



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Termodinámica de gases de bosones
confinados**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

Michael Richard Lomnitz Lynn



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Carlos Villarreal Luján
2011**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia, en especial Gale y Larissa, por su amor, apoyo y paciencia; a Carlos por sus enseñanzas y tiempo; y finalmente Andrea por su labor humanitaria encontrando mis acentos perdidos.

1. Datos del alumno

Lomnitz

Lynn

Michael Richard

58 46 05 74

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

302517734

2. Datos del tutor

Dr.

Carlos

Villarreal

Luján

3. Dr.

Manuel

De Llano

de la Garza

4. Dr.

Gerardo

Carmona

Ruiz

5. Dra.

Rocío

Jáuregui

Renaud

6. Dr.

Wolf Luis

Mochán

Backal

7. Datos de la tesis

Termodinámica de gases de bosones confinados

65 p.

2011

Índice general

1 Fuerza de Casimir	4
1.1 Cuantización del campo de vacío	4
1.2 Fuerza de Casimir para conductores perfectos	7
1.3 Formalismo de potenciales de Hertz	10
1.4 Fuerza de Casimir entre placas dieléctricas	14
2 Pistón de Casimir	19
2.1 Espectro electromagnético de una cavidad rectangular	19
2.2 Pistón a Temperatura cero	22
2.3 Pistón a Temperatura Finita	26
3 Superconductividad	37
3.1 El Hamiltoniano de <i>Fröhlich</i>	38
3.2 Atracción mediada por el fonón	39
3.3 Pares de Cooper	40
3.4 Condensación de Bose-Einstein en Pares de Cooper	43
3.5 Transición entre sistemas en 1, 2 y 3 dimensiones	48
3.6 Conclusiones y comentarios	57
A Densidad de portadores de carga	63

La segunda mitad del siglo XIX marca un punto importante en el desarrollo de la termodinámica como disciplina de la física, concentrándose en la descripción macroscópica de resultados experimentales.

A su vez, en estas cinco décadas comenzó a emerger la teoría cinética de los gases en el trabajo de *Krönig*, *Claúsius* y *James Maxwell*, entre otros, quienes buscaban relacionar el movimiento de moléculas en un sistema gaseoso con observables físicas macroscópicas. Culminando en 1872 con la teorema-H de Boltzmann, se obtuvo por primera vez contacto con la termodinámica al relacionar la fenomenología observada con la mecánica microscópica de un gas y obteniendo la entropía de un sistema desde un enfoque puramente microscópico.

Sin embargo, el trabajo de Boltzmann resultó altamente controversial y fue ampliamente atacado por su carácter irreversible, así como debido a la desconfianza que aun existía con respecto al concepto de átomo y molécula empleados en dicha teoría.

Sin embargo, Maxwell continuó con el trabajo, aplicando este enfoque a sistemas más sofisticados y, como resultado, la teoría cinética de los gases cedió a la teoría de ensambles formalizando la mecánica estadística, introduciendo, en 1879, una descripción mediante las coordenadas generalizadas q_i y el ímpetu generalizado p_i de un sistema, y definiendo la cantidad más importante en la teoría de ensambles: la función de densidad de estados o puntos en el plano fase $\rho(q_i, p_i)$.

El siguiente avance importante fue realizado por *Josiah W. Gibbs*, quien en 1902 enfatizó la importancia de utilizar ensambles generalizados para obtener todas las cantidades termodinámicas en términos de las propiedades mecánicas de los constituyentes microscópicos del sistema. El resultado fue una teoría general, aplicable a todo sistema que cumpliera únicamente con las ecuaciones de movimiento de Lagrange y Hamilton.

La publicación de Gibbs coincidió con los desarrollos de *Max Planck* (1900) en la descripción de la radiación de cuerpo negro, donde se introdujo la hipótesis de cuantización en la emisión y absorción de radiación electromagnética. Lo que es más, trabajos consecuentes en el estudio del efecto fotoeléctrico, el efecto Compton y la dispersión de rayos X establecieron la cuantización del campo electromagnético y la existencia del fotón. En 1924 fue *Satyendra N. Bose* quien describió la radiación de cuerpo negro en términos de un “gas” de fotones, indistinguibles entre sí, ocupando los distintos niveles de energía.

El trabajo de Bose tendría un gran impacto en la física estadística, y en 1924-1925 *Albert Einstein*, argumentando que las implicaciones de Bose deberían aplicar también a partículas materiales, estudio a un gas ideal desarrollando lo que hoy en día es conocido como la estadística de Bose-Einstein y la condensación de Bose-Einstein, resultados que retomaría *Fritz London* en 1939 para el estudio de la superfluidez.

Después, en 1926, siguiendo la enunciación del postulado de exclusión de Pauli, *Enrico Fermi* mostró que existen sistemas físicos que obedecen a una estadística distinta, en la cual no se permite que dos partículas ocupen el mismo estado.

Esta distinción entre el comportamiento de partículas permitió la clasificación en dos grupos, Bosones y Fermiones, según la estadística que los regía, pero no fue hasta 1939 que *Fermi* y *Belifante* encontraron la relación entre el espín de una partícula y su comportamiento: partículas cuyo espín fuese un múltiplo entero de \hbar siguen la estadística de Bose-Einstein, mientras que partículas con espín semi-entero pertenecen a la familia de fermiones.

Por otro lado, los fermiones pueden ser asociados en general a partículas de materia, mientras que los bosones, al poder ocupar el mismo estado al mismo tiempo, actúan como portadores de las fuerzas, es decir, mediadores de las interacciones entre las otras partículas. Como tal, el rol de los bosones es fundamental en el estudio de sistemas con partículas que interactúan mutuamente entre sí.

Será el propósito de ésta tesis estudiar la cuantización de campos bosonicos para describir al comportamiento de bosones confinados y dos efectos que se prestan para una descripción mediante este tratamiento: la fuerza de Casimir y la superconductividad.

Capítulo 1

Fuerza de Casimir

Un ejemplo excelente de la aplicación de la física estadística en el estudio de bosones en pequeñas cavidades es la fuerza de Casimir.

El problema fue formulado por primera vez en 1948 por el físico danés Hendrik B.G. Casimir en el estudio de la estabilidad de suspensiones de partículas hidrofóbicas en electrolitos acuosos diluidos, donde el juego entre la repulsión coulombiana entre los iones de las moléculas y la atracción producida por la suma de las fuerzas interatómicas de Van de Waals producen, a partir de cierta concentración, la coagulación de la sustancia.

Empleando un modelo de dos placas paralelas para la descripción de estas suspensiones se encuentra que la fuerza repulsiva por unidad de área, en términos de la densidad de iones n y la longitud de Debye $L_D^2 \simeq kT/8\pi n e^2$, esta dada por $F_r \simeq 100nkTe^{-d/L_D}$.

En cambio, tomando la expresión obtenida por London y van der Waals para la fuerza interatómica que lleva su nombre

$$V(r) = -\frac{3\hbar\omega\alpha^2}{4r^6}$$

se obtiene una fuerza atractiva de la forma $F_a = -A/d^{-3}$, con A una constante.

Sin embargo, R.A. Overbeek dedujo en 1946 de resultados experimentales en soluciones con partículas coloidales razonablemente grandes que la fuerza atractiva debería decaer más rápido que d^{-3} , proponiendo que podía ser efecto del valor finito para la velocidad de la luz en el potencial de London-van der Waals.

En un esfuerzo para comprender estos resultados Casimir encontró que una fuerza que decayera como d^{-7} podría ser atribuida a la energía del vacío entre dos placas perfectamente conductoras. Es decir, aunque clásicamente la ausencia de fuerzas externas sobre las placas indicaría una ausencia de campo en la región entre ellas, cuánticamente el intercambio de fotones virtuales puede resultar en una fuerza neta sobre las placas.

Aunque este tratamiento haya producido controversia entre aquellos que defienden el rol del potencial de van der Waals en el problema, la existencia del campo de vacío se ha justificado en la descripción de toda una serie de efectos como lo es el corrimiento Lamb o la emisión espontánea de fotones, y nuevas técnicas experimentales han permitido corroborar las predicciones realizadas por Casimir.

1.1 Cuantización del campo de vacío

El primer paso para describir la fuerza de Casimir debe ser realizar una descripción cuántica de los modos del campo electromagnético y obtener expresiones para la energía del vacío. Tomando las ecuaciones de Maxwell

para el caso libre de fuentes (potencial escalar $\phi = 0$)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

con el potencial vectorial \vec{A} dado por $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ en la ecuación (1.3)

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

y utilizando la norma de Coulomb ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$) podemos resolver la ecuación dadas las ecuaciones de frontera apropiadas. Suponiendo que se puede realizar la separación de variables, las soluciones monocromáticas deben ser de la forma

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \alpha(t) \vec{A}_0(\vec{r}) + \alpha^*(t) \vec{A}_0^*(\vec{r}) \\ &= \alpha(0) \vec{A}_0(\vec{r}) + \alpha^*(0) \vec{A}_0^*(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde \vec{A}_0 cumple con las ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{A}_0(\vec{r}) + k^2 \vec{A}_0(\vec{r}) = 0 \quad (k = \omega/c) \quad (1.7)$$

y $\ddot{\alpha}(t) = -k^2 \alpha(t)$. De aquí las componentes del campo electromagnético están dadas por

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} [\dot{\alpha}(t) \vec{A}_0(\vec{r}) + \dot{\alpha}^*(t) \vec{A}_0^*(\vec{r})] \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \alpha(t) \times \vec{A}_0(\vec{r}) + \alpha^*(t) \times \vec{A}_0^*(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

y la energía electromagnética

$$\begin{aligned} H_F &\propto \int d^3r (E^2 + B^2) \\ &= \frac{1}{c} \dot{\alpha}^2(t) \int d^3r \vec{A}_0(\vec{r})^2 + \frac{1}{c} \dot{\alpha}^{*2}(t) \int d^3r \vec{A}_0^*(\vec{r})^2 \\ &+ \frac{2}{c^2} |\dot{\alpha}(t)|^2 \int d^3r |\vec{A}_0|^2 + \alpha^2(t) \int d^3r [\nabla \times \vec{A}_0]^2 \\ &+ \alpha^{*2}(t) \int d^3r [\nabla \times \vec{A}_0^*]^2 + 2|\alpha(t)|^2 \int d^3r |\nabla \times \vec{A}_0(\vec{r})| \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se puede mostrar[15] que es enteramente válido tomar

$$\int d^3r [\nabla \times \vec{A}_0(\vec{r})]^2 = q^2 \int d^3r \vec{A}_0(\vec{r})^2 \quad (1.10)$$

y expresiones similares para las cantidades $[\nabla \times \vec{A}_0^*(\vec{r})]^2$ y $|\nabla \times \vec{A}_0(\vec{r})|^2$. En este caso la ecuación 1.9 se simplifica a

$$H_F = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (E^2 + B^2) = \frac{q^2}{2\pi} |\alpha(t)|^2 \quad (1.11)$$

donde se supuso, sin pérdida de generalidad, que la función vectorial $\vec{A}_0(\vec{r})$ está normalizada

$$\int d^3r |\vec{A}_0(\vec{r})|^2 = 1 \quad (1.12)$$

Definiendo las siguientes cantidades reales

$$x(t) = \frac{i}{c\sqrt{4\pi}}[\alpha(t) - \alpha^*(t)] \quad (1.13)$$

$$p(t) = \frac{q}{c\sqrt{4\pi}}[\alpha(t) + \alpha^*(t)] \quad (1.14)$$

es fácil demostrar que p y x son coordenadas conjugadas ya que cumplen $\dot{x} = p$ y $\dot{p} = -\omega^2 x$. Sustituyendo las dos expresiones anteriores en (1.11) se obtiene al Hamiltoniano del sistema en términos de estas nuevas variables:

$$H_F = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2) \quad (1.15)$$

Observando esta última expresión resulta matemáticamente equivalente al de un oscilador armónico de frecuencia ω y masa $m = 1$ por lo cual precedemos a quantizar de manera análoga, sustituyendo la variable clásica $\alpha(t)/c\sqrt{4\pi}$ por los operadores cuánticos de creación y destrucción a y a^\dagger dados por

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(p - i\omega x) \quad (1.16)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(p + i\omega x) \quad (1.17)$$

o equivalentemente

$$x = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a - a^\dagger) \quad (1.18)$$

$$p = \sqrt{\frac{\omega\hbar}{2}}(a + a^\dagger) \quad (1.19)$$

Y de esta misma manera se sustituye al potencial vectorial clásico \vec{A} por el operador

$$A(r, t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}\right)^{1/2} (a(t)A_0(r) + a^\dagger A_0^*(r)) \quad (1.20)$$

y el Hamiltoniano

$$H_F = \hbar\omega(aa^\dagger + \frac{1}{2}) \quad (1.21)$$

En el caso de un vacío sin fronteras debemos considerar la contribución de una infinidad permitida de modos del campo. Bajo esta suposición la intensidad $|A_0(\vec{r})|^2$ debe ser independiente de la posición para cada uno de los modos del campo y $A_0(\vec{r})$ debe cumplir con la ecuación de Helmholtz. Una solución evidente bajo estas condiciones es $\vec{A}_0(\vec{r}) = \vec{e}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ donde $\vec{k}\cdot\vec{e}_k = 0$ para cumplir con la condición de la norma de Coulomb $\nabla \cdot A = 0$.

Más aún para cumplir con la condición de normalización impuesta en (1.12) suponemos al espacio dividido en pequeños cubos de volumen $V = L^3$ e imponemos condiciones de periodicidad en sus fronteras, es decir

$$(k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad (1.22)$$

donde cada n_i puede ocupar cualquier valor entero positivo y suponemos que L es suficientemente grande para que este periodo artificial no sea de consecuencia física. Así podemos describir el campo dentro de cualquiera de estos paralelepípedos y definir el potencial vectorial para cada uno de los modos de oscilación $A_k(\vec{r}) = V^{-1/2}\vec{e}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ que satisfaga la ecuación de Helmholtz, la norma de Coulomb y la normalización en la "caja" virtual:

$$\int_V d^3r |A_k(\vec{r})| = 1 \quad (1.23)$$

Si suponemos que el vector \vec{e}_k es real, la condición de $\vec{e}_k \cdot \vec{k} = 0$ implica solo dos posibles opciones para \vec{e}_k , los cuales denotaremos \vec{e}_{k1} , \vec{e}_{k2} y cumplen $\vec{e}_{k1} \cdot \vec{e}_{k2} = 0$ y $|\vec{e}_{k1}|^2 = |\vec{e}_{k2}|^2 = 1$. En términos de estos vectores el potencial vectorial cuántico queda dado por

$$\begin{aligned} A_{k\gamma}(\vec{r}, t) &= \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} (a_{k\gamma}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{k\gamma}^\dagger(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}})e_{k\gamma}^\vec{r} \quad \gamma = 1, 2 \\ &= \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} (a_{k\gamma}(0)e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + a_{k\gamma}^\dagger(0)e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})})e_{k\gamma}^\vec{r} \end{aligned} \quad (1.24)$$

la relación anterior es válida para cualquier vector \vec{k} que cumpla con la relación (1.22) y podemos escribir el potencial vectorial total del vacío como la suma infinita de modos de la forma anterior, es decir:

$$A(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}\gamma} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} (a_{k\gamma}(0)e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + a_{k\gamma}^\dagger(0)e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})})e_{k\gamma}^\vec{r} \quad (1.25)$$

Comparando con el resultado para un único modo de oscilación (1.20) es evidente que una análisis similar nos lleva a definir el Hamiltoniano del campo

$$H_f = \sum_{k\gamma} \hbar\omega_k (a_{\vec{k}\gamma} a_{\vec{k}\gamma}^\dagger + \frac{1}{2}) \quad (1.26)$$

La expresión anterior es equivalente al de una infinidad de osciladores armónicos desacoplados satisfaciendo de manera independiente las leyes de conmutación conocidas para los operadores de aniquilación y creación, y como tal los eigenvalores asociados a la energía del sistema son

$$E = \sum_{\vec{k}\gamma} \hbar\omega_k (n_{\vec{k}\gamma} + \frac{1}{2}) \quad (1.27)$$

En esta última relación se observa explícitamente la contribución de la energía del vacío en el termino $\hbar\omega_k/2$, y aunque en general se puede descartar este término mediante una nueva definición del cero para la energía potencial, se puede mostrar que existen varios efectos que resultan de su consideración, entre ellas el efecto Casimir.

1.2 Fuerza de Casimir para conductores perfectos

En 1948 Casimir demostró que como consecuencia de la energía de vacío se produce una fuerza atractiva entre dos placas perfectamente conductoras. A continuación se muestra un procedimiento para obtener el mismo resultado. Consideremos primero los modos normales del campo electromagnético dentro de un paralelepípedo de lados $L_x = L_y = L$ y L_z . Para conductores perfectos la componente tangencial del campo eléctrico debe desvanecerse en las fronteras, condición que expresamos en términos del potencial vectorial $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ en las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} A_x &= \left(\frac{8}{V} \right)^{\frac{1}{2}} a_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ A_y &= \left(\frac{8}{V} \right)^{\frac{1}{2}} a_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ A_z &= \left(\frac{8}{V} \right)^{\frac{1}{2}} a_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{aligned} \quad (1.28)$$

con $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$ y

$$k_x = \frac{l\pi}{L} \quad k_y = \frac{m\pi}{L} \quad k_z = \frac{n\pi}{L_z} \quad (1.29)$$

Más aún el potencial vectorial debe satisfacer la condición $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ por lo cual imponemos la siguiente condición sobre sus componentes

$$k_x A_x + k_y A_y + k_z A_z = \frac{\pi}{L}(lA_x + mA_y) + \frac{\pi}{L_z}nA_z = 0 \quad (1.30)$$

Se observa en la ecuación anterior que existen dos polarizaciones independientes del campo electromagnético para cualesquiera tres valores de los enteros positivos n , l y m , salvo en el caso de ser alguno de ellos igual a cero en cuyo caso sólo se tiene una.

Es más, las componentes del campo también deben ser ortogonales entre sí y normalizadas, es decir

$$\int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^{L_z} dz [A_x^2 + A_y^2 + A_z^2] = 1 \quad (1.31)$$

Tomando en cuenta las condiciones previas las frecuencias permitidas para modos normales del campo dentro de la cavidad están dados también en términos de n , l y m

$$\omega_{n,l,m} = ck_{n,l,m} = \pi c \left[\frac{l^2 + m^2}{L^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.32)$$

y la energía de vacío para $L_z = d$

$$E(d) = 2 \sum_{n,l,m} ' \frac{1}{2} \hbar \omega_{n,l,m} = \sum_{n,l,m} ' \pi \hbar c \left[\frac{l^2 + m^2}{L^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.33)$$

El factor de dos en la expresión aparece al tomar en cuenta las contribuciones de las dos polarizaciones del campo y la prima en la suma indica que se debe mutliplicar por un factor de $\frac{1}{2}$ en el caso de ser n, l ó m nulos.

Para el caso particular de dos placas paralelas 1.1 podemos considerar $L \gg L_z$ y sustituir las sumas sobre l y m por integrales sobre todo el espacio

$$E(d) \rightarrow \frac{L^2 d}{\pi^2} (c\hbar) \sum_n ' \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{n\pi^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.34)$$

Esta última cantidad es infinita en cualquier volumen finito, y con el objetivo de regularizar y extraer un valor físico útil obtenemos primero la energía de vacío asociada a una cavidad de volumen infinito $d \rightarrow \infty$

$$E(\infty) = \frac{L^2}{\pi} (c\hbar) \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.35)$$

y definimos la energía potencial U en términos de la energía requerida para traer a las dos placas de infinito a una distancia d , es decir

$$\begin{aligned} U(d) &= E(d) - E(\infty) \\ &= \frac{L^2}{\pi^2} (c\hbar) \left[\sum_n ' \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{n\pi^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

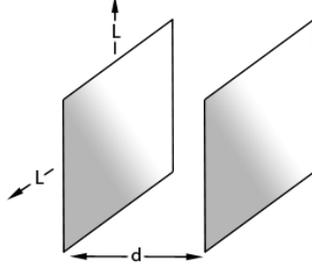


Figura 1.1: Límite de placas paralelas $L \gg L_z = d$

La cantidad anterior sigue siendo una resta de dos cantidades infinitas y para realizar el cálculo utilizamos coordenadas polares en el plano $(k_x, k_y) \rightarrow (\rho, \theta)$. Dado que $k_x, k_y > 0$ se tiene que la integración en este plano solo debe ser en el primer cuadrante, es decir $0 < \theta < \pi/2$.

Realizando la integración sobre el ángulo θ se tiene la energía en términos del radio ρ

$$U(d) = \frac{L^2 c \hbar}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \left[\sum_n' \int_0^\infty d\rho \rho \left(\rho^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{d}{\pi} \right) \int_0^\infty dk_z \int_0^\infty d\rho \rho (\rho^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1.37)$$

Dado que la integración sobre ρ aún es infinita, se introduce una función de corte $f(k) = f([\rho^2 + k_z^2]^{\frac{1}{2}})$ tal que $f(k) = 1$ para $k \ll k_m$ y $f(k) = 0$ para $k \gg k_m$.

Físicamente esta condición es válida dado que la aproximación de conductor perfecto deja de ser congruente a longitudes de onda del orden atómico.

Podemos tomar entonces a $k_m \simeq a_0$ dond a_0 es el radio de Bohr y sustituir en la expresión para la energía

$$U(d) = \frac{L^2 c \hbar}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \left[\sum_n' \int_0^\infty d\rho \rho \left(\rho^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \right)^{1/2} f([\rho^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2}]^{1/2}) - \left(\frac{d}{\pi} \right) \int_0^\infty dk_z \int_0^\infty d\rho \rho (\rho^2 + k_z^2)^{1/2} f([\rho^2 + k_z^2]^{1/2}) \right] \quad (1.38)$$

Definiendo las nuevas variables de integración $x = u^2 d^2 / \pi^2$ y $\kappa = k_z d / \pi$

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{\pi^3}{d^3} \left(\frac{L^2 c \hbar}{4\pi i} \right) \left[\sum_n' \int_0^\infty dx (x + n^2)^{1/2} f\left(\frac{\pi}{d}[x + n^2]^{1/2}\right) - \int_0^\infty d\kappa \int_0^\infty dx (x + \kappa^2)^{1/2} f\left(\frac{\pi}{d}[x + \kappa^2]^{1/2}\right) \right] \\ &= \left(\frac{\pi^2 c \hbar}{4d^3} \right) L^2 \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty d\kappa F(\kappa) \right] \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde

$$F(n) \equiv \int_0^\infty dx (x + n^2)^{1/2} f\left(\frac{\pi}{d}[x + n^2]^{1/2}\right) \quad (1.40)$$

De acuerdo con la formula de sumas de Euler-Maclaurin [15]

$$\sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty d\kappa F(\kappa) = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) \dots \quad (1.41)$$

y evaluando la n-ésima derivada de $F(\kappa)$ recordamos

$$F(\kappa) = \int_0^\infty d\rho \sqrt{\rho} f\left(\frac{\pi}{d}\sqrt{\rho}\right) \Rightarrow F'(\kappa) = -2\kappa^2 f\left(\frac{\pi}{d}\right) \quad (1.42)$$

De donde entonces $F'(0)=0$ y $F''(0)=-4$ y todas las derivadas de orden superior desaparecen si suponemos que las derivadas de la función de corte son nulas en $\kappa = 0$. Sustituyendo lo anterior en (1.41)

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty d\kappa F(\kappa) = -\frac{4}{720} \quad (1.43)$$

Y finalmente la energía

$$U(d) = \left(\frac{\pi^2 c \hbar}{4d^3}\right) L^2 \left(-\frac{4}{720}\right) = -\left(\frac{\pi^2 c \hbar}{720d^3}\right) A \quad (1.44)$$

donde se denota con $A = L^2$ el área de cada una de las placas. Se sigue entonces que la fuerza ejercida sobre cada placa por unidad de área definida $F = -dU(r)/dr$ es

$$\frac{F(d)}{A} = -\frac{\pi^2 c \hbar}{240d^4} \quad (1.45)$$

Ésta es la fuerza que obtuvo Casimir en 1948 para placas conductoras como resultado de la energía de vacío y cuya existencia se ha corroborado experimentalmente desde entonces.

1.3 Formalismo de potenciales de Hertz

A continuación se reproduce el resultado obtenido para placas paralelas perfectamente conductoras mediante el formalismo estudiado en [9] en términos de potenciales de Hertz. Este tratamiento es de particular interés para secciones posteriores dado que incluye de manera natural la condición de transversalidad del campo electromagnético, estableciendo un formalismo aplicable en el estudio de distintas geometrías.

Para realizar la descripción del sistema anterior a temperatura cero partimos de la solución a las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$F^{\mu\nu}_{,u} = 0 \quad F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu} = 0 \quad (1.46)$$

y considerando que en la interfase de un conductor perfecto la componente normal del campo magnético y las componentes tangenciales del campo eléctrico deben anularse, es decir:

$$\begin{aligned} F_{0i}(x) &= 0 & F_{ij}(x) &= 0 \\ i, j &= 2, 3 & x &= (t, 0, y, z) \quad y \quad (t, d, y, z) \end{aligned} \quad (1.47)$$

en donde d es la distancia entre las placas. Si además escogemos realizar nuestra descripción mediante un vector potencial A_μ invariante ante la norma de Lorentz tal que

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad \square A_\nu = 0 \quad \partial^\mu A_\mu = 0 \quad (1.48)$$

de donde se sigue

$$\partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 = 0 \quad (1.49)$$

Observando la relación anterior es claro que podemos expresar al potencial vectorial en términos de los potenciales de Hertz ψ, ϕ

$$A_\mu = (\psi_{,1}, -\psi_{,0}, \phi_{,3}, -\phi_{,2}) \quad (1.50)$$

de donde se siguen las siguientes expresiones para el campo eléctrico y magnético

$$\begin{aligned} E &= (-\nabla_\perp^2 \psi, -\phi_{,03} + \psi_{,12}, \phi_{,02} + \psi_{,13}) \\ B &= (-\nabla_\perp^2 \phi, \psi_{,12} + \psi_{,03}, \psi_{,13} - \psi_{,02}) \end{aligned} \quad (1.51)$$

en dónde $\nabla_{\perp}^2 = \partial_2^2 + \partial_3^2$.

Introduciendo estos potenciales en las ecuaciones de Maxwell 1.46 y 1.47 encontramos que son equivalentes a

$$\square\psi = 0 \quad \square\phi = 0 \quad (1.52)$$

con las condiciones de frontera

$$\phi = 0 \quad \psi_{,0} = 0 \quad (1.53)$$

en la interfase interior de las placas conductoras. Dadas estas condiciones anteriores podemos referirnos a ψ y ϕ como campos de Dirichlet y Neumann respectivamente, y a los cuales podemos expresar en términos de una superposición lineal de los modos primitivos

$$\phi_{l,k_{\perp}}(x) = N_{\phi_{l,k_{\perp}}} e^{ik_{\perp} \cdot x} e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{l\pi}{d} x_l\right) \quad (1.54)$$

$$\psi_{l,k_{\perp}}(x) = N_{\psi_{l,k_{\perp}}} e^{ik_{\perp} \cdot x} e^{-i\omega t} \cos\left(\frac{l\pi}{d} x_l\right) \quad (1.55)$$

en donde $l \in \mathbb{N}$, $k_{\perp} = (0, k_2, k_3)$ y

$$\omega^2 = |k_{\perp}|^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 \quad (1.56)$$

Imponiendo la condición de normalización dada por

$$i \int d^3x \phi_{l,k_{\perp}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{l',k'_{\perp}}(x) = \delta(k_{\perp} - k'_{\perp}) \delta_{ll'} \quad (1.57)$$

y en donde $\overleftrightarrow{\partial}_0 = (\overrightarrow{\partial}_0 - \overleftarrow{\partial}_0)$ da como resultado

$$|N_{\phi_{l,k_{\perp}}}|^2 = |N_{\psi_{l,k_{\perp}}}|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 \omega d} \quad l \neq 0 \quad (1.58)$$

y

$$|N_{\psi_{0,k_{\perp}}}|^2 = \frac{1}{2(2\pi)^2 \omega d} \quad (1.59)$$

Este resultado sugiere utilizar la cuantización usual para los campos e Hertz, tomando

$$\widehat{\phi}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \int d^2k \left(\phi_{l,k_{\perp}}(x) \widehat{a}_l(k_{\perp}) + \phi_{l,k_{\perp}}^*(x) \widehat{a}_l^{\dagger}(k_{\perp}) \right) \quad (1.60)$$

$$\widehat{\psi}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \int d^2k \left(\psi_{l,k_{\perp}}(x) \widehat{b}_l(k_{\perp}) + \psi_{l,k_{\perp}}^*(x) \widehat{b}_l^{\dagger}(k_{\perp}) \right) \quad (1.61)$$

en donde \widehat{a} y \widehat{b} son los operadores de creación para cada uno de los campos de Hertz respectivamente, tales que cumplen las leyes de conmutación:

$$[\widehat{a}(k_{\perp}), \widehat{a}^{\dagger}(k'_{\perp})] = \delta(k_{\perp} - k'_{\perp}) \delta_{ll'} \quad [\widehat{b}(k_{\perp}), \widehat{b}^{\dagger}(k'_{\perp})] = \delta(k_{\perp} - k'_{\perp}) \delta_{ll'} \quad (1.62)$$

y nulo en cualquier otro caso.

Ahora, podemos obtener las funciones de (auto)correlación para cada uno de los potenciales de Neumann y Dirichlet

$$\begin{aligned} C^-(x, x') &= \langle 0 | \widehat{\phi}(x) \widehat{\phi}(x') | 0 \rangle = D(x, x') \\ C^+(x, x') &= \langle 0 | \widehat{\psi}(x) \widehat{\psi}(x') | 0 \rangle = N(x, x') \end{aligned} \quad (1.63)$$

sustituyendo 1.60 para obtener

$$C^\pm(x, x') = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \int d^2 k_\perp |N_{l, k_\perp}| e^{ik_\perp \cdot (x-x')} e^{-i\omega(t-t')} \left(\cos \left[\left(\frac{l\pi}{d} \right) (x_l - x'_l) \right] \mp \cos \left[\left(\frac{l\pi}{d} \right) (x_l + x'_l) \right] \right) \quad (1.64)$$

Aplicando la formula para sumas de Poisson

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta \left(k_l \frac{l\pi}{d} \right) = \frac{d}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \cos(2k_l dl) = \frac{d}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(i2k_l dl) \quad (1.65)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} C^\pm(x, x') &= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^2 3\omega} \exp [ik_\perp \cdot (x - x') + 2ik_l dl - i\omega(t - t')] \\ &\quad \times \exp [ik_l(x - x')] \mp \exp [-ik_l(x + x')] \\ &= F^-(x, x') \mp F^+(x, x') \end{aligned} \quad (1.66)$$

Finalmente tomando

$$F^\mp = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x_l \mp x'_l - 2al)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 - (t - t')^2} \quad (1.67)$$

se encuentra una expresión sencilla para las funciones de autocorrelación

$$C^\pm(x, x') = F^-(x, x') \mp F^+(x, x') \quad (1.68)$$

Expresando al potencial vectorial A_μ en términos de los potenciales de Helmholtz podemos introducir los operadores de creación y destrucción para cada uno de los potenciales independientemente los cuales ya toman en cuenta la transversalidad del campo electromagnético. Con esto y tomando en cuenta las reglas de conmutación para \hat{a} y \hat{b} obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(x) &= (\partial_1, -\partial_0, 0, 0) \sum_{l=0}^{\infty} \int d^2 k_\perp N_{\psi_{l, k_\perp}} [\psi_{l, k_\perp}(x) \hat{b}_l(k_\perp) + \psi_{l, k_\perp}^*(x) \hat{b}_l^\dagger(k_\perp)] \\ &\quad + (0, 0, \partial_3, -\partial_2) \sum_{l=0}^{\infty} \int d^2 k_\perp N_{\phi_{l, k_\perp}} [\phi_{l, k_\perp}(x) \hat{a}_l(k_\perp) + \phi_{l, k_\perp}^*(x) \hat{a}_l^\dagger(x)] \end{aligned} \quad (1.69)$$

Para obtener las constantes de normalización del campo electromagnético imponemos, como condición, la contribución que debe hacer cada frecuencia a la energía electromagnética, es decir:

$$\frac{1}{2} \int_V d^3 x (E_{l, k_\perp} E_{l', k'_\perp}^* + B_{l, k_\perp} B_{l', k'_\perp}^*) = \frac{1}{2} \omega \delta(k_\perp - k'_\perp) \delta_{ll'} \quad (1.70)$$

la cual se satisface siempre que

$$|N_{l, k_\perp}|^2 = |k_\perp|^{-2} \quad (1.71)$$

De aquí se obtiene la autocorrelación del potencial electromagnético 1.50 tomando $D_{\mu\nu} = \langle A_\mu(x) A_\nu \rangle$ en términos de las autocorrelaciones del los potenciales de Dirichlet y Neumann para obtener

$$D_{\mu\nu} = -\frac{1}{\nabla_\perp^2} \begin{bmatrix} \partial_1 \partial'_1 N & -\partial_1 \partial'_0 B & 0 & 0 \\ \partial_1 \partial'_0 N & -\partial_0 \partial'_0 B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \partial'_3 D & -\partial_2 \partial'_3 D \\ 0 & 0 & \partial_3 \partial'_2 D & -\partial_2 \partial'_2 D \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

De manera semejante se pueden tomar 1.51 para obtener las funciones de correlación del campo electro-magnético

$$\langle E_i(x)B_j(x') \rangle = \varepsilon_{i,j,k} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x^k} N(x, x') \quad (1.73)$$

$$\langle B_i(x)E_j(x') \rangle = -\varepsilon_{i,j,k} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x^k} D(x, x')$$

y finalmente

$$\left. \begin{aligned} \langle E_i(x)E_j(x') \rangle \\ \langle B_i(x)B_j(x') \rangle \end{aligned} \right\} = \left(\delta_{ij} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) F^-(x, x') \pm \begin{bmatrix} \nabla_{\perp}^2 & -\partial_{12} & -\partial_{13} \\ -\partial_{12} & -\partial_1^2 - \partial_3^2 & -\partial_{23} \\ -\partial_{13} & -\partial_{23} & -\partial_1^2 - \partial_2^2 \end{bmatrix} F^+(x, x') \quad (1.74)$$

mientras que el tensor de energía-momento puede ser escrito de la forma

$$T_{\mu\nu}(x) = \lim_{x \rightarrow x'} T_{\mu\nu}(x, x') \quad (1.75)$$

con

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x, x') &= \langle F_{\mu\sigma}(x)F^{\sigma}_{\nu}(x') - \frac{1}{4}\eta_{\nu\mu}F_{\rho\sigma}(x)F^{\rho\sigma}(x') \rangle \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} F^-(x, x') \end{aligned} \quad (1.76)$$

A continuación se retoman los resultados anteriores tomando el caso particular de un sistema de referencia inercial en el cual las placas paralelas se encuentran instantáneamente en reposo fijando una posición x dentro del sistema y tomando el límite $x \rightarrow x'$ y $t - t' = \sigma$ en las ecuaciones 1.73 y 1.74 para obtener.

$$\begin{aligned} \langle E_i B_j \rangle &= 0 \\ \frac{1}{2}(\langle E_i E_j \rangle + \langle B_i B_j \rangle) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{[\sigma^2 + (2dl)^2] \delta_{ij} - 2(2dl)^2 n_i n_j}{[(\sigma - i\varepsilon)^2 - (2dl)^2]^3} \\ \frac{1}{2}(\langle E_i E_j \rangle - \langle B_i B_j \rangle) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{-[\sigma^2 + 4(x - dl)^2] \delta_{ij} - 2\sigma^2 n_i n_j}{[(\sigma - i\varepsilon)^2 - 4(x - dl)^2]^3} \end{aligned} \quad (1.77)$$

en donde se ha tomado $\langle E_i E_j \rangle = \langle E_i(t + \sigma)E_j(t) \rangle$ y expresiones similares para $\langle E_i B_j \rangle$ y $\langle B_i B_j \rangle$. Integrado cada término de las series en estas últimas expresiones se obtiene la energía de punto cero y la contribución de Casimir a la misma, obteniendo tras una serie de cálculos

$$\frac{1}{2}(\langle E_i E_j \rangle + \langle B_i B_j \rangle) = \frac{1}{6\pi^2} \delta_{ij} \int_0^{\infty} \omega^3 d\omega - \frac{\pi^2}{720d^4} (\delta_{ij} - 2n_i n_j) \quad (1.78)$$

$$\frac{1}{2}(\langle E_i E_j \rangle - \langle B_i B_j \rangle) = \frac{\pi^2}{16d^4} \frac{[1 - \frac{2}{3} \sin^2(\pi x/d)]}{\sin^4(\pi x/d)} \delta_{ij} \quad (1.79)$$

Deberíamos notar aquí que a pesar de ser tanto $\langle E^2 \rangle$ como $\langle B^2 \rangle$ divergen como x^{-4} al acercarse a las placas paralelas, pero sus contribuciones se cancelan dando un resultado finito para la densidad de energía.

Tomando el tensor de energía momento en el sistema de referencia donde $x = x'$ y $t - t' = \sigma$ se obtiene

$$T_{\mu\nu}(\sigma) = \begin{bmatrix} 3\sigma^2 + (adl)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + 3(2dl)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 - (2dl)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 - (2dl)^2 \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

e integrando sobre todas las frecuencias se recupera el tensor usual de punto cero con la contribución de Casimir

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{6\pi^2}(\eta_{\nu\mu}4t_\mu t_\nu) \int_0^\infty \omega^2 d\omega + \frac{\pi^2}{720d^4}(\eta_{\mu\nu} - 4n_\mu n_\nu) \quad (1.81)$$

Es importante observar, para su uso posteriormente que el resultado anterior se puede generalizar a temperaturas finitas distintas de cero se utilizar el método de imágenes para evaluar las funciones de autocorrelación de los potenciales de Neumann y Dirichlet encontrando

$$\left. \begin{array}{l} N_\beta \\ D_\beta \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(x_1 - x'_1 - 2dl)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 - (t - t' - im\beta)^2} \mp \frac{1}{(x_1 + x'_1 - 2dl)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 - (t - t' - im\beta)^2} \right) \quad (1.82)$$

De aqui se sigue el formalismo desarrollado anteriormente, sustituyendo esta F_β^\pm en el lugar de F^\pm para encontrar el tensor de energía momento.

1.4 Fuerza de Casimir entre placas dieléctricas

Recientemente ha surgido un gran interés en generalizar los resultados obtenidos por Casimir a sistemas más complejos y físicamente significativos. Entre ellos el estudio de la fuerza de Casimir en sistemas con placas paralelas dieléctricas [16], [19] y superredes de materiales arbitrarios [6] prometen producir predicciones verificables en el laboratorio para sistemas reales. En esta sección daremos un corto tratamiento para generalizar la teoría de Casimir en términos de los coeficientes de reflexión de cada placa, reproduciendo la deducción de Esquivel, Villareal y Mochan en [5] mediante una aproximación por sistemas espacialmente dispersivos. Consideremos un sistema S, en equilibrio termodinámico con los alrededores, compuesto por dos placas arbitrarias separadas por vacío formando una cavidad de ancho L, imponiendo como únicas condiciones simetría traslacional en el plano x-y, no quiralidad e isotropía alrededor del eje z.

De esta manera, al llegar un fotón con polarización α (s o p) a la superficie de una de las placas a (1 o 2) éste puede ser coherentemente reflejado con una amplitud de probabilidad r_a^α o transmitido al exterior con amplitud de probabilidad $T_a^\alpha = 1 - |r_a^\alpha|^2$. Sin embargo el equilibrio termodinámico entre el sistema y los alrededores implica que radiación del exterior puede ser transmitida incoherentemente al interior de la cavidad con una probabilidad $\propto T_a^\alpha$.

Es decir, todo fotón en el interior de la cavidad que alcanza una de las superficies puede ser coherentemente reflejado con una amplitud de probabilidad r_a^α o incoherentemente remplazado con probabilidad $1 - |r_a^\alpha|^2$ y por lo tanto la radiación electromagnética dentro de la cavidad está totalmente caracterizada por el ancho de la cavidad L y la amplitud de reflexión r_a^α .

Ahora consideremos un segundo sistema, S', en el cual se rempazan las dos placas anteriores por dos láminas de ancho infinitamente pequeño tal que sus coeficientes de reflexión coincidan con aquellas del sistema real. Se tiene entonces que la radiación electromagnética dentro de la segunda cavidad debe ser equivalente a la de la cavidad real. Es decir, podemos estudiar los eigenestados del campo dentro del sistema ficticio para describir el comportamiento del sistema real, tomando las distancias L_I y L_{II} finitas para contar los modos del campo electromagnético en el exterior y tomando el límite

$$L_I, L_{II}, W = L_I + L_{II} + L_{III} \rightarrow \infty \quad (1.83)$$

Considerando una onda con polarización s, frecuencia ω y vector de onda \vec{Q} y tomando, sin pérdida de generalidad, al plano de incidencia paralelo al plano x-z se tiene que el campo eléctrico debe estar dado por

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \mathbb{R}e(0, E_y(t, \vec{r}), 0) = \mathbb{R}e\vec{E}_0 e^{i(Qz - \omega t)} \phi(z) \quad (1.84)$$

donde la amplitud $\vec{E}_0 = (0, E_0, 0)$ y el campo magnético $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$ con

$$B_x(t, \vec{r}) = i \frac{E_0}{q} e^{i(Qx - \omega t)} \partial_z \phi(z) \quad (1.85)$$

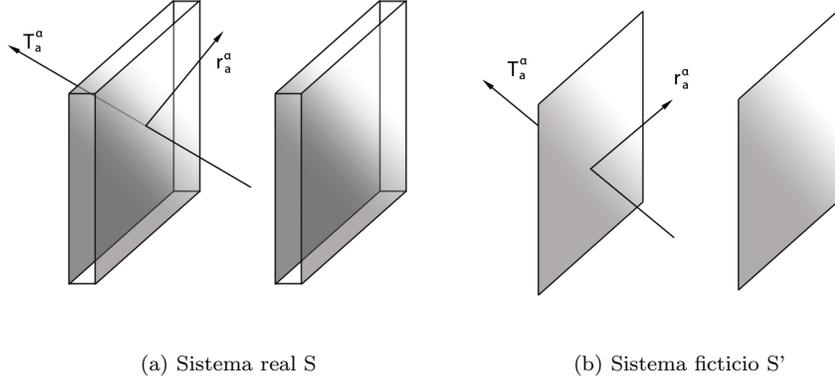


Figura 1.2: Arreglo real consistiendo en dos placas dieléctricas de ancho finito y un equivalente S' con placas delgadas.

$$B_z(t, \vec{r}) = i \frac{E_0}{q} e^{i(Qx - \omega t)} \phi(z) \quad (1.86)$$

Introduciendo éstas en la ecuación de onda electromagnética se obtiene que la solución $\phi(z)$ debe de ser una combinación lineal de funciones exponenciales de la forma

$$\phi(z) = \alpha_r e^{ik_r z} + \beta_r e^{-ik_r z} \quad (r = I, II, III) \quad (1.87)$$

donde α_r y β_r son los coeficientes de reflexión para cada una de las regiones $r=I, II$ ó III . Si exigimos que la componente ortogonal del campo electromagnético sea continua en las fronteras de las distintas regiones

$$k_I = k_{II} = k_{III} = \sqrt{q^2 - Q^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - Q^2} \quad (1.88)$$

podemos escribir la condición de normalización

$$\|\phi\|^2 = \int_{z_0}^{z^3} |\phi(z)|^2 dz = \sum_r L_r \left(|\alpha_r|^2 + |\beta_r|^2 + 2 \frac{\sin(kL_r)}{kL_r} \Re e \alpha_r \beta_r^* e^{2ik\bar{z}_r} \right) = 1 \quad (1.89)$$

donde hemos denotado \bar{z}_r al punto medio de cada región y se ha utilizado el hecho de que $q = \frac{\omega}{c}$ es el vector de onda libre. Evaluando en el límite (1.83) la relación anterior se reduce a la expresión

$$L_I (|\alpha_I|^2 + |\beta_I|^2) + L_{III} (|\alpha_{III}|^2 + |\beta_{III}|^2) = 1 \quad (1.90)$$

Tomando en cuenta lo anterior las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético tomarán la forma

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c(\partial_z B_x - iQ B_z) \quad (1.91)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = c \partial_z E \quad (1.92)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -iQc E_x \quad (1.93)$$

de las cuales se obtiene la ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 E = \partial_z^2 E - Q^2 E \quad (1.94)$$

Si nos fijamos en esta última relación resulta claro que tiene la forma de una ecuación de Helmholtz en una dimensión, por lo que impondremos en las fronteras z_1 y z_2 las condiciones

$$E(z_1) = Z_1^s B_x(z_1) \quad E(z_2) = -Z_2^s B_x(z_2) \quad (1.95)$$

donde Z_1^s y Z_2^s son la impedancia superficial de cada placa para ondas de polarización s , definidas como el coeficiente que multiplica a la razón del campo eléctrico y su derivada normal.

Considerando las relaciones anteriores y la densidad de energía definida por

$$u = \frac{1}{16\pi} (|E|^2 + |B|^2) \quad (1.96)$$

e integrando se obtiene la expresión para la energía electromagnética

$$U = \frac{A}{16\pi} \sum_r L_r \left(|\alpha_r|^2 + |\beta|^2 + 2 \frac{Q^2 \sin(kL_r)}{q^2} \frac{\mathbb{R}e \alpha_R \beta_r^*}{kL_r} e^{2ik_r z_r} \right) \quad (1.97)$$

la cual, en el límite (1.83), se simplifica a la expresión

$$U = \frac{A}{16\pi} |E_0|^2 \quad (1.98)$$

observamos que en esta última aparece explícitamente el área de las placas A , la cual consideramos finita hasta el término de los cálculos cuando evaluaremos el límite $A \rightarrow \infty$.

Ahora, para calcular la fuerza ejercida sobre una de las placas por la diferencia de energías en el interior versus el exterior de la cavidad es necesario conocer el valor del tensor de esfuerzos en un punto arbitrario de la misma, definido por

$$T_{ij} = \frac{1}{8\pi} \mathbb{R}e \left[E_i E_j^* + B_i B_j^* - \frac{(|E|^2 + |B|^2) \delta_{ij}}{2} \right] \quad (1.99)$$

La cual se reduce, en nuestra configuración, a la siguiente expresión

$$T_{zz}(z) = \left(\frac{k^2}{q^2} |\phi(z)|^2 + \frac{1}{q^2} |\partial_z \phi(z)|^2 \right) \frac{U}{2A} \quad (1.100)$$

Considerando las condiciones a la frontera en las posiciones $z_0, z_3 \rightarrow \infty$ y sustituyendo la energía total U en términos del número de fotones promedio, N_n , en cada estado n se obtiene que el tensor de esfuerzos total debe ser una suma de términos similares a la expresión anterior correspondientes a los modos discretos de frecuencia ω_n con componente ortogonal k_n del vector de onda, es decir

$$T_{zz}(z) = \frac{1}{2A} \sum_n \left(\frac{k_n^2}{q_n^2} |\phi_n(z)|^2 + \frac{1}{q_n^2} |\partial_z \phi_n(z)|^2 \right) \left(N_n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_n \quad (1.101)$$

La suma anterior puede ser reescrita en términos del número de ocupación en equilibrio térmico a una temperatura $T = \frac{1}{\beta k_B}$ (con k_B la constante de Boltzman) obteniendo la expresión

$$T_{zz}(z) = \frac{\hbar c}{A} \int d(k^2) f \frac{k^2}{q} \rho_{k^2} \quad (1.102)$$

donde

$$f = \frac{1}{2} \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \quad (1.103)$$

Observando la forma que toma el tensor de esfuerzos (1.101) y la forma de la integral (1.102), parece sugerir que la densidad de estados para la polarización s $\rho_{k^2}^s$ debe ser de la forma

$$\rho_{k^2}^s = K \sum_n \delta(k^2 - \lambda) \left[|\phi(z)|^2 + \frac{|\partial_z \phi(z)|^2}{k^2} \right] \quad (1.104)$$

Donde K es una constante de normalización. Introduciendo un vector de onda complejo $\tilde{k} = k + i\eta$ con ($\eta > 0$) se puede escribir la densidad de estados utilizando la función de Green para la ecuación de Helmholtz unidimensional, dada por

$$G_{\tilde{k}^2}(z, z') \equiv \sum_n \frac{\phi(z)\phi^*(z')}{\tilde{k}^2 - \lambda_n} \quad (1.105)$$

o es decir

$$(\partial_z^2 + \tilde{k}^2)G_{\tilde{k}^2}(z, z') = \delta(z - z') \quad (1.106)$$

y tomando el limite $\eta \rightarrow 0^+$ al final de los cálculos.

Podemos, entonces, reescribir a la densidad de estados $\rho_{k^2}(z)$

$$\rho_{k^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\mathbb{I}m G_{\tilde{k}^2}(z, z') + \frac{1}{\tilde{k}^2} \partial_z \partial_{z'} \mathbb{I}m G_{\tilde{k}^2}(z, z') \right)_{z \rightarrow z'} \quad (1.107)$$

de donde se tiene entonces que la solución de la ecuación (1.106) es

$$G_{\tilde{k}^2} = \frac{\phi^<(z_<)\phi^>(z_>)}{W} \quad (1.108)$$

donde $z_<$ y $z_>$ denotan a el valor mínimo y máximo de z y z' en la cavidad y W es el Wronskiano de las soluciones de Helmholtz $\phi^<(z)$ y $\phi^>(z)$, que obedecen las condiciones de frontera en $z = z_1, z_2$. Sustituyendo el valor de éstas en la definición de la función de Green dada por (1.108) y derivando con respecto a z_1 y z_2 se obtiene finalmente la densidad de estados para la polarización-s

$$\rho_{\tilde{k}^2}^s(z) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{R}e \left[\frac{1}{\tilde{k}} \left(\frac{1 + r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L}}{1 - r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L}} \right) \right] \quad (1.109)$$

Realizando un análisis similar para la polarización-p pero sustituyendo $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ y $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ se tiene de manera similar que la densidad de estados para la polarización-p es

$$\rho_{\tilde{k}^2}^p(z) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{R}e \left[\frac{1}{\tilde{k}} \left(\frac{1 + r_1^p r_2^p e^{2i\tilde{k}L}}{1 - r_1^p r_2^p e^{2i\tilde{k}L}} \right) \right] \quad (1.110)$$

y la densidad de estados total

$$\rho_{k^2}(z) = \rho_{k^2}^s + \rho_{k^2}^p \quad (1.111)$$

Sustituyendo en la expresión para el tensor de energía 1.101 se obtiene

$$T_{zz} = \frac{\hbar c}{4\pi^3} \int d^2Q \int dk f \frac{k^3}{q} \mathbb{R}e \left[\frac{1}{\tilde{k}} \left(\frac{1 + r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L}}{1 - r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L}} + \frac{1 + r_1^p r_2^p e^{2i\tilde{k}L}}{1 - r_1^p r_2^p e^{2i\tilde{k}L}} \right) \right] \quad (1.112)$$

Ahora obtenemos la fuerza ejercida sobre cada una de las placas de la cavidad restando el flujo de momento lineal T_{zz} en el exterior de la cavidad siguiendo la derivación anterior pero tomando $r_a^\alpha \rightarrow 0$. De esta manera se obtiene la fuerza total por unidad de área ejercida sobre cada placa

$$\frac{F_z}{A} = \frac{\hbar c}{\pi^2} \mathbb{R}e \int_0^\infty Q dQ \int dk f \frac{k^3}{q} \left(\frac{1}{\tilde{k}(\xi^s - 1)} + \frac{1}{\xi^p - 1} \right) \quad (1.113)$$

donde

$$\xi^s = \frac{1}{r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L}} \quad \xi^p = \frac{1}{r_1^p r_2^p e^{2i\tilde{k}L}} \quad (1.114)$$

La integral (1.113) debe realizarse sobre todo los valores permitidos del vector de onda paralelo \vec{Q} y del vector de onda ortogonal \vec{k} , es decir la integral sobre \tilde{k} debe tomarse desde iQ hasta 0 y luego hasta ∞^+ a

lo largo del eje de los números reales. Más aún si desplazamos esta trayectoria una cantidad infinitesimal se puede sustituir a \tilde{k} por k , cambiar las variables de integración (Q, k) por las variables (Q, ω) , y efectuar una rotación al plano complejo de tal manera que la integral se toma sobre todas las frecuencias complejas, el resultado 1.113 se convierte en:

$$\frac{F_z}{A} = \frac{\hbar}{\pi^2} \mathbb{R}e \int_0^\infty Q dQ \int_{C_1} du f(ik^2) \left(\frac{1}{k(\xi^s - 1)} + \frac{1}{k(\xi^p - 1)} \right) \quad (1.115)$$

donde $\omega = iu$.

La integral anterior se puede realizar numéricamente y así generalizar la fórmula de Lifshitz para placas con propiedades eléctricas arbitrarias, en términos de las amplitudes de reflexión de cada una de ellas.

Capítulo 2

Pistón de Casimir

Recientemente el desarrollo de nuevas técnicas experimentales ha puesto a prueba los detalles de las predicciones realizadas por Casimir para el comportamiento de cavidades pequeñas con paredes perfectamente conductoras, abriendo la puerta para el estudio del fenómeno en distintas configuraciones, tales como cavidades esféricas, cilíndricas y rectangulares. Aunque en varios de estos casos sea posible aislar las contribuciones finitas a la fuerza de Casimir, en general requiere de descartar elementos que no aparecen en el desarrollo original para placas paralelas.

Un arreglo de especial interés, el pistón rectangular, introducido por Boyer y Cavalcatti en una y dos dimensiones respectivamente, nos permite evadir varias de estas ambigüedades.

2.1 Espectro electromagnético de una cavidad rectangular

Comenzamos por aplicar el tratamiento desarrollado en la sección anterior para cuantizar el campo electromagnético dentro de una cavidad rectangular mediante potenciales de Hertz, tal como discuten Jáuregui, Hacyan y Villareal en [10].

Para una cavidad rectangular podemos alinear el sistema, sin pérdida de generalidad, tal que los potenciales de Helmholtz tengan la forma

$$\Pi_h = \psi \hat{e}_3 \quad \Pi_e = \phi \hat{e}_3 \quad (2.1)$$

en términos de las cuales tenemos las siguientes expresiones para los modos transversales eléctricos

$$E_h = \nabla \times \dot{\Pi}_h \quad B_h = \nabla \times \nabla \times \Pi_h \quad (2.2)$$

y los modos transversales magnéticos

$$E_e = \nabla \times \nabla \times \Pi_e \quad B_e = \nabla \times \dot{\Pi}_e \quad (2.3)$$

De aquí es claro que los potenciales ψ y ϕ cumplen una ecuación de onda escalar permitiendo definir al potencial vectorial

$$A^\mu = (-\partial_3 \phi, -\partial_2 \psi, \partial_1 \psi, -\partial_0 \phi) \quad (2.4)$$

de donde se siguen las siguientes expresiones para el campo eléctrico y magnético expresados como una combinación de ambos modos transversales.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (\partial_0 \partial_2 \psi + \partial_1 \partial_3 \phi, -\partial_0 \partial_1 \psi + \partial_2 \partial_3 \phi, -\nabla_\perp^2 \phi) \\ \vec{B} &= (-\partial_0 \partial_2 + \partial_1 \partial_3 \psi + \partial_0 \partial_1 \phi + \partial_2 \partial_3 \psi, -\nabla_\perp^2 \psi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ahora consideremos una cavidad rectangular de volumen finito con lados a , b y c retomamos el formalismo de campos de Helmholtz explorado anteriormente las condiciones de frontera en el interior de la caja conductora

se cumplen si ϕ cumple condiciones de Dirichlet para las paredes paralelas a e_3 y condiciones de Neumann en las perpendiculares, mientras que lo contrario debe ser verdadero para ψ , de aquí entonces se sigue que deben tener la forma

$$\begin{aligned}\psi_{lmn} &= N_{lmn} \exp(-i\omega_{lmn}t) \cos(lmnx/a) \cos(l\pi x/a) \sin(m\pi y/b) \sin(n\pi x/c) \\ \phi_{lmn} &= N_{lmn} \exp(-i\omega_{lmn}t) \sin(lmnx/a) \sin(l\pi x/a) \cos(m\pi y/b) \sin(n\pi x/c)\end{aligned}\quad (2.6)$$

con

$$\omega_{lmn} = \pi \left[\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2 \right]^{1/2}\quad (2.7)$$

De nuevo empleando la condición de normalización usual para un campo escalar

$$i \int d^3x \phi_{lmn}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{l'm'n'}(x) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}\quad (2.8)$$

y una expresión idéntica para ψ_{lmn} , de las cuales se sigue

$$|N_{lmn}|^2 = |D_{lmn}|^2 = \frac{\epsilon_0 l \epsilon_0 m \epsilon_0 n}{2}\quad (2.9)$$

Es más, de nuevo podemos cuantizar escribiendo ambos campos en términos de sus operadores de creación y destrucción asociados, es decir:

$$\hat{\phi} = \sum_{l,m,n} (\phi_{lmn} \hat{a}_{lmn} + \phi_{lmn}^* \hat{a}_{lmn}^\dagger)\quad (2.10)$$

$$\hat{\psi} = \sum_{l,m,n} (\psi_{lmn} \hat{b}_{lmn} + \psi_{lmn}^* \hat{b}_{lmn}^\dagger)\quad (2.11)$$

con las siguientes reglas de conmutación

$$[\hat{a}_{lmn}, \hat{a}_{l'm'n'}^\dagger] = [\hat{b}_{lmn}, \hat{b}_{l'm'n'}^\dagger] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}\quad (2.12)$$

A diferencia del tratamiento para placas paralelas se toman en este caso las funciones de Wight positivas dadas por

$$\begin{aligned}N(x, x') &= \langle 0 | \hat{\phi}^\dagger(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle \\ D(x, x') &= \langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x') | 0 \rangle\end{aligned}\quad (2.13)$$

en donde las funciones de Wight negativas se puede obtener cambiando $x \leftrightarrow x'$. Tomando las expresiones para los campos de Dirichlet y de Neumann respectivamente 2.6 se encuentran expresiones explícitas para $D(x, x')$ y $N(x, x')$

$$\begin{aligned}\left. \begin{aligned}D \\ N\end{aligned} \right\} &= \sum_{lmn} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 (2\omega_{lmn})} \exp[2i(k_1 a l + k_2 b m + k_3 c n) - i\omega_{lmn}(t - t')] \\ &\quad (\exp[ik_1(x - x')] \mp \exp[ik_1(x + x')]) (\exp[ik_2(y - y')] \mp \exp[ik_2(y + y')]) \\ &\quad \times (\exp[ik_3(z - z')] \pm \exp[ik_3(z + z')])\end{aligned}\quad (2.14)$$

Es más, definiendo la función

$$F(x^\alpha, x'^j) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{lmn} \frac{1}{(x - x' - 2al)^2 + (y - y' + 2bm)^2 + (x - x' + 2cn)^2 - (t - t' - i)^2}\quad (2.15)$$

en donde se ha tomado la convención usual en donde índices griegos corren desde la coordenada x^0 (t) hasta 3 mientras que letras latinas solo corren por las coordenadas espaciales x^1, x^2 y x^3 . Tomando $F^{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3} = F(t, x, y, z, -\epsilon_1 x', -\epsilon_2 y', -\epsilon_3 z')$ con $\epsilon_l = \pm 1$ se llega finalmente a la relación

$$N \pm D = \pm 2(F^{\mp\mp\mp\mp} - F^{\mp\pm\pm\pm} - F^{\pm\pm\pm\pm} - F^{\pm\pm\pm\mp})\quad (2.16)$$

Se puede mostrar que todas las funciones de correlación escalares pueden ser escritas como una combinación lineal de las distintas $F^{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}$ y aunque resulten, en general, expresiones complicadas nos permite calcular las cantidades relevantes asociadas al campo electromagnético dentro de la cavidad rectangular, y con este objetivo se introduce la condición de normalización

$$\frac{1}{2} \int d^3x (E_{lmn} E_{l'm'n'}^* + B_{lmn} B_{l'm'n'}^*) = \frac{1}{2} \omega_{lmn} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (2.17)$$

De donde se sigue la siguiente expresión para la función de Wightman asociada al campo electromagnético $\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle$

$$= \begin{bmatrix} \partial_3 \partial_3' D & 0 & 0 & -\partial_3 \partial_0' D \\ 0 & \partial_2 \partial_2' N & -\partial_2 \partial_1' N & 0 \\ 0 & -\partial_1 \partial_2' N & \partial_1 \partial_1' N & 0 \\ -\partial_3 \partial_0' D & 0 & 0 & \partial_0 \partial_0' D \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde las parciales con prima indican derivadas con respecto a las coordenadas x'^α mientras que el operador inverso ∇_\perp^{-2} actuando sobre los potenciales de Helmholtz pueden ser tomadas como $[(l\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2]^{-2}$. Lo que es más, utilizando esta última expresión se pueden obtener todas las funciones de correlación (entre dos puntos) del campo electromagnético, para obtener las expresiones que se encuentran en [10].

En cambio el tensor de energía momento puede ser evaluado tomando la transformada de Fourier en el intervalo $\sigma = t - t'$ de

$$T_{\alpha\beta}(x, x') = \langle 0 | F_{\alpha\mu}(x) F_{\beta}^\mu(x') - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x') | 0 \rangle \quad (2.19)$$

de donde se obtienen

$$\begin{aligned} T_{00} &= 2(\partial_0^2 F^{----} - \partial_1^2 F^{-++} - \partial_2^2 F^{+++} - \partial_3^2 F^{++-}) \\ T_{11} &= 2(\partial_1^2 F^{----} - \partial_0^2 F^{-++} + \partial_3^2 F^{+++} + \partial_2^2 F^{++-}) \\ T_{22} &= 2(\partial_2^2 F^{----} + \partial_3^2 F^{-++} - \partial_0^2 F^{+++} + \partial_1^2 F^{++-}) \\ T_{33} &= 2(\partial_3^2 F^{----} + \partial_2^2 F^{-++} - \partial_1^2 F^{+++} - \partial_0^2 F^{++-}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

y evaluando en el límite de coincidencia $x \rightarrow x'$.

Tomando, por ejemplo, a la densidad de energía para una frecuencia $E(x, \omega) = T(x, \omega)_{00}$ obtenemos en este límite

$$\begin{aligned} E(x, \omega) &= \frac{1}{8abc} \sum'_{lmn} \omega^{-1} \delta(\omega - \omega_{lmn}) \left[\omega_{lmn}^2 - \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 \exp[2i\pi(my/b + nz/c)] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \exp[2i\pi(lx/a + nz/c)] - \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \exp[2i\pi(lx/a + my/b)] \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como era de esperarse, y como se puede observar en esta última expresión, el espectro de densidad de energía dentro de la cavidad consiste en una serie de funciones δ correspondiendo a las frecuencias permitidas dentro de ésta, e integrando sobre el volumen de la cavidad se encuentra que las últimas tres contribuciones de la ecuación anterior desvanecen al menos de ser dos de los tres índices l , m , o n nulos, dando como resultado

$$E(\omega) = \frac{1}{8} \sum'_{lmn} \omega_{lmn} \delta(\omega - \omega_{lmn}) (1 - \delta_{m0} \delta_{n0} - \delta_{l0} \delta_{n0} - \delta_{l0} \delta_{m0}) \quad (2.22)$$

y finalmente integrando sobre todas las frecuencias se recupera el resultado conocido

$$E = \frac{1}{8} \sum'_{lmn} \omega_{lmn} (1 - \delta_{m0} \delta_{n0} - \delta_{l0} \delta_{n0} - \delta_{l0} \delta_{m0}) \quad (2.23)$$

en donde el campo de vacío dentro de la cavidad es expresado como la suma de todos los modos permitidos dentro de ella excepto aquellas que sea constantes en una de las direcciones.

Sin embargo continuamos con el procedimiento en [10] integrando las funciones de correlación sobre el volumen de la cavidad. Evaluando en el límite en el cual $x \rightarrow x'$ y tomando $t - t' = \sigma$ en la ecuación 2.20 y utilizando la fórmula

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^a f(x+al)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad (2.24)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} E(\sigma) &= \int dx T_{00}(t + \sigma, x; t - \sigma, x) \\ &= -\frac{abc}{\pi^2} \sum_{lmn} \frac{3\sigma^2 + (2al)^2 + (2bm)^2 + (2cn)^2}{[(2al)^2 + (2bm)^2 + (2cn)^2 - \sigma^2]^3} - \frac{a\pi}{4} \sum_l \frac{\sigma + (2al)^2}{[(2al)^2 - \sigma^2]^2} \\ &\quad - \frac{b\pi}{4} \sum_l \frac{\sigma + (2bm)^2}{[(2bm)^2 - \sigma^2]^2} - \frac{c\pi}{4} \sum_l \frac{\sigma + (2cn)^2}{[(2cn)^2 - \sigma^2]^2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Es más siguiendo un procedimiento similar se pueden obtener todas las componentes del tensor de energía momento asociadas a la fuerzas sobre cada una de las caras de la cavidad rectangular.

2.2 Pistón a Temperatura cero

Supongamos que el pistón esta compuesto por dos cavidades rectangulares, de lados $(a1, a2, a3)$ y $(a1, a2, L - a3)$ cada una, unidas como se muestra en la figura 2.1 y cuyas paredes sean perfectamente conductoras. Se tiene entonces que las contribuciones infinitas a la energía de Casimir a cada lado de la interfase se deben cancelar llevando a un valor finito para la presión neta sobre esta misma.

Con este fin consideremos la contribución de cada modo de vibración del campo electromagnético ω_k dada

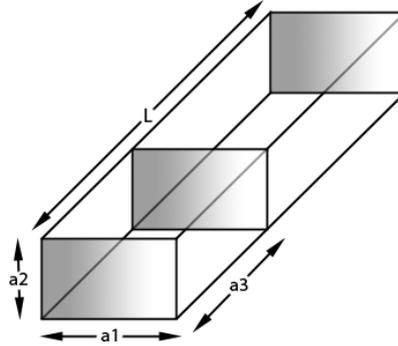


Figura 2.1: Pistón rectangular con dimensiones (a_1, a_2, a_3)

por la relación usualmente empleada

$$F(\omega_k) = T \ln(1 - e^{-\hbar\omega_k/T}) + \frac{1}{2}\hbar\omega_k \quad (2.26)$$

en donde el segundo término es la contribución de energía del vacío y se ha tomado, por simplicidad, $k_B = \hbar = c = 1$.

Se tiene entonces que la energía libre total de una cavidad se obtiene sumando sobre todas la frecuencias e introduciendo la distribución exacta de modos $\rho(\omega_n)$ dentro de la cavidad.

Para el caso particular de una cavidad rectangular de lados (a_1, a_2, a_3) perfectamente conductores, se tiene por condiciones de frontera que los modos están discretizados y son de la forma

$$\omega_n = \pi \sqrt{\left(\frac{n_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{a_3}\right)^2} \quad (2.27)$$

y la densidad de modos se expresa

$$\rho(\omega) = \frac{1}{4} \sum' \delta(\omega - \omega_n) (1 - \delta_{n_1 0} - \delta_{n_2 0} - \delta_{n_3 0}) \quad (2.28)$$

donde la prima sobre la suma indica que se debe omitir el caso en que los tres números n_i son nulos.

No obstante se puede mostrar que las divergencias ultravioleta de la energía libre pueden ser aisladas introduciendo la variable conjugada

$$u_n^2 = \sum_{i=1}^3 (2a_i n_i)^2 = 4((n_1 a_1)^2 + (n_2 a_2)^2 + (n_3 a_3)^2) \quad (2.29)$$

la cual podemos interpretar como la posición de las cargas imágenes que general al campo de funciones de correlación con las condiciones de frontera apropiadas a las placas conductoras.

Consideremos primero el caso de temperatura nula, tomando el limite $T \rightarrow 0$ en (2.26) y expresando al tensor $T_{\mu\nu}$ de esfuerzos en términos de las funciones de correlación para el campo electromagnético calculado en dos puntos separadas por un tiempo $t - t' = \sigma$, como se realiza en [1] y [11].

Tomando el limite $\sigma \rightarrow 0$ se obtiene la energía por unidad de volumen $T_{00} = \varepsilon$ dada en la siguiente relación

$$\varepsilon(\sigma) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_n \frac{3\sigma^2 + u_n^2}{(u_n^2 - \sigma^2)^3} + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{4\pi V} \sum_l \frac{\sigma^2 + (2a_i l)^2}{((2a_i l)^2 - \sigma^2)^2} \quad (2.30)$$

donde $n = a_1, a_2, a_3$, $u_n^2 = \sum_i (2a_i n_i)^2$ y $V = a_1 a_2 a_3$. Así mismo la presión actuando sobre una pared con vector normal n_i (T_{ii})

$$T_{ii} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_n \frac{4(2a_i n_i)^2 - u_n^2 + \sigma^2}{(u_n^2 - \sigma^2)^3} + \frac{a_i}{4\pi V} \sum_{n_i} \frac{\sigma^2 + (2a_i n_i)^2}{(2a_i n_i)^2 - \sigma^2)^2} \quad (2.31)$$

Debemos observar que en ambas relaciones anteriores las contribuciones correspondientes a los casos $n_i = 0$ en la energía de Casimir y la presión sobre las paredes están dadas

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{3}{\pi^2 \sigma^4} + \frac{(a_1 + a_2 + a_3)}{4\pi \sigma^2 V} + \varepsilon^f(\sigma) \quad (2.32)$$

$$T_{ii} = \frac{1}{\pi^2 \sigma^4} + \frac{a_i}{4\pi \sigma^2 V} + T_{ii}^f(\sigma) \quad (2.33)$$

donde $\varepsilon^f(\sigma)$ y $T_{ii}^f(\sigma)$ son contribuciones finitas.

Es fácil ver que las anteriores divergen en el límite $t \rightarrow t'$ independientemente de las dimensiones de la cavidad; más aún tomando solamente las contribuciones finitas en las ecuaciones (2.30) y (2.31) se recuperan los resultados obtenidos mediante otros esquemas de regularización.

Empleando los elementos anteriores podemos calcular la energía de Casimir $E = V\varepsilon$ sumando las contribuciones de cada cavidad rectangular y restando la energía asociada a la configuración en equilibrio, es decir con al interfase en medio del pistón, de tal manera que las contribuciones infinitas a la energía de Casimir quedan canceladas, obteniendo

$$E(\sigma) = E^f(\sigma, a_3) + E^f(\sigma, L - a_3) - 2E^f(\sigma, L/2) \quad (2.34)$$

De aquí se encuentra la diferencia de presión sobre la interfase midiendo el trabajo realizado para traer la placa hasta esa posición desde el equilibrio $L/2$, tomando en cuenta que la conservación de energía implica que el trabajo realizado debe ser equivalente al cambio de energía de Casimir del sistema, y dado que $E^f(\sigma, L/2)$ no debe contribuir a la fuerza obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta P_3(\sigma, a_3) &= -\frac{1}{a_1 a_2} \frac{\partial}{\partial a_3} (E^f(\sigma, a_3) + E^f(\sigma, L - a_3)) \\ &= T_{33}^f(\sigma, a_3) - T_{33}^f(\sigma, L - a_3)\end{aligned}\quad (2.35)$$

En particular analizamos la situación cuando $a_1 = 1\mu\text{m}$ y la longitud del pistón $L = 5a_1$ introduciendo los parámetros adimensionales $\eta = a_3/a_1$ y $\xi = a_2/a_1$ que definen la posición relativa de la interfase y la razón de aspecto del pistón respectivamente, obteniendo las siguientes expresiones de interés.

$$a_1^4 T_{33}^f(\sigma', d) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_n' \frac{4(2dn_3)^2 - u_n' + \sigma'^2}{(u_n' - \sigma'^2)^3} + \frac{1}{4\pi\xi} \sum_{n_3}' \frac{\sigma'^2 + (2dn_3)^2}{((2dn_3)^2 - \sigma'^2)^2}\quad (2.36)$$

$$a_1^4 \varepsilon(\sigma; d) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_n \frac{3\sigma'^2 + u_n'^2}{(u_n'^2 - \sigma'^2)^3} + \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{4\pi\xi d} \sum_l' \frac{\sigma'^2 + (2b_i l)^2}{((2b_i l)^2 - \sigma'^2)^2}\quad (2.37)$$

donde $b_i = (1, \xi, \eta)$, $u_n'^2 = \sum_i (2b_i n_i)^2$ y

$$d = \begin{cases} \eta & \text{para la cavidad con longitud } a_3 \\ 5 - \eta & \text{para la cavidad con longitud } L - a_3 \\ 2,5 & \text{para la cavidad con longitud } L/2 \end{cases}\quad (2.38)$$

Variando el valor de estos parámetros ($\xi, \eta \ll 1$ y $\xi, \eta \gg 1$) se puede estudiar una gama de distintos arreglos para el pistón rectangular.

Por otro lado, debemos reconocer que los resultados anteriores pueden ser modificados debido a fluctuaciones de temperatura, conductividad finita en los materiales, etc. y entonces se debe considerar el efecto de σ sobre las cantidades anteriores. Suponiendo que el corte σ/a_1 es del orden de $10^{-2} \sim 10^{-4}$ se puede obtener la suma sobre la dimensión-3 (n_3) en los segundos términos de $T_{33}(\sigma', d)$ y $\varepsilon(\sigma', d)$ analíticamente, obteniendo

$$\begin{aligned}a_1^4 T_{33}^f(\sigma'; d) &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_n' \frac{4(2dn_3)^2 - u_n' + \sigma'^2}{(u_n' - \sigma'^2)^3} \\ &\quad + \frac{2}{4\pi\xi} \left(\frac{[-2d^2 + \sigma'^2 \pi^2 + 2d^2 \cos(\frac{\sigma'\pi}{d})] \csc^2(\frac{\sigma'\pi}{2d})}{8\sigma'^2 d^2} \right)\end{aligned}\quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}a_1^4 \varepsilon(\sigma'; d) &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n_1, n_2, n_3}' \frac{3\sigma'^2 + u_n'^2}{(u_n'^2 - \sigma'^2)^3} \\ &\quad + \frac{2}{4\pi d \xi} \sum_{i=1}^3 \frac{[-2b_i^2 + \sigma'^2 \pi^2 + 2b_i^2 \cos(\frac{\sigma'\pi}{b_i})] \csc^2(\frac{\sigma'\pi}{2b_i})}{8b_i \sigma'^2}\end{aligned}\quad (2.40)$$

en donde $v_n^2 = u_{(n_1, n_2, 0)}'^2$ y $\Delta = \frac{\pi \sqrt{v_n^2 - \sigma'^2}}{2d}$. Realizando las sumas restantes numéricamente se obtienen los resultados mostrados en las figuras 2.2-2.4. Las superficies en 2.3 y 2.4 muestran la dependencia de la diferencia de presión y energía del pistón $L = 5a_1$ sobre los parámetros η y ξ , mientras que en la figura 2.2 se comparan tres configuraciones $\xi = cte$ de la misma. Se aprecia claramente en ambas figuras que la posición $L/2$ de la interfase es inestable, o es decir, al desplazar la interfase una cantidad pequeña de esta posición se observa una fuerza neta atractiva hacia la cara más cercana del pistón.

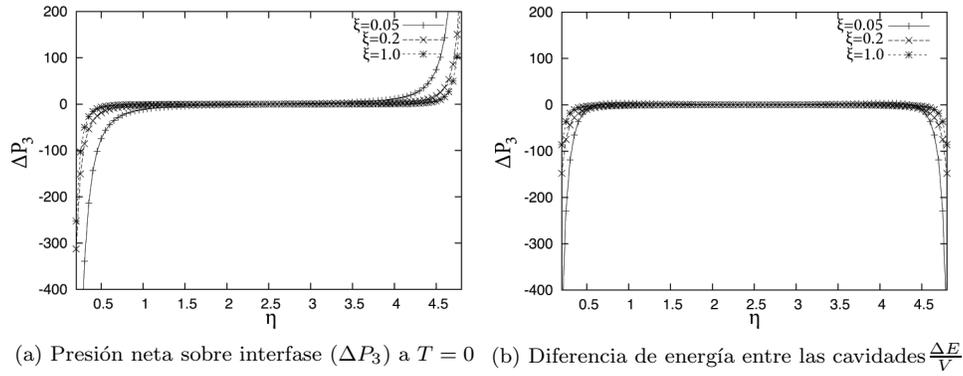


Figura 2.2: Comportamiento de la presión y energía en función de η a temperatura nula $T = 0$ para tres valores de ξ .

Así mismo la magnitud de esta fuerza aumenta en configuraciones con razón de aspecto $\xi \gg 1$ o $\xi \ll 1$, alcanzando un mínimo en el caso del pistón cuadrado $\xi = 1$.

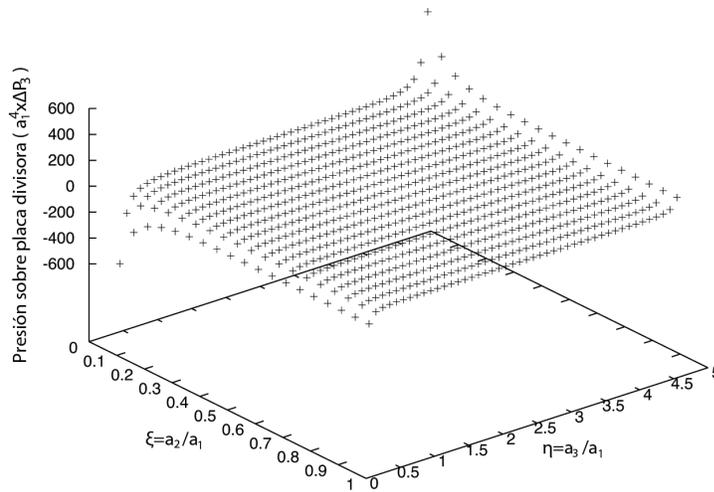


Figura 2.3: Presión neta sobre interfase (ΔP_3) a temperatura nula $T = 0$.

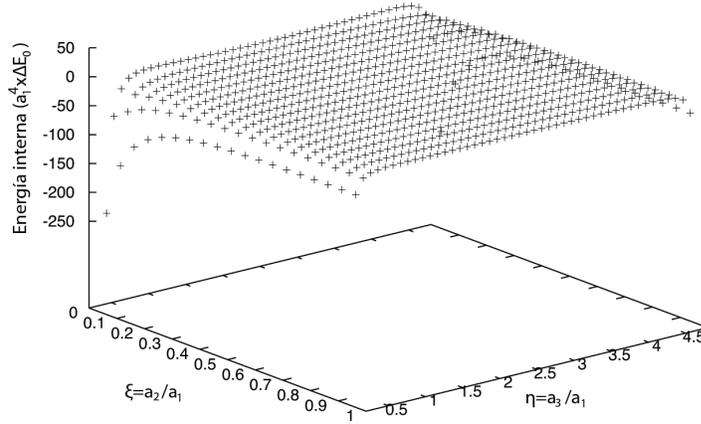


Figura 2.4: Presión neta sobre interfase. (ΔU) a temperatura nula $T = 0$.

2.3 Pistón a Temperatura Finita

Recientemente el estudio de cavidades en equilibrio termodinámico con sus alrededores a una temperatura finita ha cobrado gran importancia, debido a la presencia de nuevos resultados experimentales y un deseo de extender y probar las predicciones de la teoría inicialmente propuesta por Casimir en 1948.

Es más, en el caso más sencillo de placas paralelas perfectamente conductoras descripciones realizadas por Boyer [3] y Feinberg [7], por ejemplo, encuentran apartir de un formalismo puramente clásico que la presión de la cavidad difiere de la de cuerpo negro a altas temperaturas debido a una contribución lineal en la temperatura T e independiente de \hbar .

Hoy en día es generalmente aceptado que este término proviene de la existencia de frecuencias estáticas en los modos normales de oscilación en conductores perfectos, y aunque la presencia de modos estáticos en distintas geometrías con distintas condiciones a la frontera ha sido sujeto de muchos trabajos recientes, el problema se vuelve considerablemente más complejo para la configuración de “caja” o cavidad cerrada.

En [1] Ambjorn y Wolfram presentan un análisis para una cavidad en D dimensiones con P condiciones a la frontera de Neumann, Dirichlet o mixtas, utilizando un esquema de regularización dimensional para calcular la función de partición asociada. Sin embargo, ésta resulta divergente en el caso de la caja cerrada ($D = P$) al igual que la energía libre y la entropía del sistema, problema que sanan introduciendo dos nuevos esquemas de normalización válidos a bajas y altas temperaturas respectivamente.

En la siguiente sección procuraremos extender la descripción del pistón rectangular a temperaturas finitas, buscando un esquema de normalización que sea válido a toda temperatura, ocupando las expresiones para la densidad de estado, los modos normales de oscilación y la energía libre F dadas en 2.26, 2.27 y 2.28. Separando a la expresión para la densidad de estados tenemos que

$$\rho(\omega) = \rho^\infty + \Delta\rho(\omega) \quad (2.41)$$

donde

$$\rho^\infty = \frac{V}{\pi^2} \omega^3 - \frac{1}{2\pi} (a_1 + a_2 + a_3) \quad (2.42)$$

es la contribución de placas separadas una cantidad infinita, y

$$\begin{aligned}\Delta\rho(\omega) &= \frac{V}{\pi^2} \sum'_n \frac{\omega \sin(\omega u_n)}{u_n} - \frac{a_1}{2\pi} \sum'_l \cos(\omega u_{l00}) \\ &\quad - \frac{a_2}{2\pi} \sum'_l \cos(\omega u_{0l0}) - \frac{a_3}{2\pi} \sum'_l \cos(\omega u_{00l})\end{aligned}\quad (2.43)$$

en donde se tomó

$$u_{n_1, n_2, n_3}^2 = \sum_{i=1}^3 (2n_i a_i)^2 \quad (2.44)$$

Es importante observar que el término ρ^∞ es dominante en el límite $a_i \rightarrow \infty$ pero no es igual a la contribución de espacio vacío dado que aún en este límite son notables los efectos de frontera, pero su contribución a la energía de vacío siempre es divergente en el límite ultravioleta. Sanamos esta divergencia en el modelo del pistón midiendo respecto a una configuración en la cual la placa divisora del pistón se encuentra en el medio del mismo cancelando la contribución de ρ^∞ .

Introduciendo $\Delta\rho(\omega)$ podemos calcular la contribución a la energía libre de Helmholtz debida a los efectos de temperatura realizando la integral

$$\Delta F = \int \Delta\rho(\omega) \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) d\omega \quad (2.45)$$

Es claro que para realizar este último paso hay dos integrales que debemos obtener:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos(u\omega) \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) d\omega \\ \int_0^\infty \omega \sin(u\omega) \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) d\omega\end{aligned}\quad (2.46)$$

Tomando la primera e integrando por partes se encuentra

$$-\frac{u}{\beta\hbar} \int_0^\infty \cos(u\omega) \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) = \int_0^\infty d\omega \frac{\sin(u\omega)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (2.47)$$

Manipulando la expresión mediante las siguientes relaciones

$$\frac{1}{2} \coth(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2(e^\theta + e^{-\theta})} = \frac{e^\theta + e^{-\theta} - 2e^{-\theta}}{2(e^\theta + e^{-\theta})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\theta} - 1} \quad (2.48)$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\omega \frac{\sin(u\omega)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty \sin(u\omega) \coth(\beta\hbar\omega/2) d\omega - \int_0^\infty \sin(u\omega) d\omega \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \sin(u\omega) \coth(\beta\hbar\omega/2) d\omega - \frac{1}{2} \int_0^\infty \sin(u\omega) d\omega \\ &= \frac{\pi}{2\beta\hbar} \coth\left(\frac{\pi u}{\beta\hbar}\right) - \frac{\pi}{2u}\end{aligned}\quad (2.49)$$

En donde utilizamos el valor principal en la integral del primer término de la ecuación anterior aunque en práctica esta depende de la trayectoria utilizada. La importancia de este hecho se discute en [11].

Es más, podemos seguir un procedimiento similar para obtener el valor de la segunda integral

$$-\frac{u}{\beta\hbar} \int_0^\infty d\omega \sin(u\omega) \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) = - \int_0^\infty d\omega \frac{\cos(u\omega)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} + \frac{1}{u} \int_0^\infty d\omega \frac{\sin(u\omega)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (2.50)$$

en donde

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\omega \omega \frac{\cos(u\omega)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty d\omega \omega \cos(u\omega) \coth(\beta\hbar\omega/2) - \frac{1}{2} d\omega \omega \cos(u\omega) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\beta\hbar}\right)^2 \operatorname{cosech}^2\left(\frac{\pi u}{\beta\hbar}\right) + \frac{\pi}{2u^2}\end{aligned}\quad (2.51)$$

Utilizando estos resultados podemos calcular la contribución dependiente de la temperatura de la energía libre, resulta ser libre de divergencias ultravioletas, dando como resultado

$$\begin{aligned}\Delta F &= \Delta E_0 - \frac{\pi^2}{2} VT^4 \sum'_n \frac{\coth(v_n) + v_n \operatorname{csch}^2(v_n)}{v_n^3} \\ &\quad + \frac{\pi}{4} T^2 \sum'_l [a_1 g(v_{l00}) + a_2 g(v_{l0l}) + a_3 g(v_{l0l})]\end{aligned}\quad (2.52)$$

en donde las primas en las expresiones anteriores indican que se debe excluir el caso en que todos los n_i son iguales a cero,

$$\Delta E_0 = -\frac{1}{\pi^2} V \sum'_n \frac{1}{u_n^4} + \frac{1}{4\pi} a_1 \sum'_l \frac{1}{u_{l00}^2} + \frac{1}{4\pi} a_2 \sum'_l \frac{1}{u_{l0l}^2} + \frac{1}{4\pi} a_3 \sum'_l \frac{1}{u_{l0l}^2}\quad (2.53)$$

es la energía de vacío, y

$$g(v_n) = \frac{1}{v_n} \left(\coth(v_n) - \frac{1}{v_n} \right)\quad (2.54)$$

Estudiando la expresión anterior, se puede ver que es finita en el límite $v_n \rightarrow 0$ pero tomando el límite de temperaturas altas ($\operatorname{csch}(v) \rightarrow 0$, $\coth(v) \rightarrow 1$)

$$\begin{aligned}\Delta F &= \Delta E_0 - \frac{\pi^2}{2} VT^4 \sum'_n \frac{1}{v_n^3} + \frac{\pi}{4} T^2 \sum'_l \left(\frac{1}{v_{l00}} + \frac{1}{v_{l0l}} + \frac{1}{v_{l0l}} \right) \\ &\quad - \frac{\pi}{4} T^2 \sum'_l \left(\frac{1}{v_{l00}^2} + \frac{1}{v_{l0l}^2} + \frac{1}{v_{l0l}^2} \right)\end{aligned}\quad (2.55)$$

se encuentra que el segundo y tercer término divergen logaritmicamente.

Esfuerzos buscando regularizar la expresión anterior, tales como restar a la expresión 2.52 estas contribuciones infinitas o distinguiendo entre fotones de alta y baja frecuencia [11] introduciendo una frecuencia de corte, han proporcionado soluciones discontinuas o divergentes.

Sin embargo, si tomamos únicamente los términos divergentes en la expresión anterior para la cavidad de dimensiones (a_1, a_2, a_3)

$$\begin{aligned}F_{div}(a_3) &= -\frac{\pi^2}{2} VT^4 \sum'_n \frac{1}{v_n^3} + \frac{\pi}{4} T^2 \sum'_l \left(\frac{1}{v_{l00}} + \frac{1}{v_{l0l}} + \frac{1}{v_{l0l}} \right) \\ &= -\frac{T}{2\pi} \sum'_n \frac{1}{u_n^3} + \frac{T}{8V} \sum_{i=1}^3 \sum'_{n_i} \frac{1}{n_i}\end{aligned}\quad (2.56)$$

y considerando expresiones similares para las cavidades restantes del pistón se obtiene y midiendo respecto a la configuración en equilibrio $a_3 = L/2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{V(F_{div}(a_3) + F_{div}(L - a_3) - 2F_{div}(L/2))}{-2F_{div}(L/2)} &= -\frac{T}{2\pi} \left(\frac{a_1 a_2 a_3}{8} \right) \sum'_n \frac{1}{[(n_1 a_1)^2 + (n_2 a_2)^2 + (n_3 a_3)^2]^{3/2}} \\
&- \frac{T}{2\pi} \left(\frac{a_1 a_2 (L - a_3)}{8} \right) \sum'_n \frac{1}{[(n_1 a_1)^2 + (n_2 a_2)^2 + (n_3 (L - a_3))^2]^{3/2}} \\
&+ \frac{T}{\pi} \left(\frac{a_1 a_2 L/2}{8} \right) \sum'_n \frac{1}{[(n_1 a_1)^2 + (n_2 a_2)^2 + (n_3 L/2)^2]^{3/2}} \quad (2.57)
\end{aligned}$$

dado que las contribuciones de arista se cancelan. Es aquí donde debemos notar que el limite de altas temperaturas ($\coth(v) \rightarrow 1$, $\operatorname{csch}(v) \rightarrow 0$) es equivalente a tomar el limite en el cual el volumen del pistón $V \rightarrow \infty$, y en este limite las cantidades a_3 , $L - a_3$ y $L/2$ son muy parecidas, tal que las cantidades divergentes que a primera vista sobreviven en 2.57 también se deben cancelar.

Es decir, al utilizar esta configuración hemos podido eliminar la divergencia infrarroja presente en la expresión para la energía libre de Helmholtz 2.52 obteniendo un resultado finito para todas las variables termodinámicas sin necesidad de introducir un nuevo esquema de regularización.

Para corroborar este resultado partimos de la expresión para la energía libre de una cavidad 2.52 poniendo de nuevo en términos de las variables adimensionales $\xi = a_2/a_1$ y $\eta = a_3/a_1$ para obtener:

$$\begin{aligned}
\Delta F &= \frac{\Delta \epsilon_0}{a_1} - \frac{\pi^2}{2} T^4 \xi \eta \sum'_n \frac{\coth(a_1 v'_n) + a_1 v_n \operatorname{csc}^2(a_1 v_n)}{(v'_n)^3} \\
&+ \frac{\pi}{4a_1} T^2 \sum'_n [G(v'_{l00}) + \xi G(v'_{0l0}) + \eta G(v'_{00l})] \quad (2.58)
\end{aligned}$$

en donde $u_n = a_1 u'_n$, $v_n = a_1 v'_n$

$$\begin{aligned}
G(v'_n) &= \frac{a_1 v'_n \coth(a_1 v'_n) - 1}{v_n'^2} \\
H(v'_n) &= \frac{\coth(a_1 v'_n) - a_1 v'_n \operatorname{csch}(a_1 v'_n)}{v_n'^2}
\end{aligned}$$

y

$$\Delta \epsilon_0 = -\frac{1}{\pi^2} \xi \eta \sum'_n \frac{1}{u_n'^4} + \frac{1}{4\pi} \sum'_l \left(\frac{1}{u_{l00}'^2} + \frac{1}{u_{0l0}'^2} + \frac{1}{u_{00l}'^2} \right)$$

De aquí continuamos de manera similar, obteniendo la presión sobre la cara divisora y la entropía del sistema mediante las relaciones

$$\begin{aligned}
P_3 &= -\frac{1}{a_1 a_2} \frac{\partial}{\partial a_3} \Delta F = -\frac{1}{a_1^3 \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta F \\
\Delta S &= -\frac{\partial}{\partial T} \Delta F
\end{aligned}$$

y

$$\Delta U = \Delta F + T \Delta S$$

de donde se obtienen

$$\begin{aligned}
-a_1^3 P_3 &= \frac{1}{a_1} \frac{\partial \Delta \epsilon_0}{\partial \eta} - \frac{\pi^2}{2} T^4 \xi \left(\eta \sum'_n \frac{\partial H(v'_n)}{\partial v'_n} \frac{\partial v'_n}{\partial \eta} - \sum'_n H(v'_n) \right) \\
&+ \frac{\pi}{4a_1} \left(\sum'_l G(v_{00l}) + \eta \sum'_l \frac{\partial G(v'_{00l})}{\partial v'_n} \frac{\partial v'_{00l}}{\partial \eta} \right) \quad (2.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta S &= -\frac{\pi^2 \xi \eta T^3}{2} \sum'_n \left[a_1 v'_n \frac{\partial H(v'_n)}{\partial v'_n} + 4H(v'_n) \right] - \frac{\pi T}{4} \sum'_l [2G(v'_{l00}) + v'^2_{l00} H(v'_{l00})] \\
&\quad - \frac{\pi T \xi}{4} \sum'_l [2G(v'_{0l0}) + v'^2_{0l0} H(v'_{0l0})] - \frac{\pi T \eta}{4} \sum'_l [2G(v'_{00l}) + v'^2_{00l} H(v'_{00l})]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

en donde $\partial u'_n / \partial \eta = 4n^2_3 \eta / u'_n$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(v)}{\partial v} &= \frac{-a_1 v (-2 + \operatorname{csch}(a_1 v)) \operatorname{csch}(a_1 v) + \operatorname{coth}(a_1 v) (-3 + a_1^2 v^2 \operatorname{csch}(a_1 v))}{v^4} \\
\frac{\partial G(v)}{\partial v} &= \frac{-2 + a_1 v \operatorname{coth}(a_1 v) + a_1^2 v^2 \operatorname{csch}^2(a_1 v)}{v^3}
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\frac{\partial \Delta \epsilon_0}{\partial \eta} = -\frac{1}{\pi^2} \xi \left(\sum'_n \frac{1}{u'^4_n} - \eta \sum'_n \frac{4}{u'^5_n} \frac{\partial u'_n}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{4\pi} \sum'_l \frac{-2}{u'^3_{00l}} \frac{\partial u'_{l00}}{\partial \eta}$$

Finalmente se evalúan las cantidades anteriores para las dos cavidades del pistón y se mide respecto al arreglo en “equilibrio” con la placa divisora en $L/2$ tomando que de aquí en adelante $a_1 = 1 \mu m = 1$. En la figura 2.5 se muestra el comportamiento de un pistón de $L = 5a_1$ cuadrado $\xi = 1$ a temperatura $T = 1$ constante, variando la posición de la placa divisora. Se observa que todas las cantidades investigadas son suaves y tanto la presión como la energía se comportan de manera similar a los resultados obtenidos para el pistón a temperatura $T = 0$ discutido en la sección anterior. En las siguientes paginas, figuras 2.6-2.7, se muestran

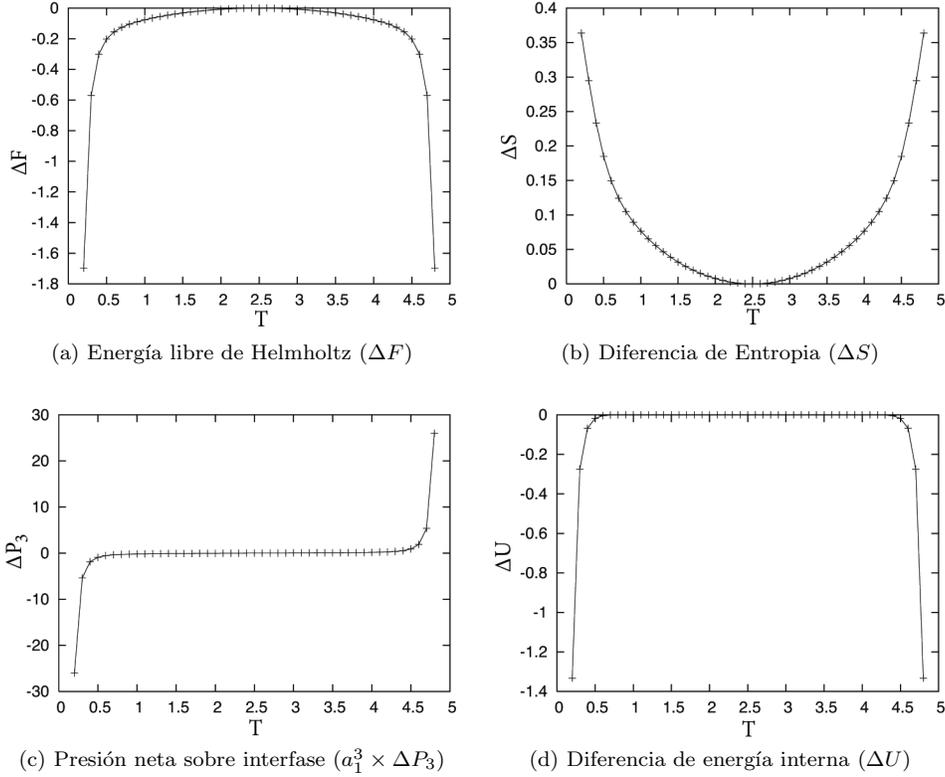


Figura 2.5: Comportamiento termodinámico del pistón cuadrado a temperatura constante $T = 1$

los resultados obtenidos para el comportamiento termodinámico de tres distintas configuraciones del pistón de Casimir, el pistón cuadrado ($a_1 = a_2 = 1\mu m, L = 5a_1$), el pistón rectangular ($a_2 = a_1/10, L = 5a_1$) y la caja de "pizza" ($a_1 = a_2 = 1\mu m, L = a_1/10$). Es importante notar que en las tres configuraciones todas las cantidades termodinámicas son finitas y suaves, reproduciendo también el comportamiento esperado con una excepción, la entropía tiene un valor finito distinto de cero en el límite $T = 0$. Boyer, entre otros, obtuvo en [3] un resultado similar mostrando la existencia de una entropía geométrica independiente de la temperatura al tomar el límite de altas temperaturas y al cual podría ser atribuido el hecho de tener entropía distinta de cero aun en el caso de $T = 0$.

Es más, observando los resultados es claro que resalta el comportamiento de la caja de pizza. En esta configuración las cavidades tienen una longitud del orden de 10 nanómetros. En este extremo se observa como, de cierto modo, las oscilaciones de vacío dentro de las cavidades no tienen suficiente espacio para que sus contribuciones sean comparables a los efectos de temperatura finita, un hecho claramente observado en la entropía, cuyo comportamiento no distingue entre las tres posiciones de la placa divisora $a_3 = 10nm, 20nm$ ó $50nm$ indicando una cantidad igual de estados accesibles para las tres.

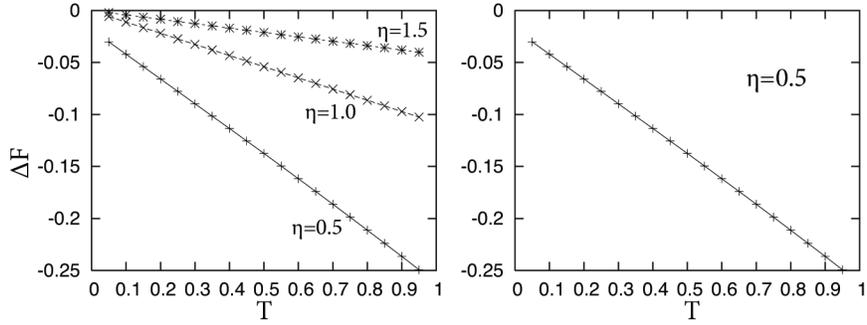
Conclusiones y comentarios

Realizando la cuantización del campo electromagnético en términos de potenciales de Helmholtz se discutió la termodinámica del campo de vacío reproduciendo los resultados obtenidos por Casimir en 1948 para placas perfectamente conductoras.

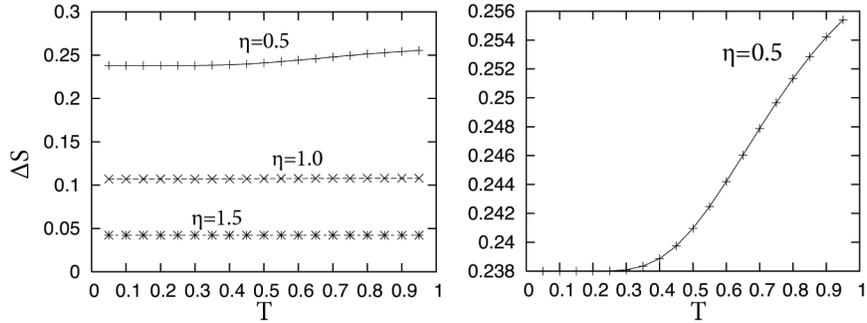
Lo que es más, empleando un procedimiento similar en la investigación del comportamiento termodinámico de cavidades rectangulares y finalmente un pistón cuántico, se extendió el modelo a temperaturas finitas sin necesidad de introducir una frecuencia de corte o distintos esquemas para altas y bajas temperaturas, como se han propuesto en trabajos anteriores.

Sin embargo se encontró una contribución a la entropía que permanece aún en el límite $T \rightarrow 0$, indicando la presencia de una contribución asociada a la geometría del sistema tal y como encontró Boyer al estudiar el límite de altas temperaturas en cavidades en un número distinto de dimensiones.

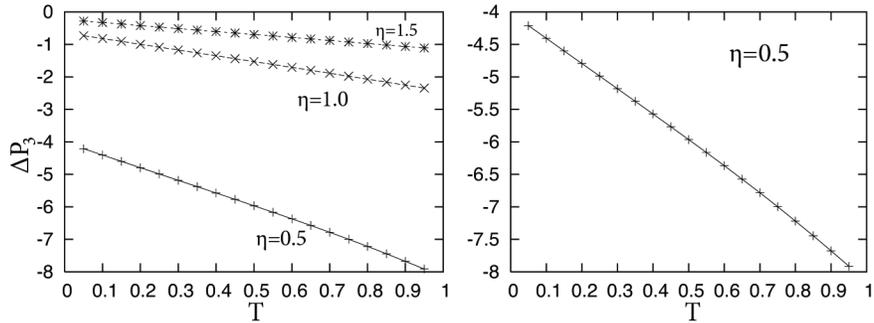
Finalmente, se incluyó una propuesta para aplicar el procedimiento al estudio del espectro de la densidad de energía electromagnética debida a la presencia de placas paralelas dieléctricas, situación que se podría emplear en los cálculos del pistón rectangular en casos sencillos. Sin embargo esfuerzos en el tema han resultado en varias complicaciones, y en particular el caso de ser las seis paredes del pistón dieléctricas ha evadido solución, de nuevo debido a términos divergentes.



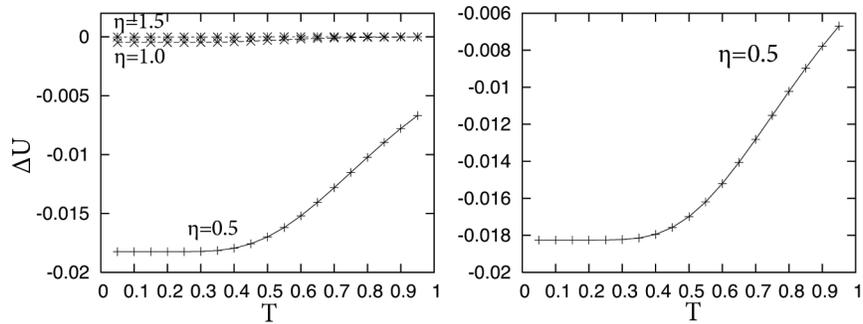
(a) Energía libre de Helmholtz (ΔF).



(b) Diferencia de Entropía (ΔS).

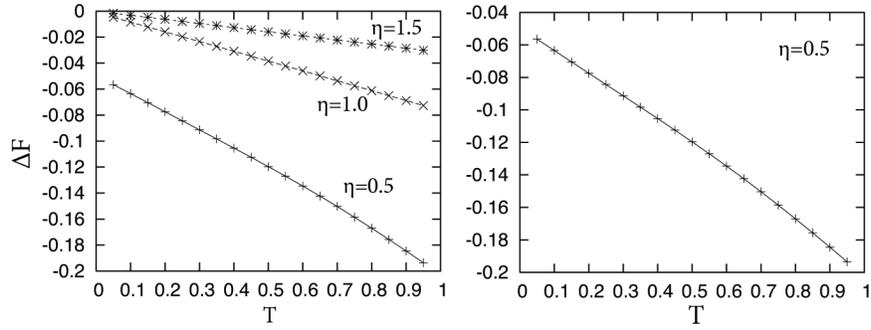


(c) Presión neta sobre interfase ($a_1^3 \times \Delta P_3$).

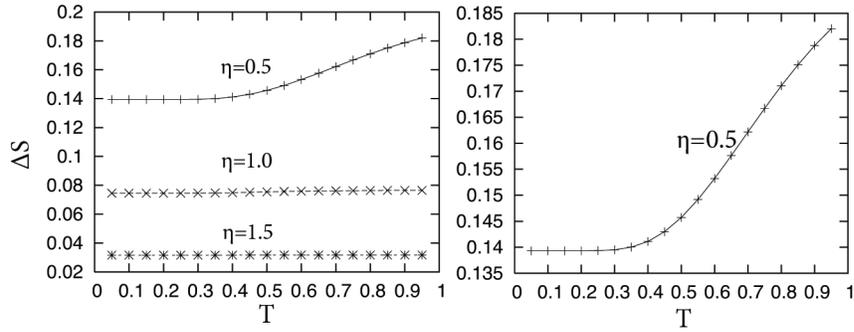


(d) Diferencia de energía interna (ΔU).

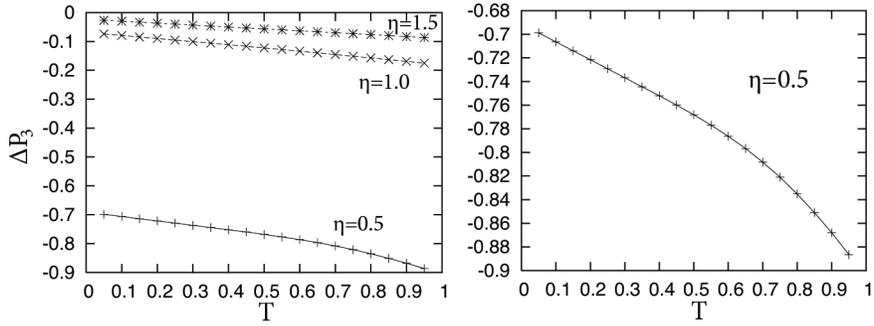
Figura 2.6: Comportamiento termodinámico del pistón rectangular $\xi = 0,1$.



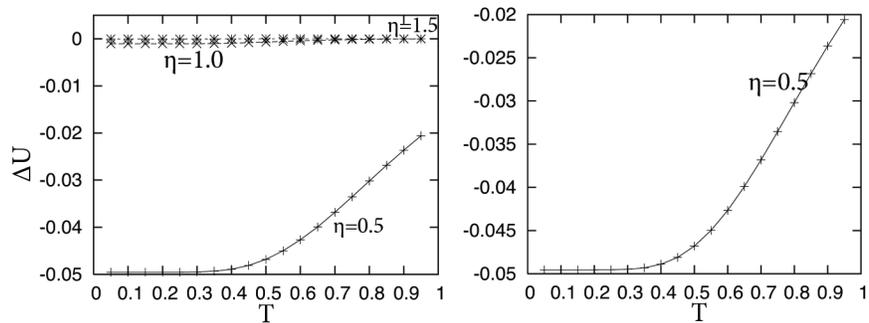
(a) Energía libre de Helmholtz (ΔF).



(b) Diferencia de Entropía (ΔS).

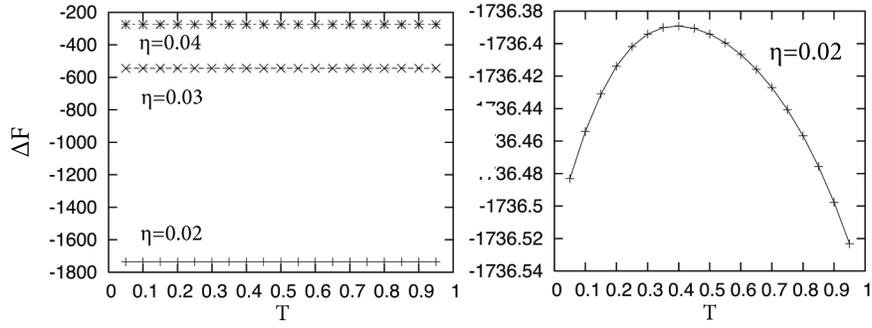


(c) Presión neta sobre interfase ($a_1^3 \times \Delta P_3$).

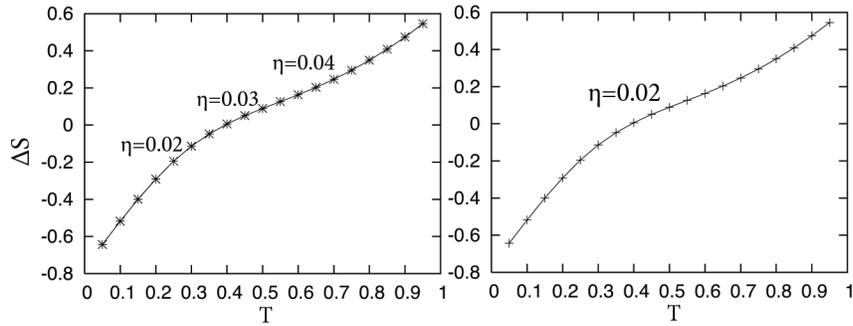


(d) Diferencia de energía interna (ΔU).

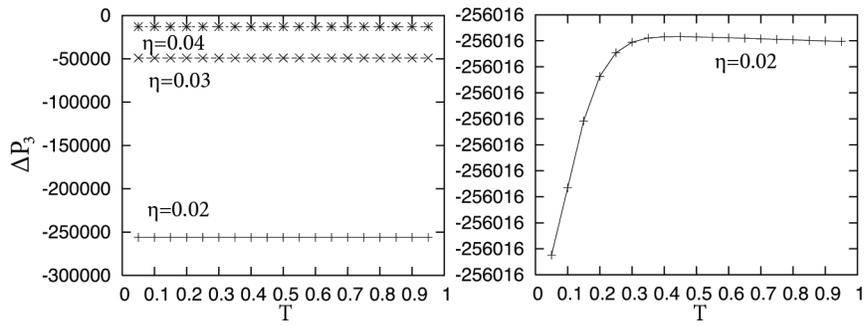
Figura 2.7: Comportamiento termodinámico del pistón cuadrado $\xi = 1$.



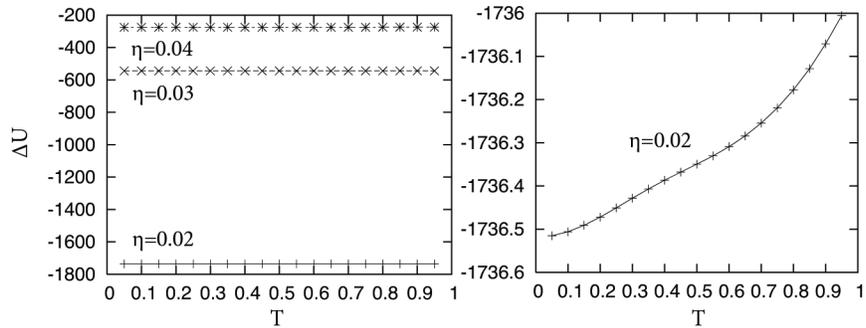
(a) Energía libre de Helmholtz (ΔF).



(b) Diferencia de Entropía (ΔS).



(c) Presión neta sobre interfase ($a_1^3 \times \Delta P_3$).



(d) Diferencia de energía interna (ΔU).

Figura 2.8: Comportamiento termodinámico para la caja de "pizza".

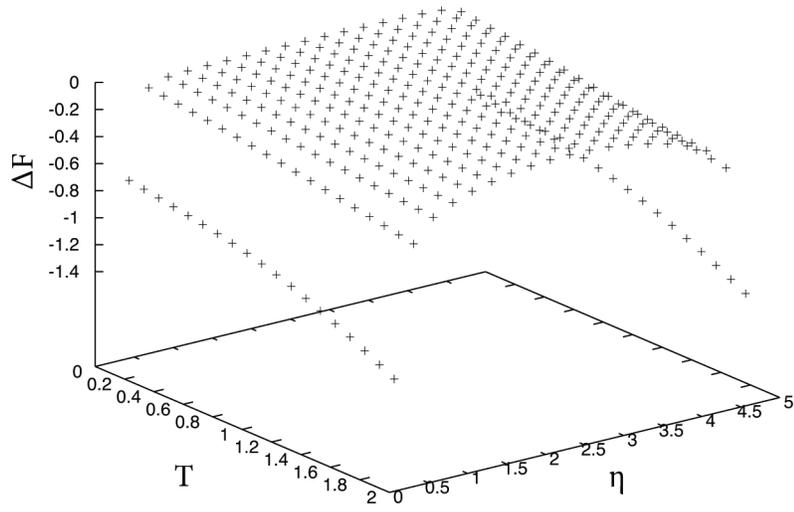


Figura 2.9: Energía libre de Helmholtz(ΔF) en función de T y η .

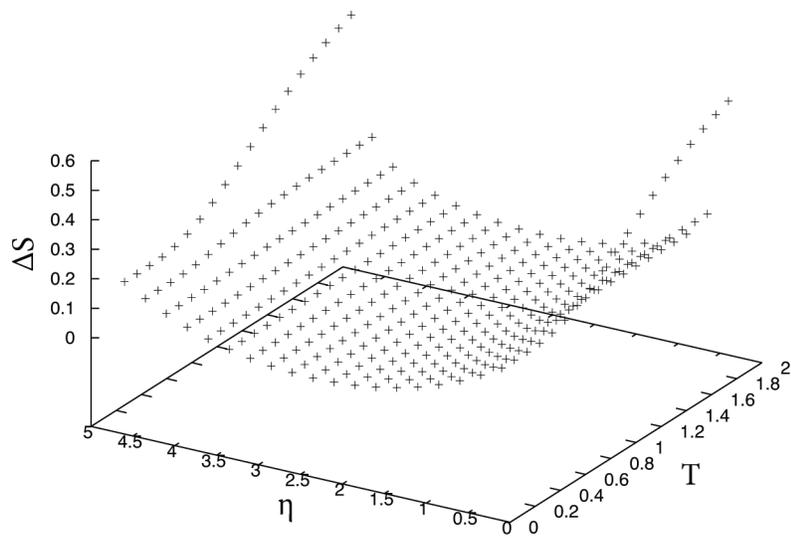


Figura 2.10: Diferencia de Entropía (ΔS) en función de T y η .

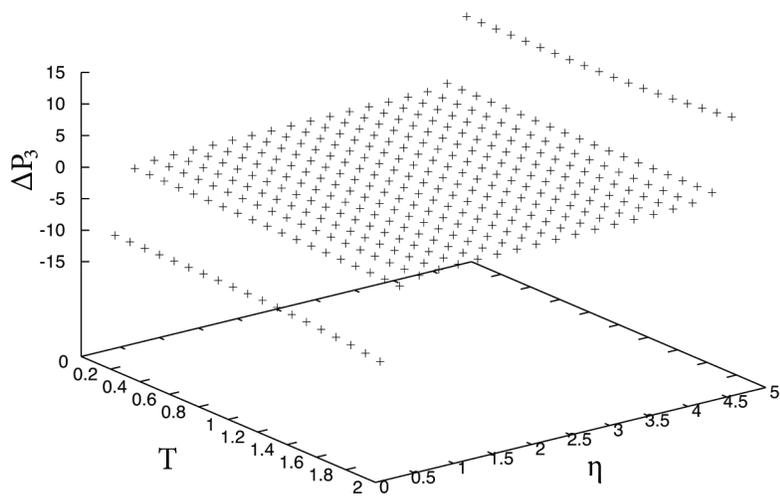


Figura 2.11: Presión neta sobre interfase (ΔP_3) en función de T y η .

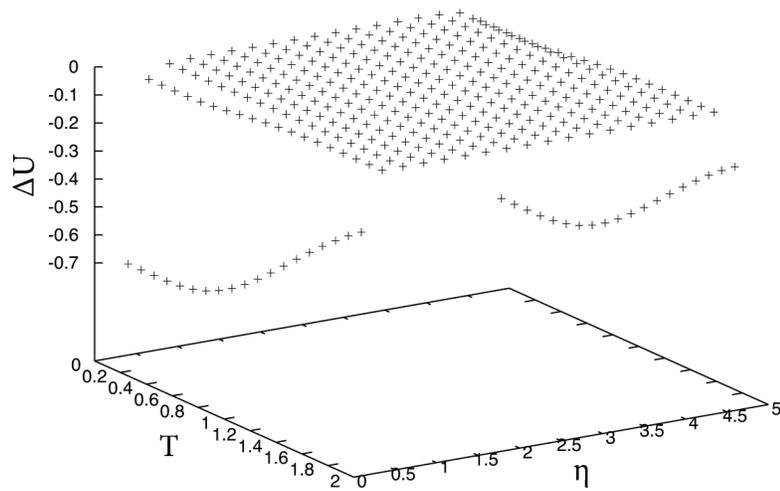


Figura 2.12: Diferencia de energía interna (ΔU) en función de T y η .

Capítulo 3

Superconductividad

En esta sección nos dedicaremos a investigar el fenómeno de superconductividad, aplicando las mismas herramientas desarrolladas en la sección anterior para describir el efecto Casimir en cavidades rectangulares. Descubierta en 1911, la superconductividad refiere al fenómeno observado en ciertos materiales, los cuales exhiben, bajo ciertas condiciones, resistencia nula.

En conductores normales la resistencia eléctrica disminuye al bajar la temperatura, pero incluso en el cero absoluto es finita como consecuencia de la estructura del material e impurezas en ella. En cambio para superconductores, la resistencia se vuelve cero abruptamente por debajo de una temperatura crítica. Más aún, en estas condiciones también expelen campos magnéticos externos (efecto Meisner) implicando que el fenómeno es más complicado que un simple conductor perfecto clásico.

Inicialmente se observó el fenómeno de superconductividad en una variedad de materiales sencillos, metales(excluyendo nobles y ferromagnéticos), aleaciones y semiconductores altamente dopados. Denotados superconductores clásicos o de baja temperatura, se han prestado para modelos de tipo BEC y su descripción se hace mediante la condensación de pares de Cooper.

Después, en 1986, se observó superconductividad en una serie de cerámicas perovskitas conteniendo cupratos, con temperaturas críticas superando los 90 kelvin resuscitando el interés en el tema. Desde entonces se han encontrado varias combinaciones similares (tabla 3.1) conocidos como superconductores de alta temperatura, y aunque su comportamiento no es enteramente entendido, en general es aceptado que la clave del fenómeno en estas cerámicas son las múltiples capas de CuO_2 , entre las cuales viaja la supercorriente, prestándose de nuevo a un análisis mediante física estadística de bosones confinados, sistemas estudiados en varias dimensiones en trabajos como [17] y [4].

Cuadro 3.1: Ejemplos de superconductores de alta temperatura, su estructura y temperatura crítica.

Superconductor	T_c experimental
$(La_{,925}Sr_{,075})_2CuO_4$	36
$YBa_2Cu_3O_{6,60}$	59
$YBa_2Cu_3O_{6,95}$	93.2
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_2O_8$	80
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$	108
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_2O_8$	110
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$	125

3.1 El Hamiltoniano de *Fröhlich*

Para describir el efecto de superconductividad mediante condensados de Bose-Einstein debemos comenzar por construir la interacción electrón-fonón y el Hamiltoniano de *Fröhlich*.

Supongamos una red cristalina cuyos modos normales de vibración son tanto traslacionales como longitudinales, caracterizadas por un vector de onda \mathbf{q} y una frecuencia ω_q .

Si nos imaginamos al cristal como una serie de placas paralelas sobre las cuales se encuentran los iones del material es fácil ver que las ondas longitudinales producen un cambio en la densidad de iones (y por lo tanto la densidad de carga) en el eje de propagación de la onda al acercarse y alejarse una placa de la otra. En cambio para ondas traslacionales el desplazamiento es en el plano ortogonal a la propagación y no se produce un cambio neto en la densidad de carga.

Consideremos entonces una onda longitudinal viajando paralela al eje x, la cual debe ser de la forma

$$u_q e^{-i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} = u_q e^{-i(\omega_q t - qx)} \quad (3.1)$$

donde u_q es el desplazamiento en el sentido del eje x.

Por otro lado, debemos notar que la velocidad de Fermi v_f , con la cual se mueven los electrones de conducción de la red cristalina, es típicamente del orden de 10^6ms^{-1} , tres órdenes de magnitud mayor que la velocidad de propagación del sonido en los mismos. Es por esto mismo que los electrones en la capa de conducción pueden moverse rápidamente para contrarrestar los cambios en la densidad de carga ocasionados por una onda longitudinal.

Se sigue entonces que la densidad de desviación que sufren los electrones debe ser también de la forma

$$C e^{-i(\omega_q t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} \quad (3.2)$$

Si suponemos que los electrones responden tan rápidamente a ondas de densidad de cualquier frecuencia se sigue que el factor C debe ser independiente de ésta, mas si tomamos una desviación lineal en $u_q \cdot \mathbf{q} = qu_q$ podemos escribir el factor C de la forma

$$C = A q u_q n(r) \quad (3.3)$$

donde se ha utilizado la aproximación del potencial de deformación y $n(\mathbf{r})$ es la densidad de electrones, la cual podemos expresar en términos de los operadores de creación y aniquilación

$$n(r) = \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

Utilizando (3.1), (3.2) y (3.4) podemos construir un hamiltoniano hermiteano con unidades de energía dado por

$$H_F = \int d^3r \sum_k \left(A q u_q e^{-i(\omega_q t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) + h.c. \right) \quad (3.5)$$

donde $h.c.$ indica el conjugado hermiteano y el desplazamiento u_q cumple, clásicamente, con la ecuación del oscilador armónico

$$\ddot{u}_q + \omega_q^2 u_q^2 = 0 \quad (3.6)$$

Entonces podemos escribir el hamiltoniano relacionado con cada modo normal de oscilación en términos de las variables generalizadas $x = u$, $p = \dot{x}$ y las reglas de conmutación básicas $[x, p] = i\hbar$ $[x, x] = [p, p] = 0$. Se obtiene

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2) \quad (3.7)$$

Finalmente se introducen los operadores de creación y destrucción

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(p + i\omega x) \quad a = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(p - i\omega x) \quad (3.8)$$

en la expresión (3.7) para obtener

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega (2a^\dagger a + 1) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.9)$$

Aquí observamos que podemos expresar cada modo normal de oscilación de las ondas de desplazamiento u_q en términos de los números de ocupación de un nuevo bosón, que denotaremos el fonón, es decir

$$u_q = i \left(\frac{\hbar}{2\omega_q} \right) (a - a^\dagger) \quad (3.10)$$

y expresando los operadores de campo $\Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})$ en términos de los operadores de estado de cada electrón c_k

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} c_k \quad (3.11)$$

se obtiene el Hamiltoniano de *Fröhlich*

$$H_F = \sum_k \sum_q (V_q c_{k+q}^\dagger c_k a_q + V_q^* c_{k+q} c_k^\dagger a_q^\dagger) \quad (3.12)$$

Donde los electrones, descritos por los operadores c_k ahora están acoplados mediante un fonón descrito por los operadores a_q . Se tiene entonces que los términos $V_q c_{k+q}^\dagger c_k a_q$ y $V_q^* c_{k+q} c_k^\dagger a_q^\dagger$ corresponden a los procesos de absorción y emisión de un fonón respectivamente y que el momento se conserva en ambos procesos.

3.2 Atracción mediada por el fonón

Ya establecida la existencia del fonón es importante observar que existen condiciones bajo las cuales dos electrones pueden sentir entre sí una atracción mediada por las vibraciones de los iones del material. Para tratar este problema consideremos un sistema de electrones y fonones descrito por un Hamiltoniano compuesto por la energía cinética de los electrones y fonones respectivamente y un potencial de interacción de *Fröhlich*

$$\begin{aligned} H &= H_{el} + H_{fon} + \lambda V_F \\ &= \sum_k \sum_s \epsilon_k c_{ks}^\dagger c_{ks} + \sum_q \hbar\omega (a_q^\dagger a_q + \frac{1}{2}) \\ &\quad + \lambda \sum_k \sum_s \sum_q (V_q c_{k+q}^\dagger c_k a_q + V_q^* c_{k+q} c_k^\dagger a_q^\dagger) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para resolver este problema se suele recurrir a una aproximación mediante perturbaciones aplicada a un problema de varios cuerpos, buscando a segundo orden en la constante de acoplamiento λ dado que probablemente representa las interacciones dadas en los diagramas de feynman 3.1 . Consideramos entonces un sistema de dos electrones y seguimos la evolución en el tiempo de su operador de densidad correspondiente ρ que debe cumplir con la ecuación de Louville

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] = H\rho \quad (3.14)$$

Suponiendo que el operador de densidad inicial ρ_0 para el sistema combinado está dado por el producto de las densidades individuales (valido para $T, \rho_{fon} \rightarrow 0$ podemos escribir

$$\rho_{fon} = |0\rangle\langle 0| \quad (3.15)$$

donde $|0\rangle$ es el ket para estado vacío.

Si denotamos $\bar{\rho} = \langle 0 | \rho(t) | 0 \rangle$ al promedio de fonones del vacío y aplicamos una perturbación dependiente en el tiempo se obtiene

$$\frac{\partial \bar{\rho}(t)}{\partial t} = - \left(\frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int_0^t d\tau \langle \mathbf{v} e^{-i\tau\hbar^{-1}\mathbf{H}_0} \mathbf{v} \rho(t-\tau) \rangle \quad (3.16)$$

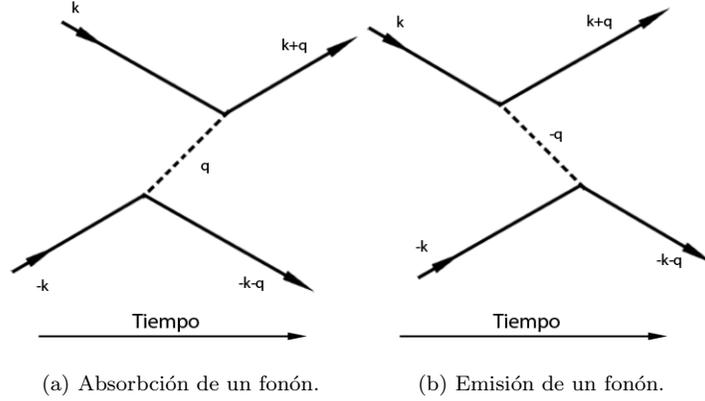


Figura 3.1: Diagramas esquematizando el intercambio de un fonón

donde \mathbf{v} y \mathbf{H}_0 son los operadores de Louville correspondientes a los operadores H_0 y V_F en el hamiltoniano (3.13). Tomando la aproximación de acoplamiento débil podemos obtener el efecto de intercambio de fonones al menor orden(dos) tal que

$$\lambda^2 \langle \mathbf{v} e^{-i\tau \hbar^{-1} \mathbf{H}_0} \mathbf{v} \rho(t - \tau) \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{v} e^{-i\tau \hbar^{-1} \mathbf{H}_0} \mathbf{v} \bar{\rho}(t - \tau) \rangle \quad (3.17)$$

Si utilizamos a la aproximación Markoffiana, ($\bar{\rho}(t - \tau) \rightarrow \bar{\rho}(t)$), y extendiendo el dominio de la integral en (3.16) a infinito se obtiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = i \lambda^2 \hbar^{-1} \lim_{a \rightarrow 0} \langle \mathbf{v} [\mathbf{H}_0 - ia]^{-1} \mathbf{v} \rangle \bar{\rho}(t) \quad (3.18)$$

Finalmente se toman los elementos de la matriz de estado-momento y se obtiene que el potencial efectivo de interacción mediante fonones debe ser de la forma

$$|V_q|^2 \frac{\hbar \omega_q}{(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k)^2 - \hbar^2 \omega_q^2} \quad (3.19)$$

Esta última expresión es de particular interés dado que nos da una aproximación bastante buena en los límites de temperatura baja donde las suposiciones sobre la densidad inicial y la aproximación Markoffiana son totalmente válidas.

La fuerza que sienten los dos electrones acoplados por el fonón puede ser tanto repulsiva ($|\epsilon_k + q - \epsilon_k| > \hbar \omega_q$) como atractiva ($|\epsilon_k + q - \epsilon_k| < \hbar \omega_q$)

3.3 Pares de Cooper

Ya que hemos demostrado que la interacción mediante fonones puede resultar en una fuerza neta atractiva entre dos electrones, podemos estudiar un sistema compuesto por electrones ligados por la interacción de apareamiento mediante fonones, tal como estudió por primera vez Cooper en 1956.

Entonces el Hamiltoniano reducido del sistema puede ser escrito de la siguiente manera

$$H_0 = \sum_k \sum_s \epsilon_k n_{ks} - v_0 \sum_k \sum_{k'} b_k^\dagger b_{k'} \quad (3.20)$$

donde los operadores b_k y b_k^\dagger son los operadores de creación y destrucción de parejas de electrones, definidas por $b_k = c_{-k} c_k$ y cumplen las reglas de conmutación

$$[b_k, b_{k'}] = 0$$

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = (1 - n_k - n_{-k})\delta_{k,k'} \quad (3.21)$$

Comenzamos por estudiar los pares de Cooper del estado base del sistema, formados a su vez por electrones cercanos a la superficie de Fermi.

Entonces si $\mathbf{N}(0)$ es la densidad de estados en ϵ_F el número total de partículas sintiendo la interacción atractiva es $2\hbar\omega_D\mathbf{N}(0)$, de donde se sigue el número total de pares formados $\hbar\omega_D\mathbf{N}(0) = N_0$. Reescribiendo la expresión para el Hamiltoniano reducido del problema en términos de los operadores de creación y destrucción se tiene

$$H_0 \sum_k \epsilon_k b_k^\dagger b_k - \mathbf{v}_0 \sum_k \sum_{k'} b_k^\dagger b_{k'} \quad (3.22)$$

Deseamos obtener la energía del estado base del sistema, para el cual construimos un problema de eigenvalores utilizando la ecuación

$$[H_0, b_k^\dagger] = 2\epsilon_k b_k^\dagger - \mathbf{v}_0 \sum_{k'} b_{k'}^\dagger (1 - n_k - n_{-k}) \quad (3.23)$$

y multiplicando por la derecha por $\psi_\nu \rho$ y tomando una traza de gran canónico. Al tomar el límite de bulto se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_\nu \Psi_\nu^*(k) &= 2\epsilon_k \Psi_\nu^*(k) - (2\pi\hbar)^{-3} \mathbf{v}_0 \int d^3k' \psi_\nu^*(k') \\ &\quad + (2\pi\hbar)^{-3} \mathbf{v}_0 \int d^3k' TR\{b_{k'}^\dagger (n_k + n_{-k}) \psi_\nu \rho\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\Psi_\nu^*(k) = TR\{b_k^\dagger \psi_\nu \rho\} \quad (3.25)$$

donde ψ_ν es la función de onda un par de Cooper y ε_ν el valor de la eigenenergía que le corresponde. Se puede mostrar que el último término de la integral no aporta en el límite de temperaturas bajas, de donde se sigue entonces

$$\varepsilon_0 \Psi^*(k) = 2\epsilon_k \Psi^*(k) - (2\pi\hbar)^{-3} \mathbf{v}_0 \int d^3k' \Psi^*(k') \quad (3.26)$$

La integral anterior se puede resolver fácilmente utilizando que $\varepsilon_0 < 0$ de donde $2\epsilon_k - \varepsilon_0 = 2\epsilon_k + |\varepsilon_0| > 0$ en la ecuación (3.26) obteniendo el resultado

$$\varepsilon_0 = \frac{-2\hbar\omega_D}{\exp[2/\mathbf{v}_0 N(0)] - 1} \quad (3.27)$$

Esta última cantidad representa la energía de estado ligado (negativa) para un par de Cooper en el estado base, y si todos los electrones se encuentran apareados y en el estado base la energía del sistema queda dada

$$W = N_0 \varepsilon_0 = \frac{-2\hbar^2 \omega_D^2 N(0)}{\exp[2/\mathbf{v}_0 N(0)] - 1} \quad (3.28)$$

Del mismo modo, fonones pueden ser intercambiados también por electrones fuera del estado base del sistema, formando pares de Cooper excitados o en movimiento.

Comenzamos por tomar los operadores de onda para pares de electrones dados por

$$B_{12}^\dagger = c_{k1}^\dagger c_{k2}^\dagger = c_1^\dagger c_2^\dagger \quad (3.29)$$

tomando como convención que electrones con índice par tienen espín hacia abajo y viceversa introducimos como variables de movimiento el momento relativo

$$k = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \quad q = k_1 + k_2 \quad (3.30)$$

en términos de los cuales los operadores (B, B^\dagger) quedan dados

$$B_{kq} = B_{k1k2} = c_{k+\frac{1}{2}q} c_{-k+\frac{1}{2}q} \quad (3.31)$$

y cumplen las siguientes reglas de conmutación

$$[B_{kq}, B_{k'q'}^\dagger] = \begin{cases} 1 - n_{k+q/2} - n_{-k+q/2} & k = k' \quad q = q' \\ c_{-k+q/2} c_{-k'+q/2}^\dagger & k + q/2 = k' + q'/2 \quad -k + q/2 \neq -k' + q'/2 \\ c_{k+q/2} c_{k'+q/2}^\dagger & -k + q/2 = -k' + q'/2 \quad k + q/2 \neq k' + q'/2 \\ 0 & -k + q/2 \neq -k' + q'/2 \quad k + q/2 \neq k' + q'/2 \end{cases} \quad (3.32)$$

Utilizando estas nuevas variables y tomando $\epsilon_p = \epsilon(|p|)$ podemos escribir al Hamiltoniano de la siguiente manera

$$H = \sum_k \sum_q [\epsilon(|k + q/2|) + \epsilon(|-k + q/2|)] B_{kq}^\dagger B_{kq} - \sum_k \sum_q \sum_{k'} \mathbf{v}_0 B_{kq}^\dagger B_{k'q} \quad (3.33)$$

Debemos reconocer que el Hamiltoniano anterior puede ser escrito en términos de los operadores (B^\dagger, B) y entonces puede, en principio, ser reescrito en términos de los operadores de creación y destrucción $(\phi_\nu^\dagger, \phi_\nu)$ para electrones apareados y la energía correspondiente ϵ_ν , es decir

$$H = \sum_\nu \epsilon_\nu \phi_\nu^\dagger \phi_\nu \quad (3.34)$$

y podemos resolver proponiendo un problema de eigenvalores. Tomando:

$$[H, B_{kq}^\dagger] = [\epsilon(|k + q/2|) + \epsilon(|-k + q/2|)] B_{kq}^\dagger - \mathbf{v}_0 \sum_{k'} B_{k'q} (1 - n_{k+q/2} - n_{-k+q/2}) \quad (3.35)$$

y multiplicando por la derecha por $\phi_\nu \rho_{gc}$ para obtener la traza del gran canónico

$$\epsilon_\nu a_{kq} = [\epsilon(|k + q/2|) + \epsilon(|-k + q/2|)] a_{kq} - \mathbf{v}_0 \sum_{k'} \langle B_{k'q}^\dagger (1 - n_{k+q/2} - n_{-k+q/2}) \phi_\nu \rangle \quad (3.36)$$

$$a_{kq} = TR\{B_{kq}^\dagger \phi_\nu \rho_{gc}\} \quad (3.37)$$

Donde los braquetes indican el promedio de ensemble gran canónico definido por

$$\langle A \rangle = \frac{TR\{A e^{\alpha N - \beta H}\}}{TR\{e^{\alpha N - \beta H}\}} \quad (3.38)$$

Notamos que la energía de cada par apareado está caracterizada por la cantidad $q(\epsilon_\nu = \epsilon_q)$, el momento total de la pareja de Cooper.

Tomando el límite termodinámico $N, V \rightarrow \infty$ pero N/V finito podemos tomar al vector k' en el continuo y reemplazar la suma en (3.36) por una integral

$$\epsilon_q a_{kq} = [\epsilon(|k + q/2|) + \epsilon(|-k + q/2|)] a_{kq} - (2\pi\hbar)^{-3} \mathbf{v}_0 \int' d^3 k' a(k, q) \times \{1 - f_F[\epsilon(|k + q/2|)] - f_F[\epsilon(|-k + q/2|)]\} \quad (3.39)$$

con

$$f_F(\epsilon_p) = \langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_p} - 1} \quad (3.40)$$

tomando el límite de bajas temperaturas ($f_F(\epsilon_p) \rightarrow 0$) tenemos que

$$\epsilon_q a_{kq} = [\epsilon(|k + q/2|) + \epsilon(|-k + q/2|)] a_{kq} - (2\pi\hbar)^{-3} \mathbf{v}_0 \int' d^3 k' a(k, q) \quad (3.41)$$

Ésta es la misma expresión que obtuvo Cooper en 1956 y se resuelve sencillamente tomando $\omega_q < 0$ y proponiendo

$$C = (2\pi\hbar)^{-3} \mathbf{v}_0 \int' d^3 k' a(k, q) = (\epsilon(|k + q/2|) + \epsilon(|-k + q/2|) - \omega_q) a(k, q) \quad (3.42)$$

despejando $a(k, q)$ y sustituyendo de nuevo en esta última expresión se obtiene

$$1 = (2\pi\hbar)^{-3} \mathbf{v}_0 \int' d^3 k' (\epsilon(|k + q/2|) + \epsilon(|-k + q/2|) + |\omega_q|)^{-1} \quad (3.43)$$

Suponiendo que los electrones se mueven como partículas libres, entonces la superficie de Fermi debe ser de la forma

$$k_F = (2m_1 \epsilon_F)^{1/2} \quad (3.44)$$

donde m_1 es la masa efectiva del electrón y la energía está dada

$$\epsilon(|k|) = \frac{k^2 - k_F^2}{2m_1} \quad (3.45)$$

de aquí entonces la integral debe realizarse para $\epsilon(|k + q/2|) > 0$ y $\epsilon(|-k + q/2|) < \omega_D \hbar$.

Ocupando coordenadas esféricas e integrando sobre el ángulo φ podemos reemplazar el elemento de volumen $d^3 k'$ por $2\pi \sin(\theta) k'^2 d\theta dk'$ obteniendo

$$(2\pi\hbar)^3 \mathbf{v}_0^{-1} = 4\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) \int_{k_F + q \cos(\theta)/2}^{k_F + k_D - q \cos(\theta)/2} dk \frac{k^2}{|w_Q| + 2\epsilon_k + (4m_1)^{-1} q^2} \quad (3.46)$$

Tras realizar la integral y tomar el límite de q pequeña obtenemos la energía para el par de Cooper

$$\epsilon_q = \epsilon_0 + \frac{v_F q}{2} = \epsilon_0 + c_1 q \quad (3.47)$$

donde ϵ_0 es la energía para un par en el estado base dado por (3.27). Finalmente redefinimos, sin pérdida de generalidad, a la constante en la energía para obtener la energía de pares de Cooper excitados:

$$\epsilon_q = \epsilon_q - \epsilon_0 = c_1 q \quad (3.48)$$

En la relación anterior se observan varios detalles importantes. Como era de esperarse el par de Cooper con menor energía es aquel en el estado base, mientras que la energía de pares excitados aumenta linealmente respecto su momento acoplado (en el límite de q pequeña). Lo que es más esta relación se asemeja a la que se obtiene en la descripción de fotones y fonones, por ejemplo, y si realizamos una interpretación paralela podemos concluir que, en el límite de q pequeña, los pares de Cooper se comportan como bosones sin masa, moviéndose con una velocidad común $v_f/2$. Es más, se puede mostrar que la dependencia lineal entre la energía y el momento es válida también para pares viajando en una, dos o tres dimensiones aunque con distinta velocidad de grupo, donde la constante c_1/v_f toma los valores 1, $2/\pi$ y $1/2$ en cada caso respectivamente.

3.4 Condensación de Bose-Einstein en Pares de Cooper

Los postulados de la estadística cuántica nos indican que todas las partículas se pueden caracterizar como bosones o fermiones, distinguidas entre sí por el principio de exclusión de Pauli [18]. En corto, dos fermiones

nunca pueden ocupar el mismo estado mientras que para bosones no existe una restricción similar. Es de aquí que se deriva la condensación de Bose, fenómeno de particular interés en el estudio de superconductores y superfluidos.

En la sección anterior se dedujo que dos portadores de carga apareados mediante un fonón se mueven como una partícula sin masa, lo que es más, al estar tratando con partículas compuestas podemos recurrir a la regla de Ehrenfest-Oppenheimer-Bethe que postula que una partícula se comporta como bosón si contiene un número par de fermiones.

En esta sección estudiaremos la condensación de Bose para partículas sin masa libres de fuerzas externas en dos y tres dimensiones siguiendo el desarrollo en [8] y [4], aproximación que nos funcionará adecuadamente para modelar superconductores clásicos dado que en un metal los portadores de conducción se mueven como partículas libres.

Comenzamos por tomar la función de distribución para partículas bosónicas

$$f(\epsilon_p, \beta, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} - 1} \quad (3.49)$$

Donde la energía ϵ_p está dada por la ecuación (3.47) y tomamos la aproximación

$$\epsilon_p \simeq c_1 p \quad (3.50)$$

con $c_1 = 2v_f/\pi$, $v_f/2$ la velocidad promedio de los pares de Cooper en dos y tres dimensiones. Utilizando lo anterior para obtener el número total de bosones

$$N_T = \sum_p f(\epsilon_p, \beta, \mu) = N_0 + \sum_{|p|>0} (e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} - 1)^{-1} \quad (3.51)$$

Hemos separado explícitamente el término de momento nulo $N_0 = (e^{-\beta\mu} - 1)^{-1}$ por conveniencia. Dividiendo por el área y tomando el límite termodinámico usual ($N, A \rightarrow \infty$ pero $n = N/V$ finito) podemos extender la suma en la expresión anterior por una integral, obteniendo

$$n_T - n_0 = \frac{N_T - N_0}{A} = (2\pi\hbar)^{-2} \int d^2 p f(\epsilon_p, \beta, \mu) \quad (3.52)$$

Donde n_0 y n_T son el número de pares en el condensado y el número total de partículas respectivamente. Tomando, por simplicidad, los pares excitados $n = n_T - n_0$ y recordando que $z = e^{\beta\mu} < 1$ podemos expresar a la cantidad $(z^{-1}e^{\beta\epsilon_p} - 1)^{-1}$ en términos de una serie geométrica

$$\frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_p} - 1} = \sum_{m=1}^{\infty} (ze^{-\beta\epsilon_p})^m \quad (3.53)$$

para expresar el número de bosones por área

$$(2\pi\hbar)n = \sum_{m=1}^{\infty} z^m \int d^2 p [e^{-\beta c_1 p m}] \quad (3.54)$$

Utilizando coordenadas polares podemos expresar el elemento de área $d^2 p = p dp d\theta$ y realizando la integral angular

$$2\pi\hbar^2 n = \sum_{m=1}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} p e^{-\beta c_1 p m} dp \quad (3.55)$$

realizando la integral utilizando la relación

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-Ax} dx = \frac{n!}{A^{n+1}} \quad (Re(A) > 0) \quad (3.56)$$

se obtiene

$$2\pi\hbar^2 n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{(\beta c_1 m)^2} = \frac{k_B^2 T^2}{c_1^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^2} \quad (3.57)$$

Reacomodando la expresión anterior obtenemos el número de bosones por unidad de área en términos de la fugacidad z y la temperatura T

$$n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_B T}{\hbar c_1} \right)^2 \phi_2(z) \quad (3.58)$$

en donde

$$\phi_s(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^s} \quad (3.59)$$

Es claro que $\phi_2(z)$ es monótona creciente en el intervalo $|z| \leq 1$. Suponiendo que ocurre condensación debajo de una temperatura crítica T_c ($T < T_c \Rightarrow z = 1$) se tiene que $\phi_2(z) \rightarrow \zeta_2$ y el número de bosones excitados se comporta proporcional a T^2 . Este comportamiento persiste hasta la temperatura crítica, la cual podemos obtener haciendo $z = 1$, $T = T_c$ y a partir de la cual no ocurre condensación ya que todos los pares de Cooper se encuentran en estados excitados ($T > T_c$; $n_0 = 0$ y $n = n_T$): Se tiene entonces que en $T = T_c$ la ecuación (3.58) se reduce a

$$n_T = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_B T_c}{\hbar c_1} \right)^2 \zeta_2 \quad (3.60)$$

donde $\zeta_2 = \pi^2/6$ es la zeta de Riemann. De aquí la temperatura crítica está dada por:

$$T_c = \frac{\hbar c_1}{k_B} \left(\frac{2\pi n_T}{\zeta_2} \right)^{1/2} \quad (3.61)$$

Debemos observar que en esta última expresión los parámetros del material aparecen solamente en el valor de la densidad de portadores de carga n_T , la cual se puede obtener experimentalmente mediante la relación:

$$n_T = \left(\frac{e^2}{32\pi c_1^2 c^2} \right) \left(\frac{\Delta_0^2}{\hbar \omega_D \lambda_{ab}^2} \right) \quad y \quad n^{2D} = \delta n_T \quad (3.62)$$

en donde ω_D es la frecuencia de Debye, λ_{ab} la longitud de onda de London, Δ_0 es el gap, δ es el ancho de la capa y finalmente c y c_1 son la velocidad de la luz y la velocidad de propagación de los pares de Cooper respectivamente. La validez física de esta última expresión es discutida ampliamente por C. Villareal y M. De Llano en [21], tratamiento que se bosqueja en el apéndice A.

Ahora, la energía interna del sistema por unidad de área puede ser determinado, de manera similar, realizando la integral

$$u = (2\pi\hbar)^{-2} \int d^2p (\epsilon_p f(\epsilon_p, \beta, \mu)) = \frac{1}{2\pi\hbar^2} \sum_{m=1}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} dp (p^2 e^{-\beta c_1 p m}) \quad (3.63)$$

mediante la relación (3.56) para obtener

$$u = \frac{k_B^3 T^3}{\pi \hbar^2 c_1^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^3} = \frac{k_B^3 T^3}{\pi \hbar^2 c_1^3} \phi_3(z) = 2nk_B \frac{T^3}{T_c^2} \left(\frac{\phi_3(z)}{\zeta_2} \right) \quad (3.64)$$

donde se ha utilizado la relación

$$\left(\frac{k_B}{\hbar c_1} \right)^2 = cte = \frac{n_T}{T_c^2 \zeta_2} \quad (3.65)$$

Utilizando la definición usual para la capacidad térmica molar

$$C_n = \frac{R}{nk_B} \frac{\partial u(n, T)}{\partial T} \quad (3.66)$$

donde R es la constante de gas ideal. Utilizando la identidad

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(T, n)}{\partial T} &= \frac{\partial u(T, z)}{\partial T} + \frac{\partial u(T, z)}{\partial z} \frac{\partial z(T, n)}{\partial T} \\ &= \frac{\partial u(T, z)}{\partial T} - \frac{\partial u(T, z)}{\partial z} \frac{\partial n(T, z)}{\partial T} \frac{\partial n(T, z)}{\partial z}\end{aligned}\quad (3.67)$$

nos permite, después de cálculos sencillos, escribir a C_n en términos de puras funciones de la forma $\phi_s(z)$, es decir:

$$C = 6R \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \frac{\phi_3(z)}{\phi_2(z)} - 4R \frac{\phi_2(z)}{\phi_1(z)} \quad (3.68)$$

Para describir el comportamiento termodinámico del sistema consideramos primero el caso $T < T_c$ ($z = 1$) y observamos que en esta situación $\phi_1(z) \rightarrow \infty$, $\phi_2(z) \rightarrow 1,645$ y $\phi_3(z) \rightarrow 1,082$ de donde obtenemos

$$C = 6R \frac{\phi_3(1)}{\phi_2(1)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \simeq 4,4R \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \quad (3.69)$$

y

$$n \propto T^2 \quad u \propto T^3 \quad (3.70)$$

Sin embargo, a temperaturas mayores que T_c es claro que la dependencia en la temperatura es muy complicada y obtener un valor analítico para z , n ó u es poco viable. Se opta en vez por resolver numéricamente, utilizando una aproximación mediante los coeficientes del virial descritos en [2], [18] y [8] para invertir la ecuación (3.58). Tomando los primeros cuatro términos dados por la inversión:

$$\begin{aligned}b_1 &= 1/a_1 = 1 \\ b_2 &= -\frac{a_2}{a_1^3} = -\frac{1}{4} \\ b_2 &= \frac{1}{a_1^5} (2a_2^2 - a_1 a_3) = \frac{1}{72} \\ b_4 &= \frac{1}{a_1^7} (5a_1 a_2 a_3 - a_1^4 a_4 - 5a_2^3) = -\frac{1}{576}\end{aligned}\quad (3.71)$$

y tomando $\Lambda^2 = k_B^2 / \hbar^2 c_1^2$ se tiene:

$$z \simeq \sum_{i=1}^4 b_i \left(\frac{2\pi n_T}{\Lambda^2 T^2} \right)^i \quad (3.72)$$

donde se ha utilizado que para $T \geq T_c$ el número de pares condensados $n_0 = 0$ y entonces el número de pares excitados $n = n_T = n(T_c)$. Una vez que se obtiene z se sustituye en las ecuaciones (3.68) y (3.64) para obtener el comportamiento termodinámico del sistema.

En las figuras a continuación, 3.2 a 3.4, se muestran los resultados obtenidos tomando una densidad de pares total $n_T = 10$ y utilizando unidades donde $\hbar = c_1 = k_B = 1$.

Se tiene entonces que el tiempo tiene unidades de distancia (m) mientras que la energía y la temperatura unidades de $1/m$, dadas en términos unidades mas usuales mediante las relaciones:

$$\begin{aligned}1 \text{seg.} &= c_1 \text{ metros} \\ 1 \text{eV} &= 1,5193/c_1 \times 10^{16} m^{-1} \\ 1 \text{K} &= 1,30917/c_1 \times 10^{11} m^{-1}\end{aligned}$$

donde se ha dejado explícitamente la dependencia en la velocidad de propagación de los pares de Cooper dado que ésta es en general proporcional a la velocidad de Fermi del material y en el caso de superconductores cerámicos del orden de $10^4 m s^{-1}$.

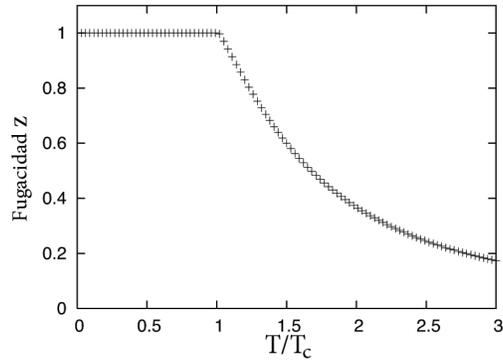


Figura 3.2: Fugacidad $e^{\beta\mu}$ de un gas de bosones en 2D.

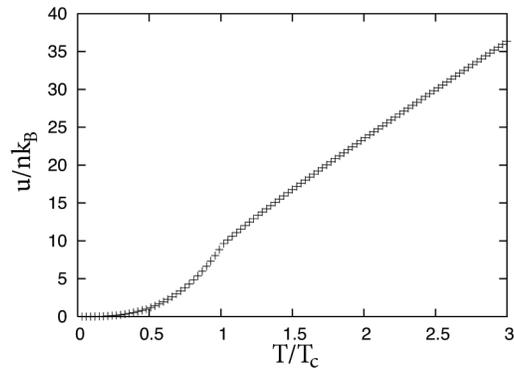


Figura 3.3: Energía interna de un gas de bosones en 2D.

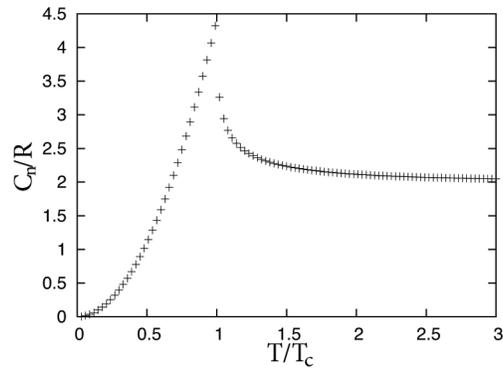


Figura 3.4: Capacidad térmica molar de un gas de bosones en 2D.

Como era de esperarse, la fugacidad decae exponencialmente a partir de la temperatura crítica y en consecuencia la energía interna pasa de tener un comportamiento $\propto T^3$ a uno lineal en el mismo. En cambio observando el comportamiento de la capacidad térmica se encuentra un pico en $T = T_c$ y aunque sea continua

en este punto su derivada no lo es, de donde se sigue que la transición de fase es de tercer orden. Es importante mencionar que este resultado coincide cualitativamente con los obtenidos experimentalmente para cerámicas superconductoras pero difiere cuantitativamente dado que el pico en la capacidad térmica no llega a la altura adecuada reportada en [8] a partir de estudios realizados por R. Fisher, J. Gordon y N. Phillips en 1988.

Para tratar el caso de un gas de bosones en tres dimensiones podemos resolver de manera similar, utilizando las siguientes expresiones para el número de bosones y energía interna por unidad de volumen

$$n = (2\pi\hbar)^3 \int d^3p f(\epsilon_p, \beta, \mu) \quad (3.73)$$

$$u = (2\pi\hbar)^3 \int d^3p \epsilon_p f(\epsilon_p, \beta, \mu) \quad (3.74)$$

donde el elemento de volumen está dado por

$$d^3p = p^2 \sin(\theta) dp d\theta d\varphi = 4\pi p^2 dp \quad (3.75)$$

de donde se obtienen, tras cálculos sencillos

$$n = \frac{k_B^3 T^3}{\pi^3 \hbar^3 c_1^3} \phi_3(z) \quad u = \frac{3nk_B T^4 \phi_4(z)}{T_c^3 \phi_3(1)} \quad (3.76)$$

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado en el cálculo para el gas bidimensional se obtiene la expresión para temperatura crítica T_c

$$T_c = \frac{\pi\hbar c}{k_B} \left(\frac{n_T}{\zeta_3} \right)^{1/3} \quad (3.77)$$

y la capacidad térmica molar

$$C_n = 12R \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{\phi_4(z)}{\zeta_3} - 9R \frac{\phi_3(z)}{\phi_2(z)} \quad (3.78)$$

De nuevo, resolver debajo de la temperatura crítica resulta sencillo tomando $z = 1$ y resolvemos numéricamente para temperaturas mayores, utilizando los coeficientes del virial $b_i = 1, -1/8, -5/864$ y $-31/13824$ con $i = 1, 2, 3, 4$ para invertir la serie en 3.73 y obtener una expresión para la fugacidad

$$z \simeq \sum_{i=1}^4 b_i \left(\frac{\pi^3 n_T}{\Lambda^3 T^3} \right)^i \quad (3.79)$$

donde se ha utilizado la misma definición para $\Lambda = k_B/\hbar c$.

En las figuras 3.5-3.7 se muestra el comportamiento termodinámico para el gas de bosones en 3 dimensiones utilizando, de nuevo, $\hbar = c = k_B = 1$ y una densidad de partículas $n_T = 10$.

Encontramos de nuevo que la fugacidad decae exponencialmente a partir de la temperatura crítica, y la energía interna también pasa de un comportamiento $\propto T^4$ a uno lineal en T en este punto, pero el comportamiento en tres dimensiones si muestra una diferencia importante: se puede verificar que la capacidad térmica molar es discontinua en el punto $T = T_c$ indicando una transición de fase de segundo orden.

3.5 Transición entre sistemas en 1, 2 y 3 dimensiones

En la sección anterior el estudio de bosones sin masa viajando libres de fuerzas en dos y tres dimensiones nos llevó a una primera aproximación para la descripción de superconductores clásicos. Sin embargo es generalmente aceptado que el fenómeno de superconductividad a altas temperaturas puede ser atribuido a flujos sobre los planos de CuO_2 en la red de las cerámicas, dotando de especial relevancia a estos resultados. En la siguiente sección trataremos la transición entre sistemas con una, dos y tres dimensiones buscando el

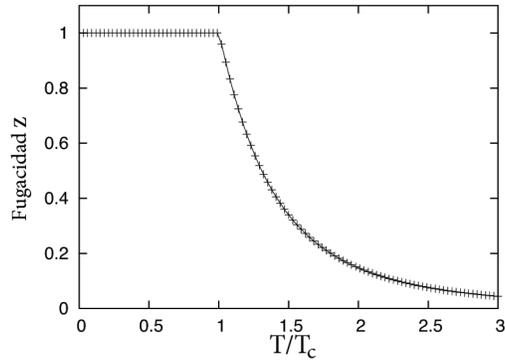


Figura 3.5: Fugacidad $e^{\beta\mu}$ de un gas de bosones en 3D.

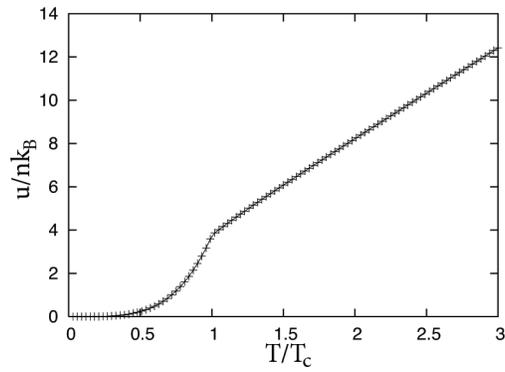


Figura 3.6: Energía interna de un gas de bosones en 3D.

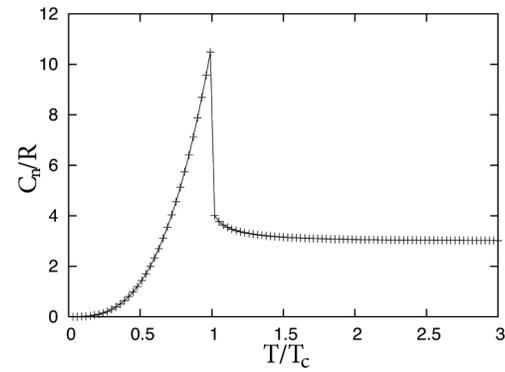


Figura 3.7: Capacidad térmica molar de un gas de bosones en 3D.

fenómeno de condensación de bose en cada caso.

Imponiendo condiciones periódicas para la función de onda correspondiente a un par de Cooper, podemos restringirla a un paralelepípedo de lados a_1, a_2 y a_3 , de donde se sigue la distribución exacta de modos

normales del campo bosónico

$$g(K) = \sum_{\{n\}} \delta(K - K_n) \quad K_n^2 = \left(\frac{2\pi n_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_3}{a_3}\right)^2 \quad (3.80)$$

al cual podemos expresar mediante la fórmula de sumas de Poisson

$$g(K) = \frac{V}{2\pi^2} K \sum_{m_1, m_2, m_3} \frac{\sin(K\alpha)}{\alpha} \quad (3.81)$$

donde $\alpha = ((a_1 n_1)^2 + (a_2 n_2)^2 + (a_3 n_3)^2)^{1/2}$. Se tiene entonces que el número promedio de partículas por elemento de volumen está dado por la relación

$$\begin{aligned} n(T) = n_T(T) - n_0 &= \frac{1}{V} \int d^3 K \frac{g(K)}{e^{\beta(\epsilon_K - \mu)} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^3 K \left(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_K - \mu)} - 1} \right) \left(\sum_{\alpha} \frac{K \sin(K\alpha)}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Tomando de nuevo $z = e^{\beta\mu} < 1$ y reconociendo la serie geométrica (3.53) se puede simplificar la expresión anterior

$$\begin{aligned} n(T) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\alpha} \sum_m \frac{z^m}{\alpha} \int d^3 K K e^{-\beta\epsilon_K m} \sin(k\alpha) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha} \sum_m \frac{z^m}{i\alpha} \int d^3 K K \left(e^{-K(\beta\hbar c m - i\alpha)} - e^{-K(\beta\hbar c m + i\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (3.83)$$

donde la energía de la onda es $\epsilon_k \simeq \hbar c_1 K$ y se utilizó la expresión exponencial para el seno.

Utilizando coordenadas esféricas y realizando las integrales radiales se puede sustituir el elemento de volumen $d^3 K$ por $4\pi K^2 dK$, y utilizando (3.56) para cada integrando se obtiene

$$n(T) = \frac{(k_B T)^2}{\pi^2 \hbar^2 c_1^3} \sum_{\alpha'} \sum_m \frac{m z^m}{(m^2 + \alpha'^2)^2} \quad (3.84)$$

donde $\alpha' = (k_b T / \hbar c) \alpha$. Siguiendo el mismo procedimiento podemos obtener la energía interna promedio del sistema definida por

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{V} \int d^3 K \frac{\epsilon_k g(K)}{e^{\beta(\epsilon_K - \mu)} - 1} \\ &= \frac{(k_b T)^4}{\pi^2 \hbar^3 c_1^3} \sum_{\alpha'} \sum_m \frac{3m - \alpha^2}{(m^2 + \alpha'^2)^2} z^m \end{aligned} \quad (3.85)$$

Es fácil ver en las expresiones anteriores que al tomar el paralelepípedo con lados infinitos ($m_1 = m_2 = m_3 = 0$) se recupera el límite termodinámico usual, mas si consideramos ondas que se deben propagar libremente en dos dimensiones $a_1, a_2 \rightarrow \infty$ pero se encuentran restringidas a una capa de ancho $a_3 = \delta$, fig. 3.8, debemos tomar $m_1 = m_2 = 0$ y las sumas restantes sobre m_3 pueden ser obtenidas analíticamente para obtener

$$n(T) = \frac{(k_B T)^3}{\pi^2 \hbar^3 c_1^3} \Psi_3(z, \eta) \quad (3.86)$$

y

$$u = 3 \frac{(k_B T)^4}{\pi^2 \hbar^3 c_1^3} \varphi_4(z, \eta) = 3n k_B \frac{T^4}{T_c^3} \frac{\varphi_4(z, \eta)}{\Psi_3(1, \eta)} \quad (3.87)$$

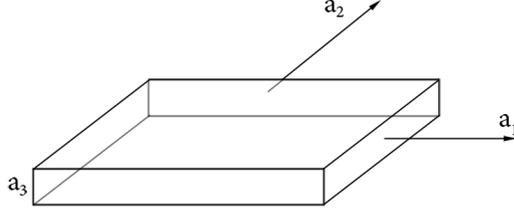


Figura 3.8: Configuración en 3D tomando el límite en que se propagan libremente en dos direcciones

en donde

$$\Psi_s(z, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^s} f_m(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^s} \left(\frac{m\pi^2}{\eta} \sinh^{-2}\left(\frac{m\pi}{\eta}\right) + \frac{m\pi}{\eta} \coth\left(\frac{m\pi}{\eta}\right) \right) \quad (3.88)$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_s(z, \eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^s} g_m(\eta) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^s} \left(\frac{m\pi^2}{\eta} \sinh^{-2}\left(\frac{m\pi}{\eta}\right) + \frac{m\pi}{\eta} \coth\left(\frac{m\pi}{\eta}\right) \right) \left(1 + \frac{m\pi^2}{\eta} \sinh^{-2}\left(\frac{m\pi}{\eta}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

donde hemos introducido la variable adimensional $\eta = k_B T \delta / \hbar c_1$.

Debemos notar que al tomar $\eta \gg 1$ se tiene que las tres funciones $f_m(\eta)$, $g_m(\eta)$ y $h_m(\eta) \rightarrow 1$ recuperando el resultado para bosones moviéndose libres en 3 dimensiones (3.73), en cambio si se toma $\eta \ll 1$ se tiene que $h_m \rightarrow 0$, $g_m \simeq m\pi/3\eta$ y $f_m \simeq m\pi/2\eta$ obteniendo, de nuevo, el resultado para bosones libres en 2 dimensiones (3.58). Del mismo modo, variando el valor del ancho de la capa δ podemos describir la transición entre los dos comportamientos límite.

A manera semejante de la sección anterior obtenemos la temperatura crítica haciendo $z = 1$ y despejando la temperatura de la expresión anterior.

$$T_c = \frac{\hbar c}{k_B} \left(\frac{\pi^2 n_T}{\Psi_3(1, \eta)} \right)^{1/3} \quad (3.90)$$

Donde hemos dejado, por simplicidad, a la temperatura en función del parámetro η , del cual podemos obtener el ancho de la capa correspondiente mediante la relación

$$\delta = \frac{\hbar c_1 \eta}{k_B T} \quad (3.91)$$

Para investigar el comportamiento de este sistema se toma, por simplicidad, unidades donde $\hbar = c = k_B = 1$ y una densidad total de pares $n(T_C) = 10$, de tal modo que podemos obtener la temperatura crítica en función del parámetro adimensional η mostrado en la figura 3.9. Claramente para $\eta \simeq 3 > 1$ los pares de Cooper se mueven como en el límite de gases libres en 3D 3.73 y la temperatura crítica del sistema abandona la dependencia en el ancho de la capa, mientras que para $\eta \rightarrow 0$ el comportamiento se asemeja más al de bosones libres en 2 dimensiones 3.58.

Es importante notar que la temperatura crítica del gas libre bidimensional muestra una dependencia lineal en δ debido a que se tomó $n(T_c)^{2D} = \delta n(T_c)^{3D}$.

A primera vista el problema anterior nos invita a resolver del mismo modo que en los casos de gases de

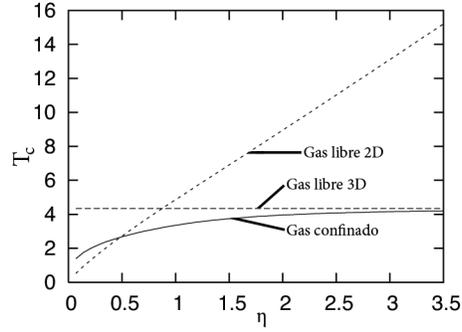


Figura 3.9: Dependencia de temperatura critica vs. el parametro adimensional(η)

bosones libres en dos y tres dimensiones; utilizando los coeficientes del virial discutidos previamente para invertir la ecuación 3.86 y obtener a la fugacidad $z = z(T)$. Sin embargo, para z cercanos a 1 y valores pequeños del ancho de la capa $\eta(\delta)$ el error en esta aproximación crece rápidamente, hecho que se aprecia en las figuras 3.10 donde se compara el valor obtenido para la fugacidad utilizando los primeros seis coeficientes del virial y aquel obtenido numéricamente, mediante el algoritmo de secantes.

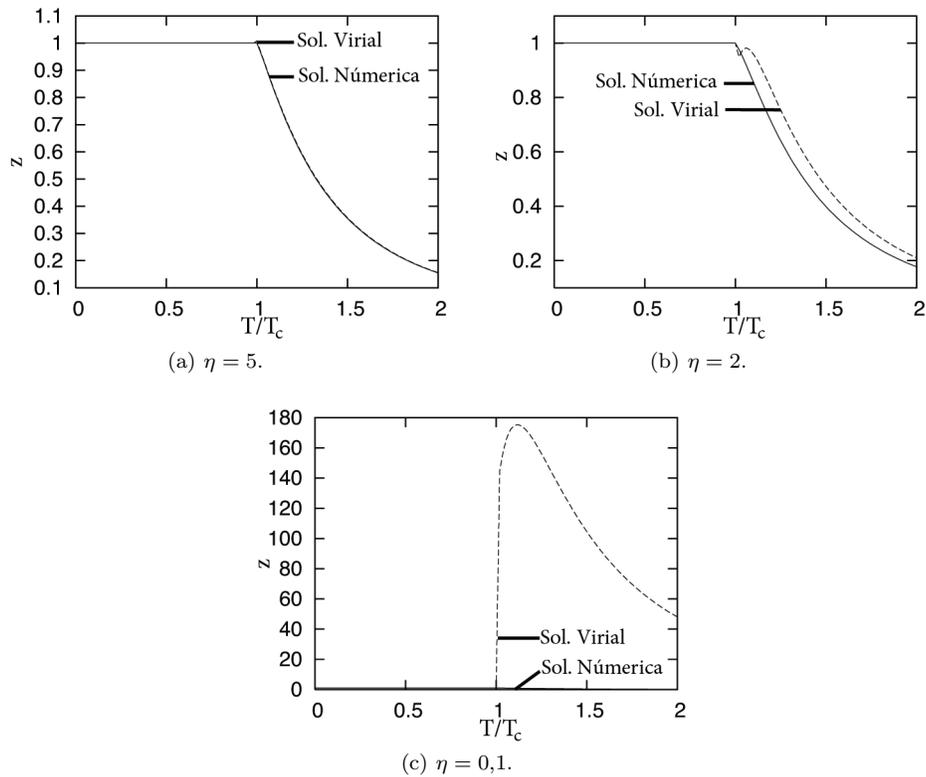


Figura 3.10: Fugacidad $z(T)$: solución numérica mediante algoritmo de secantes y aproximación utilizando primeros seis coeficientes del virial.

Ya que se ha obtenido un valor para z se puede sustituir en la expresiones para la energía y el número de partículas obtenidos previamente, mientras que para la capacidad térmica molar recurrimos de nuevo a la expresión

$$\frac{nk_B}{R}C_n = \frac{\partial u(n, T)}{\partial T} = \frac{\partial u(z, \eta, T)}{\partial T} + \frac{\partial u(z, \eta, T)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{\partial u(z, \eta, T)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial T} \quad (3.92)$$

de donde se sigue

$$\begin{aligned} \frac{C_n}{R} = & 12 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{\varphi_4(z, \eta)}{\Psi_3(1, \eta)} + \frac{3k_B \delta T^4}{\hbar c T_c^3} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\varphi_4(z, \eta)}{\Psi_3(1, \eta)} \right) \\ & + 3 \frac{T^4}{T_c^3} \left(\frac{\varphi_3(z, \eta)}{z \Psi_3(1, \eta)} \right) \frac{\partial z}{\partial T} \end{aligned} \quad (3.93)$$

En donde las dos derivadas que se han dejado sin calcular en la expresión se encuentran numéricamente utilizando un esquema centrado con un error de tercer orden, y los resultados obtenidos se encuentran en las figuras a continuación.

En 3.11 se muestra el comportamiento para tres distintos valores del ancho de la capa a la cual están confinados η . Se observa, por ejemplo, una región alrededor de T_c en donde la energía interna asociada a $\eta = 0,5$ es mayor que $\eta = 3, 4$ debido a la diferencia cualitativa entre el comportamiento de bosones libres en dos o tres dimensiones.

Es más, para valores grandes de η también se observa una discontinuidad en la capacidad térmica en $T = T_c$ indicando una transición de segundo orden, mientras que para capas delgadas el comportamiento tiende a suavizarse, indicando una transición de fase de segundo orden y un comportamiento termodinámico de bosones libres en 2 dimensiones.

Las superficies 3.12-3.14 resumen este comportamiento y la transición entre un gas de bosones libres moviéndose en dos y tres dimensiones.

Realizando el estudio de un gas de bosones en dos dimensiones se mencionó que el comportamiento reflejado en la capacidad térmica concuerda con la observada experimentalmente tan solo cualitativamente, dado que la altura del pico en $T = T_c$ no llega cerca del valor real.

Sin embargo, tomando el resultado mostrado en [8] para el comportamiento experimental de $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ se encuentra que en $T = T_c = 90,83K$ el pico en la capacidad térmica se encuentra en $C/T \simeq 2,03mJg^{-1}K^{-2}$, y suponiendo que la supercorriente se da en las capas formadas por los planos de cobre y oxígeno CuO_2 - $Y-CuO_2$ un peso molar de 279.96 gramos encontramos $C_n/R \simeq 6,20$. Lo que es más, mirando los resultados considerando un ancho de capa finito 3.11 vemos que esto ocurre para el caso de $\eta \simeq 0,6 - 0,7$, produciendo resultados que no solo coinciden cualitativamente sino cuantitativamente con observaciones experimentales. De manera similar podemos investigar la transición de un sistema bidimensional a uno unidimensional. Tomando condiciones de periodicidad en 2 dimensiones, podemos escribir a la densidad de estados:

$$g(K) = \frac{A}{(2\pi)^2} \sum_{n_1, n_2} \frac{\sin(K\alpha)}{\alpha} \quad (3.94)$$

donde $\alpha^2 = (a_1 n_1)^2 + (a_2 n_2)^2$. Introduciendo la distribución anterior en la expresión para el número promedio de partículas por unidad de área

$$n(T) = \frac{1}{A} \int d^2 K g(K) \left(e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1 \right)^{-1} \quad (3.95)$$

y realizando las integrales, expresando en términos de la serie geométrica, se obtiene tras cálculos sencillos:

$$n(T) = \frac{1}{\pi} \sum_m \sum_{n_1, n_2} z^m \frac{m\beta\hbar c_1}{(\alpha^2 + (m\beta\hbar c_1)^2)^2} \quad (3.96)$$

De nuevo, consideramos el caso en que los bosones se mueven libremente en una de las dimensiones tomando $a_2 \rightarrow \infty$ de donde se sigue que $n_2 = 0$. Es más, aprovechamos para investigar una aplicación concreta

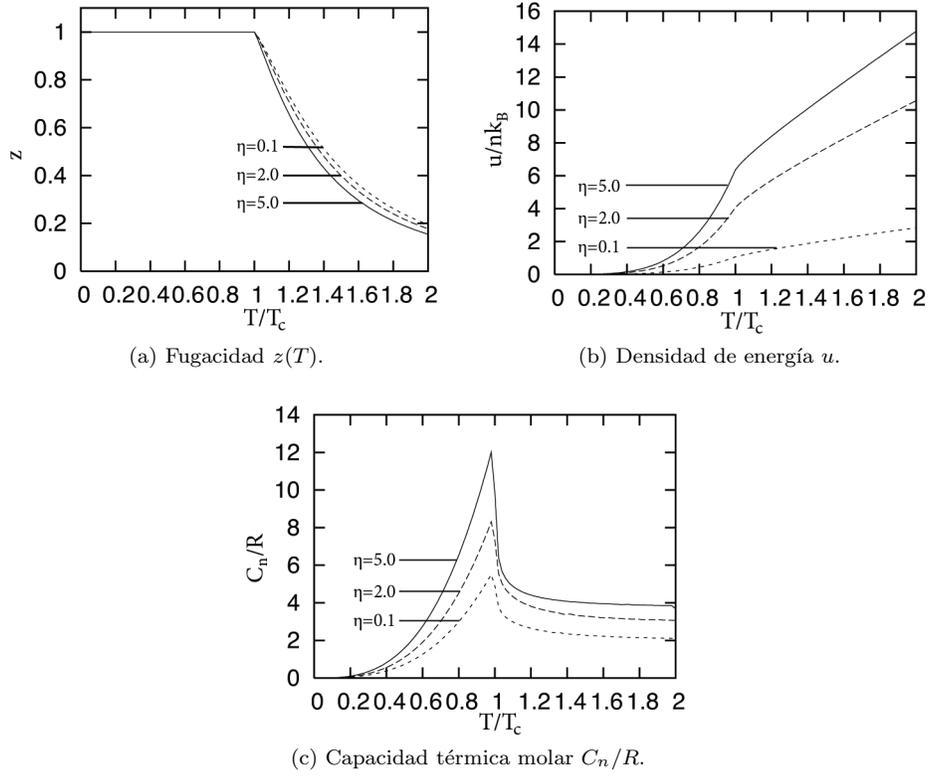


Figura 3.11: Fugacidad, densidad de energía y capacidad térmica para un gas de bosones en 3D confinados a una capa de ancho $\eta = 0,1, 2$ y 5 .

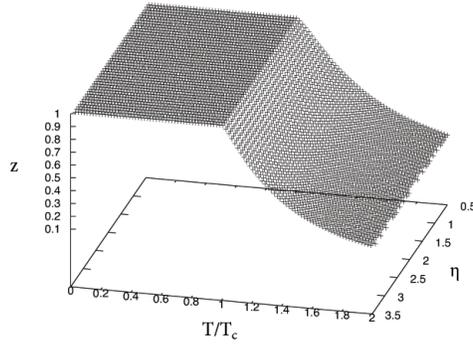


Figura 3.12: Fugacidad de un gas en 3D confinado a una capa de ancho η .

cerrando la superficie como se muestra en la figura 3.15. En esta situación los pares de Cooper se mueven sobre la superficie de un cilindro con longitud $a_2 \rightarrow \infty$ y radio $\rho = a_1/2\pi$, asemejándose a lo que se cree que ocurre un nanotubos de carbono.

Retomando la expresión anterior en este límite se puede ver que existe una solución analítica para la

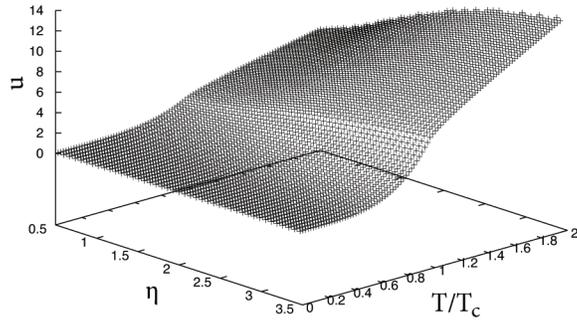


Figura 3.13: Densidad de energía de un gas en 3D confinado a una capa de ancho η .

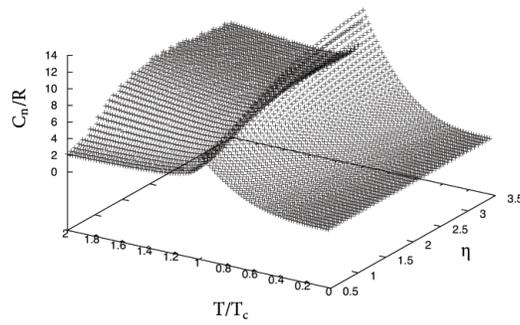


Figura 3.14: Capacidad térmica molar C_n/R de un gas en 3D confinado a una capa de ancho η .

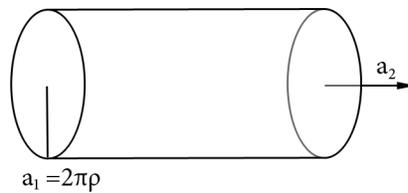


Figura 3.15: Configuración bidimensional

suma sobre el índice n_1 . Simplificando el resultado podemos escribir a la densidad de pares $n(T)$ mediante

la relación

$$n(T) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{k_B}{\hbar c_1} \right)^3 T^3 \sum_m \frac{z^m}{m^3} q_m(x) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{k_B}{\hbar c_1} \right)^3 T^3 \Xi_3(z, x) \quad (3.97)$$

en donde $x = \beta \hbar c_1 / 2\rho$ y

$$q_m(x) = (-2 + (xm)^2 \operatorname{csch}^2(xm) + (xm) \operatorname{coth}(xm))$$

De donde se obtiene la temperatura crítica haciendo $z = 1$

$$T_c = 4\pi \left(\frac{\hbar c_1}{k_B} \right)^3 \frac{n(T_c)}{\Xi_3(1, x)} \quad (3.98)$$

donde hemos dejado explícitamente en términos de la variable adimensional x .

Siguiendo el mismo procedimiento se obtiene la energía interna por unidad de área

$$\begin{aligned} u &= \frac{\hbar c_1}{\pi} \sum_m z^m \sum_{n_1} \frac{3(m\beta \hbar c_1 / a_1)^2 - n_1^2}{((m\beta \hbar c_1 / a_1)^2 + n_1^2)^2} \\ &= \frac{k_B}{2\pi} \left(\frac{k_B}{\hbar c_1} \right)^3 T^4 \sum_m \frac{z^m}{m^4} r_m(x) = \frac{k_B}{2\pi} \left(\frac{k_B}{\hbar c_1} \right)^3 T^4 \Theta_4(z, x) \end{aligned} \quad (3.99)$$

donde

$$r_m(x) = -3 + (xm)^2 \operatorname{csch}^2(xm) + (xm) \operatorname{coth}(xm) [1 + (xm)^2 \operatorname{csch}^2(xm)] \quad (3.100)$$

Utilizando la relación 3.98 podemos encontrar la energía interna de los pares excitados explícitamente en términos de la densidad total de pares

$$u(n, T) = 2nk_B \frac{T^4}{T_c^3} \frac{\Theta_4(z, x)}{\Xi_3(1, x)} \quad (3.101)$$

y finalmente la capacidad térmica molar

$$\begin{aligned} \frac{C_n}{R} &= 8 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{\Theta_4(z, x)}{\Xi_3(1, x)} - 2x \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Theta_4(z, x)}{\Xi_3(1, x)} \right) \\ &\quad + 2 \frac{T^4}{T_c^3} \left(\frac{\Theta_3(z, x)}{z \Xi_3(1, x)} \right) \frac{\partial z}{\partial T} \end{aligned} \quad (3.102)$$

En las figuras 3.16-3.19 investigamos el comportamiento termodinámico del sistema tomando de nuevo unidades donde $c_1 = \hbar = k_B = 1$ y resolviendo las expresiones anteriores en términos del parámetro x , del cual se obtiene el radio equivalente mediante la relación $x = \beta \hbar c_1 / 2\rho$, y tomando que en genral se puede tomar c_1 del orden de 10^4ms^{-1} el radio ρ debe tener unidades de $10^{-7} - 10^{-8} \text{m}$.

En particular en 3.16 se observa como la temperatura crítica retrocede a cero al disminuir el radio de los cilindros, mostrando la ausencia de condensación en el caso de propagación en una única dimensión.

La caracterización reciente del comportamiento eléctrico de nanotubos de carbono ha llevado al descubrimiento de superconductividad a partir de una temperatura crítica de alrededor de $15 - 20 \text{K}$ en tubos con diámetro de 4Å . Es más, tomando en cuenta que la velocidad de Fermi para superconductores cerámicos es del orden de 10^4ms^{-1} podemos tomar por simplicidad $c_1 = 1,5 \times 10^4 \text{ms}^{-1}$ la velocidad de sonido en grafeno y en donde se tendrá de nuevo las unidades previamente definidas en donde $1\text{eV} \simeq 10^{12} \text{m}^{-1}$ y $1\text{K} \simeq 10^{-7} \text{m}^{-1}$. Finalmente ajustando para reproducir los resultados experimentales se encuentra que la densidad de portadores de carga total para los nanotubos de carbono debe ser de $3,937 \times 10^{24}$.

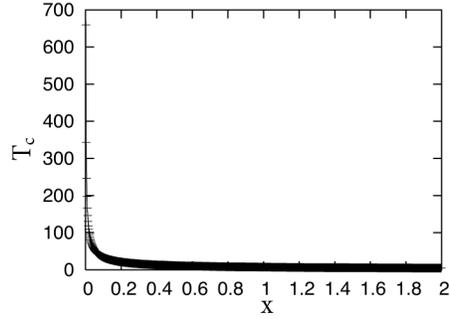


Figura 3.16: Temperatura crítica de un gas de bosones libres en una dimensión pero confinados a la superficie de un cilindro de radio ρ .

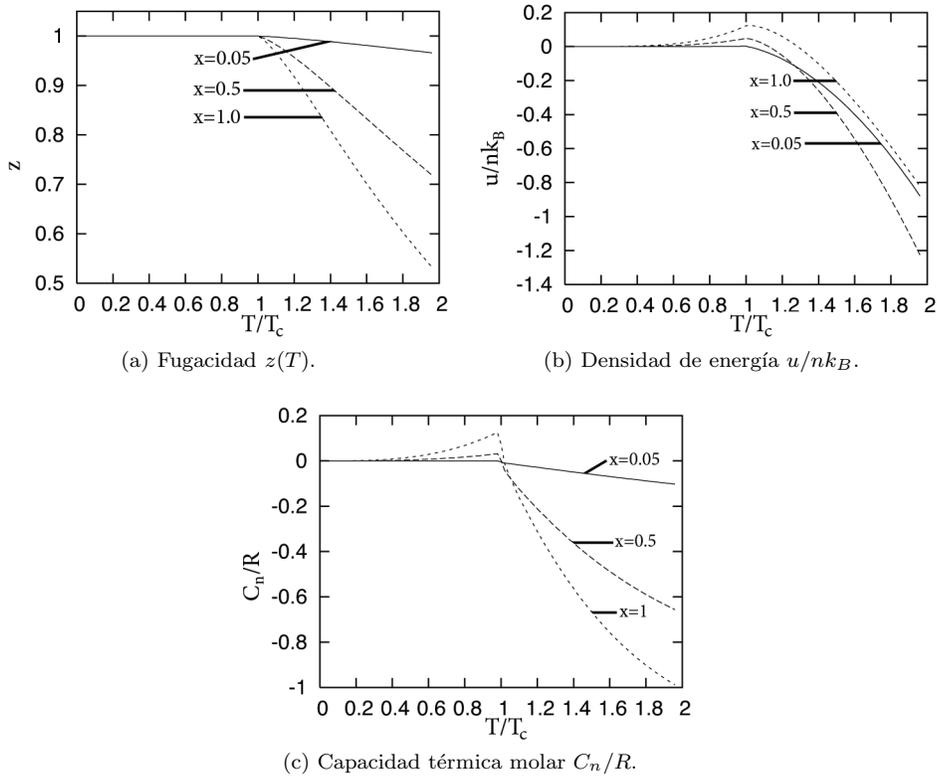


Figura 3.17: Fugacidad, densidad de energía y capacidad térmica para un gas de bosones en 2 dimensiones confinados a propagar sobre la superficie lateral de un cilindro con $x = 0,05, 0,5$ y 1 .

3.6 Conclusiones y comentarios

Realizando un estudio mediante pares de Cooper sin masa propagando en dos y tres dimensiones y tomando la aproximando una relación de dispersión lineal en la energía para los mismos, se reproduce cualitativamente el comportamiento de cerámicas superconductoras así como han estudiado autores como Fujita y Godoy ó Pathria.

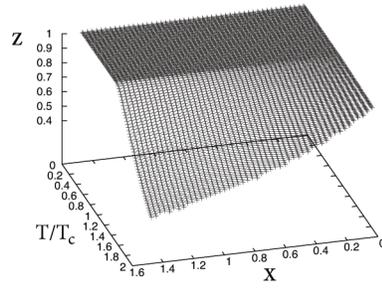


Figura 3.18: Fugacidad z de un gas de bosones propagando sobre la superficie lateral de un cilindro en función de la temperatura T y ρ .

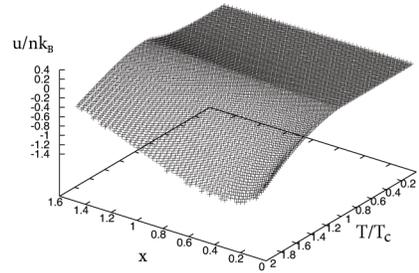


Figura 3.19: Energía interna u/nk_B de un gas de bosones propagando sobre la superficie lateral de un cilindro en función de la temperatura T y ρ .

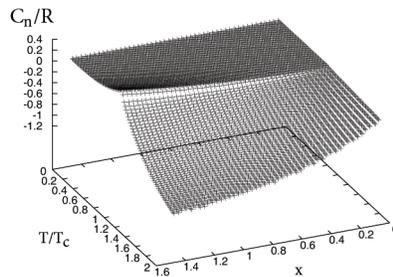


Figura 3.20: Capacidad térmica molar C_n/R de un gas de bosones propagando sobre la superficie lateral de un cilindro en función de la temperatura T y ρ .

Es más, empleando la densidad exacta de modos para describir el comportamiento termodinámico de pares confinados a propagar en una capa de ancho finito en el estudio de la transición entre sistemas en tres y dos dimensiones se encuentra que cerca de $\eta \simeq 0,7$ los resultados concuerdan cualitativamente y cuantitativamente con los obtenidos experimentalmente.

Al aplicar el mismo formalismo para pares de Cooper confinados a propagar sobre la superficie lateral de

un cilindro de radio ρ se describe la transición de un sistema en una a dos dimensiones, con aplicaciones claras en la descripción termodinámica de nanotubos de carbono. Se encuentra que la temperatura crítica para condensación retrocede a cero para sistemas unidimensionales, concordando con resultados teóricos anteriores. Empleando el análisis para ajustar a los resultados obtenidos experimentalmente permitió obtener un valor aproximado para la densidad de portadores en los mismos.

Resumen

En el transcurso de estudiar sistemas bosonicos se emplearon los formalismos de la física estadística para generar una descripción termodinámica a partir de principios puramente cuánticos. En particular, se estudiaron sistemas confinados empleando la densidad exacta de modos, construyendo un formalismo fácilmente aplicable a sistemas novedosos y enfatizando la gran importancia de la geometría de cada problema.

Lo que es más, estos resultados se encuentran al alcance de confirmación experimental debido a las claras aplicaciones, de las cuales se estudiaron tan solo dos en esta tesis.

Mediante el estudio de los modos naturales del campo electromagnético dentro de cavidades rectangulares se describió el comportamiento de un pistón cuántico generalizando estudios anteriores para temperaturas finitas y obteniendo resultados finitos y continuos.

Aplicando un procedimiento similar se estudiaron pares de Cooper, electrones ligados mediante fonones, con el objetivo de estudiar el fenómeno de superconductividad en cerámicas y obteniendo resultados que concuerdan tanto cualitativamente como cuantitativamente con medidas experimentales. Un tratamiento similar se propone para el estudio del mismo fenómeno en nanotubos de carbono.

Sin embargo también son claras las complicaciones que aparecen en el desarrollo teórico. En particular la naturaleza de la descripción cuántica implica una infinidad de contribuciones en problemas tan sencillos como lo es la descripción del campo de vacío en una cavidad, ni hablar de configuraciones más complejas.

Para esto es necesario encontrar un esquema de regularización con tanto validez matemática como significado físico.

Bibliografía

- [1] Jan Ambjorn and Stephen Wolfram. Properties of the vacuum. mechanical and thermodynamic. *Annals of Physics*, 147:1–32, 1983.
- [2] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press, 2005.
- [3] Timothy Boyer. Casimir forces and boundary conditions in one dimension:attraction, repulsion, planck spectrum and entropy. *American Journal of Physics*, 71(10):990–998, 1971.
- [4] M. Casas, A. Rigo, M. de Llano, O. Rojo, and M.A. Solís. Bose-einstein condensation with a bcs model interaction. *Physics Letters A*, 245:55–61, 1998.
- [5] R. Esquivel, C. Villareal, and W. L. Mochán. Exact surface impedance formulation of the casimir force:spatially dispersive metals. *Physical Review A*, 68:052103, 2003.
- [6] R. Esquivel-Sirvent and C. Villareal. Superlattice-mediated tuning of casimir forces. *Physical Review A*, 64:052108, 2001.
- [7] J. Feinber, A. Mann, and M. Revzen. Casimir effect: The classical limit. *Annals of Physics*, 288:103–136, 2001.
- [8] Shigeji Fujita and Salvador. Godoy. *Quantum Statistical Theory of Superconductivity*. Plenum Press, New York, USA, 1996.
- [9] S. Hacyan, R. Jáuregui, F. Soto, and Villarreal C. Spectrum of electromagnetic fluctuations in the casimir effect. *Journal of Physics A*, 23:1401–2412, 1990.
- [10] S. Hacyan, R. Jáuregui, F. Soto, and Villarreal C. Spectrum of electromagnetic fluctuations in the casimir effect. *Physical Review A*, 47(5):4204–4211, 1993.
- [11] R. Jáuregui, C. Villareal, and S. Hacyan. Finite temperature corrections to the casimir effect in rectangular cavities with perfectly conducting walls. *Annals of Physics*, 321:2156–2169, 2005.
- [12] O. Kenneth and I. Klich. Opposites attract: Atheorem about the casimir force. *Physical Review Letters*, 97:160401, 2006.
- [13] W. Lukosz. Electromagnetic zero-point energy and radiation pressure for a rectangular cavity. *Physica*, 56:121–124, 1971.
- [14] J. Mehra. Temperature correction to the casimir effect. *Physica*, 37:145–152, 1967.
- [15] Peter W. Milonni. *The Quantum Vacuum:An introduction to Quantum electrodynamics*. Academic Press, San Diego, USA, 1994.
- [16] R. Mochán, W.L.and Esquivel-Sirvent and C. Villareal. On casimir forces for media with arbitrary dielectric properties. *Revista Mexicana de Física*, 48(4):339–342, 2002.

- [17] R.K. Pathria. Bose-einstein condensation in thin films. *Physical Review A*, 5(3):1451–1456, 1971.
- [18] R.K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Pergamon Press, Great Britain, 1980.
- [19] C. Raabe, K. Luudwig, and W. Dirk-Gunnar. Three-dimensional casimir force between absorbing multilayer dielectrics. *Physical Review A*, 68:033810, 2003.
- [20] Frederick Reif. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. Mc-Graw Hill, 1965.
- [21] C. Villareal and M. de Llano. Bcs-bec model of hight- t_c superconductivity in layered cuprates with unconventional pairing. *Bajo Revisión*, 2010.

Apéndice A

Densidad de portadores de carga

Para realizar una discusión en cuanto a la densidad de portadores de carga debemos notar que en el pasado se han obtenido aproximaciones mediante medidas de la distancia sobre la cual decae un campo magnético externo dentro de un superconductor, conocida como la profundidad de penetración de London.

Derivada de la ecuación que lleva el mismo nombre, se obtiene que para el caso de superelectrones con carga e , masa efectiva m^* y densidad n_s se debe seguir la siguiente relación:

$$\frac{1}{\lambda_L^2} = \frac{4\pi e^2 n_s}{m^* c^2} \quad (\text{A.1})$$

la cual es consistente con la fenomenología observada $T_c \propto 1/\lambda^2$.

Sin embargo en el modelo empleado para el estudio de superconductores cerámicos se debe tomar en vez la penetración magnética debida a pares de Cooper viajando con una velocidad c_1 , carga $2e$ y una relación de dispersión lineal

$$\varepsilon_K^{(l)} \simeq \varepsilon_0^{(l)} + \hbar c_1 K \quad (\text{A.2})$$

en donde $\varepsilon_0^{(l)}$ es la energía de ligado para pares en el estado base ($\hbar K = 0$) dado por

$$\varepsilon_0^{(l)} = \frac{2\hbar\omega_D}{e^{2/N_0 V_0^{(l)}} - 1} \quad (\text{A.3})$$

en donde $V_0 > 0$ es el potencial de interacción que sienten los pares de Cooper cercanos a la superficie de Fermi, y se anula en cualquier otro caso.

Es más, de la relación de dispersión lineal en A.2 se sigue que para mantenerse en un estado ligado ($\varepsilon_k^{(l)} < 0$) el numero de onda máximo de cada par de Cooper no debe exceder la cantidad

$$K_0 = |\varepsilon_0^{(l)}| / c_1 \quad (\text{A.4})$$

Tomando la ecuación dependiente de la temperatura para el gap

$$1 = N_0 V_0 \int_0^{\hbar\omega_D} d\varepsilon_k \left\langle \frac{\tanh\left(\frac{1}{2}\beta\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^{(l)2}} |g^{(l)}(k)|\right)}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^{(l)2}} |g^{(l)}(k)|} \right\rangle \quad (\text{A.5})$$

obtenida previamente por autores como P. Anderson y P. Morel, entre otros, y evaluando en el límite de temperatura nula $T = 0$, la relación anterior se simplifica a

$$\frac{\Delta_0^{(l)}}{\Gamma_0^{(l)}} = 2\hbar\omega_D e^{-1/N_0 V_0} \quad (\text{A.6})$$

Considerando que las medidas para la energía en cerámicas superconductoras muestran, en general, dispersión alrededor de un valor central Δ_0^{exp} podremos asumir $\Delta_0^{exp} \simeq \Delta^{(2)}/\Gamma^{(2)} \simeq \Delta_0^0 \equiv \Delta_0$ se tiene la siguiente relación para la energía de ligado de pares en el estado base:

$$|\varepsilon_0^{(l)}| = \frac{\Delta_0^2}{2\hbar\omega_D} \quad (\text{A.7})$$

Dejamos esta relación para uso previo, introduciendo a esta altura una integral de contorno en la fase de la función de onda de los pares de Cooper en presencia de un campo externo $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ y suponiendo un medio homogéneo

$$\oint \left(\hbar\vec{K} + \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{A.8})$$

ésta debe desvanecer para todo contorno cerrado.

Utilizando la expresión para el flujo de la supercorriente de los pares $\vec{J}_s = n^{3D}(2e)c_1\hat{K}$ y utilizando el teorema de Stokes en la integral de contorno anterior se sigue

$$\vec{J}_s + \frac{4e^2c_1n^{3D}}{\hbar cK}\vec{A} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Tomando el rotacional de la expresión anterior, una ecuación de London modificada, para luego introducir en la ley circuital de Ampere $\nabla \times \vec{B} = \vec{J}_s$ se sigue que el campo magnético satisface una ecuación de Helmholtz $\nabla^2 \vec{B} = -\lambda \vec{B}$ en donde:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{2e}{c} \right)^2 \frac{4\pi c_1 n^{3D}}{\hbar K} \quad (\text{A.10})$$

Esta expresión para λ puede ocupar valores desde un mínimo en $\lambda = 0$ cuando $K = 0$ hasta el valor máximo, discutido previamente, cuando se rompen los pares de Cooper en $K = K_0$ y $\lambda_0 = 0$.

Resulta natural tomar a $\lambda_0 = \lambda_{ab}$ la profundidad de penetración observada experimentalmente, de donde podemos sustituirla la relación de dispersión lineal utilizada para eliminar a K_0 de λ_0 , obteniendo la relación:

$$n^{3D} = \frac{e^2 |\varepsilon_0^{(l)}|}{c^2} \frac{1}{16\pi c_1^2 \lambda_{ab}^2} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente se obtiene la densidad de portadores de carga en dos dimensiones imponiendo $n^{2D} = \delta n^{3D}$ y utilizando la expresión A.7 para tener la relación en términos de puros parámetros que se pueden obtener experimentalmente

$$n^{2D} = \frac{e^2}{32\pi c_1^2 c^2} \frac{\delta \Delta_0^2}{\hbar\omega_D} \frac{1}{\lambda_{ab}^2} \quad (\text{A.12})$$

A continuación se comparan las temperaturas críticas medidas experimentalmente con aquellas obtenidas utilizando la densidad de portadores de carga que se encuentran utilizando el tratamiento anterior con parámetros medidos experimentalmente¹.

¹Reportados por Poole C. P. en *Superconductivity*, Krauer H. en *Journal of Superconductivity* y Pickett W. en *Rev. Mod. Phys.*

Cuadro A.1: Temperatura crítica experimental contra la predicha utilizando la teoría, tal como se obtiene en [21]. Denotamos $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ la temperatura de Debye

Superconductor	$\Theta_D(K)$	$\Delta_0(meV)$	$\lambda_{ab}(nm)$	$\delta(\text{Å})$	T_c^{exp}	T_c^{teo}	$(2\Delta_0/k_B T_c)^{exp}$	$(2\Delta_0/k_B T_c)^{teo}$
$(La_{,925}Sr_{,075})_2CuO_4$	360	6.5	250	4.43	36	36.4	4.3	4.14
$YBa_2Cu_3O_{6,60}$	410	15.0	240	2.15	59	56.0	5.90	6.09
$YBa_2Cu_3O_{6,95}$	410	15.0	145	2.15	93.2	92.6	4.0	3.68
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_2O_8$	250	16.0	250	2.24	80	72.2	4.64	4.85
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$	260	26.5	252	2.24	108	109.2	6 5.7	4.99
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_2O_8$	260	22.0	221	2.14	110	104.1	4.5	4.47
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$	280	14.0	200	4.30	125	105.5	3.1	2.96