Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

SUFICIENCIA FUERTE EN CONTROL ÓPTIMO PARA PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
CHRISTIAN GABRIEL MIRANDA RUÍZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GERARDO SÁNCHEZ LICEA

2011

Datos del Jurado

1. Datos del alumno	
Apellido Paterno	Miranda
Apellido Materno	Ruíz
Nombre(s)	Christian Gabriel
Teléfono	5538780363
Escuela	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Carrera	Maestría en Ciencias Matemáticas
Número de Cuenta	404078537
2. Datos del tutor	
Grado	Dr
Nombre(s)	Gerardo
Apellido Paterno	Sánchez
Apellido Materno	Licea
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dr
Nombre(s)	Javier Fernando
Apellido Paterno	Rosenblueth
Apellido Materno	Laguette
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dr
Nombre(s)	María de la Luz Jimena
Apellido Paterno	De Teresa
Apellido Materno	De Oteyza
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dr
Nombre(s)	Luis Octavio
Apellido Paterno	Silva
Apellido Materno	Pereyra
6. Datos del sinodal 4	
Grado	M en C
Nombre(s)	María de Lourdes
Apellido Paterno	Velasco
Apellido Materno	Arregui
7. Datos del trabajo escrito	
Título	Suficiencia fuerte en control óptimo para problemas isoperimétricos
Subtítulo	
Número de Páginas	28 p
Año	2011

A mis padres

A Gerardo Sánchez Licea

Contenido

1 Introducción

Las condiciones suficientes de segundo orden (CSS) en control óptimo provienen en la mayoría de los casos de algunas generalizaciones de condiciones suficientes dadas en el contexto de cálculo de variaciones. Es bien sabido que las condiciones reforzadas de Euler, Legendre, Weierstrass y Jacobi, forman parte de un conjunto de condiciones suficientes para un mínimo fuerte estricto. Actualmente, en la teoría de cálculo de variaciones y de control óptimo existe una literatura muy extensa sobre CSS (ver [1,6,7,19–25,28,31–38,40–43]). Algunos de estos enfoques incluyen posibles generalizaciones de la teoría de Jacobi en términos de puntos conjugados, la construcción de una solución acotada de la ecuación matricial de Riccati, una función de verificación que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi, y la inserción del problema de control óptimo correspondiente en un problema de optimización abstracta en un espacio de Banach. Por otra parte, para problemas de control óptimo que contienen restricciones con igualdades y/o desigualdades, el enfoque que se utiliza en [28, 43] consiste en la construcción de una función cuadrática que satisface la desigualdad de Hamilton-Jacobi. La existencia de tal función depende de la solución de la ecuación modificada de Ricatti que incorpora el espacio tangente de las restricciones activas. Con respecto a las CSS para problemas con restricciones mixtas, en las referencias [29, 30] se considera un problema multidimensional de control óptimo de clase $C^{1,1}$ con puntos fijos finales, y se obtiene un criterio de suficiencia directo para la existencia de una función con la cual se cumple la desigualdad de Hamilton-Jacobi. En [23] se generalizan los métodos de las referencias anteriores combinando dichos resultados con una técnica que permite medir la desviación de la función de costo $I(x, u)$ con respecto al valor óptimo $I(x_0, u_0)$ por medio de la norma L^2 en una vecindad en L^∞ de x_0.

En esta tesis estudiaremos un problema de Lagrange de control óptimo de puntos fijos finales y con restricciones isoperimétricas el cual denotamos por (P). La aportación principal de este trabajo está basada en el planteamiento y la demostración de un teorema que proporciona un conjunto nuevo de condiciones suficientes para un mínimo estricto fuerte del problema (P). El planteamiento del teorema principal de esta tesis está motivado por un resultado dado en Hestenes [17], el cual proporciona condiciones suficientes para un mínimo estricto fuerte en el problema clásico de cálculo de variaciones que incluye puntos fijos finales y restricciones isoperimétricas. La demostración del teorema principal de este trabajo es una generalización de la técnica utilizada por Hestenes en [17], la cual es autocontenida en el sentido de que no utiliza los conceptos clásicos para obtener teoremas de suficiencia como lo son, la teoría de Jacobi en términos de puntos conjugados, el uso de teoremas de inmersión de la teoría de las ecuaciones diferenciales, la teoría de Hamilton-Jacobi, y la construcción de ciertas matrices de Riccati. De hecho, dicho método está basado completamente en un enfoque variacional puesto que este utiliza explícitamente la positividad de la segunda variación sobre el conjunto de variaciones admisibles no nulas. Algunas extensiones de esta técnica han permitido obtener teoremas de suficiencia en ciertas clases de problemas de cálculo de variaciones y de control óptimo que no contienen explícitamente restricciones isoperimétricas, ver [31, 34–37, 42]. Es importante mencionar que todo problema de control óptimo con restricciones isoperimétricas se puede transformar en un problema de Lagrange sin restricciones, sin embargo, al llevar a cabo dicha transformación la nueva dinámica incorpora las funciones que intervienen en las restricciones isoperimétricas y esto conlleva a resolver un problema que en general es más complicado. El hecho de que las condiciones del teorema principal de esta tesis sean más fáciles de verificar se debe a que dicho problema se ataca directamente como un problema cuya naturaleza tiene este tipo de restricciones.

La esencia del teorema principal de esta tesis se puede describir de la siguiente manera. En la teoría de control es bien sabido que todo proceso admisible óptimo tiene que satisfacer el principio del máximo de Pontryagin. En el contexto de esta tesis a los procesos admisibles que satisfacen un reforzamiento de este principio los llamaremos *extremos*. Dado un extremo cuyo control vive en el espacio de las funciones continuas, ver [23] donde la continuidad del control óptimo se cumple en particular para problemas en el cual el Hamiltoniano admite un mínimo único, le impondremos las condiciones reforzadas de Legendre y Weierstrass, la positividad de la segunda variación sobre el conjunto de variaciones admisibles no nulas, y una condición relacionada con las funciones exceso de Weierstrass con respecto a las funciones que delimitan el problema. Si algún extremo satisface estas condiciones, entonces dicho extremo será un mínimo estricto fuerte del problema (P), de hecho, la desviación del costo $I(x, u)$ de todo proceso admisible (x, u), cuya estrategia x viva en una vecindad suficientemente pequeña en L^∞ de la estrategia óptima x_0, estará estimada por medio de una proporción del cuadrado de la norma L^1 de la diferencia entre u y u_0, siendo u_0 el control óptimo correspondiente. Cabe mencionar que el hecho antes descrito es muy similar a la conclusión obtenida en [23], que se mencionó al final del primer párrafo, donde la desviación del costo se estima con la norma L^2.

Vale la pena mencionar algunas de las herramientas fundamentales del Análisis Funcional que se utilizaron para llevar a cabo de manera fructífera el desarrollo de este trabajo.

Sea $T := [t_0, t_1]$ un intervalo compacto de $\mathbf{R}$, recordemos que las funciones absolutamente continuas $AC(T; \mathbf{R}^n)$ son diferenciables en casi todo punto y su derivada es una función que pertenece al espacio $L^1(T; \mathbf{R}^n)$. Más aún, la clase de funciones más grande que admite los dos teoremas fundamentales del cálculo al utilizar integrales de Lebesgue es la de las absolutamente continuas.

Los espacios $L^p(T; \mathbf{R}^n)$ son espacios vectoriales de Banach reflexivos cuando $1 < p < \infty$. Este hecho es de fundamental importancia ya que permite concluir que toda sucesión acotada en $L^p(T; \mathbf{R}^n)$ con $1 < p < \infty$, tiene una subsucesión que converge débil en $L^p(T; \mathbf{R}^n)$. El Teorema de Representación de Riesz junto con dicho resultado son una parte fundamental para poder llegar a ciertas conclusiones acerca de la convergencia de algunas sucesiones de integrales en las cuales los resultados clásicos de la teoría de la medida no nos dan una respuesta.

El teorema de la acotación uniforme, también conocido como el teorema de Banach-Steinhaus, nos proporciona una herramienta crucial que nos permite concluir que un conjunto es acotado en $L^p(T; \mathbf{R}^n)$. Específicamente, para saber si un conjunto es acotado en $L^p(T; \mathbf{R}^n)$ es suficiente aplicarle toda funcional del dual de $L^p(T; \mathbf{R}^n)$ y ver que la imagen de dicho conjunto es acotado en $\mathbf{R}$, en otras palabras, todo conjunto débilmente acotado en $L^p(T; \mathbf{R}^n)$ está fuertemente acotado en $L^p(T; \mathbf{R}^n)$.

Es bien sabido que toda sucesión convergente en $L^p(T; \mathbf{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, tiene una subsucesión que converge puntualmente excepto posiblemente en un conjunto de medida cero. El Teorema de Egoroff nos asegura que la convergencia es casi uniforme en T. Dada una sucesión de funciones en $AC(T; \mathbf{R}^n)$ que converge puntualmente en T, un criterio fundamental al que uno puede apelar para concluir que la convergencia sea uniforme en T es verificar si dicha sucesión de funciones es equicontinua en T. Una consecuencia inmediata del Teorema de Ascoli-Arzelá nos dice que si una sucesión de funciones vectoriales definidas en un espacio métrico compacto converge puntualmente y esta sucesión es equicontinua, entonces la convergencia es uniforme.

La organización de esta tesis está dada de la siguiente manera. En la sección 2 se plantean el problema y los teoremas principales de este trabajo junto con algunas definiciones fundamentales de la teoría de control óptimo, las cuales nos permitirán establecer de una forma concisa la estructura del problema (P). En la sección 3 se presentan dos ejemplos, uno de cálculo de variaciones y otro de control óptimo, para los cuales el teorema principal nos permite concluir que los extremos encontrados son mínimos estrictos fuertes. La motivación del ejemplo de control óptimo se obtuvo del tutorial del software PROPT (Matlab Optimal Control Software), ver [39]. En esta fuente se ataca un problema semejante con un método numérico llamado método pseudoespectral de colocación, ver [3,4,8,18,39]. Cabe mencionar que de este método sólo se obtienen procesos admisibles y no se utiliza el principio de Pontryagin. En contraste, la teoría desarrollada en esta tesis nos permitió corroborar que un extremo es de hecho un mínimo estricto fuerte del problema (P). Es importante hacer notar que los datos principales de dicho ejemplo coinciden con aquellos dados en [39]. En la sección 4 se presenta la demostración del teorema principal y finalmente en la última sección se demuestra un resultado auxiliar en el cual está basada fuertemente la demostración de dicho teorema.

2 Planteamiento del problema y resultados principales

El problema de puntos fijos finales de control óptimo que estudiaremos en esta tesis se puede establecer de la siguiente forma. Dado un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos ξ_0 y ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, r constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ en $\mathbf{R}$, funciones $L, L_1, \ldots, L_r$ que mapean $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ en $\mathbf{R}$ y f que mapea $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ en $\mathbf{R}^n$, denotemos por $X := AC(T; \mathbf{R}^n)$ al espacio de las funciones absolutamente continuas que mapean T en $\mathbf{R}^n$, sean $U := L^1(T; \mathbf{R}^m)$, $Z := X \times U$, y denotemos por Z_e al conjunto de todas los parejas $(x, u) \in Z$ que satisfacen

a. $L(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ y $L_i(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ $(i = 1, \ldots, r)$ pertenecen a $L^1(T; \mathbf{R})$.
b. $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ c.t.p. en T.
c. $x(t_0) = \xi_0$, $x(t_1) = \xi_1$.
d. $I_i(x, u) := \alpha_i + \int_{t_0}^{t_1} L_i(t, x(t), u(t))dt = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$.

El problema con el que trabajaremos, el cual denotamos como (P), es el de minimizar I sobre Z_e, donde

$$I(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt.$$

Para este problema, un *proceso admisible* es un elemento de Z_e, esto es, una pareja (x, u) de funciones $x \in X$ y $u \in U$ que satisfacen las restricciones del problema (P). Un proceso admisible (x, u) es llamado un *mínimo fuerte* de (P) si existe $\epsilon > 0$ tal que $I(x, u) \leq I(y, v)$ para toda $(y, v) \in Z_e$ con $\|y - x\|_\infty < \epsilon$, $(y, v) \neq (x, u)$. Si la desigualdad anterior es estricta el proceso admisible (x, u) es un mínimo fuerte estricto.

Asumiremos a lo largo de esta tesis que las funciones $L, L_1, \ldots, L_r$ y f son continuas y de clase C^2 con respecto a x y u en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$. Además supondremos que existe una función continua $\psi\colon T \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que

$$|f_u(t,x,u)| \leq \psi(t,x) \quad \text{para toda } (t,x,u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m.$$

Dados r números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ consideremos la funcional $I_0 : Z_e \to \mathbf{R}$ dada por

$$I_0(x,u) := I(x,u) + \sum_{i=1}^r \lambda_i I_i(x,u) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i + \int_{t_0}^{t_1} L_0(t,x(t),u(t))dt,$$

donde $L_0 : T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ está dada por

$$L_0(t,x,u) := L(t,x,u) + \sum_{i=1}^r \lambda_i L_i(t,x,u).$$

Notemos que, como $I_i(x,u) = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ en Z_e, entonces $I_0(x,u) = I(x,u)$ en Z_e.

Para la teoría que desarrollaremos es conveniente utilizar las siguientes definiciones.

• Para toda $(t,x,u,p) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$, definimos el *Hamiltoniano* del problema por

$$H(t,x,u,p) := \langle p, f(t,x,u) \rangle - L_0(t,x,u)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar.

• Una triada (x,u,p) será llamada un *extremo* si (x,u) es un proceso admisible, $p \in X$,

$$\dot{p}(t) = -H_x^*(t,x(t),u(t),p(t)) \text{ (c.t.p. en } T) \quad \text{y} \quad H_u(t,x(t),u(t),p(t)) = 0 \ (t \in T)$$

donde '$*$' denota transpuesta.

• Para una $p \in X$ dada, definimos para toda $(t,x,u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$F_0(t,x,u) := L_0(t,x,u) - \langle p(t), f(t,x,u) \rangle - \langle \dot{p}(t), x \rangle.$$

Con respecto a F_0, definimos la funcional J como

$$J(x,u) := \beta + \int_{t_0}^{t_1} F_0(t,x(t),u(t))dt \quad ((x,u) \in Z_e)$$

donde $\beta = \langle p(t_1), \xi_1\rangle - \langle p(t_0), \xi_0\rangle + \sum_{i=1}^r \lambda_i\alpha_i$.

Sea $C(T;\mathbf{R}^m)$ el espacio de las funciones continuas que mapean T en $\mathbf{R}^m$, y consideremos la *primera variación* de J e I_i con respecto a $(x,u) \in X \times C(T;\mathbf{R}^m)$ sobre $(y,v) \in Z$ dadas por

$$J'((x,u);(y,v)) := \int_{t_0}^{t_1} [F_{0x}(t,x(t),u(t))y(t) + F_{0u}(t,x(t),u(t))v(t)]dt,$$

$$I_i'((x,u);(y,v)) := \int_{t_0}^{t_1} [L_{ix}(t,x(t),u(t))y(t) + L_{iu}(t,x(t),u(t))v(t)]dt \quad (i = 1,\ldots,r),$$

y la *segunda variación* de J con respecto a $(x,u) \in X \times C(T;\mathbf{R}^m)$ sobre $(y,v) \in X \times L^2(T;\mathbf{R}^m)$ dada por

$$J''((x,u);(y,v)) := \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t,y(t),v(t))dt,$$

donde, para toda $(t,y,v) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$\begin{aligned} 2\Omega(t,y,v) := \langle y, F_{0xx}(t,x(t),u(t))y\rangle + 2\langle y, F_{0xu}(t,x(t),&u(t))v\rangle \\ &+ \langle v, F_{0uu}(t,x(t),u(t))v\rangle. \end{aligned}$$

Con respecto a F_0, denotemos por $\mathcal{E}_0$ la *función exceso de Weierstrass* que corresponde a

$$\mathcal{E}_0(t,x,u,v) := F_0(t,x,v) - F_0(t,x,u) - F_{0u}(t,x,u)(v-u)$$

para toda $(t,x,u,v) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$.

También con respecto a L_i $(i = 1,\ldots,r)$, denotemos por $\mathcal{E}_i$ las correspondientes *funciones exceso de Weierstrass* dadas por

$$\mathcal{E}_i(t,x,u,v) := L_i(t,x,v) - L_i(t,x,u) - L_{iu}(t,x,u)(v-u).$$

• Un proceso admisible (x,u) es *no singular* si el determinante $|F_{0uu}(t,x(t),u(t))|$ es diferente de cero para toda $t \in T$.

• Para toda $(x,u) \in X \times C(T;\mathbf{R}^m)$, denotamos por $Y(x,u)$ a la clase de todas las parejas $(y,v) \in X \times L^2(T;\mathbf{R}^m)$ que satisfacen

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t) \text{ c.t.p. en } T, \quad y(t_0) = y(t_1) = 0, \text{ y } I_i'((x,u);(y,v)) = 0$$

para $i = 1,\ldots,r$, donde $A(t) := f_x(t,x(t),u(t))$ y $B(t) := f_u(t,x(t),u(t))$ $(t \in T)$.

A los elementos de $Y(x,u)$ les llamaremos *variaciones admisibles a lo largo de* (x,u).

- Para toda $u \in U$ sea

$$D(u) := \int_{t_0}^{t_1} \varphi(u(t))dt \quad \text{donde} \quad \varphi(c) := (1+|c|^2)^{1/2} - 1,$$

y denotemos por $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ a la norma del supremo en X.

Definamos el *tubo débil restringido* de radio $\epsilon > 0$ centrado en un proceso admisible dado (x,u) como

$$\mathcal{T}_1((x,u);\epsilon) := \{(t,y,v) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m : |x(t)-y| < \epsilon,\ |u(t)-v| < \epsilon\}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 3.2 de [34].

2.1 Lema: *Supongamos que F_0 es C^2 con respecto a u y $(x_0,u_0) \in Z$, con u_0 continua, satisface*

i. $F_{0uu}(t,x_0(t),u_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

ii. Existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{E}_0(t,x,u,v) \geq 0$ para toda (t,x,u,v) con $(t,x,u) \in \mathcal{T}_1((x_0,u_0);\epsilon)$.

Entonces existe $h > 0$ y podemos disminuir $\epsilon > 0$, si es necesario, tal que, para todos los procesos admisibles (x,u) que satisfacen $\|x-x_0\| < \epsilon$,

$$\mathcal{E}_0(t,x(t),u_0(t),u(t)) \geq h\varphi(u(t)-u_0(t)) \ \text{(c.t.p. en } T).$$

En el Teorema 2.2 estableceremos el resultado principal de la tesis que corresponde a un resultado nuevo de suficiencia para un mínimo fuerte estricto del problema (P) con respecto a un extremo dado. El conjunto de condiciones suficientes consiste en la condición reforzada de Legendre-Clebsch, la positividad de la segunda variación sobre el conjunto de variaciones admisibles no nulas, la condición reforzada de Weierstrass con respecto a F_0, y en una condición relacionada con las funciones de exceso de Weierstrass con respecto a las funciones que delimitan el problema.

2.1 Teorema: *Supongamos que existen $p \in X$ y multiplicadores $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ para los cuales (x_0,u_0,p) es un extremo con u_0 continua y supongamos también que*

i. $F_{0uu}(t,x_0(t),u_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

ii. $J''((x_0,u_0);(y,v)) > 0$ para todas las variaciones admisibles no nulas (y,v) a lo largo de (x_0,u_0).

iii. Existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{E}_0(t,x,u,v) \geq 0$ para toda (t,x,u,v) con $(t,x,u) \in \mathcal{T}_1((x_0,u_0);\epsilon)$.

iv. Existe $k > 0$ tal que, para todos los procesos admisibles (x,u) que satisfacen

$\|x - x_0\| < \epsilon$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}_0(t, x(t), u_0(t), u(t))dt \geq k\left|\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}_i(t, x(t), u_0(t), u(t))dt\right| \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Entonces existen $\rho, \delta > 0$ *tales que, para todos los procesos admisibles* (x, u) *que satisfacen* $\|x - x_0\| < \rho$,

$$J(x, u) \geq J(x_0, u_0) + \delta D(u - u_0).$$

2.2 Teorema: *Supongamos que existen* $p \in X$ *y multiplicadores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *para los cuales* (x_0, u_0, p) *es un extremo con* u_0 *continua y supongamos también que*

i. $F_{0uu}(t, x_0(t), u_0(t)) > 0$ $(t \in T)$.

ii. $J''((x_0, u_0); (y, v)) > 0$ *para todas las variaciones admisibles no nulas* (y, v) *a lo largo de* (x_0, u_0).

iii. Existe $\epsilon > 0$ *tal que* $\mathcal{E}_0(t, x, u, v) \geq 0$ *para toda* (t, x, u, v) *con* $(t, x, u) \in \mathcal{T}_1((x_0, u_0); \epsilon)$.

iv. Existe $k > 0$ *tal que, para todos los procesos admisibles* (x, u) *que satisfacen* $\|x - x_0\| < \epsilon$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}_0(t, x(t), u_0(t), u(t))dt \geq k\left|\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}_i(t, x(t), u_0(t), u(t))dt\right| \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Entonces existen $\rho, \delta > 0$ *tales que, para todos los procesos admisibles* (x, u) *que satisfacen* $\|x - x_0\| < \rho$,

$$I(x, u) \geq I(x_0, u_0) + \delta D(u - u_0).$$

En particular, (x_0, u_0) *es un mínimo fuerte estricto de (P).*

Demostración: Este resultado es una consecuencia del Teorema 2.1 dado que $J(x, u) = I(x, u)$ para todas las parejas $(x, u) \in Z_e$. ∎

3 Ejemplos

En esta sección exhibiremos un ejemplo de cálculo de variaciones y otro de control óptimo de puntos fijos finales con restricciones isoperimétricas. Para estos ejemplos el Teorema 2.2 muestra que los extremos usados son mínimos fuertes estrictos.

3.1 Ejemplo: *Sea* $0 < a < 1$. *Se tiene que encontrar la curva* $\mathcal{C}$ *en* $\mathbf{R}^2$ *de longitud* $2 \operatorname{arc\,sen} a$ *que una los puntos finales* $A = (-a, a)$ *y* $B = (a, a)$, *y tal que el área entre* $\mathcal{C}$ *y la cuerda* CD *con* $C = (-a, 0)$ *y* $D = (a, 0)$ *sea mínima. La funcional a minimizar es*

$$I(x, u) = \int_{-a}^{a} x(t) dt$$

sujeta a

a. $x(\cdot)$ *y* $\sqrt{1 + u^2(\cdot)}$ *pertenecen a* $L^1(T; \mathbf{R})$.
b. $\dot{x}(t) = u(t)$ *c.t.p. en* $[-a, a]$.
c. $x(-a) = a$, $x(a) = a$.
d. $I_1(x, u) = -2 \operatorname{arc\,sen} a + \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + u^2(t)} dt = 0$.

Obsérvese que la restricción a. se satiface automaticamente para toda $(x, u) \in Z$. Para este caso, $n = m = r = 1$, $T = [-a, a]$, $\xi_0 = \xi_1 = a$, $\alpha_1 = -2 \operatorname{arc\,sen} a$,

$$L(t, x, u) = x, \quad L_1(t, x, u) = \sqrt{1 + u^2}, \quad \text{y} \quad f(t, x, u) = u.$$

Claramente, puesto que $f_u(t, x, u) = 1$, existe una función continua $\psi : T \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que

$$|f_u(t, x, u)| \leq \psi(t, x) \text{ para toda } (t, x, u) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Definamos

$$x_0(t) := a + \sqrt{1 - a^2} - \sqrt{1 - t^2}, \quad \text{y} \quad u_0(t) := \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \quad (t \in T).$$

Claramente, $(x_0, u_0) \in Z_e$. Dado que

$$H(t, x, u, p) = pu - x - \lambda_1 \sqrt{1 + u^2},$$

entonces

$$H_x(t, x, u, p) = -1, \quad \text{y} \quad H_u(t, x, u, p) = p - \frac{\lambda_1 u}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Por lo tanto, con $\lambda_1 = 1$ y $p(t) = t$ $(t \in T)$, (x_0, u_0, p) es un extremo. Adicionalmente,

$$F_0(t, x, u) = \sqrt{1 + u^2} - tu,$$

por lo que

$$F_{0uu}(t,x,u) = \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}}.$$

Consecuentemente,

$$F_{0uu}(t,x_0(t),u_0(t)) = (1-t^2)^{3/2} > 0 \quad (t\in T).$$

De esta manera 2.2(i) se satisface. Ahora, notemos que $A(t)=0$, $B(t)=1$ $(t\in T)$, de donde $(y,v)\in Y(x_0,u_0)$ implica que

$$\dot{y}(t) = v(t) \quad \text{c.t.p. en } T.$$

Por consiguiente

$$J''((x_0,u_0);(y,v)) = \int_{-a}^{a} (1-t^2)^{3/2} v^2(t)dt > 0$$

para toda $(y,v)\in Y(x_0,u_0)$, $(y,v)\neq(0,0)$. Así, 2.2(ii) se cumple. Utilizando el Teorema de Taylor es fácil ver que la función exceso de Weierstrass $\mathcal{E}_0$ está dada por

$$\mathcal{E}_0(t,x,u,v) = \left(\int_0^1 \frac{1-\lambda}{(1+(u+\lambda[v-u])^2)^{3/2}}d\lambda\right)(v-u)^2 \geq 0$$

para toda (t,x,u,v). Así, 2.2(iii) se verifica para toda $\epsilon>0$, digamos $\epsilon=1$. Adicionalmente, notemos que $\mathcal{E}_1(t,x,u,v)=\mathcal{E}_0(t,x,u,v)$ para toda (t,x,u,v). Consecuentemente 2.2(iv) se satisface con $k=1$. Por el Teorema 2.2, (x_0,u_0) es un mínimo estricto fuerte de (P).

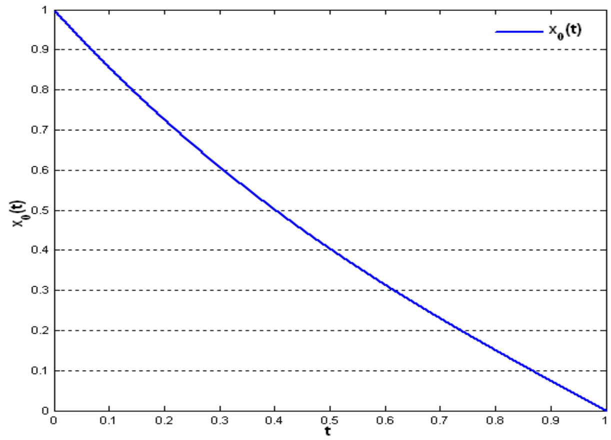
3.2 Ejemplo: En la referencia [39][1] encontré un ejemplo que se ataca con un método numérico el cual utiliza el software PROPT (Matlab Optimal Control Software). Cabe mencionar que en este problema no se utiliza el principio de Pontryagin, únicamente se exhibe un proceso admisible el cual se obtiene por medio de un método pseudoespectral de colocación, es decir, dicho proceso admisible toma la forma de un polinomio el cual satisface las ecuaciones diferenciales algebraicas y las restricciones en los puntos de colocación correspondientes, véase [3,4,8,18,39]. Utilizando el Teorema 2.2 resolveremos un ejemplo muy similar al mencionado anteriomente.

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden con valores iniciales

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) = \operatorname{sen} x(t)\cos x(t) + x(t) \quad (t\in[0,1]),\\ &x(0)=1, \quad \dot{x}(0) = -1.504968. \end{aligned}$$

Utilizando el método numérico de Runge-Kutta obtenemos la gráfica de la solución de la ecuación diferencial anterior la cual denotaremos por x_0.

[1]http://tomdyn.com/examples/isoperimetric.html



Sean

$$\alpha_1 := 2\cos 1 - 2 + \int_0^1 [\dot{x}_0^2(t) + \operatorname{sen}^2 x_0(t)]dt \simeq 0.356916$$

$$\text{y} \quad \xi_1 := x_0(1) = 1.4 \times 10^{-17} \simeq 0.$$

La funcional a minimizar es

$$I(x,u) = \int_0^1 x^2(t)dt$$

sujeta a

a. $x^2(\cdot)$ *y* $u^2(\cdot)$ *pertenecen a* $L^1(T;\mathbf{R})$.
b. $\dot{x}(t) = u(t) - \operatorname{sen} x(t)$ *c.t.p. en* $[0,1]$.
c. $x(0) = 1$, $x(1) = \xi_1$.
d. $I_1(x,u) = -\alpha_1 + \int_0^1 u^2(t)dt = 0$.

En este problema $n = m = r = 1$, $T = [0,1]$, $\xi_0 = 1$, $\xi_1 \simeq 0$, $\alpha_1 \simeq 0.356916$,

$$L(t,x,u) = x^2, \quad L_1(t,x,u) = u^2, \quad \text{y} \quad f(t,x,u) = u - \operatorname{sen} x.$$

Puesto que $f_u(t,x,u) = 1$, existe una función continua $\psi : T \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que

$$|f_u(t,x,u)| \leq \psi(t,x) \text{ para toda } (t,x,u) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Sea x_0 la función dada anteriormente y sea $u_0(t) := \dot{x}_0(t) + \operatorname{sen} x_0(t)$ $(t \in T)$. Claramente, $(x_0,u_0) \in Z_e$. Por otro lado, no es difícil ver que si $p(t) := 2u_0(t)$ $(t \in T)$ y $\lambda_1 = 1$ entonces (x_0,u_0,p) es un extremo. Tenemos que

$$F_0(t,x,u) = x^2 + u^2 - p(t)u + p(t)\operatorname{sen} x - \dot{p}(t)x.$$

Por lo tanto,

$$F_{0uu}(t, x_0(t), u_0(t)) = 2 > 0 \quad (t \in T).$$

De esta manera 2.2(i) se cumple. Notemos que $A(t) = -\cos x_0(t)$, $B(t) = 1$ $(t \in T)$. Así, $(y, v) \in Y(x_0, u_0)$ implica que

$$\dot{y}(t) = (-\cos x_0(t))y(t) + v(t) \quad \text{c.t.p. en } T.$$

Consecuentemente,

$$J''((x_0, u_0); (y, v)) = 2\int_0^1 \left[\left(1 - \operatorname{sen}^2 x_0(t) + \frac{d}{dt}\{\cos x_0(t)\}\right)y^2(t) + v^2(t)\right]dt > 0$$

para toda $(y, v) \in Y(x_0, u_0)$, $(y, v) \neq (0, 0)$. Así, 2.2(ii) es satisfecha.

Por otro lado, la función exceso de Weierstrass $\mathcal{E}_0$ de F_0 está dada por

$$\mathcal{E}_0(t, x, u, v) = (v - u)^2 \geq 0$$

para toda (t, x, u, v). Por lo tanto, 2.2(iii) se satiface para toda $\epsilon > 0$, digamos $\epsilon = 1$. También, es fácil ver que $\mathcal{E}_1(t, x, u, v) = \mathcal{E}_0(t, x, u, v)$ para toda (t, x, u, v). En consecuencia, 2.2(iv) se verifica con $k = 1$. Por el Teorema 2.2, (x_0, u_0) es un mínimo estricto fuerte de (P).

4 Demostración del Teorema 2.1

En esta sección demostraremos el Teorema 2.1. Primero planteamos un resultado auxiliar en el cual se basará fuertemente la demostración. Implícitamente en el planteamiento de este resultado se incluye una generalización del concepto de convergencia direccional de trayectorias, que fue introducido por primera vez en el contexto de cálculo de variaciones por Hestenes, ver [17], página 155.

4.1 Lema: *Sea $\{u_q\}$ una sucesión en U, $u_0 \in U$, y supongamos que*

$$\lim_{q\to\infty} D(u_q - u_0) = 0 \quad y \quad d_q := [2D(u_q - u_0)]^{1/2} > 0 \quad (q \in \mathbf{N}).$$

Para toda $q \in \mathbf{N}$ y $t \in T$ definamos

$$w_q(t) := \left[1 + \frac{1}{2}\varphi(u_q(t) - u_0(t))\right]^{1/2}, \quad v_q(t) := \frac{u_q(t) - u_0(t)}{d_q}.$$

Entonces se cumple lo siguiente:

a. *Existen $v_0 \in L^2(T; \mathbf{R}^m)$ y una subsucesión de $\{u_q\}$ (que no renombramos), tal que $\{v_q\}$ converge débilmente a v_0 en $L^1(T; \mathbf{R}^m)$, además, $u_q(t) \to u_0(t)$ casi uniformemente en T (esto es, para cada $\epsilon > 0$ existe $S_\epsilon \subset T$ con $m(S_\epsilon) < \epsilon$ tal que $u_q(t) \to u_0(t)$ uniformemente en $T \setminus S_\epsilon$), y en consecuencia $w_q(t) \to 1$ casi uniformemente en T.*

b. *Sean $A_q \in L^\infty(T; \mathbf{R}^{n\times n})$ y $B_q \in L^\infty(T; \mathbf{R}^{n\times m})$ matrices de funciones para las cuales existen constantes $m_0, m_1 > 0$ tales que $\|A_q\|_\infty \leq m_0$ y $\|B_q\|_\infty \leq m_1$ ($q \in \mathbf{N}$) y denotemos por y_q a la solución del sistema*

$$\dot{y}(t) = A_q(t)y(t) + B_q(t)v_q(t) \text{ (c.t.p. en } T), \quad y(t_0) = 0.$$

Entonces existen $\sigma_0 \in L^2(T; \mathbf{R}^n)$ y una subsucesión de $\{y_q\}$ (que no renombramos) tal que $\{\dot{y}_q\}$ converge débilmente en $L^1(T; \mathbf{R}^n)$ a σ_0. Además, si definimos

$$y_0(t) := \int_{t_0}^{t} \sigma_0(s)ds \quad (t \in T),$$

entonces $y_q(t) \to y_0(t)$ uniformemente en T.

c. *Supongamos que $S \subset T$ es medible y que $w_q(t) \to 1$ uniformemente en S. Sean R_q, R_0 formas cuadráticas con matrices asociadas $R_q(\cdot)$ medibles de $m \times m$ en S, $R_0(\cdot) \in L^\infty(S; \mathbf{R}^{m\times m})$, $R_q(t) \to R_0(t)$ uniformemente en S, y $R_0(t) \geq 0$ ($t \in S$). Entonces existe una subsucesión de $\{u_q\}$ (que no renombramos) tal que*

$$\liminf_{q\to\infty} \int_S R_q(t; v_q(t))dt \geq \int_S R_0(t; v_0(t))dt.$$

Demostración del Teorema 2.1:

Asumiremos que para toda $\rho, \delta > 0$, existe $(x, u) \in Z_e$ con $\|x - x_0\| < \rho$ tal que

$$J(x, u) < J(x_0, u_0) + \delta D(u - u_0). \tag{1}$$

Mostraremos que esto contradice la hipótesis (ii) con lo cual se demostrará el Teorema.

Sea $z_0 := (x_0, u_0)$. Notemos que, para toda $z = (x, u) \in Z_e$,

$$J(z) = J(z_0) + J'(z_0; z - z_0) + K_0(z) + \tilde{\mathcal{E}}_0(z) \tag{2}$$

donde

$$\tilde{\mathcal{E}}_0(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}_0(t, x(t), u_0(t), u(t))dt,$$

$$K_0(x,u) := \int_{t_0}^{t_1} [M_0(t,x(t)) + \langle u(t)-u_0(t), N_0(t,x(t))\rangle]dt,$$

y las funciones M_0 y N_0 están dadas por

$$M_0(t,y) := F_0(t,y,u_0(t)) - F_0(t,x_0(t),u_0(t)) - F_{0x}(t,x_0(t),u_0(t))(y-x_0(t)),$$

$$N_0(t,y) := F^*_{0u}(t,y,u_0(t)) - F^*_{0u}(t,x_0(t),u_0(t)).$$

Por el teorema de Taylor tenemos que

$$M_0(t,y) = \frac{1}{2}\langle y-x_0(t), P_0(t,y)(y-x_0(t))\rangle, \qquad N_0(t,y) = Q_0(t,y)(y-x_0(t)),$$

donde

$$P_0(t,y) := 2\int_0^1 (1-\lambda)F_{0xx}(t,x_0(t)+\lambda(y-x_0(t)),u_0(t))d\lambda,$$

$$Q_0(t,y) := \int_0^1 F_{0ux}(t,x_0(t)+\lambda(y-x_0(t)),u_0(t))d\lambda.$$

Empezaremos demostrando la existencia de $\alpha_0, h, \delta_0 > 0$ tales que, para toda $z = (x,u) \in Z_e$ que satisface $\|x-x_0\| < \delta_0$,

$$\tilde{\mathcal{E}}_0(x,u) \geq hD(u-u_0), \tag{3}$$

$$|K_0(x,u)| \leq \alpha_0\|x-x_0\|[1+D(u-u_0)]. \tag{4}$$

Por las hipótesis (i) y (iii) del teorema y usando el Lema 2.1, existe $h > 0$ y podemos disminuir $\epsilon > 0$, si es necesario, de tal forma que para toda $(x,u) \in Z_e$ con $\|x-x_0\| < \epsilon$,

$$\mathcal{E}_0(t,x(t),u_0(t),u(t)) \geq h\varphi(u(t)-u_0(t)) \quad \text{(c.t.p. en T).}$$

Por lo tanto

$$\tilde{\mathcal{E}}_0(z) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t,x(t),u_0(t),u(t))dt \geq h\int_{t_0}^{t_1} \varphi(u(t)-u_0(t))dt = hD(u-u_0)$$

para toda $z \in Z_e$ que satisface $\|x-x_0\| < \epsilon$.

Por otro lado, utilizando la desigualdad de Scharwz y la continuidad de las funciones P_0 y Q_0, no es difícil ver que se pueden escoger $\alpha, \mu > 0$ tales que, para toda $z \in Z_e$ con $\|x-x_0\| < \mu$,

$$|M_0(t,x(t)) + \langle u(t)-u_0(t), N_0(t,x(t))\rangle| \leq \alpha|x(t)-x_0(t)|[1+|u(t)-u_0(t)|^2]^{1/2}$$

para toda $t \in T$. Definamos $\alpha_0 := \max\{\alpha, \alpha(t_1 - t_0)\}$. Entonces, para toda $z \in Z_e$ con $\|x - x_0\| < \mu$,

$$|K_0(z)| \leq \alpha \|x - x_0\| \int_{t_0}^{t_1} [1 + \varphi(u(t) - u_0(t))]dt \leq \alpha_0 \|x - x_0\| [1 + D(u - u_0)]$$

y por lo tanto (3) y (4) se cumplen con α_0, h dadas anteriormente y $\delta_0 = \min\{\epsilon, \mu\}$.

Ahora, por (1), para toda $q \in \mathbf{N}$ existe $z_q = (x_q, u_q) \in Z_e$ tal que

$$\|x_q - x_0\| < \delta_0, \quad \|x_q - x_0\| < \frac{1}{q}, \quad J(z_q) - J(z_0) < \frac{1}{q} D(u_q - u_0). \tag{5}$$

Observemos que la última desigualdad implica que $u_q(t) \neq u_0(t)$ sobre un conjunto de medida positiva y entonces $D(u_q - u_0) > 0$ ($q \in \mathbf{N}$). Dado que z_0 es un extremo entonces $J'(z_0; w) = 0$ para toda $w \in Z$, por lo que de (2), (3) y (4) tenemos

$$J(z_q) - J(z_0) = K_0(z_q) + \tilde{\mathcal{E}}_0(z_q) \geq -\alpha_0 \|x_q - x_0\| + D(u_q - u_0)(h - \alpha_0 \|x_q - x_0\|).$$

Por (5) obtenemos

$$D(u_q - u_0)\left(h - \frac{1}{q} - \frac{\alpha_0}{q}\right) < \frac{\alpha_0}{q}$$

y consecuentemente $D(u_q - u_0) \to 0$, $q \to \infty$. Definimos d_q, w_q, y v_q como en el Lema 4.1. Para toda $q \in \mathbf{N}$ y $t \in T$ definimos

$$y_q(t) := \frac{x_q(t) - x_0(t)}{d_q}.$$

Por el Lema 4.1a existen $v_0 \in L^2(T; \mathbf{R}^m)$ y una subsucesión de $\{z_q\}$ (que no renombramos) tal que $\{v_q\}$ converge débilmente en $L^1(T; \mathbf{R}^m)$ a v_0. Por el Teorema de Taylor, para toda $q \in \mathbf{N}$,

$$\dot{y}_q(t) = A_q(t) y_q(t) + B_q(t) v_q(t) \text{ (c.t.p. en } T)$$

donde

$$A_q(t) = \int_0^1 f_x(t, x_0(t) + \lambda[x_q(t) - x_0(t)], u_0(t)) d\lambda,$$

$$B_q(t) = \int_0^1 f_u(t, x_q(t), u_q(t) + \lambda[u_0(t) - u_q(t)]) d\lambda.$$

Por la continuidad de f_x existe $m_0 > 0$ tal que $\|A_q\|_\infty \leq m_0$ ($q \in \mathbf{N}$). Además,

$$|B_q(t)| \leq \int_0^1 |f_u(t, x_q(t), u_q(t) + \lambda[u_0(t) - u_q(t)])| d\lambda \leq \psi(t, x_q(t)) \quad (t \in T, q \in \mathbf{N}).$$

Dado que ψ es continua, existe $m_1 > 0$ tal que $\|B_q\|_\infty \leq m_1$ $(q \in \mathbf{N})$. Por el Lema 4.1b, existen $\sigma_0 \in L^2(T; \mathbf{R}^n)$ y una subsucesión de $\{y_q\}$ (que no renombramos) tal que, si

$$y_0(t) := \int_{t_0}^{t} \sigma_0(s)ds \quad (t \in T),$$

entonces $y_q(t) \to y_0(t)$ uniformemente en T.

El teorema se demostrará si mostramos que $J''(z_0; (y_0, v_0)) \leq 0$, $(y_0, v_0) \in Y(z_0)$ y $(y_0, v_0) \neq (0, 0)$.

El hecho de que $y_0(t_0) = y_0(t_1) = 0$ proviene del Lema 4.1b. Ahora, por la definición de K_0, para toda $q \in \mathbf{N}$,

$$\frac{K_0(z_q)}{d_q^2} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{M_0(t, x_q(t))}{d_q^2} + \left\langle v_q(t), \frac{N_0(t, x_q(t))}{d_q} \right\rangle \right] dt.$$

Por el Lema 4.1b,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{M_0(t, x_q(t))}{d_q^2} = \frac{1}{2} \langle y_0(t), F_{0xx}(t, x_0(t), u_0(t)) y_0(t) \rangle,$$

$$\lim_{q\to\infty} \frac{N_0(t, x_q(t))}{d_q} = F_{0ux}(t, x_0(t), u_0(t)) y_0(t)$$

ambos uniformemente en T, y dado que $\{v_q\}$ converge débilmente a v_0 en $L^1(T; \mathbf{R}^m)$,

$$\frac{1}{2} J''(z_0; (y_0, v_0)) = \lim_{q\to\infty} \frac{K_0(z_q)}{d_q^2} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \langle v_0(t), F_{0uu}(t, x_0(t), u_0(t)) v_0(t) \rangle dt. \tag{6}$$

Demostremos ahora que existe una subsucesión de $\{z_q\}$ (que no renombramos) tal que

$$\liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0(z_q)}{d_q^2} \geq \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \langle v_0(t), F_{0uu}(t, x_0(t), u_0(t)) v_0(t) \rangle dt. \tag{7}$$

Por el Lema 4.1a, existe $S \subset T$ medible tal que $u_q(t) \to u_0(t)$ uniformemente en S. Por el Teorema de Taylor, para toda $t \in S$ y para toda $q \in \mathbf{N}$, tenemos que

$$\frac{1}{d_q^2} \mathcal{E}_0(t, x_q(t), u_0(t), u_q(t)) = \frac{1}{2} \langle v_q(t), R_q(t) v_q(t) \rangle$$

donde

$$R_q(t) := 2 \int_0^1 (1 - \lambda) F_{0uu}(t, x_q(t), u_0(t) + \lambda[u_q(t) - u_0(t)]) d\lambda.$$

Claramente,

$$\lim_{q\to\infty} R_q(t) = R_0(t) := F_{0uu}(t, x_0(t), u_0(t)) \quad \text{uniformemente en } S.$$

Por la hipótesis (i) del Teorema, $R_0(t) \geq 0$ $(t \in S)$. Además, por la hipótesis (iii) y el Lema 4.1c, existe una subsucesión de $\{z_q\}$ (que no renombramos) tal que

$$\liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0(z_q)}{d_q^2} \geq \frac{1}{2}\int_S \langle v_0(t), F_{0uu}(t, x_0(t), u_0(t))v_0(t)\rangle dt.$$

Como S se puede escoger de tal forma que difiera de T por un conjunto de medida arbitrariamente pequeña y puesto que la función

$$t \mapsto \langle v_0(t), F_{0uu}(t, x_0(t), u_0(t))v_0(t)\rangle$$

pertenece a $L^1(T; \mathbf{R})$, dicha desigualdad se cumple cuando $S = T$, por lo que se establece la desigualdad (7). Este hecho junto con (5) y (6), implican que

$$\frac{1}{2}J''(z_0; (y_0, v_0)) \leq \lim_{q\to\infty} \frac{K_0(z_q)}{d_q^2} + \liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0(z_q)}{d_q^2} = \liminf_{q\to\infty} \frac{J(z_q) - J(z_0)}{d_q^2} \leq 0.$$

Además, si $(y_0, v_0) = (0, 0)$, entonces

$$\lim_{q\to\infty} \frac{K_0(z_q)}{d_q^2} = 0$$

y por (3),

$$\frac{1}{2}h \leq \liminf_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0(z_q)}{d_q^2} \leq 0$$

lo cual contradice la positividad de h.

Para demostrar que $(y_0, v_0) \in Y(z_0)$, sabemos por el Lema 4.1a que existe $S \subset T$ medible tal que

$$A_q(t) \to A_0(t) := f_x(t, x_0(t), u_0(t)) \quad \text{y} \quad B_q(t) \to B_0(t) := f_u(t, x_0(t), u_0(t))$$

ambas uniformemente en S. Dado que $y_q(t) \to y_0(t)$ uniformemente en S y como $\{v_q\}$ converge débilmente a v_0 en $L^1(S; \mathbf{R}^m)$, entonces $\{\dot{y}_q\}$ converge débilmente en $L^1(S; \mathbf{R}^n)$ a $A_0y_0 + B_0v_0$. Por el Lema 4.1b, $\{\dot{y}_q\}$ converge débilmente en $L^1(S; \mathbf{R}^n)$ a $\sigma_0 = \dot{y}_0$. Por lo tanto,

$$\dot{y}_0(t) = A_0(t)y_0(t) + B_0(t)v_0(t) \quad (t \in S).$$

Como S se puede escoger de tal forma que difiera de T por un conjunto de medida arbitrariamente pequeña, no puede existir un subconjunto de T de medida positiva sobre el cual las funciones y_0 y v_0 no satisfagan la ecuación diferencial $\dot{y}_0(t) = A_0(t)y_0(t) + B_0(t)v_0(t)$. Consecuentemente,

$$\dot{y}_0(t) = A_0(t)y_0(t) + B_0(t)v_0(t) \quad \text{(c.t.p. en T)}.$$

Finalmente para demostrar que $I_i'(z_0; (y_0, v_0)) = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$, observemos que para toda $z = (x, u) \in Z_e$ y para toda $i = 1, \ldots, r$,

$$I_i(z) = I_i(z_0) + I_i'(z_0; z - z_0) + K_i(z) + \tilde{\mathcal{E}}_i(z) \tag{8}$$

donde

$$\tilde{\mathcal{E}}_i(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}_i(t, x(t), u_0(t), u(t))dt,$$

$$K_i(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} [M_i(t, x(t)) + \langle u(t) - u_0(t), N_i(t, x(t))\rangle]dt,$$

y las funciones M_i y N_i están dadas por

$$M_i(t, y) := L_i(t, y, u_0(t)) - L_i(t, x_0(t), u_0(t)) - L_{ix}(t, x_0(t), u_0(t))(y - x_0(t)),$$

$$N_i(t, y) := L_{iu}^*(t, y, u_0(t)) - L_{iu}^*(t, x_0(t), u_0(t)).$$

Por el teorema de Taylor, tenemos que

$$M_i(t, y) = \frac{1}{2}\langle y - x_0(t), P_i(t, y)(y - x_0(t))\rangle, \quad N_i(t, y) = Q_i(t, y)(y - x_0(t)),$$

donde

$$P_i(t, y) := 2\int_0^1 (1 - \lambda)L_{ixx}(t, x_0(t) + \lambda(y - x_0(t)), u_0(t))d\lambda,$$

$$Q_i(t, y) := \int_0^1 L_{iux}(t, x_0(t) + \lambda(y - x_0(t)), u_0(t))d\lambda.$$

Dado que $x_q(t) \to x_0(t)$ uniformemente en T, es claro que para toda $i = 0, 1, \ldots, r$,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{M_i(t, x_q(t))}{d_q} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{q\to\infty} N_i(t, x_q(t)) = 0$$

uniformemente en T. Consecuentemente, dado que $\{v_q\}$ converge débilmente a v_0 en $L^1(T; \mathbf{R}^m)$, para toda $i = 0, 1, \ldots, r$,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{K_i(z_q)}{d_q} = 0. \tag{9}$$

Utilizando el hecho de que $J'(z_0; w) = 0$ para toda $w \in Z$, por (2), (5) y (9)

$$0 \geq \limsup_{q\to\infty} \frac{J(z_q) - J(z_0)}{d_q} = \limsup_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0(z_q)}{d_q}.$$

Por (3), $\tilde{\mathcal{E}}_0(z_q) \geq 0$ ($q \in \mathbf{N}$), y así

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0(z_q)}{d_q} = 0.$$

Con esto en mente y por la hipótesis (iv) del teorema, tenemos que

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_i(z_q)}{d_q} = 0 \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{10}$$

Ahora dado que $z_q, z_0 \in Z_e$ entonces $I_i(z_q) = I_i(z_0) = 0$ ($i = 1, \ldots, r$). Por (8), (9) y (10) tenemos que

$$\lim_{q\to\infty} I_i'(z_0; (y_q, v_q)) = 0$$

para toda $i = 1, \ldots, r$. Como $y_q(t) \to y_0(t)$ uniformemente en T y $\{v_q\}$ converge débilmente a v_0 en $L^1(T; \mathbf{R}^m)$,

$$0 = \lim_{q\to\infty} I_i'(z_0; (y_q, v_q)) = I_i'(z_0; (y_0, v_0)) \quad (i = 1, \ldots, r).$$

La demostración está completa. ∎

5 Demostración del Lema 4.1

Para demostrar el Lema 4.1 enunciaremos dos resultados auxiliares cuyos planteamientos y demostraciones están dados en [37].

Sea $L^r_{p\times q} := L^r(T; \mathbf{R}^{p\times q})$ y denotemos por I la matriz identidad de $n \times n$.

5.1 Lema: *Para toda $q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, sea $\Phi_q \in AC(T; \mathbf{R}^{n\times n})$ la solución del problema con valor inicial*

$$\dot{\Phi}(t) = A_q(t)\Phi(t) \ (\textit{c.t.p. en } T), \quad \Phi(t_0) = I$$

donde $A_q \in L^1_{n\times n}$. Si $\int_{t_0}^{t_1} |A_q(t)|dt \leq c_0$ ($q \in \mathbf{N}$) para alguna $c_0 > 0$ entonces $\{\Phi_q\}$ está acotada en $L^\infty_{n\times n}$.

5.2 Lema: *Para toda $q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, sea $\Phi_q^{-1} \in AC(T;\mathbf{R}^{n\times n})$ la solución del problema con valor inicial*

$$\dot{\Phi}^{-1}(t) = -\Phi^{-1}(t)A_q(t) \ (c.t.p.\ en\ T), \quad \Phi^{-1}(t_0) = I$$

donde $A_q \in L^1_{n\times n}$. Si $\int_{t_0}^{t_1} |A_q(t)|dt \leq c_0$ $(q \in \mathbf{N})$ para alguna $c_0 > 0$ entonces $\{\Phi_q^{-1}\}$ está acotada en $L^\infty_{n\times n}$.

Notemos que, por los Lemas 5.1 y 5.2 existe $c_1 > 0$ tal que

$$\text{máx}\{\|\Phi_q\|_\infty, \|\Phi_q^{-1}\|_\infty\} \leq c_1 \quad (q \in \mathbf{N}). \tag{11}$$

Ahora podemos demostrar el resultado auxiliar de la Sección 4.

Demostración del Lema 4.1:

(a): Observemos que $\varphi(c)(2+\varphi(c)) = |c|^2$ $(c \in \mathbf{R}^m)$. Entonces, para toda $q \in \mathbf{N}$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{|v_q(t)|^2}{w_q(t)^2}dt = 1. \tag{12}$$

De esta manera existen $v_0 \in L^2(T;\mathbf{R}^m)$ y una subsucesión de $\{u_q\}$ (que no renombramos) tal que $\{v_q/w_q\}$ converge débilmente a v_0 en $L^2(T;\mathbf{R}^m)$.

Sea $h \in L^\infty(T;\mathbf{R}^m)$. Notemos que, para toda $q \in \mathbf{N}$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle h(t), v_q(t)\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle h(t), \frac{v_q(t)}{w_q(t)} \right\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle h(t)[w_q(t)-1], \frac{v_q(t)}{w_q(t)} \right\rangle dt.$$

Por la desigualdad de Schwarz y (12),

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} \left\langle h(t)[w_q(t)-1], \frac{v_q(t)}{w_q(t)} \right\rangle dt \right|^2 \leq \int_{t_0}^{t_1} |h(t)|^2 [w_q(t)-1]^2 dt.$$

Dado que $w_q(t)^2 \geq w_q(t) \geq 1$ para toda $t \in T$, tenemos que

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} [w_q(t)-1]dt \leq \int_{t_0}^{t_1} [w_q(t)^2 - 1]dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \varphi(u_q(t)-u_0(t))dt = D(u_q - u_0).$$

Notemos también que

$$\int_{t_0}^{t_1} [w_q(t)-1]^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} [w_q(t)^2 - 1]dt - 2\int_{t_0}^{t_1} [w_q(t)-1]dt.$$

Consecuentemente,

$$\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} [w_q(t)-1]^2 dt = 0,$$

y puesto que $h \in L^\infty(T;\mathbf{R}^m)$,

$$\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} |h(t)|^2[w_q(t)-1]^2 dt = 0.$$

Dado que $L^\infty(T;\mathbf{R}^m) \subset L^2(T;\mathbf{R}^m)$,

$$\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \langle h(t), v_q(t)\rangle dt = \lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle h(t), \frac{v_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle h(t), v_0(t)\rangle dt,$$

esto es, $\{v_q\}$ converge débilmente en $L^1(T;\mathbf{R}^m)$ a v_0.

Para demostrar que $u_q(t)$ converge casi uniformemente a $u_0(t)$ en T, sean

$$\|u\|_1 := \int_{t_0}^{t_1} |u(t)|dt \quad (u \in U), \qquad w(t) := \left[1 + \frac{1}{2}\varphi(u(t))\right]^{1/2} \quad (t \in T).$$

Observemos primero que

$$\int_{t_0}^{t_1} 2w(t)^2 dt = 2(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(u(t))dt = 2(t_1 - t_0) + D(u)$$

y

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{|u(t)|^2}{2w(t)^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|u(t)|^2}{2 + \varphi(u(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(u(t))dt = D(u).$$

Por la desigualdad de Schwarz

$$\|u\|_1^2 \le \int_{t_0}^{t_1} \frac{|u(t)|^2}{2w(t)^2} dt \int_{t_0}^{t_1} 2w(t)^2 dt.$$

Con lo cual se obtiene

$$\|u\|_1^2 \le D(u)[2t_1 - 2t_0 + D(u)].$$

Consecuentemente, $\|u_q - u_0\|_1 \to 0$, $q \to \infty$, y entonces alguna subsucesión de $\{u_q\}$ converge puntualmente c.t.p. a u_0. Por el Teorema de Egoroff , esta converge a u_0 casi uniformemente en T.

(b): Denotemos por $(L^2(T;\mathbf{R}^n))'$ el espacio dual de $L^2(T;\mathbf{R}^n)$ y sea $g \in (L^2(T;\mathbf{R}^n))'$. Por el Teorema de Representación de Riesz sabemos que existe una única $u_g \in L^2(T;\mathbf{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\dot{y}_q}{w_q}\right) &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle u_g(t), \frac{\dot{y}_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle A_q^*(t)u_g(t), \frac{y_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle B_q^*(t)u_g(t), \frac{v_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt. \end{aligned}$$

Por (11), la desigualdad de Hölder, y el hecho de que $\{v_q\}$ converge débilmente en $L^1(T;\mathbf{R}^m)$, existe $c_2>0$ tal que, para toda $q\in\mathbf{N}$ y $t\in T$,

$$\begin{aligned}|y_q(t)| &\le |\Phi_q(t)|\int_{t_0}^{t_1}|\Phi_q^{-1}(t)B_q(t)v_q(t)|dt \le \|\Phi_q\|_\infty\cdot\|\Phi_q^{-1}\|_\infty\int_{t_0}^{t_1}|B_q(t)v_q(t)|dt\\ &\le c_1^2\cdot\|B_q\|_\infty\int_{t_0}^{t_1}|v_q(t)|dt \le c_1^2\cdot m_1\cdot c_2.\end{aligned}$$

Entonces existe $c_3>0$ tal que $\|y_q\|_\infty\le c_3$ $(q\in\mathbf{N})$. Por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_0}^{t_1}\left\langle A_q^*(t)u_g(t),\frac{y_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt\right| &\le \int_{t_0}^{t_1}|A_q^*(t)u_g(t)|\cdot|y_q(t)|dt\\ &\le (t_1-t_0)^{1/2}\cdot\|A_q^*\|_\infty\cdot\|u_g\|_2\cdot\|y_q\|_\infty\\ &\le (t_1-t_0)^{1/2}\cdot m_0\cdot\|u_g\|_2\cdot c_3 \quad (q\in\mathbf{N}).\end{aligned}$$

Aplicando otra vez la desigualdad de Hölder y usando (12),

$$\left|\int_{t_0}^{t_1}\left\langle B_q^*(t)u_g(t),\frac{v_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt\right| \le \|B_q^*u_g\|_2\cdot\left\|\frac{v_q}{w_q}\right\|_2 \le \|B_q^*\|_\infty\cdot\|u_g\|_2 \le m_1\cdot\|u_g\|_2$$

para toda $q\in\mathbf{N}$. Por consiguiente $\{g(\dot y_q/w_q)\}_{q\in\mathbf{N}}$ está acotada en $\mathbf{R}$ para toda $g\in(L^2(T;\mathbf{R}^n))'$ y por lo tanto $\{\dot y_q/w_q\}$ está acotada en $L^2(T;\mathbf{R}^n)$. Esto implica la existencia de $c_4>0$ tal que, para toda $q\in\mathbf{N}$,

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{|\dot y_q(t)|^2}{w_q(t)^2}dt \le c_4. \tag{13}$$

Por lo tanto existe una función $\sigma_0\in L^2(T;\mathbf{R}^n)$ tal que alguna subsucesión de $\{\dot y_q/w_q\}$ converge débilmente en $L^2(T;\mathbf{R}^n)$ a σ_0. Concluimos, por una argumento similar al que utilizamos en la demostración de (a), la existencia de una subsucesión de $\{y_q\}$ (que no renombramos) tal que $\{\dot y_q\}$ converge débilmente en $L^1(T;\mathbf{R}^n)$ a σ_0.

Falta demostrar que $y_q(t)\to y_0(t)$ uniformemente en T. Tenemos que

$$y_q(t)=\int_{t_0}^{t}\dot y_q(s)ds \qquad (t\in T,\ q\in\mathbf{N}),$$

y por lo tanto

$$\lim_{q\to\infty} y_q(t)=y_0(t):=\int_{t_0}^{t}\sigma_0(s)ds \qquad \text{puntualmente en } T.$$

Para demostrar que esta convergencia es uniforme observemos que, por (13), dado un conjunto medible $S \subset T$,

$$\left|\int_S \dot{y}_q(t)dt\right|^2 \leq \int_S \frac{|\dot{y}_q(t)|^2}{w_q(t)^2}dt \int_S w_q(t)^2 dt \leq c_4 \int_S w_q(t)^2 dt \qquad (q \in \mathbf{N}).$$

Además,

$$\int_S w_q(t)^2 dt = m(S) + \int_S [w_q(t)^2 - 1]dt \qquad (q \in \mathbf{N}).$$

Dada una constante $\epsilon > 0$, escogemos $q_\epsilon \in \mathbf{N}$ tal que

$$\int_{t_0}^{t_1} [w_q(t)^2 - 1]dt < \frac{\epsilon^2}{2c_4} \qquad (q \geq q_\epsilon).$$

Seleccionemos $0 < \delta < \epsilon^2/2c_4$ tal que

$$m(S) < \delta \Rightarrow \left|\int_S \dot{y}_q(t)dt\right| < \epsilon \qquad (q < q_\epsilon).$$

Notemos que, si $q \geq q_\epsilon$, entonces

$$m(S) < \delta \Rightarrow \left|\int_S \dot{y}_q(t)dt\right|^2 \leq c_4\left(m(S) + \int_{t_0}^{t_1} [w_q(t)^2 - 1]dt\right) < \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2$$

y por consiguiente

$$m(S) < \delta \Rightarrow \left|\int_S \dot{y}_q(t)dt\right| < \epsilon \qquad (q \in \mathbf{N}).$$

En consecuencia, la sucesión de funciones $\{y_q(t)\}$ es equicontinua en T. Consecuentemente, $y_q(t) \to y_0(t)$ uniformemente en T.

(c): Por hipótesis podemos asumir que, para toda $t \in S$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$|R_q(t) - R_0(t)| w_q(t)^2 \leq 1.$$

Por lo tanto

$$M_q := \sup_{t \in S} |R_q(t) - R_0(t)| w_q(t)^2 < \infty \qquad (q \in \mathbf{N}).$$

Usando la desigualdad de Schwarz es fácil ver que, para toda $t \in S$ y $q \in \mathbf{N}$,

$$|R_q(t; v_q(t)) - R_0(t; v_q(t))| \leq M_q \frac{|v_q(t)|^2}{w_q(t)^2}.$$

Dado que $R_q(t) \to R_0(t)$, y $w_q(t) \to 1$, ambas uniformemente en S, tenemos que $M_q \to 0$. Consecuentemente, por (12),

$$\liminf_{q\to\infty} \int_S R_q(t; v_q(t))dt = \liminf_{q\to\infty} \int_S R_0(t; v_q(t))dt.$$

Pero para toda $t \in S$,

$$R_0(t; v_q(t)) = R_0(t; v_0(t)) + 2\langle v_q(t) - v_0(t), R_0(t)v_0(t)\rangle + R_0(t; v_q(t) - v_0(t)).$$

Puesto que $w_q(t) \to 1$ uniformemente en S, es fácil ver que (ver la demostración de (a)) existe una subsucesión de $\{u_q\}$ (denotada igualmente por $\{u_q\}$) tal que $\{v_q\}$ converge débilmente a v_0 en $L^2(S; \mathbf{R}^m)$. Como $R_0 v_0 \in L^2(S; \mathbf{R}^m)$, entonces

$$\lim_{q\to\infty} \int_S \langle R_0(t)v_0(t), v_q(t) - v_0(t)\rangle dt = 0.$$

En consecuencia

$$\liminf_{q\to\infty} \int_S R_q(t; v_q(t))dt = \int_S R_0(t; v_0(t))dt + \liminf_{q\to\infty} \int_S R_0(t; v_q(t) - v_0(t))dt.$$

Dado que el último término es no negativo la demostración está completa. ∎

Referencias

[1] A. A. Agrachev, G. Stefani, and P. L. Zezza, *Strong optimality for a bang-bang trajectory*, SIAM J. Control Optim., 41 (2002), pp. 991-1014.

[2] V. M. Alekseev, V.M. Tikhomirov, and S. V. Fomin, *Optimal Control*, Translated from the Russian by V. M. Volosov, Contemporary Soviet Mathematics, Consultants Bureau, New York, 1987.

[3] D. A. Benson, D. Garg, W. W. Hager, G. T. Hungtington, M. Patterson, and A. V. Rao, *A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods*, Automatica, Accepted for Publication, June 2010, to appear.

[4] D. A. Benson, C. Darby, C. Francolin, G. T. Hungtington, M. Patterson, I. Sanders and A. V. Rao, *Algorithm 902: GPOPS, A MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using the Gauss pseudospectral method*, ACM Transactions on Mathematical Software, 37 No. 2, Article 22 (2010).

[5] L. Cesari, *Optimization - theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[6] F. H. Clarke and V. Zeidan, *Sufficiency and the Jacobi condition in the calculus of variations*, Can. J. Math. **38**, 1199-1209, 1987.

[7] F. H. Clarke, *Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 57, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1989.

[8] M. Edvall, A. Göran, K. Hölstrom, and P. Strandberg, *TOMLAB Models* Tomlab Optimization, Inc. Pullman, WA, 2006.

[9] W. H. Fleming and W. R. Rishel, *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[10] M. R. Hestenes, *Sufficient conditions for the problem of Bolza in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934), pp. 793–818.

[11] M. R. Hestenes, *On sufficient conditions in the problems of Lagrange and Bolza*, Ann. of Math., 37 (1936), pp. 543–551.

[12] M. R. Hestenes, *A direct sufficiency proof for the problem of Bolza in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), pp. 141–154.

[13] M. R. Hestenes, *Sufficient conditions for the isoperimetric problem of Bolza in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc., 60 (1946), pp. 93–118.

[14] M. R. Hestenes, *The Weierstrass E-function in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc., 60 (1947), pp. 51–71.

[15] M. R. Hestenes, *An indirect sufficiency proof for the problem of Bolza in nonparametric form*, Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947), pp. 509–535.

[16] M. R. Hestenes, *Sufficient conditions for multiple integral problems in the calculus of variations*, Amer. J. Math., 70 (1948), pp. 239–276.

[17] M. R. Hestenes, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley, New York, 1966.

[18] G. T. Hungtington and A. V. Rao, *Comparison of global and local collocation methods for optimal control*, Engineering Notes, Journal of Guidance, 31 No. 2 (2008).

[19] P. D. Loewen, *Second-order sufficiency criteria and local convexity for equivalent problems in the calculus of variations*, J. Math. Anal. Appl., 146 (1990), pp. 512–522.

[20] K. Malanowski, *Sufficient optimality conditions for optimal control subject to state constraints*, SIAM J. Control Optim., 35 (1997), pp. 205–227.

[21] K. Malanowski, H. Maurer and S. Pickenhain, *Second order sufficient conditions for state-constrained optimal control problems*, J. Optim. Theory Appl., 123 (2004), pp. 595–617.

[22] H. Maurer and J. Zowe, *First and second-order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems*, Math. Prog., 16 (1979), pp. 98–110.

[23] H. Maurer and S. Pickenhain, *Second order sufficient conditions for control problems with mixed control-state constraints*, J. Optim. Theory Appl., 86 (1995), pp. 649–667.

[24] H. Maurer and H. J. Oberle, *Second order sufficient conditions for optimal control problems with free final time: the Riccati approach*, SIAM J. Control Optim., 41 (2002), pp. 380–403.

[25] D. Q. Mayne, *Sufficient conditions for a control to be a strong minimum*, J. Optim. Theory Appl., 21 (1977), pp. 339–351.

[26] E. J. McShane, *Sufficient conditions for a weak relative minimum in the problem of Bolza*, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), pp. 344–379.

[27] A. A. Milyutin and N. P. Osmolovskiĭ, *Calculus of Variations and Optimal Control*, Translations of Mathematical Monographs **180**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[28] D. Orrel, and V. Zeidan, *Another Jacobi sufficiency criterion for optimal control with smooth constraints*, Journal of optimization theory and applications, 58 (1988), pp. 283-300.

[29] S. Pickenhain, and K. Tammer, *Sufficient conditions for local optimality in multidimensional control problems with state restrictions*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwndungen, 10 (1991), pp. 397-405.

[30] S. Pickenhain, *Sufficient conditions for weak local minima in multidimensional optimal control probles with mixed control-state restrictions*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwndungen, 11 (1992), pp. 559-568.

[31] J. F. Rosenblueth, *Variational conditions for the Lagrange problem with linear dynamics*, Aportaciones matemáticas - Serie comunicaciones, 18 (1996), pp. 155-170.

[32] J. F. Rosenblueth, *Jacobi's conditions for the Lagrange problem with linear dynamics*, Aportaciones matemáticas - Serie comunicaciones, 18 (1996), pp. 125-138.

[33] J. F. Rosenblueth, *Sufficiency and conjugate points for the Lagrange problem*, Aportaciones matemáticas - Serie comunicaciones, 18 (1996), pp. 139-153.

[34] J. F. Rosenblueth, *Variational conditions and conjugate points for the fixed-endpoint control problem*, IMA J. Math. Control Inform., 16 (1999), pp. 147–163.

[35] J. F. Rosenblueth and G. Sánchez Licea, *Strengthening Weierstrass' condition*, IMA J. Math. Control Inform., 21 (2004), pp. 275-294.

[36] J. F. Rosenblueth and G. Sánchez Licea, *A new sufficiency theorem for strong minima in the calculus of variations*, Appl. Math. Lett., 18 (2005), pp. 1239-1246.

[37] J. F. Rosenblueth and G. Sánchez Licea, *A direct sufficiency proof for a weak minimum in optimal control*, Appl. Math. Sci., 4 (2010), pp. 253-269.

[38] J. F. Rosenblueth and G. Sánchez Licea, *Sufficient variational conditions for isoperimetric control problems*, Int. Math. Forum, 6 (2011), pp. 303-324.

[39] P. Rutquist and M. Edvall, *PROPT: MATLAB Optimal control software* Tomlab Optimization, Inc. Pullman, WA, 2008.

[40] G. Stefani and P. L. Zezza, *Optimality conditions for a constrained optimal control problem*, SIAM J. Control Optim., 34 (1996), pp. 635–659.

[41] G. Sánchez Licea, *Weakening the strengthened condition of Weierstrass for the isoperimetric problem in the calculus of variations*, IMA J. Math. Control Inform., 25 (2008), pp. 59-74.

[42] G. Sánchez Licea, *Sufficiency by a direct method in the variable state problem of calculus of variations: singular extremals*, IMA J. Math. Control Inform., 26 (2009), pp. 257-279.

[43] V. Zeidan, *Sufficiency conditions with minimal regularity assumption*, Mathematics and Optimization, 20 (1989), pp. 19-31.