UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ingeniería

División de Ingenierías Civil y Geomática

Una mirada a la transformación de Datum en México

Alumno:

Carlos Eduardo Arroyo Cruz

Director de tesis:

Ing. Bartolo Lara Andrade

Dedico este trabajo

A mis padres

Y hermanos

Agradecimientos

En este momento sería prácticamente imposible mencionar a todas las personas con las que me siento eternamente agradecido, no solo por la ayuda que me pudieron brindar sino por el simple hecho de ser parte de mi vida y más precisamente de este momento. No obstante, siento la necesidad de mencionar a algunos.

Para mi este momento es uno de los más importantes en mi vida, nunca habría podido imaginar lo duros que fueron estos últimos años y de igual manera no podría imaginar haber logrado esto solo.

Primeramente quiero agradecer a dios que me ha dado la fuerza para corregir los errores que he cometido. Mi familia que es básicamente mi mayor inspiración y el motor de mi mundo, les agradezco todo el apoyo que me han dado, la educación y los valores que me inculcaron, ellos me han enseñado a trabajar para lograr lo que quiero, me han enseñado que lo último que se debe perder son nuestras raíces y básicamente agradecer que gracias a ellos soy quien soy. Quiero dar un agradecimiento especial a mi madre, María De Lourdes Cruz Soto porque deseaba ver este momento más que cualquiera.

Por otro lado, deseo dar un agradecimiento muy especial a mi tutor de tesis el Ingeniero Bartolo Lara Andrade, que ha sido de un gran guía en la realización de este trabajo. De gran aprendizaje resultó para mi que la realización de esta Tesis no haya tenido resultados inmediatos; muy por el contrario, en ocasiones no encontraba la llave mágica que abre las puertas hacia el camino de las soluciones. Sin embargo,

enfatizar mi agradecimiento hacia el Ingeniero Bartolo por tener la paciencia ante mis dudas de novato y por escuchar atentamente los problemas que a lo largo de esta Tesis surgieron.

Y en general agradecer a todo el personal docente de la Facultad de Ingeniería ya que sin ellos simplemente no estaría escribiendo esto.

Agradecer también al INEGI por brindarme los datos necesarios para realizar este análisis.

INDICE

PREFACIO

A lo largo de los años el hombre ha querido conocer su posición y la de los objetos físicos sobre la superficie terrestre, empezando con mapas que eran al comienzo una representación simple de la realidad, en los cuales podíamos ubicarnos con respecto a objetos físicos ya existentes, se representaron montañas, ciudades o casi cualquier objeto conocido. A medida que la representación global era necesaria, pero debido a la forma irregular de la tierra (Geoide) se debieron seleccionar sistemas de coordenados de referencia (elipsoides) independientes por regiones, países o continentes, lo que nos deja con un gran número de sistemas de referencia, ya que solo redes interconectadas podrían representar globalmente a la tierra.

Es por eso que es necesario tener una manera precisa de realizar esta migración de un sistema a otro. En este trabajo se maneja una de las maneras para realizar esta migración. A lo largo de esta investigación se intentará explicar las ventajas y las desventajas de esta metodología utilizando un lenguaje sencillo haciendo énfasis en los conceptos básicos que son el punto clave para la comprensión de las transformaciones que aquí se manejaran.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se realizó con el objetivo de establecer la metodología a seguir para la conversión de datum en México. Si bien el enfoque de esta investigación yace en los elipsoides de mayor cobertura en México (clarke1866 - wgs84), esta metodología es totalmente válida para realizar transformaciones entre otros elipsoides.

Los datos que se utilizaron para la determinación de los 7 parámetros de transformación fueron proporcionados por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). Estos datos deben ser pares de puntos, es decir, deben tener coordenadas en ambos elipsoides y estar distribuidos por toda la superficie nacional. Se cuenta con una base de datos de 110 puntos. Es necesario mencionar que la base de datos con la que se cuenta de ninguna manera cubre la totalidad de la superficie de nuestro país. Debido a la poca información geodésica con la que se cuenta fue necesario utilizar todos los puntos sin discriminar el orden de levantamiento, o si estos provienen de una estación Doppler.

En el primer capítulo de este trabajo se describen los conceptos básicos que aseguraran la comprensión del problema que se intenta resolver, enfocándonos principalmente en los conceptos que describan el posicionamiento de los sistemas coordenados.

La transformación de datum la estudiaremos en el capítulo dos, donde primero nos enfocaremos en la conversión de coordenadas geodésicas a cartesianas y viceversa, además se documentaran los métodos de transformación bidimensional y tridimensional mencionando las ventajas y desventajas de ambos.

En el capitulo tres se explicara de manera general los aspectos más importantes sobre la utilización del método de los mínimos cuadrados para la solución modelos de ecuaciones sobre-determinados.

En el siguiente capítulo del trabajo nos adentraremos en el modelo con el que se determinaran los siete parámetros de transformación, (3 parámetros de traslación, 3 parámetros de rotación y la escala), así mismo, describiremos todos los pasos que nos llevaron a los resultados obtenidos.

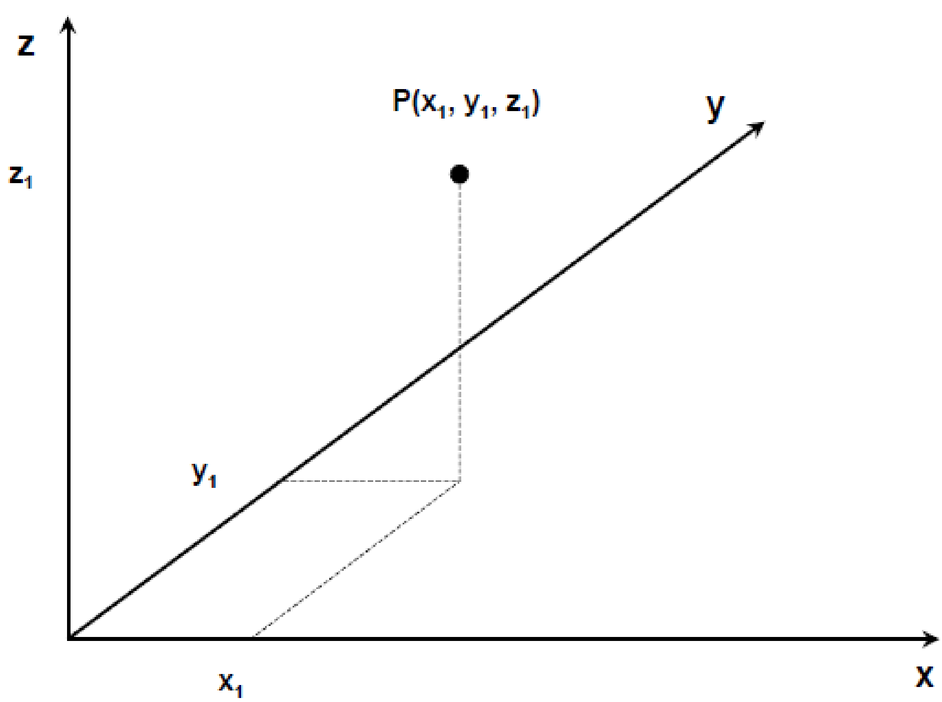
Las conclusiones se presentan en el ultimo capitulo, donde se profundizará en las problemáticas enfrentadas al tener tan poca información, y se hablará de los métodos estadísticos utilizados para mantener los resultados en un margen coherente de certeza.

Capitulo 1: Definiciones básicas

1.1 <u>Sistemas coordenados</u>

Antes que nada debemos definir a los sistemas coordenados. *Son un conjunto abstracto o físico de valores y puntos que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un espacio*. Esto quiere decir que los sistemas coordenados describen la posición espacial de cualquier objeto.

Para poder determinar si se trata de un espacio bidimensional o tridimensional es necesario conocer la dimensionalidad del espacio, esto es, el número de coordenadas que se necesitan para determinar dicha posición en el sistema coordenado. Para realizar este trabajo nos enfocamos en los espacios tridimensionales, esto quiere decir que se trabajará con tripletas coordenadas (X, Y, Z).



El sistema coordenado cartesiano es de vital importancia en esta investigación ya que es necesario conocer las coordenadas cartesianas de los puntos a estudiar, el sistema cartesiano es un sistema coordenado Euclideano, esto quiere decir que, está formado por ejes coordenados rectos y mutuamente ortogonales.

En estos espacios Euclideanos no solo podemos definir al sistema coordenado cartesiano sino a algunos sistemas coordenados curvilíneos. Los dos más importantes serian el sistema curvilíneo elipsoidal φ, λ, h, con h medida desde el elipsoide de referencia, y el sistema curvilíneo astronómico φ, Λ, H, con H siendo la altura ortométrica medida desde el geoide [Vanicek, 1975].

Comúnmente, las coordenadas curvilíneas se pueden expresar en función de las coordenadas cartesianas, a estas ecuaciones se les conocen como ecuaciones de transformación. Debido a que la dificultad de las ecuaciones de transformación que van del sistema elipsoidal al sistema cartesiano es muy alta y no es objetivo de este trabajo no se estudiaran con mayor profundidad, estas están dadas en algunas publicaciones como Paul 1973 [Vanicek, 1975]..

Por otro lado, la transformación inversa entre estos dos sistemas es mucho más sencilla y están dadas por las siguientes ecuaciones [Krakiwski and Wells, 1971]:

$$\mathrm{X} = (\mathrm{N} + \mathrm{h}) \cos\phi \cos\lambda$$

$$\mathrm{Y} = (\mathrm{N} + \mathrm{h}) \cos\phi \,\mathrm{seno}\, \lambda$$

$$\mathrm{Z} = (\mathrm{N}(1 - \mathrm{e}^2) + \mathrm{h}) \sin\phi$$

Ecuaciones de transformación (1)

Donde N es el radio de curvatura de la sección normal en el punto sobre la superficie del elipsoide, y está determinado por la latitud ϕ, el semi-eje mayor ***a*** y el cuadrado de la primera excentricidad del elipsoide e^2.

$$N(\phi, a, \mathrm{e}^2) = \frac{\mathrm{a}}{(1 - \mathrm{e}^2 \mathrm{sen}\phi)^{\frac{1}{2}}}$$

1.1.1 Líneas y superficies coordenadas

Los espacios coordenados cuentan con líneas y superficies coordenadas. Las líneas coordenadas son las líneas en donde dos de las tres coordenadas permanecen constantes, un ejemplo de esto sería el eje coordenado X del sistema cartesiano puesto que en esta línea las coordenadas Y=Z=0.

Las superficies coordenadas se describen de una manera similar, solo que en esta ocasión una de las tres coordenadas permanecerá constante, de igual manera el plano coordenado XY en el sistema cartesiano es una superficie coordenada de referencia en donde la componente Z=0.

1.1.2 Sistema coordenado geodésico

Vale la pena mencionar que un gran número de investigadores han dado muchas definiciones a los sistemas geodésicos, lo que de una manera sencilla podría definirse como; un recurso matemático que permite asignar coordenadas a puntos sobre la superficie terrestre. Otra definición seria, la familia de sistemas a la cual el sistema elipsoidal (φ, λ, h) pertenece. Los sistemas de referencia geodésicos definen la forma y dimensión de la superficie que se aproxima a la de la tierra, así como el origen y orientación de los sistemas de coordenadas. Los sistemas de referencia geodésicos pueden ser descritos en base a dos modelos matemáticos: el esférico y el elipsoidal, los cuales son obtenidos en base a parámetros físicos medidos sobre la superficie terrestre, tales como la aceleración de gravedad.

Estos sistemas son utilizados en geodesia, navegación, cartografía y sistemas globales de navegación por satélite para la correcta georreferenciación de elementos en la superficie terrestre. Estos sistemas son necesarios dado que la tierra no es una esfera perfecta.

Debido a que la tierra no tiene una forma regular el sistema geodésico ha sido escogido de manera independiente por distintos países o continentes, esto resulta en un gran problema ya que solo una red de sistemas geodésicos terrestres sería capaz de expresar la posición sobre la tierra, por medio de la relación con un datum geodésico.

Dentro de estos cabe distinguir los llamados sistemas locales, que utilizan para su definición un elipsoide determinado y un punto datum, y los sistemas globales cuyos parámetros están dados por una terna rectangular (X, Y, Z) cuyo origen se encuentra en el centro de gravedad terrestre. Para definir las coordenadas geodésicas (latitud, longitud y altura) cuentan con un elipsoide de revolución asociado.

Los sistemas globales de coordenadas nos permiten definir posiciones sobre la superficie de la Tierra. El más comúnmente usado es el de la latitud, longitud y altura. El primer meridiano (Greenwich) y el ecuador son los planos fundamentales a partir de los cuales se mide la latitud y la longitud.

1.1.2.1 <u>Sistema geodésico horizontal en México</u>

Todo punto perteneciente a un levantamiento geodésico horizontal, deberá estar referido al Marco de Referencia Terrestre Internacional (ITRF) definido por el Servicio Internacional de Rotación de la Tierra (IERS) para el año 2000, con datos de la época 2004.0 denominado ITRF00 época 2004.0 asociado al GRS80, el cual es el Marco de Referencia oficial para México.

Los levantamientos geodésicos horizontales; son aquellos que comprenden una serie de medidas efectuadas en el campo, cuyo propósito final consiste en determinar las coordenadas geodésicas (geográficas) horizontales de puntos situados sobre la superficie terrestre.

La posición horizontal de un punto se representa por la latitud geodésica (ϕ), definida como el ángulo formado por la normal al elipsoide que pasa por el punto en cuestión y el ecuador; la longitud geodésica (λ), definida por el ángulo diedro formado por el plano del meridiano de Greenwich y el plano del meridiano que contiene al punto. En el caso de los levantamientos tridimensionales se puede contar con la altura geodésica (h) la cual se define como la distancia entre el elipsoide de referencia y el punto en cuestión, medida sobre la normal al elipsoide.

En el Sistema Cartesiano Tridimensional, definido en el ITRF, el origen es el centro de masa de la totalidad de la Tierra, incluyendo los océanos y la atmósfera. La unidad de longitud es el metro definido por el Sistema Internacional de Unidades. La orientación de sus ejes es consistente con el sistema BIH (Oficina Internacional de la Hora, por sus siglas en francés) para la época 1984.0 dentro de $\pm$3 milisegundos de arco [INEGI]. Su evolución en el tiempo con relación a la orientación es tal que no existe rotación residual relativa con respecto a la corteza terrestre. El eje Z pasa por el Polo de Referencia Internacional (IRP, por sus siglas en inglés); el eje X pasa por la intersección del meridiano internacional de referencia con el ecuador; y el eje Y se escoge de tal forma que se tenga un sistema de mano derecha (dextrógiro).

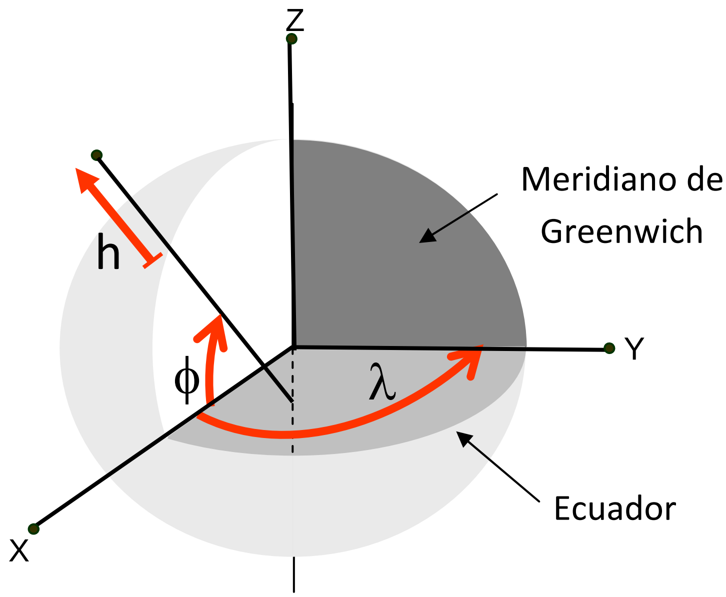


Fig 1. Coordenadas geodésicas curvilíneas

Para efectos de lo anterior el Sistema Geodésico de Referencia 1980 (GRS80) está definido por los siguientes parámetros. Vale mencionar que el elipsoide GRS80 es equivalente al elipsoide WGS84.

Semieje mayor	a	6378137 m
Velocidad angular	ω	7292115×10^{-11} rad/seg
Constante gravitacional geocéntrica	GM	3986005×10^{8} m^3/seg^2
Factor dinámico de forma	J_2	108263×10^{-8}

El cual cuenta con las siguientes constantes geométricas y físicas (derivadas).

Semieje menor	b	6356752.3141 m
Excentricidad lineal	E	521854.0097 m
Radio polar	c	6399593.6259 m
Primera excentricidad al cuadrado	e_1^2	0.00669438002290

Segunda excentricidad al cuadrado	e_2^2	0.00673949677548
Achatamiento	F	0.00335281068118
Reciproco del achatamiento	F^{-1}	298.257222101
Cuadrante meridiano	Q	10001965.7293 m
Radio medio	R_1	6371008.7714 m
Radio de la esfera de la misma superficie	R_2	6371007.1810 m
Radio de la esfera del mismo volumen	R_3	6371000.7900 m
Gravedad normal en el ecuador	ζe	978032.67715 mGals

La manera para determinar el sistema geodésico fue la reducción de las alturas geoidales y de las deflexiones de la vertical dentro de la región de validez del sistema, al hacer esto podemos determinar no solo la posición sino la forma y tamaño del elipsoide de referencia geodésico (datum).

1.1.2.1 <u>Sistema geodésico vertical en México</u>

En lo que respecta a las alturas, todo punto perteneciente a un levantamiento geodésico vertical, deberá estar referido al nivel de referencia vertical definido por el Datum Vertical Norteamericano de 1988 (NAVD88), debiéndose expresar sus valores en metros en el sistema de alturas ortométricas (H).

Los levantamientos geodésicos verticales comprenderán todas aquellas operaciones de campo dirigidas a determinar la distancia vertical que existe entre puntos situados sobre o cerca de la superficie terrestre y el nivel de referencia definido por el NAVD88.

En el caso de que se cuente con una altura geodésica (h), ésta se deberá de transformar a altura ortométrica por medio de la generación de la altura geoidal (N) a través del modelo geoidal vigente y disponible en el INEGI, teniéndose que:

$$H = h - N$$

Como se muestra en la fig

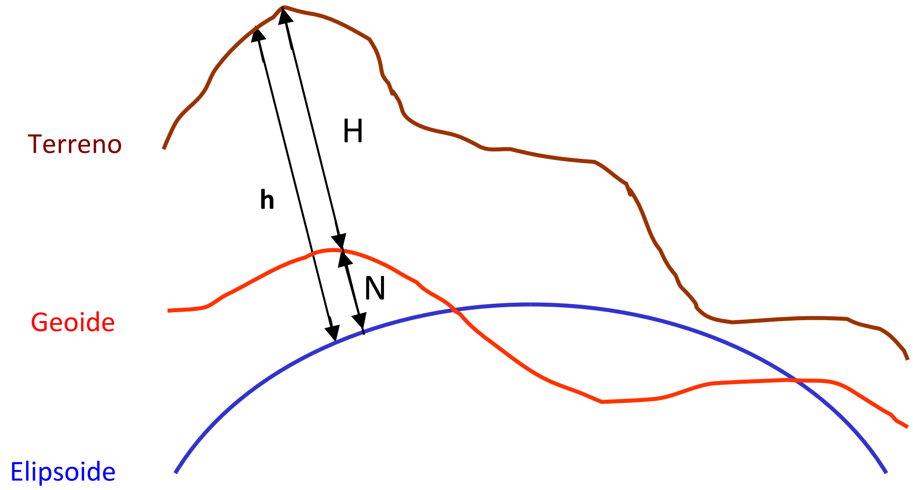


Fig 2. Planos fundamentales

1.1.3 <u>Sistema coordenado geocéntrico</u>

Primero que nada debemos definir a las sistemas coordenados geocéntricos. Es el sistema cartesiano natural cuyos ejes coinciden con los ejes principales de inercia de una tierra rígida. Estos ejes están ligados a la tierra por las propiedades físicas de la tierra que se manifiesta en diferentes formas [Vanicek, 1975].

La propiedad física más obvia que posee la tierra es el giro sobre un eje de rotación instantáneo, esto quiere decir que si la tierra no tuviera océanos ni atmósfera el eje instantáneo formaría un cono circular alrededor del eje polar de la tierra y con vértice en su centro de masa, pero, la tierra tiene océanos, atmósfera y no es rígida, lo cual nos dificulta la determinación de la posición de este eje, debido a que el eje instantáneo cambia de posición de manera irregular manteniendo todavía una trayectoria circular (periodo de Chandler).

Otra manifestación de la física de la tierra es su campo de gravedad. Se acostumbra en geodesia describir el campo de gravedad usando una o más diferentes cantidades tales como las anomalías gravitacionales, dirección de la vertical, o distorsiones de potencial. Todas estas cantidades están de alguna manera relacionadas al potencial normal, un potencial artificial generado por un cuerpo elipsoidal convencionalmente adoptado.

1.2 Posicionamiento de sistemas coordenados

Dentro del espacio físico en el que vivimos existen objetos también físicos, ya sea la tierra, las montañas o los océanos, como geodestas debemos estudiar las propiedades geométricas de estos objetos físicos, de cierta forma de eso se trata la geodesia. Al analizar las propiedades de los objetos físicos y representarlos en el espacio abstracto como seria el sistema coordenado geodésico definido anteriormente, se convierten en objetos geométricos, ya sean, líneas, regiones en el espacio, superficies o puntos.

Para estudiar las propiedades geométricas de estos objetos, tales como tamaño, forma, posición, es necesario relacionar los objetos a uno o varios sistemas coordenados. Ya que los objetos físicos constituyen la realidad física alrededor de nosotros, deben ser considerados como las entidades fundamentales mientras los sistemas coordenados sólo son el medio utilizado para realizar la tarea. Podemos definir el sistema coordenado y posicionarlo relativamente a los objetos de cualquier forma que queramos.

Una manera de posicionar un sistema seria; tomar un sistema coordenado y posicionarlo en un sentido a priori, es decir, relacionado a los objetos abstractos posicionados en el sistema coordenado definido.

Una alternativa usada a menudo para definir un sistema coordenado y su posición con respecto a un objeto físico es usar algunas propiedades físicas del objeto en lugar de propiedades geométricas. Los sistemas coordenados así definidos son conocidos como ***sistemas coordenados naturales***. El sistema coordenado astronómico puede servir como un ejemplo: El campo de gravedad terrestre, sus líneas de plomada y superficies equipotenciales, son lo que define el sistema. Otro ejemplo es el sistema cartesiano en el cual sus ejes coordenados coinciden con el eje principal de inercia (ejes de inercia del elipsoide principal) [Vanicek, 1975].

Podemos notar que los ejes principales de inercia se interceptan en el centro de gravedad del cuerpo.

Capítulo 2: Transformación de datum

2.1 Coordenadas geodésicas y cartesianas

La transformación de datum comúnmente se realiza en coordenadas cartesianas más que en coordenadas geodésicas. Para usar coordenadas geodésicas se necesitaría el uso de un elipsoide asociado, esta agregaría una complicación innecesaria a la transformación ya que los satélites y los datum locales usan una gran variedad de diferentes elipsoides, mientras que las coordenadas cartesianas son totalmente independientes de los elipsoides.

Las coordenadas cartesianas (X, Y, Z) de un punto P (Φ, λ, h) sobre un elipsoide con semieje mayor ***a,*** y un semieje menor ***b***, se calcula por medio de las ecuaciones (1) descritas con anterioridad en este trabajo (Fig. 3).

$$X = (N)\cos\varphi\cos\lambda$$

$$Y = (N)\cos\varphi\,\mathrm{seno}\,\lambda$$

$$Z = N(1 - e^2)\sin\phi$$

Donde N es el radio de curvatura en dirección este-oeste.

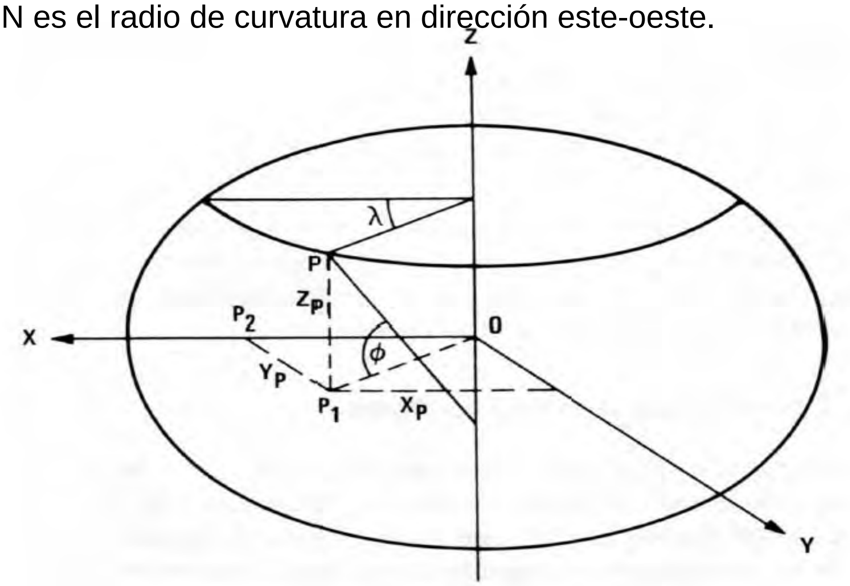


Fig. 3: Punto sobre el elipsoide.

Si el punto Q está situado en el elipsoide a una altura ***h*** por encima del punto ***p***, sus coordenadas (X_Q, Y_Q, Z_Q) se determinan por:

$$X = (N + h)\cos\phi\cos\lambda$$

$$Y = (N + h)\cos\phi\,\text{seno}\,\lambda$$

$$Z = (N(1 - e^2) + h)\sin\phi$$

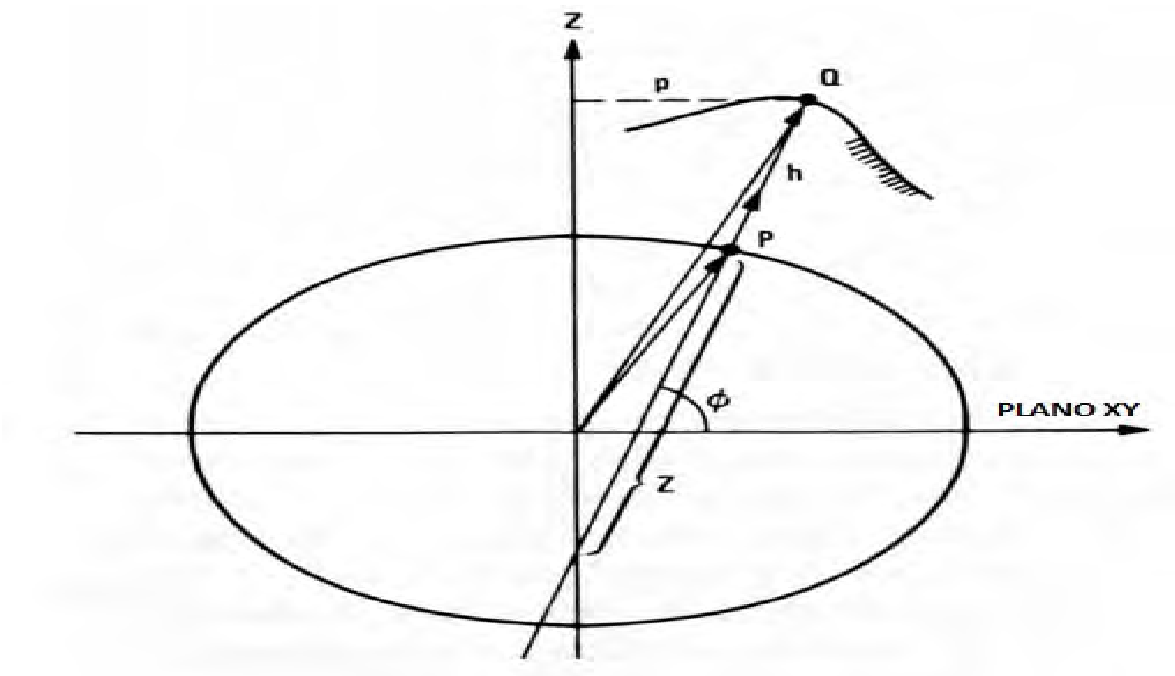


Fig. 4: Punto por encima del elipsoide a una altura *h*.

El cálculo inverso de (Φ, λ, h) a partir de las coordenadas cartesianas se lleva a cabo por medio de las siguientes ecuaciones.

$$\Phi = \tan^{-1}\frac{Z + (e')^2 b\,\text{sen}^3\theta}{p - (e)^2 a\cos^3\theta}$$

Donde:

$$p = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Za}{pb}\right)$$

$$e_2^2 = (a^2 - b^2)/b^2$$

$$e_1^2 = (a^2 - b^2)/a^2$$

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Y

$$h = (p - \cos\Phi) - N$$

2.2 <u>Tipos de transformación de datum</u>

La transformación de datum puede ser de dos formas:

1. Transformación de dos dimensiones
2. Transformación de tres dimensiones

En este trabajo se utiliza una transformación en tres dimensiones y solo se explicaran superficialmente la transformación en dos dimensiones.

2.2.1 **Trasformación bidimensional**

Las transformaciones bidimensionales relacionan la posición horizontal entre dos datums. Estas transformaciones se han utilizado en el pasado para relacionar dos datums terrestres o locales. Muchos tipos de transformaciones bidimensionales se han desarrollado en el pasado. Que van desde el estudio de características similares entre un par de coordenadas planas, hasta formulaciones más complejas que determinan los cambios de longitud y latitud en función del cambio en latitud y longitud con respecto a algún punto arbitrario, o en cambio en la orientación y la escala. Comúnmente, las transformaciones bidimensionales son solo validas para una porción muy limitada de superficie, por esto, son de muy poco uso cuando se trata de mediciones satelitales.

2.2.2 **Transformación tridimensional**

Las transformaciones tridimensionales son más adecuadas cuando se tienen mediciones satelitales por un número de razones. Entre las razones más importantes tenemos; estas son comúnmente globales en concepto, ellas determinan soluciones para la altura como también para la posición horizontal, y por ultimo son matemáticamente rigurosas. La transformación tridimensional completa involucra siete parámetros que relacionan coordenadas cartesianas en dos sistemas. Estos parámetros son; tres parámetros de traslación que relacionan el origen del los dos sistemas, tres parámetros de rotación, cada uno alrededor de los ejes coordenados, que relacionan la orientación de los dos sistemas, y una escala que corrige cualquier diferencia de escala entre los dos sistemas.

Existen un gran número de modelos para realizar estas transformaciones, probablemente dos de los más utilizados son; el modelo Bursa-Wolf y el modelo Molodensky-Badekas. En esta investigación solo se utilizará el modelo Molodensky-Badekas, no obstante con fines de ampliar la información y debido a la similitud entre ambos modelos se agregaran las ecuaciones para el modelo Bursa-Wolf, junto con una muy breve explicación.

Las formulas para el modelo Bursa-Wolf son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1+E)\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{Rz} & \mathrm{Ry} \\ \mathrm{Rz} & 1 & -\mathrm{Rx} \\ -\mathrm{Ry} & \mathrm{Rx} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Donde (X_2, Y_2, Z_2) son las coordenadas en el datum wgs84, y (X_1, Y_1, Z_1) son las coordenadas en el datum de clarke66, mientras que *E* representa el factor de escala.

Este modelo es adecuado para la comparación y la transformación entre dos datum satelitales, pero, no es muy conveniente para la transformación de un datum satelital a un datum local, dado que la naturaleza regional (mas que global) de los puntos fijos sobre la superficie, con los que se realiza el cálculo de los siete parámetros, provocan una muy alta correlación entre los parámetros. En otras palabras, **en un área limitada es difícil distinguir desplazamientos debido a las translaciones o debido a las rotaciones**. Lo que da como resultado, que grandes errores de desplazamiento puedan ocurrir dentro del área local del datum, así como, grandes discrepancias de posición fuera del área local.

El modelo Molodensky-Badekas supero los problemas de correlación mediante la relación de la escala y los parámetros de rotación a un punto fundamental *M*, trabajando con diferencias desde este punto.

Las ecuaciones para el modelo Molodensky-Badekas son:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & -\mathrm{Rz} & \mathrm{Ry} \\ \mathrm{Rz} & E & -\mathrm{Rx} \\ -\mathrm{Ry} & \mathrm{Rx} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{X_1} - \mathrm{X_M} \\ \mathrm{Y_1} - \mathrm{Y_M} \\ \mathrm{Z_1} - \mathrm{Z_M} \end{bmatrix}$$

Es recomendable que el punto fundamental *M* (X_M, Y_M, Z_M) sea el promedio de la posición local de los de control conocidos.

$$\mathrm{X_M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{X_i}}{\mathrm{n}}$$

$$\mathrm{Y_M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{Y_i}}{\mathrm{n}}$$

$$\mathrm{Z_M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{Z_i}}{\mathrm{n}}$$

Los siete parámetros de transformación, ya sea para el modelo Molodensky-Badekas o Bursa-Wolf, se pueden determinar por medio de un ajuste por mínimos cuadrados.

El ajuste utiliza puntos con coordenadas en los dos datums, Junto con los estimados de los siete parámetros de transformación. La exactitud de los parámetros derivados con esta metodología es comúnmente expresada en términos de la desviación estándar o variancias.

Es importante que los parámetros sean tan independientes, (sin correlación), como sea posible. Cuando la desviación estándar es igual o mayor que el parámetro mismo tenemos una fuerte justificación para omitirlos. Por ejemplo, una rotación de 0.07” de arco con una desviación estándar de $\pm$0.19” de arco no puede considerarse significante. Si este parámetro es omitido en el modelo Bursa-Wolf los demás parámetros cambiaran debido a la alta correlación. En el modelo Molodensky-Badekas, los otros parámetros permanecerían sin ningún cambio.

En la práctica, la situación que más frecuentemente encontramos es que el número de puntos con coordenadas en los dos datums (el satelital y el local) sea insuficiente para la determinación precisa de los siete parámetros. Por ejemplo, si tenemos solo tres puntos, los siete parámetros se determinaran, pero solo con dos grados de libertad en la solución. En un caso como este, la solución más lógica es determinar solo el promedio de las tres translaciones (ΔX, ΔY, ΔZ) para los tres puntos y estar satisfecho con una transformación de tres parámetros.

Estas translaciones pueden también ser determinadas usando un ajuste por mínimos cuadrados, mediante el modelo simple:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones corresponden a los dos modelos, Molodensky-Badekas y Bursa-Wolf, cuando las rotaciones y el factor de escala son considerados cero. Esto se considera correcto cuando el área en la que se apliques estas translaciones sea pequeña. Mientras el área de aplicación crezca, los efectos de las rotaciones y la escala serán significativos generando una distorsión.

Cuando se utiliza una transformación por medio de tres parámetros, se debe tener cuidado con el área de aplicación, esto es, no extrapolar por afuera del área delimitada por los puntos de control. Idealmente, estas translaciones deben usarse solo para los puntos dentro de dicha área.

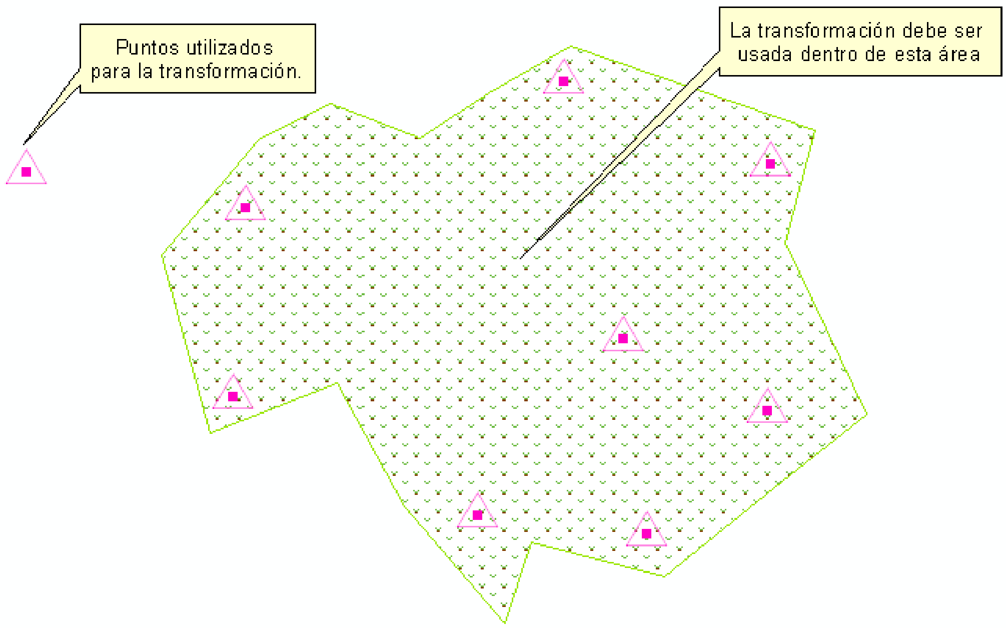


Fig. 5: Área de validez para una transformación de tres parámetros.

Capítulo 3: Método de los mínimos cuadrados

En este capítulo, se da una visión general del método de mínimos cuadrados para la solución de modelos sobre-determinados, los principales conceptos se explican, y las ecuaciones más importantes se presentan. A lo largo de este capítulo, el modelo matemático implícito se utiliza, porque es el más general.

3.1 Ecuaciones del método de los mínimos cuadrados, Matrices de diseño A y B

FORMULAS DE LOS METODOS DE AJUSTE

METODO CONDICIONAL	METODO PARAMETRICO	METODO COMBINADO
$\boldsymbol{M = (BC_rB^T)^{-1}}$	$\boldsymbol{\hat{\delta} = -(A^TPA)^{-1}\,A^TPW}$	$\boldsymbol{\hat{\delta} = -(A^TMA)\,A^TMW}$
$\boldsymbol{\hat{K} = Mw}$	$\boldsymbol{\hat{K} = P\left(A\hat{\delta} + W\right)}$	$\boldsymbol{\hat{K} = M\left(A\hat{\delta} + W\right)}$
$\boldsymbol{\hat{r} = -C_rB^TK}$	$\boldsymbol{\hat{r} = A\hat{\delta} + W}$	$\boldsymbol{\hat{r} = -C_rB^TK}$
$\boldsymbol{C_w = \hat{\sigma}_0^2(BP^{-1}B^T)}$	$\boldsymbol{C_w = \hat{\sigma}_0^2P^{-1}}$	$\boldsymbol{N^{-1} = (A^TMA)}$
$\boldsymbol{C_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2(B^TP^{-1}(C_rBB^T)BP^{-1})}$	$\boldsymbol{C_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_0^2(A^TPA)^{-1}}$	$\boldsymbol{L = (MAN^{-1}A^TM - M)}$
$\boldsymbol{\hat{\sigma}_0^2 = 1\ (a\ priori)}$	$\boldsymbol{C_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2(P^{-1} - A(A^TPA)^{-1}A^T)}$	$\boldsymbol{C_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_0^2N^{-1}}$
$\boldsymbol{\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\hat{r}^TP\hat{r}}{m-u}\ (a\ posteriori)}$		$\boldsymbol{C_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2(P^{-1}(B^TLB)P^{-1})}$
Donde: $\boldsymbol{C_{\hat{r}} = P^{-1}}$	Donde: A: es la matriz de diseño de jacobianos	$\boldsymbol{C_w = \hat{\sigma}_0^2N^{-1}}$

P: es la matriz de pesos de las mediciones a ajustar

W: es la matriz de residuos

B: es la matriz de diseño jacobianos

Es importante mencionar que la parte más importante del cálculo de ajustes es el establecimiento de una relación funcional entre los parámetros desconocidos (incógnitas) y las cantidades observadas (medidos)).

Tanto en el diseño del experimento como en el proceso de los datos observados el modelo matemático es la parte central; este modelo es básicamente una relación matemática basada en ciertas leyes. El modelo matemático puede escribirse como:

$$f(c, x, l) = 0 - - - - - 1$$

Donde:

c: representa a las constantes

x: representa a los parámetros desconocidos

l: representa a las observables (mediciones)

Las constantes se introducen al involucrar las leyes de la geometría o de la naturaleza y se consideran invariables o "sin error". La constante gravitacional de Newton, la suma de los ángulos internos de un triangulo plano y la velocidad de la luz son ejemplos de dichas constantes.

Los parámetros desconocidos o incógnitas son cantidades de las cuales se tiene muy poca o ninguna información. Por lo cual se supondrá que los parámetros desconocidos son mutuamente independientes; es decir, ninguno de los parámetros puede ser calculado a partir de los otros. Como ejemplo podríamos mencionar a las coordenadas cartesianas (X, Y, Z), las deflexiones de la vertical, las alturas geoidales y la variación en el tiempo de las coordenadas.

Las observables se ubican en algún lugar entre las constantes y los parámetros, desconocidos, en otras palabras, un observable es una cantidad física o geométrica que puede ser medida en relación con un fenómeno, es decir, una cantidad a la que se le puede asignar un número con cierta exactitud.

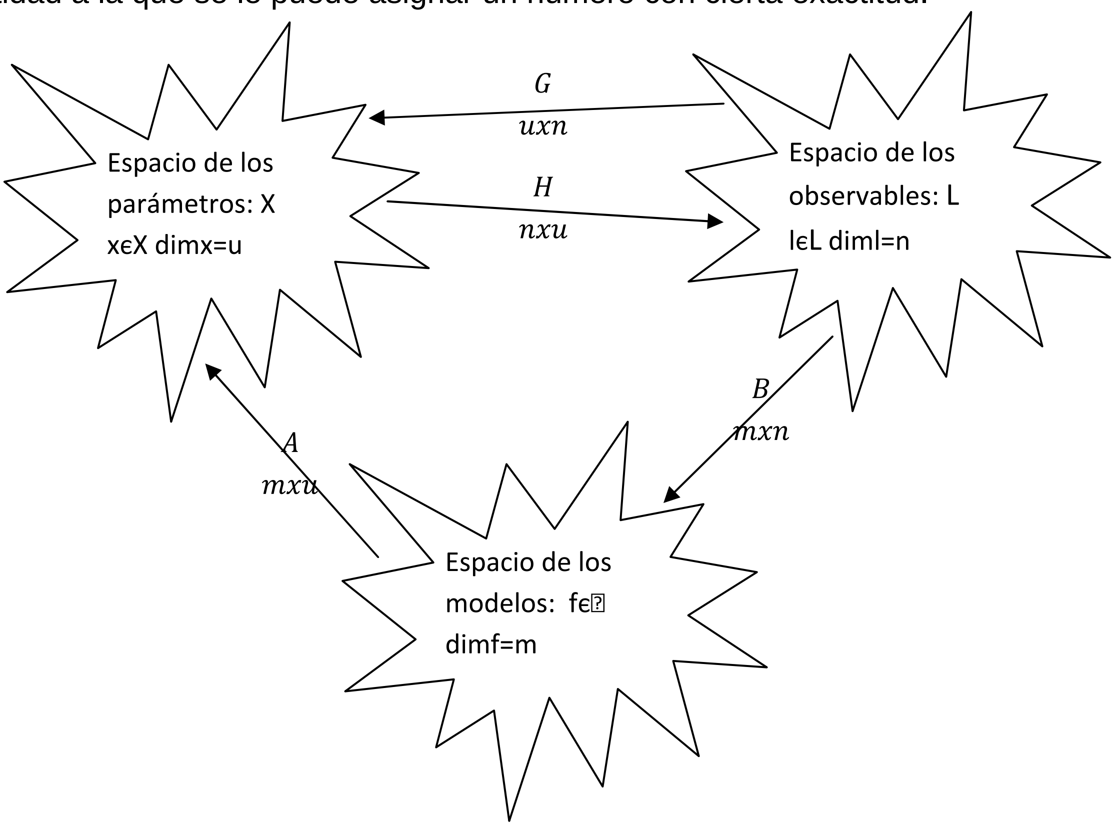


Fig. 6: Espacios matemáticos

En correspondencia de las tres componentes de la ecuación 1 tenemos los tres espacios matemáticos: espacio de los parámetros, de las observables y de los modelos. El espacio de los parámetros o de solución se define como el conjunto de todas las “x”, el espacio de las observables se defina como el conjunto de “l” mientras que el espacio de los modelos se define como el conjunto de las “f”.

Los modelos matemáticos pueden ser de la variedad principalmente directa, indirecta o implícita: pueden ser lineales o no; pueden existir solos o en combinaciones, en el caso de un agrupamiento de varios modelos algunos de estos modelos juegan un papel fundamental y los otros un papel secundario o complementario.

El modelo explicito de x_i se escribe como:

$$x = g(l) - - - - - 2$$

Donde:

$$g: funcion\ explicita; debido\ a\ que\ "g"\ transforma\ (l)\ en\ X$$

La versión lineal de la forma explícita es el modelo lineal explicito en X.

$$x = G(l) + \ w - - - - - - 3$$

Donde G es la matriz que transforma *L* en *X* y es llamada matriz de diseño, debido a que tanto g como w deben representar matemáticamente el diseño físico o geométrico del experimento.

Donde;

$$dim\ G = uxn \qquad\qquad dim\ w = uxm$$

Bajo cierta circunstancia, los parámetros desconocidos pueden estar totalmente ausentes en el modelo explicito, en este caso el modelo toma la forma:

$$g(l) = 0$$

Y es conocido como el modelo condicional.

A menudo es más fácil expresar las funciones en función de los parámetros, estas funciones explicitas muestran el modelo en *L.*

$$l = h(x)$$

Debido a que h transforma a *X* en el espacio de los observables, este tipo de modelo se dice que esta formulado en el espacio de las observables.

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2) \\ h_2(x_1, x_2) \\ h_3(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + cosx_2 \\ x_1 - senx_2 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$l = H(x) + w$$

En ocasiones los observables y los parámetros desconocidos están íntimamente ligados por una expresión matemática esta forma se conoce como el modelo implícito.

$$f(x, l) = 0$$

$$\begin{bmatrix} f_1(l_1, l_2, x_1, x_2) \\ f_2(l_1, l_2, x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 senx_1 + (l_2 x_2)^{\frac{1}{2}} \\ l_1 \exp(x_2) + l_2 x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El modelo lineal implícito se escribe como:

$$\boxed{Ax + Bl + w = 0}$$

A y B se conocen como matrices de diseño, dimA(mxu) y dimB(mxn), mientras que w es el vector constante conocido de dimensión dimw(1xm).

Estas matrices se calculan mediante las siguientes formulas:

$$A = \left.\frac{df}{dx}\right|_{\substack{x = x^{(0)} \\ l = l^{(0)}}}$$

$$B = \left.\frac{df}{dx}\right|_{\substack{x=x^{(0)} \\ l=l^{(0)}}}$$

Donde $x^{(0)}$ es un punto en el espacio de parámetros X, y $l^{(0)}$ es de igual manera un punto en el espacio de las observables L. las matrices A y B pueden ser consideradas como matrices jacobianas de transformación, de los espacios de los parámetros desconocidos y las observables al espacio de las funciones (modelos) F.

3.2 <u>Formulación del problema de mínimos cuadrados</u>

Los modelos sobre-determinados tienen generalmente ecuaciones inconsistentes, y la reformulación del modelo es necesaria para eliminar estas incoherencias. En consecuencia se convierten en:

$$f(x, \hat{l}) = f(x, l + \hat{r}) = 0$$

Donde $\hat{r}$ son los residuos esperados. Como en este capítulo no es posible confundirse utilizaremos r por $\hat{r}$. Para simplificar la solución, el modelo anterior es normalmente aproximado con la parte lineal de una serie de Taylor, sea el modelo lineal o no. Para los puntos de expansión, por lo general los valores observados de las observables y valores aproximados ($x^{(0)}$) de los parámetros desconocidos son seleccionados, resultado en:

$$f(x,l) = f(x^{(0)} + \delta, l^{(0)} + r)$$

$$\doteq f\left(x^{(0)}, l^{(0)} + r\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x^{(0)} \\ l=l^{(0)}}} (x - x^{(0)}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x^{(0)} \\ l=l^{(0)}}} (l - l^{(0)}) \doteq 0$$

O simplemente.

$$\boxed{A\delta + Br + w = 0} ------1$$

Observamos que esta ecuación no es más que la forma diferencial del modelo original matemáticamente no lineal y la relación de las cantidades en los espacios $x^{(0)}$, $l^{(0)}$ y W. El diseño de las matrices A, B esta dado en (4.1) su presencia aquí es entendible dado que el modelo diferencial esta formulado para un numero *m* de dimensiones dentro del espacio de las funciones F, y por lo tanto todas las demás cantidades deben ser transformados a F. Esto se comprueba simplemente observando que cada uno de los términos en (1), $-A\delta, Br\ y\ w-$ son vectores m-dimensionales. Las cantidades A, B y W son conocidas, mientras que $\delta\ y\ r$ son desconocidas. El vector de correcciones δ para los parámetros aproximados $x^{(0)}$ es claramente un tipo vector especial de solución, y el vector de las constantes

$$w = f(x^{(0)}, l^{(0)})$$

En este trabajo se utilizó un ajuste por medio del método paramétrico. El cual en su forma lineal se escribe como:

$$Ax + l + w = 0$$

Y está formado por:

$$L\text{: } vector\ de\ los\ observables\ (coordenadas)$$

$$x\text{: } vector\ de\ los\ parametros$$

$$a\text{: } matriz\ de\ diseño\ (evaluada\ en\ Xo)$$

$$P: matriz\ de\ pesos\ de\ los\ observables$$

En este caso en particular se utilizara una matriz de pesos unitarios y no se escribirá en la ecuación, debido a que se desconoce la calidad de los puntos de control, es decir, las especificaciones de ellos no determina su grado u orden de levantamiento, es por eso que se decidió utilizar los valores sin discriminaciones, además posteriormente realizaremos el análisis de los residuos para determinar que puntos de control mantienen la calidad suficiente para permanecer en el ajuste.

Nota: si se desea saber más del método de los mínimos cuadrados se recomienda la lectura de Pedro C. Sánchez, 1947, para conocer mas a profundidad el método de las correlativas que es fundamental para este método pero que no se menciona en este trabajo por no ser el objetivo del mismo.

Capítulo 4: Determinación de los parámetros de transformación mediante el Modelo Molodensky-Badekas

En la primera sección de este capítulo se mencionan los objetivos de la investigación de una manera breve y sintetizada. En la segunda sección se desarrolla paso a paso la metodología que se llevo a cabo para darle solución al problema de los mínimos cuadrados, mencionando a su vez, los datos con los que se realizo el análisis. Los resultados se describen en la última sección de este capítulo.

4.1 Objetivo

El objetivo principal de esta investigación radica en la determinación de los 7 parámetros de transformación del elipsoide de CLARKE 66 al elipsoide WGS84, para el territorio mexicano mediante un ajuste por mínimos cuadrados.

Es importante mencionar que el procedimiento o metodología utilizados son validos para la determinación de dichos parámetros en otros elipsoides. Es por eso que el objetivo secundario es plantear la metodología de una manera sencilla para fomentar el desarrollo de otros ajustes de este tipo para nuestro país.

Por último, se desea aplicar estos conocimientos de una manera más práctica con el fin de mostrar su gran utilidad y alcance en el área de la geomática.

4.2 Desarrollo

Primero que nada, describiremos los datos que se utilizaron en esta investigación. Los datos como se ha mencionado con anterioridad fueron proporcionados por el INEGI, (http://www.inegi.org.mx/). Estos datos son parejas coordenadas que se midieron en ambos elipsoides, un ejemplo de ellos se muestra a continuación:

	ITRF92		NAD27	
ESTADO	LATITUD	LONGITUD	LAT	LONG
OAXACA	155125.71721	970401.31077	155122.33000	970400.64800
YUCATAN	205648.83211	893907.57526	205646.42200	893907.46100

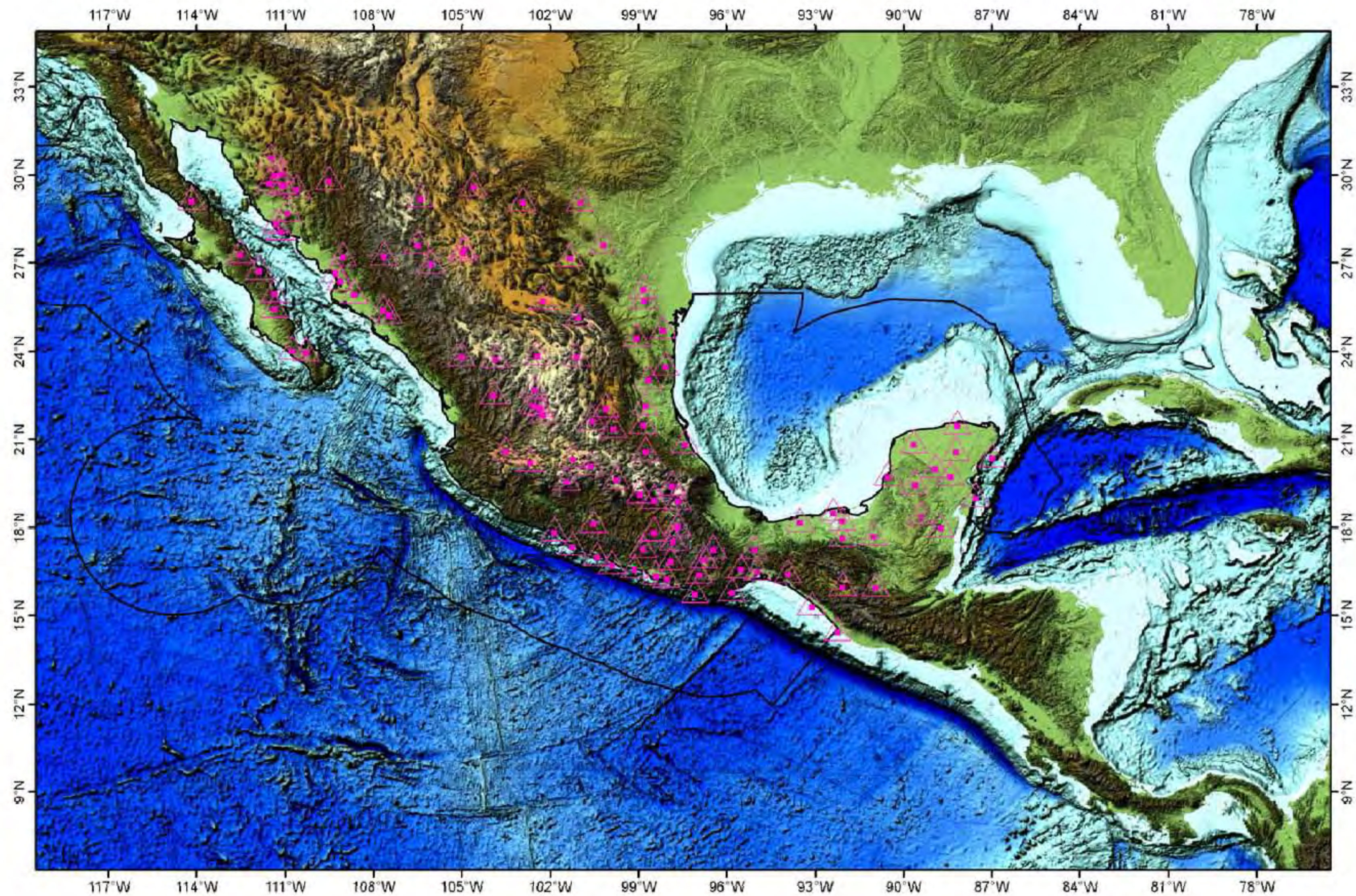


Fig 7: Distribución de puntos utilizados para el ajuste (UNIATMOS, 2011)

En la figura 7 vemos la distribución espacial de los puntos que se utilizaron en el ajuste, como se mencionó con anterioridad, se cuanta con una base de datos de 110 puntos, que presentan distintos grados de precisión debido a que no todos fueron medidos con el mismo propósito.

En el despliegue grafico se graficaron los 2 juegos de puntos, es decir, los medidos en el elipsoide de CLARKE66 y Los medios en el elipsoide WGS84, es importante mencionar que las diferencias entre ambas mediciones son muy pequeñas lo que resulta en la nula visualización de ambos juegos de coordenadas, esto es, debido a la escala que se maneja para la visualización global del territorio nacional.

Ahora definimos las principales constantes de ambos elipsoide, de las cuales se puede fácilmente deducir las contantes de las formulas mencionadas en los primeros capítulos de este trabajo.

ELIPSOIDE	***SEMI EJE MAYOR***	***SEMI EJE MENOR***
WGS84	a = 6378137 m	b = 6356752.3142 m
Clarke 1866	a = 6378206.400 m	b = 6356583.800m

El siguiente paso fue la transformación de coordenadas geográficas a coordenadas cartesianas, pero antes debemos determinar las variables intermedias necesarias para la aplicación de las ecuaciones conversión.

Para comenzar el ajuste es necesario convertir los pares de coordenadas, coordenadas geodésicas a coordenadas cartesianas, como se menciono en los capítulos anteriores, esto es necesario ya que los parámetros de translación entre ambos elipsoides están expresados en metros, de esta forma se aplicaran de manera directa.

Los valores iniciales que se ocuparon fueron:

-11	**Δx**
122	**Δy**
193	**Δz**
1	**E**
0	**Rx**
0	**Ry**
0	**Rz**

Es necesario mencionar que si se desea realizar la conversión inversa, es decir, del elipsoide GRS80 al elipsoide de CLARKE66 solo se cambiaran los signos de los parámetros.

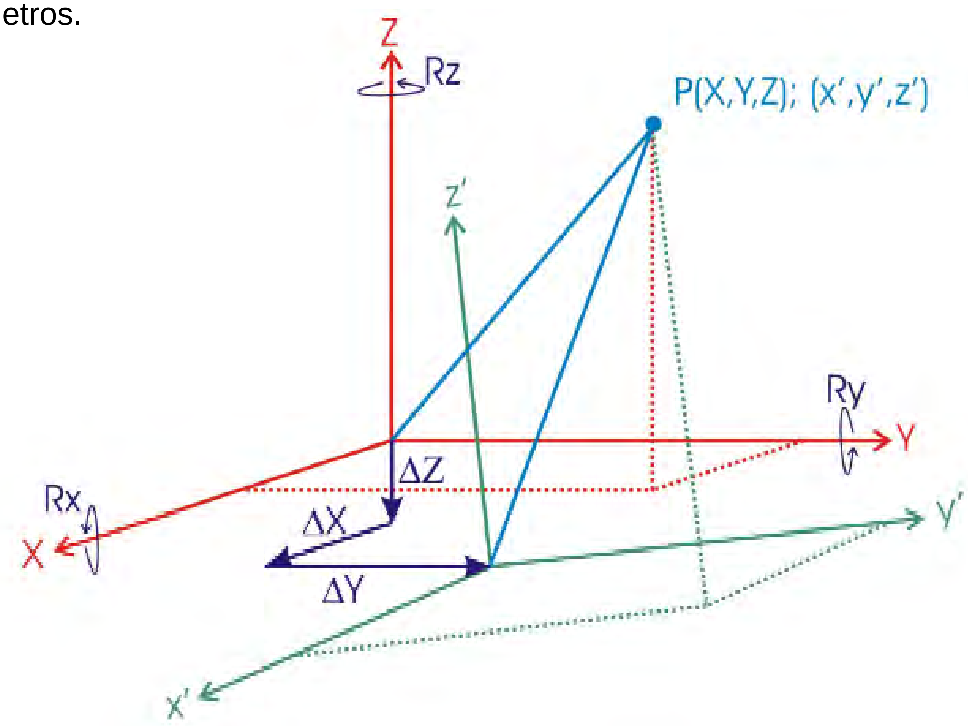


Fig. 8: Posiciones relativas de los sistemas.

En la figura 8 vemos como dos sistemas cualesquiera están situados en distintas posiciones con el fin de poder visualizar de una manera más sencilla la función de los parámetros.

Para poder continuar determinaremos la primera excentricidad en ambos elipsoides, esto lo determinaremos recordando las ecuaciones mencionadas en el capítulo 2 de este trabajo.

Nota: con fines prácticos en algunas ocasiones se mostraran solo los resultados obtenidos tras evaluar las ecuaciones.

$$e_1^2 = (a^2 - b^2)/a^2$$

ELIPSOIDE	e^2
WGS84	0.006694380
Clarke 1866	0.006768658

Estos resultados se aplican el cálculo del radio de curvatura en la vertical principal del punto.

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \text{sen}\phi)^{\frac{1}{2}}}$$

Estos cálculos se llevan a cabo con cada uno de los puntos en los dos elipsoides.

Una vez obtenidos estos valores podemos ocuparnos en realizar la conversión de las coordenadas geodésicas en cartesianas ocupando las ecuaciones de transformación (cap. 2). Nótese que ocupamos las ecuaciones donde la variable de la altura no es considerada, esto es debido a que los datos proporcionados tienen distintos planos de referencia para medir la altura, es decir, en unas coordenadas nos encontramos con alturas orto métricas mientras que en las otras tenemos alturas elipsoidales.

Recordando las ecuaciones de transformación:

$$X = (N)\cos\varphi \cos\lambda$$

$$Y = (N)\cos\varphi \,\text{seno}\,\lambda$$

$$Z = N(1 - e^2)\sin\phi$$

Una vez obtenidas las coordenadas cartesianas de todos los puntos en ambos elipsoides concluimos la primera, ahora nos enfocaremos en el desarrollo del modelo Molodensky-Badekas.

Recordando el capitulo dos de este trabajo tenemos la forma general del modelo:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & -\mathrm{Rz} & \mathrm{Ry} \\ \mathrm{Rz} & E & -\mathrm{Rx} \\ -\mathrm{Ry} & \mathrm{Rx} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - X_M \\ Y_1 - Y_M \\ Z_1 - Z_M \end{bmatrix}$$

Para poder utilizar este modelo necesitamos igualarlo a cero, lo que nos queda como;

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & -\mathrm{Rz} & \mathrm{Ry} \\ \mathrm{Rz} & E & -\mathrm{Rx} \\ -\mathrm{Ry} & \mathrm{Rx} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - X_M \\ Y_1 - Y_M \\ Z_1 - Z_M \end{bmatrix} = 0$$

De esta manera es más fácil poder escribir las ecuaciones en forma lineal.

$$\Delta X + X_1 - X_2 + \mathrm{E}(X_1 - X_M) - \mathrm{Rz}(Y_1 - Y_M) + \mathrm{Ry}(Z_1 - Z_M) = 0$$

$$\Delta Y + Y_1 - Y_2 + \mathrm{Rz}(X_1 - X_M) + \mathrm{E}(Y_1 - Y_M) - \mathrm{Rx}(Z_1 - Z_M) = 0$$

$$\Delta Z + Z_1 - Z_2 - \mathrm{Ry}(X_1 - X_M) + \mathrm{Rx}(Y_1 - Y_M) + \mathrm{E}(Z_1 - Z_M) = 0$$

Ahora que tenemos las ecuaciones en esta forma podemos realizar la determinación de la matriz de diseño A, esta se determinará como lo hemos mencionado en el capitulo tres.

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x^{(0)} \\ l=l^{(0)}}}$$

Donde f representa cada una de las ecuaciones del modelo en su forma lineal y *x* son las variables que en este caso son los 7 parámetros de transformación.

Una vez realizado esto tendremos la base de la matiz A.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \Delta\boldsymbol{X} & \Delta\boldsymbol{Y} & \Delta\boldsymbol{Z} & \mathbf{Rx} & \mathbf{Ry} & \mathbf{Rz} & \boldsymbol{E} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (Z_1 - Z_M) & -(Y_1 - Y_M) & (X_1 - X_M) \\ 0 & 1 & 0 & -(Z_1 - Z_M) & 0 & (X_1 - X_M) & (Y_1 - Y_M) \\ 0 & 0 & 1 & (Y_1 - Y_M) & -(X_1 - X_M) & 0 & (Z_1 - Z_M) \end{bmatrix} \end{array}$$

Es necesario hacer notar que esta matriz debe evaluarse con cada terna coordenada, es decir, todos los puntos que conforman la base de datos deben entrar en la matriz, lo que resulta con una matriz de dimensión 330x7.

De esta manera se crea la matriz A, lo que nos lleva a determinar la matriz W.

La determinación de esta matriz es mucho más sencilla ya que solo debemos evaluar las funciones en su forma lineal, debido a que los puntos no han sido ajustados los resultados de estas evaluaciones no serán cero, ese residuo es la matriz W.

Una vez determinadas estas matrices podemos determinar los 7 parámetros de transformación utilizando un ajuste por mínimos cuadrados.

Nota: los datos fueron trabajados en Microsoft Excel con fin poder realizar con mayor facilidad cambios a las matrices, las operaciones con matrices se realizaron en Matlab 7.

Las ecuaciones utilizadas para este ajuste se mencionan en el capítulo 3 de este trabajo y en la sección del método paramétrico.

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = -(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}$$

Nótese que en esta primera etapa la ecuación no tendrá la matriz **P** debido a que esta es la matriz de pesos y en este caso en particular se decidió otorgar a los puntos el mismo grado de confianza ya que posterior mente realizaremos un análisis estadístico de los resultados.

Los que nos queda como:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = -(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}$$

El resultado de esta operación serán los 7 parámetros de transformación sin discriminar la calidad de los puntos.

El resultado es:

Δx	-10.2601474
Δy	122.142614
Δz	194.508452
Rx	-1.00E-05
Ry	-4.78E-06
Rz	-3.00E-06
E	4.90E-06

Nótese que el resultado de las rotaciones esta expresado en radianes. Las cuales expresadas en segundos tenemos:

Rx	-2.06265''
Ry	-0.98595''
Rz	-0.61879''

Estos parámetros presentan una matriz de variancias y covariancias con los siguientes valores:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Delta X & \Delta Y & \Delta Z & \mathbf{Rx} & \mathbf{Ry} & \mathbf{Rz} & E \\
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix}
\mathbf{0.0090909} & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\
0.0000000 & \mathbf{0.0090909} & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\
0.0000000 & 0.0000000 & \mathbf{0.0090909} & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\
0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & \mathbf{6.9765E\text{-}14} & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\
0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & \mathbf{2.4792E\text{-}14} & 0.0000000 & 0.0000000 \\
0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & \mathbf{3.6471E\text{-}14} & 0.0000000 \\
0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & \mathbf{1.2311E\text{-}14}
\end{vmatrix}
$$

Esta matriz nos dará una idea de la calidad de los parámetros es decir el error probable que se puede asignar a los parámetros.

Recordemos que los valores de la diagonal principal de la matriz son las variancias de los parámetros, así mismo sabemos que:

$$la\ desviacion\ estandar\ de\ Xi\ es\ igual\ a\ la\ raiz\ cuadrada\ de\ las\ variancias$$

$\sigma_{\Delta x}$	0.095346211
$\sigma_{\Delta y}$	0.095346211
$\sigma_{\Delta z}$	0.095346211
σ_{Rx}	0.05448''
σ_{Ry}	0.03248''
σ_{Rz}	0.03939''
σ_{E}	1.10955E-07

Cabe hacer notar que las unidades de la tabla anterior se encuentran en metros y radianes respectivamente.

En este momento es muy importante enfatizar lo que se dijo con anterioridad; estos parámetros son provisionales debido a que se utilizaron todos los puntos sin discriminar su origen y calidad. Una vez mencionado esto nos daremos a la tarea de describir el proceso estadístico que nos ayuda a determinar que pares de puntos son lo suficientemente buenos para mantener en el ajuste y cuáles no lo son.

Para poder determinar lo dicho en el párrafo anterior utilizaremos la siguiente fórmula:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{W}$$

La matriz $\hat{r}$ tendrá la siguiente forma:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.86961} \\ \mathbf{0.91617} \\ \mathbf{9.8487} \\ \mathbf{0.88726} \\ \mathbf{3.0879} \\ \mathbf{2.0193} \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

Recordemos que esta ecuación determina los residuos esperados de los observables, es decir, que cantidad debe sumarse o restarse a los puntos para que estos estén ajustados. Una vez realizada la discriminación de los puntos se re-calcularan los 7 parámetros de transformación con los puntos de mayor calidad.

Como primera aproximación plantee 5 décimos de segundo –lo que equivale a aproximadamente 15m– en los residuos, esto es, que cada punto que presente más de 5 décimos de segundo en alguna de sus componentes deberá ser rechazado. El resultado de esta primera aproximación no se mencionara debido que solo 1 punto presenta deficiencias a tal grado.

Habiendo tenido la experiencia previa decidí disminuir significativamente el grado de conformidad con los puntos.

En esta segunda aproximación plantearemos como máximo 2 décimos de segundo, y el resultado nos arroja 18 puntos fuera de este rango y los valores son:

Δx	**-10.49**
Δy	**121.75**
Δz	**194.32**
Rx	**-2.269''**
Ry	**-1.011''**
Rz	**-0.336''**
E	**3E-06**

Con una matriz de variancias y covariancias como sigue:

0.0109960	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	**0.0112650**	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	**0.0110320**	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	**8.5311E-14**	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	**3.05E-14**	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	**4.7405E-14**	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	**1.5131E-14**

$\sigma_{\Delta x}$	**0.1049**
$\sigma_{\Delta y}$	**0.1049**
$\sigma_{\Delta z}$	**0.1049**
σ_{Rx}	**0.0602''**
σ_{Ry}	**0.036''**
σ_{Rz}	**0.0449''**
σ_{E}	**1E-07**

Capítulo 5: Conclusiones

Respecto de la precisión esperada.

Cabe hacer notar que, basados en el principio de propagación de errores, la calidad final del proceso de estimación y residuos resultantes, estará limitado por la calidad de los datos involucrados, es decir, no será mejor que la precisión de la muestra.

Respecto de la precisión de los parámetros de transformación.

La precisión resultante para los parámetros es acorde con los residuos obtenidos de las coordenadas transformadas, en el modelo, es decir, las traslaciones, rotaciones y factor de escala, son del mismo orden de magnitud para cada tamaño de área considerada.

Respecto del área de estudio.

La precisión resultante de los parámetros no es función sólo de la Extensión territorial del área de estudio, sino que también de la precisión de los vértices (Orden), cantidad y distribución geométrica de los mismos

Es de mayor importancia mencionar que de ninguna manera propongo estos parámetros de transformación como absolutos, esto es debido a la problemática muchas veces mencionada. Para obtener parámetros con un grado mayor de certeza se necesitaría un esfuerzo colectivo, con el fin de poder crear una base de datos lo suficientemente extensa, de mayor calidad y homogeneidad para de esa manera realizar un ajuste para todo el territorio nacional.

Referencias

Instituto Nacional de Estadística y Geografía e Informática
http://www.inegi.org.mx/

Vanicek P., 1975: Reporte sobre datums geodésicos y geocéntricos. Reporte técnico no. 32.

http://www.crid.or.cr/digitalizacion/pdf/spa/doc16159/doc16159-1d.pdf

Instituto Nacional de Estadística y Geografía e Informática
http://mapserver.inegi.gob.mx/geografia/espanol/normatividad/infgeodesia/antecedentes.cfm?c=484

http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/es/GRS_80

Vanicek P., Krakiwsky E. J., 1982: Geodesy: the concepts.

Gregory J. Hoar, 1982: Satellite Surveying.

Manuel Medina Peralta, 1975: Introducción a la geodesia geométrica. Editorial Limusa.

Pedro C. Sánchez, 1947: Cálculo de probabilidades y teoría de los errores. Publicación no. 2 de la división de estudios geográficos y climatológicos.

Unidad de Informática para las Ciencias Atmosféricas y Ambientales (UNIATMOS), 2011: Centro de Ciencias de la Atmósfera, UNAM

http://uniatmos.atmosfera.unam.mx/ACDM/

Glosario

Geodesia: Es una ciencia interdisciplinaria que utiliza sensores remotos transportados en satélites espaciales y plataformas aéreas y mediciones terrestres para estudiar la forma, las dimensiones de la Tierra y su campo gravitatorio, de los planetas y sus satélites así como sus cambios; para determinar con precisión su posición y la velocidad de los puntos u objetos en la superficie u orbitando el planeta, en un sistema de referencia terrestre materializado, y la aplicación de este conocimiento a distintas aplicaciones científicas y técnicas, usando la matemática, la física, la astronomía y las ciencias de la computación.

Georreferenciación: Es un neologismo que refiere al posicionamiento con el que se define la localización de un objeto espacial (representado mediante punto, vector, área, volumen) en un sistema de coordenadas y datum determinado. Este proceso es utilizado frecuentemente en los Sistemas de Información Geográfica.

La georreferenciación, en primer lugar, posee una definición tecnocientífica, aplicada a la existencia de las cosas en un espacio físico, mediante el establecimiento de relaciones entre las imágenes de raster o vector sobre una proyección geográfica o sistema de coordenadas. Por ello la georreferenciación se convierte en central para los modelados de datos realizados por los Sistemas de Información Geográfica (SIG).

Datum: En geodesia un datum es punto de referencia en la superficie terrestre en base a los cuales las medidas de la posición son tomadas y un modelo asociado de la forma de la tierra (elipsoide de referencia) para definir el sistema de coordenadas geográfico. Datums horizontales son utilizados para describir un punto sobre la superficie terrestre. Datums verticales miden elevaciones o profundidades. En ingeniería, un datum es un punto de referencia, superficie o ejes sobre un objeto con los cuales las medidas son tomadas.

Elipsoide: En general, es más práctico trabajar la forma de la Tierra como si fuera un *elipsoide*, sin considerar las ondulaciones propias de la topografía. Esto se debe a que el elipsoide es una figura matemática fácil de usar que es lo suficientemente parecida a la forma de la Tierra.

Existen diferentes modelos de elipsoides utilizados en geodesia, denominados *elipsoides de referencia*. Las diferencias entre éstos vienen dadas por los valores asignados a sus parámetros más importantes:

- *Semieje ecuatorial (a)* o *Semieje mayor*: Longitud del semieje correspondiente al ecuador, desde el centro de masas de la Tierra hasta la superficie terrestre.
- *Semieje polar (b)* o *Semieje menor*: Longitud del semieje desde el centro de masas de la Tierra hasta uno de los polos. Alrededor de este eje se realiza la rotación de la elipse base

Geoide: Se define como la superficie gravimétrica equipotencial que más se acerca al nivel promedio del mar y su continuación por debajo de los continentes. Este geoide tiene ondulaciones en su superficie (no confundir con la topografía) y estas se deben a la irregular distribución de las fuerzas gravitacionales en la masa del planeta.

Altura ortométrica: Altura de un punto P con respecto al geoide. Esta altura no debe ser confundida con la altura sobre el nivel del mar, debido a que el geoide no es una superficie de océano ideal

Altura elipsoidal: Altura de un punto P con respecto al elipsoide.