $\alpha(t_j)$

generan a $\mathscr{G}$ y por tanto $\mathscr{G}$ es una gavilla de tipo finito.
Ahora sean $\tau_i \ldots, \tau_r$ un número finito de secciones de $\mathscr{G}$ en una vecindad de un punto x, como $\mathscr{H}$ es coherente, existen secciones $f_j^i \in \mathcal{A}^r$ $(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s)$ definidas en una vecindad de x y que generan la gavilla de ralaciones entre los $\beta(\tau_i)$.
Sea $u_j = \sum_{i=1}^r f_j^i \cdot \tau_i$. Como $\sum_{i=1}^r f_j^i \cdot \beta(\tau_i) = 0$, $u_j \subseteq \alpha(\mathscr{F})$ y como $\mathscr{F}$ es coherente, la gavilla de relaciones entre los u_j es generada en una vecindad de x por un número finito de secciones. Sean g_k^j $(1 \leqslant j \leqslant s, 1 \leqslant k \leqslant \tau)$.
Afirmación: $\sum_{j=1}^s g_k^j \cdot f_j^i$ genera la gavilla $\mathcal{R}(\tau_1 \ldots, \tau_r)$ en una vecindad de x.
Prueba: Si $\sum_{i=1}^r f_i \cdot \tau_i = 0$ en y, con $f_i \in \mathcal{A}_y$, entonces $\sum_{i=1}^r f_i \cdot \beta(\tau_i) = 0$ y existe $g_j \in \mathcal{A}_y$ con $f_i = \sum_{j=1}^s g_j \cdot f_j^i$, luego $\sum_{i=1}^r f_i \cdot \tau_i = 0$, de donde $\sum_{j=1}^s g_j \cdot u_j = 0$.
Finalmente, por el hecho de que el sistema de g_j es combinación lineal del sistema g_k^j tengo la afirmación demostrada.
Por lo tanto $\mathscr{G}$ satisface la condición (b) y así tengo que $\mathscr{G}$ es una gavilla coherente.

□

Corolario 3.2.2. *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son gavillas coherentes, entonces $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ es coherente.*

Demostración. Primero veamos que $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ es finitamente generada.
Sea $x \in X$, entonces existe una vecindad abierta U de x y $s_i \in \mathscr{F}(U)$ con $1 \leq i \leq q$ y $\sigma_j \in \mathscr{G}(U)$, $1 \leq i \leq p$ tal que $\mathscr{F}_y = \sum_{i=1}^q f_i s_i(y)$, con $f_i \in \mathcal{A}_y$ y $\mathscr{G}_y = \sum_{j=1}^p g_j \sigma_j(y)$, con $g_j \in \mathcal{A}_y$ para todo $y \in U$. Entonces $(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G})_y = \sum_{i=1}^q f_i s_i(y) \oplus \sum_{j=1}^p g_j \sigma_j(y)$ para todo $y \in U$. Por lo tanto $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ es finitamente generada.
Ahora para $U \subseteq X$ tomo el homomorfismo

$$\varphi : \mathcal{A}_U^q \longrightarrow (\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}) \mid_U$$

Tomo las proyecciones:

$$\pi : (\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}) \mid_U = \mathscr{F} \mid_U \oplus \mathscr{G} \mid_U \longrightarrow \mathscr{F} \mid_U$$

$$\rho : (\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}) \mid_U = \mathscr{F} \mid_U \oplus \mathscr{G} \mid_U \longrightarrow \mathscr{G} \mid_U$$

Entonces por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_U^q \arrow[r, "\varphi"] & (\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}) \mid_U \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{G} \mid_U \\ & \mathscr{F} \mid_U & \end{tikzcd}$$

tengo que $\ker(\pi \circ \varphi)$ y $\ker(\rho \circ \varphi)$ son finitamente generados. Pero

$$\ker \varphi = \langle \ker(\pi \circ \varphi) \rangle \cap \langle \ker(\rho \circ \varphi) \rangle$$

Y por lo tanto $\ker \varphi$ es finitamente generado.
Por lo tanto $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ es coherente. □

Teorema 3.2.3. *Sea* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un homomorfismo, donde* $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ *son gavillas coherentes, entonces* $\ker(\varphi)$*,* $\operatorname{coker}(\varphi)$*,* $\operatorname{im}(\varphi)$ *son gavillas coherentes.*

Demostración. Sea $x \in X$, entonces existe una vecindad abierta U de x tal que el homomorfismo

$$\varphi : \mathcal{A}_U^q \longrightarrow \mathscr{F}\,|_U \longrightarrow 0$$

es suprayectivo. Hago la composición con el homomorfismo suprayectivo

$$\mathscr{F}\,|_U \longrightarrow \operatorname{im}\varphi\,|_U \longrightarrow 0$$

para obtener

$$\mathcal{A}_U^q \longrightarrow \operatorname{im}\varphi\,|_U \longrightarrow 0$$

que es un homomorfismo suprayectivo de $\mathcal{A}_U$-módulos.
Por lo tanto $\operatorname{im}\varphi$ es finitamente generada.
Ahora, sea $V \subseteq X$ abierto y tomo

$$\psi : \mathcal{A}_V^p \longrightarrow \operatorname{im}\varphi\,|_V$$

un A_V-homomorfismo.
Además tomo el homomorfismo canónico inyectivo

$$\iota : \operatorname{im}\varphi \longrightarrow \mathscr{G}$$

Entonces

$$\iota \circ \psi : \mathcal{A}_V^p \longrightarrow \operatorname{im}\varphi\,|_V$$

De donde $\ker\psi = \ker\iota \circ \psi$ es finitamente generado y por lo tanto $\operatorname{im}\varphi$ es una gavilla coherente.

Ahora considero la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \operatorname{im}(\varphi) \longrightarrow 0$$

Como $\operatorname{im}(\varphi)$ y $\mathscr{F}$ son gavillas coherentes, por el teorema 3.2.1, $\ker(\varphi)$ es coherente.
Por otra parte, sea

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}(\varphi) \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \operatorname{coker}(\varphi) \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta, luego como $\operatorname{im}(\varphi)$ y $\mathscr{G}$ son coherentes, nuevamente por el teorema 3.2.1, $\operatorname{coker}(\varphi)$ es coherente. □

Corolario 3.2.4. *Sean* $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ *subgavillas coherentes de una gavilla coherente* $\mathscr{H}$*, entonces las gavillas* $\mathscr{F} + \mathscr{G}$ *y* $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ *son coherentes.*

Demostración. Como $\mathscr{F} + \mathscr{G}$ es una subgavilla de $\mathscr{H}$, entonces por la proposición 3.1.6 es coherente.
Por otro lado, sea $\varphi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}/\mathscr{F}$, entonces $\ker(\varphi) = \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ que es coherente por el teorema 3.2.3 y por lo tanto $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ es coherente. □

3.3. Operaciones sobre las gavillas coherentes

Proposición 3.3.1. *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son gavillas coherentes, entonces $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G}$ es una gavilla coherente.*

Demostración. Para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x y secciones $s_i \in \mathscr{F}(U)$, $\sigma_j \in \mathscr{G}(U)$ con $1 \leq i \leq q$ y $1 \leq j \leq p$ y elementos $f_i \in \mathcal{A}_y, g_j \in \mathcal{A}_y$ tales que $\mathscr{F}_y = \sum_{i=1}^{q} f_i \cdot s_i(y)$ y $\mathscr{G}_y = \sum_{j=1}^{p} g_i \cdot \sigma_j(y)$ para cada $y \in U$. Entonces para cada $y \in U$

$$\begin{aligned} (\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathscr{G})_y &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} f_i g_j (s_i(y) \otimes \sigma_j(y)) \\ &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} \mathcal{A}_y (s_i(y) \otimes \sigma_j(y)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ es finitamente generado.
Ahora como $\mathscr{F}$ es coherente, entonces para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x y una sucesión exacta

$$\mathcal{A}_U^p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_U^q \xrightarrow{\psi} \mathscr{F}_U \longrightarrow 0$$

Tomando producto tensorial de $\mathscr{G}_U$ con los términos de la sucesión exacta tengo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_U^p \otimes_{\mathcal{A}_U} \mathscr{G}_U \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, equal] & \mathcal{A}_U^q \otimes_{\mathcal{A}_U} \mathscr{G}_U \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, equal] & \mathscr{F}_U \otimes_{\mathcal{A}_U} \mathscr{G}_U \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ \mathscr{G}_U^p \arrow[r, "\varphi'"] & \mathscr{G}_U^q \arrow[r, "\psi'"] & \mathscr{F}_U \otimes_{\mathcal{A}_U} \mathscr{G}_U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{F}_U \otimes \mathscr{G}_U$ y $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})_U$ son las gavillas asociadas de la pregavilla $\mathscr{F}(V) \otimes_{\mathcal{A}_U(V)} \mathscr{G}(V)$ para $V \subseteq U$ abierto, entonces $\mathscr{F}_U \otimes \mathscr{G}_U = (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})_U$. De aquí tengo que $\operatorname{coker} \varphi' = (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})_U$. Ahora como $\mathscr{G}$ es coherente, entonces $\mathscr{G}_U^p$ y $\mathscr{G}_U^q$ son coherentes. Entonces por el teorema 3.2.3, $\operatorname{coker} \varphi'$ es coherente. Y por lo tanto $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ es coherente. □

Proposición 3.3.2. *Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas, con $\mathscr{F}$ coherente. Entonces para todo $x \in X$,* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x)$

Demostración. Esto es equivalente a probar que el homomorfismo

$$\chi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x)$$

es biyectivo.

1. Sea $x \in X$ y sea $\psi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un homomorfismo definido en una vecindad U de x con $\psi_x(f) = 0$ para todo $f \in \mathscr{F}_x$. Como $\mathscr{F}$ es de tipo finito en x, entonces existen $s_1, \ldots, s_p \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ tales que

$f = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot s_i(x)$ con $a_i \in \mathcal{A}_x$. Como $\psi_x(s_i(x)) = 0$ para todo i, entonces para y suficientemente cercano a x, $\psi_x(s_i(y)) = 0$, de donde $\psi(f) = 0$ para todo $f \in \mathscr{F}_y$, entonces el germen $\psi_x : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es cero, ya que para todo $f \in \mathscr{F}_x$, $\psi_x(f) = 0$, por lo tanto ψ es inyectivo.

2. Sea $\varphi : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$ un $\mathcal{A}_x$-homomorfismo, entonces existe un homomorfismo $\psi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ definido en una vexindad U de x tal que $\psi_x = \varphi$.
Sean $m_1, \ldots, m_p \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, tales que para todo y suficientemente cercano a x $\mathscr{F}_y = \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot m_i(y)$ con $f_i \in \mathcal{A}_y$. Sean $t_1, \ldots, t_p \in \mathscr{G}(U)$ tales que $\psi(m_{ix}) = t_{ix}$ para $1 \leq i \leq p$. Como $\mathscr{R}(m_1, \ldots, m_p)$ es de tipo finito en x puedo encontrar relaciones $(f_1^j, \ldots, f_p^j) \in \mathcal{A}^p(U)$, $1 \leq j \leq q$ que generen $\mathscr{R}$ sobre U. Entonces $(f_1^j, \ldots, f_p^j) \in \mathscr{R}(t_1, \ldots, t_p)$ para todo j, donde

$$(\sum_{i=1}^{p} f_i^j t_i)_x = \sum_{i=1}^{p} f_{ix}^j \psi(m_{ix}) = \psi(\sum_{i=1}^{p} f_{ix} m_{ix}) = 0$$

Entonces existe un homomorfismo bien definido $\varphi : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ donde para y en una vecindad de x, $b_y := \sum_{i=1}^{p} a_{iy} m_{iy} \in \mathscr{F}_y$ y $\varphi(b_y) = \sum_{i=1}^{p} a_{iy} t_{iy} \in \mathscr{G}_y$, $y \in U$. Como $\varphi_x = \psi$ por construcción, entonces χ es suprayectivo.

Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{G}, \mathscr{G})_x \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x)$. □

Proposición 3.3.3. *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son gavillas coherentes, entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ *es una gavilla coherente.*

Demostración. Como $\mathscr{F}$ es coherente, para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x y una sucesión exacta

$$\mathcal{A}_U^p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_U^q \xrightarrow{\psi} \mathscr{F}\mid_U \longrightarrow 0$$

tal que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathscr{F}_U, \mathscr{G}_U) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}_U^q, \mathscr{G}_U) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}_U^p, \mathscr{G}_U)$$

es una sucesión exacta. Por la proposición 3.3.2, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathscr{F}_U, \mathscr{G}_U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_U$, además $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}_U^q, \mathscr{G}_U) \cong \mathscr{G}_U^p$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}_U^p, \mathscr{G}_U) \cong \mathscr{G}_U^q$. Así tengo la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_U \longrightarrow \mathscr{G}_U^q \longrightarrow \mathscr{G}_U^p$$

Ahora, para una gavilla coherente $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}\mid_U$ es coherente y por lo tanto $\mathscr{G}_U^q$ y $\mathscr{G}_U^p$ son coherentes.
Además como $\mathrm{im}(\psi^*) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_U$ y por el teorema 3.2.3, $\mathrm{im}(\psi^*)$ es coherente, es decir, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_U$ es coherente.
Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es coherente. □

3.4. Gavillas coherentes de anillos

Podemos ver una gavilla de anillos como una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos, y si la gavilla de $\mathcal{A}$-módulos es coherente, decimos que $\mathcal{A}$ es una gavilla coherente de anillos.

Definición 3.4.1. Una gavilla $\mathcal{A}$ es una gavilla coherente de anillos si la gavilla de relaciones entre un número finito de secciones de $\mathcal{A}$ sobre un abierto U es una gavilla de tipo finito sobre U.

Definiremos ahora una variedad algebraica para dar un ejemplo de gavilla coherente de anillos.

Definición 3.4.2. Llamamos variedad algebraica sobre K a un conjunto X dotado de una topología y de una subgavilla $\mathcal{O}_X$ de una gavilla $\mathscr{F}(X)$, donde $\mathscr{F}(X)$ es una gavilla de gérmenes de funciones sobre X con valores en K y satisface las siguientes condiciones:

1. Existe una cubierta abierta finita $V = \{V_i\}_{i\in I}$ de X tal que cada V_i, dotado de la estructura de X es isomorfo a un subespacio localmente cerrado U_i de un espacio afín, dotado de la gavilla $\mathcal{A}_{U_i}$. Observemos la topología en X es la "topología de Zariski" y la gavilla $\mathcal{A}_X$ es la gavilla de anillos locales de X.

2. La diagonal Δ de $X \times X$ es un cerrado en $X \times X$.

Ejemplo 3.4.3. Sea X una variedad algebraica y $\mathcal{O}$ la gavilla de anillos locales de X, entonces $\mathcal{O}$ es una gavilla coherente de anillos.
Para ver que esto es cierto sea $x \in X$ y $U \subseteq X$ vecindad abierta de x. Sean $f_1, \ldots, f_p \in \Gamma(U, \mathcal{O})$. Si es necesario reemplazo U por una vecindad más pequeña para ver que la gavilla de relaciones es de tipo finito. Sea $f_i = P_i/Q$ donde P_i, Q son polinomios y Q no se anula en U. Sean $y \in U$ y $g_i \in \mathcal{O}_y$ tales que $\sum_{i=1}^{p} g_i f_i = 0$ en una vecindad de y. Por otra parte sea $g_i = R_i/S$, donde R_i, S son polinomios y S no se anula en y. Supongamos entonces que $\sum_{i=1}^{p} g_i f_i = 0$ en una vecindad V de y'. Esto es equivalente a decir que $\sum_{i=1}^{p} R_i P_i = 0$ en V. Como el anillo de polinomios es noetheriano, entonces el módulo de relaciones entre los polinomios P_i es un módulo de tipo finito, por lo que $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_p)$ es de tipo finito, en consecuencia $\mathcal{O}$ es una gavilla coherente de anillos.

Proposición 3.4.4. *Sea $\mathcal{A}$ una gavilla coherente de anillos.*
Una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos es coherente si y sólo si localmente es isomorfa a coker (φ)*, donde $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^q$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Es la proposición 3.1.5
$\Leftarrow$ Como $\mathcal{A}$ es coherente, $\mathcal{A}^p$ y $\mathcal{A}^q$ son coherentes. Luego por el teorema 3.2.3, coker φ es coherente. □

Proposición 3.4.5. *Una subgavilla de $\mathcal{A}^p$ es coherente si y sólo si es de tipo finito.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $\mathcal{A}^p$ coherente, entonces por definición es de tipo finito.
$\Leftarrow$ Sea $\mathcal{A}$ una gavilla coherente y $\mathcal{A}^p$ subgavilla de $\mathcal{A}$, entonces por la proposición 3.1.6 es coherente. □

Corolario 3.4.6. *La gavilla de relaciones entre un número finito de secciones de una gavilla coherente es coherente.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla coherente y sea $\varphi : \mathcal{A}^p \to \mathscr{F}$ un homomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos, entonces la gavilla de relaciones $\ker\varphi = \mathfrak{F}(s_1, \ldots, s_p)$ es de tipo finito y por 3.4.5, es coherente. □

Proposición 3.4.7. *Sea $\mathscr{F}$ una gavilla coherente de $\mathcal{A}$-módulos. Sea $\mathscr{I}_x$ el ideal de $\mathcal{A}_x$ formado por $a \in \mathcal{A}_x$ para cada $x \in X$, tal que para cada $f \in \mathscr{F}_x$ se tiene $a \cdot f = 0$, entonces $\mathscr{I}_x$ forma una gavilla coherente de ideales llamada anulador de $\mathscr{F}$.*

Demostración. Sea $Ann(\mathscr{F}) = \bigcup \mathscr{I}_x = \{\mathscr{I}_x \mid a \cdot f = 0 \text{ para todo } f \in \mathscr{F}_x\}$
Sea $\varphi_x : \mathcal{A}_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{F}_x)$ un homomorfismo. Observemos que $\ker(\varphi_x) = \mathscr{I}_x$. Como $\mathscr{F}$ es coherente, entonces por la proposición 3.3.2, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{F}_x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{F})_x$ y por la proposición 3.3.3, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ es una gavilla coherente. Así tengo el homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$. Ahora, como $\mathcal{A}_x$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ son coherentes y $\ker\varphi = \mathscr{I}_x$, entonces por el teorema 3.2.3, $\mathscr{I}_x$ es una gavilla coherente de $\mathcal{A}$-módulos. □

En forma más general puedo definir el transportador $\mathscr{F} : \mathscr{G}$ de una gavilla coherente $\mathscr{G}$ en una subgavilla como la gavilla coherente de ideales $\mathscr{I}_x = \ker(\varphi_x)$, donde $\varphi_x : \mathcal{A}_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathscr{F}_x, (\mathscr{F}/\mathscr{G})_x)$.

3.5. Cambio de anillo

Teorema 3.5.1. *Sea $\mathcal{A}$ una gavilla coherente de anillos, $\mathscr{I}$ una gavilla coherente de ideales de $\mathcal{A}$. Sea $\mathscr{F}$ una subgavilla de $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$-módulos. Entonces $\mathscr{F}$ es $\mathcal{A}/\mathscr{I}$-coherente si y sólo si es $\mathcal{A}-$coherente. En particular $\mathcal{A}/\mathscr{I}$ es una gavilla coherente de anillos.*

Demostración. Vemos que $\mathscr{F}$ es de tipo finito sobre $\mathcal{A}$ si es de tipo finito sobre $\mathcal{A}/\mathscr{I}$, ya que si $\mathscr{F}$ es una gavilla de $\mathcal{A}/\mathscr{I}$-módulos, entonces a, b están en la misma clase de equivalencia si $f - g \in \mathscr{I}$, es decir, para toda $f \in \mathscr{F}_x$, $a \cdot f = b \cdot g$. Entonces existen secciones $s_1, \ldots, s_p$ que generan localmente a $\mathscr{F}$ como combinación lineal con coeficientes en $\mathcal{A}/\mathscr{I}$ si y sólo si generan a $\mathscr{F}$ como combinación lineal con coeficientes en $\mathcal{A}$.

Supongamos que $\mathscr{F}$ es $\mathcal{A}$-coherente y sean $s_1, \ldots, s_p \in \Gamma(U, \mathscr{F})$. Entonces la gavilla de relaciones $\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_p)$ con coeficientes en $\mathcal{A}/\mathscr{I}$ es de tipo finito sobre $\mathcal{A}/\mathscr{I}$.

Sea $\varphi : \mathcal{A}^p \to (\mathcal{A}/\mathscr{I})^p$ la aplicación canónica. Entonces $\mathrm{im}\,\varphi = \mathscr{R}(s_1, \ldots, s_p)$ con coeficientes en $\mathcal{A}/\mathscr{I}$ y por lo tanto es de tipo finito sobre $\mathcal{A}/\mathscr{I}$. Entonces $\mathscr{F}$ es $\mathcal{A}/\mathscr{I}$-coherente.

En particular, dado el morfismo inclusión $\iota : \mathscr{I} \to \mathcal{A}$, coker $(\varphi) = \mathcal{A}/\mathscr{I}$, entonces $\mathcal{A}/\mathscr{I}$ es $\mathcal{A}$-coherente y por lo tanto es una gavilla coherente de anillos.

Inversamente, si $\mathscr{F}$ es $\mathcal{A}/\mathscr{I}$-coherente entonces existe un homomorfismo local $\varphi : (\mathcal{A}/\mathscr{I})^q \to (\mathcal{A}/\mathscr{I})^p$ tal que $\mathscr{F} \cong$ coker (φ) y como $\mathcal{A}/\mathscr{I}$ es $\mathcal{A}$-coherente, entonces $\mathscr{F}$ es $\mathcal{A}$-coherente por el teorema 3.2.3. □

3.6. Extensión de una gavilla coherente

Sea Y un subespacio cerrado de X. Si $\mathscr{G}$ es una gavilla sobre Y, denoto por $\mathscr{G}^X$ la gavilla que se obtiene al prolongar $\mathscr{G}$ por 0 fuera de Y. Por la sección 1.13, ésta es una gavilla sobre X.

Si $\mathcal{A}$ es una gavilla de anillos sobre Y entonces $\mathcal{A}^X$ es una gavilla de anillos sobre X y si $\mathscr{F}$ es una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos, $\mathscr{F}^X$ es una gavilla de $\mathcal{A}^X$-módulos.

Proposición 3.6.1. *$\mathscr{F}$ es de tipo finito sobre $\mathcal{A}$ si y sólo si $\mathscr{F}^X$ es de tipo finito sobre $\mathcal{A}^X$.*

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto y sea $V = U \cap Y$. Todo homomorfismo $\varphi : \mathcal{A}^n \to \mathscr{F}$ sobre V induce un homomorfismo sobre U $\varphi^X : (\mathcal{A}^X)^n(U) \to \mathscr{F}^X(U)$ y recíprocamente, φ es sobreyectivo si y sólo si φ^X lo es. De esta observación tengo la prueba de la proposición. □

Proposición 3.6.2. *$\mathscr{F}$ es $\mathcal{A}$-coherente si y sólo si $\mathscr{F}^X$ es $\mathcal{A}^X$-coherente.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathcal{A}^q(U) \to \mathcal{A}^p(U)$. Por la proposición 3.6.1, φ es sobre si y sólo si $\varphi^X : (\mathcal{A}^q)^X(U) \to (\mathcal{A}^p)^X(U)$ es sobre. □

Corolario 3.6.3. *$\mathcal{A}$ es una gavilla coherente de anillos si y sólo si $\mathcal{A}^X$ lo es.*

Demostración. De la proposición 3.6.2 tengo el resultado usando $\mathscr{F} = \mathcal{A}$ □

Capítulo 4

Cohomología de un espacio con valores en gavillas

En este capítulo se darán las definiciones y propiedades necesarias para la construcción de grupos de cohomología con valores en una gavilla. Para ello defino primero los grupos de cocadenas y morfismos cofrontera. Posteriormente dada una sucesión exacta de gavillas se hace un análisis para ver cuáles son las características que debe satisfacer para tener una sucesión exacta larga.

4.1. Cocadenas de una cubierta abierta

Definición 4.1.1. Sea I un conjunto totalmente ordenado. Un q-simplejo en I^{q+1} es una sucesión finita de elementos de I, $s = (i_0, \ldots, i_q)$.

Definición 4.1.2. Sea X un espacio topológico y $U = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X. Si $s = (i_0, \ldots, i_p)$ es un q-simplejo en I^{q+1}, defino $U_s = U_{i_0 \ldots i_p} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$. Siempre supondremos que $U_{i_0 \ldots i_p} \neq \emptyset$. A este conjunto le llamamos el nervio $N(U)$ de U.

Definición 4.1.3. Sea X un espacio topológico y sea $\mathscr{F}$ una pregavilla de grupos abelianos en X. Una q-cocadena de U con valores en $\mathscr{F}$ es una función que asocia a cada simplejo $s = (i_0, \ldots, i_q)$ de $q+1$-elementos de I , una sección $f_s = f_{i_0, \ldots, i_q} \in \Gamma(U_{i_0 \ldots i_q}, \mathscr{F})$

Definición 4.1.4. Una q-cocadena es alternante si:

(a) Si hay índices repetidos en el conjunto $s = (i_0, i_1, \ldots, i_q)$ entonces $f_{i_0, \ldots, i_q} = 0$.

(b) Si todos los índices son distintos, entonces $f_{i_0, \ldots, i_q} = (-1)^{\sigma} f_{\sigma(i_0), \ldots, \sigma(i_q)}$.

Definición 4.1.5. Para $q \in \mathbb{N}$, sea

$$C^q(U, \mathscr{F}) = \{f : I \to \bigcup_{s \in I} \mathscr{F}(s) : f(s) \in \mathscr{F}(s)\}$$

A este conjunto le llamamos el grupo de q-cocadenas con coeficientes en la gavilla $\mathscr{F}$.

Ejemplo 4.1.6. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla en un espacio topológico X y U abierto de X.

1. Una 0-cocadena es un arreglo de secciones (s_u), donde $s_u \in \Gamma(U, \mathscr{F})$. Es decir, $f \equiv (f_\alpha) \in C^0(U, \mathscr{F})$.

2. Una 1-cocadena es un arreglo de secciones $(t_{[U,V]})$ indexadas por todos los 1-simplejos $[U, V] \in N(U)$, donde $t_{[U,V]} \in \mathscr{F}(U \cap V)$. Esto es, $f \equiv (f_{\alpha\beta}) \in C^1(U, \mathscr{F})$.

Observamos que 0 es alternante y si f es alternante, entonces $-f$ también es alternante. Además para $\left\{f_{i_0 \ldots i_q}\right\}, \left\{g_{i_0 \ldots i_q}\right\} \in C^q(U, \mathscr{F})$ defino para cada componente: $\left\{f_{i_0 \ldots i_q}\right\} \pm \left\{g_{i_0 \ldots i_q}\right\} = f_{i_0 \ldots i_q} \pm g_{i_0 \ldots i_q}$, entonces $C^q(U, \mathscr{F})$ se vuelve un grupo aditivo.
Además, si $\mathscr{F}$ es una gavilla de R-módulos, entonces $C^q(U, \mathscr{F})$ se vuelve un R-módulo, es decir, el grupo de q-cocadenas conserva la estructura algebraica de la gavilla.

4.2. Complejos en cocadenas

Defino un $\Gamma(X, \mathcal{A})$-homomorfismo aditivo de grupos (llamado morfismo cofrontera):
$\delta^q : C^q(U, \mathscr{F}) \to C^{q+1}(U, \mathscr{F})$ como sigue:
$(\delta^q f)(s) = \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^k f_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{q+1}}$ donde $\hat{i}_k$ indica que este término se excluye.
Observemos que $\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k f_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{q+1}} = f_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{q+1}} |_{U_{i_0 \cdots i_{q+1}}}$ es la restricción $\rho_k : \Gamma(U_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{q+1}}, \mathscr{F}) \to \Gamma(U_{i_0 \ldots i_{p+1}}, \mathscr{F})$.

Lema 4.2.1. *El morfismo cofrontera $\delta^q : C^q(U, \mathscr{F}) \to C^{q+1}(U, \mathscr{F})$ es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Sean f y g q-cocadenas en $C^q(U, \mathscr{F})$ y $s = (i_0, \ldots, i_q)$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta(f+g)_{i_0,\ldots,i_q} &= \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^k (f+g)_{i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_q} \\
&= \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^k [f_{i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_q} + g_{i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_q}] \\
&= \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^k f_{i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_q} + \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^k g_{i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_q} \\
&= \delta f_{i_0,\ldots,i_q} + \delta g_{i_0,\ldots,i_q}
\end{aligned}$$

Por lo tanto δ es un homomorfismo de grupos.

□

Lema 4.2.2. $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$, *donde* $q = 0, 1, 2, \ldots$

Demostración. Sea $f \in C^q(U, \mathscr{F})$.
Quiero ver que $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0 \in C^{q+2}(U, \mathscr{F})$.
Sea $s = (i_0, \ldots, i_{q+1})$ un subconjunto finito de $\mathfrak{I}$ de $q+2$-elementos. Entonces

$$\begin{aligned}
\delta^{q+1} \circ \delta^q(f)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} &= \sum_{k=0}^{q+2}(-1)^k(\delta^q(f))_{i_0,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_{q+2}} \\
&= \sum_{\substack{j,k=0 \\ k<j}}^{q+2}(-1)^{j+k} f_{i_0,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_{q+2}} - \sum_{\substack{j,k=0 \\ k>j}}^{q+2}(-1)^{j+k} f_{i_0,\ldots,i_{j-1}i_{j+1},\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_{q+2}}
\end{aligned}$$

Como los elementos de la primera suma aparecen en la segunda con signos opuestos, se cancelan unos a otros.
Por lo tanto $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$

□

Defino el grupo de cociclos de U con coeficientes en $\mathscr{F}$ como

$$Z^q(U, \mathscr{F}) := (\ker \delta^q), \text{ q} \in \mathbb{Z}^+$$

y el grupo de cofronteras de U con coeficientes en $\mathscr{F}$ como

$$B^q(U, \mathscr{F}) := \operatorname{im}(\delta^{q-1}), \text{ q} \in \mathbb{Z}^+$$

Los cuales satisfacen que $B^q(U, \mathscr{F}) \subseteq Z^q(U, \mathscr{F})$ por 4.2.2.

Definición 4.2.3. Los q-ésimos grupos de cohomología de $\mathscr{F}$ con respecto a la cubierta abierta U de X son:

$$H^q(U, \mathscr{F}) := \ker(\delta^q)/\operatorname{im}(\delta^{q-1}) \equiv Z^q(U, \mathscr{F})/B^q(U, \mathscr{F})$$

para $q \geq 1$ y

$$H^0(U, \mathscr{F}) := Z^0(U, \mathscr{F})$$

para q=0.

Proposición 4.2.4. *Para una gavilla $\mathscr{F}$ sobre X y una cubierta abierta U, $H^0(U, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$.*

Demostración. El morfismo $\delta^0 : C^0(U, \mathscr{F}) \to C^1(U, \mathscr{F})$ está dado por $(s_u) \mapsto (\rho^V_{U\cap V} - \rho^U_{U\cap V})$, donde $\rho^V_{U\cap V}$: $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U \cap V)$ es el morfismo restricción. Por lo tanto $H^0(U, \mathscr{F}) = \ker(\delta : C^0(U, \mathscr{F}) \to C^1(U, \mathscr{F}))$. Ahora considero el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C^0(U,\mathscr{F}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & C^1(U,\mathscr{F}) \arrow[d, equal] \\
\prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \arrow[r] & \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathscr{F}(U_i \cap U_j)
\end{tikzcd}$$

Para cada $(f_s) \in C^0(U, \mathscr{F})$, la cocadena $\delta f \in C^1(U, \mathscr{F})$ está dada por $f(U_i) \mid_{U_i \cap U_j} - f(U_j) \mid_{U_i\cap U_j}$. Entonces por definición de gavilla existe un único $f \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ tal que $\rho^{U_i}_U(f) = f_i, i \in I$. Por lo tanto $ker\delta = \Gamma(U, \mathscr{F})$. Luego como $\mathscr{F}$ es gavilla, para una cubierta abierta U tengo $H^0(U, \mathscr{F}) \simeq \mathscr{F}(X) = \Gamma(X, \mathscr{F})$. $\square$

De la proposición tengo que para $q = 0$, los grupos de cohomología $H^q(U, \mathscr{F})$ recuperan las secciones globales de $\mathscr{F}$ ya que $H^0(U, \mathscr{F}) \simeq \Gamma(X, \mathscr{F})$.

4.3. Refinamientos

Dado un espacio topológico X, los grupos de cohomología dependen de la cubierta abierta U de X. En esta sección estudiaremos el comportamiento de los grupos de cohomología del complejo de cocadenas $C^q(U, \mathscr{F})$ al usar una cubierta abierta más fina que U.

Definición 4.3.1. Sean X un espacio topológico y $U = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y $V = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ cubiertas abiertas de X. Decimos que V es un refinamiento de U ($V \prec U$) si existe una función (llamada refinamiento) $\mu : B \to A$ tal que $V_\beta \subseteq U_{\mu(\beta)}$ con $\beta \in B$.

Lema 4.3.2. *Dado el refinamiento $\mu : B \to A$, entonces μ induce un homomorfismo de complejos en cocadenas*

$$f^q_\mu : C^q(U, \mathscr{F}) \to C^q(V, \mathscr{F})$$

Demostración. El morfismo

$$f^q_\mu : C^q(U, \mathscr{F}) \to C^q(V, \mathscr{F})$$

está dado por

$$s = \left\{f_{i_0\ldots i_q}\right\} \longmapsto \left\{f_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_q)}\right\}$$

donde $f_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_q)} = \rho : (U_{i_0\ldots i_q}, \mathscr{F}) \to (V_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_q)})$. Como $V_i \subseteq \mu V_i$, entonces tengo que $V_0 \cap \ldots \cap V_q \subseteq \mu V_0 \cap \ldots \cap \mu V_q$.

Primero veamos que $f_\mu^q(f+g) = f_\mu^q(f) + f_\mu^q(g)$.

$$\begin{aligned}
f_\mu^q(f+g)_{i_0,\ldots,i_q} &= (f+g)_{\mu i_0,\ldots,\mu\hat{i}_j,\ldots\mu i_q} \\
&= [f_{\mu i_0,\ldots,\mu\hat{i}_j,\ldots\mu i_q} + g_{\mu i_0,\ldots,\mu\hat{i}_j,\ldots\mu i_q}] \\
&= f_{\mu i_0,\ldots,\mu\hat{i}_j,\ldots\mu i_q} + g_{\mu i_0,\ldots,\mu\hat{i}_j,\ldots\mu i_q} \\
&= f_\mu^q(f)_{i_0,\ldots,i_q} + f_\mu^q(g)_{i_0,\ldots,i_q}
\end{aligned}$$

Es decir, f_μ^q es un homomorfismo. Ahora considero el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C^q(U,\mathscr{F}) \arrow[r, "f_\mu^q"] \arrow[d, "\delta_U^q"'] & C^q(V,\mathscr{F}) \arrow[d, "\delta_V^q"] \\
C^{q+1}(U,\mathscr{F}) \arrow[r, "f_\mu^{q+1}"'] & C^{q+1}(V,\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

Veamos que es conmutativo.
Sea $f \in C^q(U,\mathscr{F})$ y $s = (i_0,\ldots,i_{q+1})$, entonces

$$\begin{aligned}
(f_\mu^q \circ \delta_U^q)(f)_{i_0,\ldots,i_q} &= (\delta_U^q f)(\mu i_0,\ldots,\mu i_{q+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k f_{\mu i_0,\ldots,\mu\hat{i}_k,\ldots,\mu_{q+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \mu f_{i_0,\ldots\hat{i}_k,\ldots,i_{q+1}} \\
&= (\delta_U^q \circ f_\mu^q)(f)_{i_0,\ldots,i_{q+1}}
\end{aligned}$$

Es decir, $f_\mu^q \circ \delta_U^q = \delta_U^q \circ f_\mu^q$ y por lo tanto $\left\{f_\mu^q\right\}$ induce un homomorfismo de grupos de cohomología dado por:

$$\mu^\star : H^q(U,\mathscr{F}) \to H^q(V,\mathscr{F})$$

tal que $\mu^\star([f]) = [\mu(f)]$ para algún $[f] \in H^q(U,\mathscr{F})$. □

La siguiente proposición nos dice que aunque hayan varias formas de refinar la cubierta abierta U por medio de V, en cohomología los morfismos inducidos son iguales.

Proposición 4.3.3. *El morfismo $\mu^\star : H^q(U,\mathscr{F}) \to H^q(V,\mathscr{F})$ sólo depende de U y V y no de la aplicación μ elegida.*

Demostración. Supongamos que μ y τ son dos morfismos de refinamiento. Es decir, las funciones $\mu,\tau : J \to I$ son tales que $V_i \subset U_{\mu(i)}$ y $V_j \subset U_{\tau(j)}$

Quiero ver que $\mu = \tau$
Defino el operador de homotopía

$$h^q : C^q(U, \mathscr{F}) \longrightarrow C^{q-1}(V, \mathscr{F})$$

de tal forma que el diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(U,\mathscr{F}) \arrow[r, "\delta^{q-1}"] \arrow[d, "f^q_\mu - f^q_\tau"'] & C^q(U,\mathscr{F}) \arrow[r, "\delta^q"] \arrow[dl, "h^q"'] \arrow[d, "f^q_\mu - f^q_\tau"'] & C^{q+1}(U,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[dl, "h_{q+1}"] \arrow[d, "f^q_\mu - f^q_\tau"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(V,\mathscr{F}) \arrow[r, "\delta^{q-1}"'] & C^q(V,\mathscr{F}) \arrow[r, "\delta_q"'] & C^{q+1}(V,\mathscr{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Es decir, $f^q_\mu - f^q_\tau = \delta^{q-1} \circ h^q + h^{q+1} \circ \delta^q : C^q(U, \mathscr{F}) \to C^q(V, \mathscr{F})$. El operador de homotopía está definido de la siguiente forma:

1. Si $q = 0$ entonces el morfismo $h^0 : C^0(U, \mathscr{F}) \to C^{q-1}(V, \mathscr{F}) = 0$ se define como $s = 0$

2. Si $q \geq 1$, para cada $f \in C^q(U, \mathscr{F})$, donde $\overline{U} = U_{\mu(i_0),\ldots,\mu(i_k)\overline{\mu}(i_k)\ldots\overline{\mu}(i_{q-1})} \mid_{V_{i_0,\ldots,i_{q-1}}}$ y $\overline{V} = V_{i_0,\ldots,i_{q-1}}$, defino $h^q(f) \in C^{q-1}(V, \mathscr{F})$ como

$$\begin{aligned}
h^q(f)_{i_0,\ldots,i_{q-1}} &= \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \rho^{\overline{U}}_{\overline{V}} f_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_k)\tau(i_{q-1})} \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k f_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_k)\tau(i_k)\ldots\tau(i_{q-1})} \mid_{V_{i_0,\ldots,i_{q-1}}}
\end{aligned}$$

Afirmación: El morfismo h^q es un homomorfismo.
Sean $f, g \in C^q(U, \mathscr{F})$, entonces

$$\begin{aligned}
h^q(f+g)_{i_0,\ldots,i_{q-1}} &= \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k (f+g)_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_k)\tau(i_k)\ldots\tau(i_{q-1})} \mid_{V_{i_0,\ldots,i_{q-1}}} \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k (f_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_k)\tau(i_k)\ldots\tau(i_{q-1})} \mid_{V_{i_0,\ldots,i_{q-1}}} + g_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_k)\tau(i_k)\ldots\tau(i_{q-1})} \mid_{V_{i_0,\ldots,i_{q-1}}}) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k f_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_k)\tau(i_k)\ldots\tau(i_{q-1})} \mid_{V_{i_0,\ldots,i_{q-1}}} + \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k g_{\mu(i_0)\ldots\mu(i_k)\tau(i_k)\ldots\tau(i_{q-1})} \mid_{V_{i_0,\ldots,i_{q-1}}} \\
&= h^q(f)_{i_0,\ldots,i_{q-1}} + h^q(g)_{i_0,\ldots,i_{q-1}}
\end{aligned}$$

Afirmación: h^q es en efecto una homotopía.
Sea $\phi_k : N^q(V) \to N^q(U)$ la función dada por $\phi_k(V_0, \ldots, V_q) := (\mu V_0, \ldots, \mu V_k, \tau V_k, \ldots, \tau V_q)$, donde $0 \leq k \leq q-1$.

Por hipótesis tenemos que $V_i \subseteq \mu V_i$ y $V_j \subseteq \tau V_j$. Sea $\sigma_j = (V_0, \ldots, \hat{V}_k, \ldots, V_q)$, entonces

$$\phi_k(\sigma_j) = \begin{cases} (\phi_k\sigma)_{j+1} & \text{si } 0 \leq k < j \leq q-1 \\ (\phi_{k+1}\sigma)_j & \text{si } 0 \leq j \leq k \leq q-2 \end{cases}$$

Para ver que esto es cierto, vemos que cuando $0 \leq k < j \leq q-1$, el morfismo está dado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi_k(\sigma_j) &= \phi_k(V_0, \ldots, \hat{V}_j, \ldots, V_q) \\ &= (\mu V_0, \ldots, \mu V_k, \tau V_k, \tau \hat{V}_j, \ldots, \tau V_q) \\ &= (\phi_k\sigma)_{j+1} \end{aligned}$$

Observamos que este morfismo aumenta un lugar al repetir el índice k, dado por μ y τ. Además por definición, la homotopía está dada por: $(h^q f)(\sigma) := \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k f(\phi_k\sigma) \mid_\sigma$.
Sea ahora $f \in C^q(U, \mathscr{F})$ arbitraria y $\sigma \in N^q(V)$, entonces tenemos por un lado:

$$\begin{aligned} (h^q \circ \delta)(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k(\delta f)(\phi_k\sigma) \\ &= \sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{k+j} f((\phi_k\sigma)_j) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} (\delta \circ h^q)(\sigma) &= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j(h^q f)(\sigma_j) \\ &= \sum_{j=0}^{q}\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^{j+k} f(\phi_k\sigma_j) \\ &= \sum_{k=0}^{q-2}\sum_{j=q+2}^{q}(-1)^{j+k+1} f(\phi_k\sigma)_j + \sum_{j=0}^{q-2}\sum_{k=j+1}^{q-1}(-1)^{j+k+1} f(\phi_k\sigma) \end{aligned}$$

Entonces sumando tengo:

$$\begin{aligned} (h^q\delta)(f)(\sigma) + (\delta h^q)(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{k+j} f((\phi_k\sigma)_j) + \sum_{k=0}^{q-2}\sum_{j=q+2}^{q}(-1)^{j+k+1} f(\phi_k\sigma)_j + \sum_{j=0}^{q-2}\sum_{k=j+1}^{q-1}(-1)^{j+k+1} f(\phi_k\sigma) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ j=k}}^{q-1}(-1)^{j+k} f(\phi_k\sigma)_j + \sum_{\substack{k=0 \\ j=k+1}}^{q-1}(-1)^{j+k} f(\phi_k\sigma)_j \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} f(\mu V_0, \ldots, \mu V_{k-1}, \tau V_k, \ldots, \tau V_q) - \sum_{k=0}^{q-1} f(\mu V_0, \ldots, \mu V_k, \tau V_{k+1}, \ldots, \tau V_q) \\ &= f(\mu V_0, \ldots, \mu V_q) - f(\tau V_0, \ldots, \tau V_q) \\ &= f_\mu^q(f)(\sigma) - f_\tau^q(f)(\sigma) \end{aligned}$$

Y por lo tanto tengo que $h^{q+1} \circ \delta^q + \delta^{q-1} \circ h^q = f^q_\mu - f^q_\tau$.

Finalmente, cuando $\delta^q(f) = 0$, tengo que $f^q_\mu - f^q_\tau = \delta^q \circ h^q(f)$, es decir, f^q_μ y f^q_τ difieren por la cofrontera $\delta^q \circ h^q(f)$, de donde representan la misma clase de cohomología en $H^q(V, \mathscr{F})$. Por lo tanto $\mu^\star(f) = \tau^\star(f)$.

□

4.4. Grupos de cohomología de X con valores en la gavilla $\mathscr{F}$

Definición 4.4.1. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X y sean U y V cubiertas abiertas de X. Decimos U es más fino V y lo denotamos $U \prec V$ si para cada entero $q \geq 0$ hay un homomorfismo canónico $\sigma(U, V) : H^q(V, \mathscr{F}) \to H^q(U, \mathscr{F})$, el cual es único y es independiente del morfismo de refinamiento μ.

Proposición 4.4.2. *La relación $\prec$ es un orden parcial.*

Demostración. Por la proposición 4.3.3, $[f]_U \mapsto \mu^\star_q([f]_U)$ es independiente de la elección del morfismo de refinamiento, entonces existe un único $\mathcal{A}(X)$-morfismo $H^q(V, \mathscr{F}) \to H^q(U, \mathscr{F})$ para un morfismo de refinamiento arbitrario $\tau : J \to I$, dado por $t^U_V : H^q(U, \mathscr{F}) \to H^q(V, \mathscr{F})$ con $t^U_V = \mu^\star_q$. Entonces se tiene que $t^U_U = \mathbf{1}$ y $t^U_V = t^V_W \circ t^U_V$ para cubiertas abiertas U, V y W de X, con $W \subseteq V \subseteq U$. Por tanto $\prec$ es un orden parcial. □

Entonces puedo considerar el conjunto dirigido de todas las cubiertas abiertas propias de X.

Definición 4.4.3. Para dos cubiertas abiertas propias de un espacio topológico X, digamos U y V existe un morfismo de refinamiento común que se define de la siguiente manera:
Dadas $U = \{U_i\}_{i\in I}$ y $V = \{V_j\}_{j\in J}$ cubiertas abiertas de X, existe una cubierta abierta $W = \{U_i \cap V_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ que es a la vez más fina que U y que V. Decimos entonces que tenemos una relación filtrante.

Observemos que hay un inconveniente al tener una relación filtrante, pues dadas dos cubiertas abiertas U y V existe la posibilidad de que W tenga repeticiones, por ejemplo el conjunto vacío $\emptyset$ puede ocurrir muchas veces. Para evitar tener este problema defino lo siguiente:

Definición 4.4.4. Sean U y V dos cubiertas abiertas de X. Decimos que U y V son equivalentes si $U \prec V$ y $V \prec U$

Con esto puedo hablar del conjunto de clases de recubrimientos que es un conjunto ordenado filtrante. Entonces si U es más fino que V existe para cada gavilla $\mathscr{F}$ de X y para cada $q \geq 0$ un homomorfismo canónico

$$\sigma(U, V) : H^q(V, \mathscr{F}) \to H^q(U, \mathscr{F})$$

que satisface:

$\sigma(U, U) = \mathbf{1}$

$\sigma(U, V) \circ \sigma(V, W) = \sigma(U, W)$, donde $U \prec V \prec W$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^q(V,\mathscr{F}) \arrow[rr] & & H^q(U,\mathscr{F}) \\
& H^q(W,\mathscr{F}) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Definición 4.4.5. Llamamos q-ésimo grupo de cohomología de X con valores en la gavilla $\mathscr{F}$ al límite directo de grupos $H^q(U, \mathscr{F})$, definido siguiendo el orden filtrante de clases de recubrimiento de X por medio de $\sigma(U, V)$.

$$H^q(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_{x \in U} (U, \mathscr{F})$$

Así, un elemento de $H^q(X, \mathscr{F})$ es una pareja (U, x) con $x \in H^q(U, \mathscr{F})$. Con esto identifico dos parejas (U, x) y (V, y) si existe W con $W \prec U$, $W \prec V$ y $\sigma(W, U)(x) = \sigma(W, V)(y)$ en $H^q(W, \mathscr{F})$.

Para todo recubrimiento U de X está asociado un homomorfismo canónico

$$\sigma(U) : H^q(U, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{F})$$

como sigue:

Elijo un recubrimiento W de X más fino que U y compongo los homomorfismo canónicos:

$$H^q(U, \mathscr{F}) \to H^q(W, \mathscr{F})$$

$$H^q(W, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{F})$$

para obtener el homomorfismo de la forma buscada. Falta ver que es independiente de la elección de W. Sea V un recubrimiento de X más fino que U, entonces existe Y, recubrimiento más fino que W y que V. Ahora considero el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H^q(W,\mathscr{F}) \arrow[dr] & H^q(U,\mathscr{F}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^q(V,\mathscr{F}) \arrow[dl] \\
& H^q(Y,\mathscr{F}) &
\end{tikzcd}$$

El diagrama es conmutativo y por tanto tengo el resultado.

Proposición 4.4.6. $H^0(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$

Demostración. Por la proposición 4.2.4, $H^0(U, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$, entonces aplicando el límite directo tengo $H^0(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_{x \in U}(U, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$. □

4.5. Homomorfismos de gavillas

Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ gavillas sobre un espacio topológico X y sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un homomorfismo de gavillas. Sea U un recubrimiento de X.

Proposición 4.5.1. *Sea $\varphi : C^q(U, \mathscr{F}) \to C^q(U, \mathscr{G})$ el homomorfismo de complejos, donde para cada $f \in C^q(U, \mathscr{F})$ se tiene que $\varphi(f) \in C^q(U, \mathscr{G})$ está dado por $\varphi(f)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} = \varphi(f_{i_0,\ldots,i_{q+1}})$. Entonces φ conmuta con la cofrontera.*

Demostración. Primero veamos que φ es un homomorfismo de grupos.
Sean $f, g \in C^q(U, \mathscr{F})$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(f+g)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} &= \varphi((f+g)_{i_0,\ldots,i_{q+1}}) \\ &= \varphi(f_{i_0,\ldots,i_{q+1}} + g_{i_0,\ldots,i_{q+1}}) \\ &= \varphi(f)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} + \varphi(g)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} \end{aligned}$$

Ahora considero el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C^q(U, \mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"'] & C^q(U, \mathscr{G}) \arrow[d, "\delta"] \\ C^{q+1}(U, \mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi"'] & C^{q+1}(U, \mathscr{F}) \end{tikzcd}$$

Para ver que es conmutativo sea $f \in C^q(U, \mathscr{F})$ y $s = (i_0, \ldots, i_{q+1})$, entonces

$$\begin{aligned} \delta \circ \varphi(f)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \varphi(f)_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{q+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \varphi(f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{q+1}}) \\ &= \varphi(\sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{q+1}}) \\ &= \varphi \circ \delta(f)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} \end{aligned}$$

□

Entonces por la proposición anterior tengo que cada $q \geq 0$ define un homomorfismo en cohomología

$$\varphi^* : H^q(U, \mathscr{F}) \to H^q(U, \mathscr{G})$$

Proposición 4.5.2. *Si V es un refinamiento de U entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} H^q(V, \mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\sigma(U,V)"'] & H^q(V, \mathscr{G}) \arrow[d, "\sigma(U,V)"] \\ H^q(U, \mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^*"'] & H^q(U, \mathscr{F}) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Sean $U = \{U_i\}_{i \in I}$ y $V = \{V_j\}_{j \in J}$ las respectivas cubiertas abiertas y $f \in C^q(V, \mathscr{F})$. Sea $\mu : I \to J$ el morfismo de refinamiento. Entonces para $s = (i_0, \ldots, i_q) \in I$ se tiene lo siguiente:
$\varphi(\mu f)_{i_0,\ldots,i_q} = \varphi(f_{\mu i_0,\ldots,\mu i_q}) = \mu\varphi(f)_{i_0,\ldots,i_q}$. Así que para $[f] \in H^q(V, \mathscr{F})$ se cumple $\varphi^* \circ \mu^*[f] = \mu^* \circ \varphi^*[f]$. Pero como μ^* es independiente de la elección del morfismo de refinamiento por la proposición 4.3.3, entonces $\varphi^* \circ \sigma(U, V) = \sigma(U, V) \circ \varphi^*$. □

De esto tengo que en el límite directo hay un homomorfismo

$$\varphi^\star : H^q(X, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{G})$$

Veamos el comportamiento de $\varphi^\star$.
Como $\varphi^\star$ está definido por una relación filtrante, entonces existe una cubierta abierta W tal que $U < W$ y $W < U$. Entonces dadas $[f], [g] \in H^q(X, \mathscr{F})$, las clases de equivalencia $\overline{(U, [f])}$ y $\overline{(U, [g])}$ son equivalentes si $\sigma(W, U)[f] = \sigma(W, U)[g] \in H^q(W, \mathscr{F})$, así que si el morfismo está dado por $\overline{(U, [f])} \mapsto \overline{(U, \varphi^\star[f])}$, entonces es un homomorfismo.

Demostración. Sean $[f], [g] \in H^q(X, \mathscr{F})$ tales que $\overline{(U, [f])} = \overline{(U, [g])} \in H^q(X, \mathscr{F})$, entonces
$\varphi^\star(U, [f + g]) = (U, \varphi^\star[f + g]) = (U, \varphi(f + g)_{i_0,\ldots,i_q}) = (U, \varphi(f)_{i_0,\ldots,i_q} + \varphi(g)_{i_0,\ldots,i_q}) = (U, \varphi^\star[f]) + (U, \varphi^\star[g]) = \varphi^\star(U, [f]) + \varphi^\star(U, [g])$ □

Por definición de q-ésimo grupo de cohomología tengo que $\sigma(W, U)[f] = \sigma(W, U)[g] \in H^q(W, \mathscr{F})$ ya que U y W son equivalentes, entonces $\sigma(W, U) \circ \varphi^\star[f] = \varphi^\star \circ \sigma(W, U)[f] = \varphi^\star \circ \sigma(W, U)[g] = \sigma(W, U)\varphi^\star[g]$. Es decir $(U, \varphi^\star[f]) = (U, \varphi^\star[g]) \in H^q(X, \mathscr{G})$.

Además el morfismo $\varphi^\star$ cumple las siguientes propiedades:

1. Si $q = 0$ tengo el homomorfismo $\varphi^\star : H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{G}) = \Gamma(X, \mathscr{G})$, es decir, $\varphi^\star = \varphi : \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{G})$, donde el morfismo está definido por $\varphi^\star[f] = \varphi \circ f$

2. Si $\varphi, \psi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, entonces dada $f \in H^q(X, \mathscr{F})$ y $s = (i_0, \dots, i_q)$ se tiene $(\varphi + \psi)^\star(f)_{i_0,\dots,i_q} = (\varphi + \psi)(f)_{i_0,\dots,i_q} = \varphi(f_{i_0,\dots,i_q}) + \psi(f_{i_0,\dots,i_q}) = \varphi^\star(f)_{i_0,\dots,i_q} + \psi^\star(f)_{i_0,\dots,i_q}$, es decir, $(\varphi + \psi)^\star = \varphi^\star + \psi^\star$

3. Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ y $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$, entonces $(\psi \circ \varphi)^\star(f)_{i_0,\dots,i_q} = (\psi(\varphi(f)_{i_0,\dots,i_q})) = \psi^\star \circ (\varphi^\star(f))_{i_0,\dots,i_q}$. Por lo que $(\psi \circ \varphi)^\star = \psi^\star \circ \varphi^\star$

4. Si $\mathbf{1} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ es el morfismo identidad, entonces $(\mathbf{1})^\star(f)_{i_0,\dots,i_q} = \mathbf{1}(f)i_0, \dots, i_q = (f)i_0, \dots, i_q$, esto es $\mathbf{1}^\star = \mathbf{1}$

De esto se desprenden los siguientes corolarios:

Corolario 4.5.3. *Si $\mathscr{F} = \mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2$, entonces $H^q(X, \mathscr{F}) = H^q(X, \mathscr{G}_1) \oplus H^q(X, \mathscr{G}_2)$.*

Demostración. Sean $\pi_1 : \mathscr{F} \to \mathscr{G}_1$ y $\pi_2 : \mathscr{F} \to \mathscr{G}_2$ las proyecciones en $\mathscr{G}_1$ y $\mathscr{G}_2$ respectivamente. Entonces defino el morfismo $\pi_1 + \pi_2 : \mathscr{F} \to \mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2$ de forma natural y observemos que $(\pi_1 \oplus \pi_2)^\star = \pi_1^\star \oplus \pi_2^\star : H^q(X, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{G}_1) \oplus H^q(X, \mathscr{G}_2)$ es un isomorfismo, es decir, $H^q(X, \mathscr{F}) \cong H^q(X, \mathscr{G}_1) \oplus H^q(X, \mathscr{G}_2)$. □

Sea $\mathscr{F}$ una gavilla de $\mathcal{A}$-módulos, entonces para cada sección $s \in \Gamma(X, \mathcal{A})$ tengo un endomorfismo de $\mathscr{F}$ dado por $f \mapsto s \cdot f$. El cual induce un endomorfismo de $H^q(X, \mathscr{F})$ en sí mismo.

Corolario 4.5.4. *$H^q(X, \mathscr{F})$ es un módulo sobre el anillo de secciones $\Gamma(X, \mathcal{A})$.*

Demostración. Sean $s, t \in \Gamma(X, \mathcal{A})$ y $f \in H^q(X, \mathscr{F})$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(s^\star + t^\star)(f) = s^\star(f) + t^\star(f)$

2. $(s^\star t^\star)f = s^\star(t^\star(f))$

3. $\mathbf{1}^\star(f) = f$

Por lo que $H^q(X, \mathscr{F})$ es un $\Gamma(X, \mathcal{A})$-módulo. □

4.6. Sucesión exacta de gavillas: caso general

En esta sección estudiaremos las condiciones necesarias para que dada una sucesión exacta de gavillas, la sucesión de complejos sea exacta y por propiedades de la cohomología podremos construir una sucesión exacta larga de grupos de cohomología.

Sea

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0 \tag{4.1}$$

una sucesión exacta corta de gavillas. Quiero obtener una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to C(U, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha} C(U, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta} C(U, \mathscr{H}) \to 0 \tag{4.2}$$

para cada cubierta abierta U de X.

Pero sabemos que para U cubierta abierta de X la sucesión

$$0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}(U) \to 0 \tag{4.3}$$

no es exacta en general.

El siguiente ejemplo muestra un caso en que esto pasa.

Ejemplo 4.6.1. Sea $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^X \to 0$ una sucesión exacta de gavillas en el plano $X = \mathbb{C} - \{0\}$, donde $\mathbb{Z}$ es la gavilla constante, $\mathcal{O}$ es la gavilla de gérmenes de funciones holomorfas, $\mathcal{O}^X$ es la gavilla de funciones holomorfas diferentes de cero y $\varphi_U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^X(U)$ está dado por $f \mapsto e^{2\pi i f}$.
Entonces para cada conjunto abierto U, $\mathcal{O}(U)$ es el grupo aditivo de todas las funciones holomorfas $f : U \to \mathbb{C}$ y $\mathcal{O}^X(U)$ es el grupo multiplicativo de todas las funciones holomorfas $f : U \to \mathbb{C}^X$ que nunca se hacen cero.
Considero la función $s(z) = z \in \Gamma(X, \mathbb{C}^X)$ que está en la imagen de $\varphi^\star$, donde $\varphi^\star : \Gamma(\mathcal{O}) \to \Gamma(\mathcal{O})^X$. Entonces tengo $z = e^{2\pi i f(z)}$, con $f(z) = \frac{1}{2\pi i} log(z)$. Esto es una contradicción, ya que ninguna rama de $log(z)$ tiene un único valor. Con esto tengo que φ_U no es suprayectivo.

Recordemos ahora que si U es un recubrimiento de X, la sucesión

$$0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}(U) \tag{4.4}$$

si es una sucesión exacta en general. Entonces en la sucesión 4.3 lo que falla es la suprayectividad de β. Entonces, si en vez de $\mathscr{H}(U)$ tomo las imágenes de β, $\widetilde{\mathscr{H}}(U) := \mathrm{im}(\beta) \subseteq \mathscr{H}$, entonces tengo sucesiones exactas cortas

$$0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\beta} \widetilde{\mathscr{H}}(U) \to 0 \tag{4.5}$$

Entonces defino $C_0(U, \mathscr{H}) := \mathrm{im}(\beta)$ y considero $h \in C_0(U, \mathscr{H})$, entonces para algún $g \in C(U, \mathscr{G})$, $h = \beta(g)$ tengo $\delta(h) = \delta(\beta(g)) = \beta(\delta(g))$ con lo que $C_0(U, \mathscr{H})$ no varía al aplicar el morfismo cofrontera y por tanto es un subcomplejo de $C(U, \mathscr{H})$. Entonces tengo una sucesión exacta de complejos

$$0 \to C(U, \mathscr{F}) \to C(U, \mathscr{G}) \to C_0(U, \mathscr{H}) \to 0 \tag{4.6}$$

Denoto los grupos de cohomología por $H_0^q(U,\mathscr{H})$. Entonces la sucesión 4.6 induce la sucesión exacta de cohomología

$$\ldots \to H^q(U,\mathscr{G}) \to H_0^q(U,\mathscr{H}) \xrightarrow{(\delta^q)^*} H^{q+1}(U,\mathscr{F}) \to H^{q+1}(U,\mathscr{G}) \to \ldots \tag{4.7}$$

donde el operador cofrontera δ^q está definido de la siguiente forma:
Considero el siguiente diagrama que consiste de cuadrados conmutativos y sucesiones exactas horizontales por 4.1 y el hecho de que $\varphi^q : C^q(U,\mathscr{F}) \longrightarrow C^q(U,\mathscr{G})$ es un morfismo de cocadenas.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & C^{q+2}(U,\mathscr{F}) \arrow[u] \arrow[r, "\alpha"] & C^{q+2}(U,\mathscr{G}) \arrow[u] \arrow[r, "\beta"] & C^{q+2}(U,\mathscr{H}) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{q+1}(U,\mathscr{F}) \arrow[u, "\delta^{q+1}"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[ur, phantom, "I"] & C^{q+1}(U,\mathscr{G}) \arrow[u, "\delta^{q+1}"] \arrow[r, "\beta"] & C^{q+1}(U,\mathscr{H}) \arrow[u, "\delta^{q+1}"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{q}(U,\mathscr{F}) \arrow[u, "\delta^{q}"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[ur, phantom, "II"] & C^{q}(U,\mathscr{G}) \arrow[u, "\delta^{q}"] \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, phantom, "III"] & C^{q}(U,\mathscr{H}) \arrow[u, "\delta^{q}"] \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Sea $c \in H^q(X,\mathscr{H})$ una clase arbitraria de cohomología. Entonces hay una cubierta abierta U de X y un q-cociclo $f \in Z^q(U,\mathscr{H})$ tal que $c = [f] = t_U([f]_U)$. Por la exactitud las sucesiones del diagrama, existe una cocadena $g \in C^q(U,\mathscr{G})$ con $\beta(g) \equiv \beta^q(g) = f$. Por la conmutatividad del diagrama III tengo
$\beta^{q+1}(\delta^q(g)) = \delta^q(\beta^q(g)) = \delta^q(f) = 0$. Por lo tanto $\delta^q(g) \in \ker(\beta^{q+1}) = \operatorname{im}(\alpha^{q+1})$. Entonces existe $h \in C^{q+1}(U,\mathscr{F})$ tal que $\alpha^{q+1}(h) = \delta^q(g)$.
Esta igualdad combinada con el diagrama conmutativo I y el hecho de que $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$ implica que
$\alpha^{q+2}(\delta^{q+1}(h)) = \delta^{q+1}(\alpha^{q+1}(h)) = \delta^{q+1}(\delta^q(g)) = 0$.
Pero α^{q+2} es inyectiva y por lo tanto $\delta^{q+1}(h) = 0$. Es decir $h \in Z^{q+1}(U,\mathscr{F})$. De esto se sigue que la construcción anterior define δ^* enviando $(\delta^q)^*([f])$. Esto es equivalente a $(\delta^q)^*([f]) = [(\beta^{q+1})^{-1}(\delta^q(g))]$ para algún $g \in C^q(U,\mathscr{G})$ arbitrario, con $\beta(g) = f$.
Veamos ahora que la definición anterior es independiente de la elección de g.

Supongamos que $\overline{g} \in C^q(U,\mathscr{G})$ es una cocadena con $\beta(\overline{g}) = f$, entonces existe un cociclo $\overline{h} \in Z^{q+1}(U,\mathscr{F})$

tal que $\alpha(\overline{h}) = \delta^q(\overline{g})$. Entonces

$$\alpha^{q+1}(h - \overline{h}) = \delta^q(g - \overline{g}) \tag{4.8}$$

En otras palabras $\beta^q(g-\overline{g}) = 0$ o lo que es lo mismo, $(g-\overline{g}) \in \ker\beta^q = \operatorname{im}\alpha^q$. Por lo tanto existe $k \in C^q(U, \mathscr{F})$ tal que $\alpha^q(k) = g - \overline{g}$. Aplicando δ^q a ambos lados de la última igualdad tengo $\delta^q(\alpha(k)) = \delta^q(g - \overline{g})$, que por la ecuación 4.8 y la conmutatividad del diagrama II da $\alpha^{q+1}(\delta^q(k)) = \alpha^{q+1}(h - \overline{h})$.
Finalmente como α^{q+1} es inyectiva, entonces $\delta^q(k) = h - \overline{h}$. Por lo tanto $h - \overline{h} \in B^{q-1}(U, \mathscr{F})$, es decir, $[h] = [\overline{h}]$.

Ahora sean $U = \{U_i\}_{i\in I}$ y $V = \{V_i\}_{j\in J}$ dos recubrimientos de X y sea $\mu : I \longrightarrow J$ una aplicación tal que $U_i \subseteq V_{\mu_i}$, es decir $U \prec B$ y considero el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^q(V, \mathscr{F}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mu"'] & C^q(V, \mathscr{G}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu"'] & C_0^q(V, \mathscr{H}) \arrow[d, "\mu"] \\
0 \arrow[r] & C^q(U, \mathscr{F}) \arrow[r, "\alpha"'] & C^q(U, \mathscr{G}) \arrow[r, "\beta"'] & C_0^q(U, \mathscr{H})
\end{tikzcd}$$

Como el diagrama es conmutativo tengo $\mu(C_0(V, \mathscr{H})) = \mu(\operatorname{im}(\beta)) = \mu\beta(C(V, \mathscr{G})) = \beta\mu(C(V, \mathscr{G})) \subseteq C_0(U, \mathscr{H})$, así que puedo definir la aplicación

$$\mu : C_0^q(V, \mathscr{H}) \longrightarrow C_0^q(U, \mathscr{H})$$

Entonces φ induce el $\mathcal{A}_x$-homomorfismo en cohomología

$$\mu^\star : H_0^q(V, \mathscr{H}) \longrightarrow H_0^q(U, \mathscr{H})$$

Por la proposición 4.3.3 el homomorfismo $\mu^\star$ es independiente de la elección de la aplicación μ escogida. Luego si $f \in C_0^q(V, \mathscr{H})$, entonces $(h^q f)_{i_0 i_1 \ldots i_{q-1}} \in C_0^{q-1}(U, \mathscr{H})$.
Así tengo un homomorfismo canónico $\sigma(U, V) : H_0^q(V, \mathscr{H}) \longrightarrow H_0^q(U, \mathscr{H})$ y existe una sucesión exacta de cohomología que hace el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
H_0^q(V, \mathscr{H}) \arrow[r, "d^q"] \arrow[d, "\sigma(U,V)"'] & H^{q+1}(V, \mathscr{F}) \arrow[d, "\sigma(U,V)"] \\
H_0^q(U, \mathscr{H}) \arrow[r, "d^q"'] & H^{q+1}(U, \mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

Observemos que $\sigma(U, V)$ define para cada $q \geq 0$ un sistema inductivo de $\mathcal{A}_x$-módulos con respecto al conjunto dirigido de cubiertas abiertas propias de X. Entonces

$$H_0^q(X, \mathscr{H}) = \varinjlim_{x\in U} H_0^q(U, \mathscr{H})$$

Por lo tanto en el límite directo hay un homomorfismo para cada $q \geq 0$

$$d^q : H_0^{q+1}(X, \mathscr{H}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathscr{F})$$

Los dos diagramas anteriores dados por α y β implican que $\sigma(U, V)$ es un homomorfismo de la sucesión exacta de cohomología de V correspondiente a la sucesión exacta de cohomología de U. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(V, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma(U,V)"] & H^q(V, \mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma(U,V)"] & H^q(V, \mathscr{H}) \arrow[r, "d^q"] \arrow[d, "\sigma(U,V)"] & H^{q+1}(V, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma(U,V)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^q(U, \mathscr{F}) \arrow[r] & H^q(U, \mathscr{G}) \arrow[r] & H^q(U, \mathscr{H}) \arrow[r, "d^q"] & H^{q+1}(U, \mathscr{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposición 4.6.2. *La sucesión*

$$\ldots \to H^q(X, \mathscr{G}) \to H_0^q(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(X, \mathscr{F}) \to H^{q+1}(X, \mathscr{G})$$

es exacta.

Demostración. Por A.0.4, el límite directo de una sucesión exacta es una sucesión exacta, entonces por el diagrama conmutativo anterior podemos ver que al pasar al límite directo se tiene la sucesión exacta deseada. □

Veamos ahora qué sucede con los grupos de cohomología $H_0^q(U, \mathscr{H})$ y $H^q(U, \mathscr{H})$.
Observemos primero que la inclusión $\iota : C_0^q(U, \mathscr{H}) \hookrightarrow C^q(U, \mathscr{H})$ conmuta con el operador cofrontera y por tanto existe el homomorfismo

$$\iota : H_0^q(U, \mathscr{H}) \to H^q(U, \mathscr{H})$$

y al pasar al límite directo sobre U tengo el homomorfismo canónico

$$\iota^\star : H_0^q(X, \mathscr{H}) \to H^q(X, \mathscr{H})$$

Proposición 4.6.3. *El homomorfismo canónico*

$$\iota^\star : H_0^q(X, \mathscr{H}) \to H^q(X, \mathscr{H})$$

es biyectivo para $q = 0$ e inyectivo para $q = 1$

Primero demostraremos el siguiente lema.

Lema 4.6.4. *Sea $V = \{V_j\}_{j \in J}$ una cubierta abierta de X y sea $f = (f_j) \in C^0(V, \mathscr{H})$. Entonces existe una cubierta abierta $U = \{U_i\}_{i \in I}$ y una aplicación $\mu : I \to J$ tal que $U_i \subseteq V_{\mu i}$ y $\mu f \in C_0^0(U, \mathscr{H})$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y elijo $\mu x \in J$ de tal forma que $x \in V_{\mu x}$. Como $f_{\mu x} \in \Gamma(V_{\mu x}, \mathscr{H})$ entonces existe una vecindad abierta de x, digamos $U_x \subseteq V_{\mu x}$ y una sección $b_x \in \Gamma(U_x, \mathscr{G})$ que satisface $\beta(b_x)(y) = f_{\mu x}(y)$ para cada $y \in U_x$.
Entonces tengo que para $x \in X$, el conjunto $\{U_x\}_{x \in X}$ forma una cubierta abierta U más fina que V y $(b_x) \in C^0(U, \mathscr{G})$. Por último como $(\mu f)_x = (\beta(b))_x$ para cada x, entonces $\tau f \in C_0^0(U, \mathscr{H})$. □

Ahora haremos la demostración de la proposición.

Demostración. Para $q = 0$, tengo el homomorfismo $\iota^\star : H_0^0 : (X, \mathscr{H}) \to H^0(X, \mathscr{H})$.
Para ver que es inyectivo sean $z, w \in H_0^0(X, \mathscr{H})$ tales que $\iota^\star(z) = \iota^\star(w) \in H^0(X, \mathscr{H})$. Resulta entonces que $z \in C_0^0(U, \mathscr{H})$ y $w \in C_0^0(U, \mathscr{H})$ son 0-cociclos. Entonces para un refinamiento μ, z y w coinciden y por tanto $z = w \in H_0^0(X, \mathscr{H})$. Entonces $\iota^\star$ es inyectivo.
Sea ahora $z \in C^0(X, \mathscr{H})$ un 0-cociclo. Entonces por el lema 4.6.4 existe una cubierta abierta U y un morfismo de refinamiento $\mu : I \to J$ tales que $\mu z \in C_0^0(X, \mathscr{H})$. Entonces $\iota^\star(\mu z) = z$. Por lo tanto $\iota^\star$ es suprayectivo. Y con esto tengo que $\iota^\star$ es biyectivo.

Ahora sea $\iota^\star : H_0^1(X, \mathscr{H}) \to H^1(X, \mathscr{H})$. Sea $z = (z_{j_0 j_1}) \in C_0^1(V, \mathscr{H})$ un 1-cociclo, con $z \in ker(\iota^\star)$. Entonces existe $f = (f_j) \in C^0(V, \mathscr{H})$ con $df = z$. Por el lema 4.6.4 existe una cubierta abierta U y un morfismo de refinamiento μ tal que $\mu f \in C_0^0(U, \mathscr{H})$. Entonces al aplicar el morfismo cofrontera $\delta \mu f = \mu \delta f = \mu z$, de donde μz es imagen de μf y es cohomologo a 0 en $C^0(U, \mathscr{H})$. Tomando el límite inductivo, $\mathrm{im}(\iota^\star) = 0 \in H_0^1(X, \mathscr{H})$ y por tanto $\iota^\star$ es inyectivo. □

Corolario 4.6.5. *La sucesión*

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{G}) \to H^0(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{d} H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{G}) \to H^1(X, \mathscr{H})$$

es exacta.

Demostración. Dada una sucesión exacta de complejos tenemos una sucesión exacta de grupos de cohomología. Además por la proposición anterior, $H^0(X, \mathscr{H}) \cong H_0^0(X, \mathscr{G})$ y también usando el hecho de que el morfismo $\iota^\star : H_0^1(X, \mathscr{H}) \to H^1(X, \mathscr{H})$ es inyectivo, entonces $\ker(\beta^\star) = \ker(\iota^\star \beta^\star)$. Con esto tengo que la sucesión

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{G}) \to H^0(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{d} H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{G}) \to H^1(X, \mathscr{H})$$

es exacta. □

Corolario 4.6.6. *Si $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$, entonces el homomorfismo $\Gamma(X, \mathscr{G}) \to \Gamma(X, \mathscr{H})$ es suprayectivo.*

Demostración. Para el caso en que $H^1(X,\mathscr{F}) = 0$ la sucesión exacta anterior se convierte en

$$0 \to H^0(X,\mathscr{F}) \to H^0(X,\mathscr{G}) \to H^0(X,\mathscr{H}) \to 0$$

que sigue siendo exacta. Sea $\beta^\star : H^0(X,\mathscr{G}) \to H^0(X,\mathscr{H})$, como $H^0(X,\mathscr{F}) = \Gamma(X,\mathscr{F})$ para cualquier gavilla $\mathscr{F}$, entonces el morfismo es equivalente a $\beta^\star : \Gamma(X,\mathscr{G}) \to \Gamma(X,\mathscr{H})$ y como $\beta^\star$ es suprayectivo ya que la sucesión es exacta tengo la prueba. □

4.7. Sucesión exacta de gavillas: Caso en que X es paracompacto

En esta sección veremos las condiciones que permiten que $H_0^q(X,\mathscr{H}) \approx H^q(X,\mathscr{H})$. Esto equivale a ver que dada una cocadena $f \in C^q(U,\mathscr{H})$ puedo encontrar un refinamiento $\mu : V \to U$ y $g \in C^q(V,\mathscr{G})$ tal que $\mu f = \beta g$.

Definición 4.7.1. Sea X un espacio topológico y sea $U = \{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos. Decimos que U es localmente finita si para cada $x \in X$ existe una vecindad V tal que $V \cap U_i \neq \emptyset$ para un número finito de valores de i.

Definición 4.7.2. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es paracompacto si es Hausdorff[1] y si toda cubierta abierta de X admite un refinamiento abierto localmente finito.

Dado X un espacio paracompacto se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Todo espacio paracompacto es normal, es decir, dados dos cerrados ajenos A y B, estos tienen vecindades abiertas ajenas.

2. Dada U una cubierta abierta localmente finita en X, entonces existe una cubierta $\{W_i\}_{i\in I}$ de X tal que $\overline{W}_i \subseteq U_i$ para cada i, es decir, podemos encoger a U.

Proposición 4.7.3. *Si X es paracompacto, entonces el homomorfismo canónico*

$$H_0^q(X,\mathscr{H}) \to H^q(X,\mathscr{H})$$

es biyectivo para todo $q \geq 0$

Probaremos primero el siguiente lema:

Lema 4.7.4. *Sea $V = \{V_j\}_{j\in J}$ una cubierta abierta y sea $f = (f_{j_0\ldots j_q}) \in C^q(V,\mathscr{H})$, entonces existe un refinamiento $U = \{U_i\}_{i\in I}$ y una aplicación $\mu : I \to J$ tal que $U_i \subseteq V_{\mu i}$ y $f\mu \in C_0^q(U,\mathscr{H})$.*

[1]Decimos que un espacio topológico X es Hausdorff si dados dos abiertos x y y de X existen U y V abiertos tales que $U \cap V \neq \emptyset$ y $x \subseteq U$, $y \subseteq V$.

Demostración. Como X es paracompacto puedo suponer que V es localmente finito. Entonces existe una cubierta abierta $W = \{W_i\}_{i\in I}$ de X tal que $\overline{W_i} \subseteq V_j$. Entonces para cada $x \in X$ elijo una vecindad abierta U_x de x tal que cumpla con las siguientes condiciones:

(a) Si $x \in V_i$, entonces $U_x \subseteq V_i$. Análogamente $x \in W_i$, entonces $U_x \subseteq W_i$.

(b) Si $U_x \cap W_i \neq \emptyset$, entonces $U_x \subseteq V_i$

(c) Si $x \in V_{i_0} \cap \ldots \cap V_{i_q}$, entonces existe una cocadena $b = f(i_o \ldots i_q) \in \Gamma(U_x, \mathscr{G})$ tal que $\beta(b) = f_{j_0 \ldots j_q}$ en U_x.

Las condiciones (a) y (b) se cumplen ya que V y W son cubiertas abiertas localmente finitas y $\overline{W_i} \subseteq V_i$.

Recordemos que dada una sucesión exacta $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$, entonces para cada $x \in X$, la sucesión en los tallos es exacta, así que dada una cocadena $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{H})$, entonces $f(i_0, \ldots, i_q) \in \mathscr{H}_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}}$ es tal que $(f(i_0, \ldots, i_q))_x \in \mathscr{H}_x$, como β_x es suprayectiva entonces existe $b_x \in \mathscr{G}_x$ tal que $\beta_x(b_x) = (f(i_0, \ldots, i_q))_x$. Es decir, existe una vecindad de x, digamos U_x, y $b \in \Gamma(U_x, \mathscr{G})$ tal que $\beta(b) = f(i_0, \ldots, i_q)$. Si es necesario, puedo encoger U_x de tal forma que cumpla la condición, es decir, $b \in \mathscr{G}(U_x)$ es tal que $\beta(b) = f(i_0, \ldots, i_q) \mid_{U_x}$.

Ahora veamos cómo está dado el refinamiento.
Sea $U = \{U_x\}_{x\in X}$ una cubierta abierta de X. Sea $\mu x \in J$ tal que $x \in W_{\mu x}$. Queremos ver que $f(\mu x) \in C_0^q(U, \mathscr{G})$, es decir que $f_{\mu x_0 \ldots \mu x_q} = \operatorname{im}(\beta) \in \Gamma(U_{x_0} \cap \ldots \cap U_{x_q})$.

Si $U_{x_0} \cap \ldots \cap U_{x_q} = \emptyset$ entonces $f_{\mu x_0 \ldots \mu x_q} = 0 \in C_0^q$.

Supongamos ahora que $U_{x_0} \cap \ldots \cap U_{x_q} \neq \emptyset$, entonces $U_{x_0} \cap U_{x_k} = \emptyset$ para $0 \leq k \leq q$. Luego como $U_{x_k} \subseteq W_{\mu x_k}$, entonces $U_{x_k} \cap W_{\mu x_k} \neq \emptyset$ y por (b) $U_{x_0} \subseteq W_{\mu x_k}$, de donde $x_0 \in V_{\mu x_0 \ldots \mu x_q}$. Entonces por (c) existe $b = f(i_o \ldots i_q) \in \Gamma(U_{x_0}, \mathscr{G})$ tal que $\beta(b) = f_{\mu x_0 \ldots \mu x_q}$ en U_{x_0}. Por lo tanto $\beta(b) = f(\mu x_0 \ldots \mu x_q)$ en $U_{x_0} \cap \ldots \cap U_{x_q}$ □

Ahora probaremos la proposición.

Demostración. Para q=0 tengo el homomorfismo $\lambda \equiv \lambda^0 : H_0^0(X, \mathscr{H}) \to H^0(X, \mathscr{H}) \equiv \Gamma(X, \mathscr{H})$. La última equivalencia se da por la proposición 4.2.4. Observamos que λ es el morfismo inclusión y por lo tanto es 1-1 para cada espacio topológico X.
Sea $q \geq 1$ y $[g] \in H^q(X, \mathscr{H})$ tal que $\lambda^q([g]) = 0$ en $H^q(X, \mathscr{H})$. Por hipótesis existe una cubierta abierta U de X tal que $g \in Z_0^q(U, \mathscr{H}) \subseteq Z^q(U, \mathscr{H})$ y por lo tanto $\lambda^q([g]) = [g] = 0$ en $H^q(X, \mathscr{H})$. Entonces $g \in B^q(U, \mathscr{H}) = \delta(C^{q-1}(U, \mathscr{H}))$, es decir, $g = \delta(g')$ para algún $g' \in C^{q-1}(U, \mathscr{H})$ y por el lema anterior $\mu(g') = \beta(h)$ para algún $h \in C^{q-1}(V, \mathscr{G})$ con V un refinamiento localmente finito de U y μ morfismo de refinamiento. Entonces

$$\mu(g) = \mu(\delta(g')) = \delta(\mu(g')) = \delta(\beta(h)) = \beta(\delta(h)) \in \beta(\delta(C^{q-1}(V, \mathscr{G}))) \subseteq \beta(C^q(V, \mathcal{G}))$$

Es decir, $\mu(g) \in B^q(V, \mathscr{H}) \cap \beta(C^q(V, \mathscr{G})) = B^q_0(V, \mathscr{H})$. Entonces $[g] = 0$ en $H^q_0(X, \mathscr{H})$ y por lo tanto λ^q es 1-1.
Ahora veamos si es suprayectivo.
Sea $[g] \in H^q(X, \mathscr{H})$, entonces $g \in Z^q(U, \mathscr{H})$ para una cubierta abierta localmente finita de X. Entonces por el lema anterior $\mu(g) = \beta(h)$ para algún $h \in C^q(V, \mathscr{G})$, de donde $\delta(\mu(g)) = \mu(\delta(g)) = \delta(\beta(h)) = \beta(\delta(h)) = 0$ por hipótesis para g, entonces $\mu(g) \in Z^q(V, \mathscr{H}) \cap \beta(C^q(V, \mathscr{G})) = Z^q_0(V, \mathscr{H})$. De aquí tengo que $[g] \in H^q(X, \mathscr{H})$ está en $\mathrm{im}(\lambda^q)$ y por lo tanto el morfismo es suprayectivo. $\square$

4.8. Ejemplo: El grupo de cohomología de $H^0(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K})$

Sea $\mathbb{P}^1_K$ el espacio proyectivo de dimensión 1 sobre un campo K. Por definición $\mathbb{P}^1_K = \mathrm{Proj}\, K(X_0, X_1)$, sea $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}$ la gavilla estructural de $\mathbb{P}^1_K$. Queremos calcular el grupo de cohomología $H^0(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K})$.

Sea $U = \{U_0 = D_+(x_0), U_1 = D_+(x_1)\}$ una cubierta abierta afín. Los complejos están dados por:
$C^0(U, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U_0) \oplus \mathcal{O}_X(U_1)$
$C^1(U, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U_{01}) = \mathcal{O}_X(U_0 \cap U_1)$
$C^t(U, \mathcal{O}_X) = 0$ para $l \geq 2$
Donde
$\mathcal{O}_X(U_0) = K[\frac{x_1}{x_0}]$, $\mathcal{O}_X(U_1) = k[\frac{x_0}{x_1}]$ y $\mathcal{O}_X(U_{01}) = K[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_0}{x_1}]$.
Designemos por $x = \frac{x_1}{x_0}$ y $y = \frac{x_0}{x_1}$, para $U_{01}, y = \frac{1}{x}$.
Sea $\xi = \{f_0, f_1\} \in C^0(U, \mathcal{O}_X)$ cocadenas, donde $f_0 = f_0(x) \in K[x]$ y $f_1 = f_1(y) \in K[y]$.
Considero el morfismo cofrontera $\delta^0 : C^0(U, \mathcal{O}_X) \to C^1(U, \mathcal{O}_X)$ dado por $(\delta^0\xi)_{01} = f_1 - f_0 = f_1(\frac{1}{x}) - f_0(x) \in K[x, \frac{1}{x}]$.
Supongamos que $\delta^0\xi = 0$, entonces $f_1(\frac{1}{x}) = f_0(x)$ de donde $f_1 = f_0 = \alpha \in K$ de donde $\ker \delta^0 = K$ y por tanto $H^0(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}) = K$.
Veamos que esto es cierto.
Las rectas afines $U_0 = \mathrm{Spec}\, K[x]$ y $U_1 = \mathrm{Spec}\, K[y]$ forman una cubierta abierta de $\mathbb{P}^1_K$. Los puntos p_0 y p_∞ están determinados por ideales homogéneos $p_0 = (x_1)$ y $p_\infty = (x_0)$ en $K[x_0, x_1]$ respectivamente. Entonces $p_0 \subseteq U_0$ que es el punto en Spec $K[x]$ determinado por el ideal (x) de $K[x]$, es decir, p_0 es el origen de la recta afín Spec $K[x]$. Análogamente $p_\infty \in U_1$ es el origen de la recta afín Spec $K[y]$.
Sea $\mathscr{I}$ una subgavilla de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}$ definida de la siguiente manera:

$$\mathscr{I} = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(U) & \text{si } p_0, p_\infty \notin U \\ s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(U) & s(p_0) = 0 = s(p_\infty) \text{para } p_0, p_\infty \end{cases}$$

Un homomorfismo natural $\iota : \mathscr{I} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}$ está inducido por $\mathscr{I} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}$. Tenemos de esto las siguientes obaservaciones:

1. Para $U_0 = \mathrm{Spec}K[x]$, $\mathscr{I} = (x)$
2. Para $U_1 = \mathrm{Spec}K[y]$, $\mathscr{I} = (y)$

Por la proposición 4.2.4 $H^0(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}) = K$ es equivalente a ver que $\Gamma(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(\mathbb{P}^1_K) = K$. Así que para $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(\mathbb{P}^1_K)$ sea $F = \rho^{\mathbb{P}^1_K}_{U_0}(f)$ y $G = \rho^{\mathbb{P}^1_K}_{U_1}(f)$, entonces $F \in K[x]$ y $G \in K[y]$. Sea $U_{01} = U_0 \cap U^1 = \mathrm{Spec}K[x, \frac{1}{x}]$ y $\rho^{U_0}_{U_{01}}(F) = \rho^{U_1}_{U_{01}}(G)$. De esto tengo que $F(x) = G(\frac{1}{x})$. Como F y G son polinomios en x y y respectivamente, entonces F y G son la misma constante, es decir, $f \in K$. Y para el caso en que $f = 0$, $f \in K$ no se vuelve 0 en p_0 y p_∞, por lo que $\mathscr{I}(\mathbb{P}^1_K) = 0$.
Por lo tanto $H^0(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}) = \Gamma(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}) = K$

Apéndice A

Límite directo

Definición A.0.1. Un conjunto dirigido I es un preorden $\leq$ que cumple lo siguiente:

Para cada $a, b \in I$ existe $c \in I$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

Definición A.0.2. Un sistema dirigido M de conjuntos indexado por un conjunto dirigido I es una familia de conjuntos $(M_i)_{i \in I}$ tal que para cada $i, j \in I$ existe un morfismo $\varphi_{ij} : M_i \to M_j$ tal que para cada $i \in I$, $\varphi_{ii} = \mathbf{1}_{M_i}$ y si $i \leq j \leq k$ entonces $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$.

Definición A.0.3. Dado un grupo aditivo M y un homomorfismo $\varphi_i : M_i \to M$ que satisface $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$, entonces decimos que es el límite directo si satisface la siguiente condición:

Dado un grupo aditivo A y un homomorfismo $f_i : M_i \to A$ tal que para $i \leq j$, $f_i = f_j \circ \varphi_{ij}$, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "f_i"'] & & M_j \arrow[dl, "f_j"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe un único morfismo $h : M \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & M_j \arrow[dl, "h"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Y lo denotamos

$$M = \varinjlim_{i \in I} M_i$$

El límite directo satisface el siguiente teorema:

Theorem A.0.4. *Dadas las gavillas L, M, N, y sea $L_x \to M_x \to N_x$ una sucesión exacta, entonces*

$$\varinjlim_{x\in I} L_x \xrightarrow{\varphi} \varinjlim_{x\in I} M_x \xrightarrow{\psi} \varinjlim_{x\in I} N_x$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Para ver que φ es inyectiva, sea $L = \varinjlim_{x\in I} L_x$ y supongamos que $\varphi(a) = 0$ para $a \in L$, así que a está determinado por algún $l_x \in L_x$. Luego como $\varphi(a) = 0$, entonces $m_x = \varphi_x(l_x)$ determina el elemento neutro en $M = \varinjlim_{x\in I} M_x$. Entonces existe $x' > x$ tal que $g_{x'x}(m_x) = 0$, es decir, $g_{x'x}(\varphi_x(l_x)) = \varphi_{x'}(f_{x'x}(l_x))$. Con esto tengo que $\varphi_{x'} f_{x'x}(l_x) = 0$ y como $\varphi_{x'}$ es inyectiva entonces $f_{x'x}(l_x) = 0$, es decir, $a = 0$.

Ahora supongamos que $\psi(b) = 0$ para algún $b \in M$. Entonces sea b el elemento en M determinado por $m_y \in M_y$ y sea $n_y = \psi_y(m_y)$ el elemento que determina el neutro en N. Entonces existe algún ξ_y que satisface $h_{\xi_y}(n_y) = 0$. Como $0 = h_{\xi_y}(\psi_y(m_y)) = \psi_\xi(g_{\xi_y}(m_y))$ y por el hecho de que la sucesión es exacta para ξ existe $l_\xi \in L_\xi$ tal que $\varphi_\xi(l_\xi) = g_{\xi_y}(m_y)$. Sea a el elemento de L determinado por l_ξ. Entonces $\varphi(a) = b$. Por lo que $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$.

Ahora veamos si ψ es suprayectiva. Sea $n_x \in N_x$ que determina a $c \in N$. Por hipótesis ψ_x es suprayectiva. Entonces existe $m_x \in M_x$ tal que $\psi_x(m_x) = n_x$. Sea b el elemento de M determinado por m_x. Entonces $c = \psi(b)$ y por lo tanto ψ es suprayectiva.

Por lo tanto el límite directo es preservado bajo sucesiones exactas.

$\square$

Bibliografía

[1] J. P. Serre, *Faisceaux Algébriques Cohérents*, Annals of Math. 61, (1955), pp. 197-278

[2] R. G. Swan, *The Theory of Sheaves*, Chicago Univ. Press, (l964).

[3] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann Paris, (1964).

[4] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, (1966).

[5] B. R. Tennison, *Sheaf Theory*, Cambridge Univ. Press, (1975).

[6] R. Harshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, (1977).

[7] R. O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer-Verlag, N.Y, (2008).

[8] Gunning & Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, (2009).

[9] M. Miyanishi, *Algebraic Geometry*, Providence, AMS, (1990).

[10] K. Ueno, *Algebraic Geometry 2*, Providence, AMS, (2001).

[11] Srikanth, et. al., *Twenty Four Hours of Local Cohomology*, Providence, AMS (2007).

[12] Bredon, *Sheaf Theory*, Springer-Verlag, Berlin, (1997).

[13] Atiyah-Macdonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, Reverté, (2005).

[14] J. J. Rotman, *An introduction to Homological Algebra*, New York Academic, (1979).

[15] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Univ. Press, (1992).

[16] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser Boston, (1991).

[17] D. Perrin, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, London, (2008).