



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**“LA INTERACCIÓN DE MAREA EN ESTRELLAS
BINARIAS: EL MODELO DE UNA CAPA”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

GERARDO MARTÍNEZ AVILÉS



**DIRECTOR DE TESIS:
Dra. Gloria Koenigsberger Horowitz
2011**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos de la Tesis

1. Datos del alumno
Martínez
Avilés
Gerardo
044 55 22 96 66 22
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
302786309
2. Tutor:
Dra.
Gloria
Koenigsberger
Horowitz
3. Sinodal 1
Dr.
Edmundo
Moreno
Díaz
4. Sinodal 2
Dr.
Frederic
Maset
5. Sinodal 3
M. en C.
Edgar
Vázquez
Luis
6. Sinodal 4
Dr.
Pablo
Velázquez
Brito
7. Datos del trabajo
La interacción de marea en estrellas binarias:
el modelo de una capa.
65 pp.
2011

Agradecimientos

Espero poder expresar con estas palabras la gratitud que siento con muchas de las personas que me han acompañado durante éste camino.

En primer lugar a Gerardo Martínez y Carolina Avilés, mis padres. A mi padre por la mitad de mi genoma, pero también por enseñarme a preguntarme sobre el mundo, a querer a los animales, a escuchar música afrocaribeña y por motivarme a darle vuelo a la imaginación. A mi madre por la otra mitad de mi genoma y si entendí bien por mi ADN mitocondrial. Pero también por haberme contado cuentos, por enseñarme a amar a los libros y a ser ordenado, por ser tan dedicada a la familia y prepararme mi calabaza en tacha.

A mis maestros, por compartir conmigo lo mucho que saben. En especial a Gloria Koenigsberger, cuya sabiduría es casi tan infinita como su paciencia; a Edmundo Moreno, que tiene una pregunta para cada respuesta; a los maestros de la Facultad de Ciencias a quienes recuerdo con cariño: Julia Espresate, Edgar Vazquez, Pablo Padilla y los que faltan.

A mi tribu, tan numerosa como las arenas del desierto o las estrellas en el universo. En Cuerna a mi abuela y a la tía Maru. A mis tíos de las ruinas de Tenochtitlan, que tuvieron siempre abiertas las puertas de sus casas, sus alacenas y sus refrigeradores durante mi proceso de fosilización: Bety, Paco, Yola, Paul, Bonni, Uriel, Erika y los que faltan. Mis primos, que me enseñaron todo lo que no viene en los libros: Marifer, Kenya, Paulo, Chino, Dany, Guillo y los que faltan; mi carnal el Danis; los de antaño: el Guero y el Gordis; los preciosos de Portales: el Toks y la Ceci.

Los chinos, por que aprende uno más con ellos en los mezcales que en las bibliotecas (nunca fuimos a una biblioteca): Adraán (mal escrito a propósito), Tulio, Lore, Iza, Cachalote, los que me faltan y muy en especial a ¡Yajaaaaa-rra! con quien arreglé mil veces el mundo desde el Salón Portales. Los de la fac: Manero, Mini y David a quienes les pasaba las tareas, Diana, Joey y Gabo que me cuentan que siempre estaban en el café. Mis cuates de la prepa: Bere, Sabi, Marimar, Fischer, Lalo, Nequix y Paul a quienes les dije que nunca cambiaran y lo primero que hicieron fue ir y cambiar. Ya ni modo.

Por último pero no menos importante quiero agradecer a mis amigos de Villa Olímpica, por llamarles de algún modo. A mi Naty que me invitó a vivir con ella e inició sin saberlo una larga cadena de amistades. Al Chop que a pesar de ser filósofo de repente dice cosas interesantes. A Gero que es de los pocos de letras que sabe algo de ciencia. A Camilo que siempre sabe qué libros regalar y que es buenísimo para *hacerles el paro* a sus amigos. A

Genaro que ni se enterará que se encuentra en esta dedicatoria. A la gente que le dedicó un momento de su vida a leer este trabajo también le agradezco. A CONACYT y PAPIIT que me apoyaron con sus generosas becas.

Si alguien cree que su nombre debe estar aquí pero no está le ofrezco una disculpa. Lo invito a leer la tesis de todos modos, a lo mejor su nombre aparece en algún lado...

Resumen

La interacción de marea genera oscilaciones observables en las superficies de estrellas binarias que rotan de forma no síncrona. En este trabajo se estudia un modelo numérico de dicho fenómeno que deriva de primeros principios el campo de velocidades de una delgada capa superficial de una estrella. En concreto, se hace un análisis de la dependencia de los resultados predichos por el modelo respecto a algunos parámetros libres que se requieren para operar. Para el análisis se utilizan los datos del sistema α Virginis (Spica, HD 116658) modelado en Harrington et al. (2009). Se encuentran valores de capas delgadas y capas gruesas entre las cuales se obtienen oscilaciones en la superficie, así como el rango de viscosidades donde dichas oscilaciones hacen que la disipación de energía dependa linealmente de los valores de la viscosidad.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Conceptos Básicos	8
1.1.1. Las estrellas	8
1.1.2. El interior de las estrellas	9
1.1.3. Transporte de energía	11
1.1.4. Modelos de estructura estelar	11
1.1.5. Pulsaciones estelares	12
1.1.6. Sistemas estelares binarios	13
1.1.7. Las fuerzas de marea	15
2. Antecedentes	17
2.1. El modelo	17
2.2. El programa	19
2.3. Parámetros del programa a explorar	20
2.3.1. El parámetro β_0	20
2.3.2. La viscosidad	21
2.3.3. El grosor de la capa dR_1/R_1	23
2.3.4. El índice politrópico	24
3. Metodología y Resultados	27
3.1. Spica: el sistema a caracterizar	27
3.2. Metodología	28
3.3. Resultados	31
3.3.1. Dependencia en dR_1/R_1	31
3.3.2. El espacio de viscosidades permitidas	42
3.3.3. Dependencia del parámetro β_0	49
4. Conclusiones	57

Capítulo 1

Introducción

La observación del cielo ha sido una actividad fundamental en el desarrollo del conocimiento humano. Gracias a la astronomía el hombre ha podido medir el paso del tiempo, navegar por los mares, predecir las lluvias y las sequías y hasta cambiar radicalmente la concepción que tiene de si mismo, de sus orígenes y del lugar que ocupa en el mundo.

Desde que en la ciencia se han unificado la física terrestre y los fenómenos celestes, aproximadamente en el siglo XVII, la astronomía podría ser considerada como una rama de la física. Los astrónomos utilizan todo lo que se sabe de física en la Tierra para aplicar dicho conocimiento al estudio del comportamiento de los astros. Pero el fenómeno también va a la inversa; la física ha obtenido gran parte de sus conocimientos, muchos de los más fundamentales, gracias a las observaciones y resultados astronómicos.

No obstante, la división entre física y astronomía no es meramente un hecho histórico. Los astrónomos no tienen acceso a una medición directa de los fenómenos que observan. Hasta el momento, no hemos sido capaces de imaginarnos un experimento que simule físicamente, por ejemplo, la estructura de una estrella o de una galaxia. La tecnología nos ha dado para ir a la Luna y enviar exploradores robóticos a Marte. Han sido enviadas sondas y fotografiado muy de cerca a todos los planetas del Sistema Solar. También se tiene muy bien observado al Sol, la estrella más cercana. Conocemos un poco más de nuestro universo por el material que cae en la Tierra del espacio y que podemos recolectar, analizar y hasta tocar. Pero fuera de esos muy particulares casos, la mayor parte de las evidencias astronómicas son obtenidas con las observaciones telescópicas y con los detectores, además del uso de

las matemáticas y de poderosas herramientas computacionales. En resumen, como en todas las disciplinas a las que se ha dedicado la humanidad, casi todo es resultado del pensamiento.

1.1. Conceptos Básicos

1.1.1. Las estrellas

Me aventuraré a afirmar que las estrellas son los componentes fundamentales de las estructuras más grandes que hemos visto en nuestro universo. Al momento de escribir esta tesis, el problema de qué es aquello que compone nuestro universo es uno que no ha encontrado solución. Se estima que el 70 % de lo que compone nuestro universo es energía oscura y aproximadamente 25 % es materia oscura. Es decir, las estrellas están dentro del 5 % restante de lo que compone al universo. Si las teorías de existencia de la materia y energía oscuras son correctas, no debemos menospreciar el lugar que ocupan las estrellas en el mundo. Después de todo, la materia de la que estamos compuestos los seres vivos, los elementos pesados como el oxígeno, el nitrógeno y el carbono se formaron en las estrellas. Fueron ellas quienes, literalmente, nos formaron a nosotros los observadores del cielo. No es mentira afirmar que somos polvo de estrellas.

Una buena forma de saber qué son las estrellas es salir a verlas, de día o de noche, con telescopio o a simple vista. De ahí nacen muchas preguntas. Parecería una locura intentar contar todas las estrellas que hay en el universo. No obstante, los astrónomos han tratado de contestar a ese tipo de interrogantes. Se estima, en base a cálculos y observaciones que las galaxias contienen entre 10^7 y 10^{12} estrellas y, suponiendo que el Universo es cerrado, se estima que contiene alrededor de 10^{11} galaxias. Es frecuente escuchar que el número de estrellas en el universo observable es mayor al de los granos de arena de todas las playas del mundo. Si bien es difícil de imaginar cualquiera de las dos cosas, simplemente se puede concluir que, para la subjetividad humana, el número es inimaginablemente grande.

Parecería entonces que por el número de estrellas que estimamos que existen, éstas fueran estructuras de muy fácil formación. Las estrellas están formadas principalmente de hidrógeno, el elemento más ligero que existe.

Comienzan a formarse a partir de la atracción gravitacional debida a inhomogeneidades de densidad en nubes moleculares, las cuales contienen elementos pesados que se formaron en los procesos de evolución y muerte de otras estrellas. Las primeras estrellas se formaban de nubes de hidrógeno y helio producto de procesos del génesis de partículas elementales en el universo temprano. Al atraerse muchos de los átomos que forman a las nubes, se crea un gas que se calienta por la presión causada por la propia gravedad. Esto aumenta la densidad de la nube de la periferia hacia el centro de la misma. La presión alcanza niveles altísimos, lo que hace que se caliente el gas en el interior de la proto-estrella. Por consiguiente, los átomos que forman al gas alcanzan velocidades y energías tan altas que llegan a fusionarse en núcleos de elementos más pesados. A partir de ese momento, la proto-estrella entra en una fase en la que se estabiliza la fusión del hidrógeno. Podríamos decir entonces, que una estrella es una esfera muy caliente de plasma que está en equilibrio entre su presión interna y su propia gravedad. Es aquí donde surge la pregunta de si realmente el proceso de equilibrio es tan sencillo como para formar tal número de estrellas.

Las estrellas sufren procesos durante toda su vida buscando ese equilibrio que las mantiene. Es por ello que muchas estrellas pulsan y varían en brillo y radio. Una de las tareas de los astrónomos es conocer la estructura y evolución de las estrellas observando y analizando dichas variaciones.

1.1.2. El interior de las estrellas

Para hacer un primer cálculo de la densidad de una estrella, podemos hacer uso de la ecuación de densidad suponiendo que las estrellas son cuerpos perfectamente esféricos:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (1.1)$$

donde ρ es la densidad, R el radio de la estrella y M su masa.

La ecuación (1.1) indica que la densidad de las estrellas es una función que disminuye conforme aumenta la distancia al centro de la estrella. Esto quiere decir que las estrellas poseen una zona central muy densa que está envuelta por una zona externa cuya densidad va disminuyendo hasta llegar a valores cercanos a cero cuando llegamos a la superficie de la estrella.

La temperatura de las estrellas es también una función que depende de la distancia al centro y decrece conforme ésta aumenta. La temperatura en el centro de una estrella como el Sol es del orden de decenas de millones de grados Kelvin, mientras que en las zonas cercanas a la superficie la temperatura es de, aproximadamente, 5800 K, lo cual implica que el gradiente de la temperatura de una estrella es muy pronunciado.

Dicha configuración alcanzada por las estrellas es la que les permite encontrar el equilibrio entre la fuerza gravitacional que las haría colapsarse hacia su centro y la presión interna que se ejerce en la dirección opuesta e impide la contracción. La ecuación que describe el fenómeno es la siguiente:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho(r)}{r^2} \quad (1.2)$$

Donde P es la presión, r la posición respecto al centro de la estrella, $\rho(r)$ es la densidad dependiente de la posición y M_r es la cantidad de masa contenida en una esfera de radio r.

La presión interna se genera por la energía térmica contenida en el plasma que conforma a las estrellas. Suponiendo que las estrellas se comportan como gases ideales podemos obtener los valores de la presión si conocemos la temperatura:

$$P = \frac{NkT}{V} = \frac{N}{V}kT = nkT \quad (1.3)$$

Donde P es la presión, T la temperatura, N es el número de partículas, V el volumen, n la densidad de partículas y k la constante de Boltzmann.

Una segunda contribución a la presión interna es la llamada presión de radiación y se debe a que sabemos que los fotones poseen ímpetu que puede ser transmitido a las partículas de materia con las que interactúan. Dicha presión de radiación puede ser expresada como:

$$P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4 \quad (1.4)$$

Donde a es conocida como la constante de radiación y tiene un valor de $7.566 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$. A temperaturas muy elevadas, el valor de esta presión llega a superar a la presión del gas.

1.1.3. Transporte de energía

El núcleo de las estrellas es la zona en donde se produce toda la energía requerida para sostener a las capas externas. El flujo de energía que debe existir del núcleo a las capas externas de la estrella debe regularse de manera que sea exactamente el necesario para sostener a las capas externas. Lo que regula dicho transporte energético es la llamada "opacidad" del material estelar. Ésta depende de dos factores; el primero es la probabilidad de que la radiación proveniente del núcleo interactúe con las partículas de las capas que lo rodean y el segundo es la densidad atómica o molecular del material de dichas capas. La opacidad del material filtra la energía producida en el núcleo del centro hacia la superficie. El material toma dicha energía y la utiliza para mantener la presión que impide el colapso gravitacional de la estrella.

Otro tipo de transporte de energía es la conducción del calor, la cual se da entre dos cuerpos en contacto que se encuentran a diferentes temperaturas y el tercero es la convección, la cual se debe a que los cuerpos a mayor temperatura tienden a ocupar un volumen mayor, y respondiendo al principio de Arquímedes, tienden a flotar si se encuentran en un fluido más denso. El fenómeno de la convección es responsable de muchas de las características superficiales de las estrellas, pero aún carece de un tratamiento matemático adecuado.

1.1.4. Modelos de estructura estelar

Para poder modelar fenómenos físicos es necesario plantear y resolver las ecuaciones que describan las relaciones que existen entre las variables físicas que conforman el modelo. Las ecuaciones de estructura estelar son un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas cuya solución nos da los valores de la densidad, la temperatura, la tasa de generación de energía y la presión como funciones de la posición respecto al centro de la estrella. Estos modelos predicen una cierta distribución espectral teórica que después es comparada con las observaciones. Las ecuaciones de estructura estelar para una configuración esférica son las siguientes:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \quad (1.5)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2\rho \quad (1.6)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa \rho L_r}{T^3 4\pi r^2} \quad (1.7)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mu m_H}{\kappa} \frac{GM_r}{r^2} \quad (1.8)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (1.9)$$

$$P_t = \frac{\rho \kappa T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T^4 \quad (1.10)$$

donde L_r es la luminosidad de una esfera de radio r , $\epsilon = \epsilon_{nuclear} + \epsilon_{gravitacional}$ son tasas de generación de energía, m_H es la masa del átomo de hidrógeno, κ es la opacidad del material, a es la constante de radiación; μ es el peso molecular medio y γ es el cociente de los calores específicos a presión y volumen constantes (en el caso monoatómico $\gamma = 5/3$).

Es importante notar que todas las variables dependen de la posición dentro de la estrella y que no dependen del tiempo. Sin embargo, sabemos que conforme avanza dicha variable la abundancia de hidrógeno, el combustible principal, y de otros elementos, no es constante, por lo que para hacer descripciones más adecuadas de la evolución de la estructura estelar debemos agregar a dichas ecuaciones un método de solución que tome en cuenta al tiempo.

1.1.5. Pulsaciones estelares

Desde hace mucho tiempo que en astronomía se sabe que algunas estrellas se encuentran continuamente cambiando su brillo de manera periódica. Dicho fenómeno ha servido a los astrónomos para conocer más sobre la estructura de las estrellas. En algunos casos las oscilaciones radiales de una estrella pulsante son el resultado de ondas de sonido que resuenan en el interior de las estrellas. Una aproximación burda al periodo de pulsación estelar puede obtenerse al calcular el tiempo que tarda un pulso de sonido en atravesar el diámetro de la estrella modelada en un medio de densidad constante. La velocidad adiabática del sonido, está dada por la ecuación:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (1.11)$$

La presión puede obtenerse de la ecuación de equilibrio hidrostático, suponiendo (de manera irreal por supuesto) que la densidad de la estrella es uniforme. Entonces

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho}{r^2} = -\frac{G(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho)\rho}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho^2 r \quad (1.12)$$

Integrando dicha ecuación usando la condición de frontera $P=0$ en la superficie, obtenemos la presión en función de r ,

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 (R^2 - r^2) \quad (1.13)$$

El periodo de pulsación puede ser aproximado mediante

$$\Pi \approx \frac{dr}{v_s} \approx 2 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{3}\gamma G \rho (R^2 - r^2)}} \quad (1.14)$$

Por lo que el periodo de pulsación queda:

$$\Pi \approx \sqrt{\frac{3\pi}{2\gamma G \rho}} \quad (1.15)$$

En el presente trabajo estudiaremos un tipo de pulsación visible en la superficie estelar, pero estudiado bajo una óptica distinta. No obstante, es importante al estudiar una modelación el conocer otro tipo de modelaciones y, de ser posible, ver hasta qué grado las modelaciones son análogas y en cuanto se parecen las predicciones que hace cada una.

1.1.6. Sistemas estelares binarios

Hasta ahora hemos hablado, muy generalmente, de estrellas solitarias. Sin embargo no todas las estrellas son así. Existen cierto tipo de estrellas que por estar muy cerca unas de otras, en pares o triadas o tal vez más, se encuentran girando alrededor del centro de masa del sistema. Los sistemas formados por dos estrellas ligadas gravitacionalmente se conocen como sistemas estelares binarios. Se estima que aproximadamente la mitad de las estrellas que se observan pertenecen a un sistema binario. Por lo que, haciendo cuentas, la

cantidad de estrellas solitarias como el Sol es solamente la tercera parte del total. El estudio de los sistemas binarios es un campo muy fructífero en la astronomía contemporánea. Es muy interesante el preguntarse sobre el origen y evolución de estos sistemas. En primer lugar, su formación no puede ser completamente igual a la formación de las estrellas solitarias. Una vez formadas, la cercanía entre ellas hace que sus comportamientos estén íntimamente relacionados. Las principales interacciones que existen en los sistemas binarios son la interacción gravitacional, la interacción de sus campos magnéticos y la interacción radiativa.

La primera ley de Kepler nos dice que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas, con el Sol situado en uno de los focos de la elipse. De hecho, ésta es una de las razones por las que Newton formuló su famosa ecuación de la ley de gravitación universal en la forma en que lo hizo. Sabemos que la trayectoria seguida por un cuerpo sometido a una fuerza central que decae como el cuadrado de la distancia debe seguir una de las curvas conocidas como secciones cónicas. A saber: una elipse, una parábola o una hipérbola. La elipse es la única de estas curvas que es cerrada y es el tipo de órbita que más nos interesa. Las estrellas binarias obedecen órbitas keplerianas; una estrella se encuentra en un foco mientras la otra gira en una elipse alrededor de aquélla. Esto es cierto tomando como sistema de referencia a aquél que se encuentra anclado en el foco donde se encuentra cualquiera de las compañeras binarias. Podemos también tomar un sistema de referencia en el que ambas estrellas giran alrededor del centro de masa del sistema. Existe un punto sobre las elipses que es el más cercano al foco donde se encuentra anclado nuestro sistema de referencia. En geometría a este punto se le llama el vértice de la elipse, en astronomía se llama periastro. Este punto es en el que las estrellas tienen una máxima atracción gravitacional puesto que la distancia que las separa es la mínima posible en esa órbita.

El giro de las estrellas sobre su propio eje es otro de los componentes a estudiar en los sistemas binarios. En general, no siempre será la misma cara de la estrella la que esté frente a la estrella compañera, al igual que en el caso de las diferentes caras de la Tierra que pueden ser vistas desde la Luna. Esto representa un par de problemas; el primero es que las estrellas no son cuerpos rígidos; más bien son esferas de gas que no giran uniformemente. El segundo problema es que la fuerza de atracción gravitacional causada por la estrella compañera que siente cada una de las partes que conforman a la estrella que

gira variará, puesto que la posición relativa de cada una de dichas partes y la estrella compañera se encuentra cambiando en el tiempo.

1.1.7. Las fuerzas de marea

El fenómeno de las mareas ha sido cotidiano para los hombres que han vivido cerca de los mares o de grandes lagos desde tiempos antiguos. Se sabía que en dicho acontecimiento estaba involucrada la posición de la Luna y del Sol en el cielo. No fue hasta los tiempos es que se contó con la dinámica de Newton que pudo explicarse de manera correcta a qué se debe tal fenómeno. Sabemos que la atracción gravitacional de la Luna causa aumentos y disminuciones en el nivel de los mares. Otro tipo menos conocido de marea es la llamada "marea de tierra", un fenómeno igual pero a menor escala de amplitud, que se presenta en las capas inferiores de la Tierra. La fuerza de marea es un fenómeno que se debe a que los cuerpos físicos son cuerpos extendidos y no cuerpos puntuales, como muchas veces se les estudia. Recordemos que la ley de Gravitación universal de Newton nos dice que la fuerza de atracción entre los cuerpos disminuye como el cuadrado de la distancia que los separa. Es por ello que, por ejemplo, la Luna jala con mayor fuerza a la parte de la Tierra que está más cercana a ella, con una fuerza menor al centro de la Tierra y con una todavía menor a la antípoda. Esto genera que la geometría de la Tierra se vea afectada por dicho gradiente de fuerzas. Las compañeras en un sistema estelar binario se afectan gravitacionalmente siguiendo el mismo principio. El conocer los radios de las estrellas de un sistema binario es fundamental para estudiar el efecto de la fuerza de marea puesto que a mayor radio, el gradiente de fuerzas será también mayor. La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional de Newton tiene la siguiente forma:

$$F = \frac{GM_1M_2}{r^2} \quad (1.16)$$

donde G es la constante de gravitación universal, M_1 y M_2 las masas respectivas de los cuerpos que se atraen y r la distancia que separa dichos cuerpos. Veamos ahora como es la razón de cambio de dicha fuerza con respecto al cambio en la distancia. De la expresión anterior, derivemos F respecto a r

$$\frac{dF}{dr} = -\frac{2GM_1M_2}{r^3} \quad (1.17)$$

La razón de cambio de la fuerza con respecto a la distancia es inversamente proporcional al cubo de esta última. En el caso de dos cuerpos que se encuentran uno frente a otro, la marea se debe a que existe un gradiente de fuerzas sobre ambos cuerpos, cambiando la geometría de éstos.

Ahora bien, si el cuerpo deformado gira con una velocidad distinta a la velocidad angular orbital del cuerpo que la deforma, dichas deformaciones o montes causados por la marea, en general, no se encuentran alineados con el objeto que causa la deformación. Esto ocurre por que las fuerzas de fricción dentro de la superficie del cuerpo deformado arrastran dichos montes en la misma dirección que lleva el giro de la estrella. En algunos casos, esta dirección hace que los montes dejen detrás de sí a la línea que une los centros de masa de los cuerpos que se atraen. Debemos recordar que la fricción es una fuerza disipativa, lo que causa que parte de la energía cinética asociada al movimiento orbital sea transformada en calor. Una de las cantidades que siempre se conservan es el momento angular. La desalineación de los montes de la marea, al ser jalados por el cuerpo atractor con distintas fuerzas genera una torca neta que desacelera la rotación del cuerpo. Por conservación del momento angular, el cuerpo atractor debe agrandar su órbita. Tal como ocurre entre la Luna y la Tierra.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. El modelo

El modelo que se empleará para efectuar los cálculos en ésta tesis, se encuentra ampliamente descrito en Toledano et al. (2007), Moreno & Koenigsberger (1999), Moreno et al. (2011). A continuación se explicarán sus principios básicos.

Imaginemos dos estrellas que pertenecen a un sistema binario. Supondremos que la estrella sobre la que haremos los cálculos puede estar girando sobre su propio eje y además que su ecuador yace sobre el plano orbital. La estrella compañera será considerada una masa puntual alejada a una cierta distancia. Sabemos que las estrellas están formadas por gas (principalmente hidrógeno y helio). No obstante, al considerar en nuestro estudio sólo las capas más externas de la atmósfera estelar, consideraremos el interior de la estrella estudiada como un cuerpo rígido esférico que tiene un giro uniforme. Dicha esfera está rodeada por una capa delgada formada de gas y supondremos que esta última capa es la única que es susceptible a ser deformada por las perturbaciones causadas por la estrella compañera.

Dividiremos esta delgada capa de gas en paralelos y meridianos. Los meridianos son líneas imaginarias, o más precisamente círculos máximos, en la superficie de una esfera que van de polo a polo. Los paralelos son círculos que rodean perpendicularmente al eje de rotación de la esfera, sobre la superficie de ésta, a lo largo de todo aquél y creciendo de radio al pasar de los polos hacia el ecuador. Al hacer ésta división se forman elementos de volumen que

contienen dentro al gas que rodea a la esfera rígida. El tamaño y el número de estos elementos depende de cuántos paralelos y meridianos escogamos para hacer la división. Así que, entre mayor número de líneas imaginarias, mayor número de elementos de volumen y menor el tamaño de éstos. Cada uno de éstos elementos de volumen contiene un centro de masa, sobre el cual se harán los cálculos correspondientes.

El modelo considera que las fuerzas instantáneas que actúan sobre cada uno de estos elementos de volumen son:

- La fuerza de gravedad de la estrella a la que pertenecen.
- La fuerza de gravedad de la estrella compañera.
- La presión interna del gas.
- Las fuerzas viscosas ejercidas radial y azimutalmente por los elementos de volumen estudiados.
- La presión ejercida azimutalmente por los elementos adyacentes debido a la velocidad tangencial y la fuerza gravitacional.

Tomaremos además como sistema de coordenadas a aquél cuyo origen se encuentra anclado al centro de la estrella sobre la cual haremos el cálculo y que gira de tal manera que la estrella compañera siempre se encuentra sobre el eje-x.

La segunda ley de Newton nos da la relación entre la forma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que estudiamos y las aceleraciones que éste sufre. Por ello, escogeremos resolver ecuaciones diferenciales para las aceleraciones en función de algunas fuerzas conocidas.

Al escoger un sistema de referencia que gira, aparecen en las ecuaciones de movimiento lo que se conoce como fuerzas inerciales. Éstas aparecen por el hecho de que la posición de los vectores que definen el sistema de referencia que rota se encuentra variando en el tiempo. Por lo que nuestras ecuaciones de movimiento, particularmente la segunda ley de Newton, queda de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}', \quad (2.1)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es el periodo de rotación del sistema de referencia, y los términos primados son los que refieren a los valores que se tienen en el sistema no acelerado. Los últimos tres términos del lado derecho de la ecuación corresponden a las aceleraciones centrífuga, la aceleración de Coriolis y de Euler

respectivamente. En el primer término (\mathbf{a}') se encuentran las aceleraciones debidas a las fuerzas que actúan sobre los elementos de volumen.

2.2. El programa

En el siglo XVII, contemporáneo a Isaac Newton, hubo un físico, filósofo y matemático alemán llamado Gottfried Wilhelm Leibniz. Entre sus muchas aportaciones al conocimiento científico (se le considera, junto con Newton, inventor del cálculo diferencial e integral) se encuentra el de ser el primero en estudiar el sistema de numeración binario y en pensar que los algoritmos numéricos que podemos realizar los seres humanos podrían ser programados en una máquina para que ésta los realizara. Leibniz, al igual que Blaise Pascal, creía que algún día la humanidad contaría con máquinas que realizaran los engorrosos cálculos que la mayoría de las veces son necesarios para obtener resultados en los problemas físicos y matemáticos.

Muchas veces las ecuaciones diferenciales que aparecen del planteamiento de problemas físicos son imposibles de resolver, al menos con las matemáticas con las que contamos hoy en día. Los físicos y matemáticos, no obstante, han desarrollado lo que se conoce como métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas a dichos problemas.

Un método numérico para resolver una ecuación diferencial consiste en aproximar la solución a dicha ecuación con un conjunto grande de ecuaciones que son solubles, a cambio de que la solución no es exacta, sino aproximada. En la mayoría de las ocasiones el número de estas ecuaciones para tener aproximaciones aceptables es enorme, por lo que se requeriría de muchísimo tiempo para realizarlas. Sin embargo, desde que se ha aumentado la capacidad de cómputo y se han hecho accesibles los lenguajes de programación, una computadora es la mejor forma que tenemos hasta ahora para resolver estas ecuaciones. Casi como Leibniz lo soñó.

En el presente trabajo se utiliza un método numérico programado en el lenguaje FORTRAN 77 llamado Runge-Kutta de orden 7. En términos generales, los métodos de Runge-Kutta tienen las siguientes propiedades:

1. Son métodos de un solo paso, es decir, para encontrar la solución y_{m+1} se necesita conocer únicamente la información del punto precedente y_m .

2. Coinciden con la serie de Taylor hasta los términos de orden h^p , donde p se denomina el orden del método y h es el tamaño del paso de integración.

3. No se requiere la evaluación de ninguna derivada de $f(x,y)$, sino únicamente de la función en si.

El programa ha sido utilizado para modelar las características superficiales de los sistemas estelares binarios HD 5980 (Koenigsberger y Moreno (2007)) y α Virginis (Harrington et al. (2009)).

2.3. Parámetros del programa a explorar

A lo largo del presente trabajo, se hará referencia a los siguientes parámetros del programa:

2.3.1. El parámetro β_0

Uno de los parámetros de entrada que se analizan en este trabajo es el parámetro β . Dicho parámetro se define como la razón entre la velocidad angular de giro de la estrella sobre su propio eje y su velocidad angular orbital:

$$\beta = \frac{\omega}{\Omega} \quad (2.2)$$

con ω la velocidad angular de rotación y Ω la velocidad angular orbital, también llamada velocidad angular de traslación.

En general las órbitas que siguen las estrellas binarias son elípticas, por lo que la distancia entre ellas no permanece constante. Dicha variación de la distancia trae consigo una variación de la velocidad angular orbital, por la conservación del momento angular. Si en el modelo estamos suponiendo que el giro de la estrella estudiada sobre su propio eje es constante, se sigue de inmediato que la razón entre las velocidades angulares de rotación y traslación depende de la fase orbital en la que se encuentre el sistema. La fórmula general para el valor de la velocidad angular de traslación en función de la distancia entre las estrellas, obtenida de la tercera ley de Kepler, es:

$$\Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)a(1 - e^2)}{r^4} \quad (2.3)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita, e es la excentricidad, y r la distancia instantánea a la que se encuentran los cuerpos que se atraen.

Nosotros utilizaremos el valor que toma β al pasar por el periastro, que es cuando la velocidad de traslación de las estrellas es mayor. A dicho cociente se le ha dado el nombre de parámetro β_0 . El valor que toma al pasar por el periastro, puede ser obtenido con la ecuación

$$\beta_0 = \frac{\omega P}{2\pi \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)^3}}} \quad (2.4)$$

donde ω es la velocidad angular de rotación estelar y P es el período orbital. Dicha ecuación se obtiene al sustituir en la ecuación (2.2) el valor que toma la velocidad angular orbital en el periastro.

El giro de la estrella sobre su propio eje lleva implícito el tiempo que tarda la estrella compañera en estar situada exactamente sobre el mismo punto de la estrella estudiada. Si las pulsaciones de las estrellas tienen asociado un período de pulsación, el parámetro β_0 podría contribuir de manera resonante si el periodo de rotación propio de la estrella es un múltiplo del periodo de pulsación. De ahí que consideramos importante estudiar la dependencia de los resultados de los cálculos en este parámetro.

2.3.2. La viscosidad

La fuente de disipación de energía por la marea se debe a las fuerzas viscosas o, más precisamente, la disipación por rozamiento o cizalla. En un fluido viscoso, la aplicación de fuerzas superficiales transversales hace que el fluido se deforme en capas. Si imaginamos que en este desplazamiento no uniforme de las capas existe fricción entre cada par de ellas, la suma de las fricciones nos daría la fricción total. Recordando que la fricción es una fuerza disipativa, a esta fricción total corresponde una disipación total. Siguiendo con la analogía, sabemos que la fricción entre dos cuerpos depende de las características superficiales de los materiales que los conforman. Una medida de la rugosidad” de dichos materiales se conoce como coeficiente de fricción. En el caso de los fluidos una medida de la dificultad para deformarlos, o bien, una medida de la oposición a fluir, se conoce como coeficiente de viscosidad. No obstante, estos coeficientes de viscosidad son tema complicado en cuanto

entramos al terreno de la Astrofísica. En aplicaciones prácticas de la teoría de los fluidos, es imposible ignorar el efecto de la viscosidad y el presente trabajo no es la excepción. Dentro de las aceleraciones que influyen en el movimiento de cada uno de los elementos superficiales de la estrella se encuentran las generadas por las llamadas fuerzas viscosas. Cuando dos capas contiguas de un fluido se mueven una respecto a otra, dicho movimiento es obstaculizado por una fuerza cortante que tiende a disminuir la velocidad relativa entre ellas. Supongamos que en una región dada del fluido la velocidad del flujo tiene la dirección x , y que se mueve en capas paralelas al plano $x - z$. De esta manera, la velocidad v_x solo depende de la coordenada y .

Tomando como sentido positivo de y hacia la derecha, si dv_x/dy es positiva, el rozamiento entre capas se traducirá en una fuerza cortante positiva F_x que actuará de derecha a izquierda a través de un área A paralela al plano $x - z$. Definimos el coeficiente de viscosidad η como la razón del esfuerzo cortante y el gradiente de velocidades

$$\eta = \frac{F_x/A}{\partial v_x/\partial y} \quad (2.5)$$

De esta ecuación podemos ver que η tiene unidades de

$$[\eta] = \frac{\textit{masa}}{\textit{longitud} \times \textit{tiempo}} \quad (2.6)$$

En las ecuaciones del modelo, se ha utilizado el parámetro ν que es igual a

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.7)$$

lo que nos deja las dimensiones de la viscosidad como L^2/T . Esto es importante al considerar la disipación de la energía en nuestro modelo. Debemos notar lo siguiente:

- i) Los coeficientes de viscosidad dependen del gradiente de velocidades dentro de los elementos de fluido estudiados.
- ii) La oposición a la deformación de un fluido causada por la viscosidad es un fenómeno disipativo.

Para darnos una idea de los valores de este parámetro que se utilizarán en este trabajo usaremos un ejemplo que nos es cotidiano: el agua. El agua a 10

grados centígrados tiene una viscosidad de $1.308 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$ (Wikipedia). En los interiores estelares, la viscosidad debida a los procesos microscópicos es del orden de 10 a $10^3 \text{ cm}^2/\text{s}$ (Zahn (2005)). A primera vista podría sorprender que la viscosidad del agua sea aproximadamente 5 órdenes de magnitud menor que los coeficientes de viscosidad del material que conforma a las estrellas.

Ahora bien, la viscosidad debida a procesos microscópicos es muy pequeña. Tanto que para tener procesos de disipación de energía que nos llevaran a la sincronización de los sistemas estelares binarios necesitaríamos lapsos de tiempo que exceden la edad actual del Universo (Zahn (2005)). La viscosidad a la que nos referiremos a lo largo del presente trabajo, y que es la que tiene un papel fundamental en la disipación de energía en procesos de interacción de marea en sistemas estelares binarios, es la viscosidad turbulenta, la cual es del orden de

$$\nu \sim vl \quad (2.8)$$

donde v es la velocidad vertical promedio de las corrientes turbulentas y l su camino libre medio vertical.

En las estrellas, la turbulencia se debe a las corrientes termales por lo que es importante tomar en cuenta que para poder utilizar éste tipo de aproximaciones, las estrellas estudiadas deben poseer corrientes turbulentas.

2.3.3. El grosor de la capa dR_1/R_1

La capa exterior de las estrellas es aquella que se ve más fuertemente perturbada por el potencial gravitacional externo de la estrella compañera (veáse, por ejemplo, Dolginov & Smelchakova (1992); Eggleton et al. (1998)). Esto no debería sorprendernos, ya que esas capas al estar sometidas a una menor presión y al estar sujetas a un campo gravitacional perturbador más intenso, son las más susceptibles a la fuerza de marea. Por un lado, la viscosidad turbulenta es la mayor fuente de disipación de energía pero para que el mecanismo funcione, se necesitan estrellas con zonas exteriores convectivas (Zahn (2005)). Por otro lado, si se considera que las perturbaciones que sufre una estrella pueden descomponerse en modos de oscilación. Dichos modos tienen amplitudes máximas en zonas cercanas a la superficie estelar y que algunos modos se concentran en las capas exteriores de la estrella (Mc Mi-

llan et al. (1987)). No obstante, los términos *delgada capa superficial* o *zonas exteriores convectivas* no han podido ser definidos de manera consistente.

Es muy importante el notar que, si bien se consideran grosores delgados de la capa externa, las ecuaciones de estructura estelar nos indican que los gradientes de densidad promedio para las capas externas varían de modo significativo para pequeños incrementos del grosor superficial. Lo anterior puede darnos como resultado una restricción para los valores que puede tomar dicho parámetro.

Otra de las cuestiones en las que debemos poner atención es que el tamaño del grosor de la capa puede influir en la forma en que se dan pulsaciones en ella. Recordemos que las pulsaciones estelares dependen del tiempo que tarda una onda de sonido en atravesar el radio de una estrella. Además, la velocidad del sonido en la estrella esta relacionada con la densidad del material en el que viaja. Considerando que en nuestro modelo es la capa externa la única capa de la estrella que está sujeta a pulsar, podría ocurrir que ciertos valores del grosor de la capa, que poseen ciertos valores de densidad promedio en ellos, nos den como resultado formas de pulsación que fueran después comparables con los valores obtenidos por observación.

2.3.4. El índice politrópico

En general, las ecuaciones de estructura estelar no son solubles analíticamente, pero existen aproximaciones numéricas a dichas soluciones. Las ecuaciones mecánicas de estructura estelar pueden resolverse numéricamente, con algunas restricciones, de existir una relación entre la presión y la densidad. No se cuenta con una forma general de dicha relación, pero bajo ciertas circunstancias como el caso de un gas adiabático, la presión puede escribirse explícitamente en términos de la densidad solamente. Dichos modelos de estructura estelar, donde la presión puede escribirse en términos de la densidad de la forma $P=K\rho^\gamma$, se conocen como polítropos. El desarrollo de dichos modelos permite ganar cierto conocimiento sobre el comportamiento de las estructuras estelares quitando las complicaciones inherentes de la solución completa del problema.

La introducción de los polítropos en la astrofísica es motivada por la ecuación de estado de un gas ideal adiabático. Un proceso politrópico es un

proceso termodinámico en donde se tiene la relación $PV^n=C$ donde P es la presión, V el volumen, n el índice politrópico y C una constante. Para el caso de un gas ideal monoatómico, se tiene un valor de la constante $\gamma=5/3$ lo que nos lleva a un índice politrópico $n=1.5$. Dicho índice es importante puesto que pueden encontrarse soluciones numéricas al problema si se escoge dicho valor.

No obstante, la aproximación de gas ideal monoatómico adiabático no es la única que puede usarse para el estudio del material que conforma las superficies estelares por lo que puede también haber dependencia en este valor. En esta tesis, se mantendrá siempre el valor del índice politrópico en 1.5.

Capítulo 3

Metodología y Resultados

Hemos explicado los principios físicos y las simplificaciones que utilizaremos para obtener una solución para el comportamiento superficial de las interacciones de marea en las estrellas binarias. Conocemos también la manera en que resolveremos las ecuaciones de movimiento para los elementos de superficie utilizando el programa mencionado anteriormente. De todos los parámetros de entrada que nos pide el programa, la mayoría pueden ser derivados, con sus incertidumbres asociadas, mediante observaciones astronómicas. Hemos mencionado dos de los parámetros que no pueden ser conocidos mediante observación; el grosor de la capa superficial de la estrella y la viscosidad del material que la conforma. Para poder caracterizar los resultados del modelo numérico respecto a estos parámetros, utilizaremos los datos conocidos del sistema binario Spica.

3.1. Spica: el sistema a caracterizar

α Virginis (Spica, HD 116658) es una binaria que consta de dos estrellas tipo B tempranas con un período corto, de aproximadamente 4 días, y con una órbita excéntrica. En Shobbrook et al. (1969) se encontró que la estrella primaria B1 III-IV es una estrella tipo β Cefeí con un período de pulsación de 0.1738 días. Una de las particularidades de la estrella es la presencia de características discretas de absorción y emisión que van de la parte azul a la roja de la línea de absorción.

Otra de las aproximaciones hechas para explicar el comportamiento de Spica es precisamente el que hemos explicado anteriormente en este traba-

jo (Harrington et al. (2009)). El modelo hace una predicción del campo de velocidades resultante en la superficie de la estrella. Dicho campo es proyectado posteriormente a la línea de visión de un observador de la Tierra lo cual da una predicción de perfiles de líneas de absorción fotosférica. En el presente trabajo tomaremos para la exploración los datos observacionales del sistema Spica presentes en Harrington et al. (2009). Se buscarán algunas dependencias de los valores de salida del programa y los valores de entrada de la viscosidad y el grosor de la capa.

3.2. Metodología

Para nuestras primeras exploraciones se utilizaron los parámetros de entrada reportados en el artículo de Harrington et al., (2009) correspondientes a datos observacionales del sistema Spica. En ese artículo se utilizó el mismo modelo numérico que empleamos aquí para resolver las ecuaciones de movimiento correspondientes y analizar las características espectrales del sistema. Para ello se utilizaron un rango de viscosidades que va desde 0.009 hasta 0.058 en unidades de $R_{\odot}^2/\text{día}$. Para los grosores de capa dR_1/R_1 se utilizaron valores desde 0.01 hasta 0.082. El objetivo aquí será analizar en mayor detalle cómo afectan dR_1/R_1 y ν a los resultados de los cálculos del programa. En el artículo citado se buscó la combinación de éstos parámetros que lograra la mayor similitud con el perfil de línea espectral observado. Compararemos los resultados utilizados en Harrington et al.(2009) con los resultados del programa para los otros valores de los parámetros y se buscará caracterizar dichos resultados.

Los siguientes parámetros de entrada fueron mantenidos constantes durante esta primera fase de cálculos. Todos ellos son requeridos por el programa para efectuar el cálculo:

$$M_1 = 10.25 M_{\odot}$$

$$M_2 = 6.97 M_{\odot}$$

$$R_1 = 6.84 R_{\odot}$$

$$\text{Periodo orbital: } 4.01452 \text{ días}$$

$$\text{Excentricidad: } 0.067$$

$$\text{Beta en el periastro: } 2.07$$

$$\text{Índice politrópico: } 1.5$$

$$\text{Elementos en el ecuador: } 500$$

Paralelos: 20
 Intervalo polar: 85 grados
 Tolerancia: 10^{-7}

los elementos en el ecuador y el intervalo polar los elegimos para que el modelo tenga una medida de los paralelos y meridianos en los que se dividirá la capa superficial.

Para analizar el comportamiento global con respecto al cambio en los valores de ν , se fijó el valor del grosor de la capa en 0.07. Dicho valor del grosor de la capa fue en el artículo de Harrington et al. (2009) el que mejor se ajustaba a las observaciones. De igual manera en una segunda ronda de corridas del código, se fijó el valor de la viscosidad en $0.028 R_{\odot}^2/\text{día}$ y se corrieron diferentes valores del grosor de la capa.

Los valores usados de la viscosidad en $R_{\odot}^2/\text{día}$ fueron $\nu=0.009, 0.013, 0.018, 0.023, 0.028, 0.033, 0.038, 0.043, 0.048, 0.053$ y 0.058 . Los valores del grosor de la capa utilizados fueron: $dR_1/R_1= 0.010, 0.018, 0.026, 0.034, 0.042, 0.050, 0.058, 0.066, 0.070, 0.074, 0.082$.

Uno de los valores globales que nos da la solución numérica de las ecuaciones es la tasa de disipación de energía por unidad de densidad \dot{E}/ρ . El programa puede darnos el valor de esta variable en distintas fases orbitales del sistema binario. Hemos elegido para caracterizar el resultado de cada modelo numérico el valor que toma \dot{E}/ρ en el paso por el periastro. Para eliminar efectos del transiente¹ el cálculo se hace después de haber avanzado 30 períodos. Los resultados que se analizan en este trabajo corresponden al paso por el periastro en el período 30.

En la figura 3.1 se presenta la gráfica de dicha tasa de disipación en el paso por el periastro en el período 30 contra los valores del grosor de la capa utilizados, manteniendo la viscosidad constante. De igual manera, se muestra la gráfica de la disipación de energía por unidad de densidad contra los valores de la viscosidad manteniendo el valor del grosor de la capa constante.

Como se puede ver en la figura 3.1, existe un mínimo en la gráfica de \dot{E}/ρ vs. ν . Los valores de \dot{E}/ρ decrecen hasta alcanzarlo y después la gráfica vuelve a ser creciente conforme aumentan los valores de ν . Después del mínimo, \dot{E}/ρ , a primera vista, es función creciente y depende linealmente de la viscosidad.

¹Más adelante se profundizará en el concepto del transiente

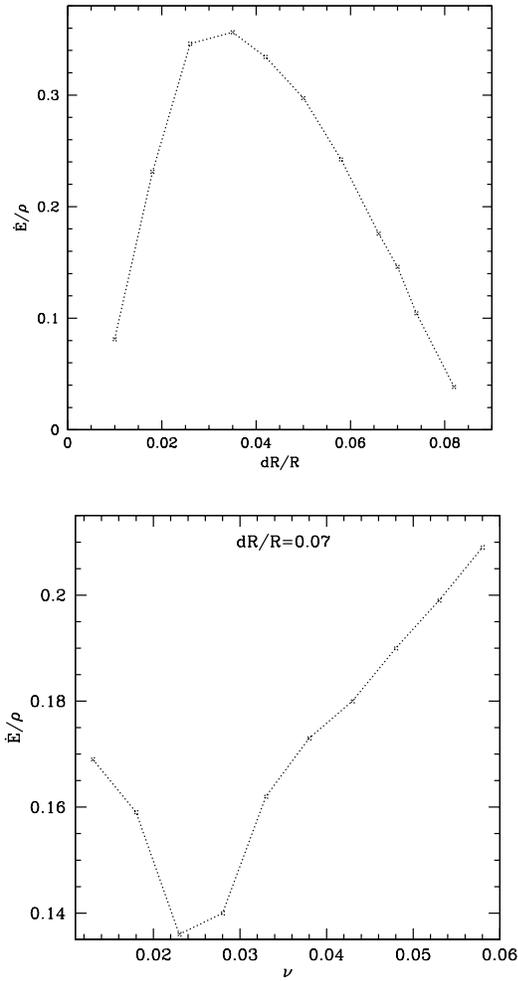


Figura 3.1: Se muestra la dependencia de la \dot{E}/ρ con los valores de dR_1/R_1 (arriba) y ν ($R_\odot^2/\text{día}$) (abajo). Las unidades de la tasa de disipación son de $erg\ cm^3\ s^{-1}\ g^{-1} * 10^{43}$

De la aparición del mínimo surgió la siguiente pregunta ¿Es este comportamiento general? Para poder contestar a la pregunta se eligió correr el mismo rango de viscosidades para todos los grosores de la capa utilizados. Es decir, fijando cada valor de dR_1/R_1 se corrieron los 11 valores de ν . El otro comportamiento interesante es el máximo en \dot{E}/ρ cuando lo graficamos contra los distintos valores dR_1/R_1 que se ve en la figura 3.1. Nació la misma

pregunta ¿Ocurre esto siempre? Para contestar a ello, se corrió el programa para los diez grosores mencionados para cada uno de las viscosidades utilizadas. A continuación se presentan los resultados obtenidos.

3.3. Resultados

De los cálculos hechos por el programa usando los datos de la malla de valores elegidos obtuvimos las tablas 3.3, 3.4 y 3.5 que aparecen al final de la sección. A partir de los valores que ahí aparecen, se hizo el análisis que se describe a continuación.

3.3.1. Dependencia en dR_1/R_1

Los conjuntos de gráficas que aparecen en las figuras 3.2 y 3.3 nos muestran el comportamiento de \dot{E}/ρ al variar los valores de dR_1/R_1 . Como se puede ver, sin importar el valor de ν , todas presentan un máximo en la tasa de disipación. Además, el máximo se encuentra ubicado, aproximadamente, en un valor de dR_1/R_1 de 0.034. Tenemos entonces un comportamiento interesante: capas gruesas y capas delgadas tienen valores de \dot{E}/ρ menores que los que se tienen en capas intermedias.

Ahora bien, este conjunto de gráficas nos dan una idea del comportamiento general de los resultados de los cálculos, pero nos dicen poco de qué es lo que podría estar causando dicho comportamiento. Es por ello que, guiándonos por éste conjunto de gráficas, analizaremos otro de los valores de salida que nos da el programa: los radios que alcanzan los centros de masa de los elementos de volumen.

Características superficiales ecuatoriales

Partamos entonces de que para capas gruesas o capas delgadas de los valores de dR_1/R_1 que hemos elegido tenemos menores disipaciones que para valores intermedios. Entre los parámetros de salida que podemos obtener del programa, se encuentran los valores que toman los radios de los centros de masa en los diferentes elementos de volumen para diferentes fases orbitales. En el presente trabajo se eligió hacer el análisis de los radios en el cinturón ecuatorial, el cual se grafica contra el ángulo azimutal en el paso por el periastro del período 30, quedando las configuraciones que se ven en las figuras 3.4, 3.5 y 3.6.

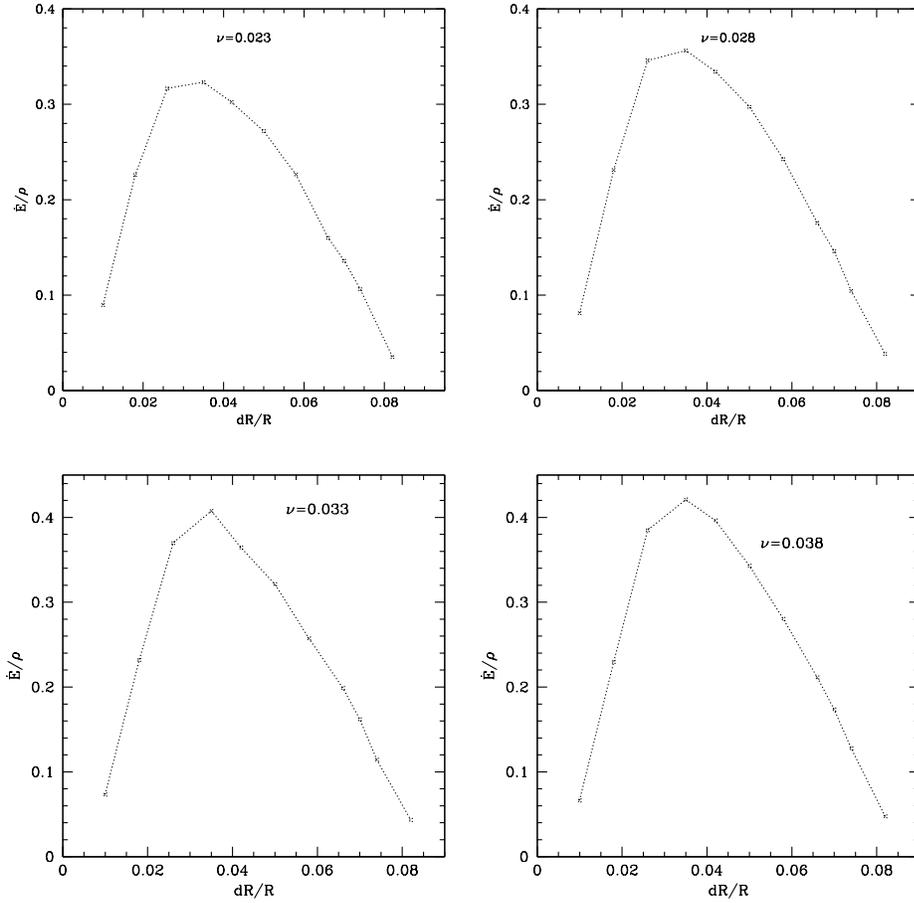


Figura 3.2: Se muestra el conjunto de gráficas de \dot{E}/ρ ($erg\ cm^3\ s^{-1}\ g^{-1} * 10^{43}$) vs. dR/R_1 para los valores de $\nu=0.023, 0.028, 0.033$ y $0.038\ R_\odot^2/\text{dia}$.

Como se puede observar en la figura 3.4, en los valores extremos de dR_1/R_1 (0.01, 0.018 y 0.1) obtenemos una configuración parecida a la marea de equilibrio. En las capas intermedias (figuras 3.5 y 3.6) obtenemos un comportamiento que se llamaremos marea dinámica. Esto es importante ya que la mayor disipación en las capas intermedias podría deberse a esta razón. Al tener una marea dinámica, el movimiento entre los elementos de superficie es mayor que en las mareas de equilibrio, lo que genera mayor fricción que es la principal fuente de disipación. Además no todas las mareas dinámicas son iguales. Las mareas dinámicas que se muestran en la figura 3.5 para los

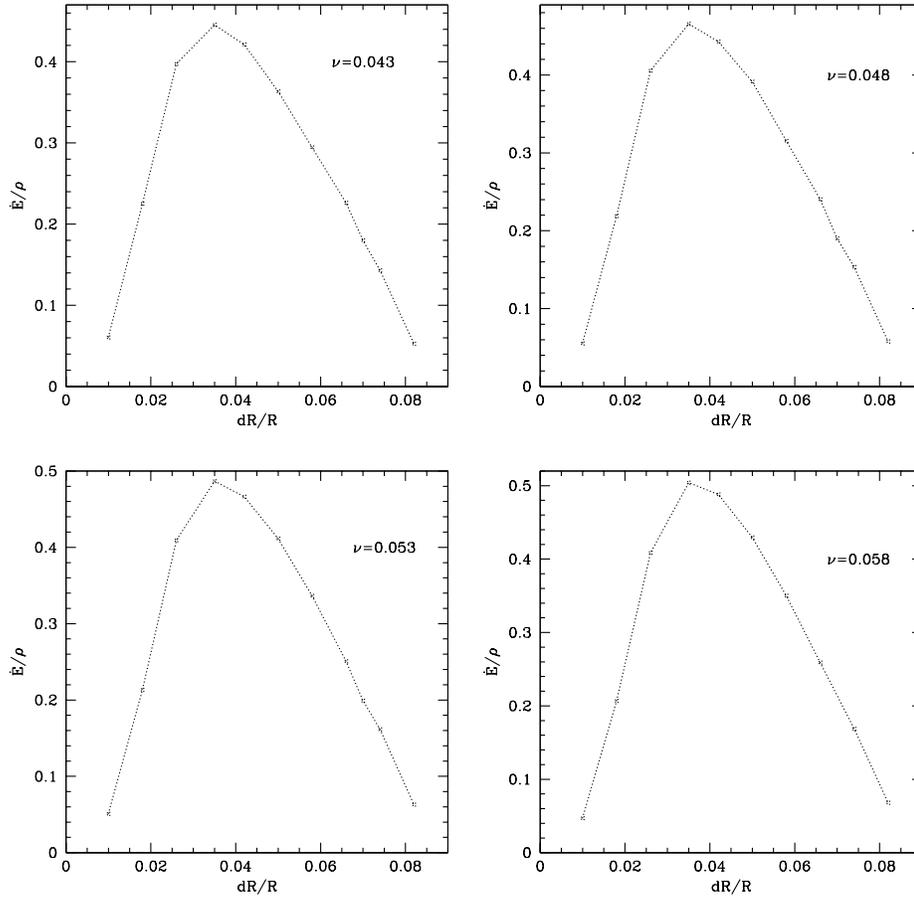


Figura 3.3: Se muestra el conjunto de gráficas de \dot{E}/ρ ($erg\ cm^3\ s^{-1}\ g^{-1}\ *10^{43}$) vs. dR/R_1 para los diferentes valores de $\nu= 0.043, 0.048, 0.053$ y $0.058\ R_{\odot}^2/\text{dia}$.

valores de dR_1/R_1 de 0.026, 0.034 y 0.042 se presentan en menores rangos angulares a lo largo de la dirección azimutal. En otras palabras, las vibraciones de la capa externa se amontonan. Podemos notar también que la distancia angular entre dos crestas consecutivas es relativamente pequeña (en el caso de la capa de 0.042, que presenta mayor separación entre crestas, la separación promedio es de 8.2 grados), además de que las amplitudes de las crestas van disminuyendo conforme crece el ángulo azimutal.

El tercer comportamiento de los radios ecuatoriales es el que se muestra en

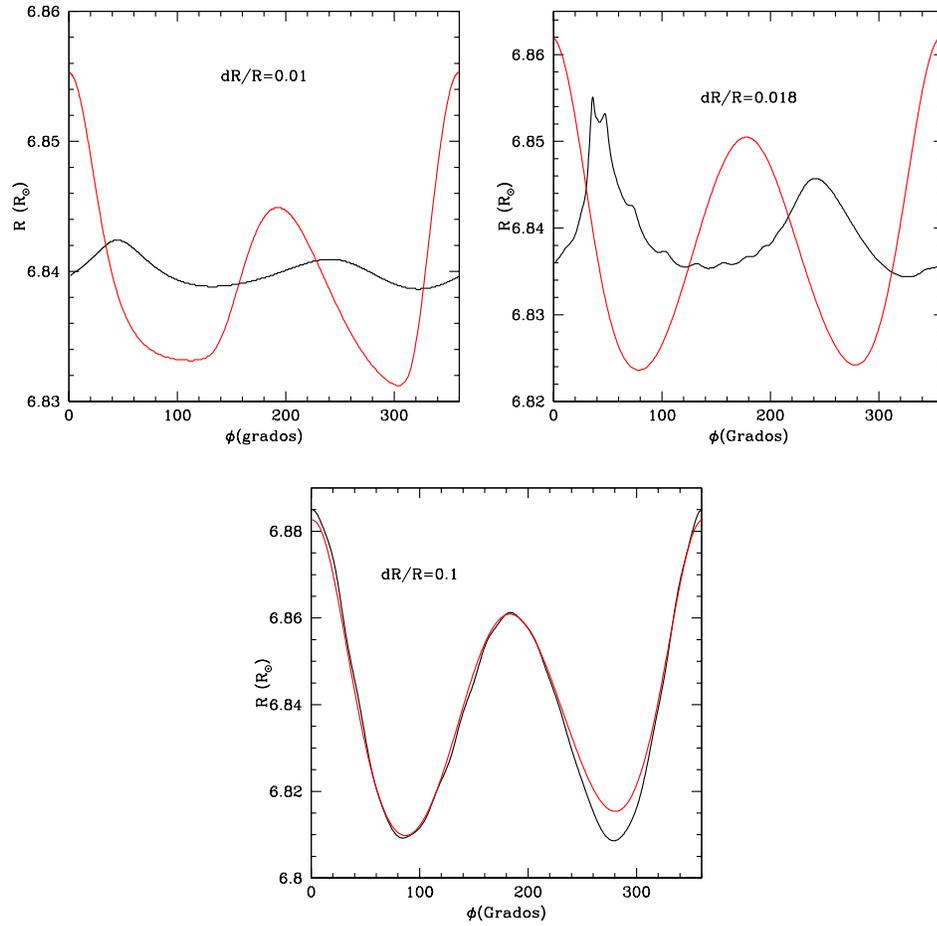


Figura 3.4: Gráficas del Radio (R_{\oplus}) vs. Azimut (grados) para los valores de $dR/R=0.01$, 0.018 y 0.100 a viscosidad constante. La gráfica de comportamiento senoidal muestra la marea predicha por el código para una $\beta_0=1$

la figura 3.6. Aquí obtenemos una marea dinámica en donde las amplitudes de las crestas no difieren tanto entre si como en el caso de la figura 3.5. Podemos observar también que la distancia entre crestas es mayor y que el rango azimutal en donde se encuentran las vibraciones es más amplio que en los casos de la figura 3.5. La marea en este caso no esta tan “montonada”. Es importante tener en cuenta que el grosor utilizado en el artículo de Harrington et al. (2009) fue una capa de 0.07, pues estas oscilaciones fueron las que mejor se ajustan a las características observacionales. De alguna manera, para el

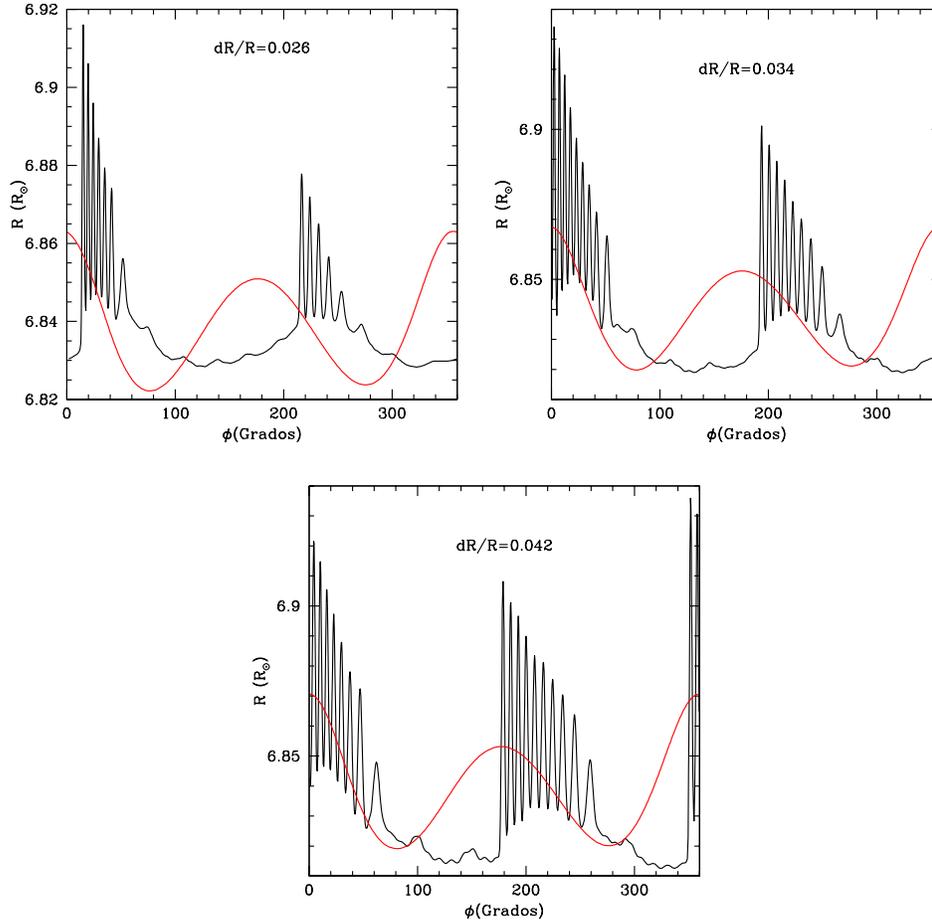


Figura 3.5: Gráficas del Radio (R_{\odot}) vs. Azimut (grados) para los valores de $dR/R=0.026$, 0.034 , 0.042 a viscosidad constante. La gráfica de comportamiento senoidal muestra la marea predicha por el código para una $\beta_0=1$

caso de Spica el grosor que mejor ajusta las observaciones es el de 0.07 . Queda aún por explicar la razón por la cual encontramos mareas dinámicas solamente en esas capas intermedias.

Comparación con la marea en equilibrio

El estudio más simple que puede hacerse del fenómeno de marea es el estado en equilibrio. En este caso, podemos considerar que la rotación de

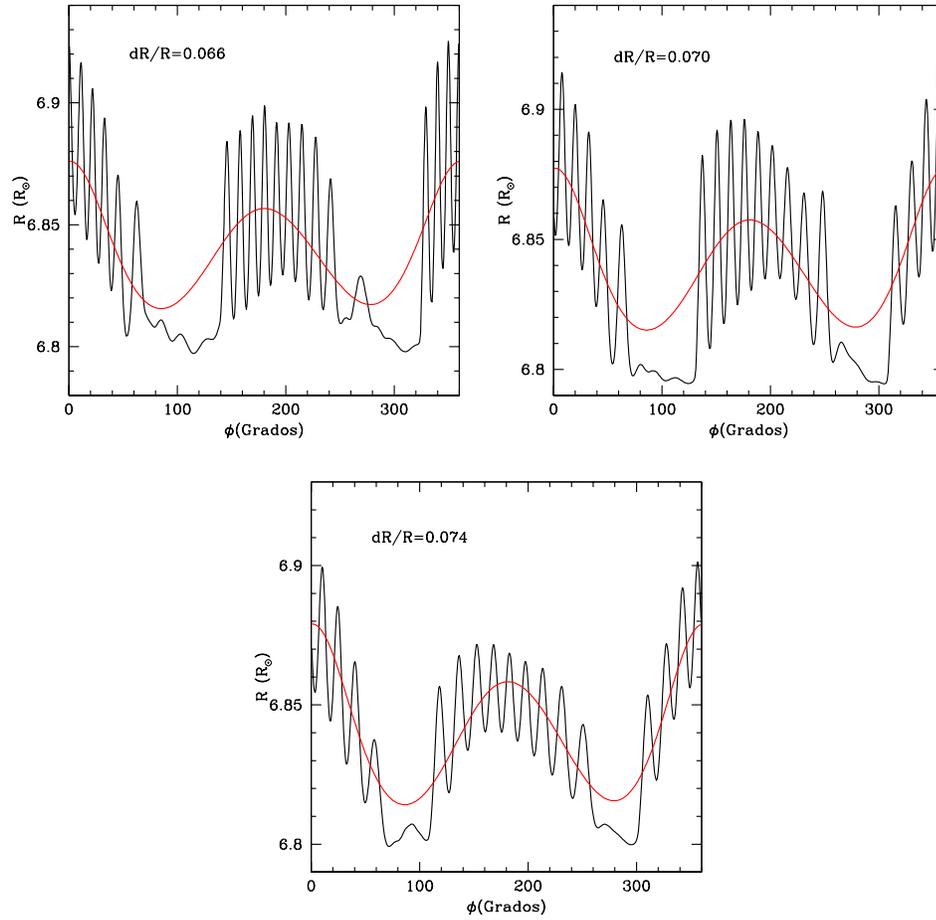


Figura 3.6: Gráficas del Radio (R_{\odot}) contra Azimut (grados) para los valores de $dR/R = 0.066$, 0.070 y 0.074 a viscosidad constante. La gráfica de comportamiento senoidal muestra la marea predicha por el código para una $\beta_0=1$

la estrella estudiada sobre su propio eje coincide exactamente con la velocidad angular de traslación de la estrella compañera, por lo que las posiciones relativas de cada una de las partes que componen a la estrella no varían respecto a la posición de la estrella compañera. Los cuerpos celestes adoptan esta configuración sincrónica después del tiempo necesario para disipar la energía orbital en calor causado por el esfuerzo entre capas que hemos venido estudiando. Para comprender mejor el fenómeno que estudiamos, se decidió correr el programa con todos los valores de entrada iguales excepto el

parámetro β_0 , que en esta ocasión elegimos con valor 1. El caso estudiado no es estrictamente el caso sincrónico ya que, para variar el menor número de parámetros, se dejó el valor de la excentricidad de la órbita que hasta ahora se ha manejado (0.067) ya que es relativamente pequeño. En la figura 3.7 se presentan las gráficas de las *mareas de equilibrio* que alcanza la estrella principal de Spica para cada uno de los diferentes grosores de capa.

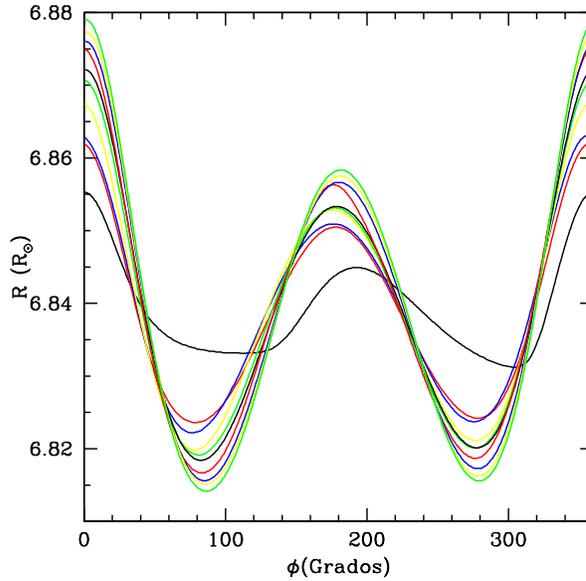


Figura 3.7: Se muestran las gráficas de los Radios (R_{\odot}) vs. Azimut (grados) para los $dR_1/R_1=0.01, 0.018, 0.026, 0.034, 0.042, 0.05, 0.058, 0.066, 0.074, 0.082$ y 0.1 a viscosidad constante y $\beta_0=1$. Al aumentar el valor de dR_1/R_1 aumenta la amplitud de la marea en equilibrio.

Como se puede observar, el tamaño de la amplitud de la deformación de la marea en equilibrio es proporcional al tamaño del grosor de capa que elegimos. La tabla 3.1 nos dice, para el caso de Spica, como van las amplitudes respecto al grosor de la capa.

Una de las preguntas que surgen al hacer el análisis fue: Dadas las características de un sistema ¿De qué tamaño es la deformación causada por la marea? La fórmula 3.1 sirve para hacer un cálculo aproximado del tamaño de la amplitud de la marea. La fórmula se obtiene del cociente de las fuerzas gravitacionales que siente un elemento en la superficie de la estrella causada por la estrella compañera y la fuerza que siente el elemento por la masa de

Cuadro 3.1: Comparación de los valores de dR_1/R_1 y la amplitud de marea obtenida por el código.

dR_1/R_1	$dR_1 (R_\odot)$	$\delta R_1 (R_\odot)$
0.010	0.0684	0.015
0.018	0.12312	0.0224
0.026	0.17784	0.023
0.034	0.23256	0.0275
0.042	0.28728	0.030
0.050	0.342	0.032
0.058	0.39672	0.035
0.066	0.45144	0.0362
0.074	0.50616	0.0375
0.082	0.56088	0.0388

Se muestran los valores de la amplitud de la deformación provocada por la marea que predice el código. En la primera columna se muestra el valor de dR_1/R_1 , en la segunda el grosor de la capa en radios solares y en la tercera la amplitud de la deformación predicha por el código en radios solares.

la propia estrella a la que pertenece:

$$\frac{\delta R}{R} \approx \frac{GmR/d^3}{GM/R^2} = \frac{m}{M} \left(\frac{R}{d}\right)^3 \quad (3.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, m es la masa de la estrella compañera, M la masa propia de la estrella, R el radio de la estrella y d la distancia que separa los centros de masa de las dos estrellas involucradas.

Notemos que la fórmula es aproximada. La fórmula exacta incluye el producto por el polinomio de Legendre de orden 2, lo cual nos da una dependencia angular. No obstante, en el caso que estamos analizando, que es el cinturón ecuatorial, dicho término de Legendre toma el valor 1 y la fórmula es exacta. Al introducir los parámetros de Spica, podemos ver que el tamaño de la deformación de marea de equilibrio esperada es de $\delta R/R = 0.011$. Es decir, aproximadamente del tamaño del grosor de capa más delgado que hemos estudiado. Recordemos que el modelo calcula el movimiento del centro de masa de cada uno de los elementos superficiales, por lo que no podríamos

esperar una representación realista del modelo si la magnitud de lo que se esperaría teóricamente que se desplazara el elemento es del mismo tamaño del elemento de superficie que se deforma. La fórmula anterior es importante, ya que nos da un indicador del rango del grosor de la capa que deseamos explorar contra algunos de los parámetros no libres del modelo.

La amplitud de la marea en equilibrio predicha por la fórmula es de $\delta R = 0.0726 R_{\odot}$. En la tabla 3.1 podemos observar que los valores de las amplitudes para cualquiera de los grosores de capa que hemos utilizado son menores que el valor predicho por la ecuación 3.1. Sin embargo, es importante notar que aproximadamente la mitad de este valor predicho de la amplitud de la marea se obtiene para las capas con valores del grosor entre 0.066 y 0.074. Recordemos nuevamente que el valor de la capa que da un mejor ajuste de las características observacionales de Spica es el grosor de 0.07. En el caso presente, corresponde al caso en que la amplitud de la marea en equilibrio que nos da el código es del orden de la mitad de la amplitud predicha por la ecuación. ¿Podría ocurrir que en los parámetros de entrada se encuentre determinado el grosor de capa óptimo para usar el modelo? Por ejemplo. ¿Qué parámetros de entrada se necesitarían para obtener una marea dinámica para un grosor de capa delgado? Para contestar a la pregunta se realizó una simulación con el programa dejando todos los parámetros de entrada constantes pero duplicando el periodo del sistema binario. Esto implica dos cosas:

- 1) La estrella compañera se encuentra más alejada por lo que la fuerza gravitacional causada por ella y que sienten los elementos de volumen es menor.
- 2) La rotación de la estrella sobre su propio eje es menor, puesto que el parámetro β_0 tiene el mismo valor.

En este caso obtenemos una marea dinámica en grosores de capa más delgados que en el caso de Spica, en particular para un dR_1/R_1 de 0.018. De hecho, en este caso para grosores de 0.010 y 0.026 obtenemos mareas en equilibrio.

Dentro de las simulaciones se hizo un tercer experimento. Se corrió el modelo para los parámetros de Spica dejando constantes todos los valores pero reduciendo la masa de la estrella compañera a la mitad. En el presente caso tenemos cuatro grosores de capa para las cuales la marea dinámica se

comporta de manera parecida al caso de Spica que se muestra en el conjunto de gráficas de la figura 3.6. Estas capas van desde 0.042 hasta 0.066. El grosor medio sería entonces de 0.054. La amplitud de marea en equilibrio predicha por la fórmula es de $\delta R=0.039 R_{\odot}$. El valor correspondiente calculado por el código es de $dR=0.0194 R_{\odot}$. Del orden de la mitad. En los casos anteriores, obtenemos el siguiente comportamiento en términos generales:

1) Las vibraciones de marea dinámica están centradas en la marea en equilibrio que predice el código.

2) La amplitud de la marea en equilibrio que predice el código donde se centran las mareas dinámicas es de aproximadamente la mitad de la amplitud de marea predicha por la ecuación 3.1.

Los dos parámetros de la fórmula que no habian variado son la masa de la estrella y el radio de la misma. Se hicieron simulaciones manteniendo constantes todos los parámetros del modelo, buscando valores para los grosores de capa que nos den amplitudes de las mareas en equilibrio de la mitad de lo que predice la ecuación 3.1. Primero se exploraron las configuraciones de la marea en equilibrio, es decir, usando $\beta_0=1$. Se encontraron las mareas de equilibrio para una masa de $7 M_{\odot}$ (aproximadamente igual a la de la estrella compañera que es de $6.97 M_{\odot}$) y posteriormente para un radio de $4.85 R_{\odot}$.

Se encontró que para el caso de la $M_1=7 M_{\odot}$ la amplitud de marea en equilibrio predicha por la fórmula 3.1 es de $\delta R=0.019 R_{\odot}$ mientras el grosor de capa para el cual la amplitud es de aproximadamente la mitad ($dR=0.0095 R_{\odot}$) es para el $dR_1/R_1=0.062$

Para el caso en el que el radio de la estrella es de $4.85 R_{\odot}$ la amplitud predicha por la ecuación es $\delta R=0.004 R_{\odot}$, mientras el grosor de capa que nos da un valor de la mitad ($dR=0.002 R_{\odot}$) es $dR_1/R_1=0.034$

Bajo esta lupa, se hicieron simulaciones utilizando el valor de $\beta_0=2.07$. Encontramos que las capas donde se dan las vibraciones del tipo de la figura 3.6 son, precisamente, las capas donde la amplitud de marea en equilibrio que predice el código es de la mitad de la predicha por la fórmula 3.1. No debería sorprendernos el que el código no reproduzca la amplitud de marea estimada teóricamente. Debemos notar que en el modelo que hemos estudiado es únicamente la capa superficial la que es susceptible a ser deformada, mientras que el resto se mantiene sin deformación. Para obtener un valor más realista, el modelo debería considerar que la capa superficial se deforma sobre un cuerpo también deformado por la marea.

Disipación de energía

Debemos tener en cuenta que el programa considera que el valor de la tasa de disipación, que hemos estado graficando para darnos idea del comportamiento superficial de las interacciones de marea, es una tasa de disipación por unidad de densidad. Se sigue entonces que si deseamos conocer el valor de \dot{E} debemos conocer el valor de ρ . Recordemos de las ecuaciones de estructura estelar que la densidad de una estrella está dada en función del radio de la misma; conforme el radio crece, la densidad se hace más pequeña para cada capa de la estrella.

Esto implica que, al estar tomando diferentes valores para el grosor de la capa que rodea a la estrella, debemos multiplicar cada uno de los valores de la disipación por la densidad promedio de los elementos de superficie correspondientes. Lo anterior no significaría un problema muy grande si los valores de la densidad no variaran en gran cantidad.

Para obtener valores aproximados para las diferentes densidades superficiales para cada grosor de la capa externa, se utilizaron los resultados de Ines Brott, brindados en comunicación personal, obtenidos mediante un código de evolución binaria (BEC, Langer (1991)). El modelo proporciona los valores de densidad del material de las capas externas de las estrellas en las diferentes fases de evolución. El programa nos da además los diferentes valores de densidad para los distintos grosores de capa que deseamos conocer. Para nuestro estudio utilizamos los valores de densidad de dos etapas de evolución de una estrella de $10 M_{\odot}$ (la estrella principal del sistema Spica tiene una masa de $10.25 M_{\odot}$) con los siguientes radios: $R=8.657 R_{\odot}$ y $R=5.669 R_{\odot}$.

Spica se encuentra en el rango intermedio de radio, de los valores de los radios utilizados para hacer los cálculos. Para nuestros valores de densidad, se tomaron cada uno de los dos valores de densidad de cada una de las estrellas utilizadas para el grosor de capa correspondiente y se utilizó el promedio para hacer una aproximación al caso de Spica. Los resultados pueden verse en la tabla 3.2.

Como podemos observar en la Tabla 3.2, el comportamiento de la densidad presenta un gradiente muy pronunciado al variar el grosor de la capa externa. ¿De qué manera afecta esto a la tasa de disipación? Para contestar

Cuadro 3.2: Valores de densidad para cada grosor de capa.

dR_1/R_1	ρ para $R=8.657R_\odot$	ρ para $R=5.669R_\odot$	ρ promedio
0.010	0.20427040E-08	0.54629331E-08	0.37528E-08
0.018	0.48386034E-08	1.75438937E-08	1.11912E-08
0.026	1.04297889E-08	4.07817636E-08	25.6050E-08
0.034	2.03829721E-08	7.10674123E-08	45.7251E-08
0.042	3.10703732E-08	10.6284597E-08	68.6774E-08
0.050	4.15282307E-08	14.5780515E-08	93.6543E-08
0.058	5.55284170E-08	22.2757097E-08	139.142E-08
0.066	7.21990875E-08	31.9951385E-08	196.075E-08
0.074	8.93619624E-08	43.4931783E-08	262.146E-08
0.082	10.8857115E-08	62.5838572E-08	367.347E-08

Tabla de valores de las densidades, en g/cm^3 proporcionados por Ines Brott para los diferentes grosores de capa para una estrella en dos distintas etapas de evolución. La cuarta columna presenta el valor promediado de las densidades de las columnas 2 y 3.

a ello utilizamos los valores obtenidos para ρ y graficamos \dot{E} vs dR_1/R_1 . El resultado se muestra en la figura 3.8.

Podemos notar que si bien el comportamiento de la disipación de energía es diferente, para los grosores de capa que ajustan mejor los perfiles de línea (dR_1/R_1 de 0.066 a 0.074) la variación en los valores de disipación de energía es pequeña.

3.3.2. El espacio de viscosidades permitidas

Una cota inferior

Al iniciar la presente investigación se sabía que el código no puede funcionar cualquier valor de la viscosidad para todos los grosores de capa. De hecho, de los valores para el grosor de capa elegidos al inicio de la exploración, únicamente los dos más pequeños (0.01 y 0.018) y el mayor (0.082) fueron los únicos para los que pudieron simularse con todas las viscosidades elegidas al inicio. En la sección anterior hemos visto que los grosores extremos, es decir, los más delgados y los más gruesos disipan menos energía, lo que podría deberse a que alcanzan configuraciones como la de la marea de

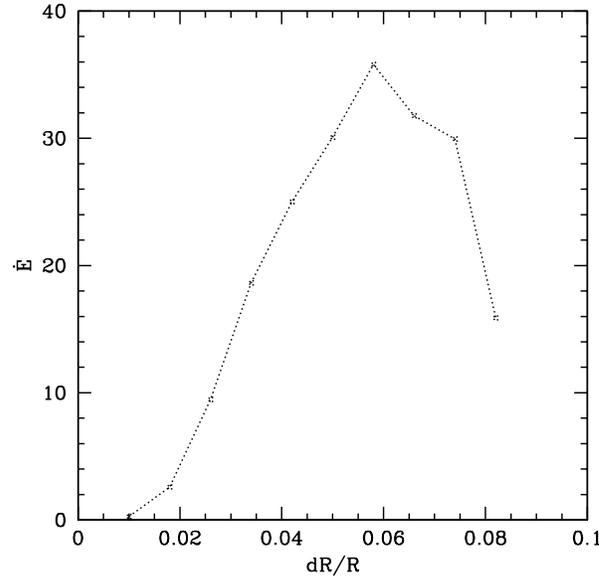


Figura 3.8: Se muestra la gráfica de \dot{E} ($*10^{35}$ erg/seg) contra los diferentes valores de dR_1/R_1

equilibrio. Es por ello que los valores de la viscosidad para los que el código no puede funcionar cuando se presenta una marea dinámica son tolerados por dichos grosores de capa. No obstante, hemos descartado la posibilidad de utilizar esos grosores de capa delgados o gruesos pues sabemos que en el caso de Spica no ajustan bien los perfiles de línea observados. Utilizaremos únicamente los grosores intermedios, en el caso de Spica, sólomente los valores de 0.066 ó 0.074, pues es con ellos cuando se obtienen las vibraciones que ajustan los perfiles de línea observados.

La disipación de energía está gobernada por la ecuación

$$\dot{E} = \nu \rho \left\{ r \frac{\partial \omega_\phi}{\partial r} \right\}^2 r^2 \Delta \phi \Delta r \quad (3.2)$$

donde ν es la viscosidad, ρ la densidad, r la posición radial, ϕ el ángulo azimutal y ω_ϕ la velocidad angular del elemento de volumen en el meridiano del elemento.

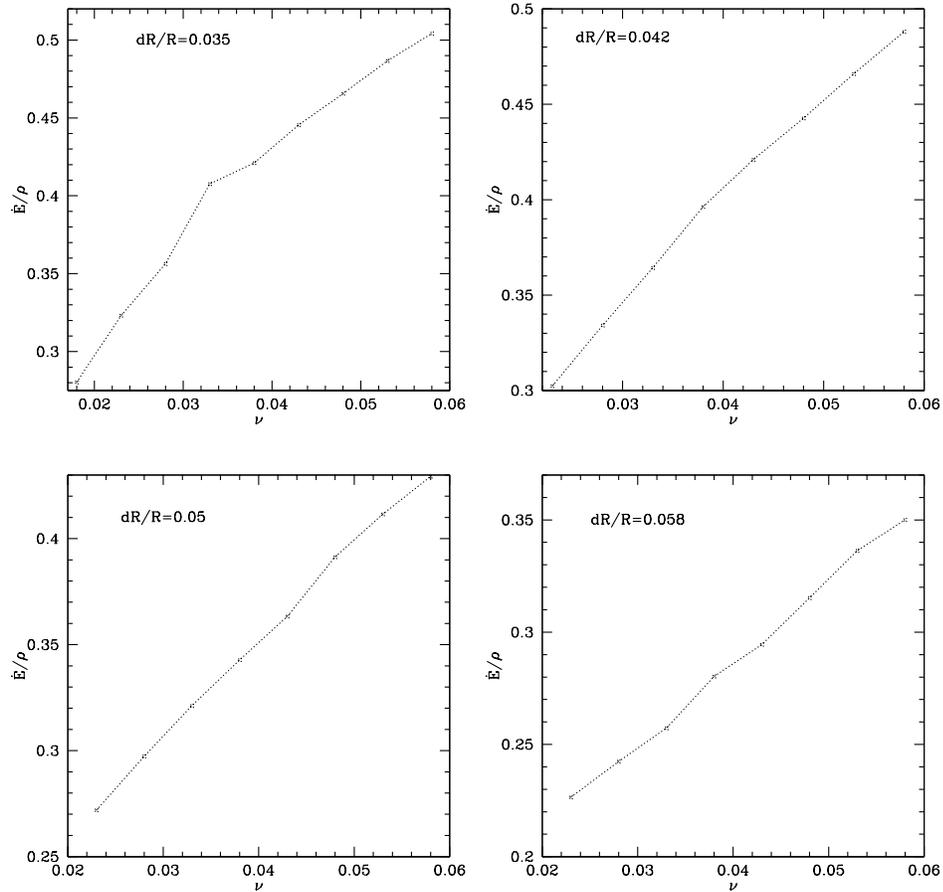


Figura 3.9: Se muestra el conjunto de gráficas de \dot{E}/ρ vs. ν ($R_{\odot}^2/\text{día}$) para los grosores de capa dR_1/R_1 : 0.035, 0.042, 0.050, 0.058 respectivamente.

De ahí que \dot{E}/ρ sea proporcional a ν ; ello se confirma mediante las gráficas que aparecen en la figura 3.9, donde podemos ver que el comportamiento de \dot{E}/ρ es creciente y con dependencia aparentemente lineal conforme aumentamos el valor de ν para diferentes valores de dR_1/R_1 .

No obstante, las gráficas que aparecen en la figura 3.10 muestran que el modelo produce un comportamiento un poco diferente. Para valores pequeños de la viscosidad, la disipación decrece hasta alcanzar un mínimo a partir del cual se vuelve creciente. Lo que es más interesante es la división en el comportamiento de las características superficiales ecuatoriales si nos guiamos

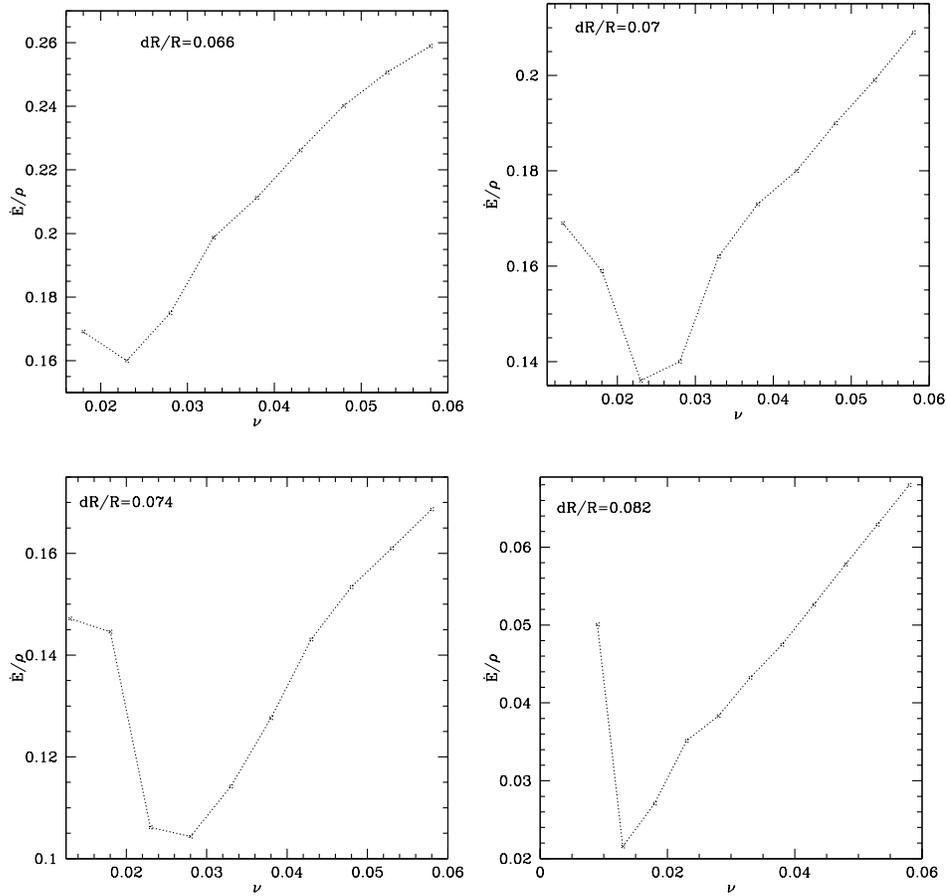


Figura 3.10: Se muestra el conjunto de gráficas de \dot{E} vs. ν ($R_{\odot}^2/\text{día}$) para los grosores de capa dR_1/R_1 : 0.066, 0.070, 0.074 y 0.082 respectivamente.

por éstas últimas gráficas. Dichas gráficas nos muestran dos zonas; la zona con valores pequeños de ν cercanos a los valores donde el código truena, a la que llamaremos zona 1. Aquí la disipación decrece conforme aumentamos la viscosidad hasta alcanzar un mínimo. La otra zona, llamada zona 2, se encuentra a la derecha del mínimo, a partir de donde la disipación presenta un comportamiento creciente y aparentemente lineal.

Al graficar los valores de R vs. ϕ de las simulaciones de la zona 1, con valores de ν inferiores al mínimo, obtenemos un comportamiento como el que

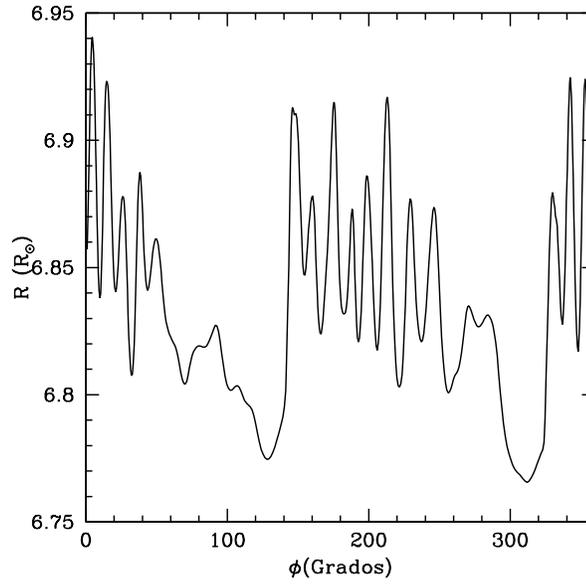


Figura 3.11: Gráfica del cinturón ecuatorial para una $\nu=0.018 R_{\odot}^2/\text{día}$. Como se puede ver, la marea es muy irregular en los valores de viscosidad anteriores al mínimo de disipación

se muestra en la figura 3.11. Podemos notar lo siguiente:

La marea dinámica en la zona cercana a los valores de viscosidad donde el código no puede ser utilizado (zona 1) es bastante irregular en el sentido de que no aparecen vibraciones con periodos y amplitudes relativamente constantes.

Por el contrario, na vez alcanzado el mínimo de \dot{E}/ρ las vibraciones se vuelven más regulares y no varían en gran medida conforme aumentamos los valores de la viscosidad (Figura 3.12).

¿A qué nos referimos cuando decimos que no varían en gran medida? Por supuesto que si comparamos con mayor detalle dichas características, podemos notar que entre mayor viscosidad usemos al inicio del código, obtenemos un mayor número de vibraciones en la marea dinámica y una mayor amplitud. A lo que nos referimos es que no obtenemos comportamientos tan radicalmente distintos como cuando variamos el valor del grosor de la capa. Recordemos las diferencias entre el conjunto de gráficas de las figuras 3.5

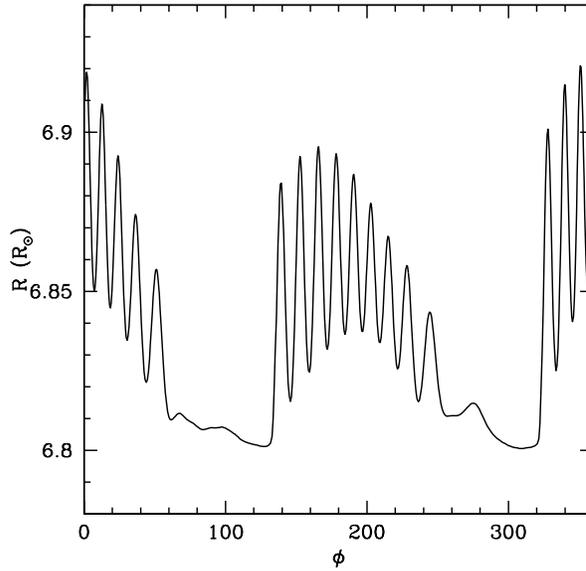


Figura 3.12: Gráfica del cinturón ecuatorial para una $\nu=0.058 R_{\odot}^2/\text{día}$. A pesar de que el valor de la viscosidad es el más alto de nuestro rango, la marea es muy regular.

y 3.6. Al variar los valores de la viscosidad, las configuraciones de la marea no muestran los dos tipos de comportamiento de marea dinámica que observamos al variar el grosor de la capa.

Esto implica que una vez alcanzados los valores de ν de la zona 2 hemos entrado en el rango de valores que muestran el comportamiento esperado de la ecuación 3.2.

Una cota superior

¿Qué tan altas pueden ser las viscosidades que elijamos para utilizar el código? La naturaleza de la pregunta es la misma que nace de observar que para el código es imposible hacer cálculos si le damos ciertos valores de viscosidad pequeños. Pero ¿Existe una cota superior para los valores de viscosidad que elijamos? Siguiendo la misma metodología, usamos el código dejando constante el valor del grosor de capa $dR_1/R_1=0.066$, incrementando los valores de la viscosidad hasta llegar a $2.2 R_{\odot}^2/\text{día}$. Las gráficas muestran que tenemos un rango muy amplio de viscosidades para las cuales podemos usar

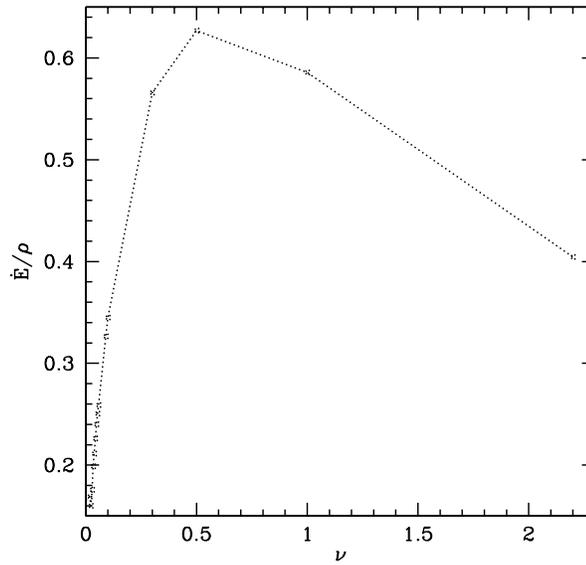


Figura 3.13: \dot{E}/ρ vs. ν ($R_{\odot}^2/\text{día}$). A partir del mínimo, la disipación de energía por unidad de densidad crece hasta alcanzar un valor de aproximadamente $0.5 R_{\odot}^2/\text{día}$. A partir de entonces los valores de \dot{E}/ρ comienza a decrecer.

el código. No obstante, al alcanzar el valor aproximado para ν de $0.5 R_{\odot}^2/\text{día}$, encontramos que las características superficiales tienden nuevamente a una configuración como la de la marea en equilibrio. Al parecer, esos valores altos de viscosidad hacen que las ecuaciones del modelo consideren que los elementos de superficie son rígidos. Este comportamiento de \dot{E}/ρ contra ν , se observa en la gráfica 3.13.

Vemos entonces que existe un rango de valores de ν , que va desde $0.023 R_{\odot}^2/\text{día}$ hasta aproximadamente $0.5 R_{\odot}^2/\text{día}$ donde estamos obteniendo vibraciones de marea dinámica.

Alcanzando la marea en equilibrio

Los valores de la viscosidad nos dan una medida del amortiguamiento que sufren los elementos de superficie al ser perturbados por las fuerzas que se consideran en el modelo. Si observamos la fórmula 3.1 podemos ver que en la amplitud esperada de la marea de equilibrio no está involucrado el valor de la viscosidad. Pero ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la configuración de

equilibrio? El modelo inicia los cálculos partiendo de una configuración de equilibrio en la que la estrella estudiada es perfectamente esférica. Cuando comienzan a hacerse los cálculos los elementos de superficie tardan un cierto tiempo en alcanzar un comportamiento periódico. Por el hecho de que los cálculos del modelo comienzan a hacerse a partir de una amplitud cero (en la configuración inicial esférica) las soluciones pasan por una fase en la que los movimientos de los elementos de volumen no son armónicos. Esto podemos verlo en el lado izquierdo de las gráficas que aparecen en la figura 3.14, donde los valores que alcanzan los radios de los elementos de volumen son muy grandes y los valores de la amplitud son muy irregulares y no puede distinguirse ningún comportamiento periódico. A dicha fase se le conoce como *transiente*. Ahora bien, una vez superado el transiente, el sistema entra en un estado estacionario. Los sistemas se encuentran en estados estacionarios cuando su comportamiento deja de variar en el tiempo. En el caso del modelo estudiado en esta tesis, una vez alcanzado dicho estado, no importa que paso por el periastro se elija para hacer los cálculos, se espera que los resultados sean los mismos. Se ha encontrado que la viscosidad juega un papel en el tiempo que tarda el modelo en superar el transiente y alcanzar el estado estacionario. Podemos ver, en la figura 3.14 que el sistema tarda aproximadamente 60 días en superar el transiente para una viscosidad de $0.009 R_{\odot}^2/\text{día}$, mientras que para una $\nu=0.044 R_{\odot}^2/\text{día}$ el transiente se reduce a menos de 20 días. Es de esperar que mientras más amortiguado sea el movimiento de los elementos, con mayor rapidez se alcance el estado estacionario y menos tiempo dure el transiente. En la elección del número de periodos después de los cuales deseamos hacer los cálculos el valor elegido de la viscosidad se encuentra también jugando un papel.

3.3.3. Dependencia del parámetro β_0

Hemos visto que los grosores de capa donde obtenemos vibraciones que nos dan como resultado mareas dinámicas se encuentran acotados entre valores de dR_1/R_1 que son demasiado profundos o demasiado delgados y que nos dan como resultado mareas de equilibrio. Hemos visto también que si mantenemos el parámetro β_0 constante, al mover cualquiera de los valores de los parámetros físicos involucrados en la fórmula 3.1 obtenemos las vibraciones en donde el modelo predice una amplitud de marea de equilibrio del orden de la mitad de la amplitud predicha por la fórmula. Pero ¿Qué ocurre si movemos el valor del parámetro β_0 ?

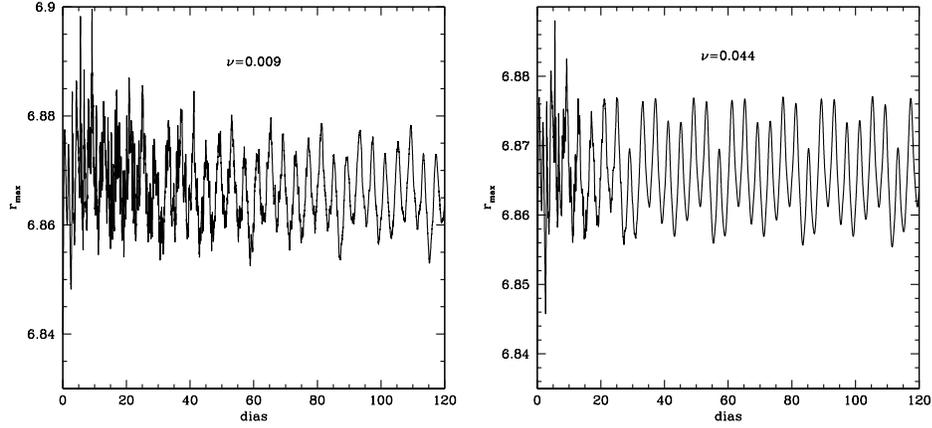


Figura 3.14: Tiempo vs. radio máximo. Se puede observar que el transitorio dura menos tiempo para un valor más alto de la viscosidad.

Nuevamente nos guiaremos por las gráficas de \dot{E}/ρ para caracterizar el comportamiento de los cálculos del modelo numérico. Dejando fijos todos los parámetros del sistema Spica, utilizaremos para los cálculos los siguientes valores del parámetro β_0 : $\beta_0=1, 1.3, 1.7, 2.07, 2.3$ y 2.7 . Los resultados aparecen en las figuras 3.15 y 3.16.

Como podemos observar, el valor de dR_1/R_1 en donde ocurre el máximo de \dot{E}/ρ aumenta conforme aumentamos el valor del parámetro β_0 lo que tiene un par de implicaciones. En primer lugar, los dR_1/R_1 en donde se obtienen como resultado mareas dinámicas van también aumentando lo que nos indica que no podemos saber a partir de la fórmula 3.1 que las vibraciones dinámicas siempre se darán para el mismo grosor de la capa. En el caso de Spica, tuvimos mareas dinámicas para grosores que predecían mareas de equilibrio del orden de la mitad, pero al cambiar el valor del parámetro β_0 obtenemos diferentes grosores donde se tienen éstas vibraciones. Lo anterior nos lleva a pensar en la existencia de resonancias. Al mover el valor de β_0 estamos aumentando o disminuyendo la velocidad angular de la estrella sobre su propio eje. Esto tiene influencia en las fuerzas ficticias de las ecuaciones de movimiento, pero la diferencia más importante es que estamos variando la frecuencia con que cada uno de los elementos de volumen superficiales de nuestro modelo es perturbado por la fuerza gravitacional de la estrella compañera. Esperamos poder profundizar un poco más en éste asunto en algún trabajo futuro.

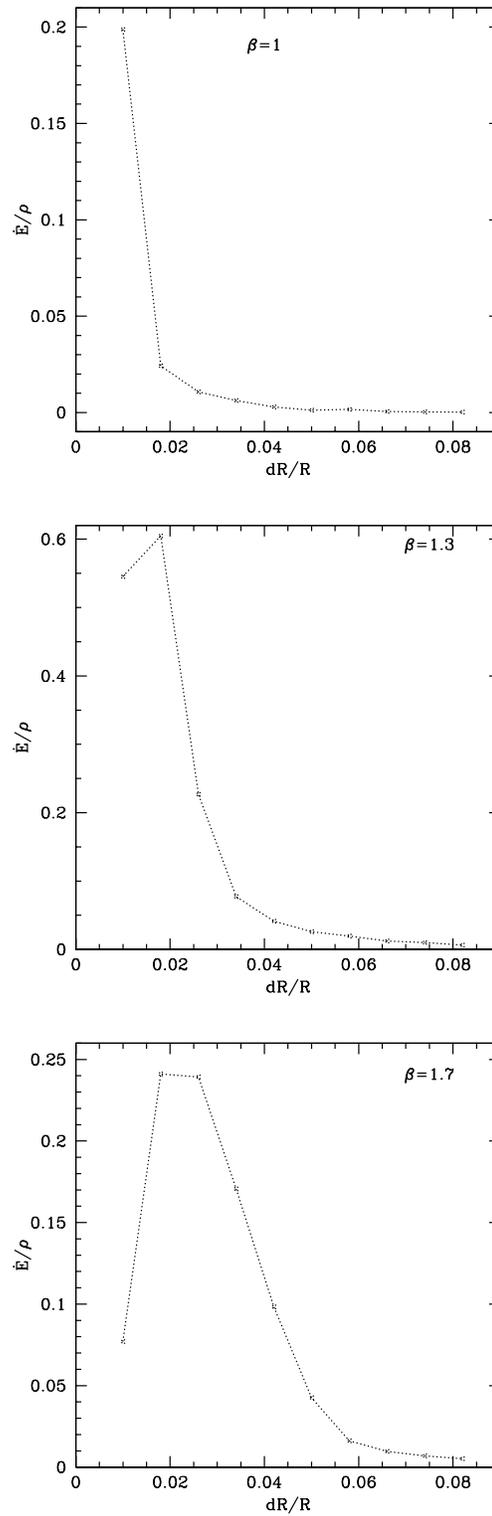


Figura 3.15: \dot{E}/ρ vs. dR_1/R_1 para diferentes valores de β_0 . Como se puede ver, el valor de dR_1/R_1 donde la tasa de disipación alcanza el máximo aumenta conforme aumentamos el valor del parámetro β_0

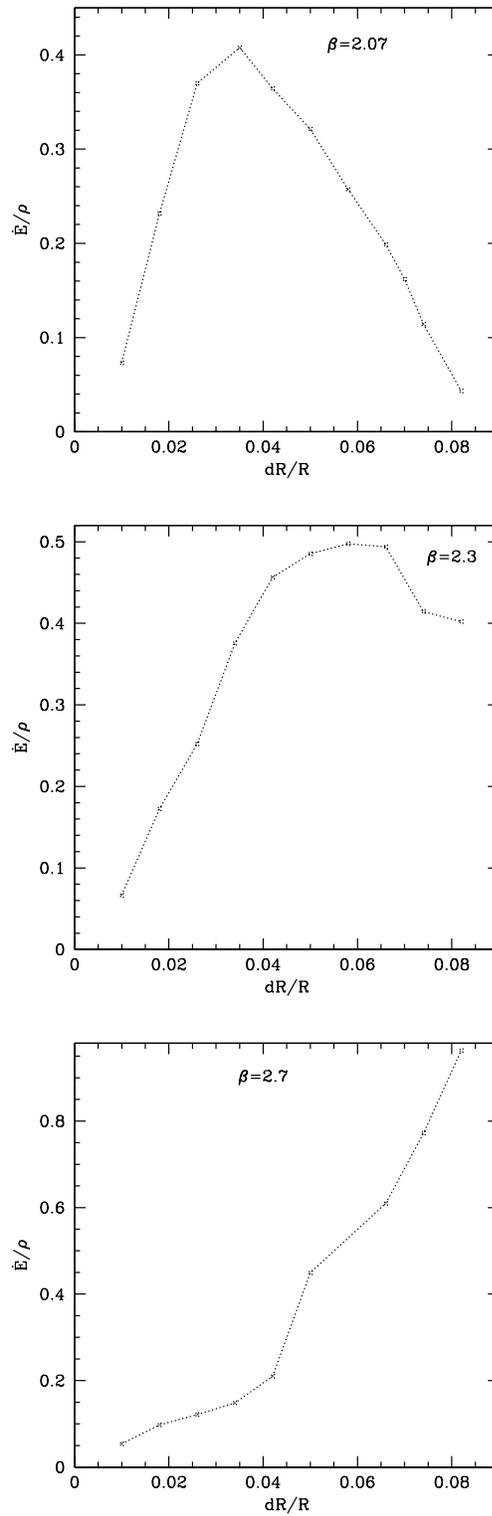


Figura 3.16: \dot{E}/ρ vs. dR_1/R_1 para diferentes valores de β_0 . Como se puede ver, el valor de dR_1/R_1 donde la tasa de disipación alcanza el máximo aumenta conforme aumentamos el valor del parámetro β_0

Cuadro 3.3: Malla de modelos.

dR_1/R_1	ν	\dot{E}/ρ	ν	dR_1/R_1	\dot{E}/ρ
0.010	0.009	0.09776	0.009	0.01	0.09776
0.010	0.013	0.10198	0.009	0.018	0.15842
0.010	0.018	0.09773	0.009	0.026	T
0.010	0.023	0.08953	0.009	0.035	T
0.010	0.028	0.08112	0.009	0.042	T
0.010	0.033	0.07322	0.009	0.05	T
0.010	0.038	0.06641	0.009	0.058	T
0.010	0.043	0.06043	0.009	0.066	T
0.010	0.048	0.05524	0.009	0.070	T
0.010	0.053	0.05079	0.009	0.074	T
0.010	0.058	0.04694	0.009	0.082	0.050065
0.018	0.009	0.15842	0.013	0.010	0.10198
0.018	0.013	0.18791	0.013	0.018	0.18791
0.018	0.018	0.21298	0.013	0.026	T
0.018	0.023	0.22580	0.013	0.035	T
0.018	0.028	0.23117	0.013	0.042	T
0.018	0.033	0.23187	0.013	0.050	T
0.018	0.038	0.22959	0.013	0.058	T
0.018	0.043	0.22517	0.013	0.066	T
0.018	0.048	0.21904	0.013	0.070	0.169
0.018	0.053	0.21329	0.013	0.074	0.14717
0.018	0.058	0.20676	0.013	0.082	0.021562
0.026	0.009	T	0.018	0.010	0.09773
0.026	0.013	T	0.018	0.018	0.21298
0.026	0.018	0.2823	0.018	0.026	0.2823
0.026	0.023	0.31663	0.018	0.035	0.28024
0.026	0.028	0.34602	0.018	0.042	T
0.026	0.033	0.36993	0.018	0.050	T
0.026	0.038	0.38519	0.018	0.058	T
0.026	0.043	0.39748	0.018	0.066	0.16912
0.026	0.048	0.40561	0.018	0.070	0.159
0.026	0.053	0.40945	0.018	0.074	0.14459
0.026	0.058	0.40857	0.018	0.082	0.027106
0.035	0.009	T	0.023	0.010	0.08953
0.035	0.013	T	0.023	0.018	0.2258
0.035	0.023	0.32321	0.023	0.035	0.32321
0.035	0.028	0.35626	0.023	0.042	0.30238
0.035	0.033	0.40765	0.023	0.050	0.27192
0.035	0.038	0.42108	0.023	0.058	0.22642
0.035	0.043	0.44545	0.023	0.066	0.16003

Se muestran los datos de \dot{E}/ρ ($erg\ cm^3\ s^{-1}\ g^{-1}\ *10^{43}$) para cada valor de grosor de capa y ν ($R_{\odot}^2/\text{día}$) utilizados. El primer grupo de columnas muestra los datos en orden creciente de los valores del grosor de la capa. En el segundo conjunto de columnas se muestran los mismos datos pero en el orden creciente de los valores del coeficiente de viscosidad. La T muestra donde el código no pudo ser corrido.

Cuadro 3.4: Malla de modelos.

dR_1/R_1	ν	\bar{E}/ρ	ν	dR_1/R_1	\bar{E}/rho
0.035	0.048	0.46562	0.023	0.070	0.136
0.035	0.053	0.48669	0.023	0.074	0.10615
0.035	0.058	0.50422	0.023	0.082	0.03513
0.042	0.009	T	0.028	0.010	0.08112
0.042	0.013	T	0.028	0.018	0.23117
0.042	0.018	T	0.028	0.026	0.34602
0.042	0.023	0.30238	0.028	0.035	0.35626
0.042	0.028	0.33417	0.028	0.042	0.33417
0.042	0.033	0.36428	0.028	0.050	0.29738
0.042	0.038	0.39627	0.028	0.058	0.24239
0.042	0.043	0.42099	0.028	0.066	0.17571
0.042	0.048	0.44267	0.028	0.070	0.146
0.042	0.053	0.46625	0.028	0.074	0.10434
0.042	0.058	0.48800	0.028	0.082	0.038333
0.050	0.009	T	0.033	0.010	0.07322
0.050	0.013	T	0.033	0.018	0.23187
0.050	0.018	T	0.033	0.026	0.36993
0.050	0.023	0.27192	0.033	0.035	0.40765
0.050	0.028	0.29738	0.033	0.042	0.36428
0.050	0.033	0.32119	0.033	0.050	0.32119
0.050	0.038	0.34283	0.033	0.058	0.25726
0.050	0.043	0.36336	0.033	0.066	0.19877
0.050	0.048	0.39129	0.033	0.070	0.162
0.050	0.058	0.42940	0.033	0.082	0.043236
0.058	0.009	T	0.038	0.010	0.06641
0.058	0.013	T	0.038	0.018	0.22959
0.058	0.018	T	0.038	0.026	0.38519
0.058	0.023	0.22642	0.038	0.035	0.42108
0.058	0.028	0.24239	0.038	0.042	0.39627
0.058	0.033	0.25726	0.038	0.050	0.34283
0.058	0.038	0.28031	0.038	0.058	0.28031
0.058	0.043	0.29445	0.038	0.066	0.21125
0.058	0.048	0.31528	0.038	0.070	0.1736
0.058	0.053	0.33633	0.038	0.074	0.12767
0.058	0.058	0.35002	0.038	0.082	0.047471
0.066	0.009	T	0.043	0.010	0.06043
0.066	0.013	T	0.043	0.018	0.22517
0.066	0.018	0.16912	0.043	0.026	0.39748
0.066	0.023	0.16003	0.043	0.035	0.44545
0.066	0.028	0.17571	0.043	0.042	0.42099

Continuación de la tabla 3.3.

Cuadro 3.5: Malla de modelos.

dR_1/R_1	ν	\dot{E}/ρ	ν	dR_1/R_1	\dot{E}/ρ
0.066	0.033	0.19877	0.043	0.05	0.36336
0.066	0.038	0.21125	0.043	0.058	0.29445
0.066	0.043	0.22617	0.043	0.066	0.22617
0.066	0.048	0.24022	0.043	0.07	0.18
0.066	0.053	0.25069	0.043	0.074	0.143
0.066	0.058	0.25897	0.043	0.082	0.052628
0.070	0.009	T	0.048	0.01	0.05524
0.070	0.013	0.169	0.048	0.018	0.21904
0.070	0.018	0.159	0.048	0.026	0.40561
0.070	0.023	0.136	0.048	0.035	0.46562
0.070	0.028	0.146	0.048	0.042	0.44267
0.070	0.033	0.162	0.048	0.05	0.39129
0.070	0.038	0.173	0.048	0.058	0.31528
0.070	0.043	0.18	0.048	0.066	0.24022
0.070	0.048	0.19	0.048	0.07	0.19
0.070	0.053	0.199	0.048	0.074	0.15339
0.070	0.058	0.209	0.048	0.082	0.057798
0.074	0.009	T	0.053	0.01	0.05079
0.074	0.013	0.14717	0.053	0.018	0.21329
0.074	0.018	0.14459	0.053	0.026	0.40945
0.074	0.023	0.10615	0.053	0.035	0.48669
0.074	0.028	0.10434	0.053	0.042	0.46625
0.074	0.033	0.11423	0.053	0.05	0.41149
0.074	0.038	0.12767	0.053	0.058	0.33633
0.074	0.043	0.01431	0.053	0.066	0.25069
0.074	0.048	0.015339	0.053	0.07	0.199
0.074	0.053	0.016151	0.053	0.074	0.16151
0.074	0.058	0.016868	0.053	0.082	0.062897
0.082	0.009	0.050065	0.058	0.01	0.04694
0.082	0.013	0.021562	0.058	0.018	0.20676
0.082	0.018	0.027106	0.058	0.026	0.40857
0.082	0.023	0.03513	0.058	0.035	0.50422
0.082	0.028	0.038333	0.058	0.042	0.488
0.082	0.033	0.043236	0.058	0.05	0.4294
0.082	0.038	0.047471	0.058	0.058	0.35002
0.082	0.043	0.052628	0.058	0.066	0.25897
0.082	0.048	0.057798	0.058	0.07	0.209
0.082	0.053	0.062897	0.058	0.074	0.16868
0.082	0.058	0.067977	0.058	0.082	0.067977

Continuación de las tablas 3.3 y 3.4.

Capítulo 4

Conclusiones

Después de hacer el análisis para el presente trabajo, se han encontrado algunas regularidades que podrían ser útiles para utilizar en el futuro el modelo con otros sistemas estelares binarios o incluso en otros sistemas donde se presente el fenómeno de la marea, como en el caso de planetas y satélites.

El parámetro que mejor pudimos caracterizar para el caso de Spica fue el grosor de la capa. Para nuestras exploraciones en Spica pudimos probar la hipótesis de que al variar cualquiera de los valores de los parámetros de la ecuación 3.1 y usar esos parámetros para hacer los cálculos con el modelo, obtenemos que las vibraciones de la marea dinámica aparecen en donde la amplitud dR/R predicha por el código para una $\beta=1$ son del orden de la mitad de la amplitud predicha por la fórmula. Las vibraciones de los elementos de superficie solamente aparecen para ciertos grosores de los elementos de volumen. Además, no todas las formas de vibración son iguales. Es decir, dentro del rango de los grosores de capa en donde obtenemos vibraciones, debemos todavía discriminar entre los dos tipos de comportamiento mostrados en las figuras 3.5 y 3.6. Es por ello que para cada nuevo sistema binario que deseemos modelar, debemos encontrar el rango de *capas delgadas* y *capas hondas* entre las cuales se encuentran las capas donde obtenemos vibraciones.

Podemos concluir también que si corremos casos en los que $\beta_0=1$ el código nos dará configuraciones de marea de equilibrio. Pero la amplitud de la marea que predice el código es una función creciente conforme aumentamos los valores de dR_1/R_1 ; conforme aumentamos el valor de dR_1/R_1 , el valor de δR que predice el código también aumenta. Éste comportamiento puede

observarse en la Tabla 3.1. Además los valores de las amplitudes de marea de equilibrio que nos da el código son siempre menores que los valores esperados por la fórmula 3.1 si nos mantenemos dentro del rango de dR_1/R_1 menores o iguales a 0.1.

Ahora, en el estudio presente hemos encontrado que existe también una dependencia en el parámetro β_0 . Las gráficas de \dot{E}/ρ contra dR_1/R_1 muestran un máximo. Se encontró que el valor de dR_1/R_1 donde aparece el máximo cambia al variar el valor de β_0 . Con el presente análisis nos ha llevado a concluir que el grosor de la capa en donde se encuentre dicho máximo depende del valor del parámetro β_0 . Al variar únicamente el parámetro β_0 estamos variando el periodo que tarda la estrella compañera en pasar por encima de un mismo punto, o en el caso de nuestro modelo, por encima de un mismo elemento superficial. Si consideramos que los periodos de pulsación estelar dependen del tiempo que tarda en atravesar un pulso de sonido a la estrella y que la velocidad de dicho pulso depende de la densidad, podemos conjeturar que para cada valor del grosor de la capa tendríamos un cierto periodo de pulsación ¿Podría ocurrir que dicho periodo de pulsación coincida en un número entero con un múltiplo entero del periodo de paso cenital de la estrella compañera?

La variación de β_0 trae también consigo una variación en las fuerzas inerciales donde está involucrado el valor de la velocidad angular de la estrella. Específicamente, en las aceleraciones de Euler, la centrífuga y la de Coriolis. Estas fuerzas están consideradas en el modelo y no se encuentran en la fórmula 3.1. Es por ello que no podemos concluir que será siempre en valores de la amplitud de marea de equilibrio de la mitad de las predichas por la fórmula 3.1 donde obtendremos las vibraciones de marea dinámica.

Ahora bien, la viscosidad sigue siendo otro problema a resolver. En el presente trabajo hemos visto que existe un régimen de valores de ν donde los valores de \dot{E}/ρ crecen linealmente. Si encontramos el amplio rango de viscosidades en donde existe dicha dependencia, nos encontraremos en un rango donde las características superficiales ecuatoriales no dependen en gran medida de dicho parámetro. Éste régimen lineal está acotado. La cota inferior la marca el mínimo de \dot{E}/ρ vs. ν (figura 3.10). Si disminuimos los valores de ν la marea dinámica se vuelve sumamente irregular hasta que eventualmente el código no puede ser corrido. La cota superior la encontramos en el máximo de \dot{E}/ρ vs. ν (Figura 3.13). Si aumentamos los valores de ν obtenemos que el

comportamiento de la marea calculada por el código es una marea de equilibrio. Esos valores de la viscosidad hacen que el fluido sea demasiado rígido para obtener vibraciones; el amortiguamiento causado por la viscosidad es mayor que las fuerzas que actúan sobre los elementos de volumen para causar vibraciones. Hemos visto que los valores de la viscosidad más altos amortiguan el movimiento de los elementos de superficie. Pudimos comprobar esto al notar que la fase de los cálculos del modelo a la que llamamos transiente dura menos tiempo para valores más altos de la viscosidad.

Consideraciones finales

”La propia naturaleza de la investigación determina que cuando se comienza una investigación científica no se sepa cual será su final”

John. D. Barrow

El modelo que se exploró en este trabajo no es mucho más complicado que las otras formas de modelar fenómenos físicos con soluciones numéricas, como modelos de estado sólido o de fluidos que en otras ramas de la física son el pan de cada día.

Una de las primeras conclusiones después de haber explorado el modelo y sus soluciones es que este tipo de fenómenos son altamente no lineales. Tal vez no sea una conclusión demasiado innovadora para el estado de la física actual. De hecho, la física moderna sigue esa misma línea de investigación; sistemas complejos, ecuaciones no lineales, caos, etc.

Pero si bien todos los modelos físicos se enfrentan con este tipo de situaciones, algunos tienen la fortuna de tener cerca un laboratorio. Los físicos de estado sólido, por ejemplo, confrontan constantemente las predicciones numéricas de sus modelos con datos experimentales. Ello les permite tener una forma de acotar los parámetros que introducen en las ecuaciones que resuelven y de ir ajustando sus modelos a la realidad de lo que pueden medir.

Lamentablemente (o afortunadamente) en astronomía eso es algo muy difícil de hacer. En esta disciplina no se cuenta con la posibilidad de medir muchas de las magnitudes físicas que son necesarias para poder hacer modelos predictivos. Pero es justamente esta situación lo que hace a la astronomía una disciplina sumamente interesante. Yo diría que lo que más se requiere para hacer astronomía es ingenio.

Lo importante es tomar en cuenta que el presente modelo es justamente eso: una forma de aproximarnos al estudio de un fenómeno. Tal vez no sea una conclusión en el estudio que realicé durante la elaboración de esta tesis, pero ha sido algo que he aprendido durante este camino; cada vez que se desarrolle un modelo, debe tenerse en cuenta la manera de compararlo con la realidad, con lo que nos dicen las observaciones y, en la medida de lo posible, debe poder aproximarse a otros modelos distintos del mismo fenómeno. Si consideramos además que para hacer el estudio he tenido que aprender un

poco de fluidos, de gases, de estructura estelar y de las muchas otras cosas de las que en este trabajo he hablado, entonces el modelo ha cumplido la función de introducirme al fascinante mundo de la Astronomía.

Bibliografía

- [1] Alexander, M. E. 1973, *Ap&SS*, 23, 459.
- [2] Bonacić Marinović, A. A. , Glebbeek, E., Pols, O. R. 2008, *A&A*, 480, 797.
- [3] Carroll, B. W., Ostley D.A., Introduction to Modern Astrophysics, Addison-Wesley 1996.
- [4] Claret, A., Gimenez, A. & Cunha, N. C. S. 1995. *A&A*, 299, 724.
- [5] Claret, A. & Cunha, N. C. S. 1997. *A&A*, 318, 187.
- [6] Cox, J.P., Theory of stellar pulsation, Princeton University Press 1980.
- [7] Dolginov, A. Z., Smelchakova, E.V. 1992. *A&A*, 257, 783.
- [8] Echevarría, J., Estrellas Binarias Interactivas, Colección La ciencia para todos, Fondo de Cultura Económica 2002.
- [9] Eggleton, P.P, Kiseleva, L.G., Hut, P. 1998, *ApJ*, 499, 853.
- [10] Harrington, D., Koenigsberger, G., Moreno, E. y Kuhn, J. 2009, *ApJ*, 704, 813.

- [11] Hut, P. 1980, *A&A*, 97, 167.
- [12] Koenigsberger, G. & Moreno, E. 2007, *Rev. Mexicana Astron. Astrofis.(SC)*, 33, 108.
- [13] Langer, N. 1991, *A&A*, 252, 669.
- [14] McCracken D. D., Dorn W. S., Métodos numéricos y programación Fortran, Limusa-Wesley 1967.
- [15] McMillan, S.L.W., McDerrmont, P.N. & Taam, R.E. 1987, *ApJ*, 318, 261.
- [16] Memorias de la XV escuela de verano en física, UNAM 2007.
- [17] Méndez-Moreno, R.M, y Moreno, M. 1992, *Rev. Mexicana de Física*, 38, 627.
- [18] Moreno, E. & Koenigsberger, G. 1999, *Rev. Mexicana Astron. Astrofis.*, 35, 157.
- [19] Moreno, E., Koenigsberger, G., & Toledano, O. 2005, *A&A*, 437, 641.
- [20] Moreno, E., Goenigsberger, G. & Harrington, D. M. 2011, *A&A*, en prensa.
- [21] Murray, C.D., Dermott, S.F, Solar System Dynamics, Springer 1997.
- [22] Shobbrook, R. R., et al. 1969, *MNRAS*, 145, 131.
- [23] Spain, B. Tensor Calculus, Dover 2003.

- [24] Symon, K. R. Mechanics, Addison-Wesley 1971.
- [25] Tassoul, J.L., 1987, ApJ, 322, 856.
- [26] Tassoul, J.L. & Tassoul, M., 1992, ApJ, 395, 259.
- [27] Tassoul, J.L & Tassoul, M., 1990, ApJ, 359, 155.
- [28] Toledano, O., Moreno, E., Koenigsberger, G., Detmers, R. & Langer, N. 2007, A&A, 461, 1057.
- [29] Zahn, J.P. 2005, in *Physical mechanisms for tidal dissipation*, A. Claret, A. Gímenez and J.-P Zahn (eds.) ASP Conference Series, Vol. 333.