Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ESPACIOS TOPOLÓGICOS UNIVERSALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
PEDRO PASCASIO SÁNCHEZ FERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ANGEL TAMARIZ MASCARÚA

2010

1). Datos del alumno
Sánchez
Fernández
Pedro Pascasio
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
404052034

2). Datos del tutor
Dr
Ángel
Tamariz
Mascarua

3). Datos del sinodal 1
Dr
Javier
Paez
Cárdenas

4). Datos del sinodal 2
Dr
Fidel
Casarrubias
Segura

5). Datos del sinodal 3
M en C
Alejandro
Dorantes
Aldama

6). Datos del sinodal 4
M en C
Carlos Gerardo
Paniagua
Ramírez

7). Datos del trabajo escrito
Espacios topológicos universales
63 p
2011

Índice general

Introducción

El presente trabajo tiene como finalidad exponer el concepto y los ejemplos mas importantes de espacios topológicos universales, que si bien, no es un concepto que se trate con mucha frecuencia en los cursos básicos de topología general, las definiciones y resultados que se tratan en estos cursos aportan herramientas suficientes para exponer y entender los espacios topológicos universales.

Para lograr lo anterior, este trabajo se expone utilizando la estructura cotidiana que aparece en los principales textos de topología general, así como de los cursos básicos de esta materia.

Comenzamos con una breve introducción en la cual exponemos los conceptos básicos de topología, tales como espacios topológicos, funciones continuas y homeomorfismos, para después pasar a la caracterización de los espacios topológicos en virtud de los axiomas de separación y finalmente concluimos el primer capítulo con el tema de productos topológicos, el cual es de vital importancia para el presente trabajo, ya que, con excepción de uno de los espacios universales expuestos aquí, todos los demas resultan ser producto de espacios topológicos.

Los resultados del primer capítulo nos serán suficientes para presentar los primeros tres espacios universales, que tendrán dicha propiedad con respecto a los espacios T_0, espacios de Tychonoff y espacios topológicos en general.

En el segundo capítulo, introduciremos los conceptos de espacios compactos, espacios métricos y espacios cero-dimensionales y, a partir de ciertos teoremas como, por ejemplo, el teorema de Tychonoff, el cual es uno de los resultados más importantes para el desarrollo de la topología general, tendremos herramientas suficientes para obtener un espacio universal para los espacios compactos, uno para espacios metrizables separables, uno para espacios metrizables, uno para espacios metrizables numerables, y finálmente uno para espacios cero-dimensionales.

Concluimos este trabajo, presentando de manera explícita los ejemplos de los espacios universales, así como las pruebas que justifican su caracter de espacios universales.

Pedro Pascasio Sánchez Fernández.
Verano 2010.

Capítulo 1

Conceptos básicos

El presente capítulo tiene como objetivo presentar los conceptos con los cuales se conforma la topología general, en la primera sección veremos el concepto de espacio topológico y las primeras definiciones y resultados que sirven como base para esta rama de las matemáticas y que servirán como punto de partida para llegar a nuestro objetivo, los espacios topológicos universales.

Posteriormente, se presentan los axiomas de separación, los cuales caracterizarán los espacios topológicos de acuerdo a ciertos criterios de separabilidad, dicha caracterización nos permite obtener resultados diversos y de mayor interés de los que se pueden obtener al hablar de espacios topológicos en general.

Concluimos el capítulo con la operación del producto topológico, la cual nos permite, a partir de espacios topológicos ya conocidos, obtener nuevos espacios topológicos. Esta operación sobre espacios topológicos es primordial ya que la mayoría de los espacios universales que veremos serán obtenidos a partir de esta operación.

1.1. Espacios topológicos y homeomorfismos.

La topología general aparece como consecuencia de la reestructuración de los fundamentos del cálculo lograda durante el siglo XIX, y se concidera que da inicio gracias a una serie de publicaciones hechas por Cantor entre 1879 y 1884.

Ahora comencemos con las primeras definiciones.

Definición 1.1.1. *1). Un espacio topológico es una pareja $(X, \mathcal{O})$ que consiste en un conjunto X y una familia $\mathcal{O}$ de subconjuntos de X que satisfacen:*

a) $\emptyset \in \mathcal{O}$ *y* $X \in \mathcal{O}$.

b) *Si* $U_1 \in \mathcal{O}$ *y* $U_2 \in \mathcal{O}$, *entonces* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

c) *Si* $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$, *entonces* $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{O}$.

Los subconjuntos de X que pertenecen a $\mathcal{O}$ son llamados conjuntos abiertos y $\mathcal{O}$ es llamada una topología en X.

2). Si para algún punto $x \in X$ y algún conjunto abierto $U \subset X$ tenemos que $x \in U$, decimos que U es una vecindad de x.

3). Una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ es una base para el espacio topológico $(X, \mathcal{O})$ si todo conjunto abierto no vacío de X es igual a la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$.

4). Una familia $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ es una subbase para el espacio topológico $(X, \mathcal{O})$ si la familia de todas las intersecciones finitas $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $U_i \in \mathcal{P}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, es una base para $(X, \mathcal{O})$.

5). Una familia $\mathcal{B}(x)$ de vecindades de x es una base local para el espacio topológico $(X, \mathcal{O})$ en el punto x si para toda vecindad V de x existe un U en $\mathcal{B}(x)$ tal que $x \in U \subset V$.

Observación 1.1.2. *De la definición de base, se puede ver que toda base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico X cumple las siguientes condiciones:*

1). Para cualesquiera $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ y cualquier punto $x \in U_1 \cap U_2$ existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

2). Para toda $x \in X$ existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$.

Ejemplo 1.1.3. *Sea X un conjunto arbitrario y $\mathcal{O}$ la familia de todos los subconjuntos de X. Claramente $(X, \mathcal{O})$ es un espacio topológico. Este espacio topológico es llamado espacio discreto, y la topología $\mathcal{O}$ es llamada topología discreta en X.*

Definición 1.1.4. *El carácter de un punto x en un espacio topológico $(X, \mathcal{O})$ es el menor cardinal de la forma $|\mathcal{B}(x)|$, donde $\mathcal{B}(x)$ es una base local para $(X, \mathcal{O})$ en x. Este cardinal se denota por $\chi(x, (X, \mathcal{O}))$. El carácter de un espacio topológico $(X, \mathcal{O})$ es el supremo de todos los $\chi(x, (X, \mathcal{O}))$ para $x \in X$ y se denota por $\chi(X, \mathcal{O})$.*

Definición 1.1.5. *El peso $\omega(X, \mathcal{O})$ de X es el mínimo cardinal α tal que $(X, \mathcal{O})$ tiene una base de cardinalidad α. Si la topología del espacio es clara, podemos denotar el peso de X simplemente como $\omega(X)$.*

Ejemplo 1.1.6. *La familia de todos los singuletes en el espacio discreto es una base de cardinalidad mínima, entonces el peso del espacio discreto X es igual a la cardinalidad de X.*

A continuación presentamos una primera clasificación de los espacios topológicos de acuerdo al tamaño de la base mas pequeña del espacio.

Definición 1.1.7. *Si $\chi(X, \mathcal{O}) \leq \aleph_0$, entonces decimos que el espacio $(X, \mathcal{O})$ es primero numerable. Si $\omega(X, \mathcal{O}) \leq \aleph_0$, entonces decimos que el espacio $(X, \mathcal{O})$ es segundo numerable.*

Definición 1.1.8. *Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio topológico; un conjunto $F \subset X$ es un conjunto cerrado si su complemento $X \setminus F$ es un conjunto abierto.*

Definición 1.1.9. *Para todo $A \subset X$ considérese la familia $\mathcal{C}_A$ de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. El conjunto $\overline{A} = \bigcap \mathcal{C}_A$ es cerrado y se llama cerradura de A.*

Observación 1.1.10. *Claramente un conjunto A es cerrado si y sólo si es igual a su cerradura, es decir $A = \overline{A}$.*

Definición 1.1.11. *El interior de un conjunto $A \subset X$ es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A y se denota por $intA$*

Observación 1.1.12. *Como en el caso de los conjuntos cerrados, un conjunto es abierto si y sólo si es igual a su interior, es decir, $A = intA$.*

Observación 1.1.13. *Es facil ver de la definición de interior de un conjunto que para todo conjunto B, se tiene que $int(B) = Y \setminus \overline{(Y \setminus B)}$*

Definición 1.1.14. *Para todo subconjunto A de un espacio topológico X definimos la frontera de A como el conjunto*

$$FrA = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus intA$$

Teorema 1.1.15. *Para todo subconjunto $A \subset X$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1). El punto x pertenece a $\overline{A}$.

2). Para toda vecindad U de x tenemos $U \cap A \neq \emptyset$.

3). Existe una base local $\mathcal{B}(x)$ de x tal que para toda $U \in \mathcal{B}(x)$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Supongamos que no se cumple 2), es decir, existe una vecindad U de x tal que $U \cap A = \emptyset$. Tenemos entonces $A \subset X \setminus U \in \mathcal{C}_A$; entonces $\overline{A} \subset X \setminus U$ y $x \notin \overline{A}$, es decir, 1) no se cumple.

2) $\Rightarrow$ 3). Esta implicación es obvia.

3) $\Rightarrow$ 1). Supongamos que 1) no se cumple, es decir, que $x \notin \overline{A}$. Existe entonces un cerrado $F \in \mathcal{C}_A$ tal que $x \notin F$. Para el abierto $V = X \setminus F$ tenemos

$$x \in V \text{ y } V \cap A = \emptyset \qquad (*)$$

Ahora, si $\mathcal{B}(x)$ es una base local de x existe un $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in U \subset V$ y por (*) se sigue que $U \cap A = \emptyset$, es decir, 3) no se cumple.

□

Ejemplo 1.1.16. *Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\mathcal{O}$ la familia formada por todos los conjuntos $U \subset \mathbb{R}$ con la propiedad de que para toda $x \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset U$. Veamos que $\mathcal{O}$ es una topología en $\mathbb{R}$. En primer lugar, $\mathbb{R} \in \mathcal{O}$ ya que, para toda $x \in \mathbb{R}$, $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset \mathbb{R}$ para toda $\epsilon > 0$. De manera trivial se tiene que, si $x \in \emptyset$, entonces $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset \emptyset$ para toda $\epsilon > 0$. Sean $A, B \in \mathcal{O}$ y $x \in A \cap B$, entonces, existen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tales que $(x-\epsilon_1, x+\epsilon_1) \subset A$ y $(x-\epsilon_2, x+\epsilon_2) \subset B$, sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, entonces $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A \cap B$, y por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{O}$. Finalmente sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$ y sea $x \in \bigcup \mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A \subset \bigcup \mathcal{A}$.*
La familia de todos los intervalos abiertos con extremos racionales es una base para $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$, esta es una base de cardinalidad mínima, por lo tanto $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ es segundo numerable.
La topología $\mathcal{O}$ es llamada la topología natural de la recta real.

Ejemplo 1.1.17. *Sean $I = [0,1]$ el intervalo unitario cerrado y $\mathcal{O}$ la familia formada por todos los conjuntos de la forma $I \cap U$, donde $U \subset \mathbb{R}$ es un abierto con respecto a la topología natural de $\mathbb{R}$. Cláramente $(I, \mathcal{O})$ es un espacio topológico. La familia de todos los intervalos de la forma $(q,r), [0,q), (q,1]$*

donde q, r son racionales y $0 < q < r < 1$, es una base para $(I, \mathcal{O})$. La topología $\mathcal{O}$ es llamada la topología natural del intervalo I.

Teorema 1.1.18. *Si $\omega(X) \leq m$, con m un cardinal infinito, entonces para toda familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos de X existe un conjunto $S_0 \subset S$ tal que $|S_0| \leq m$ y $\bigcup_{s\in S_0} U_s = \bigcup_{s\in S} U_s$.*

Demostración. Tomemos una base $\mathcal{B}$ para el espacio X tal que $|\mathcal{B}| \leq m$ y denotemos por $\mathcal{B}_0$ la colección de todos los $U \in \mathcal{B}$ tal que para algún $s \in S$ se tiene $U \subset U_s$. Para cada $U \in \mathcal{B}_0$, escojamos un $s(U) \in S$ tal que

$$U \subset U_{s(U)} \tag{1}$$

De esta manera se define una función s de $\mathcal{B}_0$ en S; basta demostrar que el conjunto $S_0 = s(\mathcal{B}_0) \subset S$ satisface el teorema. En primer lugar se tiene $|S_0| = |s(\mathcal{B}_0)| \leq |\mathcal{B}| \leq m$. Ahora tomemos un punto $x \in \bigcup_{s\in S} U_s$. Existe un $s \in S$ tal que $x \in U_s$ y un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset U_s$; claramente, $U \in \mathcal{B}_0$ y $s(U) \in S_0$. Por lo tanto de (1) tenemos:

$$x \in U \subset U_{s(U)} \subset \bigcup_{s\in S_0} U_s,$$

Entonces $\bigcup_{s\in S} U_s \subset \bigcup_{s\in S_0} U_s$. La inclusión inversa es obvia. □

El siguiente resultado es de suma importancia para el desarrollo de este trabajo, ya que nos permite, a partir de una base cualquiera para un espacio topológico, obtener una base de tamaño mínimo.

Teorema 1.1.19. *Si $\omega(X) \leq m$, $m \geq \aleph_0$, entonces para toda base $\mathcal{B}$ de X existe una base $\mathcal{B}_0$ tal que $|\mathcal{B}_0| \leq m$ y $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s\in S}$ una base para X y tomemos una base $\mathcal{B}_1 = \{W_t\}_{t\in T}$ para X tal que $|T| \leq m$. Para toda $t \in T$ sea

$$S(t) = \{s \in S \mid U_s \subset W_t\}.$$

Como $\mathcal{B}$ es una base de X, tenemos que $\bigcup_{s\in S(t)} U_s = W_t$ y por 1.1.18 existe un conjunto $S_0(t) \subset S(t)$ tal que

$$|S_0(t)| \leq m \tag{2}$$

y

$$W_t = \bigcup_{s\in S(t)} U_s = \bigcup_{s\in S_0(t)} U_s. \tag{3}$$

Sea $\mathcal{B}_0 = \{U_s\}_{s\in S_0(t), t\in T}$. Como $|T| \leq m$, de (2) y de la igualdad $m^2 = m$, ya que m es un cardinal infinito, se sigue que $|\mathcal{B}_0| \leq m$. Ahora basta probar que $\mathcal{B}_0$ es una base para X. Sea $x \in X$ un punto arbitrario, y sea V una vecindad de x. Como $\mathcal{B}_1$ es una base, para algún $t \in T$ se tiene $x \in W_t \subset V$ y por (3) existe un $s \in S_0(t)$ tal que $x \in U_s \subset W_t \subset V$. Como $U_s \in \mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_0$ es una base para X. □

Definición 1.1.20. *Si $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ son dos topologías en X y $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$, entonces decimos que la topología $\mathcal{O}_1$ es más fina que la topología $\mathcal{O}_2$ o que la topología $\mathcal{O}_2$ es más gruesa que la topología $\mathcal{O}_1$.*

Definición 1.1.21. *Sea X un espacio topológico:*

1). A la unión numerable de subconjuntos cerrados de X se le llama conjunto del tipo F_δ.

2). A la intersección numerable de subconjuntos abiertos de X se le llama conjunto del tipo G_σ.

Ahora introducimos el concepto de función continua el cual, de manera intuitiva, se podría decir que consiste en funciones que mandan puntos cercanos a un conjunto F, a puntos cercanos a la imagen de F.

Definición 1.1.22. *Sean $(X, \mathcal{O})$ y $(Y, \mathcal{O}')$ dos espacios topológicos; una función f de X a Y se llama continua si $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ para todo $U \in \mathcal{O}'$. i.e., si la imagen inversa bajo f de cualquier conjunto abierto en Y es abierto en X.*

Definición 1.1.23. *Una función continua $f : X \to Y$ es llamada cerrada (abierta) si para todo conjunto cerrado (abierto) $A \subset X$, la imagen $f(A)$ es cerrada (abierta) en Y.*

El siguente resultado aporta una herramienta importante para verificar la continuidad de una función de acuerdo a diversos criterios.

Teorema 1.1.24. *Sea f una función de un espacio topológico X a un espacio topológico Y, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1). La función f es continua.

2). La imagen inversa de todo miembro de una subbase $\mathcal{P}$ de Y es un abierto en X.

3). La imagen inversa de todo miembro de una base $\mathcal{B}$ de Y es un abierto en X.

4). Existen sistemas de vecindades $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ y $\{\mathcal{D}(y)\}_{y\in Y}$ para X y Y respectivamente, tales que para toda $x \in X$ y $V \in \mathcal{D}(f(x))$ existe un $U \in \mathcal{B}(x)$ que satisface $f(U) \subset V$.

5). La imagen inversa de todo conjunto cerrado de Y es un cerrado en X.

6). Para todo $A \subset X$ se tiene $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

7). Para todo $B \subset Y$ se tiene $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

8). Para todo $B \subset Y$ se tiene $f^{-1}(IntB) \subset Intf^{-1}(B)$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) es obvio.

2) $\Rightarrow$ 3). Sea $\mathcal{P}$ una subbase para Y tal que $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo $V \in \mathcal{P}$. Consideremos la base $\mathcal{B}$ para Y que consiste en todas las intersecciones finitas $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k$ de miembros de $\mathcal{P}$; como

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \ldots V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(V_k),$$

las imágenes inversas de todos los elementos de de $\mathcal{B}$ son abiertos en X.

3) $\Rightarrow$ 4). Sean $\mathcal{B}$ una base para X y $\mathcal{D}$ una base para Y y sean $\mathcal{B}(x) = \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$ y $\mathcal{D}(x) = \{V \in \mathcal{D} \mid x \in V\}$. Sea $x \in X$, para cada $V \in \mathcal{D}(f(x))$, por hipótesis, existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que $f^{-1}(V) = W$ y $x \in W$, entonces existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que $W \subset U$, por lo tanto $f(U) \subset f(W) \subset V$.

4) $\Rightarrow$ 5). Sea $B = \overline{B}$ un subconjunto cerrado de Y. Como $f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B)$, es suficiente mostrar que la imagen inversa de $Y \setminus B$ es un abierto en X. Para lograr esto debemos mostrar que cada punto $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ tiene una vecindad U que está contenida en $f^{-1}(Y \setminus B)$. Para cada $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ tenemos $f(x) \in Y \setminus B$; entonces existe un $V \in \mathcal{D}(f(x))$ tal que $V \subset Y \setminus B$. Por hipótesis existe un $U \in \mathcal{B}(x)$ que satisface $f(U) \subset V$; claramente

$$x \in U \subset f^{-1}f(U) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(Y \setminus B).$$

5) $\Rightarrow$ 6). Tenemos que $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es un conjunto cerrado que contiene a A, y entonces $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, ya que $\overline{A}$ es el cerrado mas pequeño que contiene a A, lo que nos da

$$f(\overline{A}) \subset ff^{-1}(\overline{f(A)}) \subset \overline{f(A)}.$$

6) $\Rightarrow$ 7). Aplicamos 6) a $A = f^{-1}(B)$ y obtenemos la inclusión

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{ff^{-1}(B)} \subset \overline{B},$$

lo que nos da $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

7) $\Rightarrow$ 8). Aplicamos 7) a $Y \setminus B$ y obtenemos la inclusión

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subset f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$$

lo que nos da

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathrm{Int}B) = f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) &= X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \\ \subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} \\ &= \mathrm{Int}f^{-1}(B). \end{aligned}$$

8) $\Rightarrow$ 1). Para todo abierto $U \subset Y$ tenemos $U = \mathrm{Int}U$, y se sigue de 8) que $f^{-1}(U) \subset \mathrm{Int}f^{-1}(U) \subset f^{-1}(U)$. Entonces tenemos $f^{-1}(U) = \mathrm{Int}f^{-1}(U)$, i.e., $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

$\square$

Ejemplo 1.1.25. *Si X es un espacio discreto, entonces cualquier función de X en cualquier espacio topológico Y es continua.*

Si en un conjunto X definimos dos topologias $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$, entonces la función identidad id_X es una función continua de $(X, \mathcal{O}_1)$ en $(X, \mathcal{O}_2)$ si y sólo si la topología $\mathcal{O}_1$ es más fina que la topología $\mathcal{O}_2$.

Teorema 1.1.26. *Sea X un conjunto y sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X que cumple lo siguiente:*

1). Para cualesquiera conjuntos $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ y para cualquier punto $x \in U_1 \cap U_2$ existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

2). Para todo $x \in X$ existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$.

Sea $\mathcal{O}$ la familia de todos los subconjuntos de X que son uniones de subfamilias de $\mathcal{B}$, es decir, $U \in \mathcal{B}$ si y sólo si $U = \bigcup \mathcal{B}_0$ para alguna subfamilia $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}$. La familia $\mathcal{O}$ es una topología para X y $\mathcal{B}$ es una base para esta topologia.
La topología $\mathcal{O}$ se llama topología generada por la base $\mathcal{B}$.

Demostración. Es clarol que $\emptyset \in \mathcal{B}$ y por la condición 2) $\bigcup \mathcal{B} = X$. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, tenemos que $U_1 = \bigcup_{s\in S} U_s$ y $U_2 = \bigcup_{t\in T} U_t$, donde U_s y U_t estan en $\mathcal{B}$ para toda $s \in S$ y $t \in T$. Como

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{s\in S, t\in T} U_s \cap U_t,$$

y para todo $x \in U_1 \cap U_2$ existe un $U(x) \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in U(x) \subset U_s \cap U_t,$$

se tiene que $U_s \cap U_t = \bigcup \mathcal{B}_0$ para $\mathcal{B}_0 = \{U(x) \mid x \in U_s \cap U_t$, por lo tanto $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}$.
De la definición de $\mathcal{O}$ es calro que la unión generalizada de elementos de $\mathcal{O}$ esta en $\mathcal{O}$ y que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{O}$. □

Teorema 1.1.27. *Supongamos que tenemos un conjunto X, una familia $\{Y_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos y una familia de funciones $\{f_s\}_{s\in S}$, donde f_s es una función de X a Y_s. En la clase de todas las topologías en X que hacen a todas las f_s continuas existe una que es la más gruesa; esta es la topología $\mathcal{O}$ generada por la base que consiste de todos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{k} f_{s_i}^{-1}(V_i)$, donde $k \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ y V_i es un abierto de Y_{s_i} para $i = 1, 2, \ldots, k$.*
La topología $\mathcal{O}$ es llamada la topología generada por la familia de funciones $\{f_s\}_{s\in S}$.

Demostración. Primero veamos que la familia $\mathcal{B}$ que consiste de todos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{k} f_{s_i}^{-1}(V_i)$ cumple con las condiciones del teorema 1.1.26; sean $A_j = \bigcap_{i=1}^{k_j} f_{s_{j,i}}^{-1}(V_{j,i})$, con $j = 1, 2$ y $s_{j,i} \in S$ y tales que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Como $A_1 \cap A_2 = \bigcap_{j=1,2 i=1}^{k_j} f_{s_{j,i}}^{-1}(V_{j,i})$, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{B}$. La otra condición se sigue del hecho de que para toda $x \in X$, $x \in f_s^{-1}(Y_s)$. Por la manera en que construimos $\mathcal{B}$ queda claro que todas las f_s son continuas con respecto a la topología $\mathcal{O}$ generada por la base $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{O}'$ una topología tal que todas las f_s son continuas con respecto a la topología $\mathcal{O}'$ de X, entonces para todo abierto V en Y_s se tiene que $f^{-1}(V)$ es un elemento de $\mathcal{O}'$ y la intersección finita de todos los conjuntos de esta forma es un abierto en $(X, \mathcal{O}')$, es decir, todo elemento de $\mathcal{B}$ está en $\mathcal{O}'$ y por lo tanto $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. □

Definición 1.1.28. *Una función continua $f : X \to Y$ se llama homeomorfismo si f es biyectiva y la función inversa f^{-1} de Y en X es continua.*
Dos espacios topológicos son homeomorfos si existe un homeomorfismo de X en Y.

Teorema 1.1.29. *Para una función inyectiva f de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y las siguientes condiciones son equivalentes:*

1). La función f es un homeomorfismo entre X y Y.

2). La función f es cerrada.

3). La función f es abierta.

4). El conjunto $f(A)$ es cerrado en Y si y sólo si A es cerrado en X.

5). El conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X si y sólo si B es cerrado en Y.

6). El conjunto $f(A)$ es abierto en Y si y sólo si A es abierto en X.

7). El conjunto $f^{-1}(B)$ es abierto en X si y solo B es abierto en Y.

Demostración. La equivalencia entre 1) y 2) así como entre 1) y 3), se sigue del hecho de que $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ para todo $A \subset X$ donde el lado izquierdo de la igualdad es la imagen inversa de A bajo la función f^{-1}. La equivalencia entre 2) y 4), así como entre 3) y 6), se sigue de la igualdad $A = f^{-1}f(A)$. De la equivalencia entre 1) y 4) y entre 1) y 6) se sigue que 5) y 7) son equivalentes y estas últimas son equivalentes a que f^{-1} sea un homeomorfismo, lo cual es equivalente a 1).

$\square$

Ejemplo 1.1.30. *Sean X, Y cualesquiera dos conjuntos de la misma cardinalidad, y consideremos en los dos conjuntos la topología discreta. Obviamente, cualquier función uno a uno de X sobre Y es un homeomorfismo. Por otro lado, si los espacios discretos X, Y tienen distinta cardinalidad, entonces no pueden ser homeomorfos. Por lo tanto, el espacio discreto X depende -salvo homeomorfismos- solo de la cardinalidad de X. El espacio discreto de cardinalidad m sera denotado por $D(m)$.*

Las funciones continuas y los homeomorfismos fueron considerados por primera vez por Frechet[8] en su trabajo de 1910 *Les dimensions d'un ensemble abstrait.*

Teorema 1.1.31. *Supongamos que tenemos un espacio topológico X y un conjunto $M \subset X$. La familia $\mathcal{O}$ de todos los conjuntos $M \cap U$, donde U es abierto en X es una topología para M.*

Demostración. La primera condicion se satisface ya que $\emptyset = M \cap \emptyset$ y $M = M \cap X$. Las otras dos condiciones se siguen de las igualdades

$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = M \cap (U_1 \cap U_2) \text{ y } \bigcup_{s \in S} (M \cap U_s) = M \cap \bigcup_{s \in S} U_s$$

y por lo tanto, $(M, \mathcal{O})$ es un espacio topológico. □

Definición 1.1.32. *Sea X un espacio topológico y $M \subset X$. El espacio topológico $(M, \mathcal{O})$, donde $\mathcal{O} = \{M \cap U \mid U \text{ es abierto en } X\}$ es llamado subespacio del espacio X, y la topología es llamada topología inducida o topología de subespacio.*

Definición 1.1.33. *Para todo espacio topológico X y todo subespacio M de X, la función definida como $i_M(x) = x$ es una función de M en X; como $i_M^{-1}(U) = M \cap U$, esta función es continua. La función $i_M : M \to X$ se llama encaje del subespacio M en el espacio X.*

Definición 1.1.34. *Una función $f : X \to Y$ es un encaje homeomorfo si es la composicíon de un homeomorfismo y un encaje, i.e., si existe un subespacio L de Y y un homeomorfismo $f' : X \to L$ tal que $f = i_L f'$.*

Definición 1.1.35. *Las propiedades de espacios topológicos que se preservan bajo homeomorfismos se llaman propiedades topológicas.*

1.2. Axiomas de separación

En esta sección, veremos una forma de caracterizar a los espacios topológicos, y dicha caracterización sentará las bases para construir los primeros espacios universales que veremos.

En la primera sección definimos los axiomas de numerabilidad (primero numerable y segundo numerable) los cuales se refieren al tamaño de las bases mas pequeñas del espacio, en esta sección introducimos criterios para clasificar los espacios topológicos de acuerdo a la manera en que pueden ser separados los puntos del espacio y los subconjuntos cerrados.

Definición 1.2.1. *Un espacio topológico X es T_0 si dados $p, q \in X$, $p \neq q$, existe un abierto que contiene a uno de ellos, pero no al otro.*

Definición 1.2.2. *Un espacio topológico X es llamado T_1 si para cualquier par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$..*

Observación 1.2.3. *Notemos que en todo espacio* T_1, X, *todo punto* $x \in X$ *es la intersección de todas sus vecindades y también que, para todo punto* $x \in X$, *el conjunto* $\{x\}$ *es un conjunto cerrado.*

Ejemplo 1.2.4. *Sea* $\mathbb{R}$ *la recta real con la topología natural, sean* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. *Supongamos sin pérdida de generalidad que* $x_1 < x_2$. *Sea* q *un racional tal que* $x_1 < q < x_2$ *y tomemos* p, r *cualesquiera racionales tales que* $p < x_1 < q < x_2 < r$, *entonces* (p, q) *y* (q, r) *son dos abiertos tales que* $x_1 \in (p, q)$, $x_1 \notin (q, r)$, $x_2 \in (q, r)$ *y* $x_2 \notin (p, q)$, *por lo tanto* $\mathbb{R}$ *es un espacio* T_1.
De manera similar se prueba que el intervalo I *es* T_1.

Definición 1.2.5. *Un espacio topológico es llamado* T_2 *o espacio de Hausdorff si para cualesquiera dos puntos* $x_1, x_2 \in X$ *distintos existen conjuntos abiertos* $U_1, U_2 \subset X$ *tales que* $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ *y* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Definición 1.2.6. *Un espacio topológico* X *es llamado* T_3 *o espacio regular si* X *es un espacio* T_1 *y para cualquier* $x \in X$ *y cualquier conjunto cerrado* $F \subset X$ *tales que* $x \notin F$, *existen conjuntos abiertos* U_1, U_2 *tales que* $x \in U_1$, $F \subset U_2$ *y* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Definición 1.2.7. *Un espacio topológico* X *es un espacio de Tychonoff o* $T_{3\frac{1}{2}}$, *si* X *es un espacio* T_1 *y para cada* $x \in X$ *y cada conjunto cerrado* $F \subset X$ *tales que* $x \notin F$ *existe una función continua* $f : X \to I$ *tal que* $f(x) = 0$ *y* $f(y) = 1$ *para* $y \in F$.

Observación 1.2.8. *Un espacio* T_1 X *es un espacio de Tychonoff si y sólo si para cada* $x \in X$ *y cada vecindad* V *de* x *existe una función continua* $f : X \to I$ *tal que* $f(x) = 0$ *y* $f(y) = 1$ *para* $y \in X \setminus V$

Los espacios de Tychonoff difieren ligeramente de las otras clases de espacios, se dice que es una definición externa ya que supone la existencia de objetos externos al espacio en consideración, en este caso la función continua del espacio en el intervalo I.

Definición 1.2.9. *Un espacio topológico* X *es llamado* T_4 *o normal, si* X *es un espacio* T_1 *y para toda pareja de subconjuntos cerrados y ajenos* $A, B \subset X$ *existen abiertos* U, V *tales que* $A \subset U$, $B \subset V$ *y* $U \cap V = \emptyset$.

El siguiente resultado nos permite ver a los espacios de Tychonoff en términos de la base del espacio formada por las imágenes inversas del 0.

Teorema 1.2.10. *Un espacio topológico* T_1 X *es un espacio de Tychonoff si y sólo si para cada* $x \in X$ *y cada vecindad* V *de* x *la cual pertenece a una* *subbase fija $\mathcal{P}$ existe una funcióon continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para $y \in X \setminus V$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Esta implicación se sigue del hecho de que $X \setminus V$ es cerrado y no contiene a x.

$\Leftarrow$)Sea $x \in X$ y F un conjunto cerrado tal que $x \notin F$. Por la definición de subbase, existen $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathcal{P}$ que satisfacen $x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subset X \setminus F$. Para $i = 1, 2, \ldots, k$ tomemos la función $f_i : X \to I$ tal que $f_i(x) = 0$ y $f_i(y) = 1$ para $y \in X \setminus V_i$. Ahora tenemos que si $f = \max(f_1, f_2, \ldots, f_k)$, $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para $y \in F$. $\square$

Más adelante, veremos que la recta real $\mathbb{R}$ y el intervalo I con la topología natural son espacios de Tychonoff.

Es claro que si un espacio topológico es T_i para algún $i = 0, 1, 2, 3, 4$, entonces también es T_j para $j < i$, el problema aparecerá al querer verificar que todo espacio T_4 es un espacio de Tychonoff. El siguiente resultado resuelve este problema y deja claro que esta condición siempre se cumple.

Teorema 1.2.11 (Lema de Urysohn)**.** *Para toda pareja de conjuntos cerrados A y B ajenos en un espacio normal X, existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ para toda $x \in A$ y $f(x) = 1$ para toda $x \in B$.*

Demostración. Para todo número racional r en el intervalo $[0, 1]$ definamos un subconjunto abierto $V_r \subset X$ con las siguientes condiciones:

$$\overline{V_r} \subset V_{r'} \text{ siempre que } r < r', \tag{4}$$

$$A \subset V_0, B \subset X \setminus V_1. \tag{5}$$

Los conjuntos V_r serán definidos de manera recursiva. Arreglemos en una secuencia infinita $r_3, r_4, \ldots$ todos los números racionales en el intervalo $(0, 1)$ y sea $r_1 = 0$ y $r_2 = 1$. Tomemos $V_0 = U$ y $V_1 = X \setminus B$, donde U es un abierto que satisface $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus B$. Para ver que existe dicho abierto U, veamos que, como X es T_4, existen abiertos U y U_0 tales que $A \subset U$, $B \subset U_0$ y $U \cap U_0 = \emptyset$, entonces $U \subset X \setminus U_0 \subset X \setminus B$, donde $X \setminus U_0$ es un conjunto cerrado que contiene a U, por lo tanto $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus U_0 \subset X \setminus B$, ya que $\overline{U}$ es el cerrado mas pequeño que contiene a U.

Obviamente, $\overline{V_0} \subset V_1$. Para $k = 2$ se satisfacen la condición (5) al igual que la condición

$$\overline{V_{r_i}} \subset V_{r_j} \text{ siempre que } r_i < r_j \text{ y } i, j < k. \tag{6}$$

Supongamos que los conjuntos V_{r_i} están ya definidos para $i \leq n$, donde $n \geq 2$ y satisfacen (6) para $k = n$. Denotemos por r_l y r_m aquellos números de $r_1, r_2, \ldots, r_n$ que están más cerca de r_{n+1} desde la izquierda y desde la derecha respectívamente. Como $r_l < r_m$, se sigue de (6) para $k = n$ que $\overline{V_{r_l}} \subset V_{r_m}$. Sea U un abierto que satisface $\overline{V_{r_l}} \subset U \subset \overline{U} \subset V_{r_m}$. Tomando $V_{r_{n+1}} = U$ obtenemos conjuntos $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots V_{r_{n+1}}$ que satisfacen (6) para $k = n+1$. La sucesión $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots$ obtenida de esta manera se sujeta a las condiciones (4) y (5).
Consideremos la función f de X en I definida por la función

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\} & \text{para } x \in V_1, \\ 1 & \text{para } x \in X \setminus V_1 \end{cases}$$

Como (5) implica que $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$, sólo basta probar que f es continua; en virtud del teorema 1.1.24, es suficiente mostrar que la imagen inversa de los intervalos $[0, a)$ y $(b, 1]$, donde $a \leq 1$ y $b \geq 0$, son abiertos. La desigualdad $f(x) < a$ se mantiene si y sólo si existe $r < a$ tal que $x \in V_r$, entonces el conjunto $f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r \mid r < a\}$ es abierto. Y la desigualdad $f(x) > b$ se mantiene si y sólo si existe un $r' > b$ tal que $x \notin V_{r'}$, el cual - en virtud de (4) - significa que existe una $r > b$ tal que $x \notin \overline{V_r}$. Entonces, el conjunto

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_r \mid r > b\} = X \setminus \bigcap\{\overline{V}_r \mid r > b\}$$

también es un conjunto abierto. □

Corolario 1.2.12. *Un subconjunto A de un espacio normal X es un conjunto G_δ cerrado si y sólo si existe una función continua $f : X \to I$ tal que $A = f^{-1}(0)$.*

Demostración. El conjunto de un punto $\{0\} \subset I$ es un G_δ cerrado, entonces para toda función continua $f : X \to I$, la imagen inversa $f^{-1}(0)$ es un G_δ cerrado.
Ahora, sea A un G_δ cerrado en un espacio normal X. El complemento de A es un F_σ, es decir, $X \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, donde $\overline{F}_i = F_i$ para $i = 1, 2, \ldots$. Por el lema de Urysohn, para $i = 1, 2, \ldots$ existe una función continua $f_i : X \to I$ tal que $f_i(x) = 0$ para $x \in A$ y $f_i(x) = 1$ para $x \in F_i$, Por lo tanto la función

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x) \text{ para } x \in X$$

es continua de X en I. Para $x \in A$ claramente tenemos que $f(x) = 0$; y si $x \notin A$ existe una i tal que $x \in F_i$, y se tiene que $f(x) \geq \frac{1}{2^i} f_i(x) = \frac{1}{2^i} > 0$. Entonces $A = f^{-1}(0)$.

□

Corolario 1.2.13. *Un subconjunto A de un espacio normal X es un F_σ abierto si y sólo si existe una función continua $f : X \to I$ tal que $A = f^{-1}((0,1])$.*

Corolario 1.2.14. *Todo espacio normal es un espacio de Tychonoff.*

Definición 1.2.15. *Dos subconjuntos A y B de un espacio topológico X están completamente separados si existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in A$ y $f(x) = 1$ para $x \in B$ y decimos que f separa a los conjuntos A y B.*

Definición 1.2.16. *1). Un subconjunto A de un espacio X es nulo en X si existe una función continua $f : X \to I$ tal que $A = f^{-1}(0)$.*

2). $U \subset X$ es cocero en X si $X \setminus U$ es nulo en X.

El siguiente resultado nos permite ver que existen cierto tipo de bases características para los espacios de Tychonoff.

Teorema 1.2.17. *Un espacio topológico T_1 X es un espacio de Tychonoff si y sólo si la familia de todos los conjuntos cocero es una base para X.*

Demostración. Primero tomemos un espacio de Tychonoff X y sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los conjuntos cocero en X. Tomemos $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$, existen funciones continuas f_U y f_V tales que $f_U^{-1}(0) = X \setminus U$ y $f_V^{-1}(0) = X \setminus V$. Sea $x \in U \cap V$ y sea $F = X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, F es cerrado y $x \notin F$, entonces, como X es un espacio de Tychonoff, existe $f : X \to I$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) \subset \{0\}$, entonces $x \in U \cap V$ que es cocero. Ahora sea $x \in X$ y sea U un abierto que contiene a x, se tiene que, existe $f : X \to I$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \setminus U) \subset \{0\}$, por lo tanto $U \in \mathcal{B}$, con lo cual queda probado que $\mathcal{B}$ es una base.
Por otro lado, sea X un espacio T_1 y sea $\mathcal{B}$ una base formada por conjuntos cocero, tomemos un elemento $x \in X$, existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$, y por hipótesis, existe $f : X \to I$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \setminus U) \subset \{0\}$, por lo tanto, X es un espacio de Tychonoff. □

Definición 1.2.18. *Un espacio topológico X es perfectamente normal si X es normal y todo conjunto cerrado de X es un G_δ.*

1.3. Productos Topológicos

Para finalizar el primer capítulo, en esta sección introducimos el concepto de producto topológico, el cual, como se mencionó al principio es determinante en el estudio de los espacios universales, ya que la mayoría de los ejemplos que se presentarán, son productos topológicos.

El producto topológico es una operación de espacios topológicos, entendiendo estos últimos como métodos para construir nuevos espacios topológicos a partir de otros espacios dados. En la primera sección se menciona una operación, la de subespacio, pero no se le pone tanta atención ya que los resultados referentes a esta operación que utilizaremos son sencillos e incluso intuitivamente claros. Existe también la operación de suma de espacios topológicos, pero esta carece de importancia para el objetivo de este trabajo.

La operación del producto topológico en variedades fue expuesta por primera vez en el trabajo de Steiner de 1908. Frechet[8], en 1910 fue el primero en tratar los productos topológicos finitos. En la década de los años veintes del siglo pasado se realizó mucho trabajo en lo que se refiere al producto topológico finito y numerable, y fue Tychonoff[10] el que definió, en 1930, el producto topológico para una cantidad arbitraria de espacios topológicos.

Definición 1.3.1. *Supongamos que tenemos una familia* $\{X_s\}_{s\in S}$ *de espacios topológicos. Consideremos el producto cartesiano* $X = \prod_{s\in S} X_s$ *y la familia de funciones* $\{p_s\}_{s\in S}$*, donde* p_s *asigna al punto* $x = \{x_s\} \in \prod_{s\in S} X_s$ *su s-ésima coordenada* $x_s \in X_s$*. El conjunto* $X = \prod_{s\in S} X_s$ *con la topología generada por la familia de funciones* $\{p_s\}_{s\in S}$ *es llamado producto topológico de los espacios* $\{X_s\}_{s\in S}$ *y esta topología es llamada topología de Tychonoff en* $\prod_{s\in S} X_s$*; las funciones* $p_s : \prod_{s\in S} X_s \to X_s$ *son llamadas proyecciones de* $\prod_{s\in S} X_s$ *en* X_s*. Si todos los espacios en la familia* $\{X_s\}_{s\in S}$ *son iguales entre si, i.e., si* $X_s = X$ *para* $s \in S$*, entonces el producto topológico* $\prod_{s\in S} X_s$ *también se denota por* X^m*, donde* $m = |S|$*.*

El siguiente teorema nos permite obtener una base para el producto topológico a partir de las bases de los espacios que lo forman.

Teorema 1.3.2. *La familia de todos los conjuntos* $\prod_{s\in S} W_s$*, donde* W_s *es un abierto de* X_s *y* $W_s \neq X_s$ *sólo para un número finito de* $s \in S$*, es una base para el producto topológico* $\prod_{s\in S} X_s$*.*
Mas aún, si para cada $s \in S$ *se fija una base* $\mathcal{B}_s$ *para* X_s*, entonces la*

subfamilia formada por los $\prod_{s\in S} W_s$ *para los cuales* $W_s \in \mathcal{B}_s$ *siempre que* $W_s \neq X_s$*, también es una base.*

Demostración. Por 1.1.27, la familia de todos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{k} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$ donde $k \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ y W_{s_i} es abierto en X_{s_i}, es una base para $\prod_{s\in S} X_s$. Entonces, para probar la primera parte es suficiente ver que:

$$p_{s_0}^{-1}(W_{s_0}) = \prod_{s\in S} W_s, \text{ donde } W_s = X_s \text{ para } s \neq s_0$$

y que

$$\left(\prod_{s\in S} W_s\right) \cap \left(\prod_{s\in S} W'_s\right) = \prod_{s\in S}(W_s \cap W'_s).$$

La segunda parte es una consecuencia inmediata de la definición de base. □

Los siguientes tres teoremas son fundamentales, ya que muestran como ciertas propiedades de separabilidad se preservan bajo la operación del producto topológico.

Teorema 1.3.3. *Todo producto topológico de espacios* T_0 *es un espacio* T_0*.*

Demostración. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios T_0, y sean $x, y \in \prod_{s\in S} X_s$ con $x \neq y$. Existe $s \in S$ tal que $p_s(x) \neq p_s(y)$. Como X_s es un espacio T_0, supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe una vecindad $V_s \subset X_s$ de $p_s(x)$ que no contiene a $p_s(y)$, y $p_s^{-1}(V_s)$ es un abierto en $\prod_{s\in S} X_s$ que contiene a x y no contiene a y. □

Teorema 1.3.4. *El producto topológico de espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios de Hausdorff y sean $x, y \in \prod_{s\in S} X_s$. Existe $s \in S$ tal que $p_s(x) \neq p_s(y)$. Como X_s es un espacio de Hausdorff, existen $U_s, V_s \subset X_s$ tales que $p_s(x) \in U_s$, $p_s(y) \in V_s$ y $U_s \cap V_s = \emptyset$. Entonces $x \in p_s^{-1}(U_s)$, $y \in p_s^{-1}(V_s)$, y $p_s^{-1}(U_s) \cap p_s^{-1}(V_s) = \emptyset$. □

Teorema 1.3.5. *Todo producto topológico de espacios de Tychonoff es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios de Tychonoff, por el teorema 1.2.10 es suficiente probar que para todo $x = \{x_s\} \in \prod_{s\in S} X_s$ y toda vecindad V de x de la forma $p_{s_0}^{-1}(W_{s_0})$, donde W_{s_0} es un subconjunto abierto de X_{s_0}, existe una función continua $f : \prod_{s\in S} X_s \to I$ tal que

$f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para $y \in \prod_{s\in S} X_s \setminus V$. Como X_{s_0} es de Tyconoff, si tomamos la composición $f_0 p_{s_0}$, donde $f_0 : X_{s_0} \to I$ satisface $f_0(x_{s_0}) = 0$ y $f_0(X_{s_0}/W_{s_0}) \subset \{1\}$, vemos que $f_0 p_{s_o}(x) = f_0(x_{s_0}) = 0$ y si $y \in \prod_{s\in S} X_s \setminus V$, entonces $p_{s_0}(y) \in X_{s_0} \setminus W_{s_0}$ y por lo tanto $f_0 p_{s_0}(y) \in \{1\}$. □

A continuación, probaremos que si el peso de cada uno de los elementos de una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos es menor que un cardinal infinito m, entonces el producto topologico tendra peso menor que m siempre y cuando el conjunto S de índices tenga cardinalidad a los mas m.

Teorema 1.3.6. *Si $\omega(X_s) \leq m \geq \aleph_0$ para toda $s \in S$ y $|S| \leq m$, entonces $\omega(\prod_{s\in S} X_s) \leq m$.*

Demostración. La prueba se sigue del teorema 1.3.2, donde se toma como $\mathcal{B}_s$ cualquier base de X_s tal que $|\mathcal{B}_s| \leq m$. □

Definición 1.3.7. *Supongamos que tenemos un espacio topológico X, una familia $\{Y_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos y una familia de funciones continuas $\{f_s\}_{s\in S}$, donde $f_s : X \to Y_s$. La función que asigna a cada punto $x \in X$ el punto $\{f_s(x)\} \in \prod_{s\in S} Y_s$ es continua. Esta función es llamada diagonal de las funciones $\{f_s\}_{s\in S}$ y se denota como $\Delta_{s\in S} f_s$*

Definición 1.3.8. *Supongamos que tenemos un espacio topológico X, una familia $\{Y_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos y una familia de funciones continuas $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s\in S}$, donde $f_s : X \to Y_s$. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe una función $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$. Si para cada $x \in X$ y cada cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$ existe una función continua $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \notin \overline{f_s(F)}$, entonces decimos que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos y conjuntos cerrados.*

Lema 1.3.9. *Si la función continua $f : X \to Y$ es uno a uno y la familia cuyo único elemento es f separa puntos y conjuntos cerrados, entonces f es un encaje homeomorfo.*

Demostración. Como f es uno a uno y continua, basta ver que es una función cerrada sobre su imagen, para lo cuál es suficiente mostrar que para todo conjunto cerrado $F \subset X$ se tiene

$$f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}. \tag{7}$$

Si $y = f(x) \in f(X) \setminus \overline{f(F)}$, entonces $x \notin F$ y $y = f(x) \notin \overline{f(F)}$. Entonces el lado derecho de (7) está contenido en el lado izquierdo. La inclusión inversa es obvia. □

El siguiente teorema es de vital importancia, ya que establece una herramienta esencial para ver que un espacio topológico es universal y que resultará en la mayoría de los casos el homeomorfismo que encaja a un espacio dentro del espacio universal correspondiente.

Teorema 1.3.10 (Teorema diagonal)**.** *Si la familia* $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s\in S}$ *de funciones continuas, donde* $f_s : X \to Y_s$*, separa puntos, entonces la diagonal* $f = \Delta_{s\in S} f_s : X \to \prod_{s\in S} Y_s$ *es uno a uno. Si adicionalmente, la familia* $\mathcal{F}$ *separa puntos de cerrados, entonces* f *es un encaje homeomorfo.*

Demostración. Si la familia $\mathcal{F}$ separa puntos, entonces para cada pareja de puntos distintos $x, y \in X$ existe un $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$ lo que significa que f es una función uno a uno.
Si la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados, entonces la familia $\{f\}$ también lo hace, porque si $f(x) \in \overline{f(F)}$ para un $F = \overline{F} \subset X$, entonces $f_s(x) = p_s f(x) \in p_s(\overline{f(F)}) \subset \overline{p_s f(F))} = \overline{f_s(F)}$ para toda $s \in S$. Para completar la demostración basta aplicar el lema 1.3.9. $\square$

Capítulo 2

Espacios compactos, metrizables y cero-dimensionales

En este capítulo se presentan tres tipos distintos de espacios topológicos, exponiendo las definiciones referentes a estos y los resultados más importantes los cuales nos permitirán establecer las bases para determinar espacios universales para cada uno de estos tipos de espacios.

2.1. Espacios compactos

Los espacios compactos son una de las clases más importantes de espacios topológicos. El estudio de este tipo de espacios comenzó, de cierta manera, con la aparición del teorema de Borel, probado en 1894, y que establece que toda cubierta abierta numerable de un intervalo cerrado tiene una subcubierta finita, y con la observación de Lebesge de que lo mismo se cumple para cualquier cubierta abierta de un intervalo cerrado.

El concepto de compacidad fue introducido por Vietoris en 1921[11], y la definición que aquí utilizaremos fue dada por Alexandroff y Urysohn en 1923[?].

Los resultados de esta sección nos permitirán probar más adelante que el cubo de Tychonoff de peso $m \geq \aleph_0$, I^m, es universal para todos los espacios compactos de peso $\leq m$.

Definición 2.1.1. *1). Una cubierta para un conjunto X es una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{s\in S} A_s = X_s$.*

2). Si X es un espacio topológico, entonces $\{A_s\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta (cerrada) de X si todos los A_s son abiertos (cerrados).

3). Decimos que una cubierta $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in T}$ es un refinamiento de otra cubierta $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ del mismo conjunto X si para toda $t \in T$ existe una $s \in S$ tal que $B_t \subset A_s$ y en este caso decimos que $\mathcal{B}$ refina a $\mathcal{A}$.

4). Una cubierta $\mathcal{A}' = \{A'_s\}_{s\in S'}$ de X es una subcubierta de otra cubierta $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ de X si $S' \subset S$ y $A'_s = A_s$ para toda $s \in S'$.

Definición 2.1.2. *Un espacio topológico X se llama espacio compacto si X es un espacio de Hausdorff y para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta finita, es decir, para toda cubierta abierta $\{U_s\}_{s\in S}$ de X, existe un conjunto finito $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$ tal que $X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \ldots \cup U_{s_k}$.*

Definición 2.1.3. *Decimos que una familia $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene la propiedad de la intersección finita si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \ldots \cap F_{s_k} \neq \emptyset$ para todo conjunto finito $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$.*

Ejemplo 2.1.4. *Es fácil ver que la línea real $\mathbb{R}$ no es compacto, es suficiente considerar la cubierta $\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ la cual no tiene una subcubierta finita.*

Ejemplo 2.1.5. *Ahora veremos que todo intervalo cerrado $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ es un espacio compacto. Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta del espacio J y sea A el conjunto de todas las $x \in J$ tales que el intervalo $[a, x]$ está contenido en la unión de una cantidad finita de miembros de $\{U_s\}_{s\in S}$. Es suficiente mostrar que $J \setminus A$ es vacío.*
Supongamos que $J \setminus A \neq \emptyset$, y denotemos por x_0 a la cota inferior máxima de este conjunto; claramente $x_0 \in J \setminus A$ y $x_0 \notin A$. Sea $x_0 \in U_{s_0}$; como $x_0 > a$, existe una $y < x_0$ tal que $[y, x_0) \subset U_{s_0}$. Por la definición de x_0 tenemos que $y \in A$, así que $[a, y] \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i}$, para algunos $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$. Se sigue que $[a, x_0] \subset \bigcup_{i=0}^{k} U_{s_i}$, de ahí la contradicción. Por lo tanto todo intervalo $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ es compacto, en particular el intervalo I.

Teorema 2.1.6. *Un espacio de Hausdorff X es compacto si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

Demostración. Sean X un espacio compacto y $\mathcal{F} = \{F\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita y tal que la intersección $\bigcap_{s\in S} F_s$ es vacía. Consideremos los conjuntos abiertos $U_s = X \setminus F_s$; como

$$\bigcup_{s\in S} U_s = \bigcup_{s\in S}(X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in S} F_s = X,$$

la familia $\{U_s\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta de X. Como el espacio X es compacto, la cubierta $\{U_s\}_{s\in S}$ tiene una subcubierta finita $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}\}$. Entonces

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i},$$

lo cual implica que $\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \emptyset$ lo cual contradice el hecho de que la familia $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita, por lo tanto se sigue que $\bigcap_{s\in S} F_s \neq \emptyset$.

Ahora, sea X un espacio de Hausdorff tal que toda familia de subconjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta de X y consideremos los conjuntos cerrados $F_s = X \setminus U_s$, entonces

$$\bigcap_{s\in S} F_s = \bigcap_{s\in S}(X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in S} U_s = \emptyset,$$

lo cual implica que existen $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$ tales que $\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = \emptyset$ y por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} = X$ es una subcubierta finita de $\{U_s\}_{s\in S}$. De lo anterior se sigue que X es compacto. □

Teorema 2.1.7. *Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea X un espacio compacto y $F \subset X$ un subespacio cerrado de X. Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta de F que consiste en abiertos de X. Como F es cerrado, $(X \setminus F) \cup \bigcup_{s\in S} U_s$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ tales que $X = (X \setminus F) \cup \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i}$. Por lo tanto, $F = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i}$ y F es compacto. □

El siguiente teorema nos muestra que, con respecto a separabilidad, los subespacios compactos se comportan como puntos.

Teorema 2.1.8. *Si A es un subespacio compacto de un espacio regular X, entonces para todo conjunto cerrado B ajeno de A existen abiertos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*
Mas aún, si B es un subespacio compacto de X, entonces es suficiente suponer que X es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Como el espacio X es regular, para todo $x \in A$, existen abiertos $U_x, V_x \subset X$ tales que

$$x \in U_x, B \subset V_x \text{ y } U_x \cap V_x = \emptyset. \tag{1}$$

Claramente $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$, y como A es compacto, existen $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$. Por lo tanto $U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$ cumplen con lo requerido.

Para la segunda parte, sea $y \in B$, como X es un espacio de Hausdorff, para cada $x \in A$ existen U_x y V_x abiertos tales que $x \in U_x$, $y \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. De lo anterior se tiene que $A \subset \bigcup_{x \in X} U_x$ y por la compacidad de A, existen $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset A$, tales que $A \subset U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$ y $y \in V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$, donde U y V son abiertos y $U \cap V = \emptyset$. A partir de lo anterior, y por la compacidad de B, de la primera parte del teorema se obtiene el resultado. □

Teorema 2.1.9. *Todo espacio compacto es normal.*

Demostración. Este resultado se sigue directamente de 2.1.7 y 2.1.8. □

Teorema 2.1.10. *Si existe una función continua $f : X \to Y$ de un espacio compacto X sobre un espacio de Hausdorf Y, entonces Y es un espacio compacto.*
En otras palabras, la imagen continua de un espacio compacto es compacta.

Demostración. Sea $\{U_s\}_{s \in S}$ una cubierta abierta del espacio Y. La familia $\{f^{-1}(U_s)\}_{s \in S}$ es una cubierta abierta de X; entonces, existe un conjunto finito $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$ tal que

$$f^{-1}(U_{s_1}) \cup f^{-1}(U_{s_2}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{s_k}) = X,$$

y esto implica que $U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \ldots \cup U_{s_k} = Y$. □

Definición 2.1.11. *Supongamos que tenemos un conjunto X y una propiedad de conjuntos $\mathcal{P}$ aplicable a subconjuntos de X, decimos que $\mathcal{P}$ es una propiedad de carácter finito si el conjunto vacío tiene esta propiedad y un subconjunto*

$A \subset X$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si todos los subconjuntos finitos de A tienen esta propiedad.

A continuación mencionamos el lema de Teichmüller-Tukey, el cual es equivalente al axioma de elección, y en el cual se puede observar de manera intuitiva que es fácil de probar a partir del lema de Zorn. Este resultado será utilizado para probar el teorema de Tychonoff.

Teorema 2.1.12 (Lema de Teichmüller-Tukey). *Si $\mathcal{P}$ es una propiedad de caracter finito perteneciente a subconjuntos de un conjunto X, entonces todo conjunto $A \subset X$ con la propiedad $\mathcal{P}$ está contenido en un conjunto $B \subset X$ que tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y es maximal en la familia de subconjuntos de X que tienen la propiedad $\mathcal{P}$ ordenados por la relacion $\subset$.*

El siguiente teorema es básico para establecer un espacio universal para los espacios compactos y de la misma manera es uno de los resultados más importantes dentro de la topología general, ya que muestra que la compacidad es una propiedad que se preserva bajo la operación del producto topológico. Este resultado fue formulado por Tychonoff[14] en su trabajo de 1935 y la prueba que aquí presentamos fue hecha por Chevalley y O. Frink[15] en 1941.

Teorema 2.1.13 (Teorema de Tychonoff). *El producto topológico $\prod_{s\in S} X_s$, donde $X_s \neq \emptyset$ para $s \in S$, es compacto si y sólo si todos los espacios X_s son compactos.*

Demostración. Si el producto topológico $X = \prod_{s\in S} X_s$ es compacto y no vacío, entonces todos los X_s son espacios de Hausdorff por 1.3.4 y son compactos por el 2.1.10, ya que la proyección $p_s : X \to X_s$ es una función continua de X sobre X_s.
Consideremos una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de espacios compactos. Por 1.3.5, el producto topológico $X = \prod_{s\in S} X_s$ es un espacio de Hausdorff. Consideremos una familia $\mathcal{F}_0$ de subespacios cerrados de X que tienen la propiedad de la intersección finita. Como la propiedad de la intersección finita es una propiedad de caracter finito, se sigue del lema de Teichmüller-Tukey que la familia $\mathcal{F}_0$ está contenida en una familia maximal $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X que tiene la propiedad de la intersección finita.
Para probar que $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ es suficiente mostrar que existe un punto $x \in X$ tal que

$$x \in \overline{A} \text{ para toda } A \in \mathcal{F}. \tag{2}$$

Del hecho de que $\mathcal{F}$ sea maximal tenemos:

$$\text{si } A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \in \mathcal{F} \tag{3}$$

y

$$\text{si } A_0 \subset X \text{ y } A_0 \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } A \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A_0 \in \mathcal{F}. \qquad (4)$$

Como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita, la familia $\mathcal{F}_s$ definida como $\mathcal{F}_s = \{\overline{p_s(A)}\}_{A\in\mathcal{F}}$ de subconjuntos cerrados de X_s también tiene esta propiedad para toda $s \in S$. Entonces, para toda $s \in S$ existe un punto

$$x_s \in \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{p_s(A)} \subset X_s.$$

por ser cada X_s compacto. Sea W_s una vecindad de x_s en X_s. Por la fórmula anterior, $W_s \cap p_s(A) \neq \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{F}$, i.e.,

$$p_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \emptyset \text{ para toda } A \in \mathcal{F}.$$

Por (4) decimos que $p_s^{-1}(W_s) \in \mathcal{F}$, y por (3) se sigue que todos los miembros de la base canónica para X que contienen al punto $x = \{x_s\}$ pertenecen a la familia $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita, toda $A \in \mathcal{F}$ intersecta todos los miembros de la base canónica para X que contiene al punto x, y esto nos da (2). □

2.2. Espacios metrizables

Comenzamos esta sección definiendo la distancia entre dos puntos, es decir, una función que asignará a cada pareja de puntos en un conjunto un número real positivo y que cumple ciertas condiciones especificas. Esta distancia entre puntos nos permitirá definir la distancia entre un punto y un subconjunto, y diremos que un punto está cerca de un conjunto si su distancia a este es cero, y definiendo la cerradura de un conjunto como el conjunto de todos los puntos que están a distancia cero de este, podremos definir una topología, el espacio obtenido de esta manera será llamado espacio metrico.

En esta sección definiremos a los espacios metrizables, veremos como se comportan con respecto al producto topológico y finalmente introduciremos el concepto de espacio métrico completo.

La noción de espacio métrico fue introducida por Frechet[9] en su tesis de 1906 al igual que los espacios completos y completamente metrizables.

Definición 2.2.1. *Un espacio métrico es una pareja* (X, ρ) *que consiste en un conjunto* X *y una función* ρ *definida en* $X \times X$*, con valores reales no negativos tales que satisfacen las siguientes condiciones:*

1). $\rho(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

2). $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$.

3). $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ *para todo* $x, y, z \in X$.

Definición 2.2.2. *Sea* (X, ρ) *un espacio métrico,* x_0 *un punto de* X *y* r *un número positivo; el conjunto* $B(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) < r\}$ *se llama bola abierta con centro en* x_0 *y radio* r.

Observación 2.2.3. $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid r > 0, x \in X\}$ *define una colección de subconjuntos de* X *que generan una topología* $\mathcal{O}$ *en el conjunto* X.
La topología $\mathcal{O}$ *en el conjunto* X *se llama topología inducida por la métrica* ρ.

Definición 2.2.4. *Un espacio topológico* X *es metrizable si existe una métrica* ρ *en el conjunto* X *tal que la topología inducida por* ρ *coincide con la topología original en* X.

Definición 2.2.5. *Dos métricas* ρ_1, ρ_2 *en un conjunto* X *son equivalentes si inducen la misma topología en* X

Ejemplo 2.2.6. *Sea* X *un espacio métrico. La familia de todas las bolas de radio* $1/i$ *alrededor del punto* x_0*, donde* $i = 1, 2, \ldots,$ *es una base local para* $(X, \mathcal{O})$ *en el punto* x_0*, donde* $\mathcal{O}$ *es la topología inducida por la métrica de* X. *Esto implica que todo espacio topológico cuya topología es inducida por una métrica es primero numerable.*

Definición 2.2.7. *El diámetro de un conjunto* A *no vacío en un espacio métrico* (X, ρ) *se define como el supremo de las distancias entre puntos de* A *y es denotada por* $\delta(A)$*; puede ser finita o igual a infinita. Entonces*

$$\delta(A) = sup\{\rho(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in A\}.$$

También se define $\delta(\emptyset) = 0$.

Definición 2.2.8. *Se dice que un conjunto* A *es acotado si* $\delta(A) < \infty$.

Teorema 2.2.9. *Un punto* x *pertenece a la cerradura* $\overline{A}$ *de un conjunto* $A \subset X$ *con respecto a la topología inducida en* X *por una métrica* ρ *si y sólo si existe una sucesión de puntos de* A *que converge a* x.

Demostración. Primero supongamos que $x \in \overline{A}$. Para todo número natural i tomemos un punto $x_i \in A \cap B(x, 1/i)$; claramente tenemos que $\rho(x, x_i) < 1/i$ y $x = \text{lím}\, x_i$.
Por otro lado, si $x \notin \overline{A}$, entonces existe $r > 0$ tal que $A \cap B(x, r) = \emptyset$; entonces, se tiene que $\rho(x, x') \geq r$ para toda $x' \in A$ y por lo tanto no existe una sucesión de puntos de A que converga a x. □

Teorema 2.2.10. *Para todo espacio métrico (X, ρ) existe una métrica ρ_1 en el conjunto X que es equivalente a ρ y está acotada por 1.*

Demostración. Definamos

$$\rho_1(x, y) = \text{mín}\{1, \rho(x, y)\} \text{ para } x, y \in X$$

Primero veamos que ρ_1 es una métrica. Como ρ es una métrica, es inmediato que $\rho_1(x, y) > 0$ para $x \neq y$ y que $\rho_1(x, y) = 0$ para $x = y$. Si $\rho(x, y) \geq 1$ entonces $\rho_1(x, y) = 1 = \rho_1(y, x)$. Ahora sólo falta ver que se cumple la desigualdad del triángulo. Sean x, y, z puntos arbitrarios de X y sean $a = \rho(x, y)$, $b = \rho(y, z)$ y $c = \rho(x, z)$, tenemos que

$$\text{mín}\{2, 1 + a, 1 + b, a + b\} \geq \text{mín}\{1, c\},$$

y entonces

$$\rho_1(x, y) + \rho_1(y, z) = \text{mín}\{1, a\} + \text{mín}\{1, b\}$$
$$= \text{mín}\{2, 1 + a, 1 + b, a + b\} \geq \text{mín}\{1, c\} = \rho_1(x, z)$$

por lo tanto, ρ_1 es una métrica.
Ahora basta probar que las métricas ρ y ρ_1 son equivalentes. Sea $\{x_i\}$ una sucesión en (X, ρ) que converge a un punto $x \in X$. Tomemos un ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $k > n$ se tiene $\rho_1(x_k, x) = \rho(x_k, x) < \epsilon$, por lo tanto $\text{lím}\, x_i = x$ en (X, ρ_1), es decir, ρ y ρ_1 definen la misma convergencia, y por el teorema 2.2.9 ρ y ρ_1 definen los mismos conjuntos cerrados y en consecuencia inducen la misma topología en X. □

Teorema 2.2.11. *Una función f de un espacio X con la topología inducida por una métrica ρ en un espacio Y con la topología inducida por una métrica σ es continua si y sólo si para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(f(x), f(x')) < \epsilon$ siempre que $\rho(x, x') < \delta$.*

Demostración. Primero supongamos que f es continua y sean
$\mathcal{B}(x) = \{B(x, r) \mid r > 0\}$ y $\mathcal{D}(f(x)) = \{B(f(x), s) \mid s > 0\}$ bases locales para x y $f(x)$ respectivamente. Sea $V = B(f(x), \epsilon) \in \mathcal{D}(x)$, por la implicación 1)$\Rightarrow$ 4) del teorema 1.1.24 existe $\delta > 0$ tal que $U = B(x, \delta) \in \mathcal{B}(x)$

y $f(U) \subset V$, es decir, si para $x' \in X$ se tiene $\rho(x, x') < \delta$, entonces $\sigma(f(x), f(x')) < \epsilon$.
Para la segunda parte, sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$, por hipótesis, existe un $\delta > 0$ tal que si $x' \in B(x, \delta)$, entonces $f(x') \in B(f(x), \epsilon)$, y por la implicación 4)$\Rightarrow$ 1) del teorema 1.1.24, f es continua. □

Los siguientes resultados son importantes ya que gracias a ellos se ve que la distancia es una función continua.

Definición 2.2.12. *La distancia $\rho(x, A)$ de un punto x a un conjunto A en un espacio métrico (X, ρ) se define como*

$$\rho(x, A) = \mathit{Inf}\{\rho(x, a) \mid a \in A\}, \ \text{si } A \neq \emptyset, \ \text{y } \rho(x, \emptyset) = 1.$$

De manera similar, para una pareja A, B de conjuntos de un espacio métrico (X, ρ) definimos

$$\rho(A, B) = \mathit{Inf}\{\rho(a, b) \mid a \in A, b \in B\}, \ \text{si } A \neq \emptyset \neq B,$$

y

$$\rho(A, \emptyset) = 1 = \rho(\emptyset, B).$$

Teorema 2.2.13. *Para todo par de puntos x, y y un conjunto A en un espacio métrico (X, ρ) tenemos*

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y).$$

Demostración. Claramente, podemos suponer $A \neq \emptyset$. Para todo $a \in A$, se tiene

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a),$$

y esto implica, siendo a un punto arbitrario de A, que $\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A)$, i.e., que

$$\rho(x, A) - \rho(y, A) \leq \rho(x, y).$$

Por simetría, finalmente se tiene

$$\rho(y, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, y).$$

□

Teorema 2.2.14. *Para todo conjunto A en un espacio métrico (X, ρ) asignando a cada punto $x \in X$ la distancia $\rho(x, A)$ se define una función continua en X.*

Demostración. Sea f la función del espacio métrico (X, ρ) en $\mathbb{R}$ tal que f asigna a cada punto $x \in X$ la distancia $\rho(x, A)$. Sean $x, y \in X$. Por el teorema 2.2.13 tenemos

$$|f(x) - f(y)| = |\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y),$$

y por el teorema 2.2.11, f es continua.

□

Ahora veremos que todo espacio metrizable es un espacio de Tychonoff.

Ejemplo 2.2.15. *Sean X un espacio metrizable, $F \subset X$ un conjunto cerrado y $y \in X$ tal que $y \notin F$, sea ρ una métrica que induce la topología en X. Definamos una función $f : X \to I$ de la siguiente manera*

$$f(x) = \frac{\rho(x, y)}{\rho(x, y) + \rho(x, F)}, \qquad \forall x \in I$$

Obsérvese que $\rho(x, F) > 0$ para toda $x \notin F$. También notemos que $f(y) = 0$ y $f(x) = 1$ para toda $x \in F$. Por 2.2.14 se tiene que la función f es continua. Por lo tanto, todo espacio métrico es un espacio de Tychonoff, en particular, la línea real $\mathbb{R}$ y el intervalo I son espacios de Tychonoff.

El siguiente corolario nos muestra como se puede ver la cerradura de un conjunto en términos de distancia.

Corolario 2.2.16. *Para todo conjunto A en un espacio métrico (X, ρ) se tiene*

$$\overline{A} = \{x \mid \rho(x, A) = 0\}.$$

Demostración. Sea $x \in \overline{A}$, por el teorema 2.2.9 existe una sucesión $\{x_i\}$, $x_i \in A$, tal que $x = \lim x_i$. Sea $f(x) = \rho(x, A)$, por el teorema 2.2.14 f es continua, y por lo tanto, $f(x) = \lim f(x_i)$, o lo que es lo mismo, $\rho(x, A) = \lim \rho(x_i, A)$, y como cada $x_i \in A$, $\rho(x_i, A) = 0$ por lo cual $\{\rho(x_i, A)\}$, es la sucesión constante 0, y su límite es 0, por lo tanto $\rho(x, A) = 0$ y $\overline{A} \subset \{x \mid \rho(x, A) = 0\}$.
Para probar la otra contención, supongamos que existe $x_0 \in X \setminus \overline{A}$ tal que $\rho(x_0, A) = 0$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \cap \overline{A} = \emptyset$, entonces $\rho(x_0, a) > \epsilon$ para toda $a \in A$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\rho(x_0, A = 0$. □

Corolario 2.2.17. *Todo subconjunto cerrado de un espacio metrizable es nulo, y en particular es un conjunto G_δ.*

Demostración. Si $A = \overline{A}$, entonces sea $f(x) = \rho(x, A)$ y tenemos que $A = f^{-1}(0)$. $\square$

Corolario 2.2.18. *Todo espacio metrizable es normal.*

Demostración. Sea X un espacio metrizable, y sean A, B dos subconjuntos cerrados y ajenos de X. Tomemos una métrica ρ que induce la topología de X y la función

$$f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}.$$

Es claro que f es continua en X y $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$. $\square$

Al igual que en las secciones anteriores, a continuación se presenta un resultado que nos muestra como se preserva la metrizabilidad bajo la operación del producto topológico numerable para los espacios métricos compactos, el cual implicará la existencia de un espacio topológico universal con estas características.

Teorema 2.2.19. *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de espacios metrizables y sean ρ_i métricas que inducen la topología en X_i para cada $i \in \mathbb{N}$ acotadas por 1. La topología inducida en el conjunto $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ por la métrica definida por:*

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, y_i) \tag{5}$$

coincide con la topología del producto topológico de los espacios $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Demostración. Para $x = \{x_i\}, y = \{y_i\}$, claramente tenemos $\rho_i(x_i, y_i) < \epsilon$ siempre que $\rho(x, y) < \epsilon/2^i$, entonces, por 2.2.11, la proyección p_i de X en X_i es continua con respecto a la topología inducida en X por ρ. Se sigue de la definición de la topología de Tychonoff que la topología inducida por ρ es más fina que la topología del producto topológico en X.
Ahora, debemos mostrar que todo conjunto abierto $U \subset X$ con respecto a la topología inducida en X por ρ es también un abierto en la topología de Tychonoff. Tomemos un punto $x = \{x_i\} \in U$; existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \in U$. Es suficiente encontrar un entero positivo k y conjuntos abiertos $U_i \subset X_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, k$, tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} p_i^{-1}(U_i) \subset B(x, r) \subset U. \tag{6}$$

Sea k un entero positivo que satisface

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}r \tag{7}$$

y para $i = 1, 2, \ldots, k$ sea

$$U_i = B(x_i, r/2) = \{z \in X_i \mid \rho_i(x_i, z) < r/2\}.$$

Para cada $y = \{y_i\} \in \bigcap_{i=1}^{k} p_i^{-1}(U_i)$ tenemos $\rho_i(x_i, y_i) < r/2$ siempre que $i \leq k$, así que - por (5) y (7) -

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}\rho_i(x_i, y_i) + \sum_{i=1+k}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho_i(x_i, y_i) < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r,$$

lo que prueba (6). □

Corolario 2.2.20. *El cubo de Hilbert $I^{\aleph_0}$ es metrizable.*

Teorema 2.2.21. *Todo espacio compacto y metrizable es separable.*

Demostración. Sean X un espacio metrizable y ρ una métrica en X que induce la topología de X. Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos la familia $\{B(x, 1/i) \mid x \in X\}$. Esta familia claramente es una cubierta de X, y como X es compacto, podemos tomar un conjunto finito $C_i = \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i}\}, 1, n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B}_i = \{B(x_{i,j}, 1/i) \mid j \in \{1, \ldots, n_i\}\}$ es una cubierta finita de X. Ahora tomemos el conjunto $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ y veamos que D es denso en X. Sea $B(x, r)$ un elemento de la base canónica de X, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $1/i < r$, y como $\mathcal{B}_i$ es una cubierta de X, existe un $x_{i,j} \in C_i$ tal que $x \in B(x_{i,j}, 1/i)$ lo cual implica que $\rho(x, x_{i,j}) < 1/i < r$, y por lo tanto $x_{i,j} \in B(x, r)$, lo cual prueba que D es denso en X. □

Los resultados vistos hasta aquí con respecto a espacios métricos y metrizables nos permitirán obtener un espacio universal para los espacios métricos compactos. A continuacion introducimos el concepto de espacio métrico completo, el cual nos llevará a obtener un espacio universal para los espacios métricos numerables.

Definición 2.2.22. *Sean (X, ρ) un espacio métrico y $\{x_i\}$ una sucesión de puntos en X; decimos que $\{x_i\}$ es una sucesión de Cauchy en (X, ρ) si para toda $\epsilon > 0$ existe un número natural k tal que $\rho(x_i, x_k) \leq \epsilon$ siempre que $i \geq k$.*

Definición 2.2.23. *Un espacio métrico (X, ρ) es completo si toda sucesión de Cauchy en (X, ρ) converge a un punto en X; una métrica ρ en un conjunto X es completa si el espacio (X, ρ) es completo.*

Ejemplo 2.2.24. *La recta real $\mathbb{R}$ con la métrica natural es un espacio completo.*

Sea $\{x_i\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Existe un número natural k tal que $|x_i - x_k| \leq 1$ siempre que $i \geq k$, así que todos los términos de la sucesión $\{x_i\}$ a partir de x_k están contenidos en el intervalo cerrado $J = [x_k - 1, x_k + 1]$. Como el intervalo J es compacto, existe una subsucesión $\{x_{k_i}\}$ de la sucesión $\{x_i\}$ que converge a un punto $x \in J$.

Teorema 2.2.25 (Teorema de Cantor)**.** *Un espacio métrico (X, ρ) es completo si y sólo si para toda sucesión decreciente $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $\lim \delta(F_i) = 0$, la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ es no vacía.*

Demostración. Sea (X, ρ) un espacio métrico completo y $F_1, F_2, \ldots$ una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que

$$\lim \delta(F_i) = 0 \text{ y } F_{i+1} \subset F_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Tomemos un punto $x_i \in F_i$ para $i = 1, 2, \ldots$. Es claro que todos los términos de la suceción a partir de x_i están contenidos en el conjunto F_i, así que, por la primera parte de (8), $\{x_i\}$ es una sucesión de Cauchy y entonces converge a un punto $x \in X$. Como los conjuntos F_i son cerrados, tenemos $x \in F_i$ para $i = 1, 2, \ldots$; entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$.
Ahora, sea (X, ρ) un espacio métrico que satisface la condición del teorema y sea $\{x_i\}$ una sucesión de Cauchy en (X, ρ). Los conjuntos $F_i = \overline{\{x_i, x_{i+1}, \ldots\}}$, donde $i = 1, 2, \ldots$, son cerrados y satisfacen (8), entonces existe un punto $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$; finalmente vemos que $x = \lim x_i$. Por lo tanto el espacio (X, ρ) es completo. □

Teorema 2.2.26. *Un espacio métrico (X, ρ) es completo si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita y contiene un conjunto de diámetro menor que ϵ para toda $\epsilon > 0$, tiene intersección no vacía.*

Demostración. La suficiencia se sigue directamente del teorema de Cantor 2.2.25.
Ahora debemos mostrar que la condición se mantiene para todo espacio

completo (X, ρ). Concideremos una familia $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s \in S}$ de conjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita y que satisface que, para todo entero j, contiene un conjunto F_{s_j} tal que $\delta(F_{s_j}) < 1/j$. Es claro que la sucesión $F_1, F_2, \ldots$, donde $F_i = \bigcap_{j \leq i} F_{s_j}$, satisface la condición del teorema de Cantor 2.2.25, asi que existe un $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \{x\}$ Ahora, tomemos un $s_0 \in S$ arbitrario; sea $F'_i = F_{s_0} \cap F_i$ para $i = 1, 2, \ldots$ y obtenemos una sucesión F'_1, F'_2 que satisface la condición del teorema de Cantor. Como

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} F'_i = F_{s_0} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = F_{s_0} \cap \{x\},$$

tenemos que $x \in F_{s_0}$. Por lo tanto $x \in \bigcap_{s \in S} F_s$. □

Definición 2.2.27. *Sea X un espacio topológico, (Y, σ) un espacio métrico y $f : A \to Y$ una función continua definida en un subespacio denso A de X; decimos que la oscilación de la función f en un punto $x \in X$ es igual a cero si para toda $\epsilon > 0$ existe una vecindad U del punto x tal que $\delta(f(A \cap U)) < \epsilon$.*

Lema 2.2.28. *Si X es un espacio topológico, (Y, σ) es un espacio métrico completo y $f : A \to Y$ es una función continua definida en un conjunto denso A de X, entonces la función f se puede extender a una función continua $F : B \to Y$ definida en el conjunto B que consiste en todos los puntos de X en los cuales la oscilación de f es igual a cero.*

Demostración. Para toda $x \in B$ denotemos por $\mathcal{B}(x)$ la familia de todas las vecindades de x y consideremos la familia $\mathcal{V} = \{\overline{f(A \cap U)}\}_{U \in \mathcal{B}(x)}$ de subconjuntos cerrados de Y. La familia $\mathcal{V}$ tiene la propiedad de la intersección finita y para toda $\epsilon > 0$ $\mathcal{V}$ contiene un conjunto de diámetro menor que ϵ. Así que, por el teorema 2.2.26 la intersección $\bigcap_{U \in \mathcal{B}(x)} \overline{f(A \cap U)}$ es no vacía. Como el diámetro de la intersección es igual a cero, la intersección consta de un sólo punto $F(x)$. Obviamente, $F(x) = f(x)$ siempre que $x \in A$. Asignando a $x \in B$ el punto $F(x)$ definimos una función F de B en Y que es una extención de f; sólo basta probar que F es continua. Tomemos un $x \in B$ y una $\epsilon > 0$. De la definición de B se sigue que existe un $U \in \mathcal{B}(x)$ que satisface $\delta(\overline{f(A \cap U)}) < \epsilon$. Para toda $x' \in B \cap U$ tenemos $U \in \mathcal{B}(x')$ y entonces $F(x') \in \overline{f(A \cap U)}$; como $F(x) \in \overline{f(A \cap U)}$ tenemos $\sigma(F(x), F(x')) \leq \delta(\overline{f(A \cap U)}) < \epsilon$, lo que prueba que F es continua. □

El siguiente resultado nos ayudará a establecer la existencia de un espacio topológico universal para los espacios métricos numerables.

Teorema 2.2.29. *Para cualesquiera dos subespacios métricos densos numerables A, B de la recta real $\mathbb{R}$ existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(A) = B$.*

Demostración. Sean $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ y definamos de manera recursiva una función f de A en $\mathbb{R}$ como sigue; sea $f(a_1) = b_1$ y para toda i tomemos como $f(a_i)$ un elemento en B, con el menor índice posible tal que si $a_j < a_k$ entonces $f(a_j) < f(a_k)$ para todo $j, k \leq i$. Por la manera en que construimos f, queda claro que esta fucnión preserva el orden y es inyectiva. Ahora veamos que f es suprayectiva. Supongamos lo contrario, entonces sea k el mínimo índice tal que b_k no es imagen bajo f de ningún elemento de A. Sean $b_{k_1} = \max\{b_i \mid b_i < b_k \text{ e } i < k\}$ y $b_{k_2} = \{\min\{b_i \mid b_i > b_k \text{ e } i < k\}$. Sean a_{j_1} y a_{j_2} tales que $f(a_{j_1}) = b_{k_1}$ y $f(a_{j_2}) = b_{k_2}$. Como A es denso en $\mathbb{R}$, existe a_j tal que $a_{j_1} < a_j < a_{j_2}$ y $f(a_j)$ debe ser el elemento de B con el menor índice tal que $b_{k_1} < f(a_j) < b_{k_2}$, lo cual implica que $f(a_j)$ debe ser b_k, lo cual es una contradicción ya que supusimos que b_k no era imagen bajo f de ningún elemento de A.
Ahora veamos que f es una función continua. Sean $\mathcal{B}_A = \{(q, r) \mid q < r, q, r \in A\}$ y $\mathcal{B}_B = \{(q, r) \mid q < r, q, r \in B\}$ bases para $\mathbb{R}$, es claro que $\mathcal{B}_A$ y $\mathcal{B}_B$ generan la topología natural en $\mathbb{R}$, y sean $\mathcal{B}'_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{B}_A\}$ y $\mathcal{B}'_B = \{B \cap U \mid U \in \mathcal{B}_B\}$ bases para A y B respectivamente. Tomemos un abierto $V \in \mathcal{B}'_B$, entonces existe un elemento $U \in \mathcal{B}_B = (q, r)$ tal que $V = U \cap B$ y existen $x, y \in A$ tales que $q = f(x)$ y $r = f(y)$. Como f preserva el orden, se tiene que para toda $p \in B$ tal que $q < p < r$, existe $z \in A$ tal que $x < z < y$ y $p = f(z)$, por lo tanto, si $W = f^{-1}(V)$, $W = (x, y) \cap f^{-1}(U)$ es un abierto en A, por lo tanto f es continua. Análogamente vemos que la función inversa de f es continua, y por lo tanto f es un homeomorfismo de A en B.

Ahora, extenderemos f a un homeomorfismo F de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que al oscilación de f en x no es igual a cero, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda vecindad U de x, $\delta(f(A \cap U)) > \epsilon$. Por lo anterior, existe un intervalo (b_1, b_2) tal que $|b_1 - b_2| > \epsilon$ y $f(a_1) < b_1$ para todo $a_1 < x$ y $f(a_2) > b_2$ para todo $a_2 > b_2$, con $a_1, a_2 \in A$. De lo anterior se tiene que $f(a) \notin (b_1, b_2)$ para todo $a \in A$, ya que f preserva el orden, pero como B es denso en $\mathbb{R}$, existe un elemento b en B tal que $b_1 < b < b_2$, y como f es suprayectiva, debe existir $a_0 \in A$ tal que $f(a_0) = b$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, la oscilación de f en x es igual a cero para toda $x \in \mathbb{R}$. Por el lema 2.2.28, f se puede extender a un homeomorfismo F de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

□

Finalizamos esta sección exponiendo los resultados necesarios para presentar un espacio universal para todos los espacios métricos.

Definición 2.2.30. *Una familia* $\{A_s\}_{s\in S}$ *de subconjuntos de un espacio topológico* X *es llamada localmente finita si para todo punto* $x \in X$ *existe una vecindad* U *tal que el conjunto* $\{s \in S \mid U \cap A_s \neq \emptyset\}$ *es finito.*

Definición 2.2.31. *Una familia* $\{A_s\}_{s\in S}$ *de subconjuntos de un espacio topológico* X *se llama discreta si todo punto* $x \in X$ *tiene una vecindad que intersecta a lo más a un elemento de la familia* $\{A_s\}_{s\in S}$.

Observación 2.2.32. *Toda familia discreta, al igual que toda familia finita es localmente finita.*

Teorema 2.2.33. *Para toda familia localmente finita* $\{A_s\}_{s\in S}$ *se tiene la igualdad* $\overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \bigcup_{s\in S} \overline{A_s}$.

Demostración. Es claro que si $A \subset B$, entonces, $\overline{A} \subset \overline{B}$, se sigue que $\overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s\in S} A_s}$ para toda $s \in S$; entonces, se tiene que $\bigcup_{s\in S} \overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s\in S} A_s}$. Para probar la otra inclusión, veamos que, por ser locálmente finita la familia $\{A_s\}_{s\in S}$, para toda $x \in \overline{\bigcup_{s\in S} A_s}$ existe una vecindad U tal que el conjunto $S_0 = \{s \in S \mid U \cap A_s \neq \emptyset\}$ es finito. Por 1.1.15 se sigue que $x \notin \overline{\bigcup_{s\in S\setminus S_0} A_s}$; como

$$x \in \overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \overline{\bigcup_{s\in S_0} A_s} \cup \overline{\bigcup_{s\in s\setminus S_0} A_s}$$

tenemos que $x \in \overline{\bigcup_{s\in S_0} A_s} = \bigcup_{s\in S_0} \overline{A_s} \subset \bigcup_{s\in S} \overline{A_s}$.

□

Corolario 2.2.34. *Sea* $\mathcal{F}$ *una familia localmente finita y* $F = \bigcup \mathcal{F}$. *Si todos los miembros de* $\mathcal{F}$ *son cerrados, entonces* F *es un conjunto cerrado.*

Definición 2.2.35. *Supongamos que tenemos un espacio topológico* X, *una cubierta* $\{A_s\}_{s\in S}$ *del espacio* X *y una familia de funciones continuas* $\{f_s\}_{s\in S}$, *donde* $f_s : A_s \to Y$. *Decimos que las funciones* f_s *son compatibles si para toda pareja* s_1, s_2 *de elementos de* S *se tiene*

$$f_{s_1}|A_{s_1} \cap A_{s_2} = f_{s_2}|A_{s_1} \cap A_{s_2}$$

Dejando

$$f(x) = f_s(x) \text{ para } x \in A_s$$

definimos una función f *de* X *en* Y, *que es llamada la combinación de las funciones* $\{f_s\}_{s\in S}$ *y es denotada por el símbolo* $\bigtriangledown_{s\in S} f_s$

Teorema 2.2.36. *Si* $\{F_s\}_{s\in S}$ *es una cubierta cerrada locálmente finita de un espacio* X *y* $\{f_s\}_{s\in S}$*, donde* $f_s : F_s \to Y$*, es una familia de funciones continuas compatibles, entonces la combinación* $f = \bigtriangledown_{s\in S}$ *es una función continua de* X *en* Y*.*

Demostración. Para todo subconjunto cerrado F de Y tenemos

$$f^{-1}(F) = \bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(F).$$

El conjunto $f_s^{-1}(F)$ es cerrado en F_s, y por lo tanto en X. Como la familia $\{f^{-1}(F)\}_{s\in S}$ es locálmente finita, el corolario 2.2.34 implica que la imagen inversa $f^{-1}(F)$ es un cerrado en X.

□

Definición 2.2.37. *Una familia de subconjuntos de un espacio topológico es llamada* σ*-discreta (*σ*-localmente finita) si puede ser representada como la unión numerable de familias discretas (localmente finitas).*

Teorema 2.2.38 (Teorema de Stone)**.** *Toda cubierta abierta de un espacio metrizable tiene un refinamiento abierto que es* σ*-discreto y localmente finito.*

Demostración. Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta de un espacio metrizable X; tomemos una métrica ρ que induce la topología en X y una relación de buen orden $<$ en el conjunto S. Definamos de manera recursiva familias $\mathcal{V} = \{V_{s,i}\}_{s\in S}$ de subconjuntos de X de la siguiente manera

$$V_{s,i} = \bigcup B(c, 1/2^i),$$

en donde la unión es tomada sobre todos los puntos c que satisfacen las siguientes condiciones:

$$s \text{ es el elemento más pequeño de } S \text{ tal que } c \in U_s. \tag{9}$$

$$c \notin V_{t,j} \text{ para } j < i \text{ y } t \in S. \tag{10}$$

$$B(c, 3/2^i) \subset U_s. \tag{11}$$

Se sigue de la definición que los conjuntos $V_{s,i}$ son abiertos, y (11) implica que $V_{s,i} \subset U_s$. Ahora veamos que la unión $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ es un refinamiento abierto de la cubierta $\{U_s\}_{s\in S}$. Sea x un punto en X; tomemos el $s \in S$ más pequeño tal que $x \in U_s$, y un número natural i tal que $B(x, 3/2^i) \subset U_s$. Cláramente, se tiene que $x \in V_{t,j}$ para $j < i$ y $t \in S$ o $x \in V_{s,i}$. Entonces la

unión $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ es un refinamiento abierto de la cubierta $\{U_s\}_{s\in S}$.
Debemos probar que para toda i

$$\text{si } x_1 \in V_{s_1,i}, x_2 \in V_{s_2,i} \text{ y } s_1 \neq s_2, \text{ entonces } \rho(x_1,x_2) > 1/2^i, \tag{12}$$

y esto mostrará que las familias $\mathcal{V}_i$ son discretas, porque toda bola de radio $1/2^i$ intersecta a lo más un miembro de $\mathcal{V}_i$
Supongamos que $s_1 < s_2$. Por la definición de $V_{s_1,i}$ y $V_{s_2,i}$ existen puntos c_1, c_2 que satisfacen (9)-(11) tales que $x_k \in B(c_k, 1/2^i) \subset V_{s_k,i}$ para $k = 1,2$. De (11) se sigue que $B(c_1, 3/2^i) \subset U_{s_1}$ y de (9) vemos que $c_2 \notin U_{s_1}$, asi que $\rho(c_1,c_2) \geq 3/2^i$. Entonces,

$$\rho(x_1,x_2) \geq \rho(c_1,c_2) - \rho(c_1,x_1) - \rho(c_2,x_2) > 1/2^i,$$

lo que prueba (12).
Para concluir es suficiente mostrar que para toda $t \in S$ y para toda pareja k, j de numeros naturales

$$\text{Si } B(x,1/2^k) \subset V_{t,j}, \text{ entonces } B(x,1/2^{i+k}) \cap V_{s,i} = \emptyset \text{ para } i \geq j+k \text{ y } s \in S. \tag{13}$$

Como para toda $x \in X$ existen k, j y t tales que $B(x,1/2^k) \subset V_{t,j}$ y entonces la bola $B(x,1/2^{i+k})$ intersecta a lo mas $j+k-1$ elementos de $\mathcal{V}$.
Se sigue de (10) que los puntos c en la definición de $V_{s,i}$ no pertenecen a $V_{t,j}$ si $i \geq j+k$; como $B(x,1/2^k) \subset V_{t,j}$, se tiene que $\rho(x,c) \geq 1/2^k$ para toda c. Las desigualdades $j+k \geq k+1$ y $i \geq k+1$ implican que $B(x,1/2^{j+k}) \cap B(c,1/2^i) = \emptyset$, y esto prueba (13).

□

El siguiente teorema nos permite obtener una base característica para cada espacio metrizable, esta base será la que nos permitirá mostrar la existencia de un espacio universal para todos los espacios metrizables.

Teorema 2.2.39. *Todo espacio metrizable tiene una base σ-discreta.*

Demostración. Sea ρ cualquier métrica en un espacio metrizable X tal que ρ induce la métrica en X y sea $\mathcal{B}_i$ un refinamiento σ-discreto de la cubierta abierta de X que consiste de todas las bolas de radio $1/i$. Se puede verificar fácilmente que la familia σ-discreta $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ es una base para X. □

Corolario 2.2.40. *Todo espacio metrizable tiene una base σ-localmente finita.*

Demostración. Para cada cubierta $\mathcal{U}_i = \{B(x,1/i) \mid x \in X\}$ existe un refinamiento $\mathcal{B}_i$ que es localmente finito, por lo tanto, sea $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}$ es una base que es σ-localmente finita. □

2.3. Espacios cero-dimensionales

Los espacios cero-dimensionales se encuentran dentro de un tipo de espacios considerados altamente, o fuertemente disconexos. El nombre de cero-dimensionales hace referencia al concepto de dimensión de un espacio, concepto que no suele estudiarse en los cursos básicos de topología general. En teoría de las dimensiones uno suele definir, para todo espacio X no vacío, su dimensión, la cual puede ser un número real no negativo, o puede ser infinita. La dimensión de un espacio es, en cierta manera, una medida de su conexidad. El nombre de cero-dimensional se debe al hecho de que estos espacios tienen dimension igual a cero.

Esta sección introduce el concepto de espacio cero-dimensional, independiéntemente de las definiciones de teoría de las dimensiones, ya que el objetivo es, únicamente exponer este tipo de espacios y obtener los resultados que nos permitan presentar un espacio universal con respecto a estos espacios.

Definición 2.3.1. *Decimos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es hereditaria (hereditaria con respecto a subespacios cerrados, subespacios abiertos, etc.) si para cualquier espacio X que tiene la propiedad $\mathcal{P}$, todo subespacio (todo subespacio cerrado, subespacio abierto, etc.) de X también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

Definición 2.3.2. *Un espacio topológico es llamado cero-dimensional si X es un espacio T_1 no vacío y tiene una base que consiste en conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.*

Teorema 2.3.3. *Ser cero-dimensional es una propiedad hereditaria con respecto a subespacios no vacíos.*

Demostración. Sea X un espacio cero-dimensional, y sea $A \subset X$ un subespacio no vacío. Si tomamos un conjunto abierto y cerrado B en la base de X, por definición de la topología de subespacios, $A \cap B$ es abierto y cerrado en A, por lo tanto A tiene una base de conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. $\square$

El siguiente resultado, al igual que en secciones anteriores, muestra cómo la propiedad de ser cero-dimensional se preserva bajo la operación del producto topológico. Este resultado es primordial para establecer el espacio universal para los espacios cero-dimensionales.

Teorema 2.3.4. *El producto topológico $\prod_{s\in S} X_s$, donde $S \neq \emptyset$ y $X_s \neq \emptyset$ para $s \in S$, es cero-dimensional si y sólo si todos los espacios X_s son cero-dimensionales.*

Demostración. Cada uno de los espacios X_s es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{s\in S} X_s$, asi que, por el teorema 2.3.4, es suficiente mostrar que el producto topológico $\prod_{s\in S} X_s$ de espacios cero-dimensionales es cero-dimensional. Esto se sigue por el teorema 1.3.2 del hecho de que los conjuntos de la forma $\prod_{s\in S} W_s$, donde W_s es un subconjunto abierto y cerrado de X_s y el conjunto $\{s \in S \mid W_s \neq X_s\}$ es finito, constituye una base para $\prod_{s\in S} X_s$ de conjuntos a la vez abiertos y cerrados. $\square$

Capítulo 3

Espacios Universales

3.1.

Llegamos ahora a la parte final de este trabajo, y presentamos por fin algunos espacios universales.
Desde principios del siglo XX los espacios universales han jugado un papel muy importante en la teoría de las dimensiones así como en otras áreas de la topología general. La existencia de un objeto universal para una cierta clase de espacios nos permite reducir el estudio de espacios de esta clase al estudio de subespacios de un espacio topológico determinado.

Definición 3.1.1. *Decimos que un espacio topológico X es universal para todos los espacios con la propiedad topológica $\mathcal{P}$ si X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y todo espacio que tenga la propiedad $\mathcal{P}$ es homeomorfo a un subespacio de X.*

Definición 3.1.2. *Sea $(F, \mathcal{O})$ el espacio topológico donde $F = \{0, 1\}$ y $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$, i.e., la topología formada por el conjunto vacío, el conjunto $\{0\}$ y el total. Claramente F es un espacio T_0.*
El cubo de Alexandroff de peso $m \geq \aleph_0$ es el espacio F^m, es decir el producto topológico $\prod_{s \in S} F_s$, donde $F_s = F$ para todo $s \in S$ y $|S| = m$.

El siguiente resultado lo tenemos gracias al trabajo de Alexandroff[13] de 1936.

Teorema 3.1.3. *El cubo de Alexandroff F^m es universal para todos los espacios T_0 de peso $m \geq \aleph_0$.*

Demostración. Por el teorema 1.3.3 tenemos que F^m es un espacio T_0.
Sea X un espacio T_0 tal que $\omega(X) \leq m$ y tomemos una base $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s \in S}$ con $|S| \leq m$. Definamos la función $f_s : X \to \{0, 1\}$ como sigue:

$$f_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U_s, \\ 1 & \text{si } x \in X \setminus U_s. \end{cases}$$

Es fácil ver que la función anterior es continua, simplemente basta ver que $f_s^{-1}(\{0\}) = U_s$ y $f_s^{-1}(F) = X$.
Ahora veamos que la familia $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in S}$ separa puntos de cerrados. Sea $x \in X$ y $G \subset X$ un conjunto cerrado tal que $x \notin G$. Entonces existe $U_s \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_s \subset X \setminus G$, entonces $f_s(x) = 0$ y $f_s(G) \subset \{1\}$. De manera similar es fácil ver que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos. Sean $x, y \in X$, al ser X un espacio T_0, existe un elemento de la base U_s tal que, sin perdida de generalidad, $x \in U_s$ y $y \in X \setminus U_s$, por lo tanto $f_s(x) = 0$ y $f_s(y) = 1$. Por lo tanto, por el teorema diagonal 1.3.10, la diagonal $\Delta_{s \in S} f_s$ es un encaje homeomorfo de X en F^m. $\square$

A continuación presentamos un espacio universal para todos los espacios topológicos de peso m y cardinalidad menor o igual que 2^m.

Teorema 3.1.4. *Sea E el espacio topológico $E = \{0, 1, 2\}$ con la topología que consiste en el conjunto vacío, el conjunto $\{0\}$ y el total. El espacio E^m es universal para todos los espacios topológicos de peso $m \geq \aleph_0$ y cardinalidad $\leq 2^m$.*

Demostración. Sea X un espacio topológico de peso m y sean M_0, M_1 conjuntos de índices tales que:

1). $M_0, M_1 \subset m$.

2). $|M_0| = |M_1| = m$.

3). $M_0 \cup M_1 = m$.

4). $M_0 \cap M_1 = \emptyset$.

Tomemos una base $\mathcal{B}$ para X tal que $\mathcal{B} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in M_0}$. Para cada elemento U_α en la base de X definamos una función $g_\alpha : X \to E$ de la siguiente manera.

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U_\alpha, \\ 1 & \text{si } x \in X \setminus U_\alpha. \end{cases}$$

Sea $Z = \{f \in E^{M_1} \mid f(\alpha) \in \{1,2\}$ para todo $\alpha \in M_1\}$. Tenemos que $|Z| = 2^m$ y, como $|X| \leq 2^m$, existe una función $h : X \to Z$ inyectiva. Es claro que la topología inducida en Z es la indiscreta.
Como $g_\alpha^{-1}(\{0\}) = U_\alpha$ y $g_\alpha^{-1}(E) = X$, g_α es continua para toda $\alpha \in M_0$.
Para ver que h es continua, primero observemos que los abiertos canónicos en E^{M_1} son de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(\{0\})$ donde p_{α_i} es la proyección en la coordenada α_i con $\alpha_i \in M_1$ e $i \in \{1, 2, \ldots n \mid n \in \mathbb{N}\}$, por lo que los abiertos de $h(X)$ sólo pueden ser $h(X)$ y $\emptyset$ y como $h^{-1}(h(X)) = X$ y $h^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, h es continua.
Sea $\mathcal{F} = \{g_\alpha \mid \alpha \in M_0\} \cup \{h\}$ y sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como h es inyectiva, entonces $h(x) \neq h(y)$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ separa puntos.
Sea $x \in X$ y $F \subset X$ cerrado tal que $x \notin F$. Existe $\alpha \in M_0$ tal que $x \in U_\alpha$ y $U_\alpha \cap F = \emptyset$, entonces $g_\alpha(x) = 0$ y $g_\alpha(F) = 1$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados.
Por todo lo anterior, y por el teorema diagonal 1.3.10, la funcion $H = (\Delta_{\alpha \in M_0} g_\alpha)\Delta h : X \to E^{M_0} \times E^{M_1} = E^m$ es un encaje.

□

Definición 3.1.5. *El cubo de Tychonoff de peso $m \geq \aleph_0$ es el espacio I^m, i.e., el producto topológico $\prod_{s \in S} I_s$, donde $I_s = I$ para toda $s \in S$ y $|S| = m$. El cubo de Tychonoff $I^{\aleph_0}$ se llama cubo de Hilbert.*

Ahora presentamos un espacio universal para todos los espacios de Tychonoff, este resultado fue expuesto por Tychonoff en 1930[10].

Teorema 3.1.6. *El cubo de Tychonoff I^m es universal para todos los espacios de Tychonoff de peso $m \geq \aleph_0$.*

Demostración. Sabemos que el intervalo I es un espacio de Tychonoff, entonces por el teorema 1.3.5 el cubo I^m también es un espacio de Tychonoff. Por el teorema 1.3.6 se sigue que $\omega(I^m) \leq m$.
Ahora debemos mostrar que todo espacio de Tychonoff X de peso m es encajable en I^m. Como X es un espacio de Tychonoff, la familia de todos los conjuntos cocero es una base para X.
Por el teorema 1.1.19 se sigue que existe una base $\{U_s\}_{s \in S}$ para el espacio X que consiste en conjuntos cocero y tal que $|S| = m$. Para cada $s \in S$ consideremos una función continua $f_s : X \to I$ tal que $U_s = f_s^{-1}((0,1])$. Veamos ahora que la familia $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in S}$ separa puntos y conjuntos cerrados. Sea $x \in X$ y $F \subset X$ un conjunto cerrado tal que $x \notin F$, entonces existe un U_s en la base de X tal que $x \in U_s \subset X \setminus F$ y se tiene que $f_s(x) \subset f_s(U_s) = (0,1]$ y $f_s(F) \subset \{0\}$, por lo tanto, la familia $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in S}$ separa puntos de cer-

rados. Como X es un espacio T_1, se sigue del teorema diagonal 1.3.10 que la diagonal $\Delta_{s\in S} f_s$ es un encaje homeomorfo de X en I^m. □

Al igual que el resultado anterior, el siguiente se debe a Tychonoff en 1930[10] y establece, en particular, la compacidad de cualquier cubo I^m.

Teorema 3.1.7. *El cubo de Tychonoff I^m es universal para todos los espacios compactos de peso $m \geq \aleph_0$.*

Demostración. El espacio topológico I es compacto, entonces por 2.1.13 el cubo de Tychonoff es compacto. Ahora, sea X un espacio compacto de peso m, por 2.1.9 X es normal, y por 1.2.14 X es un espacio de Tychonoff, así que por 3.1.6 existe un encaje homeomorfo de X en I^m. □

La existencia de un espacio universal para los espacios metrizables compactos aparece gracias a los trabajos de Urysohn de 1924[16].

Teorema 3.1.8. *El cubo de Hilbert $I^{\aleph_0}$ es universal para todos los espacios compactos metrizables y para todos los espacios separables metrizables.*

Demostración. Por el corolario 2.2.20, el cubo de Hilbert es metrizable, por el teorema 3.1.7 es compacto, y por 2.2.21 es separable.
Sea X un espacio compacto metrizable, por el teorema 2.2.21 es separable, y por lo tanto segundo numerable, es decir $\omega(X) = \aleph_0$ y por 3.1.7, existe un encaje homeomorfo de X en $I^{\aleph_0}$. □

Definición 3.1.9. *Si denotamos el espacio discreto de dos puntos $D(2)$ como D y lo identificamos con el subespacio $\{0,1\}$ de la linea real, entonces definimos el cubo de Cantor de peso $m \geq \aleph_0$ como el espacio D^m, i.e., el producto topológico $\prod_{s\in S} D_s$, donde $D_s = D$ para toda $s \in S$ y $|S| = m$. El cubo de cantor $D^{\aleph_0}$ es llamado conjunto de Cantor.*

Continuamos esta sección presentando un espacio universal para los espacios cero-dimensionales, este resultado aparece en el trabajo de Vedenissoff[18] de 1939.

Teorema 3.1.10. *El cubo de Cantor D^m es universal para todos los espacios cero-dimensionales T_2 de peso $m \geq \aleph_0$.*

Demostración. Por el teorema 2.3.4 es suficiente probar que todo espacio cero-dimensional X de peso m es encajable en D^m.

Se sigue del teorema 1.1.19 que existe una base $\{U_s\}_{s\in S}$ para el espacio X que consiste de conjuntos abiertos y cerrados y tal que $|S| = m$. Para toda $s \in S$ defínase la función $f_s : X \to D$ como

$$f_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U_s \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus U_s \end{cases}$$

Como U_s es cerrado y abierto, entonces f_s es continua y por el teorema diagonal 1.3.10, la función $f = \Delta_{s\in S} f_s$ es un encaje homeomorfo de X en el cubo de Cantor D^m. $\square$

El siguiente espacio universal es el único que expondremos el cual no resulta ser producto topológico, este resultado aparece en el trabajo de Fréchet[8] de 1910.

Teorema 3.1.11. *El espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales es universal para todos los espacios topológicos numerables metrizables.*

Demostración. Sean X un espacio métrico numerable y ρ una métrica que induce la topología en X. Para cada $x \in X$, tenemos que la colección $B(x, \epsilon)$, con $0 < \epsilon < 1$ es una base local para x en X. Como X es numerable, para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $0 < \delta < \epsilon$ tal que $\mathrm{Fr}B(x, \delta) = \emptyset$, de lo contrario $|X| = 2^{\aleph_0}$. Por lo anterior, podemos construir una sucesión $\delta_1, \delta_2, \dots$, tal que $\delta_n > \delta_{n+1}$, $\delta_n \to 0$ y $\mathrm{Fr}B(x, \delta_n) = \emptyset$. Como cada $B(x, \delta_n)$ es cerrado y abierto y $\{B(x, \delta_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para x, se tiene que $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in X}\{B(x, \delta_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de X formada por conjuntos que son abiertos y cerrados y por lo tanto X es cero-dimensional.
Como X es cero-dimensional y segundo numerable, por el teorema 3.1.10, existe un encaje φ de X en el conjunto de Cantor $D^{\aleph_0}$. Por lo anterior, sea f la función dada por φ seguida de la inclusión, f es un encaje de X en $\mathbb{R}$. Sea $X' = f(X) \subset \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{Q} \cup X'$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}$, y por el teorema 2.2.29 se tiene que existe un homeomorfismo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(\mathbb{Q} \cup X') = \mathbb{Q}$, y por lo tanto $g \circ f$ es un encaje homeomorfo de X en $\mathbb{Q}$. $\square$

Definición 3.1.12. *Sea m un cardinal infinito, S un conjunto de cardinalidad m, e $I_s = I \times \{s\}$ para toda $s \in S$. Sea*

$$(x, s_1)E(y, s_2) \textit{ siempre que } x = 0 = y \textit{ o } x = y \textit{ y } s_1 = s_2$$

una relacion de equivalencia E en el conjunto $\bigcup_{s\in S} I_s$.
Es fácil ver que la formula

$$\rho([(x, s_1)], [(y, s_2)]) = \begin{cases} |x - y| & \textit{si } s_1 = s_2, \\ x + y & \textit{si } s_1 \neq s_2, \end{cases}$$

define una métrica en el conjunto de las clases de equivalencia de E. Este espacio será llamado el erizo de $m = |S|$ espinas y será denotado por $J(m)$. Es claro que para cada $s \in S$, la función j_s del intervalo I en $J(m)$ definida como $j_s(x) = [(x, s)]$ es un encaje homeomorfo. La familia de todas las bolas con radios racionales alrededor de los puntos de la forma $[(r, s)]$, donde r es un racional, es una base para $J(m)$; asi que $\omega(J(m)) \leq m$. Como el subespacio de $J(m)$ que consiste en todos los puntos de la forma $[(1, s)]$ es un espacio discreto de cardinalidad m, se sigue que $\omega(J(m)) = m$.

El erizo fue descubierto por Urysohn[17] en 1927. A continuacion veremos que el producto topológico del erizo es universal para los espacios metrizables. Este resultado apareció por primera vez en el trabajo de Kowalsky[20] de 1957, la prueba presentada aquí se debe a Swardson[19] en 1979.

Teorema 3.1.13. *El producto topológico $J(m)^{\aleph_0}$ de $\aleph_0$ copias del erizo $J(m)$ es universal para todos los espacios metrizables de peso $m \geq \aleph_0$.*

Demostración. Cláramente $J(m)^{\aleph_0}$ es un espacio metrizable de peso m. Sea X un espacio metrizable de peso $m \geq \aleph_0$. Por 2.2.39 existe una base $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$, donde $\mathcal{B}_i = \{U_s\}_{s \in S_i}$, es una familia discreta. Por el teorema 1.1.19 se puede asumir que el conjunto $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ tiene cardinalidad m; sin pérdida de generalidad se puede asumir también que el conjunto S coincide con el conjunto usado en la definicion 3.1.12 en la construcción del erizo $J(m)$.

Para cada natural i y cualquier $s \in S_i$, por el corolario 2.2.17, existe una función continua $f_s : X \to I$ tal que $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$. Como la familia $\{\overline{U}_s\}_{s \in S_i}$ es discreta, se sigue de 2.2.36 que

$$f_i(x) = j_s f_s(x) \text{ para } x \in \overline{U_s} \text{ y } f_i(x) = j_{s_0}(x) \text{ para } x \in X \setminus \bigcup_{s \in S_i} U_s$$

en donde s_0 es un elemento fijo de S, define una función continua $f_i : X \to J(m)$. Ahora veamos que la familia $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ separa puntos de cerrados. Sea $x \in X$ y $F \subset X$ un conjunto cerrado tales que $x \notin F$. Existe un elemento U_s en la base de X tal que $x \in U_s \subset X \setminus F$, sea S_i tal que $s \in S_i$, entonces tenemos que $f_i(x) \in f_i(U_s) = ((0, 1], s)$ y $f_i(F) \subset \{(0, s)\}$. Entonces, por el teorema diagonal, el espacio X es encajable en $J(m)^{\aleph_0}$. □

Ahora presentaremos otro espacio universal para todos los espacios metrizables.

Definición 3.1.14. *Sea H el conjunto de todas las suseciones infinitas $\{x_i\}$ de numeros reales que satisfacen la condición $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$. Ahora, veamos que la función*

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2} \text{ para } x = \{x_i\}, y = \{y_i\},$$

define una métrica en H.

Primero provaremos que ρ está bien definida, es decir, que la serie en la definición de ρ converge. En la prueba utilizaremos la desigualdad de Cauchy

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2},$$

la cual se cumple para todas las sucesiones infinitas $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ de números reales. Veamos que para todo par de puntos $x = \{x_1\}$, $y = \{y_i\}$ en H y todo entero positivo k tenemos

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{i=1}^{k} y_i^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2} + \sum_{i=1}^{k} y_i^2$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}\right)^2.$$

Como la última desigualdad se cumple para todo entero positivo k, la serie en la definición de ρ es convergente y $\rho(x,y)$ está bién definida.
Obviamente $\rho(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$ y $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ para todo $x, y \in H$.
Sean $x = \{x_i\}, y = \{y_i\}$ y $z = \{z_i\}$ puntos cualesquiera de H; sean

$$x^k = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots\},$$

$$y^k = \{y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots\},$$

$$z^k = \{z_1, z_2, \ldots, z_k, 0, 0, \ldots\}$$

y

$$a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i, c_i = x_i - z_i.$$

Por la desigualdad de Cauchy tenemos

$$[\rho(x^k, y^k)]^2 = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 = \sum_{i=1}^{k}(a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + \sum_{i=1}^{k} b_i^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} + \sum_{i=1}^{k} b_i^2$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}\right)^2 = [\rho(x^k, y^k) + \rho(y^k, z)]^2$$

Se sigue de la última desigualdad que para $k = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x^k, y^k) + \rho(y^k, z^k) \geq \rho(x^k, z^k),$$

Y eso implica que $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.
El espacio H es llamado el espacio de Hilbert . El conjunto de todas las sucesiones $\{x_i\}$ en donde todas las x_i son números racionales y de las cuales sólo para una cantidad finita son distintas de cero, es denso en H y numerable, así que el espacio de Hilbert es separable.

Definición 3.1.15. *Sea m un cardinal infinito y S un conjunto de cardinalidad m. Consideremos el conjunto de todas las funciones reales x definidas en S tales que $|\{s \in S \mid x_s \neq 0\}| \leq \aleph_0$ y $\sum_{s\in S} x_s^2 < \infty$, donde x_s denota el valor de la función x en s; la fórmula $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{s\in S}(x_s - y_s)^2}$ define una métrica en este conjunto. El espacio métrico obtenido de esta manera no depende (salvo isometrías) en la elección del conjunto S; es llamado el espacio de Hilbert de peso m y se denota por $H(m)$. Claramente, el espacio de Hilbert definido en 3.1.14 coincide con $H(\aleph_0)$.*

Ahora continuamos con el resultado referente a los espacios de Hilbert, el cual fue publicado por primera vez por Dowker[21] en su trabajo de 1947.

Teorema 3.1.16. *El espacio de Hilbert $H(m)$ es universal para todos los espacios metrizables de peso $m \geq \aleph_0$*

Demostración. Sea X un espacio metrizable tal que $\omega(X) \leq m$. Por los teoremas 1.1.19 y 2.2.39, X tiene una base de cardinalidad $\leq m$, $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$, donde $\mathcal{B}_i = \{U_{i,s}\}_{s\in S_i}$ es una familia localmente finita, $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ y $|S| = m$.
Por el teorema 2.2.17, todo cerrado en X es G_δ, por lo cual, todo abierto es F_σ, y se sigue de 1.2.12 y 1.2.13 que para cada pareja (i,s) existe una función continua $\varphi_{i,s} : X \to [0,1]$ con $\varphi_{i,s}^{-1}(0) = X \setminus U_{i,s}$. Como para cada i_o la familia $\{U_{i_0,s}\}_{s\in S_{i_0}}$ es localmente finita, cada punto de X tiene una vecindad que intersecta a lo más a una cantidad finita de conjuntos $U_{i_0,s}$ asi que $\sum_{s\in S_{i_0}} \varphi_{i_0,s}(x)$ es un número real y $\sum_{s\in S_{i_0}} \varphi_{i_0,s}$ es una función continua en X. Ahora mostraremos que la función f de X en $H(m)$, dada por las funciones coordenadas

$$f_{i,s}(x) = \frac{1}{i}\frac{\varphi_{i,s}(x)}{\sqrt{1+\sum_{s\in S_i}\varphi_{i,s}^2(x)}},$$

es un homeomorfismo sobre un subespacio de $H(m)$. Para verificar lo anterior seguiremos los siguientes pasos:

1). Para cada x, $\{f_{i,s}(x)\}$ es un punto de $H(m)$: Como para cada i_0 tenemos que $\varphi_{i_0,s}(x) = 0$ para toda $s \in S_{i_0}$ excepto por un número finito, se sigue que toda $f_{i,s}(x)$ es cero excepto por una cantidad numerable, y entonces

$$\sum_{i,s} f_{i,s}^2(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{s\in S_i} f_{i,s}^2(x) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} < \infty.$$

2). Cada $f_{i,s}$ es continua, ya que el denominador nunca es cero.

3). f es inyectiva: Si $x \neq y$, entonces existe un $U_{i,s}$ con $x \in U_{i,s}$ y $y \notin U_{i,s}$; entonces $\varphi_{i,s}(x) > 0$, $\varphi_{i,s}(y) = 0$, por lo tanto $f(x) \neq f(y)$.

4). f es una función cerrada de X sobre $f[X]$: Si $A \subset X$ es cerrado y $x \notin A$, entonces para alguna pareja (i_0, s_0) tenemos que $x \in U_{i_0,s_0} \subset X\setminus A$; como $\varphi_{i_0,s_0}(a) = 0$ para toda $a \in A$, mientras que $\varphi_{i_0,s_0}(x) = k > 0$, se tiene que $d(f(x), f(A)) \geq k \cdot 1/i_0$, con d la distancia en $H(m)$, así que $f(x) \notin \overline{f(A)}$.

5). f es continua. Sea $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$; tomemos i_0 tal que

$$\sum_{i>i_0}\frac{1}{i^2} < \frac{\epsilon^2}{4}$$

y sea W_{x_0} una vecindad que intersecta a lo más a una cantidad finita de conjuntos $U_{i,s}$ para $i \leq i_0$. Se sigue que entre todas las $f_{i,s}$ con el primer índice $i \leq i_0$, existen solo una cantidad finita, digamos N, que no son cero en W_{x_0}. Sea V_{x_0} una vecindad de x_0 tal que $V_{x_0} \subset W_{x_0}$ en la cual cada una de estas N funciones continuas satisfacen

$$|f_{i,s}(x) - f_{i,s}(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2N}};$$

entonces, para cualquier $x \in V_{x_0}$, tenemos

$$\sum_{i,s} \sum_{i \leq i_0} |f_{i,s}(x) - f_{i,s}(x_0)|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}$$

y

$$\sum_{i,s} \sum_{i > i_0} |f_{i,s}(x) - f_{i,s}(x_0)|^2 \leq 2 \cdot \sum_{i > i_0} \frac{1}{n^2} < \frac{\epsilon^2}{2},$$

lo que muestra que $f(V_{x_0}) \subset B(f(x_0), \epsilon)$, como se quería probar.

Por lo tanto, f es un homeomorfismo.

□

A continuación estableceremos qué condiciones debe cumplir un espacio X para que X^m sea universal para todos los espacios topológicos de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$.

Teorema 3.1.17. *Sea X un espacio topológico, el producto topológico X^m es universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$ si y sólo si X no es un espacio T_0 y contiene dos puntos x y y tales que existe un abierto que contiene a x y no a y mientras que todo abierto que contenga a y también contiene a x.*

Demostración. Primero supongamos que X^S, con m un cardinal tal que $m = |S|$, es universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$. Entonces X no puede ser un espacio T_0 ya que el producto de espacios T_0 es un espacio T_0 y los subespacios de espacios T_0 son T_0. Ahora, sean $E = \{a, b, c\}$ con la topología $\{E, \emptyset, \{a\}\}$ y $W \subset E$ con $W = \{a, b\}$ y la topologia inducida por E. Entonces el espacio X^m contiene una copia Y de W, es decir, $Y = \{q, r\}$ donde la topología inducida en Y es $\{\emptyset, Y, \{q\}\}$. Entonces existe un abierto A de X^m que contiene a q pero no contiene a r y además, todo conjunto abierto de X^m que contiene a r también contiene a q. Entonces

$$q \in p_{s_1}^{-1}(A_{s_1}) \cap p_{s_2}^{-1}(A_{s_2}) \cap \ldots \cap p_{s_n}^{-1}(A_{s_n}) \subset A$$

y

$$r \notin p_{s_1}^{-1}(A_{s_1}) \cap p_{s_2}^{-1}(A_{s_2}) \cap \ldots \cap p_{s_n}^{-1}(A_{s_n}),$$

en donde, para cada $s_i \in S$, p_{s_i} es la correspondiente proyección y A_{s_i} es un abierto en $X_{s_i} = X$. Es claro que, para alguna s_j, $r_{s_j} \notin A_{s_j}$ (donde r_{s_j} es la coordenada s_j de r) mientras que $q_{s_j} \in A_{s_j}$. Más aún, todo abierto de X que contiene a r_{s_j} debe también contener a q_{s_j}, ya que todo abierto de X^m que contiene a r también contiene a q.

Para finalizar la prueba, supongamos que X no es T_0 y contiene dos puntos x y y que cumplen la hipótesis. Como X no es T_0, contiene dos puntos a y b tales que $a \neq b$ pero ambos, a y b están contenidos en los mismos abiertos de X. Ahora, sea $Z = \{(a, y), (b, y), (a, x)\}$ y demosle a Z la topología inducida por $X \times X$. Sea A un subespacio abierto de X que contiene a x, pero no a y. Entonces $Z \cap (X \times A) = \{(a, x)\}$ es un abierto en Z. Ahora supongamos que V es cualquier abierto de $X \times X$ y $(a, y) \in Z \cap V$. Entonces

$$(a, y) \in Z \cap (A_1 \times A_2) \subset Z \cap V,$$

donde A_1 y A_2 son abiertos de X. Como a y b pertenecen a los mismos conjuntos abiertos de X, $(b, y) \in Z \cap V$. Más aún, $y \in A_2$ implica $x \in A_2$ así que $(a, x) \in Z \cap V$. De manera similar, $(b, y) \in Z \cap V$ implica que ambos (a, y) y (a, x) pertenecen a $Z \cap V$ también. Evidentemente la topología inducida en Z es $\{\emptyset, Z, \{(a, x)\}\}$. Esto significa que $X \times X$ contiene una copia de E, y E^m es un espacio universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$ como ya se vio en el teorema 3.1.4. De aquí es inmediato que X^m debe ser un espacio universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$. □

A partir del teorema anterior fácilmente obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.1.18. *Si X^m es un espacio universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$, entonces X debe tener al menos tres elementos.*

Demostración. Sea $X = \{a, b\}$, entonces, la única topología en X que no es T_0 es la topología indiscreta, por lo tanto X^m no puede ser universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$.

□

Corolario 3.1.19. *Salvo homeomorfismos hay exactamente dos espacios topológicos X y Y con exactamente tres puntos táles que su producto topológico X^m y Y^m es universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$ y cada uno de ellos tiene precisamente un subconjunto abierto propio no vacío. En un caso es un punto y en el otro una pareja de puntos.*

Demostración. Sea $E = \{a, b, c\}$. De acuerdo al teorema anterior, para que E^m sea universal para todos los espacios topológicos de peso m y cardinalidad $\leq 2^m$, E no puede ser T_0, lo cual sólo es posible si, salvo homeomorfismos, $\mathcal{O} = \{\{E\}, \emptyset\}$, $\mathcal{O}' = \{\{E\}, \{a\}, \emptyset\}$ o $\mathcal{O}'' = \{\{E\}, \{a, b\}, \emptyset\}$. Por otro lado la segunda condicion, contener dos puntos, x, y tales que existe un abierto que contiene a x y no a y, mientras que todo abierto que contenga a y también contiene a x, solo se cumple para $\mathcal{O}'$ y para $\mathcal{O}''$.

□

Probamos la segunda parte del teorema anterior mostrando que si el espacio X satisface ciertas condiciones entonces $X \times X$ contiene una copia de $(E, \mathcal{O}_1)$, donde $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, E, \{a\}\}$.Observamos también, del corolario 3.1.19 que $(E, \mathcal{O}_2)$ es un espacio universal, donde $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, E, \{a, b\}\}$. En base a lo anterior, cualquiera se podría ver tentado a intentar mostrar que si X satisface las condiciones del teorema, entonces X deberia contener una copia de $(E, \mathcal{O}_1)$ o de $(E, \mathcal{O}_2)$, pero como veremos en el ejemplo siguiente, esto no necesariamente es cierto.

Ejemplo 3.1.20. *Sea $V = \{a, b, c, d\}$ y $\mathcal{O}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$. Se sigue inmediátamente del teorema 3.1.17 que (V, O_3) es tal que V^m es un espacio universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$ y aplicando el mismo teorema podemos verificar que ningún subespacio propio W de $(V, \mathcal{O}_3)$ es tal que W^m es un espacio universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^{\aleph_0}$.*

A partir de lo visto anteriormente, en cierto sentido, podemos decir que $(E, \mathcal{O}_1)$, $(E, \mathcal{O}_2)$ y $(V, \mathcal{O}_3)$ son mínimos y tales que su producto topológico es un espacio universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$. Obviamente, cualquier espacio topológico que contenga una copia de uno de estos espacios tiene la propiedad de que su producto topológico es un espacio universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$. En el siguiente teorema mostramos que la suposición inversa es cierta también y este resultado es una caracterización un poco diferente de los espacios universales para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$.

Para un subespacio Y de un espacio topológico X, el símbolo $\mathcal{O}_Y$ denotará la topologia inducida en Y.

Teorema 3.1.21. *Un espacio topológico X es tal que su producto topológico X^m es universal para todos los espacios de peso $\leq m$ y cardinalidad $\leq 2^m$ si y sólo si contiene una copia de alguno de los espacios $(E, \mathcal{O}_1)$, $(E, \mathcal{O}_2)$ o $(V, \mathcal{O}_3)$.*

Demostración. Hemos discutido ya en los resultados anteriores el hecho de que la condición es suficiente, entonces sólo basta probar la necesidad. Por el teorema 3.1.17, X contiene dos puntos distintos a, b que pertenecen a los mismos conjuntos abiertos y tambien dos puntos c, d tales que algún abierto contiene a c y no a d, mientras que todo abierto que contiene a d también contiene a c. Ahora procederemos por casos.

Caso 1.

$$c = a \text{ o } c = b$$

Podemos suponer que $c = a$. Entonces $d \neq a, b$. Sean A un abierto que contiene a a pero no a d y $Y = \{a, b, d\}$. Entonces $Y \cap A = \{a, b\}$ es un abierto en Y y además es el único subconjunto propio abierto, ya que cualquier abierto que contenga a d también contiene a a, y por lo tanto a b. Entonces $\mathcal{O}_Y = \{Y, \emptyset, \{a, b\}\}$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es homeomorfo a $(E, \mathcal{O}_2)$.

Caso 2.

$$d = a \text{ o } d = b$$

Podemos suponer que $d = a$. Entonces $c \neq a, b$. Sean $Y = \{a, b, c\}$ y A un abierto de X que contiene a c pero no a $d = a$. Entonces $b \notin A$ y $A \cap Y = \{c\}$. Todo subconjunto abierto de X que contiene a a o a b debe contener al otro también y por lo tanto también a c, ya que $d = a$. En este caso $\mathcal{O}_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\}$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es homeomorfo a $(E, \mathcal{O}_1)$.

Caso 3.

$$c \neq a, b \text{ y } d \neq a, b.$$

En este caso a, b, c y d son todos distintos, y sea $Y = \{a, b, c, d\}$ con la topología inducida $\mathcal{O}_Y$. Se sigue que a y b están contenidos en el mismo subconjunto abierto de Y y que existe un abierto de Y que contiene a c pero no a d mientras que todo abierto que contiene a d también contiene a c. Ahora sean U el abierto mas pequeño de Y que contiene a a y a b, A el abierto de Y más pequeño que contiene a c y B el abierto de Y más pequeño que contiene a d. Existen tres posibilidades para U, dos para A y dos para B. Las posibilidades son las siguientes:

- (U1) $U = Y$
- (U2) $U = \{a, b, c\}$
- (U3) $U = \{a, b\}$
- (A1) $A = \{a, b, c\}$
- (A2) $A = \{c\}$
- (B1) $B = Y$
- (B2) $B = \{c, d\}$

Ahora (U1) es contradictoria con (A1) asi como (A1) con (B2). En la segunda consideración, por ejemplo, si $\{a, b, c\}, \{c, d\} \in \mathcal{O}_Y$ entonces $\{c\} \in \mathcal{O}_Y$, lo cual contradice el hecho de que $\{a, b, c\}$ es el abierto más pequeño que contiene a c. Ahora listamos las otras posibilidades y observamos que para cada una de estas, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, y entonces el espacio X, contiene un subespacio homeomorfo a alguno de $(E, \mathcal{O}_1), (E, \mathcal{O}_2)$ o $(V, \mathcal{O}_3)$. Expresamos el hecho de que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es homeomorfo a $(Z, \mathcal{O}_Z)$ simplemente escribiendo $(Y, \mathcal{O}_Y) \approx (Z, \mathcal{O}_Z)$.

- (U1), (A2) y (B1). Sea $Z = Y \setminus \{d\}$, entonces $(Z, \mathcal{O}_Z) \approx (E, \mathcal{O}_1)$.
- (U1), (A2) y (B2). Sea $Z = Y \setminus \{c\}$, entonces $(Z, \mathcal{O}_Z) \approx (E, \mathcal{O}_1)$.
- (U2), (A1) y (B1). Sea $Z = Y \setminus \{a\}$, entonces $(Z, \mathcal{O}_Z) \approx (E, \mathcal{O}_2)$.
- (U2), (A2) y (B1). Sea $Z = Y \setminus \{d\}$, entonces $(Z, \mathcal{O}_Z) \approx (E, \mathcal{O}_1)$.
- (U2), (A2) y (B2). Sea $Z = Y \setminus \{d\}$, entonces $(Z, \mathcal{O}_Z) \approx (E, \mathcal{O}_1)$.
- (U3), (A1) y (B1). Sea $Z = Y \setminus \{d\}$, entonces $(Z, \mathcal{O}_Z) \approx (E, \mathcal{O}_2)$.
- (U3), (A2) y (B1). Sea $Z = Y \setminus \{c\}$, entonces $(Z, \mathcal{O}_Z) \approx (E, \mathcal{O}_2)$.
- (U3), (A2) y (B2). Entonces $(Z, \mathcal{O}_Z) \approx (V, \mathcal{O}_3)$.

$\square$

Bibliografía

[1] Engelking R. *General topology*, Berlin: Heldermann, 1989.

[2] Dugundji J. *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. 1966.

[3] Willard S. *General topology*, Addison-Wesley publishing company, 1970.

[4] Nagata J. *Modern general topology*, North holland, 1985.

[5] Casarrubias F., Tamariz A. *Elementos de topología general.*

[6] Garcia-Máynez A., Tamariz A. *Topología general*, Editorial Porrua, 1988.

[7] Magill K. *Universal topological spaces*, American mathematical monthly, volumen 95, tomo 10, diciembre 1988.

[8] Fréchet, M., *Les dimensions d'un ensemble abstrait*, Math. Ann. 68, 1910, pp. 145-168.

[9] Fréchet, M., *Sur quelques points du calcul founctionnel*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo 22, 1906, pp.1-74.

[10] Tychonoff A., *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Ann. 102, 1930, pp.544-561.

[11] Vietoris, L., *Stetige Mengen*. Monatsh. für Math. und Phys. 31, 1921, pp.173-204.

[12] Alexandroff, P., Urysohn, P., *Sur les spaces topologiques compacts*, Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér, 1923, pp.5-8.

[13] Alexandroff, P., *Zur Theorie der topologischen Räume*, C.R. Acad. Sci. URSS 11, 1936, pp.55-58.

[14] Tychonoff, A., *Über einen Funktionenraum*, Math. Ann. 111, 1935, pp.762-766.

[15] Chevalley, C., Frink jr., O. *Bicompactness of Cartesian products*, Bull. Amer. Math. Soc. 47, 1941, pp. 612-614.r

[16] Urysohn, P., *Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume*, Math. Ann. 92, 1924, pp.275-293.

[17] Urysohn, P., *Sur un space métrique universel*, Bull. Sci. Math. 51, 1927, pp. 43-64 y 74-90.

[18] Vedenissoff, N., *Remarks on the dimensions of topological spaces*, Moscov. Gos. Univ. Uc. Zap. 30, 1939, pp. 131-140.

[19] Swardson, M.A., *A short proof of Kowalsky's hedgehog theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 75, 1979, p.188.

[20] Kowalsky, H.J., *Einbettung metrischer Räume*, Arch. der Math. 8, 1957, pp.336-339.

[21] Dowker, C.H.,*Mapping theorems for non-compact spaces*, Amer. J. Math. 69, 1947, pp.200-242.

Índice alfabético