



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

**ESTUDIO DE OPTIMIZACIÓN DE  
CIERRE CONVEXO RECTILÍNEO DE  
NUBES DE PUNTOS EN EL PLANO**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRA EN CIENCIAS**

**P R E S E N T A:**

**TZOLKIN GARDUÑO ALVARADO**

**DIRECTOR DE LA TESIS: DR. JORGE URRUTIA GALICIA**

**MÉXICO, D.F.**

**2011.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Carpe diem quam minimum credula postero.*



# Agradecimientos

Quiero agradecer al CONACyT por el apoyo económico que me brindó en estos dos años, a la UNAM por brindar tantas oportunidades a sus alumnos, al Dr. Jorge Urrutia Galicia por su apoyo académico, al Dr. Carlos Seara Ojea por sus asesorías, al Dr. Adalberto García Maynez y Cervantes por la oportunidad de aprender más y a mis compañeros Carlos Alegría y Areli Rosas por las largas tardes de reflexión.

También quiero agradecer a mi madre y a mi padre quienes, con su infinito amor, me han ayudado a crecer, a Laura Zaldivar quien me brindó una beca alimenticia y de lugar de trabajo y a mi Cheliki por enseñarme a tratar mejor a las personas.

Quiero agradecer a mis amiguitos queridos que han crecido conmigo, con quienes he reído hasta no poder respirar y con quienes enfrentaré las siguientes etapas de mi vida.

A Karolo por la increíble belleza de su ser.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Definiciones básicas</b>	<b>7</b>
2.1. Dominación . . . . .	7
2.2. Cierre convexo rectilíneo . . . . .	10
2.3. Cierre convexo rectilíneo no orientado . . . . .	12
2.4. Cierre convexo y cierre convexo rectilíneo . . . . .	14
2.5. Cálculo de maximales . . . . .	16
<b>3. Cómputo y análisis del <math>\mathcal{RCH}_\theta(P)</math></b>	<b>18</b>
3.1. Dinámica de maximales . . . . .	18
3.2. Traslapes . . . . .	21
3.3. Duración de un traslape . . . . .	22
3.4. Calculando el área . . . . .	24
<b>4. Cadenas de arcos</b>	<b>29</b>
4.1. Cadenas . . . . .	31
4.2. Intersecciones entre cadenas . . . . .	36
4.3. Número de traslapes . . . . .	38

<b>5. Algoritmo propuesto</b>	<b>40</b>
5.1. Generación de arcos . . . . .	40
5.2. Búsqueda de traslapes de escalones . . . . .	42
5.3. Cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima . . . . .	46



# Capítulo 1

## Introducción

Hay varias formas de definir la geometría computacional. En un sentido específico, se ocupa del cómputo de propiedades geométricas [9]. En un sentido amplio, se ocupa del diseño y análisis de algoritmos para resolver problemas geométricos. En un sentido más profundo, le podemos definir como el estudio de la complejidad computacional inherente a problemas geométricos. En este último sentido, presupone la determinación de las propiedades geométricas que son computables.

Uno de los problemas más conocidos en geometría computacional es el siguiente [4]. Decimos que  $P$  es una nube de puntos si  $P$  es un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^2$ .

*Sea  $P$  una nube de puntos. Encontrar el polígono convexo de área mínima que contenga a  $P$ .*

El polígono que se busca en el problema anterior es conocido como el cierre convexo de  $P$ ,  $\mathcal{CH}(P)$  por sus siglas en inglés, la figura 1.0.2 ilustra el  $\mathcal{CH}(P)$  para un  $P$  arbitrario. A partir del cálculo del  $\mathcal{CH}(P)$ , han surgido otros problemas cuyo planteamiento es semejante al anterior. Estos problemas piden calcular objetos geométricos que contengan a  $P$  en su interior y que minimicen algunos parámetros de los mismos, por ejemplo, la circunferencia de área mínima y el rectángulo de área mínima, [4], [10], [11].

En este trabajo, estudiaremos una variante interesante del cierre convexo, dígase el cierre convexo rectilíneo de  $P$ .

**Definición 1.0.1.** *A cada punto  $w$  del plano, le podemos asociar cuatro*

cuadrantes  $Q_1(w), \dots, Q_4(w)$  tales que  $Q_i(w)$  es la traslación de cada uno de los cuatro cuadrantes del plano por el vector  $w$ .

Decimos que un cuadrante  $Q_i(w)$  es libre de  $P$ , si  $Q_i(w)$  no contiene a ningún elemento de  $P$  en su interior. Véase figura 1.0.1.

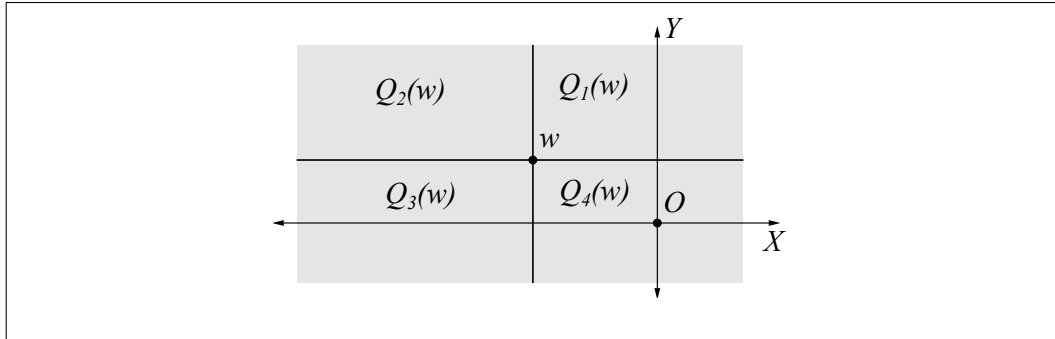


Figura 1.0.1: Los cuatro cuadrantes de  $w$ .

**Definición 1.0.2.** El cierre convexo rectilíneo de un conjunto  $P$  de puntos en el plano,  $\mathcal{RCH}(P)$ , se define en la siguiente expresión, [2].

$$\mathcal{RCH}(P) := \mathbb{R}^2 - \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$$

$$\mathcal{Q} = \{Q : Q = Q_i(w) \text{ es libre de } P, i \in \{1, 2, 3, 4\}, w \in \mathbb{R}^2\}$$

El  $\mathcal{RCH}(P)$  se ilustra en la figura 1.0.2.

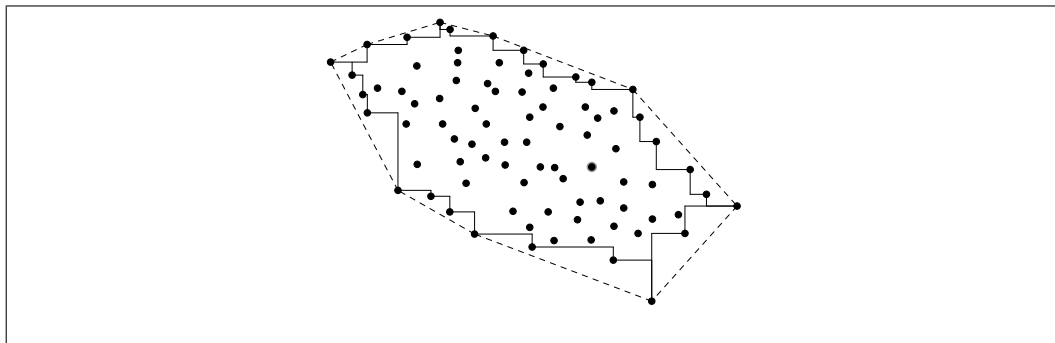


Figura 1.0.2: El  $\mathcal{CH}(P)$  en línea punteada y el  $\mathcal{RCH}(P)$  en línea continua.

En la figura 1.0.3 se muestra el  $\mathcal{RCH}(P)$  en dos sistemas coordenados diferentes, el estándar para  $\mathbb{R}^2$  y una rotación del mismo respecto del origen. Observemos que el  $\mathcal{CH}(P)$  mantiene su forma en ambos sistemas coordenados, mientras que  $\mathcal{RCH}(P)$  sí ha cambiado.

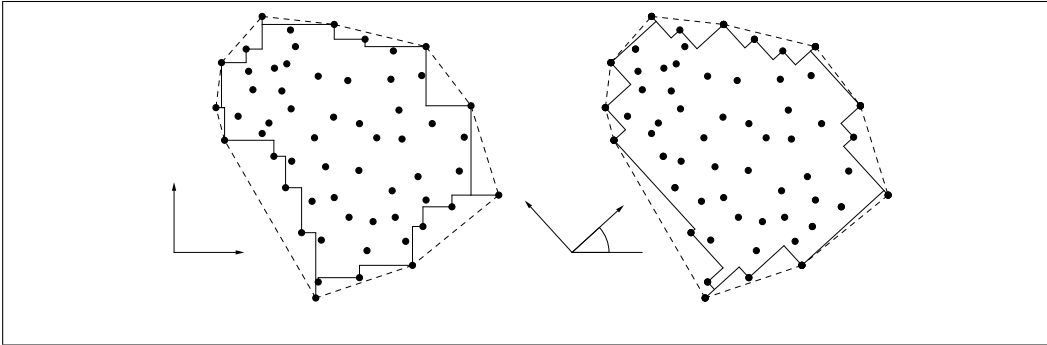


Figura 1.0.3: El  $\mathcal{RCH}(P)$  en dos sistemas coordenados distintos, siendo uno la rotación del otro.

A pesar de que todo vértice de  $\mathcal{CH}(P)$  es también vértice de  $\mathcal{RCH}(P)$ , [8], y que el  $\mathcal{RCH}(P) \subset \mathcal{CH}(P)$  bajo toda rotación, tenemos que ambos objetos geométricos son muy diferentes. Claramente, el  $\mathcal{RCH}(P)$  no es convexo, mientras que  $\mathcal{CH}(P)$  sí lo es. Además, el  $\mathcal{RCH}(P)$  no necesariamente es conexo, mientras que el  $\mathcal{CH}(P)$  siempre lo es, véase figura 1.0.4.

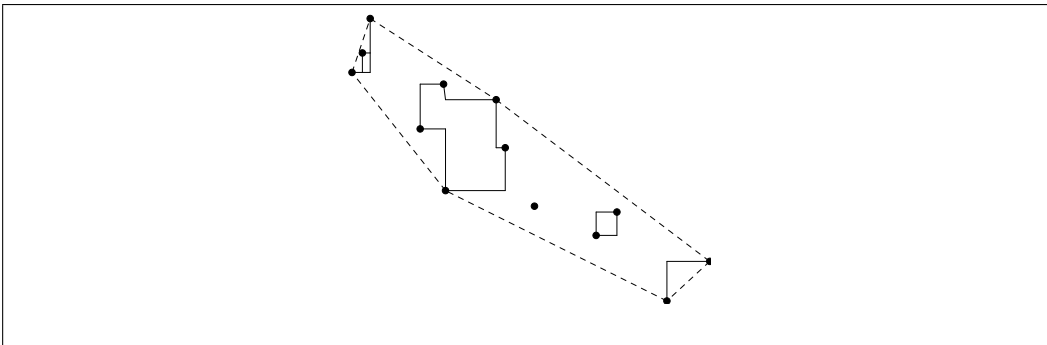


Figura 1.0.4: El  $\mathcal{RCH}(P)$  no es conexo.

Dado que la forma de  $\mathcal{RCH}(P)$  cambia respecto del sistema coordenado, se tiene que el área también lo hace. Por ejemplo en la figura 1.0.3 el área de los dos  $\mathcal{RCH}(P)$  es diferente a pesar de que  $P$  no cambia. El punto central de este trabajo es el de encontrar el ángulo de rotación del sistema coordenado que genera el área mínima del  $\mathcal{RCH}(P)$ .

Varios autores se han dedicado a investigar la complejidad de calcular el  $\mathcal{RCH}(P)$ . En [7] se hace una recopilación de definiciones del  $\mathcal{RCH}(P)$  y se prueba una cota de  $\Omega(n \log n)$ , en [6] se ofrece un algoritmo para calcular el  $\mathcal{RCH}(P)$  en  $O(n \log n)$ . En [2] se resuelve el problema de encontrar el ángulo de rotación del sistema coordenado que genera el  $\mathcal{RCH}(P)$  de área mínima en tiempo cuadrático. Por último, en [1] se ofrece un algoritmo para encontrar los vértices de  $\mathcal{RCH}(P)$  para cada ángulo de rotación del sistema coordenado en el intervalo  $[0, 2\pi)$ .

En este trabajo daremos un algoritmo de complejidad  $O(n \log n)$ , mejorando el resultado en [2]. El método usado es semejante al usado en [2].

El contenido de este trabajo esta organizado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se exhibe la compatibilidad de este trabajo con trabajos anteriores y se dan algunas propiedades geométricas del cierre convexo rectilíneo. En el tercer capítulo se muestran las fórmulas para calcular el área del cierre convexo rectilíneo. En el capítulo 4 se define una cadena de arcos y se prueban algunas propiedades de ella. Por último, en el capítulo 5 se muestra una forma de calcular la orientación para la cual el cierre convexo rectilíneo tiene área mínima en tiempo  $O(n \log n)$ .

Cabe aclarar que este trabajo se realizó en conjunto con el Ing. Carlos Alegría Galicia del programa de Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación UNAM, su tesis de maestría está estrechamente ligada al problema principal de este trabajo.

# Capítulo 2

## Definiciones básicas

En este capítulo veremos el problema original que inspiró el estudio del cierre convexo rectilíneo. El tema principal de este trabajo está planteado en el plano, de modo que asumiremos que todos los objetos geométricos a los que se haga referencia posteriormente están en el plano. En adelante, llamaremos  $P$  a un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.1. Dominación

Sea  $T$  un conjunto y  $*$  un operador binario en  $T$ . Decimos que  $*$  es un orden parcial en  $T$  si se cumplen los siguientes tres enunciados.

- $t * t$ . (Reflexividad)
- Si  $t * s$  y  $s * t$ , entonces  $s = t$ . (Antisimetría)
- Si  $s * t$  y  $t * u$ , entonces  $s * u$ . (Transitividad)

Un ejemplo de orden parcial es la dominación,  $\succ$ , en  $P$ , denotada por  $(P, \succ)$ .

**Definición 2.1.1.** Sean  $p = (a, b)$  y  $q = (c, d)$  en  $P$ . Decimos que  $p$  domina a  $q$ ,  $p \succ q$ , si y sólo si  $a \geq c$  y  $b \geq d$ . Ver figura 2.1.1.

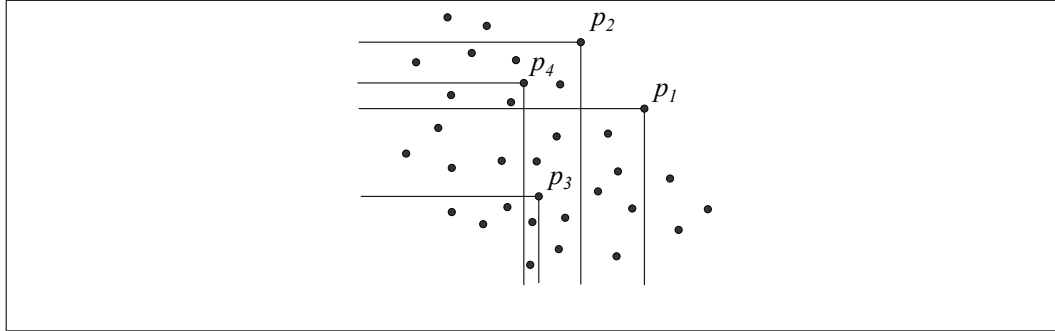


Figura 2.1.1: Cada  $p_i$  domina a los puntos dentro de su cuña correspondiente. Los puntos  $p_1$  y  $p_2$  son  $\succ$ -maximales.

Dado que  $P$  es un conjunto finito de puntos, la relación de dominación tiene elementos maximales en  $P$ . La figura 2.2.1 ilustra la manera en la que se ven algunos elementos maximales de  $P$ . A los puntos de  $P$  que son maximales respecto a dominación les llamaremos  $\succ$ -maximales. Veremos ahora algunas propiedades que cumplen los puntos  $\succ$ -maximales de  $P$ .

Notemos que, si  $p$  es  $\succ$ -maximal en  $P$ , entonces  $Q_1(p)$  es libre de  $P$ . De manera recíproca, si  $Q_1(p)$  es libre de  $P$ , entonces  $p$  es  $\succ$ -maximal. Esta propiedad nos será de gran utilidad en el resto del capítulo.

Los vértices del  $\mathcal{CH}(P)$  guardan una estrecha relación con los puntos  $\succ$ -maximales de  $P$ . El siguiente lema muestra dicha relación.

**Lema 2.1.2.** Sean  $r = (e, f)$  y  $s = (g, h)$  en  $P$  tales que tienen la ordenada y la abscisa máximas en  $P$  respectivamente. Todo vértice  $p = (a, b)$  de  $\mathcal{CH}(P)$  tal que  $h \leq b \leq f$  y  $e \leq a \leq g$  es  $\succ$ -maximal.

*Demostración.* Si  $p = (a, b)$  es tal que  $h \leq b \leq f$  y  $e \leq a \leq g$ , entonces una línea soporte,  $l$ , de  $\mathcal{CH}(P)$  en  $p$  tiene pendiente negativa. Además  $\mathcal{CH}(P)$  está por debajo de  $l$ . Así que el cuadrante  $Q_1(p)$  es libre de  $P$ . Luego  $p$  es  $\succ$ -maximal.

□

En el plano existen cuatro relaciones de dominación. Estas relaciones están asociadas a cada uno de los cuadrantes de  $\mathbb{R}^2$ . La definición 2.1.1 es la asociada al primer cuadrante,  $\succ_1$ . Las otras tres se obtienen por medio de la rotación del sistema coordenado.

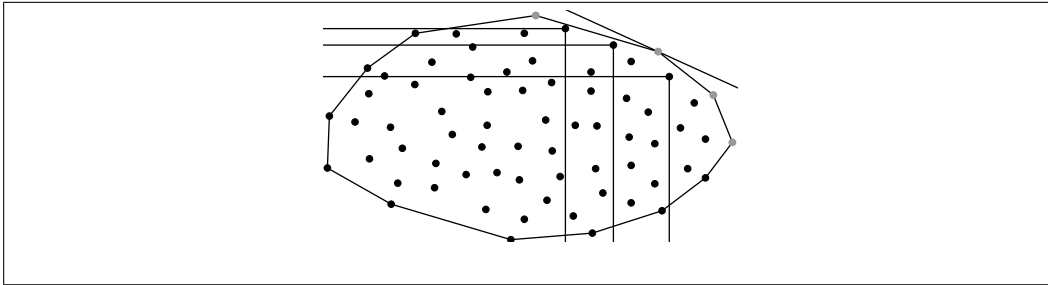


Figura 2.1.2: Los vértices del  $\mathcal{CH}(P)$  que son  $\succ$ -maximales en gris. Los puntos  $\succ$ -maximales que no pertenecen a  $\mathcal{CH}(P)$  dominan a todos los puntos dentro de su cuña.

Rotemos el sistema coordenado  $\frac{\pi}{2}$  respecto del origen. A la relación  $\succ$  en este sistema coordenado le llamaremos  $\succ_2$ . Ver figura 2.1.3. La relación  $\succ_3$  está dada por  $\succ$  en un sistema coordenado que ha sido rotado  $\pi$  respecto del origen. El orden  $\succ_4$  está determinado por  $\succ$  en un sistema coordenado que ha sido rotado  $\frac{3\pi}{2}$ . En la figura 2.1.3 se representan las cuatro relaciones de dominación.

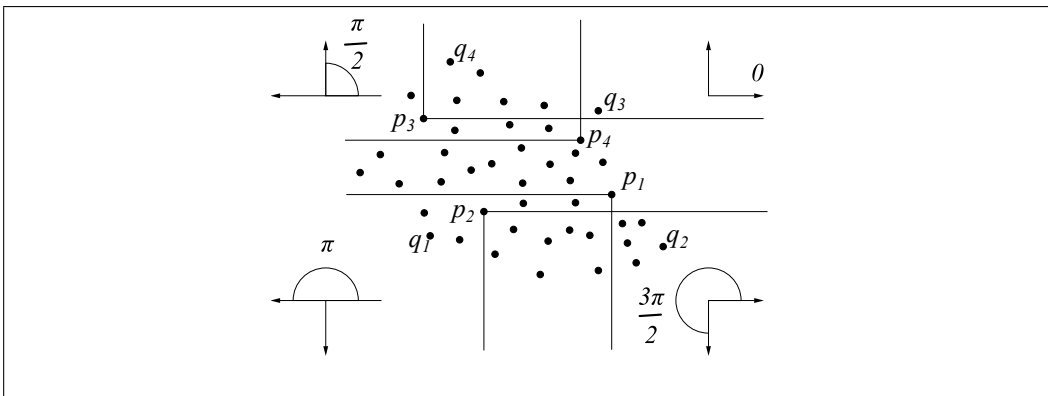


Figura 2.1.3: Las cuatro relaciones de dominación,  $p_i \succ_i q_i$ .

Claramente, cada uno de los órdenes  $\succ_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , tiene las mismas propiedades que  $\succ$ . Nos gustaría enfatizar que los vértices de  $\mathcal{CH}(P)$  son  $\succ_i$ -maximales para alguna  $i$ . Probaremos esto en el siguiente lema <sup>1</sup>.

**Lema 2.1.3.** *Todo vértice  $p$  de  $\mathcal{CH}(P)$  es  $\succ_i$ -maximal para alguna  $i = 1, 2, 3, 4$ .*

<sup>1</sup> Se puede encontrar una prueba alterna de este Lema en [8]

*Demostración.* La línea soporte de  $\mathcal{CH}(P)$  en  $p$  tiene pendiente positiva o negativa. En el primer caso, se tiene que  $Q_2(p)$  o  $Q_4(p)$  libres de  $P$ . Luego entonces,  $p$  es  $\succ_4$ -maximal o  $\succ_2$ -maximal, respectivamente. En el segundo caso, se tiene que  $Q_1(p)$  o  $Q_3(p)$  son libres de  $P$ . Se sigue que  $p$  es  $\succ_1$ -maximal o  $\succ_3$ -maximal respectivamente.

□

Cabe mencionar que el recíproco del lema anterior no es verdad. De hecho, el número de puntos  $\succ_i$ -maximales de  $P$  es mayor o igual al número de vértices  $\mathcal{CH}(P)$ . Ver figura 2.1.2.

## 2.2. Cierre convexo rectilíneo

El problema del cálculo de los puntos  $\succ_i$ -maximales de  $P$  data de la década de los setentas y ha sido estudiado en varios artículos. Este problema dio origen al de encontrar el cierre convexo rectilíneo de  $P$ . Existen varias definiciones de cierre convexo rectilíneo, las cuales se han recopilado en [7], este artículo data de principios de los 80s. Sin embargo, las definiciones de dicho objeto geométrico se han diversificado.

La primera definición que daremos es la propuesta por C. Seara en un trabajo no publicado aún, seguida de otra en [2]. El lector puede recurrir a [7] y a [6] en donde puede encontrar más definiciones del  $\mathcal{RCH}(P)$ .

Sea  $M = \{p : p \text{ es } \succ_i\text{-maximal, para alguna } i = 1, 2, 3, 4\}$ , ordenaremos los elementos de  $M$ . Tomaremos el punto con la ordenada mayor en  $M$  y le llamaremos  $p_1$ , continuaremos ordenando los elementos de  $M$  en sentido de las manecillas del reloj, ver figura 2.2.1

### Definición 2.2.1. (Escalera)

Un escalón,  $s(j)$ , es el área del triángulo determinado por los puntos  $p_j$ ,  $p_{j+1}$  y  $v_j = (x_j, y_{j+1})$ . Al punto  $v_j$  le llamaremos el ápice del escalón  $s(j)$ .

Tomemos los puntos  $\succ_i$ -maximales de  $P$ , la  $i$ -escalera de  $P$ ,  $\mathcal{S}^i(P)$ , es el conjunto de segmentos  $\overline{p_j v_j}$  y  $\overline{v_j p_{j+1}}$ . A los puntos  $p_j$  les llamaremos los vértices de  $\mathcal{S}^i(P)$ .

Diremos que un punto  $r$  en el plano está dominado por  $\mathcal{S}^i(P)$ , si está dominado por algún vértice de  $\mathcal{S}^i(P)$ .



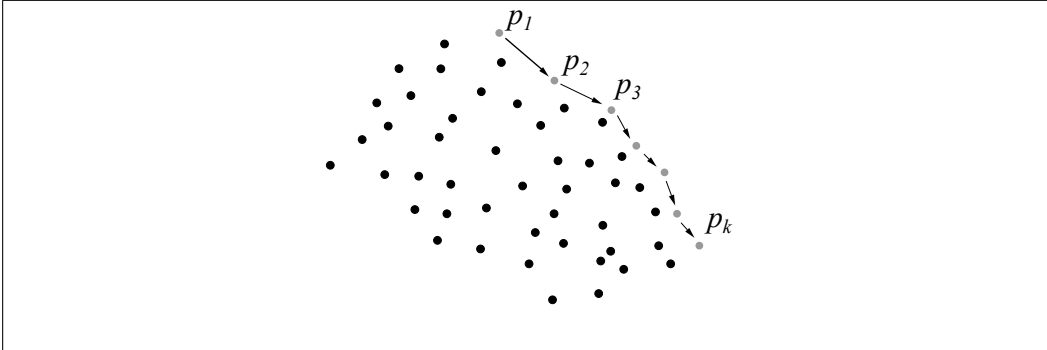


Figura 2.2.1: Los puntos  $\succ$ -maximales ordenados en sentido de las manecillas del reloj.

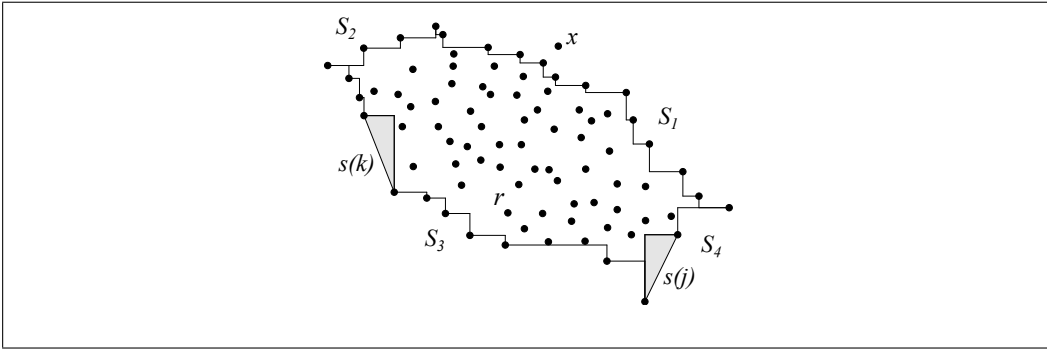


Figura 2.2.2: Dos escalones  $s(j)$  y  $s(k)$ , las cuatro escaleras  $\mathcal{S}^i(P)$ , el punto  $x$  está dominado por  $\mathcal{S}^3(P)$  y  $\mathcal{S}^4(P)$  y el punto  $r$  está dominado por las cuatro escaleras.

Las definiciones anteriores están representadas en la figura 2.2.2. En ella se muestran las cuatro escaleras. En particular, se muestra el punto  $r$  que está dominado por las cuatro escaleras, lo que lo hace un caso especial de punto en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.2.2.** (*Cierre Convexo Rectilíneo*)

El cierre convexo rectilíneo de  $P$ ,  $\mathcal{RCH}(P)$ , es el conjunto de puntos en el plano que están dominados por  $\mathcal{S}^i(P)$  para toda  $i = 1, 2, 3, 4$ .

En la figura 2.2.2 el cierre convexo rectilíneo de  $P$  es el área encerrada por las cuatro escaleras. A continuación estableceremos la equivalencia entre 1.0.2 y 2.2.2.

**Teorema 2.2.3.** Sean  $t$  un punto en  $\mathbb{R}^2$ . Se tiene que  $t$  está dominado por  $\mathcal{S}^i(P)$ , para toda  $i = 1, 2, 3, 4$ , si y sólo si pertenece a

$$\mathbb{R}^2 - \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$$

*Demostración.* Sabemos que  $t$  está dominado  $\mathcal{S}^i(P)$  para toda  $i$  si y sólo si  $t$  está dominado por algún vértice de  $\mathcal{S}^i(P)$ . Esto último es cierto si y sólo si cualquier cuadrante  $Q$  que contiene a  $t$  no es libre de  $P$ , lo que es equivalente a que  $t$  no pertenezca a algún cuadrante libre. Por último, notemos que el que  $t$  no pertenezca a un cuadrante libre y que  $t$  se encuentre en

$$\mathbb{R}^2 - \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$$

se implican mutuamente. □

A pesar de que las definiciones cambian, el objeto de estudio es exactamente el mismo. A partir de estas dos definiciones haremos algunas comparaciones del cierre convexo rectilíneo con el cierre convexo en la sección 2.4.

### 2.3. Cierre convexo rectilíneo no orientado

Notemos que el conjunto de puntos  $\succ_i$ -maximales de  $P$  cambia al rotar los ejes coordenados de  $\mathbb{R}^2$  respecto del origen.

**Definición 2.3.1.** Una  $\theta$ -orientación, u orientación  $\theta$ , es el sistema coordenado obtenido al rotar los ejes coordenados por un ángulo  $\theta$  alrededor del origen. Figura 2.3.1.

Sean  $y$  un punto en el plano e  $i$  en  $\{1, 2, 3, 4\}$ . En adelante  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$ ,  $\mathcal{S}_\theta^i(P)$  y  $Q_\theta^i(y)$  denotarán a  $\mathcal{RCH}(P)$ ,  $\mathcal{S}^i(P)$  y  $Q^i(y)$ , respectivamente, calculados en una  $\theta$ -orientación.

**Teorema 2.3.2.**  $\mathcal{RCH}_\theta(P) \subseteq \mathcal{CH}(P)$  para toda  $\theta$  en  $[0, 2\pi)$ .

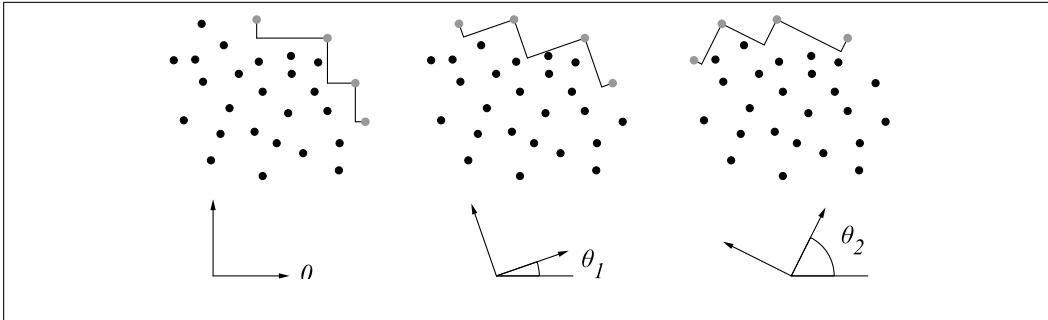


Figura 2.3.1: Los puntos en gris son todos los puntos  $\succ_1$ -maximales maximales en las orientaciones  $0$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

*Demostración.* Probaremos que el complemento de  $\mathcal{CH}(P)$ ,  $\mathcal{CH}^C(P)$ , está contenido en el complemento de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$ ,  $\mathcal{RCH}_\theta^C(P)$ . En consecuencia tenemos que  $\mathcal{RCH}_\theta(P) \subset \mathcal{CH}(P)$ .

Sea  $t$  en  $\mathcal{CH}^C(P)$ . Dado que  $\mathcal{CH}(P)$  es convexo interseca a lo más a tres de los cuatro cuadrantes  $Q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , en la orientación  $\theta$ . Supongamos, que  $\mathcal{CH}(P) \cap Q_i(t) \neq \emptyset$ ,  $i = 2, 3, 4$ . De hecho  $\mathcal{CH}(P)$  está contenido en el interior de  $Q_2(t) \cup Q_3(t) \cup Q_4(t)$ . Luego no existen elementos de  $P$  en la cerradura de  $Q_1(t)$ . Así que  $t$  no es dominado por  $S_\theta^1(P)$ . Por 2.2.2 concluimos que  $t$  pertenece a  $\mathcal{RCH}_\theta^C(P)$ .  $\square$

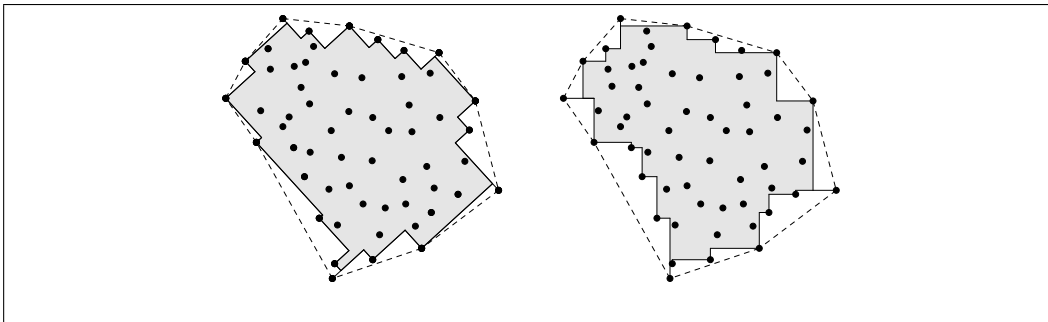


Figura 2.3.2: El  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  para dos valores diferentes de  $\theta$  está contenido en  $\mathcal{CH}(P)$

El cambio del conjunto de maximales de una orientación a otra del sistema coordenado induce cambios geométricos y topológicos en el cierre convexo rectilíneo. Algunos de estos cambios serán estudiados en la siguiente sección.

## 2.4. Cierre convexo y cierre convexo rectilíneo

Es común ver en textos de topología y geometría la comparación de las propiedades que se heredan de un espacio a sus subespacios. La utilidad de hacer estas comparaciones radica en el discernimiento de ambos espacios como objetos matemáticos. El teorema 2.3.2 prueba la contención de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  en  $\mathcal{CH}(P)$ , para toda  $\theta$  en  $[0, 2\pi]$ . Por otra parte, el lema 2.1.3 prueba que los vértices de  $\mathcal{CH}(P)$  siempre son vértices de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$ , para toda  $\theta$  en  $[0, 2\pi]$ . En esta sección veremos algunas propiedades del cierre convexo rectilíneo y las compararemos con aquellas del cierre convexo.

Comenzaremos por dar dos propiedades en las que son similares.

**Teorema 2.4.1.** *El  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  es cerrado y acotado para toda  $\theta$  en  $[0, 2\pi]$ .*

*Demostración.* De acuerdo a la definición 1.0.2 tenemos que  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  es el complemento de un abierto en un espacio euclidiano y no es vacío ni el total. Luego  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  es cerrado. Por el teorema 2.3.2 tenemos que  $\mathcal{RCH}_\theta(P) \subset \mathcal{CH}(P)$ , además  $\mathcal{CH}(P)$  es acotado. Luego  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  es acotado. Concluimos que  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  es cerrado y acotado.  $\square$

**Definición 2.4.2.** *Sean  $T$  un conjunto y  $l$  una recta, ambos en  $\mathbb{R}^2$ . Decimos que  $T$  es monótono respecto de  $l$  si  $l^\perp \cap T$  es conexo, para toda recta,  $l^\perp$ , perpendicular a  $l$ .*

Otra propiedad del  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  es su monotonía respecto a los ejes coordenados de la  $\theta$ -orientación en la que se encuentra. Esta propiedad se debe a que las aristas de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  son paralelas a los ejes coordenados y a que los vértices de una misma escalera se pueden ordenar totalmente. Ver figura 2.4.1.

Las propiedades mencionadas anteriormente las cumplen tanto el cierre convexo rectilíneo como el cierre convexo. Ahora veremos algunas propiedades en las que difieren. La primera diferencia entre ambas nociones es que el  $\mathcal{CH}(P)$  es invariante ante la orientación en la que se encuentre, mientras que el  $\mathcal{RCH}(P)$  cambia geoméricamente dependiendo de la orientación con la que se calcule. En la figura 2.3.2 se muestra un ejemplo.

El segundo aspecto en el que difieren estos objetos geométricos es que, en tanto que el  $\mathcal{CH}(P)$  tiene una sola componente, el  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  puede ser desconexo. La figura 2.4.2 muestra un ejemplo de lo mencionado anteriormente.

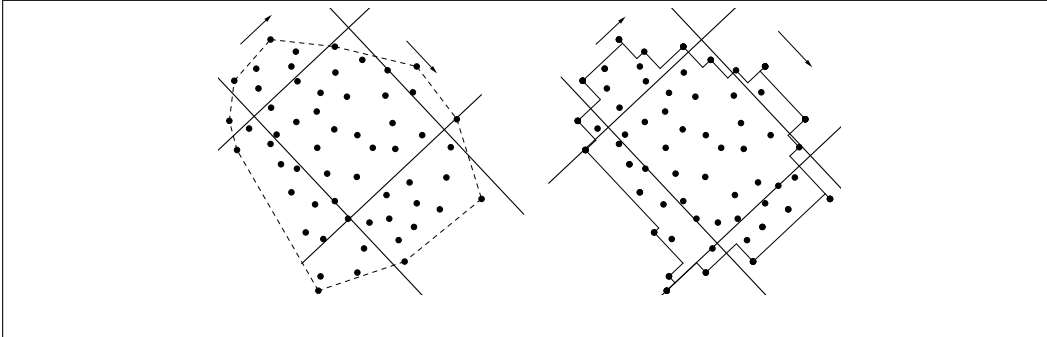


Figura 2.4.1: Se muestra el  $\mathcal{CH}(P)$  y el  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$ . Las cuatro líneas que los intersecan son paralelas a las direcciones de los ejes.

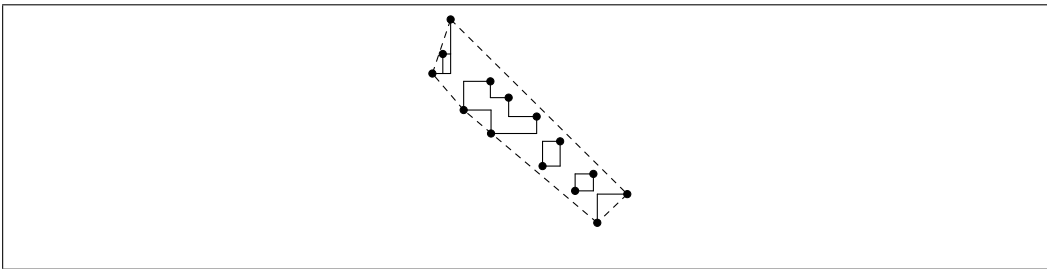


Figura 2.4.2: Se muestra un conjunto de puntos  $P$  para el que  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  no es conexo, para  $\theta = 0$ .

La última diferencia que mencionaremos es que el  $\mathcal{CH}(P)$  tiene interior, toda vez que  $P$  tenga al menos tres puntos no colineales. Esta misma condición no garantiza el que el  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  tenga interior. La figura 2.4.3 ilustra esta propiedad.

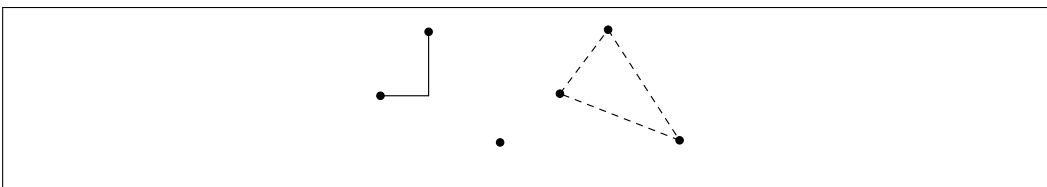


Figura 2.4.3: El  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  sin interior y el  $\mathcal{CH}(P)$ . El conjunto  $P$  tiene tres puntos en posición general.

Hemos visto que existen propiedades que no son heredadas del  $\mathcal{CH}(P)$  al  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$ . De modo que los trataremos como objetos geométricos y topológicos completamente diferentes. En el siguiente capítulo veremos cómo calcular

el cierre convexo rectilíneo no orientado a detalle.

## 2.5. Cálculo de maximales

La pregunta que surge a continuación de manera natural es la de cómo se calculan los puntos  $\succ_1$ -maximales de  $P$  para una  $\theta$ -orientación fija. Una primera forma de resolver este problema es hacer todas las comparaciones posibles, es decir, comparando los puntos de  $P$  dos a dos, lo que nos tomaría tiempo cuadrático. La complejidad de esta solución es de  $O(n^2)$ .

El número de comparaciones necesaria para obtener los maximales de  $P$  propuesta anteriormente es muy alto y no es óptimo. Surge así la pregunta de cómo reducir la complejidad de la solución. A continuación propondremos una segunda solución con una complejidad menor.

Ordenemos los puntos de  $P$  en forma decreciente de acuerdo a su abscisa en una lista  $X = \{t_j\}$ . Como en la figura 2.5.1.

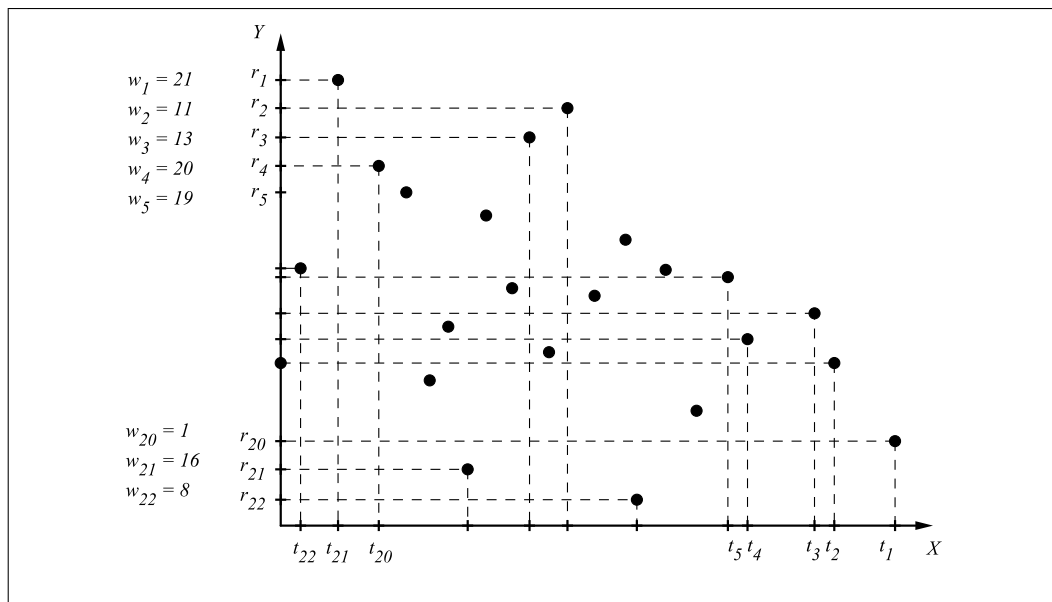


Figura 2.5.1: Se muestran las listas  $X$  y  $Y$ . También se muestran las etiquetas de los elementos de  $Y$ .

Ordenamos los puntos de  $P$  en forma decreciente de acuerdo a su ordenada

en una lista  $Y = \{r_j\}$ . Cada  $r_j$  tendrá asociado un valor  $w_j$  igual al índice de  $t_j$  en  $X$ . Ver figura 2.5.1.

Haremos un recorrido en  $Y$  conservando un apuntador  $m$  a lo largo del recorrido. Por el Lema 2.1.3 sabemos que  $r_1$  es  $\succ_1$ -maximal, de modo que asignamos a  $m$  el valor inicial  $w_1$ . Recorreremos  $Y$  punto por punto verificando la siguiente condición. Si  $w_j < m$ , entonces le asignamos el valor  $r_j$  a  $m$  y regresamos  $r_j$ . En caso contrario,  $r_j$  no es  $\succ_1$ -maximal.

Calcularemos ahora la complejidad de dicho algoritmo. El tiempo necesario para crear las listas  $X$  y  $Y$  es de  $O(n \log n)$ . Mientras que el recorrido de  $Y$  toma tiempo  $O(n)$ . De modo que la complejidad de este algoritmo es de  $O(n \log n)$ .

Los puntos que obtenemos de dicho algoritmo son todos los  $\succ_1$ -maximales de  $P$  puesto que estos aparecen antes que los puntos a los que dominan. La condición para determinar si un punto domina a otro se verifica en  $Y$ , dicha condición es la siguiente. Si  $w_j < w_k$  y  $j < k$ , entonces el punto  $r_j$  domina al punto  $r_k$ . Así si un punto  $r_j$  no cumple con esta condición, entonces no es dominado por el último  $\succ_1$ -maximal encontrado, lo que lo convierte en un punto  $\succ_1$ -maximal.

La complejidad del algoritmo anterior es menor que la planteada en la primera solución. La ordenación de las listas tiene complejidad  $O(n \log n)$  y el recorrido de ellas toma tiempo  $O(n)$ . Es fácil ver que esto es óptimo, [5]. El lector puede dirigirse a [5] donde se muestran algoritmos óptimos para  $d = 2, 3$  distintos al propuesto.

**Teorema 2.5.1.** *El cálculo de los puntos  $\succ_i$ -maximales de  $P$ , para toda  $i = 1, 2, 3, 4$ , está acotado por  $\Omega(n \log n)$ .*

# Capítulo 3

## Cómputo y análisis del $\mathcal{RCH}_\theta(P)$

Hemos visto que el cómputo de  $\mathcal{CH}(P)$  y el de  $\mathcal{RCH}(P)$  tienen la misma cota inferior,  $\Omega(n \log n)$ , [8], [4], donde  $n$  es el número de puntos de  $P$ . Además el cómputo de los puntos maximales de  $P$  en cada  $\theta$ -orientación,  $\theta$  en  $[0, 2\pi)$ , tiene una cota de  $\Omega(n \log n)$ , [1]. En esta línea de pensamiento enunciamos el problema del *cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima*, [2]. En este problema se busca la  $\theta$ -orientación que produce el  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  de área mínima.

Hasta el momento no se ha establecido una cota inferior para encontrar  $\theta$ . Una cota inferior evidente es  $O(n \log n)$ . En [2] se muestra un algoritmo que calcula el cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima en  $O(n^2)$ . Asimismo se deja como problema abierto el resolver dicho problema en menos tiempo. Una de las razones por las que la cota que se muestra en [2] tiene tal complejidad, es que la manera de calcular las componentes conexas a lo largo de la rotación no pudo hacerse en menos de tiempo cuadrático.

### 3.1. Dinámica de maximales

Para resolver el problema del cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima comenzaremos por observar la dinámica de los puntos de  $P$  a lo largo de una rotación de los ejes coordenados respecto del origen.

**Definición 3.1.1.** *Sea  $I$  un intervalo en  $[0, 2\pi)$  y  $R$  una propiedad de  $I$ . Decimos que  $I$  es maximal respecto de  $R$  si para todo intervalo  $J$  tal que  $I \subset J$  se tiene que  $J$  no cumple  $R$ .*



**Definición 3.1.2.** Sea  $p$  en  $P$ . Definimos un intervalo de vida de  $p$  como un intervalo  $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, 2\pi)$  que es maximal respecto de la siguiente propiedad:  $Q_\theta^1(p)$  es libre de  $P$ , para toda  $\theta$  en  $[\theta_1, \theta_2]$ .

**Observación 3.1.3.** A continuación veremos que cada punto  $p$  en  $P$  tiene a lo más tres intervalos de vida.

Sean  $p$  un punto en  $P$  y  $[\theta_1, \theta_2]$  un intervalo de vida de  $p$ . El intervalo  $[\theta_1, \theta_2]$  define una *cuña* en  $p$  de la siguiente manera:

$$W_{[\theta_1, \theta_2]}(p) = \bigcup_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} Q_\theta^1(p).$$

Claramente, existen  $q_1$  en  $Q_{\theta_1}^1 \cap P$  y  $q_2$  en  $Q_{\theta_2}^1 \cap P$  tales que  $q_1$  se encuentra en el eje  $X$  de la  $\theta_1$ -orientación y  $q_2$  pertenece al eje  $Y$  de la  $\theta_2$  orientación. De modo que el ángulo  $\lambda_1 = \angle q_1 p q_2 = \theta_2 - \theta_1 + \frac{\pi}{2}$ . Dado que  $W_{\theta_1}(p)$  no contiene elementos de  $P$  en su interior, concluimos que cada punto tiene a lo más tres intervalos de vida.

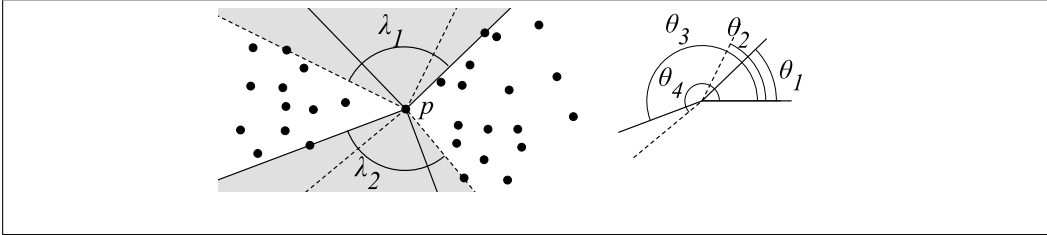


Figura 3.1.1: Dos cuñas  $W_{\theta_1}(p)$  y  $W_{\theta_3}(p)$  en gris.

Supongamos que el punto  $p$  tiene tres intervalos de vida  $[\theta_1, \theta_2]$ ,  $[\theta_3, \theta_4]$  y  $[\theta_5, \theta_6]$ . Por definición,  $p$  no es maximal en las orientaciones  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

**Definición 3.1.4.** Diremos que en una  $\theta_i$ -orientación, con  $i$  impar, se da un evento de entrada de  $p$  y que en una  $\theta_i$ -orientación, con  $i$  par, se da un evento de salida de  $p$ .

Cabe notar que en un evento de entrada de  $p$ , éste “comienza” a ser  $\succ_1$ -maximal. De manera análoga, en un evento de salida de  $p$ , éste “deja” de ser  $\succ_1$ -maximal, ver figura 3.1.1.

**Observación 3.1.5.** *Es importante notar que, por cada evento de entrada o salida, las escaleras de  $P$  se ven modificadas. Por cada evento de entrada de  $p$  se generan dos nuevos escalones y se elimina uno. De manera similar, en un evento de salida de  $p$  se eliminan dos escalones y se genera uno, como en la figura 3.1.2. A partir de esta última afirmación, se prueba el siguiente lema.*

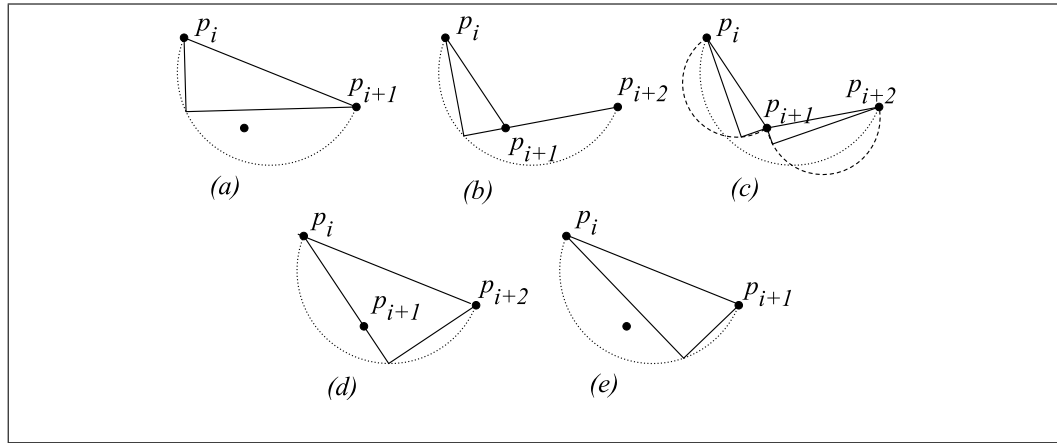


Figura 3.1.2: (a) Escalón (b) Evento de entrada de  $p_{i+1}$ , se generan dos escalones nuevos y se elimina uno (c)  $p_{i+1}$  es maximal (d) Evento de salida de  $p_{i+1}$ , se genera un nuevo escalón y se eliminan dos.

**Lema 3.1.6.** *El número de escalones de  $P$  que se generan durante una rotación del sistema coordenado respecto del origen desde la 0-orientación hasta la  $2\pi$ -orientación es de orden  $O(n)$ .*

*Demostración.* Por la observación 3.1.3, sabemos que cada punto  $p$  de  $P$  tiene a lo más tres eventos de vida. De modo que tiene a lo más tres eventos de entrada y tres de salida. Luego el número de eventos de entrada y salida está acotado por  $O(n)$ . Además, por la observación 3.1.5, tenemos que en cada uno de dichos eventos se generan o eliminan a lo más dos escalones. Concluimos que el número de escalones en una rotación del sistema coordenado respecto el origen de la 0-orientación a la  $2\pi$ -orientación es de orden  $O(n)$ .

□

## 3.2. Traslapes

Para calcular el área de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  es necesario que calculemos el área en la que dos escalones se intersecan.

**Definición 3.2.1.** *Diremos que las parejas de escaleras  $\mathcal{S}_\theta^1(P)$  con  $\mathcal{S}_\theta^3(P)$  y  $\mathcal{S}_\theta^2(P)$  con  $\mathcal{S}_\theta^4(P)$  son parejas de escaleras opuestas en la  $\theta$ -orientación.*

Cabe observar que dos escalones se intersecan si y sólo si cada uno pertenece a una escalera diferente de una pareja de escaleras opuestas.

**Definición 3.2.2.** *(Traslape)*

*Sean  $s_\theta(j)$  y  $s_\theta(k)$  dos escalones en escaleras opuestas de  $P$ . Decimos que  $s_\theta(j)$  y  $s_\theta(k)$  se traslapan si  $s_\theta(j) \cap s_\theta(k) \neq \emptyset$ . Un traslape  $t_\theta(j, k)$  es el conjunto  $s_\theta(j) \cap s_\theta(k)$ .*

Para poder determinar cuándo existe un traslape es necesario establecer condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales se da un traslape. El siguiente resultado resuelve este problema.

**Teorema 3.2.3.** *Sean  $\theta$  en  $[0, 2\pi)$ ,  $P$  un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^2$  y  $s_\theta(j)$  en  $\mathcal{S}_\theta^1(P)$  y  $s_\theta(k)$  en  $\mathcal{S}_\theta^3(P)$ . Tenemos que  $s_\theta(j)$  y  $s_\theta(k)$  se traslapan si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

- $x_j < x_k < x_{j+1}$ .
- $y_{j+1} < y_{k+1} < y_j$ .

*Demostración.* Recordemos que un escalón  $s_\theta(i)$  es el triángulo formado por los puntos  $p_i = (x_i, y_i)$ ,  $p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$  y  $v_i = (x_i, y_{i+1})$ , las coordenadas son las correspondientes a la  $\theta$ -orientación. Sea  $\overline{p_i p_j}$  el segmento de recta que une a  $p_i$  con  $p_j$ . Tenemos que  $s_\theta(j) \cap s_\theta(k) \neq \emptyset$  si y sólo si  $\overline{p_j v_j} \cap \overline{v_k p_{k+1}} \neq \emptyset$  y  $\overline{v_j p_{j+1}} \cap \overline{p_k v_k} \neq \emptyset$ . Esto último es equivalente a que  $x_j < x_k < x_{j+1}$  y  $y_{j+1} < y_{k+1} < y_j$ .

□

A continuación mostraremos un algoritmo para encontrar los traslapes en una orientación fija. Creamos dos listas ordenadas,  $X$  y  $Y$ , de los vértices de  $\mathcal{S}_\theta^1(P) \cup \mathcal{S}_\theta^3(P)$ . Ambas listas están ordenadas de manera creciente en la primera respecto de la abscisa y la segunda respecto de la ordenada.

1. Se termina cuando en  $X$  se ha alcanzado el primer elemento o cuando en  $Y$  se ha alcanzado el último.
2. A partir del apuntador en  $Y$  buscamos el primer elemento  $p_j$  de  $\mathcal{S}_\theta^1(P)$  tal que  $p_j$  esté seguido de un elemento  $p_k$  de  $\mathcal{S}_\theta^3(P)$ . Dejamos el apuntador de  $Y$  en el lugar de  $p_k$ .
3. Recorremos  $X$  a partir de su apuntador en adelante. Buscamos  $p_{k-1}$  y verificamos si el elemento anterior a  $p_{k-1}$  en  $X$  es  $p_{j-1}$ . Si esto se cumple se reporta un traslape. Se deja el apuntador de  $X$  en el lugar de  $p_{k-1}$ .
4. Se regresa al paso 1.

Observemos que si los elementos de  $X$  y  $Y$  están ordenados, entonces la complejidad del algoritmo es lineal. Esto se debe a que ambas listas se recorren una sola vez. El producto de dicho algoritmo es el conjunto de todos los traslapes en una orientación fija, dado que hace una verificación de las condiciones establecidas en 3.2.3.

### 3.3. Duración de un traslape

Ya hemos visto que  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  cambia sus propiedades geométricas y topológicas conforme  $\theta$  varía en una rotación. Estos fenómenos están estrechamente ligados a los traslapes que existen conforme  $\theta$  cambia. La razón principal es que, si el número de traslapes que hay en una orientación es  $m$ , entonces el número de componentes del  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  es  $m + 1$ . Por tanto estudiaremos más a fondo los traslapes a lo largo de una rotación completa del sistema coordinado.

Sean  $s_\theta(j)$  y  $s_\theta(k)$  dos escalones que se traslapan,  $\alpha$  y  $\beta$  en  $[0, 2\pi)$  tales que en la  $\alpha$ -orientación el segmento  $\overline{p_{j+1}p_{k+1}}$  es paralelo al eje  $X$  y en la  $\beta$ -orientación el segmento  $\overline{p_j p_k}$  es paralelo al eje  $Y$ . Ver figura 3.3.1(b),(e).

**Observación 3.3.1.** *Notemos que los traslapes entre  $s_\theta(j)$  y  $s_\theta(k)$  sólo se dan en una  $\theta$ -orientación, con  $\theta$  en  $[\alpha, \beta]$ . En adelante llamaremos al intervalo  $\mathcal{I}(j, k) = [\alpha, \beta]$  el intervalo máximo de traslape entre  $s_\theta(j)$  y  $s_\theta(k)$ .*

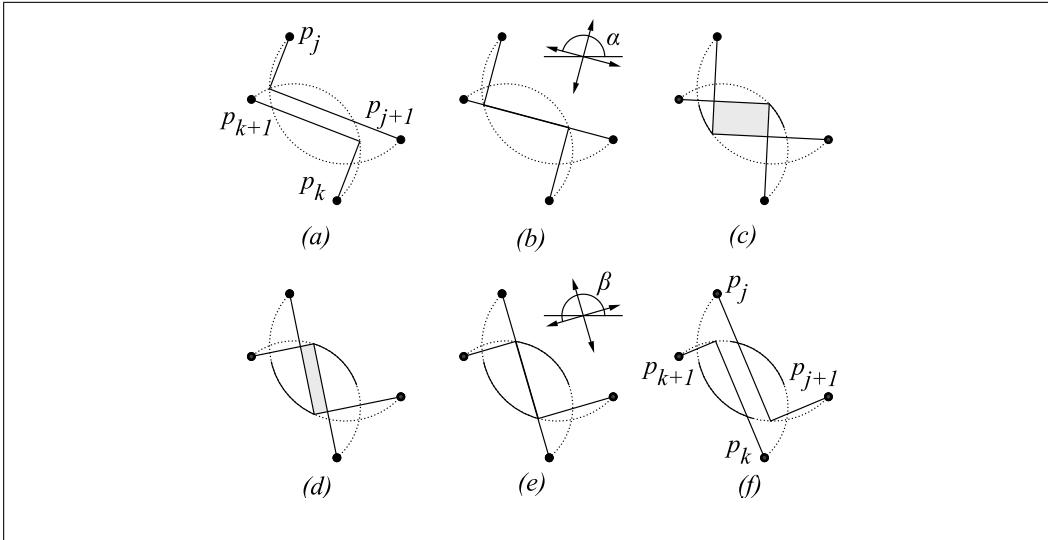


Figura 3.3.1: (a) No hay traslape (b)  $\alpha$ -orientación, comienzo de  $\mathcal{I}(j, k)$  (c) y (d) Interior de  $\mathcal{I}(j, k)$  (e)  $\beta$ -orientación, fin de  $\mathcal{I}(j, k)$  (f) No hay traslape.

La existencia de  $\mathcal{I}(j, k)$  no garantiza que  $s_\theta(j) \cap s_\theta(k) \neq \emptyset$ , para toda  $\theta$  en  $\mathcal{I}(j, k)$ . Esto se debe a que puede haber eventos de entrada de otros puntos durante la rotación en  $\mathcal{I}(j, k)$ , ver figura 3.3.2.

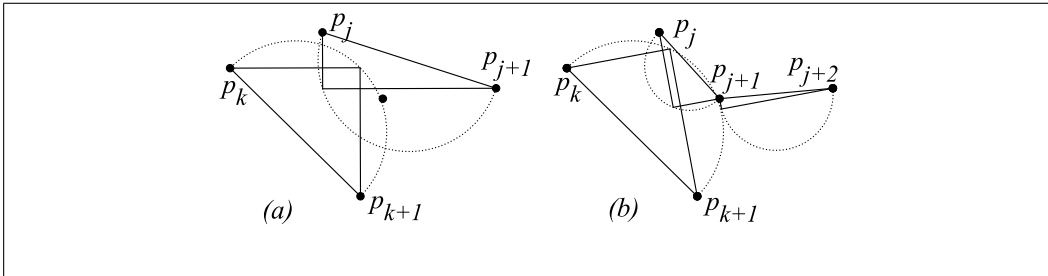


Figura 3.3.2: (a) Dos escalones se traslapan (b) Dos escalones diferentes se traslapan a pesar de estar dentro del intervalo máximo de traslape del par inicial.

**Definición 3.3.2.** Sean  $s_\theta(j)$  y  $s_\theta(k)$  en escaleras opuestas de  $P$  e  $\mathcal{I}(j, k) = [\alpha, \beta]$ . Diremos que en la  $\alpha$ -orientación se da un evento de inicio de traslape entre  $s(j)$  y  $s(k)$  y en la  $\beta$ -orientación un evento de fin de traslape.

Anteriormente hemos establecido una cota en el número de escalones de  $P$  que se generan en una rotación de  $[0, 2\pi)$  del sistema coordenado. Nos

gustaría poder establecer una cota en el número de traslapes en la misma rotación. El siguiente resultado se probará en el próximo capítulo.

**Lema 3.3.3.** *El número total de traslapes de  $P$  en una rotación del sistema coordinado respecto del origen desde la 0-orientación hasta la  $2\pi$ -orientación es de orden  $O(n)$ .*

El lema anterior se enuncia en [2], sin embargo, la prueba que ofrecen es incorrecta.

Hemos visto que es necesario calcular los traslapes para poder resolver el problema del cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima. Por el lema 3.3.3, sabemos que al momento de calcular los traslapes precisaremos al menos tiempo lineal. Un método para predecir los traslapes se da en [2]. Lo que hacen en este artículo es recorrer todas las parejas de escalones verificando si se traslapan o no, obteniendo así un algoritmo de complejidad cuadrática.

### 3.4. Calculando el área

Ordenaremos los puntos  $\succ_i$ -maximales,  $i = 1, 2, 3, 4$ , en sentido de las manecillas del reloj comenzando por el punto con la ordenada mayor, ver figura 3.4.1. Denotemos por  $\mathcal{P}$  al polígono cuyos vértices son los puntos maximales de  $P$  y cuyas aristas son de la forma  $p_i p_{i+1}$ . Tenemos que

$$area(\mathcal{RCH}_\theta(P)) = area(\mathcal{P}) - \sum area(s_\theta(i)) + \sum area(t_\theta(j, k)) \quad (3.1)$$

Donde  $s_\theta(i)$  es un escalón en la  $\theta$ -orientación y  $t_\theta(j, k)$  la intersección de los escalones  $s_\theta(j)$  y  $s_\theta(k)$ .

Para calcular  $area(\mathcal{RCH}_\theta(P))$  hemos definido cuatro tipos de eventos: los de entrada, los de salida, los de inicio de traslape y los de fin de traslape. Estos eventos cambiarán los términos de la fórmula (3.1). A continuación describiremos una forma eficiente de calcular el área de  $\mathcal{RCH}(P)$  mientras los términos de (3.1) no cambian. Ésta es fundamental para mantener la complejidad de nuestros algoritmos baja.

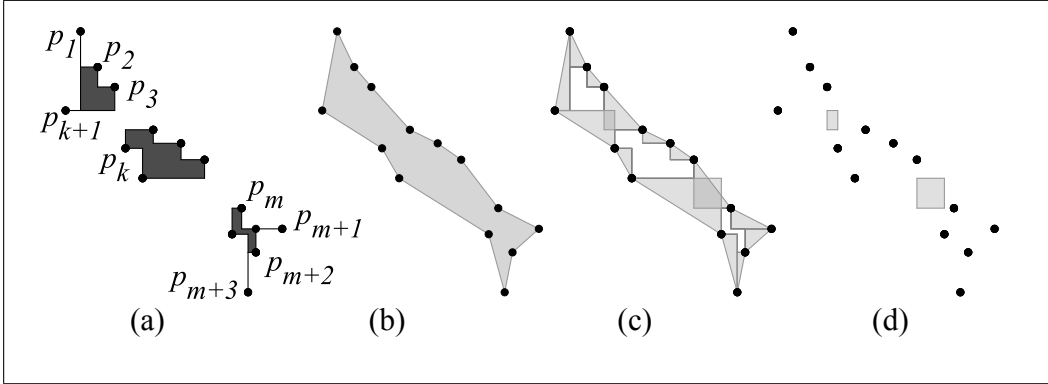


Figura 3.4.1: (a) El  $\mathcal{RCH}(P)$ . (b) El polígono  $\mathcal{P}$ . (b) Escalones. (c) Intersecciones de escalones.

**Definición 3.4.1.** *Un intervalo sin eventos  $I = [\gamma, \delta]$  en  $[0, 2\pi)$  es tal que el intervalo  $(\gamma, \delta)$  es maximal respecto de la siguiente propiedad: En toda  $\theta$ -orientación,  $\theta$  en  $(\gamma, \delta)$ , no hay eventos.*

Mostraremos una ecuación para calcular el área de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$ , con  $\theta$  en  $I$ . La siguiente fórmula nos da el área de  $\mathcal{P}$  en la  $\gamma$ -orientación.

$$area_\gamma(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Esta fórmula se calcula en  $O(n)$ , puesto que tiene  $n$  términos que se calculan en tiempo constante. Claramente, el área de  $\mathcal{P}$  cambia con los eventos de entrada y salida únicamente, así que  $area_\gamma(\mathcal{P}) = area_\theta(\mathcal{P})$ , para toda  $\theta$  en  $I - \{\delta\}$ . Supongamos que en la  $\delta$ -orientación se da un evento de entrada o uno de salida del punto  $p_{i+1}$ . Tenemos que

$$area_\delta(\mathcal{P}) = \begin{cases} area_\gamma(\mathcal{P}) - (area(\Delta p_i p_{i+1} p_{i+2})) & \text{si } p_{i+1} \text{ entra,} \\ area_\gamma(\mathcal{P}) + (area(\Delta p_i p_{i+1} p_{i+2})) & \text{si } p_{i+1} \text{ sale.} \end{cases}$$

Donde  $\Delta p_i p_{i+1} p_{i+2}$  es el triángulo cuyos vértices son  $p_i$ ,  $p_{i+1}$  y  $p_{i+2}$ . Así que el área de  $\mathcal{P}$  puede ser actualizada en tiempo constante.

Ahora calcularemos el segundo término de (3.1). Sean  $d_i$  la longitud de la hipotenusa del escalón  $s_\gamma(i)$  y  $\phi_i$  el ángulo interno de  $s_\gamma(i)$  en  $p_i$ , ver figura 3.4.2. Por la ley de los senos sabemos que

$$\frac{d_i}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{|\overline{p_i v_i}|}{\sin \phi_i} = \frac{|\overline{v_i p_{i+1}}|}{\sin(\frac{\pi}{2} - \phi)} \quad (3.2)$$

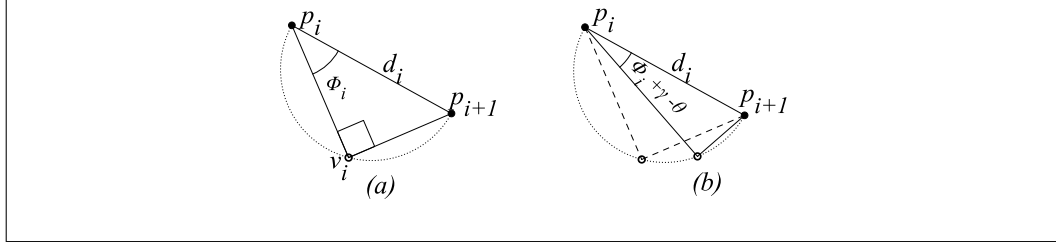


Figura 3.4.2: (a) Escalón  $s(i)$  en la  $\gamma$ -orientación (b) El mismo escalón en una  $\theta$ -orientación,  $\theta \in I$ .

El área de  $s_\gamma(i)$ ,  $area(s_\gamma(i))$ , está dada por

$$area(s_\gamma(i)) = \frac{|\overline{p_i v_i}| |\overline{v_i p_{i+1}}|}{2}$$

Usando (3.2) y la identidad  $\cos \phi_i = \sin(\frac{\pi}{2} - \phi_i)$  obtenemos

$$area(s_\gamma(i)) = \frac{d_i^2}{2} \sin \phi_i \cos \phi_i \quad (3.3)$$

Por tanto podemos calcular  $area(s_\theta(i))$ , con  $\theta$  en  $I$ , de la siguiente forma:

$$area(s_\theta(i)) = \frac{d_i^2}{2} \sin(\phi_i + (\gamma - \theta)) \cos(\phi_i + (\gamma - \theta)) \quad (3.4)$$

Calcularemos ahora el área de los traslapes en  $I$ . Sea  $t_\gamma(j, k)$  un traslape entre  $s_\gamma(j)$  y  $s_\gamma(k)$ . El área de  $t_\gamma(j, k)$ ,  $area(t_\gamma(j, k))$ , es

$$area(t_\gamma(j, k)) = |x_k - x_j| |y_{k+1} - y_{j+1}| \quad (3.5)$$

Conforme varía la orientación en  $I$  la expresión de  $area(t_\gamma(j, k))$  tiene los mismos términos, sin embargo, el ángulo cambia, ver figura 3.4.3. De modo que es necesario calcular los vértices de  $s_\theta(j)$  y  $s_\theta(k)$ ,  $\theta$  en  $I - \delta$ . Sea  $\varphi = \theta - \gamma$ . Multiplicando los vectores  $p_j$ ,  $p_{j+1}$ ,  $p_k$  y  $p_{k+1}$  por la matriz de rotación



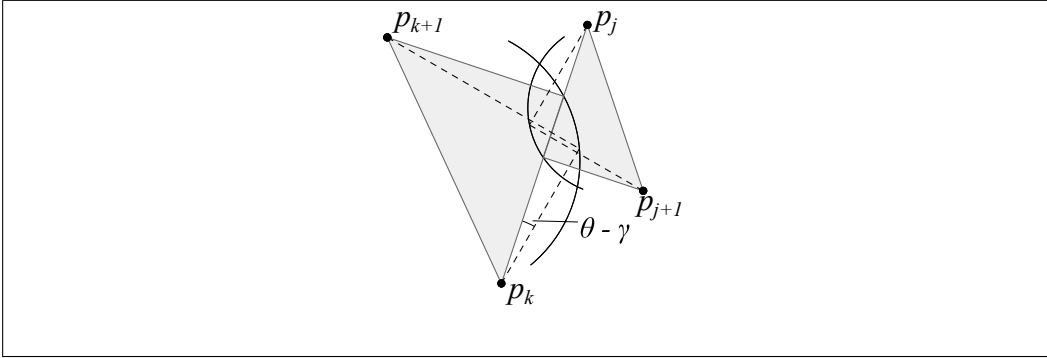


Figura 3.4.3: Se muestran los escalones en la  $\gamma$ -orientación en gris y en línea punteada los escalones en la  $\theta$ -orientación.

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

obtenemos los vectores  $p'_j$ ,  $p'_{j+1}$ ,  $p'_k$  y  $p'_{k+1}$ , respectivamente. Estos nuevos vectores representan las coordenadas de los vectores  $p_j$ ,  $p_{j+1}$ ,  $p_k$  y  $p_{k+1}$  en la  $\theta$ -orientación. Luego tenemos que

$$|x'_k - x'_j| = |(x_k - x_j) \cos \varphi + (y_k - y_j) \sin \varphi| \quad (3.6)$$

y que

$$|y'_{k+1} - y'_{j+1}| = |(x_{j+1} - x_{k+1}) \sin \varphi + (y_{k+1} - y_{j+1}) \cos \varphi| \quad (3.7)$$

Usando las dos ecuaciones anteriores obtenemos que

$$area(t_\theta(j, k)) = D_i \cos^2 \varphi + E_i \sin^2 \varphi + F_i \cos \varphi \sin \varphi \quad (3.8)$$

Donde

$$\begin{aligned} D_i &= |(x_k - x_j)(y_{k+1} - y_{j+1})| \\ E_i &= -|(y_k - y_j)(x_{j+1} - x_{k+1})| \\ F_i &= |(y_k - y_j)(y_{k+1} - y_{j+1}) + (x_k - x_j)(x_{j+1} - x_{k+1})| \end{aligned}$$

Usando las identidades

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2},$$

y

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{\sin(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi)}{2},$$

tenemos que (3.8) es igual a:

$$\begin{aligned} &= D_i \left[ \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right] + E_i \left[ \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right] + F_i \left[ \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right] \\ &= \left( \frac{D_i - E_i}{2} \right) \cos 2\varphi + \frac{F_i}{2} \sin 2\varphi + \left( \frac{D_i + E_i}{2} \right) \end{aligned}$$

Luego

$$area(t(j, k)) = A_i + B_i \cos 2\varphi + C_i \sin 2\varphi \quad (3.9)$$

donde

$$A_i = \frac{D_i + E_i}{2},$$

$$B_i = \frac{D_i - E_i}{2},$$

$$C_i = \frac{F_i}{2}.$$

Hemos calculado  $area(\mathcal{RCH}_\theta(P))$  para toda  $\theta$  en  $I - \{\delta\}$ , sin embargo, aún falta mucho para poder calcular la  $\theta_0$ -orientación para la que  $\mathcal{RCH}_{\theta_0}$  tiene área mínima.

# Capítulo 4

## Cadenas de arcos

En este capítulo estudiaremos algunas características geométricas de elementos de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  que servirán para probar el lema 3.3.3. En este capítulo los vértices de  $\mathcal{CH}(P)$ ,  $\{b_k\}_{k=1}^{h+1}$ ,  $b_1 = b_{h+1}$ , estarán ordenados en sentido de las manecillas del reloj comenzando por aquel con la ordenada más grande. También nos referimos a  $e_k$  como la arista de  $\mathcal{CH}(P)$  que une a los puntos  $b_k$  y  $b_{k+1}$  y al semidisco  $C_k$  como el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \leq \angle b_{k+1}xb_k \leq \pi\}$ . También denotaremos por  $\triangle xyz$  al triángulo con vértices  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y finalmente sea  $W^k(t)$  la cuña de  $t$  en  $e_k$  definida de la siguiente manera  $W^k(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \angle b_{k+1}tx \leq \angle b_{k+1}tb_k\} \cup \{t\}$ .

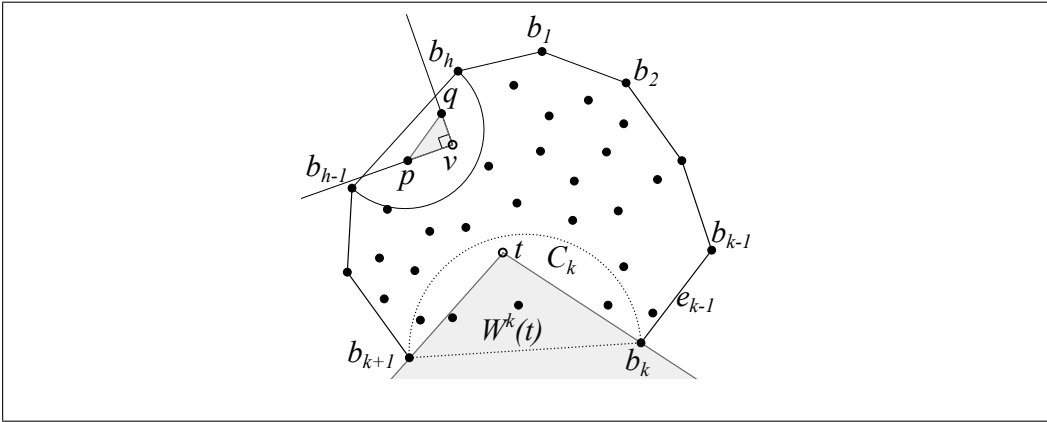


Figura 4.0.1: Se muestran  $C_k$ ,  $W^k(t)$ ,  $e_{k-1}$ . El triángulo  $\triangle qvp$  escapa por  $e_{h-1}$ .

**Definición 4.0.2.** Sean  $p$  y  $q$  en  $C_k \cap P$  tales que existe  $v$  en  $\mathbb{R}^2$  que cumple que  $\triangle qvp = s_\theta(j)$ , para alguna  $\theta$  en  $[0, 2\pi)$  y alguna  $j$  en  $\mathbb{N}$ . Diremos que

$\Delta qvp$  escapa por  $e_k$  si y sólo si  $\Delta qvp \subset W^k(v)$ , ver figura 4.0.1. En este caso, a la pareja de puntos  $(p, q)$  le llamaremos pareja base de  $e_k$ .

Sea  $a$  un arco de circunferencia tal que todo  $x$  en  $a$  cumple que  $\Delta qxp$  escapa por  $e_k$  y no existe un arco  $a'$  con la misma propiedad tal que  $a \subset a'$ . Diremos que  $a$  es un arco asociado a  $(p, q)$ . Es importante notar que una pareja base  $(p, q)$  de  $e_k$  puede tener varios arcos asociados a ella, ver figura 4.0.2(a), (i).

A continuación analizaremos la manera en la que se generan los arcos asociados a las parejas base de  $e_k$ . Usaremos como guía la figura 4.0.2, ella se divide en nueve subfiguras. En cada subfigura están calculados los triángulos de escape para una  $\theta_j$ -orientación,  $\theta_j < \theta_{j+1}$ , dichos triángulos pertenecen a  $\mathcal{S}_{\theta_j}^3(P)$ . Los arcos se representan con una línea negra.

En la figura 4.0.2(a), la única pareja base que existe en la  $\theta_1$ -orientación es  $(b_k, b_{k+1})$ . El arco asociado a  $(b_k, b_{k+1})$  está contenido en  $C_k$ . En la  $\theta_2$ -orientación, figura 4.0.2(b), se da un evento de entrada de un punto  $s$ , por ende, se forman dos nuevas parejas base de  $e_k$ :  $(b_k, s)$  y  $(s, b_{k+1})$ . El arco asociado a  $(b_{k+1}, s)$  comienza su recorrido desde  $s$ . Los ápices de los triángulos de escape de la  $\theta_3$ -orientación, figura 4.0.2(c) han recorrido las circunferencias cuyos diámetros son los segmentos  $\overline{sb_{k+1}}$  y  $\overline{b_k s}$ .

La figura 4.0.2(d), en la  $\theta_4$ -orientación, muestra un evento de entrada del punto  $r$ . Luego se generan dos nuevas parejas base,  $(b_{k+1}, r)$  y  $(r, s)$ , y se elimina una  $(b_{k+1}, s)$ . En 4.0.2(e) observamos que los arcos se generan de manera simultánea. En 4.0.2(f) se da un evento de salida de  $s$ , el arco asociado a la pareja  $(b_k, s)$  tiene a  $s$  como uno de sus extremos. También, se eliminan las parejas base de  $e_k$  que contienen a  $s$ ,  $(r, s)$  y  $(s, b_k)$ , y se genera la pareja base  $(r, b_k)$ . Existen sólo dos triángulos de escape en la  $\theta_7$ -orientación, como se muestra en la figura 4.0.2(g). Un nuevo evento de salida toma lugar, en este caso el punto  $r$ . El arco asociado a  $(b_k, r)$  termina su recorrido en  $r$ . Las parejas base que contienen a  $r$  se eliminan y se forma una nueva,  $(b_{k+1}, b_k)$ , figura 4.0.2(h). La trayectoria del ápice del triángulo de escape restante se ilustra en 4.0.2(i).

En lo que resta del capítulo estudiaremos las propiedades de los arcos.

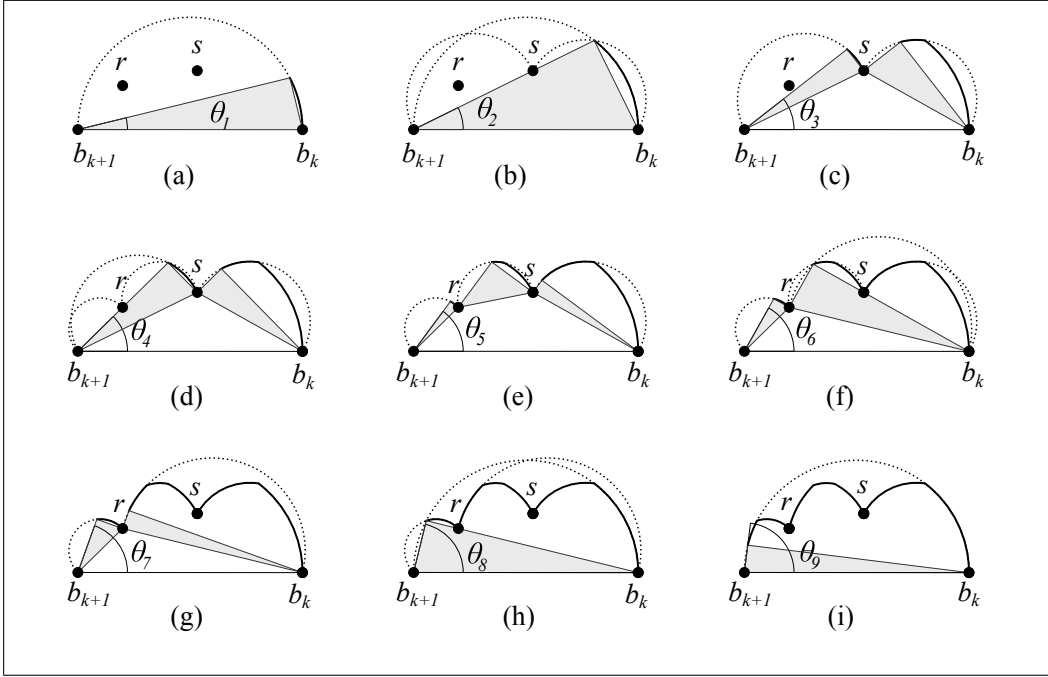


Figura 4.0.2: Se exhiben todas las parejas base de  $e_k$ .

## 4.1. Cadenas

Hemos visto que la solución del problema del cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima, está relacionado con el número de traslapes de escalones que se dan en una rotación del sistema coordenado respecto del origen. Más adelante, mostraremos una manera de acotar por arriba, el número de traslapes en dicha rotación con el número de intersecciones entre los arcos de las cadenas de  $P$ . Estudiaremos a continuación algunas propiedades importantes de los arcos asociados a las parejas base de  $e_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, h\}$ .

**Lema 4.1.1.** *Todo arco  $a$  asociado a una pareja base de  $e_k$  está contenido en  $C_k$ .*

*Demostración.* Puesto que un punto  $x$  de  $a$  es ápice de un triángulo de escape de  $e_k$ , concluimos que  $\frac{\pi}{2} < \angle b_{k+1}xb_k < \pi$ . Luego  $x$  pertenece a  $C_k$ .

□

**Lema 4.1.2.** *Sea  $l$  una recta perpendicular a  $e_k$  que interseca a  $e_k$ . Tenemos que la intersección de  $l$  con todos los arcos asociados a parejas base de  $e_k$  consiste de un solo punto.*

*Demostración.* Sean  $x$  y  $y$  en  $C_k \cap l$  tales que  $d(y, e_k) > d(x, e_k)$ . Supongamos que existen dos arcos diferentes  $a$  y  $a'$  asociados a las parejas base  $(p, q)$  y  $(r, s)$  de  $e_k$  tales que  $x$  y  $y$  pertenecen a  $a$  y a  $a'$  respectivamente. Tenemos que  $\angle qxp = \frac{\pi}{2}$  luego  $\angle qyp < \angle syr = \frac{\pi}{2}$ . Así que  $\triangle syr$  no escapa por  $e_k$ . Esto contradice el hecho de que  $(r, s)$  sea una pareja base de  $e_k$ . Luego  $y$  no pertenece a un arco asociado a una pareja base de  $e_k$ .

□

**Lema 4.1.3.** *El número de arcos asociados a parejas base de  $e_k$  está acotado por  $O(n)$ .*

*Demostración.* Todo evento de entrada genera dos nuevas parejas base y todo evento de salida genera una nueva pareja base. Las cuales, a su vez, forman nuevos arcos. Por tanto, el número de arcos y el número de eventos de entrada y salida es el mismo. Por 3.1.6, concluimos que el número de arcos está acotado por  $O(n)$ .

□

Es obvio que si  $C_k$  no tiene elementos de  $P$  en su interior, entonces la única pareja base de  $e_k$  es  $(b_k, b_{k+1})$ .

Ahora supongamos que existe al menos un punto en  $C_k \cap P$  diferente de  $b_k$  y  $b_{k+1}$ . Sea  $a$  un arco asociado a una pareja base de  $e_k$  y  $u$  uno de sus extremos diferente de  $b_k$  y  $b_{k+1}$ , entonces  $u$  pertenece a dos arcos. Esto se debe a que  $u$  tiene dos parejas base de  $e_k$ ,  $(p, q)$  y  $(r, s)$  para las cuales los triángulos  $\triangle qup$  y  $\triangle sur$  son triángulos de escape de  $e_k$ , ver figura 4.1.1.

Así tenemos que los arcos asociados a las parejas base de  $e_k$  forman una sucesión  $\mathcal{A}^k = \{a_i\}_1^d$  tales que  $a_i \cap a_{i+1} = \{u_i\}$ . A  $\mathcal{A}^k$  la llamaremos cadena de  $e_k$ .

**Corolario 4.1.4.**  *$\mathcal{A}^k$  es monótona respecto de  $e_k$ .*

Sean  $\pi_k : \mathcal{A}^k \rightarrow e_k$  la proyección perpendicular de  $\mathcal{A}^k$  en  $e_k$  y  $\tau_k : e_k \rightarrow [0, 1]$  un homeomorfismo tal que  $\tau_k(b_k) = 0$ . Tenemos que  $\tau_k \circ \pi_k : \mathcal{A}^k \rightarrow [0, 1]$

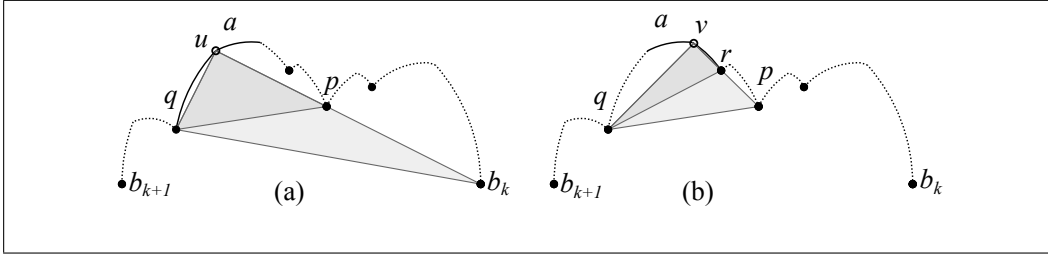


Figura 4.1.1: (a)  $u$  es extremo de dos arcos generados por las parejas base  $(b_k, q)$  y  $(p, q)$ . (b)  $v$  está generado por las parejas  $(p, q)$  y  $(r, q)$ .

induce un orden natural en los puntos de  $\mathcal{A}^k$ . En adelante diremos que dos puntos  $u$  y  $v$  en  $\mathcal{A}^k$  cumplen que  $u < v$  si y sólo si  $\tau_k \circ \pi_k(u) < \tau_k \circ \pi_k(v)$ . También llamaremos cadena entre  $u$  y  $v$  al conjunto  $\mathcal{A}^k(u, v) = \{x \in \mathcal{A}^k : u \leq x \leq v\}$ . Si  $p$  y  $q$  son dos puntos en  $\mathcal{A}^k \cap P$  tales que no existe  $r$  en  $\mathcal{A}^k \cap P$  que cumpla que  $p < r < q$ , entonces diremos que  $p$  y  $q$  son consecutivos en  $\mathcal{A}^k$  y que  $\mathcal{A}^k(p, q)$  es una subcadena.

Sea  $y$  en  $\mathcal{A}^k$ . Sabemos que existen  $p$  y  $q$  en  $P$  tales que  $\triangle qyp$  escapa por  $e_k$ . De modo que existen  $\theta$  en  $[0, 2\pi)$  y  $j$  en  $\mathbb{N}$  tales que  $\triangle qyp = s_\theta(j)$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $s_\theta(j) \subset Q_\theta^1(y)$ .

**Observación 4.1.5.**  $Q_\theta^1(y)$  no intersecta a  $\mathcal{A}^k$  más que en su frontera.

La observación anterior se justifica de la siguiente manera, ver figura 4.1.2. Sea  $t$  un punto en  $Q_\theta^1(y)$  y  $\gamma$  en  $[0, 2\pi)$  tal que  $Q_\gamma^1(t) \subset W^k(t)$ . Notemos que alguno de los dos rayos que parten de  $t$  contenidos en la frontera de  $Q_\gamma^1(t)$  está contenido en  $Q_\theta^1(y)$ . Concluimos que  $t$  no pertenece a  $\mathcal{A}^k$  puesto que  $Q_\theta^1(y)$  contendría a un punto de  $P$  en su interior.

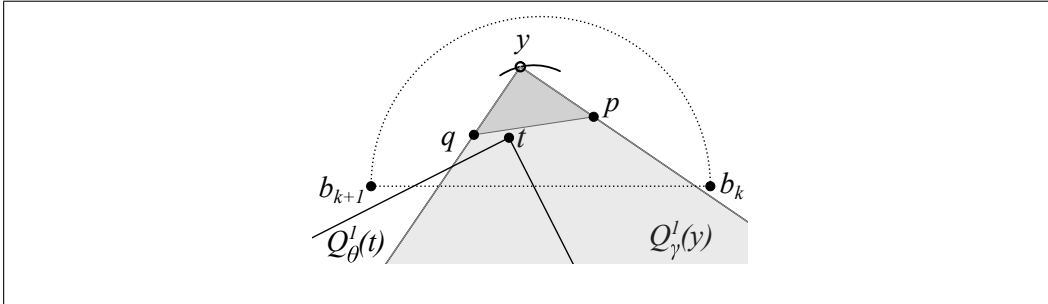


Figura 4.1.2:  $t$  no pertenece a  $\mathcal{A}^k$ .

Una consecuencia directa de la observación anterior es que cualesquiera tres puntos  $x, y$  y  $z$  en  $\mathcal{A}^k$  tales que  $x < y < z$  cumplen que  $\angle zyx \geq \frac{\pi}{2}$ .

**Lema 4.1.6.** Sean  $p$  y  $q$  en  $\mathcal{A}^k \cap P$  puntos consecutivos. No existen tres puntos en  $\mathcal{A}^k(p, q)$  que sean colineales.

*Demostración.* Sean  $x, y$  y  $z$  en  $\mathcal{A}^k(p, q)$ , con  $x < y < z$  y supongamos que son colineales en una recta  $l$ , ver figura 4.1.3. Claramente  $y$  pertenece a un arco  $a$  en  $\mathcal{A}^k$ , supongamos que  $a$  está asociado a  $(r, s)$ . Así  $\angle syr = \frac{\pi}{2}$ . Dado que  $x < y < z$  obtenemos que sólo uno de los puntos  $x$  o  $z$  puede pertenecer al círculo de diámetro  $\overline{rs}$ ,  $C(rs)$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $z$  lo cumple. Tenemos que  $\angle sxx < \frac{\pi}{2}$ . Esto implica que el punto  $x$  no es ápice de un triángulo de escape de  $e_k$  puesto que  $s$  o  $r$  lo evitaría. Esto contradice el que  $x$  pertenezca a  $\mathcal{A}^k$ . Concluimos que  $x, y$  y  $z$  no son colineales. □

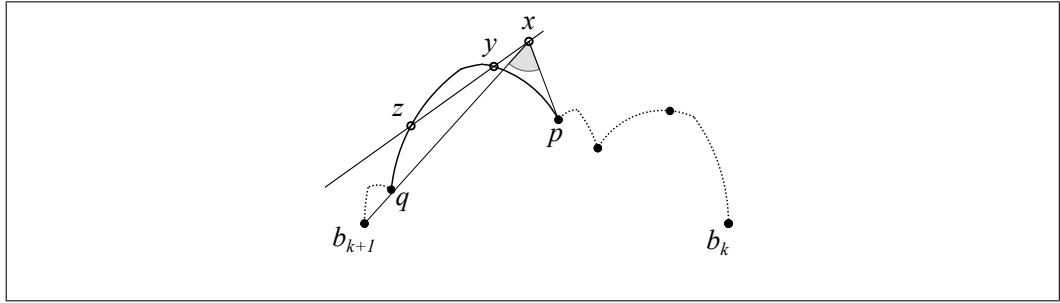


Figura 4.1.3: En este caso  $r = p$  y  $s = b_{k+1}$ .

Sea  $c$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $c \leq d(p, q)$ , con  $p$  y  $q$  puntos consecutivos en  $\mathcal{A}^k$ . Supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $c = 1$ .

**Lema 4.1.7.** Sea  $S$  un cuadrado cuyos lados miden 1 tal que alguno de sus lados es paralelo a  $e_k$  y  $\mathcal{A}^k \cap S \neq \emptyset$ . A lo más cuatro puntos en  $\mathcal{A}^k \cap P$  están contenidos en  $S$ .

*Demostración.* Sean  $r, s$  y  $t$  tres puntos consecutivos en  $\mathcal{A}^k \cap P$  tales que  $r < s < t$ . Haremos esta prueba por casos.

*Caso I*  $d(r, e_k) < d(s, e_k) < d(t, e_k)$  o  $d(r, e_k) > d(s, e_k) > d(t, e_k)$ . Figura 4.1.4(a)



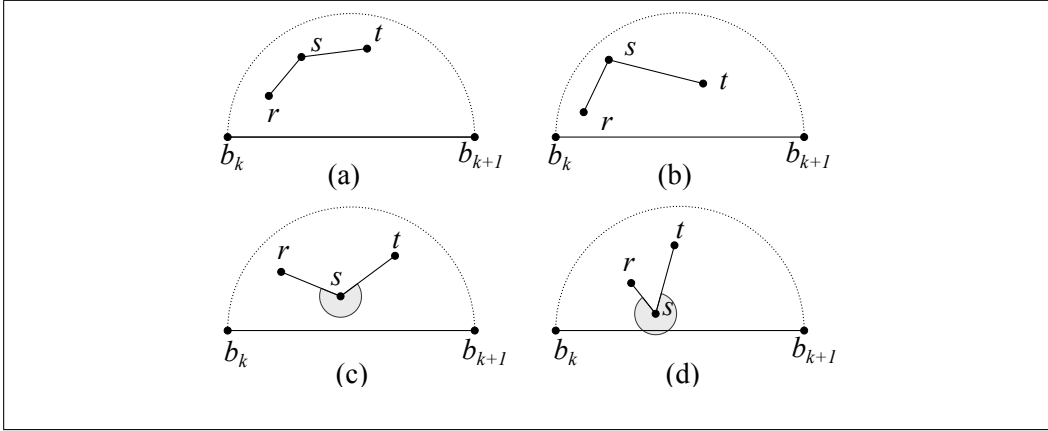


Figura 4.1.4: Se muestran los cuatro casos de las distribuciones de  $r$ ,  $s$  y  $t$ .

En este caso tenemos que  $\angle tsr > \frac{\pi}{2}$  luego  $d(r, t) > \sqrt{2}$ .

*Caso II*  $d(s, e_k)$  es mayor que  $d(r, e_k)$  y  $d(t, e_k)$ . 4.1.4(b)

En este otro caso tenemos que  $\angle tsr \leq \frac{\pi}{2}$ , luego  $d(r, t) \geq \sqrt{2}$ .

*Caso III*  $d(s, e_k)$  es menor que  $d(r, e_k)$  y  $d(t, e_k)$  y  $\frac{\pi}{2} \leq \angle tsr \leq \frac{3\pi}{2}$ . Figura 4.1.4(c).

Tenemos que  $d(r, t) \geq \sqrt{2}$ .

*Caso IV*  $d(s, e_k)$  es menor que  $d(r, e_k)$  y  $d(t, e_k)$  y  $\angle tsr > \frac{3\pi}{2}$ . Figura 4.1.4(d).

Este es el único caso en el que  $d(r, t) < \sqrt{2}$ .

Sea  $u$  en  $\mathcal{A}^k \cap P$  el punto consecutivo a  $t$ . Tenemos que  $s$ ,  $t$  y  $u$  caen en cualquiera de los casos anteriores. De modo que  $d(r, u) > \sqrt{2}$ . Así tenemos que para que cuatro puntos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $w$  de  $\mathcal{A}^j \cap P$ ,  $x < y < z < w$  estén contenidos en  $S$  necesitan estar en la siguiente configuración. Los puntos  $x$  y  $y$  son consecutivos y  $d(x, e_k) > d(y, e_k)$  y  $z$  y  $w$  son consecutivos tales que  $d(z, e_k) < d(w, e_k)$ , como en la siguiente figura.

□

Para terminar esta sección veamos la figura 4.1.6, en la que se representa  $\bigcup_{k=1}^h \mathcal{A}^k$  de acuerdo a la descripción hecha anteriormente.

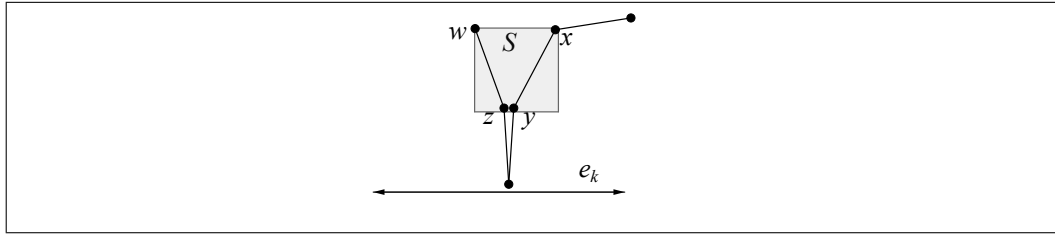


Figura 4.1.5: Se muestra  $\mathcal{A}^k$ ,  $k = 1, \dots, h$ .

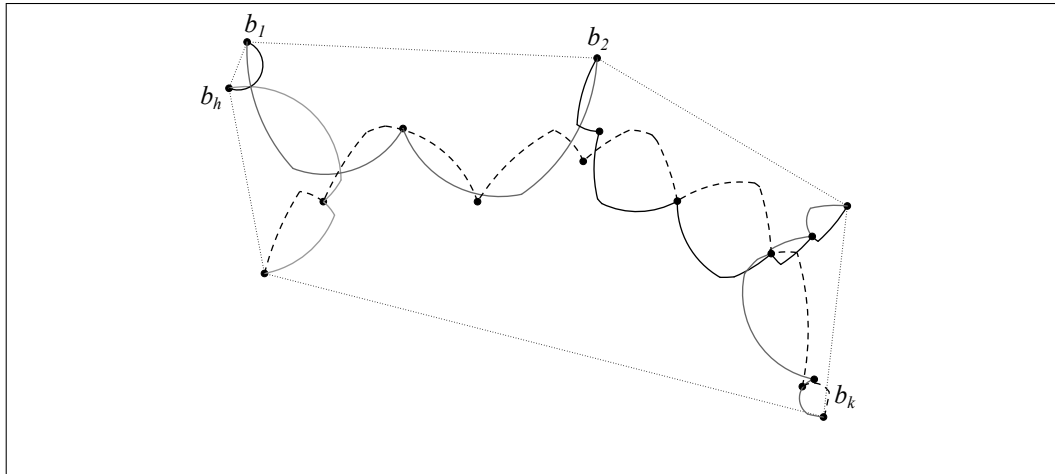


Figura 4.1.6: Se muestra  $\mathcal{A}^k$ ,  $k = 1, \dots, h$ .

## 4.2. Intersecciones entre cadenas

En esta sección daremos una cota superior en el número de intersecciones entre las cadenas de  $P$ . Veremos que una condición necesaria para que se dé un traslape entre dos escalones de escaleras opuestas, es que se dé una intersección entre dos subcadenas. Así obtendremos una cota superior para el número de traslapes. Para ello haremos uso de un teorema en [1], el cual se enuncia a continuación.

Sea  $\mathcal{D}(P)$  un conjunto finito de círculos con la propiedad de que todo punto  $x$  en el plano pertenece a lo más a  $k$  de ellos,  $k$  en  $\mathbb{N}$ .

**Teorema 4.2.1.** [1]

*Sea  $D$  la circunferencia con diámetro menor en  $\mathcal{D}(P)$ . El número de elementos de  $\mathcal{D}(P)$  que interseccionan a  $D$  es a lo más  $7k$ .*

Claramente, el conjunto  $R$  cuyos elementos son los círculos cuyo diámetro son las aristas de  $\mathcal{CH}(P)$  cumple que todo punto en el plano pertenece a lo más a tres de sus elementos<sup>1</sup>.

Sean  $p$  y  $q$  tales que

$$d(p, q) = \text{mín}\{d(t, u) : t, u \text{ son consecutivos en } \mathcal{A}^k, \text{ p.a. } k = 1, 2, \dots, h\}$$

y  $C(pq)$  el círculo cuyo diámetro es el segmento  $\overline{pq}$ .

Luego  $R \cup C(pq)$  es tal que todo punto en el plano pertenece a lo más a cuatro de sus elementos. Es claro que,  $d(p, q) \leq d(b_k, b_{k+1})$  para toda  $k$  en  $\{1, 2, \dots, h\}$ . Luego  $C(pq)$  es intersectado por a lo más 28 elementos de  $R$ . Concluimos que  $C(pq)$  es tal que a lo más 28 elementos de  $\{C_k\}_{k=1}^h$  lo intersectan.

Supongamos que  $\mathcal{A}^k$  tiene a  $p$  y  $q$  como puntos consecutivos.

**Lema 4.2.2.** *Si  $C_j$  intersecta a  $\mathcal{A}^k(p, q)$ , entonces a lo más seis de sus subcadenas intersectan a  $\mathcal{A}^k(p, q)$ .*

*Demostración.* Sea  $S$  el cuadrado cuyos lados miden  $d(p, q)$  y alguno de sus lados es paralelo a  $e_j$  tal que  $C(pq) \subset S$ . Por el lema 4.1.7, existen a lo más cuatro puntos en  $\mathcal{A}^j \cap P$  están contenidos en  $S$ . Esto implica que a lo más 6 subcadenas de  $\mathcal{A}^j$  intersectan a  $S$ . Por tanto a lo más seis subcadenas de  $\mathcal{A}^j$  intersectan a  $\mathcal{A}^k(p, q)$ . □

Es claro que  $\mathcal{A}^k(p, q) \subset C(pq)$ , así del lema 4.2.2 y del teorema 4.2.1 obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.3.**  *$\mathcal{A}^k(p, q)$  es intersectado por 168 subcadenas a lo más.*

Con este corolario estableceremos una cota en el número de intersecciones totales entre las subcadenas de  $P$ .

**Lema 4.2.4.**  $|\{x : x \in \mathcal{A}^j \cap \mathcal{A}^k, j, k \in \{1, 2, \dots, h\}\}| \in O(n)$

*Demostración.* Por el corolario 4.2.3 toda subcadena es intersectada por un número constante de subcadenas de diámetro mayor. Además dos subcadenas se intersectan a lo más 2 veces. Concluimos que  $|\{x : x \in \mathcal{A}^j \cap \mathcal{A}^k, j, k \in \{1, 2, \dots, h\}\}|$  es de orden  $O(n)$ . □

---

<sup>1</sup>La única configuración en la que un punto en el plano pertenece a cuatro de ellas es cuando el  $\mathcal{CH}(P)$  tiene cuatro vértices tan sólo.

### 4.3. Número de traslapes

Con la ayuda del lema 4.2.4 es fácil establecer una cota en el número de traslapes entre escalones de  $P$ . Sean  $\triangle qup$  un triángulo que escapa por  $e_j$  y  $\triangle svr$  uno que escapa por  $e_k$ . Observemos que el área entre  $e_k$  y  $\mathcal{A}^k$  no contiene puntos de  $P$ . Esta observación nos servirá para probar el siguiente lema.

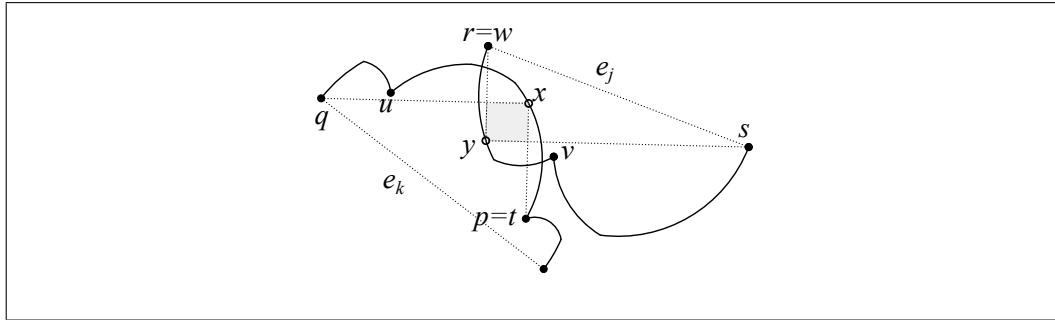


Figura 4.3.1: En este caso  $b_j = r = w$ ,  $b_{k+1} = q$  y  $p = t$ .

**Lema 4.3.1.** *Si  $\triangle qxp$  y  $\triangle svr$  se traslapan, entonces las subcadenas de  $\mathcal{A}^k$  y  $\mathcal{A}^j$  que contienen a  $x$  y  $y$  respectivamente se intersectan.*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{A}^k(t, u)$  y  $\mathcal{A}^j(v, w)$  son dichas subcadenas. Dado que  $\triangle qxp$  y  $\triangle svr$  se traslapan, tenemos que  $p$  y  $q$  se encuentran de un lado de  $\mathcal{A}^j$  y  $x$  del lado opuesto. De igual manera,  $r$  y  $s$  se encuentran de un lado de  $\mathcal{A}^k$  mientras que  $y$  se encuentra del lado opuesto. Por el lema 4.1.6 y el hecho de que  $\mathcal{A}^k(t, u)$  y  $\mathcal{A}^j(v, w)$  son continuas concluimos que  $\mathcal{A}^k(t, u)$  y  $\mathcal{A}^j(v, w)$  se intersectan.

□

El lema 4.3.1 establece una condición necesaria para que se de un traslaje. De modo que el número de traslapes totales de  $P$  está acotado por el número de intersecciones entre las cadenas de  $P$ . Así por el lema 4.2.4 obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.3.2.** *El número de traslapes de escalones de  $P$  es de orden lineal.*

Con este corolario terminamos el análisis geométrico de los arcos en  $P$ . En el siguiente capítulo veremos cómo resolver el problema del cierre convexo rectilíneo de orientado área mínima en tiempo  $O(n \log n)$ .

# Capítulo 5

## Algoritmo propuesto

En este capítulo resolveremos el problema del cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima. Anteriormente hemos mencionado que en [2] se resuelve este problema en tiempo cuadrático. La solución que ofrecemos a continuación toma tiempo  $O(n \log n)$ . Para ello procederemos de la siguiente manera. Buscaremos las intersecciones entre los arcos de  $P$ . Luego buscaremos los traslapes de escalones entre las intersecciones de dichos arcos. Por último mostraremos una manera eficiente de mantener el área de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  a lo largo de una rotación del sistema coordenado respecto del origen.

### 5.1. Generación de arcos

En [1] se prueba que la lista de los intervalos de vida de los elementos de  $P$  puede ser calculada en tiempo  $O(n \log n)$ . Dichos intervalos son guardados en una lista  $\mathcal{T}$ .

Tenemos que  $\mathcal{T}$  es una tabla que consiste de  $O(n)$  segmentos horizontales en  $\mathbb{R}^2$ , ver figura 5.1.1(a). Cada segmento está asociado a un punto  $p$  de  $P$  y a uno de sus intervalos de vida  $[\lambda, \mu]$ . Así en la  $\lambda$ -orientación se da un evento de entrada de  $p$  y en la  $\mu$ -orientación se da uno de salida de  $p$ .

Para cada  $\theta$ , el conjunto de intervalos de vida de puntos de  $P$  que lo contienen está representado en  $\mathcal{T}$  por todos los segmentos que contienen a  $\theta$  en su proyección sobre el eje horizontal. Estos puntos son exactamente los vértices de  $\mathcal{S}_\theta^1(P)$ , ver figura 5.1.1. Además  $\mathcal{S}_\theta^2(P) = \mathcal{S}_{\theta+\frac{\pi}{2}}^1(P)$ ,  $\mathcal{S}_\theta^3(P) = \mathcal{S}_{\theta+\pi}^1(P)$  y

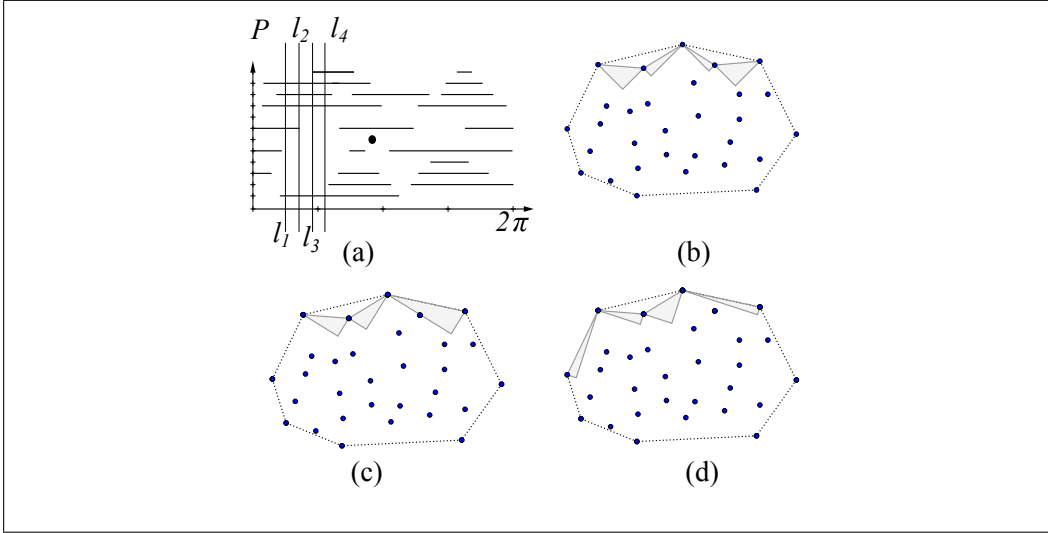


Figura 5.1.1: (a) Cuatro líneas verticales que intersectan a las aristas de  $\mathcal{T}$ . (b) La escalera  $\mathcal{S}_{\theta_1}^1(P)$  correspondiente a  $l_1$ . (c)  $\mathcal{S}_{\theta_2}^1(P)$ . (d)  $\mathcal{S}_{\theta_4}^1(P)$

$\mathcal{S}_{\theta}^4(P) = \mathcal{S}_{\theta + \frac{3\pi}{4}}^1(P)$ . De forma que es posible generar todos los arcos de  $P$  variando  $\theta$  de 0 a  $2\pi$ . Así obtenemos una lista  $\mathcal{A}$  cuyos elementos son los arcos de  $P$  y tienen la forma  $(p, q, j, \eta, \gamma)$ . Estos datos indican que los puntos  $p$  y  $q$  forman un triángulo de escape de  $e_j$  en la  $\theta$ -orientación,  $\theta$  en  $[\eta, \gamma]$ , los ápices de estos triángulos forman un arco de  $P$ . Los elementos de  $\mathcal{A}$  estarán ordenados de la siguiente manera. Diremos que  $(p, q, j, \eta, \gamma) < (r, s, k, \lambda, \mu)$  en  $\mathcal{A}$  si y sólo si se cumple alguno de los siguientes dos enunciados.

-  $j < k$ .

- Sean  $y$  en  $(r, s, k, \lambda, \mu)$  y  $x$  en el arco  $(p, q, j, \eta, \gamma)$ . Se cumple que  $j = k$  y las proyecciones ortogonales de  $y$  y  $x$  en  $e_j$ ,  $\pi_y$  y  $\pi_x$ , son tales que  $d(\pi_x, e_j) < d(\pi_y, e_j)$ .

Dado que los extremos de los segmentos de  $\mathcal{T}$  representan un evento de entrada o salida de un punto  $p$  en  $P$ , tenemos que se formarán a lo más dos nuevos elementos en  $\mathcal{A}$ . El tiempo necesario para insertar dichos elementos en  $\mathcal{A}$  es logarítmico. Luego el barrido toma tiempo  $O(n \log n)$  en total.

## 5.2. Búsqueda de traslapes de escalones

Para determinar los traslapes de los escalones de  $P$ , es necesario que encontremos las intersecciones de los arcos de  $\mathcal{A}$  generados en la sección anterior. El propósito de esta sección es encontrar dichas intersecciones.

Hemos obtenido una lista  $\mathcal{A}$  de todos los arcos  $(p, q, j, \eta, \gamma)$  de  $P$ . Para encontrar los traslapes entre los escalones de  $P$  haremos lo siguiente: Dividiremos cada elemento de  $\mathcal{A}$  en tres arcos de circunferencia que sean monótonos respecto del eje  $X$  y del eje  $Y$ . Luego hacemos un barrido de línea para encontrar las intersecciones entre los elementos de  $\mathcal{A}$ , [3], [4]. El tiempo necesario para hacer el barrido es de  $O(m + n \log n)$ , donde  $m$  es el número de intersecciones entre los elementos de  $\mathcal{A}$ . Por el corolario 4.3.2 tenemos que el número de intersecciones entre los arcos de  $P$  es de orden  $O(n)$ . Por tanto el tiempo total del barrido tiene una cota de  $O(n \log n)$ .

Sea  $I(\mathcal{A})$  la lista de intersecciones entre elementos de  $\mathcal{A}$  obtenida del barrido. Los elementos  $\{t_i\}_{i=1}^d$  de  $I(\mathcal{A})$  son puntos en el plano. Cada  $t_i$  está asociado a dos arcos  $(p_i, q_i, j_i, \eta_i, \gamma_i)$  y  $(r_i, s_i, k_i, \lambda_i, \mu_i)$ . Ordenaremos  $I(\mathcal{A})$  de forma que si  $i$  es impar, entonces  $t_i$  y  $t_{i+1}$  son las intersecciones entre dos subcadenas de  $\mathcal{A}^{j_i}$  y  $\mathcal{A}^{k_i}$ . En el resto de esta sección denotaremos por  $\mathcal{A}_i^j(t)$  a  $\mathcal{A}^{j_i}(t_i, t_{i+1})$  y por  $\mathcal{A}_i^k(t)$  a  $\mathcal{A}^{k_i}(t_i, t_{i+1})$ .

Diremos que  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$  determinan un traslape si existe  $\theta$  en  $[0, 2\pi)$  tal que en la  $\theta$ -orientación existen dos triángulos de escape de  $e_{j_i}$  y  $e_{k_i}$  que se traslapan y cuyos ápices pertenecen a  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$  respectivamente.

Observemos que  $\Delta q_i t_i p_i$  y  $\Delta q_{i+1} t_{i+1} p_{i+1}$  son de escape en  $e_{j_i}$  para algunas orientaciones  $\theta_i$  y  $\theta_{i+1}$  respectivamente. De manera análoga  $\Delta s_{i+1} t_{i+1} r_{i+1}$  y  $\Delta s_i t_i r_i$  son de escape en  $e_{k_i}$  para algunas orientaciones  $\rho_{i+1}$  y  $\rho_i$  respectivamente, ver figura 5.2.1. Así que para dos elementos consecutivos  $t_i$  y  $t_{i+1}$  en  $I(\mathcal{A})$ ,  $i$  impar, tenemos dos intervalos asociados  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$  y  $[\rho_i, \rho_{i+1}]$ . Estos intervalos nos indicarán si existen uno o varios traslapes de escalones entre las subcadenas en cuestión.

**Lema 5.2.1.** *Si  $[\theta_i + \pi, \theta_{i+1} + \pi] \cap [\rho_i, \rho_{i+1}] \neq \emptyset$ , entonces  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$  determinan un traslape.*

*Demostración.* Sabemos que para toda  $\theta$  en  $[\theta_i + \pi, \theta_{i+1} + \pi]$  existen  $a, b$  en  $P$ ,  $u$  en  $\mathcal{A}^{j_i}$  tales que  $\Delta bua$  es de escape en  $e_{j_i}$ , donde el segmento  $\overline{ub}$  el segmento horizontal de  $\Delta bua$ . Además para toda  $\gamma$  en  $[\rho_i, \rho_{i+1}]$  existen  $c$  y  $d$



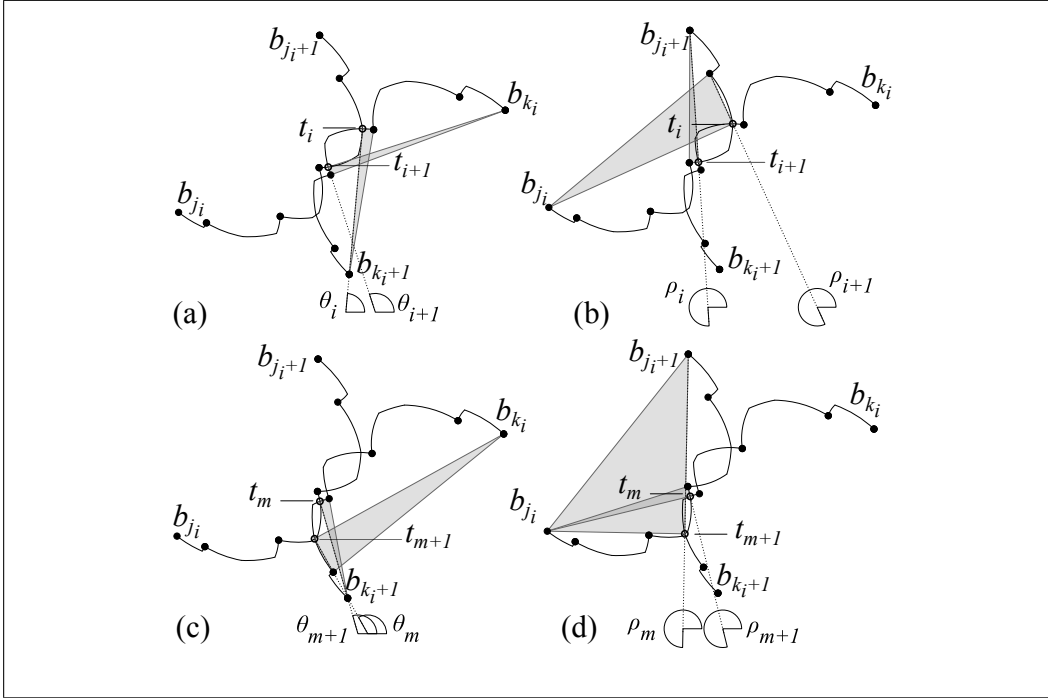


Figura 5.2.1: (a)  $\theta_i = 84,83$ ,  $\theta_{i+1} = 107,9$ . (b)  $\rho_i = 273,72$ ,  $\rho_{i+1} = 294,58$ . (c)  $\theta_m = 105,93$ ,  $\theta_{m+1} = 119,12$ . (d)  $\rho_m = 269,9$ ,  $\rho_{m+1} = 283,77$ .

en  $P$  y  $v$  en  $\mathcal{A}^{k_i}$  tales que  $\triangle dvc$  es de escape en  $e_k$ , donde el segmento  $\overline{vd}$  el segmento horizontal de  $\triangle dvc$ .

Sea  $f(\theta)$  la intersección entre los segmentos  $\overline{t_i t_{i+1}}$  y  $\overline{ub}$  y sea  $g(\gamma)$  la intersección entre  $\overline{t_i t_{i+1}}$  y  $\overline{vd}$ . Es claro que  $f([\theta_i + \pi, \theta_{i+1} + \pi]) = \overline{t_i t_{i+1}} = g([\rho_i, \rho_{i+1}])$ . Dado que  $[\theta_i + \pi, \theta_{i+1} + \pi] \cap [\rho_i, \rho_{i+1}] \neq \emptyset$  concluimos que existe  $\eta$  tal que  $f(\eta) = g(\eta)$ . Esto implica que los segmentos horizontales de los triángulos de escape  $\triangle bua$  y  $\triangle dvc$  están alineados en la  $\eta$ -orientación, ver figura 5.2.2. Por tanto  $\triangle bua \cap \triangle dvc \neq \emptyset$  es un traslape.

□

El lema anterior establece una condición necesaria para que se de un traslape entre dos subcadenas que se intersectan. Una consecuencia del lema anterior se prueba en el siguiente lema.

**Lema 5.2.2.** *Si  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$  determinan un traslape, entonces cualquier otra subcadena que intersecte a  $\mathcal{A}_i^j(t)$  o  $\mathcal{A}_i^k(t)$  no determinará un traslape.*

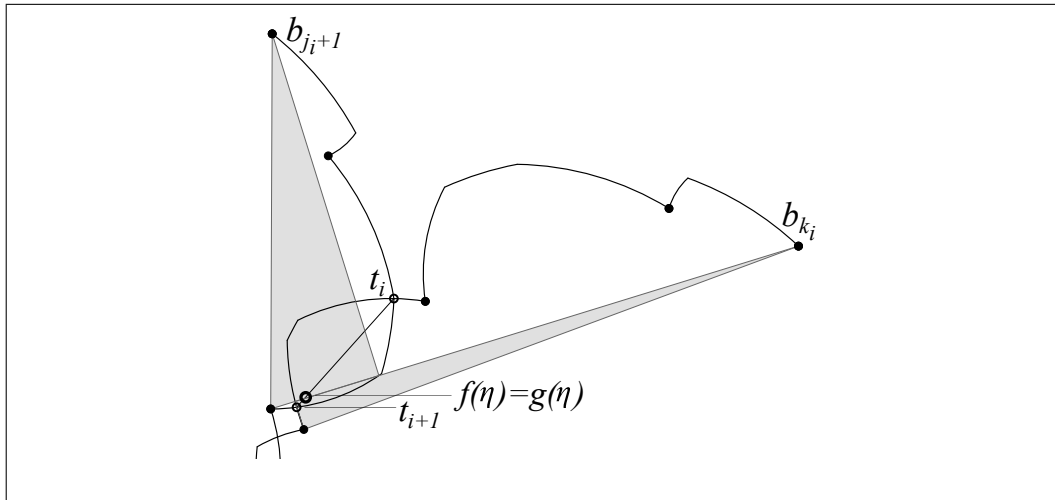


Figura 5.2.2: Se muestra un acercamiento de las mismas cadenas que en la figura 5.2.1.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{A}^m(p, q)$  es una subcadena que intersecta a  $\mathcal{A}_i^j(t)$ . Dado que  $m \neq j_i$ , tenemos que los escalones con ápices en  $\mathcal{A}^m(p, q)$  no existen en las mismas orientaciones que los escalones con ápices en  $\mathcal{A}_i^j(t)$ . De modo que  $\mathcal{A}^m(p, q)$  y  $\mathcal{A}_i^j(t)$  no determinan traslapes de escalones, ver figura 5.2.3.

□

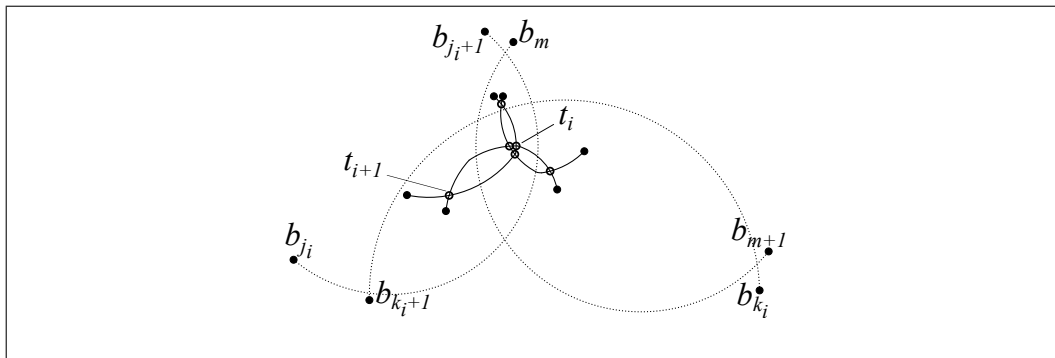


Figura 5.2.3: Las subcadenas de  $\mathcal{A}^m$  intersectan a  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$ . Estas intersecciones no determinan traslapes.

Por último estableceremos una cota en el número de traslapes que determinan

$\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$ .

**Lema 5.2.3.** *Sean  $m$  y  $l$  el número de arcos en  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$ . El número de traslapes determinados por  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$  está acotado por  $O(m + l)$ .*

*Demostración.* Sean  $f(\theta)$  y  $g(\gamma)$  definidas como en la prueba del lema 5.2.1 y sea  $a$  un arco en  $\mathcal{A}_i^j(t)$ . Sean  $b$  y  $c$  dos arcos en  $\mathcal{A}_i^k(t)$ . Supongamos que  $a$  determina traslapes únicamente con los arcos en  $\mathcal{A}_i^k(t)$  que se encuentran entre  $b$  y  $c$ . Es claro que  $f(\theta)$  se mueve en la dirección opuesta a  $g(\gamma)$  sobre  $\overline{t_i t_{i+1}}$ . Esto implica que cualquier  $a'$  en  $\mathcal{A}_i^j(t)$  entre  $b$  y  $c$  no determina un traslape con un arco  $a' \neq a$  en  $\mathcal{A}_i^k(t)$ . Los únicos arcos entre  $b$  y  $c$  que pueden cumplir con ello son  $b$  y  $c$ .

Numeremos los arcos de  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$  de la siguiente manera  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  y  $(b_1, b_2, \dots, b_l)$ . Sean  $b_{i_1}, \dots, b_{i_2}$  los arcos en  $\mathcal{A}_i^k(t)$  que determinan un traslape con  $a_1$ . Supongamos que  $b_{i_{2h-1}}, \dots, b_{i_{2h}}$  determinan un traslape con  $a_h$ ,  $h$  en  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Dado que  $b_{i_{2h}}$  puede ser igual a  $b_{i_{2h+1}}$ , concluimos que el número máximo de traslapes determinados por  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$  es de  $l + m + 1$  el cual pertenece a  $O(l + m)$ .

□

Con estos tres lemas plantearemos una manera rápida de encontrar todos los traslapes de escalones de  $P$ . Sea  $i$  impar. Por el lema 5.2.1 tenemos que el tiempo necesario para determinar si  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$  determinan un traslape es constante. Por el lema 5.2.3 tenemos que el tiempo necesario para calcular los traslapes de escalones determinados por  $\mathcal{A}_i^j(t)$  y  $\mathcal{A}_i^k(t)$  está acotado por el número de arcos en  $\mathcal{A}_i^j(t) \cup \mathcal{A}_i^k(t)$ . Por último el lema 5.2 nos indica que los arcos que han sido checados en búsqueda de traslapes no serán verificados otra vez.

Para encontrar los traslapes de escalones de  $P$  es necesario tiempo lineal. Esto se debe a que  $O(n)$  acota al número de elementos de  $I(\mathcal{A})$  y al número de arcos de  $P$ . Como el tiempo para ordenar  $I(\mathcal{A})$  está acotado por  $O(n \log n)$ , obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 5.2.4.** *Los traslapes de escalones de  $P$  se pueden encontrar en  $O(n \log n)$ .*

### 5.3. Cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima

En esta sección describiremos la manera de actualizar y mantener el área del  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  a lo largo de una rotación del sistema coordenado respecto del origen. Usaremos las fórmulas obtenidas en el capítulo 3, la lista ordenada  $I(\mathcal{A})$  y la lista  $\mathcal{T}$  descrita en la primera sección de este capítulo y obtenida de [1].

Recordemos que un intervalo sin eventos  $I$  en  $[0, 2\pi)$  es un intervalo que es maximal respecto de la siguiente orientación: Toda  $\theta$  en  $I$  cumple que en la  $\theta$ -orientación no se dan eventos. Así que el número de intervalos sin eventos tiene la misma cota superior que el número de eventos, es decir,  $O(n)$ . Estos intervalos se pueden generar a partir de  $\mathcal{T}$  y  $I(\mathcal{A})$  en  $O(n)$  tiempo. Ordenemos pues a dichos intervalos en una lista  $\{I_h = [\alpha_h, \alpha_{h+1}]\}_{h=1}^m$ .

En el capítulo 3 hemos mostrado una fórmula para calcular el área de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  en un intervalo sin eventos  $I_h$ . Dicha fórmula es

$$area(\mathcal{RCH}_\theta) = area(\mathcal{P}) - \sum area(s_\theta(i)) + \sum area(t_\theta(j, k)) \quad (5.1)$$

Los tres términos de esta ecuación se calculan de la siguiente manera. Recordemos que los vértices  $\{p_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^m$  de  $\mathcal{P}$  tienen sus coordenadas en la 0-orientación y están ordenados respecto del orden de las escaleras de  $P$ .

$$area(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \sum (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i). \quad (5.2)$$

$$\sum area(s_\theta(i)) = \sum \frac{d_i^2}{2} \sin(\phi_i + (\alpha_h - \theta)) \cos(\phi_i + (\alpha_h - \theta)) \quad (5.3)$$

$$\sum area(t_\theta(j, k)) = \sum (A_i + B_i \cos(2(\theta - \alpha_h)) + C_i \sin(2(\theta - \alpha_h))) \quad (5.4)$$

Donde  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  son constantes y se muestran en el capítulo 3.

Otra forma de expresar el área de los escalones y de sus traslapes en  $I$  es la siguiente:

$$\sum \text{area}(s_\theta(i)) = \left[ \sum D_i \right] \cos 2\theta + \left[ \sum E_i \right] \sin \theta \cos \theta. \quad (5.5)$$

$$\sum \text{area}(t_\theta(j, k)) = \sum F_i + \left[ \sum G_i \right] \sin \theta \cos \theta + \left[ \sum H_i \right] \cos 2\theta \quad (5.6)$$

Los valores de las constantes en las dos fórmulas anteriores se muestran a continuación.

$$D_i = \frac{d_i^2}{2} \sin(\phi_i + \alpha_h) \quad E_i = -\frac{d_i^2}{2} \cos(2(\phi_i + \alpha_h)) \quad F_i = \frac{A_i + B_i}{2}$$

$$G_i = (A_i - B_i + C_i) \cos 2\alpha_h \quad H_i = -(A_i - B_i + C_i) \sin \alpha_h \cos \alpha_h.$$

Para obtener el área mínima de  $\mathcal{RCH}_\theta(P)$  en  $I_h$  es derivamos  $\text{area}(\mathcal{RCH}_\theta(P))$ .

$$\text{area}'(\mathcal{RCH}_\theta(P)) = -\sum \text{area}'(s_\theta(i)) + \sum \text{area}'(t_\theta(j, k)) \quad (5.7)$$

Calculando las derivadas obtenemos que:

$$\sum \text{area}'(s_\theta(i)) = -2 \left[ \sum D_i \right] \sin 2\theta + \left[ \sum E_i \right] \cos 2\theta. \quad (5.8)$$

$$\sum \text{area}'(t_\theta(j, k)) = \left[ \sum G_i - 2H_i \right] \cos 2\theta \quad (5.9)$$

Es claro que en la  $\alpha_{h+1}$ -orientación se da un evento, de modo que los términos constantes de las ecuaciones (5.8) y (5.9) serán diferentes en el intervalo  $I_{h+1}$ . Este cambio dependerá del tipo de evento que se da en la  $\alpha_{h+1}$ -orientación. De modo que haremos una descripción del tipo de tarea que se llevará a cabo en cada caso.

- Evento es de entrada de un punto  $p_i$  de  $P$ .

Se eliminan los términos  $D_i$  y  $E_i$  de (5.8). Se calculan las nuevas constantes  $D_i$ ,  $D_{i+1}$ ,  $E_i$  y  $E_{i+1}$  correspondientes a los dos nuevos escalones que forma  $p_i$  en la  $\alpha_{h+1}$ -orientación y se insertan en la ecuación.

- Evento es de salida de un punto  $p_i$  de  $P$ .  
Se eliminan los términos  $D_i, D_{i+1}, E_i$  y  $E_{i+1}$  de (5.8), los cuales corresponden a los escalones que se eliminan en la  $\alpha_{h+1}$ -orientación cuando  $p_i$  sale. Se calculan las nuevas constantes  $D_i$  y  $E_i$  correspondientes al escalón que se forma cuando  $p_i$  sale y se insertan en la ecuación.
- Evento es de inicio de traslape.  
Se calculan sus constantes  $G_i$  y  $H_i$  y se insertan en la ecuación (5.9).
- Evento de fin de traslape.  
Se eliminan sus constantes  $G_i$  y  $H_i$  correspondientes de (5.9).

Es claro que cada uno de estos procesos toma tiempo  $O(\log n)$ . Además el tiempo necesario para calcular el mínimo de (5.7) es constante. Luego el tiempo total para encontrar la  $\theta_0$ -orientación para la que el  $\mathcal{RCH}_{\theta_0}(P)$  tiene área mínima tiene una cota de  $O(n \log n)$ .

**Teorema 5.3.1.** *El problema del cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima tiene una cota de  $\Omega(n \log n)$ .*

*Demostración.* Hemos calculado la  $\theta_0$  para la que  $\mathcal{RCH}_{\theta_0}(P)$  tiene área mínima en  $O(n \log n)$  tiempo. Además, cada vez que se calcula el  $\mathcal{RCH}_{\theta}(P)$  es necesario calcular el  $\mathcal{CH}(P)$  y éste tiene una cota de  $\Omega(n \log n)$ , [8]. Por tanto, el problema del cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima tiene una cota de  $\Omega(n \log n)$ .

□

De esta manera hemos respondido a la pregunta del artículo [2] en donde se buscaba una cota menor a  $O(n^2)$  para resolver el problema del cierre convexo rectilíneo orientado de área mínima.

# Bibliografía

- [1] David Avis, Bryan Beresford-Smith, Luc Devroye, Hossam Elgindy, Eric Guévremont, Ferrán Hurtado, and Binhai Zhu. Unoriented theta-maxima in the plane: Complexity and algorithms. *SIAM J. Comput.*, 28(1):278–296, 1998.
- [2] Sang Won Bae, Chunseok Lee, Hee-Kap Ahn, Sunghee Choi, and Kyung-Yong Chwa. Computing minimum-area rectilinear convex hull and L-shape. *Computational Geometry*, 42(9):903–912, 2009.
- [3] Jon L. Bentley and Thomas A. Ottman. Algorithms for Reporting and Counting Geometric Intersections. *BIT*, c-28(9):643–647, September 1979.
- [4] Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars, and Otfried Cheong. *Computational Geometry, Algorithms and Applications*. Springer, 2010.
- [5] Hsiang-Tsung Kung, Fabrizio Luccio, and Franco P. Preparata. On Finding the Maxima of a Set of Vectors. *Journal of the ACM*, 22(4):469–476, October 1975.
- [6] T.M. Nicholl, D.T. Lee, Y.Z. Liao, and C.K.Wong. On the X-Y convex hull of a set of X-Y polygons. *BIT*, 4(23):456–471, September 1983.
- [7] Thomas Ottman, Eljas Soisalon-Soininen, and Derick Wood. On the definition and computation of rectilinear convex hulls. *Information Sciences*, 33(3):157–171, 1984.
- [8] Franco P. Preparata and Michael Ian Shamos. *Computational geometry: an introduction*. Springer-Verlag, 1985.

- [9] Godfried Toussaint. What is Computational Geometry? *Proceedings IEEE*, 80(9):1347–1363, September 1992.
- [10] Otfried Schwarzkopf Ulrich, Ulrich Fuchs, Gunter Rote, and Emo Welzl. Approximation of convex figures by pairs of rectangles. In *77–87; also in STACS 1990, LNCS 415*, pages 240–249. Springer-Verlag, 1990.
- [11] Emo Welzl. Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). In *Results and New Trends in Computer Science*, pages 359–370. Springer-Verlag, 1991.