



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA DE LOS MOMENTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

ÁLVARO REYES GARCÍA



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO MARCOS LÓPEZ GARCÍA
2011**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Reyes

García

Álvaro

53 95 72 49

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

303784724

2. Datos del tutor

Dr.

Francisco Marcos

López

García

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Ana

Meda

Guardiola

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Magali Louise Marie

Folch

Gabayet

5. Datos del sinodal 3

M. en C.

Ángel Manuel

Carrillo

Hoyo

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

José Antonio

Gómez

Ortega

7. Datos del trabajo escrito

El Problema de los Momentos

xiv + 71 pp.

2011

EL PROBLEMA DE LOS MOMENTOS

ALVARO REYES GARCÍA

Cd. Universitaria, a 18 de febrero de 2011

Prólogo

A ti, amable lector, agradezco infinitamente que hayas abierto estas páginas para ver lo que en ellas se ha escrito: un trabajo que ofrece una visión panorámica del Problema de los Momentos y cuyo principal objetivo es profundizar en este último y mostrar un análisis de los resultados clásicos y modernos que a lo largo de los años se han obtenido. Discusiones más detalladas se pueden hallar en los trabajos de Akhiezer ([1]), Berg ([5]), Hoff ([37]), López-García ([51]) y Shohat & Tamarkin ([64]).

A más de un siglo del nacimiento del Problema de los Momentos en las manos de Stieltjes, nos dimos a la tarea de recopilar información relacionada para poder redactar este trabajo que representa mi tesis de licenciatura. Son muchas las mentes que se han enfocado en resolver problemas de momentos y muchos los trabajos que se han escrito; en algunos de ellos nos apoyamos para producir este texto.

Entre las técnicas más importantes que se han ocupado para resolver el Problema de los Momentos destacan las siguientes:

1. Fracciones Continuas y sus Teoremas de Convergencia. Este método fue desarrollado por Stieltjes en [66] y posteriormente usado por Hamburger en [33].
2. Principio de Selección de Helly. Fue aplicado por Grommer en [30] y por Hamburger en [33].
3. Análisis Funcional. Hausdorff en [35] y M. Riesz en [61] lo ocuparon, y en el segundo capítulo se utiliza para estudiar el Problema de los Momentos de Hausdorff.
4. Teoría de las Funciones Analíticas. Esta herramienta fue usada por Nevanlinna en [54], y presentamos parte de su trabajo en el Capítulo 5.
5. Análisis Armónico y Análisis de Fourier. Fueron usados recientemente por Lin en [46] y por López-García en [28, 48, 49, 50]. Lin trabajó con el Criterio de Krein, consiguiendo hacer una demostración corta y desarrollando un nuevo criterio. López-García caracterizó familias de funciones que son solución a problemas de momentos. Algunos resultados importantes relacionados con lo anterior aparecen en el Capítulo 3.

Sobre la Vida de Stieltjes

Stieltjes ingresó a la Escuela Politécnica de Delft en 1873, sin embargo sus notas no eran buenas lo que provocó que su padre lo enviara al observatorio de Leiden, donde comenzó a trabajar como asistente bajo la supervisión de H.G. van de Sande-Bakhuyzen en abril de 1877.

El 8 de noviembre de 1882 Stieltjes inicia correspondencia con Hermite (ver [36]), misma que sostendría hasta el día de su muerte (este lapso duró poco más de 12 años, tiempo en que intercambiaron 432 cartas). Posiblemente sea éste el evento más importante en la vida de Stieltjes como matemático. Inicialmente, las cartas estaban relacionadas con su trabajo sobre Mecánica Celeste, sin embargo estas tornarían rápidamente hacia la Matemática.

Stieltjes se casó en 1883 con Elizabeth Intveld, quien lo convenció de abandonar el observatorio para que pudiera dedicarse a las ciencias. Así, Stieltjes comenzó a ejercer como profesor de la Universidad de Delft enseñando Geometría Analítica y Geometría Descriptiva, y en diciembre de ese año renunció a su empleo en el observatorio.

En enero de 1884 Stieltjes aplicó para una posición en Groningen, sin embargo fue descartado por carecer de un grado universitario. Esto molestó a Hermite, quien junto con Bierens de Haan trabajó en un plan para proponer a Stieltjes para un grado honorario por la Universidad de Leiden.

Se acordó asignarle a Stieltjes el grado de *doctor honoris causa* el 17 de junio de 1884, pero éste no se presentó a la ceremonia pública debido a un malentendido. Stieltjes se mudó con su familia a París en abril de 1885. Recibió su doctorado en ciencias en 1886 con una tesis sobre series semi-convergentes ([67]) y ese mismo año fue asignado a la Universidad de Toulouse, siendo nombrado para una cátedra de Cálculo Diferencial e Integral en 1889.



Figura 1: Thomas Jan Stieltjes

Fracciones Continuas y el Problema de los Momentos

El trabajo de Stieltjes ([66]) se dedica al estudio de la convergencia de fracciones continuas de la forma

$$f(z) = \frac{1}{a_1 z + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{a_2 z + \frac{1}{b_2 + \dots}}}}. \quad (1)$$

Es probable que Stieltjes se haya interesado por esto a raíz de las series divergentes de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{x^n}, \quad (2)$$

ya que, como se verá más adelante, es posible relacionar una fracción continua de la forma (1) con una serie divergente de la forma (2).

En 1821 Cauchy menciona que no tiene sentido hablar de la suma de una serie divergente, lo cual ocasionó que los matemáticos se volvieran cautelosos con la manipulación de series. A pesar de esto, en ramas de la física como la Mecánica Celeste aparecen seguido las series divergentes. En su tesis doctoral, Stieltjes hace un estudio profundo sobre las series de la forma (2) que surgen naturalmente en el cálculo de las integrales definidas

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(au)}{1+u^2} du, \quad \int_0^{\infty} \frac{u \cos(au)}{1+u^2} du, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Desde 1748 Euler sabía que una serie infinita puede ser transformada en una fracción continua y viceversa, por lo cuál era sensato considerar la posibilidad de ligar a las series divergentes de la forma (2) al estudio de las fracciones continuas. El primero en señalar este hecho fue Laguerre en [43] cuando integró por partes la siguiente integral

$$I(x) = \int_x^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt, \quad \text{con } x > 0,$$

y obtuvo

$$I(x) = e^{-x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \right] + (-1)^n n! \int_x^{\infty} t^{-n-1} e^{-t} dt,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Si continuamos integrando por partes lo anterior, obtenemos una serie divergente para toda $x > 0$. Sin embargo, es posible poner a $e^x I(x)$ como una fracción continua

convergente:

$$I(x) = e^{-x} \frac{1}{x+1 - \frac{1}{x+3 - \frac{1}{(x+5)/4 - \frac{1/4}{(x+7)/9 - \dots}}}}.$$

Así como en el ejemplo previo, Stieltjes desarrolló a finales de 1880 varias integrales convirtiéndolas en fracciones continuas de la forma (1) con $a_n, b_n > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora denotamos al n -ésimo aproximante de una fracción continua (1) por

$$f_n(z) = \frac{1}{a_1 z + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{a_2 z + \frac{1}{b_2 + \dots + a_n z + \frac{1}{b_n}}}}}, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Dicha fracción puede ser expresada como

$$f_n(z) = \frac{T_n(z)}{U_n(z)},$$

donde T_n, U_n son polinomios con coeficientes reales (ver [51]). Stieltjes demostró que si se tiene $a_n, b_n > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces las sucesiones de los aproximantes pares $\{f_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ y de los aproximantes impares $\{f_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ convergen en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, y así podemos asegurar la existencia de dos funciones holomorfas $F_0, F_1 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$F_0(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{2n}(z)}{U_{2n}(z)}, \quad F_1(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{2n-1}(z)}{U_{2n-1}(z)}.$$

Al demostrar este resultado, Stieltjes descubrió lo que hoy conocemos como el *Teorema de Stieltjes-Vitali* para sucesiones de funciones holomorfas definidas en una región del plano complejo. Más aún, Stieltjes halló la forma analítica de las funciones límite F_0, F_1 : obtiene que $F_0 \equiv F_1$ si

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \infty. \quad (3)$$

Es claro que $F_0 \equiv F_1$ es equivalente a la convergencia de la fracción continua en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Además, la fracción converge uniformemente sobre subconjuntos compactos, a pesar de que los polinomios T_n y U_n constituyan sucesiones divergentes. Para concluir, Stieltjes muestra la existencia de una función monótona creciente $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_0(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi(t)}{z+t}.$$

Si la serie en (3) converge, entonces $F_0(z) \neq F_1(z)$ para toda $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ y la fracción continua diverge para toda $z \in \mathbb{C}$. Además, existen las siguientes funciones enteras

$$t_0(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{2n}(z), \quad u_0(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n}(z),$$

$$t_1(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{2n+1}(z), \quad u_1(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+1}(z).$$

Para ser precisos, t_0 , u_0 , t_1 y u_1 son productos infinitos con ceros simples:

$$t_0(z) = c \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{l_i}\right), \quad u_0(z) = c' \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m_i}\right),$$

donde $-l_i$ y $-m_i$ son las raíces de t_0 y de u_0 respectivamente. Además se satisface que

$$0 < l_i < m_i < l_{i+1}, \text{ para toda } i \geq 1.$$

Se puede dar una representación análoga para t_1 y u_1 . Entonces podemos desarrollar a t_0/u_0 y a t_1/u_1 en fracciones simples como sigue

$$\frac{t_0(z)}{u_0(z)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i}{z + m_i}, \quad \frac{t_1(z)}{u_1(z)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i}{z + n_i},$$

donde M_i y N_i son números positivos y $-n_i$ representa a las raíces de u_1 , para toda $i \geq 1$. Stieltjes introdujo una función monótona decreciente definida en el semieje positivo dada por

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} M_j \right) \chi_{(m_{i-1}, m_i)}(x),$$

donde $m_0 = 0$. Posteriormente definió la integral

$$\int_a^b f(x) d\varphi_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\varphi_0(x_i) - \varphi_0(x_{i-1})),$$

donde

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad \text{y } x_{i-1} < x_i,$$

y los ξ_i representan una selección de puntos intermedios para toda $i = 1, \dots, n$. Es así como nació en ese momento un nuevo ente matemático: *la integral de Riemann-Stieltjes*. Haciendo uso de este concepto se puede ver que

$$F_0(z) = \frac{t_0(z)}{u_0(z)} = - \int_0^{\infty} \frac{d\varphi_0(t)}{z + t}.$$

Análogamente existe una función monótona decreciente φ_1 definida en el semieje positivo que cumple

$$F_1(z) = \frac{t_1(z)}{u_1(z)} = - \int_0^{\infty} \frac{d\varphi_1(t)}{z + t}.$$

A partir de una carta que Stieltjes envía a Hermite, se deduce que Stieltjes introduce su integral con el propósito de determinar la forma analítica de una fracción continua de la forma (1).

En cualquier caso, Stieltjes muestra que existe una sucesión de números positivos $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que la serie de potencias de F_0 y F_1 , y la fracción continua (1) comparten la siguiente expansión asintótica

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i s_i}{z^{i+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

cuando $|z|$ tiende a infinito. Tomamos la representación analítica de F_0 y de F_1 , y la siguiente igualdad

$$\frac{1}{z+t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^i}{z^{i+1}},$$

para obtener en un caso

$$-\int_0^{\infty} t^i d\varphi_0(t) = -\int_0^{\infty} t^i d\varphi_1(t) = s_i,$$

y en el otro que

$$\int_0^{\infty} t^i d\psi(t) = s_i,$$

para toda $i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Con esto se concluye que el Problema de los Momentos de Stieltjes relacionado con $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene solución (ver Definición 1.2, con $I = (0, \infty)$).

Aplicaciones

Si el lector desea profundizar sobre la Teoría de las Fracciones Continuas, puede consultar [38]. Existen artículos recientes que hablan de las condiciones de convergencia de fracciones vectoriales, como por ejemplo [15]. Las fracciones continuas son actualmente ocupadas en varias áreas de la ciencia. En el artículo de Muller ([53]) se presentan aplicaciones de éstas en Ingeniería Mecánica, Física Nuclear y Astrofísica. Otra aplicación impresionante y que no podemos dejar de mencionar se da en el contexto de la Teoría de Nudos: En 1970 Conway (ver [22]) asoció una fracción continua a cada ovillo racional y demostró lo que se conoce como el Teorema Básico de Conway sobre ovillos racionales, el cual nos dice que dos ovillos racionales son topológicamente equivalentes si y sólo si están asociados a la misma fracción continua. Lo anterior puede ser aplicado a la Biología Molecular, en lo que se refiere al estudio de la recombinación del ADN (ver [27, 40]).

Después de que Stieltjes trabajó el Problema de los Momentos con fracciones continuas, se intentó extender esta teoría. Ejemplo de esto son Edward Van Vleck (ver [75]), quien conjeturó que no era posible establecer una extensión, y Grommer ([30]) quién usó el principio de selección de Helly para obtener resultados que refutaban lo anterior. De hecho en [33] Hamburger

se apoya en el método de Grommer, en las fracciones continuas y en la teoría de la integral de Stieltjes para estudiar el Problema de los Momentos en todo el eje real.

Durante el transcurso de los años, el Problema de los Momentos ha formado parte de varias ramas de la Matemática. Uno de los ejemplos que presentamos a continuación tiene un lugar importante en la *Teoría del Control* y fue estudiado recientemente por Choque en [20]. Si bien el Problema de los Momentos surgió hace más de cien años, lo anterior es una prueba clara de que éste no ha sido olvidado ni desechado por los matemáticos actuales. Es un problema que llegó para quedarse, para ser contemplado y analizado en los años siguientes, y que seguramente aún tiene mucho que darnos.

En [20] se muestra cómo resolver el *Problema del Control Admisible* para el caso particular

$$A = (\delta_{ij+1})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad b = (1, 0, \dots, 0)^T$$

utilizando el *Problema de los Momentos de Hausdorff*. Para esto se ocupan algunos conceptos descritos en [20] y [41, Teorema A6, Teorema A7] (entre las cuales está la fórmula de inversión de Stieltjes-Perron).

Ahora consideramos un espacio de probabilidad (Ω, F, \mathbb{P}) y $X : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ una función integrable. La función de distribución de X está dada por

$$F(x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}).$$

Supongamos además que F es una función absolutamente continua, es decir, existe una función integrable no negativa f con soporte en $[0, \infty)$ tal que

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

y decimos que f es la función de densidad de X . Sea $\widehat{X} : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ una función medible con la siguiente función de distribución:

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}_+} x f(x) dx} \int_0^x t f(t) dt.$$

A \widehat{X} se le conoce como la versión medida de X . Se sabe que \widehat{X} representa el tiempo de vida total estacionario en un proceso de renovación con tiempo de vida genérico X (ver [23, Capítulo 5]).

Estas funciones son aplicables en distintas áreas del conocimiento, como Biometría, Ecología, Ciencias Ambientales, Análisis de Seguridad y Supervivencia (ver [45]).

En [55] Pakes y Khattree se preguntan si es posible reescalar aleatoriamente el tiempo de vida total para recuperar la ley del tiempo de vida. Esto es, dada $V \geq 0$ una función medible,

definida sobre Ω , independiente (en el sentido probabilístico) de X y tal que $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | V(\omega) > 0\}) > 0$. ¿Cuándo coincide la función de distribución F con la función de distribución $V\widehat{X}$?

Pakes da una respuesta en [56] cuando se trata de una función V constante. Si suponemos que $V \equiv q \in (0, 1)$, entonces sólo basta caracterizar las funciones integrables f que satisfacen la ecuación funcional

$$\int_0^x f(y)dy = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}_+} xf(x)dx} \int_0^{x/q} yf(y)dy.$$

Ocupando el *Teorema de Diferenciación de Lebesgue*, reducimos lo anterior a la igualdad

$$qf(qx) \int_0^\infty xf(x)dx = xf(x), \text{ c.d.s. } x > 0.$$

Usando el Teorema 3.6 del Capítulo 3 de este texto, podemos caracterizar a las densidades f que son solución de la ecuación funcional anterior.

En [10], Bertoin, Biane y Yor analizan una función integrable Y que surge en el estudio de funciones exponenciales de procesos de Poisson; ahí se muestra que $\int Y d\omega = q^{-1}$ y que las funciones de densidad de $q\widehat{Y}$, de Y y de $q^{-1}Y^{-1}$ coinciden. Cabe mencionar que este trabajo tiene conexión con un modelo probabilístico de la duplicación del ADN, así como con la existencia de una medida invariante relacionada con un Protocolo de Control de Transmisión.

Y es a partir de lo anterior, que en 2010 se presenta la caracterización en [48] de las funciones integrables positivas X , que tienen una función de densidad que es igual a la de $q\widehat{X}$ y a la de $q^{-1}X^{-1}$. La demostración está basada en el Teorema 3.6 del Capítulo 3.

Expreso mi más sincero agradecimiento al Dr. Marcos López García quién durante 13 meses estuvo dirigiendo este trabajo y compartiendo su amplio conocimiento. Además, hago una mención especial al Dr. Abdón Choque Rivero, a quién conocí en la XI Escuela de Verano en Morelia, Mich. y nos mostró una aplicación muy interesante del Problema de los Momentos en la Teoría del Control.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	1
1.2. Temas a Desarrollar	6
2. El Problema de los Momentos de Hausdorff	9
2.1. Existencia	11
2.2. Unicidad	17
3. Densidad Log-Normal y Stieltjes-Wigert	19
3.1. El Problema de los Momentos de la Densidad Log-Normal	20
3.2. El Problema de los Momentos de Stieltjes-Wigert	24
3.3. Soluciones no Periódicas	29
4. El Criterio de Krein-Lin	33
4.1. El Teorema de Krein	33
4.2. El Teorema de Lin	35
4.3. Aplicaciones	38
5. Los Teoremas de Hamburger, Stieltjes y Nevanlinna	43
5.1. Los Teoremas de Hamburger y Stieltjes	44

5.2. La Parametrización de Nevanlinna	48
A. Análisis de Aproximación	53
A.1. Los Polinomios de Bernstein	53
A.2. Teorema de Aproximación de Weierstrass	55
A.3. Productos Infinitos	56
B. Teoría de la Medida	59
B.1. Teorema de la Convergencia Monótona	59
B.2. Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue	60
B.3. Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym	61
B.4. Teorema de Diferenciación de Lebesgue	62
C. Análisis Funcional	63
C.1. Teorema de Extensión de Hahn-Banach	63
C.2. Teorema de Representación de Riesz	64
C.3. Teorema de Gram-Schmidt	65

A Juan Pablo Rodríguez,
nada está dicho hasta no caído
el *out 27*.

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo hacemos un análisis detallado sobre algunos resultados relacionados con el Problema de los Momentos. Es tema a tratar en este breve capítulo introductorio el origen de este bello problema que sin lugar a duda dio mucho de qué hablar en el siglo pasado y que ha caído en manos de incontables personas.

También se puede apreciar un resumen de esta tesis en la Sección 1.2, donde se especifica cada uno de los resultados y tópicos a desarrollar, ya que es importante tener una idea general y detallada de las incógnitas que se han generado a raíz del Problema de los Momentos y cómo se han ido esclareciendo.

Los preliminares aparecen al final y son herramienta imprescindible a lo largo de las líneas aquí escritas.

1.1. Planteamiento del Problema

Comenzamos este trabajo dando a conocer cuál es el problema a estudiar y cuál es su historia. Así aparece la primera definición.

Definición 1.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente.*

- *Para cada $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ introducimos el n -ésimo momento de F como sigue:*

$$s_n(F) = \int_I x^n dF,$$

siempre que esta integral de Riemann-Stieltjes exista.

- Suponiendo que $s_n(F) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$, decimos que $\{s_n(F)\}_{n=0}^\infty$ es la sucesión de momentos (finita) de F .

Podemos extender la definición anterior a funciones de variación acotada. Más aún, es posible definir el n -ésimo momento de una carga (medida con signo) μ definida sobre los borelianos de I como sigue:

$$s_n(\mu) = \int_I x^n d\mu.$$

En particular, cuando μ es absolutamente continua con $d\mu = f dx$, $f \in \mathcal{L}^1(I)$, tenemos

$$s_n(\mu) = \int_I x^n f(x) dx := s_n(f).$$

Definición 1.2. Sea $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números reales. El problema de momentos relacionado con la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ consiste en encontrar una función monótona creciente $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ cuya sucesión de momentos coincida con la sucesión dada, es decir,

$$s_n(F) = s_n, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1)$$

Si existe tal función F , entonces decimos que F es una solución al problema de momentos (relacionado con la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^\infty$).

Es evidente que podemos extender esta definición a funciones de variación acotada, a cargas o a funciones en $\mathcal{L}^1(I)$.

A partir de esto surgen algunas interrogantes:

1. ¿Existe algún criterio para establecer la existencia de soluciones a un problema de momentos?
2. En caso de que un problema de momentos tenga solución, ¿ésta es única? ¿existe algún criterio para poder determinar la unicidad o bien, la no unicidad de la solución?
3. ¿Es posible caracterizar todas las soluciones de un problema de momentos?

El propósito de este trabajo es precisamente dar respuesta a lo anterior. Notamos que en las preguntas 1 y 2 se mencionan dos aspectos fundamentales: existencia y unicidad.

El intervalo de integración juega un papel importante; más adelante mostramos que si un problema de momentos sobre un intervalo finito tiene solución, ésta es única. Sin embargo, esto cambia al escoger un dominio de integración infinito, por ejemplo $(0, \infty)$ o $(-\infty, \infty)$.

Definición 1.3. ■ *Supongamos que el problema de momentos relacionado con la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ tiene solución. Decimos que el problema es determinado si la solución es única. En caso contrario, decimos que es indeterminado.*

- *Sea F una función monótona creciente con sucesión de momentos finita $\{s_n(F)\}_{n=0}^{\infty}$. Decimos que F es (in)determinada si el problema de momentos asociado a $\{s_n(F)\}_{n=0}^{\infty}$ es (in)determinado.*

Si bien el Problema de los Momentos nace en la última década del siglo XIX en las manos de Stieltjes (ver [66]), como una herramienta o un medio para hacer un análisis del comportamiento de las fracciones continuas, ya en 1874 Chebyshev (ver [16, 17]), inspirado en un trabajo del francés Bienaymé (ver [11]), estudió el problema de cómo acotar el valor de cierta integral

$$\int_I f(x)dx,$$

si se conocen los valores de

$$\int_J f(x)dx, \int_J xf(x)dx, \dots, \int_J x^n f(x)dx,$$

donde $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo que contiene a I .

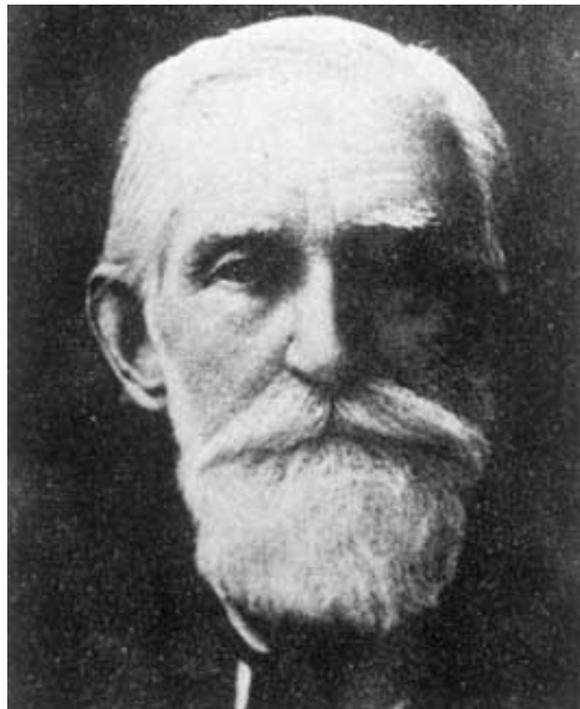


Figura 1.1: Pafnuti Lvóvich Chebyshev

En sus últimos años de vida, Stieltjes sostiene correspondencia con Hermite (ver [36]). Ahí aparecen reflejados el interés y la pasión que las fracciones continuas despertaban en Stieltjes. En sus cartas jamás habla acerca del Problema de los Momentos. Sin embargo, en septiembre de 1893 muestra un asombroso descubrimiento que hizo el año previo: que las fracciones continuas dan lugar a funciones f no nulas que satisfacen la ecuación

$$\int_0^{\infty} x^n f(x) dx = 0, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}_0.$$

Además nota que si el intervalo de integración es $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}_0,$$

si y sólo si f es la función nula. En el año de 1894, Stieltjes escribe el artículo *Recherches sur les Fractions Continues* ([66]), donde estudia la convergencia de las fracciones continuas y establece un vínculo con el Problema de los Momentos. Cabe mencionar, que en conexión con el estudio de este problema, es que inventa la integral que lleva su nombre.

El Problema de los Momentos de Stieltjes es el que aparece en la Definición 1.2, tomando como dominio de integración el intervalo $(0, \infty)$.

En 1919, el matemático alemán Hamburger (ver [32, 33]) introduce la extensión del Problema de los Momentos a todo el eje real — con $I = \mathbb{R}$ —, teniendo como principal objetivo determinar la convergencia o divergencia de las fracciones continuas. Hamburger se inspira en un criterio descubierto por Perron (ver [59]), mediante el cuál se puede decidir si el Problema de los Momentos (de Stieltjes) relacionado con una fracción continua dada es determinado o no, ocupando sólo los elementos de la sucesión.

La investigación del Problema de los Momentos inmerso en la Teoría de las Fracciones Continuas concluye con Hamburger.

En 1920, Hausdorff resuelve casi por accidente el Problema de los Momentos para el intervalo $[0, 1]$. Es así como esta versión del problema lleva ahora su nombre.

Cuando Hausdorff trabajaba con métodos de sumabilidad y examinaba operaciones matriciales, tropezó con la solución para este problema. Sobre lo primero, escribe dos artículos en 1921 bajo el título de *Summationsmethoden und Momentfolgen I/II* ([34]), y dos años después presenta *Momentprobleme für ein endliches Intervall* ([35]). En este trabajo, como el título indica, el objeto de estudio es un problema de momentos, cuyo dominio de integración es un intervalo finito. Ahí aparece una caracterización para las soluciones de este problema, en la primera parte del Capítulo 2 presentamos el resultado anterior desde una perspectiva actual usando Análisis Funcional.

Los Problemas de los Momentos de Stieltjes y Hamburger se separan de las fracciones continuas en el texto de Nevanlinna *Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und*

das *Stieltjessche Momentproblem* ([54]) publicado en 1922. Este trabajo se basa en los resultados hallados por Hamburger.

Nevanlinna examina las condiciones que una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ debe satisfacer para que se dé la existencia de un holomorfismo f del semiplano superior al semiplano inferior que cumpla

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}},$$

si $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$, o bien $-\pi + \delta \leq \arg z \leq -\delta$ para cierto $\delta > 0$, y concluye que tales sucesiones deben ser solución a un problema de momentos de Hamburger. La aportación más importante de Nevanlinna es la fórmula para describir todas las soluciones de un problema de momentos indeterminado.

En el año de 1923 M. Riesz (ver [60, 61]), inspirado en el Teorema de Representación de su hermano, resuelve el problema propuesto por Hamburger. Aquí podemos apreciar como el Problema de los Momentos se conecta con el Análisis Funcional.

Se puede decir que Nevanlinna y Riesz desligaron al Problema de los Momentos de las Fracciones Continuas y éste navegó hasta otros mares de las Matemáticas (Teoría de las Funciones Complejas y Análisis Funcional) distanciándose de su origen.



Figura 1.2: Marcel Riesz

1.2. Temas a Desarrollar

El primer resultado que presentamos es la caracterización de las soluciones al Problema de los Momentos de Hausdorff. Esto es, un problema de momentos en el intervalo $[0, 1]$ tiene solución en $NBV[0, 1]$ (el conjunto de funciones normalizadas con variación acotada en $[0, 1]$) si y sólo si la suma de las imágenes de los polinomios de Bernstein bajo una funcional lineal de momentos (que más adelante introduciremos) asociada a la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ es uniforme y absolutamente acotada. Es bien sabido por los trabajos de Felix Hausdorff que un problema de momentos tiene solución monótona creciente si y sólo si $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ es completamente monótona.

La demostración se apoya en el *Teorema de Extensión de Hahn-Banach* y en el *Teorema de Representación de Riesz*. Damos una demostración de la unicidad de las soluciones basada en el *Teorema de Aproximación de Weierstrass*. Por lo tanto el Problema de los Momentos de Hausdorff es determinado.

En el tercer capítulo abordamos el Problema de los Momentos de Stieltjes. El objeto de estudio de la Sección 3.1 es la llamada función de densidad log-normal

$$d_{\sigma}(x) = \frac{e^{(\ln x)^2/(2\sigma^2)}}{x\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad x > 0,$$

con $\sigma > 0$ fijo. Haciendo un sencillo cálculo, se puede corroborar que

$$s_n(d_{\sigma}) = q^{-n^2/2}, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{Z},$$

donde $q = e^{-\sigma^2}$. Si tomamos $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \text{sen}(2\pi\sigma^{-2} \ln x),$$

y calculamos la sucesión de momentos de $d_{\sigma}f$ obtenemos que

$$s_n(d_{\sigma}f) = 0, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{Z},$$

entonces concluimos que d_{σ} tiene la misma sucesión de momentos que $(1 + af)d_{\sigma}$ donde $a \in \mathbb{R}$. A lo anterior se le conoce como el ejemplo de Stieltjes (ver [66]).

Si nos adentramos en el texto, encontraremos algunos criterios para decidir cuando un problema de momentos es (in)determinado, o bien, para asegurar la existencia de alguna solución. En el Capítulo 4 se hace mención de la *Condición de Carleman* (ver [14, 64]), un criterio presentado en 1926. Dicho enunciado otorga una condición suficiente para que un problema de momentos tenga una solución única. Esta condición tiene versiones tanto para el Problema de los Momentos de Hamburger como para el de Stieltjes.

Sin embargo, en esta parte del texto, el tema central es el *Criterio de Krein-Lin*. En 1945 Krein (ver [41]) proporcionó una condición suficiente para que una función f sea indeterminada.

Su criterio consiste en analizar la llamada integral logarítmica de Krein de f . Si dicho valor es finito, entonces el problema de momentos asociado a f es indeterminado. La demostración que se presenta en este texto es elegante y corta y la dio Lin (ver [46]) en 1997; él utilizó la teoría del espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}_+^2)$ en el semiplano superior.

El *Teorema de Lin* es la contraparte de lo anterior: si la integral logarítmica de Krein de f diverge, junto con el hecho que f decrece a cero y $-xf(x)/f(x)$ crece a infinito cuando x es suficientemente grande, se concluye que f es determinada.

Al igual que con la *Condición de Carleman*, los teoremas anteriores son aplicables tanto al intervalo $(0, \infty)$ como a \mathbb{R} . Lo único que cambia es que en el primer caso, la integral logarítmica de Krein se aplica a la función $f(x)$, y en el segundo a $f(x^2)$.

En la primera parte del Capítulo 5 aparecen los *Teoremas de Hamburger y de Stieltjes*. El primero nos dice que una condición necesaria y suficiente para asegurar la existencia de una solución al Problema de los Momentos de Hamburger, relacionado con la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^\infty$, es que la n -ésima matriz de Hankel

$$D_n = (s_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n}$$

sea positiva definida para toda $n \in \mathbb{N}_0$. En el caso de Stieltjes, se pide además que $(s_{i+j+1})_{0 \leq i, j \leq n}$ sea positiva definida. Por ejemplo, si tomamos

$$\{s_n\}_{n=0}^\infty = \{\alpha^n\}_{n=0}^\infty \quad \text{o bien,} \quad \{s_n\}_{n=0}^\infty = \{\alpha^{-n}\}_{n=0}^\infty,$$

donde $\alpha > 0$ y sustituimos los elementos de la sucesión en la n -ésima matriz de Hankel D_n , se puede concluir que el problema de momentos relacionado con $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ no tiene solución ni en el caso de Stieltjes, ni en el de Hamburger, ya que cada uno de los renglones es un múltiplo del primero.

En la Sección 5.2 las matrices de Hankel juegan un papel muy importante, pues nos ayudan a construir un sistema ortonormal de polinomios en el espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$.

Si una sucesión $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ es tal que el problema de momentos relacionado es indeterminado, es fácil ver que el conjunto $\mathcal{V}(\{s_n\}_{n=0}^\infty)$ de todas las medidas que son solución, es infinito. En [54] Rolf Nevanlinna consigue describir a $\mathcal{V}(\{s_n\}_{n=0}^\infty)$ mediante la Teoría de las Funciones Complejas. Ocupamos los polinomios ortonormales y los llamados polinomios de la segunda clase para describir a todas las soluciones, lo que da lugar a la llamada Parametrización de Nevanlinna.

Capítulo 2

El Problema de los Momentos de Hausdorff

Los trabajos de Felix Hausdorff datan de la década de los veinte del siglo pasado y son nuestro punto de arranque en el análisis del Problema de los Momentos. La versión que damos aquí no es la primera conocida.

El lector puede observar que este capítulo consta de dos partes: existencia y unicidad del Problema de los Momentos de Hausdorff (no es la primera vez que se hace mención de estos términos). Son las preguntas planteadas en el capítulo previo. Conforme avancemos en el texto, se irán resolviendo ambas cuestiones.

Antes de comenzar este tema, es importante mencionar que los aspectos a tratar en este capítulo son estudiados desde una perspectiva moderna, sin dejar de lado los métodos que originalmente ocupó Hausdorff. Las siguientes páginas fueron redactadas con base en lo escrito en el artículo *Momentprobleme für ein endliches Intervall* ([35]).

En el trabajo *Summationsmethoden und Momentfolgen* ([34]), se analizan operaciones matriciales

$$A_p = \sum_{m=0}^p \lambda_{p,m} a_m$$

entre las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde la matriz infinita $\lambda = (\lambda_{p,m})_{p,m=0}^{\infty}$ sólo cuenta con un número finito de $\lambda_{p,m}$ no nulos para cada $p \in \mathbb{N}_0$. Él nombró a la matriz λ “konvergenzerhaltende” (C-matriz) si transforma sucesiones convergentes $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ en sucesiones convergentes $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde los límites no necesariamente coinciden. También, llamó a $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ C-sucesión siempre que una C-matriz se puede escribir de la forma $\lambda = \rho^{-1} \mu \rho$, donde $\mu = (\mu_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ con

$\mu_{ij} = \delta_{ij}\mu_i$, y

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & -3 & 3 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Resulta ser que para lo que se conoce como la sumabilidad de Césaró (Hölder respectivamente), las C-sucesiones existen y pueden ser representadas como las sucesiones de momentos correspondientes a las funciones de densidad $\alpha(1-u)^{\alpha-1}$ y $[\Gamma(\alpha)]^{-1} [\ln(1/u)]^{\alpha-1}$ donde α es un número real positivo. Aquí Hausdorff se da cuenta del vínculo que existe con el Problema de los Momentos y utiliza la Teoría de las Fracciones Continuas de Stieltjes para resolverlo. También menciona que el problema se podía resolver de manera muy simple, y sin extensas preparaciones algebraicas. Esta fue la primera vez que se trataron problemas de momentos sin relación alguna con las fracciones continuas.

Ocupando el recién desarrollado Análisis Funcional, Hausdorff caracteriza las sucesiones de momentos de funciones monótonas crecientes en $[0, 1]$. Mostró que el problema de momentos sobre $[0, 1]$ relacionado con la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene solución si y sólo si se cumple

$$s_m - \binom{n}{1}s_{m+1} + \binom{n}{2}s_{m+2} - \dots + (-1)^n s_{m+n} \geq 0, \text{ para toda } m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.1)$$

Veremos en el Capítulo 5 como del desarrollo de la Teoría Analítica de las Fracciones Continuas surge el Problema de los Momentos. En 1923 Hausdorff lo desconecta de sus raíces.



Figura 2.1: Felix Hausdorff

2.1. Existencia

La técnica de Hausdorff para analizar el Problema de los Momentos sobre $[0, 1]$ hace uso del espacio de polinomios $\mathbb{C}[x]$ con coeficientes complejos. En particular, considera los polinomios de Bernstein.

Recordamos que para $m, n \in \mathbb{N}_0$ el coeficiente binomial está dado por

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}, \text{ con } m \geq n,$$

y convenimos poner $\binom{m}{n} = 0$ si $n > m$

Definición 2.1. Los polinomios de Bernstein de grado r , $r \in \mathbb{N}_0$, están definidos como sigue:

$$B_{m,r}(x) = \binom{r}{m} x^m (1-x)^{r-m},$$

con $m = 0, \dots, r$. Por convención, ponemos $B_{m,r} \equiv 0$ si $m < 0$.

Estos polinomios deben su nombre al matemático soviético Sergei Natanovich Bernstein y resultaron ser útiles en la demostración del *Teorema de Aproximación de Weierstrass* y se han usado en el estudio de las curvas de Bezier.

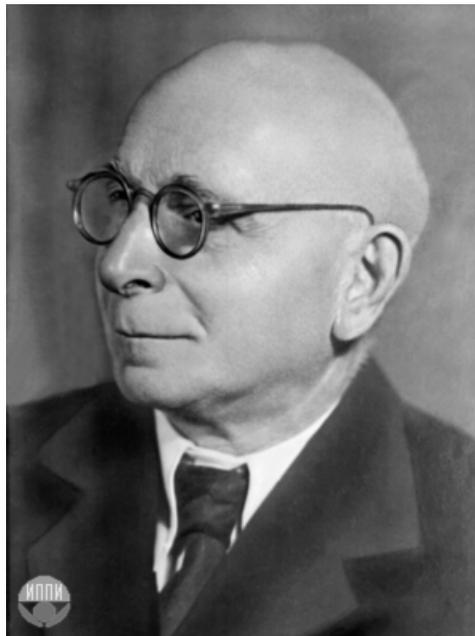


Figura 2.2: Sergei Natanovich Bernstein

Algunas de sus propiedades más importantes son la no-negatividad en $[0, 1]$, la simetría en $[0, 1]$ y el hecho de que determinan una partición de la unidad. Además, existen fórmulas para definirlos recursivamente, para hallar su derivada y para aumentar o disminuir su grado. El lector interesado en conocer más acerca de estos polinomios puede consultar el Apéndice A.

La importancia de los polinomios de Bernstein se ve reflejada en el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *El conjunto $\{B_{m,r}\}_{m=0}^r$ es una base para el subespacio vectorial de los polinomios en $\mathbb{C}[x]$ de grado menor o igual que r .*

Demostración. Dado que el subespacio mencionado tiene dimensión $r + 1$, basta mostrar la independencia lineal de $\{B_{m,r}\}_{m=0}^r$. Supongamos que existen $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ tal que

$$P(x) = \sum_{m=0}^r a_m B_{m,r}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Procedemos por inducción: haciendo $x = 0$ obtenemos $a_0 = 0$.

Si suponemos que $a_0 = \dots = a_l = 0$, con $0 \leq l \leq r - 1$, entonces

$$P(x) = \sum_{m=l+1}^r a_m B_{m,r}(x).$$

Derivamos $l + 1$ veces la igualdad anterior y tomamos $x = 0$ para obtener $a_{l+1} = 0$. \square

El enunciado anterior otorga a los polinomios de Bernstein el estatuto de base. Esta cualidad nos permite reescribir a cada polinomio P de grado menor o igual a r ,

$$P(x) = \sum_{n=0}^k \alpha_n x^n \in \mathbb{C}[x], \quad (2.2)$$

de la siguiente manera

$$P(x) = \sum_{m=0}^r a_m B_{m,r}(x), \quad (2.3)$$

donde $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ son únicos.

Definición 2.3. *Para cada polinomio P de grado menor o igual a r , su r -forma es su expresión en (2.3)*

En lo que sigue y hasta el final de la sección, para cada polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ denotamos con α_n al n -ésimo coeficiente de su representación canónica (2.2) y con a_m al m -ésimo coeficiente de su r -forma.

El siguiente enunciado establece la relación entre los coeficientes de un polinomio escrito como en (2.2) y los de su r -forma. Su importancia radica en que la r -forma es una herramienta fundamental para la solución del Problema de los Momentos de Hausdorff.

Proposición 2.4. *Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado k , con $k \leq r$. Entonces*

$$a_m = \sum_{n=0}^k \alpha_n \binom{m}{n} \binom{r}{n}^{-1},$$

para toda $m = 0, \dots, r$.

Demostración. Basta demostrar por inducción que para toda $r \in \mathbb{N}_0$ y $n = 0, \dots, r$, se cumple

$$x^n = \sum_{m=0}^r \binom{m}{n} \binom{r}{n}^{-1} B_{m,r}(x). \quad (2.4)$$

Si $n = 0$, entonces (2.4) se cumple para toda $r \in \mathbb{N}_0$ por la igualdad (A.1) en el Apéndice A.

Consideramos $r \in \mathbb{N}_0$ arbitrario pero fijo. Si suponemos válido el resultado para $0 \leq n \leq r - 1$, entonces

$$\begin{aligned} x^{n+1} = x(x^n) &= \sum_{m=0}^{r-1} \binom{m}{n} \binom{r-1}{n}^{-1} x B_{m,r-1}(x), \\ &= \sum_{m=0}^r \binom{m}{n} \binom{r}{n}^{-1} \frac{m+1}{r} B_{m+1,r}(x), \text{ ver Apéndice A, igualdad (A.2)} \\ &= \sum_{m=0}^r \binom{m}{n+1} \binom{r}{n+1}^{-1} B_{m,r}(x). \end{aligned}$$

□

Usamos lo anterior para asociar una sucesión de polinomios a un polinomio dado P .

Definición 2.5. *Sea P un polinomio de grado k , definimos $P_r \in \mathbb{C}[x]$, con $r \geq k$, como sigue:*

$$P_r(x) = \sum_{n=0}^k \alpha_n Q_n(x), \quad (2.5)$$

donde

$$Q_0 \equiv 1 \quad \text{y} \quad Q_n(x) = \frac{rx(rx-1)\dots(rx-n+1)}{r(r-1)\dots(r-n+1)}, \text{ si } 1 \leq n \leq k.$$

Es fácil verificar las siguientes propiedades:

$$P_r(m/r) = a_m, \quad m = 0, \dots, r, \quad r \geq k, \quad (2.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_r(x) = P(x), \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

y de hecho, la convergencia es uniforme en $[0, 1]$.

Definición 2.6. Sea $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ una sucesión dada. Introducimos la funcional de momentos $M : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$, relacionada con $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, como

$$M(P) = \sum_{n=0}^k \alpha_n s_n,$$

donde $P \in \mathbb{C}[x]$ es un polinomio de grado k .

El siguiente paso consiste en demostrar la convergencia de una sucesión de sumas finitas que involucran los momentos de los polinomios de Bernstein hacia el momento de un polinomio, teniendo como hipótesis que la suma de los momentos de los $r + 1$ polinomios de Bernstein de grado r es uniforme y absolutamente acotada para toda $r \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 2.7. Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ y $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Supongamos que existe $C > 0$ de tal forma que

$$\sum_{m=0}^r |M(B_{m,r})| \leq C, \quad \text{para toda } r \in \mathbb{N}_0. \quad (2.8)$$

Entonces

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^r P(m/r) M(B_{m,r}) = M(P). \quad (2.9)$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por (2.6) y la convergencia uniforme de (2.7) en $[0, 1]$, sabemos que existe $R \in \mathbb{N}_0$ de tal manera que

$$|a_m - P(m/r)| < \frac{\varepsilon}{C},$$

para toda $m = 0, \dots, r$, $r \geq R$. De donde se sigue que

$$|a_m M(B_{m,r}) - P(m/r) M(B_{m,r})| < \frac{\varepsilon}{C} |M(B_{m,r})|,$$

por lo tanto

$$\left| M(P) - \sum_{m=0}^r P(m/r) M(B_{m,r}) \right| < \frac{\varepsilon}{C} \sum_{m=0}^r |M(B_{m,r})| \leq \varepsilon,$$

siempre que $r \geq R$. □

Con el fin de enriquecer el teorema central de esta sección, definimos la monotonía completa de una sucesión y enunciamos un resultado que vincula las sucesiones completamente monótonas con las que cumplen la desigualdad (2.8). Si el lector desea conocer más a fondo el concepto, puede consultar [34].

Definición 2.8. Sea $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números reales. Decimos que $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ es completamente monótona si la funcional de momentos M relacionada a $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ satisface

$$M(B_{m,r}) \geq 0, \text{ para toda } r \in \mathbb{N}_0, m = 0, \dots, r.$$

Proposición 2.9. La sucesión $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ es completamente monótona si y sólo si $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ satisface

$$s_m - \binom{n}{1} s_{m+1} + \binom{n}{2} s_{m+2} - \dots + (-1)^n s_{m+n} \geq 0, \text{ para toda } m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Proposición 2.10. Sea $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Entonces $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ es diferencia de dos sucesiones completamente monótonas si y sólo si satisface la condición (2.8)

Cuando $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$, se sabe que $\{Re(s_n)\}_{n=0}^\infty$ y $\{Im(s_n)\}_{n=0}^\infty$ pueden ser vistas como diferencia de dos sucesiones completamente monótonas si y sólo si se cumple (2.8). Al lector interesado le recomendamos ver [35].

Teorema 2.11. Sea $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ una sucesión y M la funcional de momentos relacionada. Entonces existe $F \in NBV[0, 1]$ tal que

$$M(P) = \int_0^1 P dF, \text{ para todo } P \in \mathbb{C}[x],$$

si y sólo si M satisface la condición (2.8).

Demostración. Por la descomposición $g = Re(g) + iIm(g)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ y que F toma valores reales.

Dado que F es de variación acotada en $[0, 1]$, existen funciones monótonas crecientes $F_1, F_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = F_1 - F_2$.

De la definición de integral de Riemann-Stieltjes respecto a un integrador que es diferencia de dos funciones monótonas crecientes tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^r |M(B_{m,r})| &\leq \sum_{m=0}^r \left(\int_0^1 B_{m,r} dF_1 \right) + \sum_{m=0}^r \left(\int_0^1 B_{m,r} dF_2 \right) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{m=0}^r B_{m,r} \right) dF_1 + \int_0^1 \left(\sum_{m=0}^r B_{m,r} \right) dF_2 \\ &= F_1(1) + F_2(1), \text{ para toda } r \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Pasamos a la segunda parte de la demostración. Si se cumple (2.8), entonces

$$\left| \sum_{m=0}^r P(m/r) M(B_{m,r}) \right| \leq \sum_{m=0}^r |P(m/r)| |M(B_{m,r})| \leq \sup_{x \in [0,1]} \{|P(x)|\} \sum_{m=0}^r |M(B_{m,r})| \leq C \|P\|_{\infty}.$$

Usando el Teorema 2.7 obtenemos

$$|M(P)| = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=0}^r P(m/r) M(B_{m,r}) \right| \leq C \|P\|_{\infty}.$$

Por el *Teorema de Extensión de Hahn-Banach* sabemos que existe la funcional $\widetilde{M} : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $|\widetilde{M}(f)| \leq C \|f\|_{\infty}$ para toda $f \in C[0, 1]$ y $\widetilde{M}|_{\mathbb{C}[x]} \equiv M$.

Para finalizar, utilizamos el *Teorema de Representación de Riesz* para obtener una función $F \in NBV[0, 1]$ que satisface

$$M(P) = \widetilde{M}(P) = \int_0^1 P dF, \text{ para todo } P \in \mathbb{C}[x].$$

□



Figura 2.3: Frigyes Riesz

Corolario 2.12. *Sea $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ una sucesión y M la funcional de momentos relacionada. Entonces existe una función monótona creciente F tal que*

$$M(P) = \int_0^1 PdF, \text{ para todo } P \in \mathbb{R}[x]$$

si y sólo si $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ es completamente monótona.

Demostración. Si existe tal función F , claramente $M(B_{m,r}) \geq 0$ ya que $B_{m,r} \geq 0$ en $[0, 1]$, para toda $r \in \mathbb{N}_0$, $m = 0, \dots, r$.

Si $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ es completamente monótona, entonces

$$\sum_{m=0}^r |M(B_{m,r})| = M(1), \text{ para toda } r \in \mathbb{N}_0.$$

Del teorema anterior se sigue que existe $F \in NBV[0, 1]$ tal que $M(P) = \int_0^1 PdF$, para todo $P \in \mathbb{R}[x]$. De (2.9) se sigue que M es una funcional positiva, y entonces tenemos que

$$\widetilde{M}(f) \geq 0, \text{ para toda } f \in C[0, 1], \text{ tal que } f \geq 0.$$

Por lo tanto F es monótona creciente. □

Notamos que el resultado anterior resuelve el Problema de los Momentos de Hausdorff, ya que

$$s_n = M(x^n) = \int_0^1 x^n dF, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}_0.$$

Aquí se puede apreciar la interesante dualidad que se presenta entre las funciones de variación acotada con las sucesiones que cumplen (2.8), y entre las funciones monótonas crecientes con las sucesiones completamente monótonas, ya que las que satisfacen (2.8) pueden ser escritas como diferencia de dos completamente monótonas, al igual que una función de variación acotada está dada por la diferencia de dos funciones monótonas crecientes.

2.2. Unicidad

Para poder completar el objetivo planteado al inicio del capítulo, es menester demostrar la unicidad de las soluciones halladas anteriormente. En efecto, para cada sucesión $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ que cumpla con la desigualdad descrita en (2.8), existe una y sólo una función F de variación acotada (normalizada) en $[0, 1]$ que satisface

$$M(P) = \int_0^1 PdF, \text{ para todo } P \in \mathbb{C}[x].$$

Primero suponemos que F es absolutamente continua en $[0, 1]$, por lo que existe $f \in \mathcal{L}^1[0, 1]$ tal que

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0, 1].$$

En este caso la unicidad se sigue del siguiente resultado.

Proposición 2.13. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1[0, 1]$ tales que

$$\int_0^1 x^n f_1(x)dx = \int_0^1 x^n f_2(x)dx, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}_0,$$

entonces $f_1 = f_2$ c.d.s. en $[0, 1]$.

Demostración. Definimos $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como sigue:

$$g(x) = (f_1 - f_2)(x).$$

De este modo tenemos

$$s_n(g) = \int_0^1 x^n g(x)dx = 0, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}_0.$$

Usando el hecho de que $C[0, 1]$ es denso en $\mathcal{L}^1[0, 1]$ y que $\mathcal{L}^\infty[0, 1]$ se encaja de manera continua en $\mathcal{L}^1[0, 1]$, del *Teorema de Aproximación de Weierstrass* concluimos que existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \bar{g},$$

donde la convergencia es en $\mathcal{L}^1[0, 1]$. Usando el *Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue*, tenemos

$$\|g\|_2^2 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} gP_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 gP_n dx = 0.$$

□

Pero eso no es todo, podemos usar el *Teorema de Representación de Riesz* para mostrar que este resultado puede extenderse a cargas con soporte compacto, y en particular podemos considerar cargas μ que cumplan $d\mu = dF$, donde F es una función de variación acotada en $[0, 1]$.

Con esta demostración concluimos el capítulo. En esta sección vimos que un problema de momentos de Hausdorff (a diferencia del caso de Stieltjes y del de Hamburger) tiene soluciones únicas.

Una generalización del Problema de los Momentos de Hausdorff para sucesiones dobles difusas ya ha sido formulada y demostrada. Se introduce una generalización bidimensional de los polinomios de Bernstein. Se recomienda consultar el trabajo de Ducgon y Debiève ([24]).

Capítulo 3

Densidad Log-Normal y Stieltjes-Wigert

Este capítulo se escribió tomando como referencia principal cuatro publicaciones recientes ([28, 48, 49, 50]). Los problemas que trabajamos son muy parecidos entre sí (un poco más laborioso el segundo), y nuestra tarea es caracterizar algunas de sus soluciones.

Introducimos dos nuevos conceptos: el Núcleo de Gauss y la función Theta. Estas funciones son de gran ayuda para el cálculo de las integrales que aquí aparecen.

Otro aspecto importante que debemos mencionar es que las sucesiones que se trabajan en la Sección 3.1 tienen por dominio al conjunto de los números enteros \mathbb{Z} , y no a la extensión de los naturales \mathbb{N}_0 con la que nos habíamos familiarizado anteriormente. Cuando esto sucede, decimos que es un problema de momentos fuerte, o un caso fuerte del Problema de los Momentos.

Tanto en este capítulo como en el siguiente, ocupamos la notación

$$s_n(f) := \int_I x^n f(x) dx, \text{ para toda } n \in \mathbb{Z},$$

donde $I = (0, \infty)$ o \mathbb{R} .

Stieltjes (ver [39, 66, 67]) fue el primero que exhibió una función indeterminada (la densidad log-normal). En la introducción hablamos de esta última y de cómo construir una nueva función con la misma sucesión de momentos.

También Chihara y Christiansen trabajaron con el Problema de los Momentos de Stieltjes-Wigert. En su trabajo *A Characterization and a Class of Distribution Functions for the Stieltjes-Wigert Polynomials* ([18]), Chihara nos dice que Wigert (ver [76]) halló un sistema de polinomios ortonormales relacionados con la densidad log-normal. Este conjunto fue mejor conocido como los polinomios de Stieltjes-Wigert en el artículo *Orthogonal Polynomials* ([74]) de Szegö.

3.1. El Problema de los Momentos de la Densidad Log-Normal

El dominio de integración que se ocupa en esta parte es el intervalo $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ es una función con sucesión de momentos

$$\{s_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ q^{-n^2/2} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}, \text{ con } q \in (0, 1), \quad (3.1)$$

entonces decimos que f es una solución al Problema de los Momentos de la Densidad Log-Normal.

El Problema de los Momentos de la Densidad Log-Normal es indeterminado, ya que no tiene una única solución.

En el teorema central de esta sección se establece que una función definida en \mathbb{R}_+ que satisface la ecuación funcional

$$f(qx) = q^{\beta-1/2} x f(x), \text{ para toda } x > 0, \quad (3.2)$$

y además $\int_{\mathbb{R}_+} f = q^{-\beta^2/2}$, donde $q \in (0, 1)$ y $\beta \in \mathbb{R}$, es una solución a un problema de momentos. Para ello, primero calculamos la sucesión de momentos de las funciones que cumplen (3.2).

Lema 3.1. Sean $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Si f satisface la ecuación funcional (3.2), entonces

$$f(q^n x) = q^{n^2/2 + (\beta-1)n} x^n f(x), \text{ para toda } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Demostración. Procedemos por inducción. Los casos $n = 0$ y $n = 1$ son inmediatos. En (3.2) ponemos $q^{-1}x$ en vez de x para ver que el resultado es válido para $n = -1$.

Asumiendo que el resultado es válido para cierta $n \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} f(q^{n+1}x) = f(q^n(qx)) &= q^{n^2/2 + (\beta-1)n} (qx)^n f(qx) \\ &= q^{(n+1)^2/2 + (\beta-1)(n+1)} x^{n+1} f(x). \end{aligned}$$

De manera similar, si el resultado es válido para $-n$, $n \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} f(q^{-n}(q^{-1}x)) &= q^{n^2/2 - (\beta-1)n} (q^{-1}x)^{-n} f(q^{-1}x) \\ &= q^{n^2/2 - (\beta-1)n + n} x^{-n} q^{3/2 - \beta} x^{-1} f(x) \\ &= q^{-(n+1)^2/2 - (\beta-1)(n+1)} x^{-(n+1)} f(x). \end{aligned}$$

□

La fórmula (3.3) relaciona cualquier elemento de la sucesión de momentos de una función que cumple (3.2), con su integral sobre el intervalo real positivo.

Proposición 3.2. Sean $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ que satisface la ecuación funcional (3.2), entonces

$$s_n(f) = q^{-n^2/2-\beta n} \int_0^\infty f(x)dx, \text{ para toda } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Demostración. En virtud del Lema 3.1 se tiene que

$$s_n(f) = \int_0^\infty q^{-n^2/2-(\beta-1)n} f(q^n x)dx = q^{-n^2/2-\beta n} \int_0^\infty f(x)dx.$$

□

En [13, páginas 33, 59] Cannon estudia el Núcleo de Gauss y la función Theta, las cuales satisfacen la ecuación del calor en $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\}$.

Definición 3.3. Para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, el Núcleo de Gauss y la función Theta están dadas como sigue

$$K(x, t) = \frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad (3.5)$$

$$\theta(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} K(x + n, t). \quad (3.6)$$

Es claro que si fijamos $t > 0$, entonces la función $\theta(\cdot, t)$ es continua y 1-periódica en \mathbb{R} . Un cálculo sencillo nos muestra además el valor de sus integrales:

$$\int_0^1 \theta(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} K(x, t) dx = 1, \text{ para toda } t > 0. \quad (3.7)$$

El siguiente resultado es el teorema central del artículo *Characterization of Distributions with the Length-Bias Scaling Property* ([48]).

Teorema 3.4. Sean $b, c > 0$ y $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Entonces se cumple

$$g(x - b) = ce^x g(x), \text{ para toda } x \in \mathbb{R}, \text{ y} \quad (3.8)$$

$$\int_{-\infty}^\infty g(x)dx = 1, \quad (3.9)$$

si y sólo si existe una función φ con periodo 1 y que es integrable en $(0, 1)$ tal que

$$g(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/(2b)}}{\sqrt{2\pi b}} \left\{ 1 + \varphi\left(\frac{x-m}{b}\right) \right\}, \text{ y} \quad (3.10)$$

$$\int_0^1 \theta\left(x, \frac{1}{2b}\right) \varphi(x)dx = 0, \quad (3.11)$$

con $-m = \ln c + b/2$.

Demostración. Claramente la siguiente función positiva

$$h(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/(2b)}}{\sqrt{2\pi b}} = \left[\frac{e^{-((\ln c)^2 + (b/2)^2 + b \ln c)/(2b)}}{\sqrt{2\pi b}} \right] e^{-(x^2 + 2x \ln c + xb)/(2b)},$$

$x \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación funcional (3.8), de donde se sigue que

$$\psi(x) := \frac{g(bx)}{h(bx)} = \frac{g(bx - b)}{h(bx - b)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

es una función con periodo 1 y además

$$g(x) = h(x)\psi(b^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, al hacer el cambio de variable $y = (x - m)/b$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-m)^2/(2b)}}{\sqrt{2\pi b}} \psi(b^{-1}x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-by^2/2}}{\sqrt{2\pi b^{-1}}} \psi(y + mb^{-1})dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K\left(y, \frac{1}{2b}\right) \psi(y + mb^{-1})dy \\ &= \int_0^1 \theta\left(y, \frac{1}{2b}\right) \psi(y + mb^{-1})dy = 1. \end{aligned}$$

Elegimos $\varphi(x) = -1 + \psi(x + b^{-1}m)$. Al usar (3.7) se sigue el resultado.

Ahora demostramos la otra implicación. Si g está definida como en (3.10), entonces claramente satisface la ecuación funcional (3.8).

Como en el cálculo de la integral previa, es fácil ver que

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = 1.$$

Además

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi\left(\frac{x-m}{b}\right)dx = \int_0^1 \theta\left(y, \frac{1}{2b}\right) \varphi(y)dy = 0,$$

por lo tanto $\int_{\mathbb{R}} g(x) = 1$. □

Recordamos ahora una propiedad logarítmica que ocuparemos en la siguiente demostración,

$$\log_q x = \frac{\ln x}{\ln q}, \quad x > 0. \quad (3.12)$$

Definición 3.5. La función de densidad log-normal, con $\sigma > 0$ está dada como sigue

$$d_\sigma(x) = \frac{e^{-\ln x/(2\sigma^2)}}{x\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (3.13)$$

A continuación presentamos el resultado principal de esta sección y del artículo *Characterization of Solutions to the Log-Normal Moment Problem* ([49]). Aquí se describe una clase de soluciones al problema de momentos relacionado con la sucesión $\{q^{-(n+\beta)^2/2}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Teorema 3.6. Sean $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{L}^1(0, \infty)$. Entonces f satisface la ecuación funcional (3.2) y se cumple

$$\int_0^\infty f(x)dx = q^{-\beta^2/2}, \quad (3.14)$$

si y sólo si existe una función φ con periodo 1, integrable en $(0, 1)$, tal que

$$f(x) = x^\beta d_\sigma(x) \{1 + \varphi(\beta + \log_q x)\}, \quad y \quad (3.15)$$

$$\int_0^1 \varphi(x) \theta\left(x, \frac{1}{2\sigma^2}\right) dx = 0, \quad (3.16)$$

donde $\sigma^2 = -\ln q$. En cualquier caso, $s_n(f) = q^{-(n+\beta)^2/2}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Usando la Proposición 3.2 se obtiene la sucesión de momentos de la función f ,

$$s_n(f) = q^{-n^2/2 - \beta n} \int_0^\infty f(x)dx = q^{-(n+\beta)^2/2}, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{Z}.$$

Consideramos $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dada por $g(x) = q^{\beta^2/2} e^x f(e^x)$. Entonces se puede verificar fácilmente que g cumple (3.8) y (3.9) con $b = \sigma^2 = -\ln q$ y $c = q^{\beta+1/2}$.

Entonces existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}^1(0, 1)$, que satisface (3.10) y (3.11) tal que

$$\begin{aligned} f(x) = x^{-1} q^{-\beta^2/2} g(\ln x) &= \frac{q^{-\beta^2/2} e^{-(\ln x + \beta \ln q)^2/(2\sigma^2)}}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left\{ 1 + \tilde{\varphi}\left(\frac{\ln x + \beta \ln q}{-\ln q}\right) \right\} \\ &= \frac{x^\beta e^{-(\ln x)^2/(2\sigma^2)}}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \{1 + \tilde{\varphi}(-\log_q x - \beta)\} \\ &= x^\beta d_\sigma(x) \{1 + \tilde{\varphi}(-\log_q x - \beta)\}. \end{aligned}$$

Entonces la función $\varphi \in \mathcal{L}^1(0, 1)$ dada por $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(-x)$ es una función 1-periódica que satisface (3.15) y (3.16).

Pasamos a la segunda parte de la demostración. Si f puede ser escrita como en (3.15), entonces es claro que satisface la ecuación (3.2). Si tomamos g como antes, tenemos

$$\int_0^\infty f(x)dx = q^{-\beta^2/2} \int_0^\infty \frac{g(\ln x)}{x} dx = q^{-\beta^2/2}.$$

□

Aquí surge una pregunta natural: ¿existen funciones que tienen sucesión de momentos $\{q^{-(n+\beta)^2/2}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y que no satisfacen la ecuación funcional (3.2)? La representación (3.15) de las soluciones que estudiamos puede ser vista como parte de una estructura más general introducida por Stoyanov (ver [69, 70, 71]) para hallar familias de soluciones a problemas de momentos indeterminados. El lector interesado puede consultar [57].

3.2. El Problema de los Momentos de Stieltjes-Wigert

El problema que estudiamos en la sección previa es un caso particular del Problema de los Momentos de Stieltjes-Wigert. Al igual que antes, se tiene como principal objetivo presentar una caracterización para una familia de soluciones a un problema de momentos.

Con base en lo escrito en 2009 en *Characterization of Solutions to the Stieltjes-Wigert Moment Problem* ([50]), recordamos algunas propiedades de la función de densidad log-normal,

$$d_\sigma(x) = \frac{q^{(\log_q x)^2/2}}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad (3.17)$$

$$x^\beta d_\sigma(x) = q^{\beta-\beta^2/2} d_\sigma(q^\beta x), \quad (3.18)$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$, $q = e^{-\sigma^2}$, $\sigma > 0$. Con unas sencillas operaciones se pueden verificar estas igualdades. Usando (3.17), (3.18) y el cambio de variable $y = \log_q(q^\beta x)$ obtenemos que si $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0, 1)$ y ψ es integrable en $(0, 1)$ y tiene periodo 1, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\beta d_\sigma(x) \psi(\log_q x) dx &= q^{-\beta^2/2} \int_0^\infty \frac{q^{(\log_q(q^\beta x))^2/2}}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \psi(\log_q x) dx \\ &= q^{-\beta^2/2} \int_{-\infty}^\infty \frac{q^{y^2/2}\sigma}{\sqrt{2\pi}} \psi(y - \beta) dy \\ &= q^{-\beta^2/2} \int_{-\infty}^\infty K\left(y, \frac{1}{2\sigma^2}\right) \psi(y - \beta) dy \\ &= q^{-\beta^2/2} \int_0^1 \theta\left(y, \frac{1}{2\sigma^2}\right) \psi(y - \beta) dy. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ahora construimos una sucesión de funciones $\{\Pi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con dominio en el semieje real positivo. Para $q \in (0, 1)$ y $p > 0$, definimos a cada término de la sucesión como sigue:

$$\Pi_0 \equiv 1 \quad \text{y} \quad \Pi_n(x) = \prod_{j=1}^{|n|} (x + pq^{(n/|n|)(1/2-j)})^{n/|n|}, \quad \text{si } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Lema 3.7. Sean $q \in (0, 1)$ y $p > 0$. Entonces se satisface

$$\Pi_{n+1}(x) = (x + pq^{-n-1/2}) \Pi_n(x), \text{ para toda } n \in \mathbb{Z} \text{ y } x > 0. \quad (3.20)$$

Demostración. Usamos inducción. Los casos $n = -1$, $n = 0$ y $n = 1$ son inmediatos.

Ahora suponemos que se cumple (3.20) para alguna $n \geq 1$. Entonces se tiene

$$\Pi_{n+1}(x) = \prod_{j=1}^{n+1} (x + pq^{(1/2-j)}) = (x + pq^{-n-1/2}) \Pi_n(x).$$

Finalmente, si se cumple (3.20) para alguna $-n$, $n \geq 1$, se tiene

$$\Pi_{-(n+1)}(x) = \prod_{j=1}^{n+1} (x + pq^{(j-1/2)})^{-1} = (x + pq^{-n-3/2})^{-1} \Pi_{-n}(x),$$

y despejando concluimos la demostración. \square

El siguiente resultado es similar al Lema 3.1. En su demostración ocupamos la igualdad (3.20).

Proposición 3.8. Sean $q \in (0, 1)$ y $p > 0$. Si f satisface la ecuación funcional

$$f(qx) = q^{\beta-1/2} (x + pq^{-1/2}) f(x), \text{ para toda } x > 0, \quad (3.21)$$

entonces

$$f(q^n x) = q^{(\beta-1)n+n^2/2} \Pi_n(x) f(x), \text{ para toda } n \in \mathbb{Z} \text{ y } x > 0. \quad (3.22)$$

Demostración. Procedemos por inducción. Se puede verificar de manera sencilla que la igualdad se da en los casos $n = 0$ y $n = 1$.

Para el caso $n = -1$ basta poner $q^{-1}x$ en vez de x en (3.21) y despejar.

Suponemos válida la igualdad (3.22) para alguna $n \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} f(q^{n+1}x) &= q^{\beta-1/2} (q^n x + pq^{-1/2}) f(q^n x) \\ &= q^{\beta-1/2} (q^n x + pq^{-1/2}) q^{(\beta-1)n+n^2/2} \Pi_n(x) f(x) \\ &= q^{(\beta-1)(n+1)+(n+1)^2/2} \Pi_{n+1}(x) f(x). \end{aligned}$$

Asumiendo la validez de (3.22) para alguna $-n$, $n \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} f(q^{-(n+1)}x) &= q^{3/2-\beta} (q^{-n}x + pq^{1/2})^{-1} f(q^{-n}x) \\ &= q^{3/2-\beta} (q^{-n}x + pq^{1/2})^{-1} q^{(1-\beta)n+n^2/2} \Pi_{-n}(x) f(x) \\ &= q^{-(\beta-1)(n+1)+(n+1)^2/2} \Pi_{-(n+1)}(x) f(x). \end{aligned}$$

\square

Para $p > 0$ y $q \in (0, 1)$, introducimos la siguiente notación

$$(p; q)_0 = 1, \quad (p; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - pq^k), \text{ si } n \in \mathbb{N}, \quad \text{y} \quad (p; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - pq^k).$$

Los paréntesis descritos son una sucesión de funciones definidas en $\mathbb{R}_+ \times (0, 1)$ y con imagen en \mathbb{R} , además

$$(p; q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (p; q)_n.$$

El lector puede consultar el Apéndice A para conocer más acerca de los productos infinitos.

Como es de esperarse, la ecuación (3.22) es la herramienta necesaria para obtener el siguiente resultado, el cuál es una generalización de la Proposición 3.2.

Teorema 3.9. *Sean $q \in (0, 1)$, $p > 0$ y $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ que satisface la ecuación funcional (3.21), entonces*

$$\int_0^\infty x^m \Pi_n(x) f(x) dx = q^{-\beta(n+m) - (n+m)^2/2} (pq^\beta; q)_m \int_0^\infty f(x) dx, \text{ si } m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.23)$$

Demostración. Como antes, usamos inducción. Empezamos demostrando (3.23) para $m = 0$.

Aplicamos dos veces la igualdad (3.22) para obtener

$$q^{n+1} f(q^{n+1}x) = qq^{\beta n + n^2/2} \Pi_n(qx) f(qx) = q^{\beta(n+1) + (n+1)^2/2} \Pi_{n+1}(x) f(x),$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$ y $x > 0$. Integrando los términos de la igualdad anterior obtenemos por un lado que

$$\int_0^\infty \Pi_{n+1}(x) f(x) dx = q^{-(n+\beta+1/2)} \int_0^\infty \Pi_n(x) f(x) dx,$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$, y por el otro que

$$\int_0^\infty \Pi_{n+1}(x) f(x) dx = q^{-\beta(n+1) - (n+1)^2/2} \int_0^\infty f(x) dx,$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Suponemos que (3.23) es válido para alguna $m \in \mathbb{N}_0$ y para toda $n \in \mathbb{Z}$. Si se integran ambos lados de la ecuación (3.20), se obtiene

$$\int_0^\infty x^m \Pi_{n+1}(x) f(x) dx = \int_0^\infty x^{m+1} \Pi_n(x) f(x) dx + pq^{-n-1/2} \int_0^\infty x^m \Pi_n(x) f(x) dx.$$

Despejamos y aplicamos la hipótesis de inducción para concluir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{m+1} \Pi_n(x) f(x) dx &= q^{-\beta(n+1+m)-(n+1+m)^2/2} (pq^\beta; q)_m \int_0^\infty f(x) dx \\ &\quad \times \left[1 - q^{\beta(n+1+m)+(n+1+m)^2/2 - \beta(n+m)-(n+m)^2/2 - n - 1/2} p \right] \\ &= q^{-\beta(n+m+1)-(n+m+1)^2/2} (pq^\beta; q)_m (1 - pq^\beta q^m) \int_0^\infty f(x) dx. \end{aligned}$$

□

Dada una función f que cumple la ecuación funcional (3.21), si ponemos $n = 0$ en el Teorema 3.9, obtenemos el m -ésimo momento de f , con $m \in \mathbb{N}_0$.

Corolario 3.10. Sean $q \in (0, 1)$, $p > 0$ y $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ que satisface la ecuación funcional (3.21), entonces

$$s_n(f) = q^{-\beta n - n^2/2} (pq^\beta; q)_n \int_0^\infty f(x) dx, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}_0.$$

Observamos que, dadas $p > 0$ y $q \in (0, 1)$, se cumple $(-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty > 0$ al ser positivos todos los factores del producto infinito.

Corolario 3.11. Sean $q \in (0, 1)$, $p > 0$ y $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ que satisface la ecuación funcional (3.21), entonces

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{(-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty} dx = (pq^\beta; q)_\infty \int_0^\infty f(x) dx. \quad (3.24)$$

Demostración. Por la igualdad (3.23) con $m \in \mathbb{N}$ y $n = -m$ se tiene

$$\int_0^\infty x^m \Pi_{-m}(x) f(x) dx = (pq^\beta; q)_m \int_0^\infty f(x) dx.$$

Además, es posible acotar las funciones $x^m \Pi_{-m}(x)$ como sigue

$$0 \leq x^m \Pi_{-m}(x) = \prod_{j=1}^m (1 + pq^{j-1/2}x^{-1})^{-1} \leq 1 \text{ para toda } m \in \mathbb{N} \text{ y } x > 0.$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{f(x)}{(-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty} dx &= \int_0^\infty \lim_{m \rightarrow \infty} f(x) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + pq^{j+1/2}x^{-1})^{-1} dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty x^m \Pi_{-m}(x) f(x) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (pq^\beta; q)_m \int_0^\infty f(x) dx \\ &= (pq^\beta; q)_\infty \int_0^\infty f(x) dx, \end{aligned}$$

□

Con la finalidad de ilustrar el Corolario 3.11, proponemos una función muy parecida a la que aparece en la igualdad (3.19).

Consideremos $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0, 1)$, $p > 0$, tal que $(pq^\beta; q)_\infty \neq 0$ y ψ integrable en $(0, 1)$, con periodo 1. Un sencillo cálculo muestra que la función $x^\beta (-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty d_\sigma(x)\psi(\log_q x)$, $\sigma^2 = -\ln q$, satisface la ecuación funcional (3.21). Entonces gracias a las igualdades (3.19) y (3.24) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\beta (-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty d_\sigma(x)\psi(\log_q x)dx &= \frac{1}{(pq^\beta; q)_\infty} \int_0^\infty x^\beta d_\sigma(x)\psi(\log_q x)dx \\ &= \frac{q^{-\beta^2/2}}{(pq^\beta; q)_\infty} \int_0^1 \psi(x - \beta)\theta\left(x, \frac{1}{2\sigma^2}\right) dx. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Un caso particular de (3.25) es el siguiente

$$\int_0^\infty x^\beta (-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty d_\sigma(x)dx = \frac{q^{-\beta^2/2}}{(pq^\beta; q)_\infty}. \quad (3.26)$$

Para cerrar la sección damos la caracterización de una colección de soluciones al Problema de los Momentos de Stieltjes-Wigert. El siguiente resultado es producto de una observación hecha por Chihara y Christiansen (ver [18, 19, 21]).

Teorema 3.12. Sean $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0, 1)$, $p > 0$, tal que $(pq^\beta; q)_\infty \neq 0$ y $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$. Entonces f satisface la ecuación funcional (3.21) y se cumple

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{q^{-\beta^2/2}}{(pq^\beta; q)_\infty}, \quad (3.27)$$

si y sólo si existe una función φ con periodo 1, integrable en $(0, 1)$, tal que

$$f(x) = x^\beta (-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty d_\sigma(x)\{1 + \varphi(\beta + \log_q x)\}, \quad y \quad (3.28)$$

$$\int_0^1 \varphi(x)\theta\left(x, \frac{1}{2\sigma^2}\right) dx = 0, \quad (3.29)$$

donde $\sigma^2 = -\ln q$. En cualquier caso, $s_n(f) = q^{-(n+\beta)^2/2} (pq^\beta; q)_n (pq^\beta; q)_\infty^{-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Por el Corolario 3.10 obtenemos

$$s_n(f) = q^{-\beta n - n^2/2} (pq^\beta; q)_n \int_0^\infty f(x)dx = q^{-(n+\beta)^2/2} \frac{(pq^\beta; q)_n}{(pq^\beta; q)_\infty}, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}_0.$$

Para hacer menos pesado el camino, definimos la siguiente función positiva

$$g(x) = x^\beta (-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty d_\sigma(x), \quad x > 0.$$

Dado que f y g satisfacen la ecuación funcional (3.21), la siguiente función

$$\psi(x) = (f/g)(q^x)$$

tiene periodo 1, por lo tanto

$$f(x) = x^\beta (-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty d_\sigma(x) \psi(\log_q x). \quad (3.30)$$

Sustituimos en (3.25) para obtener

$$\int_0^\infty f(x) dx = \frac{q^{-\beta^2/2}}{(pq^\beta; q)_\infty} \int_0^1 \psi(x - \beta) \theta\left(x, \frac{1}{2\sigma^2}\right) dx$$

e igualamos con (3.27) para concluir que $\varphi(x) = -1 + \psi(x - \beta)$ es una función integrable en $(0, 1)$ con periodo 1 que satisface (3.28) y (3.29).

Hacemos la segunda parte de la demostración. Si f puede ser escrita como en (3.28), entonces es claro que satisface la ecuación (3.21). Haciendo un cálculo parecido al que se hizo en (3.25) se obtiene

$$\int_0^\infty f(x) dx = \frac{q^{\beta^2/2}}{(pq^\beta; q)_\infty} \int_0^1 \{1 + \varphi(x)\} \theta\left(x, \frac{1}{2\sigma^2}\right) dx$$

y ocupando (3.7) y (3.29), se concluye (3.27). \square

3.3. Soluciones no Periódicas

En las secciones anteriores presentamos un par de caracterizaciones de funciones que satisfacen cierta ecuación funcional y mostramos que son soluciones a problemas de momentos indeterminados. Sin embargo, éstas no son las únicas. A través de algunos resultados que aquí mostramos, exhibimos algunas soluciones a los respectivos problemas de momentos que no satisfacen las ecuaciones funcionales estudiadas.

Para el caso del Problema de la Densidad Log-Normal, ocupamos el siguiente resultado.

Proposición 3.13. *Si $\beta \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces la función $g(x) = x^\beta d_\sigma(x) h(\beta + \log_q x)$ satisface $s_n(g) = q^{-(n+\beta)^2/2}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si*

$$\int_{\mathbb{R}} K\left(x, \frac{1}{2\sigma^2}\right) h(x - n) dx = 1, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.31)$$

Demostración. Usando (3.17), (3.18) y haciendo el cambio de variable $y = n + \beta + \log_q x$, es fácil ver que:

$$\begin{aligned} s_n(g) &= \int_0^\infty q^{(n+\beta)-(n+\beta)^2/2} \left(\frac{q^{(\log_q(q^{n+\beta}x))^2/2}}{q^{n+\beta}x\sigma\sqrt{2\pi}} \right) h(\beta + \log_q x) dx \\ &= q^{-(n+\beta)^2/2} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{q^{y^2/2}\sigma}{\sqrt{2\pi}} \right) h(y - n) dy \\ &= q^{-(n+\beta)^2/2} \int_{-\infty}^\infty K\left(y, \frac{1}{2\sigma^2}\right) h(y - n) dy, \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. □

Recordamos la transformada de Fourier (ver [63, Capítulo 9]) y algunas de sus propiedades.

Definición 3.14. Dada una función $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier está dada como sigue

$$(\Phi f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

El producto interior de dos funciones $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ está dado por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f \bar{g} dx. \quad (3.32)$$

La fórmula de Parseval nos dice que para funciones $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, se da la siguiente igualdad

$$\langle f, g \rangle = \langle \Phi f, \Phi g \rangle. \quad (3.33)$$

Lo anterior nos permite extender la transformada de Fourier como un isomorfismo isométrico en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. También ocupamos los operadores traslación y sus transformadas de Fourier.

Definición 3.15. Sea $x \in \mathbb{R}$. Para cada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, escribimos el operador traslación (con respecto de x) como sigue

$$(\tau_x f)(y) = f(y - x), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Si tomamos $x \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces tenemos

$$\Phi(\tau_x f)(\xi) = e^{ix\xi} (\Phi f)(\xi). \quad (3.34)$$

Por último enunciamos una propiedad importante del Núcleo de Gauss (ver [13, páginas 33,59]). Dadas $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, tenemos

$$K(x, t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\Phi^{-1} e^{-t\xi^2})(x), \quad (3.35)$$

donde Φ^{-1} es la transformada de Fourier inversa respecto a la variable ξ .

Estamos listos para el primer resultado importante de la sección, el cuál será útil para construir funciones que son solución al Problema de la Densidad Log-Normal, pero que no satisfacen la ecuación funcional (3.2).

Teorema 3.16. Sean $\beta \in \mathbb{R}$ y $F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. La función $g(x) = x^\beta d_\sigma(x) \{1 + F(\beta + \log_q x)\}$ satisface $s_n(g) = q^{-(n+\beta)^2/2}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} K(\xi + 2n\pi, \sigma^2/2) (\Phi F)(\xi + 2n\pi) = 0 \text{ c.d.s. } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.36)$$

Demostración. Aplicando (3.33), (3.34) y (3.35), definimos los términos de una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ como sigue:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-\infty}^{\infty} K\left(x, \frac{1}{2\sigma^2}\right) F(x+n) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi^{-1} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)})(x) (\tau_{-n} F)(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} (\Phi F)(\xi) e^{-in\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-in\xi} \left\{ \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(\xi+2\pi m)^2/(2\sigma^2)} (\Phi F)(\xi + 2\pi m) \right\} d\xi, \text{ para toda } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A partir de la Proposición 3.13 y de (3.7), tenemos que se cumple $s_n(g) = q^{-(n+\beta)^2/2}$ si y sólo si $a_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Concluimos al notar que a_n es un múltiplo del coeficiente de Fourier de la función 2π -periódica en (3.36). \square

Observamos que si g satisface (3.2), entonces por el Teorema 3.6 F es una función 1-periódica en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, y por lo tanto $F = 0$ c.d.s. en \mathbb{R} . Así, si no se cumple $F = 0$ c.d.s. en \mathbb{R} , g es una solución para el Problema de la Densidad Log-Normal que no satisface la ecuación funcional (3.2).

Si tomamos $\gamma \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto y tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma(\xi + 2n\pi) = 0, \text{ c.d.s. } \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.37)$$

entonces la función $F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ dada por

$$\Phi F(\cdot) = \gamma/K(\cdot, \sigma^2/2),$$

satisface (3.36). Por ejemplo, si consideramos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que el soporte de φ esté contenido en $[0, 2\pi]$, entonces $\gamma(\xi) = \varphi(\xi) - \varphi(\xi - 2\pi)$ cumple (3.37), y la función correspondiente F decrece rápidamente. Otro ejemplo interesante que consideramos es la función

$$x^\beta d_\sigma(x) \{1 + (\lambda + \cos(2\pi(\beta + \log_q x))) \cos(\alpha \log_q x)\},$$

que tiene sucesión de momentos $\{q^{-(n+\beta)^2/2}\}_{n=0}^\infty$ aún cuando no satisface la ecuación funcional (3.2), donde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, y

$$\lambda = -e^{\sigma^{-2}\alpha^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \sigma^{-2}/2) \cos(2\pi x) \cos(\alpha x) dx.$$

Si el lector desea ver más ejemplos, puede consultar [49].

Para analizar el caso de Stieltjes-Wigert, necesitamos el *Teorema de la Convergencia Monótona* y una identidad (ver [26, página 236]) relacionada con los paréntesis con los trabajamos en la Sección 3.2.,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}} z^k}{(q; q)_k} = (-z; q)_\infty, \text{ para toda } z \in \mathbb{C} \text{ y } q \in (0, 1). \quad (3.38)$$

Teorema 3.17. Sean $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0, 1)$, $p > 0$ y $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ una función que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\left(x, \frac{1}{2\sigma^2}\right) h(x+n) dx = 0, \quad (3.39)$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Entonces la función $f(x) = x^\beta (-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty d_\sigma(x) \{1 + h(\beta + \log_q x)\}$ es una solución al Problema de los Momentos de Stieltjes-Wigert.

Demostración. Procediendo como en (3.19), podemos reescribir la igualdad (3.39) como sigue

$$\int_0^\infty x^{n+\beta} d_\sigma(x) h(\beta + \log_q x) dx = 0,$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Entonces usamos (3.38), el *Teorema de la Convergencia Monótona* y el hecho de que $x^{n+\beta} (-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty d_\sigma(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$, para toda $n \in \mathbb{N}_0$, para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2/2} p^k}{(q; q)_k} \int_0^\infty x^{n-k+\beta} d_\sigma(x) h(\beta + \log_q x) dx \\ = \int_0^\infty x^{n+\beta} d_\sigma(x) (-pq^{1/2}x^{-1}; q)_\infty h(\beta + \log_q x) dx \\ = 0, \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}_0$. De (3.25) y del Teorema 3.12, se concluye el resultado. \square

Si $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ es una función no nula que satisface (3.39), entonces por el Teorema 3.12 se sigue que f no satisface la ecuación funcional (3.21). Para ver algunos ejemplos de funciones que satisfacen la igualdad (3.39) el lector puede consultar [50].

Capítulo 4

El Criterio de Krein-Lin

En este capítulo estudiamos por primera vez el Problema de los Momentos sobre el eje real. El Teorema de Krein y el Teorema de Lin nos proporcionan condiciones suficientes para que una función f sea indeterminada y determinada respectivamente. La demostración que dio Akhiezer en [1] del Teorema de Krein, que ya había sido estudiado anteriormente, fue simplificada por Lin (ver [46]) en 1997.

Nos apoyamos también en la Condición de Carleman (ver [14], [64, página 19]) para la demostración del Teorema de Lin, y ocupamos el espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}_+^2)$ para dar una demostración corta del Teorema de Krein (ver [41]). Las Secciones 4.1 y 4.2 están basadas en lo escrito por Lin en [46], y la Sección 4.3 en el artículo *On the moment problem* ([31]) de Gut, el cual se escribió a partir del trabajo de Lin ([46]) y de una publicación reciente de Stoyanov ([68]). El trabajo de Gut está ligado a la Teoría de las funciones de variación regular y al conjunto introducido por Bondesson de densidades de probabilidad que son hiperbólica y completamente monótonas en [12]. Aquí trabajamos con variables aleatorias en espacios de probabilidad y exhibimos algunos ejemplos que se dan en el trabajo de Gut para ilustrar el criterio de Krein-Lin.

Krein nació el 3 de abril de 1907 en Kiev y fue una de las figuras más grandes de la escuela soviética de Análisis Funcional. Sus trabajos más destacados están relacionados con el Problema de los Momentos, Análisis Clásico, Teoría de Representación y Teoría de los Operadores (esto último ligado con problemas en Ciencias Físico-Matemáticas).

4.1. El Teorema de Krein

Como el título indica, la finalidad de esta sección es mostrar el criterio que establece Krein en su teorema y la demostración de éste. Para ello, introducimos el espacio de Hardy.

Definición 4.1. El espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}_+^2)$ está dado como sigue:

$$H^1(\mathbb{R}_+^2) = \left\{ f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{C} \mid \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)| dx < \infty \right\}.$$

Si $f \in H^1(\mathbb{R}_+^2)$, entonces existe el límite no tangencial de f dado por

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x+iy) \text{ c.d.s. } x \in \mathbb{R}.$$

Los siguientes resultados son fundamentales en la Teoría del Espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}_+^2)$ (ver [25, páginas 62-66]).

Lema 4.2. Sea $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ que satisface $h > 0$ en \mathbb{R} . Entonces existe $g \in H^1(\mathbb{R}_+^2)$ tal que $|\tilde{g}| = h$ c.d.s. en \mathbb{R} si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\ln(h(x))}{1+x^2} dx < \infty. \quad (4.1)$$

Lema 4.3. Sea $g \in H^1(\mathbb{R}_+^2)$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x) e^{itx} dx = 0 \text{ para toda } t \geq 0. \quad (4.2)$$

A continuación reproducimos la demostración corta del Teorema de Krein.

Teorema 4.4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función con sucesión de momentos finita que satisface además (4.1). Entonces f es indeterminada.

Demostración. El Lema 4.2 asegura que existe una función $g \in H^1(\mathbb{R}_+^2)$ tal que $|\tilde{g}| = f$ c.d.s. en \mathbb{R} y por el Lema 4.3 la función \tilde{g} cumple (4.2). Por hipótesis, para toda $n \in \mathbb{N}_0$, $s_n(f) < \infty$. Así que podemos derivar n veces la ecuación (4.2) con respecto de t , para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^n \tilde{g}(x) e^{itx} dx = 0, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}_0.$$

En particular, tomando $t = 0$,

$$s_n(\tilde{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \tilde{g}(x) dx = 0,$$

para toda $n \in \mathbb{N}_0$, por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \operatorname{Re}(\tilde{g}(x)) dx = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \operatorname{Im}(\tilde{g}(x)) dx,$$

para toda $n \in \mathbb{N}_0$. Dado que $|\tilde{g}(x)| > 0$ c.d.s. en \mathbb{R} , entonces $\operatorname{Re}(\tilde{g})$ e $\operatorname{Im}(\tilde{g})$ no pueden ser ambas nulas. Supongamos que $\operatorname{Re}(\tilde{g})$ no es nula, entonces $f \pm \operatorname{Re}(\tilde{g}) \geq f - |\tilde{g}| = 0$ c.d.s. en \mathbb{R} , con lo que se concluye que $f \pm \operatorname{Re}(\tilde{g})$ es una función no negativa distinta a f con sucesión de momentos igual a la de f . \square

En [46], Lin prueba su método con un ejemplo que estudió Berg en [9]: la variable aleatoria con distribución normal, cuyas potencias impares son indeterminadas. Lin hace notar que dicho resultado es una consecuencia inmediata del Teorema de Krein.

Es importante notar que el Teorema 4.4 sólo presenta una condición suficiente. De hecho se pueden encontrar ejemplos de funciones indeterminadas que no satisfacen (4.1) (ver [58]).

En [58] Pedersen demostró en 1998 una generalización del Criterio de Krein. Además dio un resultado similar al Criterio de Krein para medidas discretas (i.e. que tienen soporte en un conjunto a lo más numerable) con sucesión de momentos finita.



Figura 4.1: Mark Grigorevich Krein

4.2. El Teorema de Lin

Bajo hipótesis adicionales, Lin muestra que la divergencia de la integral en (4.1) es suficiente para asegurar que una función con sucesión de momentos finita es determinada.

Enunciamos un resultado muy importante para el Problema de los Momentos de Hamburger y que utilizaremos en la demostración del Teorema de Lin: la Condición de Carleman (ver [14, 64]).

Proposición 4.5. Sea $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{s_{2n}}} = \infty. \quad (4.3)$$

Entonces el problema de momentos relacionado es determinado.

Se puede dar un criterio similar para el Problema de los Momentos de Stieltjes; sólomente es necesario cambiar s_{2n} por s_n en la igualdad anterior.

En *On the moment problems* ([46]), Lin muestra que el siguiente teorema es un caso especial que utiliza la Condición de Carleman.



Figura 4.2: Taje Branquias Torsten Carleman

Teorema 4.6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función par, diferenciable y con sucesión de momentos finita. Supongamos que existe $x_0 > 0$ tal que f es decreciente en $[x_0, \infty)$, $g(x) = -xf'(x)/f(x)$ es creciente en $[x_0, \infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \text{ y}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\ln(f(x))}{1+x^2} dx = \infty.$$

Entonces f es determinada.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a la función $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ como $f_n(x) = x^{2n} f(x)$. Observamos que la derivada de f está dada por $f'_n(x) = x^{2n-1} f(x)[2n - g(x)]$. De la hipótesis

sobre g se sigue que f_n es estrictamente decreciente para x suficientemente grande. Dado que f_n es continua sobre cualquier subconjunto compacto de \mathbb{R} , se tiene que f_n alcanza su valor máximo global en $x_n > 0$. Claramente $g(x_n) = 2n$ y la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente, ya que g es creciente y

$$\frac{g(x_n)}{2} = n < n + 1 = \frac{g(x_{n+1})}{2}.$$

Dado que g es creciente a infinito, se sigue que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > x_0$ y $f(x) < 1$ si $x > x_N$.

Usando el hecho de que f alcanza su valor máximo en $[0, x_N]$ y que

$$\int_{x_N}^{\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{x^2} dx \leq (x_{n+1})^{2n+2} f(x_0) \int_{x_N}^{\infty} \frac{dx}{x^2},$$

acotamos los momentos pares de f :

$$\begin{aligned} s_{2n}(f) &= 2 \int_0^{\infty} x^{2n} f(x) dx \\ &= 2 \left[\int_0^{x_N} x^{2n} f(x) dx + \int_{x_N}^{\infty} \frac{x^{2n+2} f(x)}{x^2} dx \right] \\ &\leq 2 \left[\frac{C'}{x_N} + \left(\frac{1}{x_N} \right) f(x_0) \right] (x_{n+1})^{2n+2} \\ &= C(x_{n+1})^{2n+2}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

si $n \geq N - 1$, donde $C' = \max\{f(x) | x \in [0, x_N]\}$. Usamos integración por partes para obtener

$$\begin{aligned} \int_{x_N}^{x_n} -\frac{\ln(f(x))}{1+x^2} dx - \frac{\ln(f(x))}{x} \Big|_{x_N}^{x_n} &\leq \int_{x_N}^{x_n} -\frac{\ln(f(x))}{x^2} dx - \frac{\ln(f(x))}{x} \Big|_{x_N}^{x_n} \\ &= \int_{x_N}^{x_n} \frac{g(x)}{x^2} dx \\ &\leq \sum_{m=N}^n \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{2m}{x^2} dx \\ &= \sum_{m=N}^n 2m \left(\frac{1}{x_{m-1}} - \frac{1}{x_m} \right) \\ &\leq (2N + 2) \sum_{m=N}^n \frac{1}{x_m}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Y así se puede asegurar la divergencia de la serie

$$\sum_{p=m}^{\infty} \frac{1}{x_p} = \infty. \tag{4.6}$$

Usamos (4.4), (4.6) y la Condición de Carleman para concluir. \square

En la siguiente sección mostramos los criterios correspondientes al intervalo $(0, \infty)$ junto con algunos ejemplos.

Gut ([31]), Lin ([47]) y Stoyanov ([68]) han trabajado con el Criterio de Krein-Lin para mostrar que algunas funciones de densidad de variables aleatorias positivas son (in)determinadas.

4.3. Aplicaciones

Nos apoyamos en el artículo de Allan Gut *On the Moment Problem* ([31]) para escribir esta sección. Aquí se presentan algunas aplicaciones conocidas del Criterio de Krein-Lin.

El siguiente resultado es un corolario del Teorema de Krein, y es demostrado por Slud en [65]. Las hipótesis son parecidas, pero ahora el soporte de la función es \mathbb{R}_+ .

Corolario 4.7. *Sea $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función con sucesión de momentos finita, que cumpla*

$$\int_0^\infty -\frac{\ln(f(x^2))}{1+x^2} dx < \infty. \quad (4.7)$$

Entonces f es indeterminada.

Demostración. Se define $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $g(x) = |x|f(x^2)$. Así se tiene que $s_{2n}(g) = s_n(f)$, y que $s_{2n+1}(g) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$, lo cual implica que si f es determinada, también lo es g . Dado que $\int_{\mathbb{R}_+} \ln x / (1+x^2) dx = 0$, se sigue que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{-\ln(g(x))}{1+x^2} dx < \infty,$$

y la conclusión se sigue del Teorema de Krein. □

Corolario 4.8. *Sea $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función diferenciable y con sucesión de momentos finita. Supongamos que existe $x_0 > 0$ tal que f es decreciente en $[x_0, \infty)$, $g(x) = -xf'(x)/f(x)$ es creciente en $[x_0, \infty)$,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \text{ y}$$

$$\int_0^\infty -\frac{\ln(f(x^2))}{1+x^2} dx = \infty.$$

Entonces f es determinada.

Los ejemplos que damos a conocer están relacionados con el estudio de potencias de variables aleatorias.

Definición 4.9. Sea $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Decimos que la función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria (en Ω) si

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq r\} \in \Sigma \text{ para toda } r \in \mathbb{R}.$$

Dada una variable aleatoria X , definimos su función de distribución como sigue

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Decimos que la variable aleatoria X es absolutamente continua si F_X es absolutamente continua. Además la función de densidad f de X , es por definición la derivada de Lebesgue-Radon-Nikodym de F_X , es decir

$$dF_X = f dx.$$

En adelante, trabajamos sólo con variables aleatorias positivas y absolutamente continuas, es decir, aquellas que tienen por contradominio a \mathbb{R}_+ .

Ya teniendo a la mano estos nuevos conceptos, retomamos lo visto en los Teoremas de Krein y Lin para introducir clases de variables aleatorias.

Definición 4.10. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua. Decimos que $X \in \mathcal{L}$ si tiene una función de densidad f que es positiva, diferenciable y que cumple con las hipótesis del Corolario 4.8.

Definición 4.11. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua. Decimos que $X \in \mathcal{K}_c$ ($X \in \mathcal{K}_d$), si su función de densidad f es positiva y (no) cumple (4.7).

Cambiamos la notación en función de las variables aleatorias. Es bien conocida la siguiente igualdad

$$s_n(X) = \int_{\Omega} X^n d\mathbb{P} = \int_0^{\infty} x^n f(x) dx, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}_0,$$

donde f es la función de densidad de X .

Así, reformulamos los Teoremas de Krein-Lin:

Proposición 4.12. Sea X una variable aleatoria con sucesión de momentos finita. Entonces:

1. Si $X \in \mathcal{K}_c$, entonces X es indeterminada.
2. Si $X \in \mathcal{L} \cap \mathcal{K}_d$, entonces X es determinada.

Dada $r > 0$, podemos hablar de la r -ésima potencia X^r de una variable aleatoria positiva X . En los siguientes lemas, aparecen condiciones para que la potencia de una variable aleatoria pertenezca a las clases mencionadas.

Dado que la función de distribución de X^r está dada por

$$F_{X^r}(x) = \mathbb{P}(X^r \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x^{1/r}) = \int_0^{x^{1/r}} f(t)dt,$$

por el *Teorema de Diferenciación de Lebesgue* se tiene

$$rdF_{X^r}(x) = x^{1/r-1}f(x^{1/r})dx.$$

Lema 4.13. *Sea $r > 0$ y X una variable aleatoria con densidad f . Si $X \in \mathcal{L}$, entonces $X^r \in \mathcal{L}$.*

Demostración. Haciendo un sencillo cálculo, se puede ver que

$$-\frac{x(x^{1/r-1}f(x^{1/r}))'}{x^{1/r-1}f(x^{1/r})} = 1 - \frac{1}{r} + g(x^{1/r}),$$

de donde se sigue el resultado. □

Lema 4.14. *Sea X una variable aleatoria y $r > 0$. Entonces $X^r \in \mathcal{K}_d$ si y sólo si*

$$\int_0^\infty -\frac{x^{r-1} \ln f(x^2)}{1+x^{2r}} dx = \infty.$$

Demostración. Sustituyendo la función de densidad de X^r en (4.7) obtenemos que

$$\int_0^\infty -\frac{\ln(r^{-1}x^{2/r-2}f(x^{2/r}))}{1+x^2} = \infty.$$

Separamos esta integral usando las propiedades del logaritmo y hacemos el cambio de variable $y = x^{1/r}$ para concluir:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty -\frac{\ln(r^{-1}x^{2/r-2}f(x^{2/r}))}{1+x^2} dx &= \int_0^\infty -\frac{\ln(r^{-1}x^{2/r-2})}{1+x^2} dx + \int_0^\infty -\frac{\ln f(x^{2/r})}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi \ln r}{2} + r \int_0^\infty -\frac{y^{r-1} \ln f(y^2)}{1+y^{2r}} dy. \end{aligned}$$

□

Mostramos a continuación algunos ejemplos de funciones de densidad a las cuales aplicamos los criterios que se estudiaron a lo largo de este capítulo.

1. La densidad log-normal.

Ya hemos trabajado anteriormente con esta función y sabemos que tiene sucesión de momentos finita, y que es una función indeterminada. Stoyanov (ver [68]) demuestra que X^r es indeterminada ocupando el hecho de que $X^r \in \mathcal{K}_c$ para toda $r > 0$. Sin embargo, es conveniente mencionar que $X^r \in \mathcal{L}$ para toda $r > 0$, ya que $X \in \mathcal{L}$.

2. La función gaussiana inversa generalizada.

Dados $\beta \in \mathbb{R}$ y $b_1, b_2 > 0$, definimos

$$f(x) = Cx^{\beta-1}e^{-(b_1x+b_2/x)}, \text{ donde } x > 0.$$

El caso $\beta = -1/2$ de esta función fue estudiado por Stoyanov (ver [72, 73]). Una vez más podemos afirmar que $X^r \in \mathcal{L}$ para toda $r > 0$, y se tiene que $X^r \in \mathcal{K}_c$ si y sólo si

$$\int_0^\infty \frac{x^{r-1} ((1-\beta) \ln x + b_1x^2 + b_2/x^2)}{1+x^{2r}} dx < \infty,$$

que sucede sólo si $r > 2$. Concluimos entonces que una condición necesaria y suficiente para que X^r sea determinada es que $r \leq 2$.

3. La función gamma generalizada.

Dados $\alpha, \beta, \gamma > 0$, definimos

$$f(x) = Cx^{\beta-1}e^{-x^\alpha/\gamma}, \text{ donde } x > 0.$$

Se puede verificar que $X^r \in \mathcal{L}$, para toda $r > 0$. Analizando la integral de Krein, obtenemos que $X \in \mathcal{K}_c$ si y sólo si

$$\int_0^\infty \frac{x^{r-1}x^{2\alpha}}{1+x^{2r}} dx < \infty,$$

de donde podemos concluir que X^r es determinada si y sólo si $r \leq 2\alpha$.

El lector puede consultar [12, 72, 73] si desea conocer más acerca de los ejemplos aquí vistos y de algunas de sus propiedades.

Capítulo 5

Los Teoremas de Hamburger, Stieltjes y Nevanlinna

En este capítulo se estudian sucesiones de momentos de medidas generales. Hablamos del trabajo hecho por Nevanlinna en 1922, el cuál consiste en parametrizar el conjunto de las soluciones a un problema de momentos indeterminado, usando la Teoría de las Funciones Holomorfas en el semiplano superior.

En este trabajo también contribuye M. Riesz, quién da una bella caracterización para algunas medidas solución. Esto se puede encontrar en *Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant* ([62]).

Hamburger trabajó en el Problema de los Momentos y lo usó como herramienta para el estudio de las fracciones continuas. En su trabajo [32], Hamburger da una versión más fuerte que el resultado de su colega Perron (ver Sección 1.1) y lo extiende a sucesiones $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$. Hamburger aplica el método de elección de Grommer a las fracciones continuas correspondientes $f(z)$. Con esto obtuvo una subsucesión formada por elementos $f_{n_\nu}(z)$ que cumplían

$$f_{n_\nu}(z) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}, \text{ cuando } \nu \text{ tiende a } \infty.$$

Entonces afirmó que las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^n d\varphi(u),$$

existen para toda $n \in \mathbb{N}_0$ y cada una de ellas es igual a s_n .

A partir de eso es que nació el Problema de los Momentos de Hamburger. En 1920 se publica la primera parte de su gran trabajo *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentproblems* ([33]), donde trabaja profunda y extensivamente el Problema de los Momentos.

Hamburger nació en Berlín el 5 de agosto de 1889, y comenzó a trabajar en la Universidad de esta misma ciudad en 1921. En 1925 se trasladó a la Universidad de Colonia. Cuando comenzó la Segunda Guerra Mundial, abandonó el país y ejerció en la Universidad de Southampton en el año de 1941. En 1947, se movió a Turquía para trabajar ahora en la Universidad de Ankara. Retornó a Colonia en 1953, donde murió 3 años más tarde.

Nevanlinna fue un matemático finlandés. Para Nevanlinna, el año 1922 resultó muy importante para su vida como matemático. Trabajando con funciones analíticas, creó una nueva rama de la Matemática que hoy se conoce como la *Teoría de Nevanlinna*. Fue también en 1922 cuando comenzó a trabajar en la Universidad de Helsinki. Nevanlinna se caracterizó por mostrar gran interés en la cultura y en la política.

5.1. Los Teoremas de Hamburger y Stieltjes

Para la demostración del primer teorema, trabajamos con un nuevo concepto: la transformada de Stieltjes. Los detalles se omiten y se recomienda al lector consultar [77, Capítulos XIII, XIV] en caso de que le interese conocer más a fondo este tema.

Definición 5.1. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente, acotada, que satisface

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(-x) = 1.$$

La transformada de Stieltjes de F es la función analítica definida en el semiplano superior dada por

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(u)}{z - u}. \quad (5.1)$$

El siguiente resultado aparece en el trabajo de Hamburger *Über eine Erweiterung des Stieltjeschen Momentenproblems* ([33]). En éste se determina una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución para un problema de momentos sobre el eje real.

Teorema 5.2. Sea $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y F como en la definición anterior. La transformada de Stieltjes f de F satisface

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (iy)^r \left(f(iy) - \sum_{n=1}^r \frac{s_{n-1}}{(iy)^n} \right) = 0, \text{ para toda } r \in \mathbb{N}, \quad (5.2)$$

si y sólo si F es solución al problema de momentos relacionado con $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Demostración. La primera parte se hace por inducción sobre los números pares no negativos. Por hipótesis se tiene

$$s_0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iy}{iy - u} dF(u).$$

Ocupando el hecho de que $s_0 \in \mathbb{R}$ y el *Teorema de la Convergencia Monótona* obtenemos

$$\begin{aligned} s_0 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(u)}{1 + (u/y)^2} - i \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{uy}{y^2 + u^2} dF(u) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(u)}{1 + (u/y)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF. \end{aligned}$$

Suponemos que se cumple el resultado para $2k$ con $k \in \mathbb{N}_0$. Haciendo uso de la linealidad de la integral y de la hipótesis de inducción, podemos reescribir a f como sigue

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(u)}{z - u} = \sum_{n=1}^{2k+1} \frac{s_{n-1}}{z^n} + \frac{1}{z^{2k+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k+1}}{z - u} dF(u).$$

Introducimos la siguiente función holomorfa definida en el semiplano superior

$$f_0(z) = z^{2k+1} \left(f(z) - \sum_{n=1}^{2k+1} \frac{s_{n-1}}{z^n} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k+1}}{z - u} dF(u). \quad (5.3)$$

Ocupando (5.2) y (5.3) se obtiene

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (iy)^r \left(f_0(iy) - \sum_{n=1}^r \frac{s_{2k+n}}{(iy)^n} \right) = 0, \quad (5.4)$$

para toda $r \in \mathbb{N}$. Haciendo $r = 1$ en (5.4) obtenemos

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= \lim_{y \rightarrow \infty} iy f_0(iy) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k+1}}{1 + (u/y)^2} dF(u) - i \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu^{2k+2}}{u^2 + y^2} dF(u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u^{2k+1} dF. \end{aligned}$$

De donde se sigue que el resultado es válido para $2k + 1$. Poniendo $r = 2$ en (5.4) obtenemos

$$\begin{aligned} s_{2k+2} &= \lim_{y \rightarrow \infty} iy (iy f_0(iy) - s_{2k+1}) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} -y^2 f_0(iy) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k+2}}{1 + (u/y)^2} dF(u) + i \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^3 u^{2k+1}}{u^2 + y^2} dF(u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u^{2k+2} dF. \end{aligned}$$

Ahora mostramos que (5.2) es también una condición suficiente. Ocupamos nuevamente la linealidad de las integrales para obtener

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(u)}{z-u} = \sum_{n=1}^r \frac{s_{n-1}}{z^n} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^r}{z^r(z-u)} dF(u).$$

De la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} (iy)^r \left(f(iy) - \sum_{n=1}^r \frac{s_{n-1}}{(iy)^n} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^r}{iy-u} dF(u) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{r+1}}{u^2+y^2} dF(u) - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu^r}{u^2+y^2} dF(u), \end{aligned} \quad (5.5)$$

para toda $r \in \mathbb{N}$. Dado que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{r+1}}{u^2+y^2} dF(u) = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu^r}{u^2+y^2} dF(u) = 0,$$

se sigue el resultado. □

Antes de ver los teoremas centrales de esta sección, introducimos la matriz de Hankel.

Definición 5.3. Sea $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Para $r \in \mathbb{N}_0$, la r -ésima matriz de Hankel está dada por

$$D_r = (s_{n+m})_{0 \leq n, m \leq r} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_r \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_r & s_{r+1} & \dots & s_{2r} \end{pmatrix}$$

A continuación se muestran condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de soluciones al Problema de los Momentos de Hamburger y de Stieltjes. En ambos casos se demuestra sólo una implicación. El lector puede consultar [33, 66] y [77, Capítulo XVII] para la parte restante.

Teorema 5.4. Sea $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Entonces existe una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y acotada que cumple

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF,$$

para toda $n \in \mathbb{N}_0$, si y sólo si

$$\det(D_r) > 0, \text{ para toda } r \in \mathbb{N}_0. \quad (5.6)$$

Demostración. Supongamos que F es una solución al problema de momentos correspondiente, tenemos que

$$\sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r s_{n+m} u_n u_m = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r u_n u_m x^{n+m} dF = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^r u_n x^n \right)^2 dF > 0,$$

para todo vector no nulo $(u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r$. Por lo tanto se cumple (5.6) para todo $r \in \mathbb{N}_0$. \square



Figura 5.1: Hans Ludwig Hamburger

Teorema 5.5. Sea $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Entonces existe una función $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y acotada que cumple

$$s_n = \int_0^{\infty} x^n dF,$$

para toda $n \in \mathbb{N}_0$, si y sólo si se cumple (5.6) y además

$$\det \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{r+1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r+1} & s_{r+2} & \dots & s_{2r+1} \end{pmatrix} > 0, \text{ para toda } r \in \mathbb{N}_0. \quad (5.7)$$

Demostración. La condición (5.6) se demuestra como antes. Claramente

$$\sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r s_{n+m+1} u_n u_m = \int_0^{\infty} x \left(\sum_{n=0}^r u_n x^n \right)^2 dF > 0,$$

para todo vector no nulo $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}_0$. \square

Otro resultado dado por Hamburger se enuncia a continuación (ver [33]).

Teorema 5.6. *Sea $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ una sucesión y supongamos que el problema de momentos relacionado tiene solución, entonces el problema de momentos es determinado si y sólo si*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\det(s_{m+n})_{0 \leq m, n \leq r}}{\det(s_{m+n})_{2 \leq m, n \leq r}} = 0.$$

Hace poco, Berg, Chen e Ismail (ver [8]) demostraron que el problema de momentos relacionado con $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ es determinado si y sólo si el valor propio más pequeño de la n -ésima matriz de Hankel tiende a cero cuando n tiende a infinito.

5.2. La Parametrización de Nevanlinna

En esta sección trabajamos con medidas μ , el correspondiente espacio $\mathcal{L}^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ dotado con el producto interior usual, donde \mathcal{L} representa a la compleción de los borelianos en \mathbb{R} .

Sea μ una medida con $s_n(\mu) < \infty$, para toda $n \in \mathbb{N}_0$. Se aplica el *Teorema de Ortonormalización de Gram-Schmidt* a la base canónica de los polinomios $\{1, x, x^2, \dots\} \subset \mathcal{L}^2(\mu)$ para obtener un conjunto de polinomios ortonormales $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, donde

$$P_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{s_0}}, \quad y \quad P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(D_{n-1})\det(D_n)}} \det \begin{pmatrix} s_0(\mu) & s_1(\mu) & \dots & s_n(\mu) \\ s_1(\mu) & s_2(\mu) & \dots & s_{n+1}(\mu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1}(\mu) & s_n(\mu) & \dots & s_{2n-1}(\mu) \\ 1 & x & \dots & x^n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1,$$

donde D_n representa a la n -ésima matriz de Hankel. Convenimos poner $\det(D_0) = s_0$.

Definición 5.7. *Si μ es una medida con sucesión de momentos finita, entonces los polinomios de la segunda clase $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ están dados por*

$$Q_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y} d\mu(y),$$

para toda $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$, donde P_n representa al n -ésimo polinomio ortonormal.

Es claro que P_n y Q_n son polinomios de grado n y $n - 1$ respectivamente. Las sucesiones de polinomios ortonormales $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ y la de polinomios de la segunda clase $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ son muy

importantes en el estudio del Problema de los Momentos. Hamburger demostró que el problema de momentos relacionado con $\{s_n(\mu)\}_{n=0}^{\infty}$ es indeterminado si y sólo si existe $x \in \mathbb{R}$ que cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((P_n(x))^2 + (Q_n(x))^2) < \infty.$$

Antes de describir la Parametrización de Nevanlinna, vemos una propiedad importante del conjunto de medidas solución. Dada $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión, denotamos con $\mathcal{V}(\{s_n\}_{n=0}^{\infty})$ al conjunto de todas las medidas que son solución al problema de momentos relacionado. Claramente $\mathcal{V}(\{s_n\}_{n=0}^{\infty})$ es un conjunto convexo. Observamos entonces que si el problema de momentos relacionado es indeterminado, entonces $\mathcal{V}(\{s_n\}_{n=1}^{\infty})$ es infinito, además se le puede dotar de una topología compacta. El siguiente concepto también es importante en el trabajo de Nevanlinna.

Definición 5.8. Decimos que $\varphi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{C}$ está en la clase de Pick ($\varphi \in \mathcal{P}$) si es holomorfa en \mathbb{R}_+^2 y $\text{Im}(\varphi(z)) \geq 0$, para toda $z \in \mathbb{R}_+^2$.

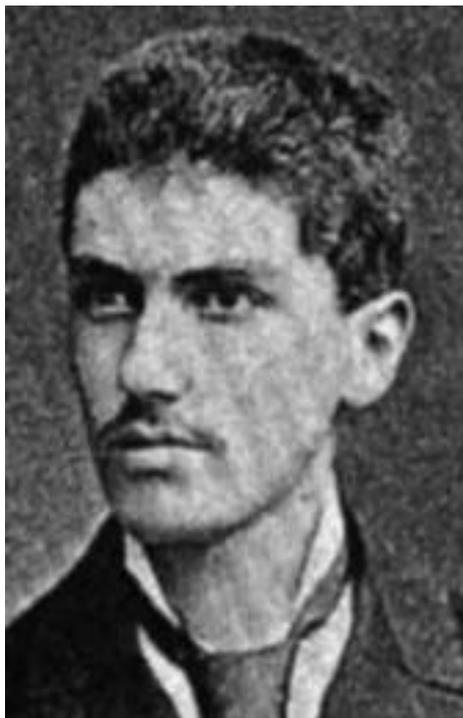


Figura 5.2: Georg Alexander Pick

Es bien conocido que cualquier función f en \mathcal{P} se puede extender a una función holomorfa F en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (basta poner $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ si $z \in \mathbb{R}_-^2$). Nevanlinna (ver [54]) demostró el siguiente resultado.

Teorema 5.9. Si $\{s_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ es tal que el problema de momentos relacionado es indeterminado, entonces la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_\varphi(u)}{u-z} = -\frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)}, \text{ con } z \in \mathbb{R}_+^2,$$

establece un homeomorfismo entre $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{V}(\{s_n\}_{n=1}^\infty)$, donde \mathcal{P} hereda la topología de la convergencia normal (i.e. convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$), y

$$\begin{aligned} A(z) &= z \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(0)Q_n(z), \quad C(z) = 1 + z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)Q_n(z), \\ B(z) &= -1 + z \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(0)P_n(z), \quad D(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)P_n(z). \end{aligned}$$

Para ver una demostración, el lector puede consultar [1, Capítulo 3]. Observamos que en esta caracterización las medidas están dadas implícitamente. Es necesario aplicar la transformación inversa de Stieltjes (fórmula de Stieltjes-Perron) para poder obtener la medida buscada. De aquí la importancia de los resultados que se presentan en el Capítulo 3: las soluciones se dan de forma explícita.

Un caso particular de lo anterior son las funciones constantes. Si $\varphi(z) = c$, para toda $z \in \mathbb{R}_+^2$, donde $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces μ_φ es una medida discreta dada por

$$\mu_\varphi = \sum_{x \in \Lambda_c} \rho(x)\delta_x,$$

donde Λ_c es el conjunto de ceros de la función holomorfa $cB - D$ (o B si $c = \infty$), $\rho : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ está dada por

$$\frac{1}{\rho(x)} = B'(x)D(x) - B(x)D'(x),$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, y δ_x es la medida de Dirac en el punto x .

También existe una parametrización análoga para un problema de momentos indeterminado en \mathbb{R}_+ . En *The moment problem associated with the Stieltjes-Wigert polynomials* ([21]), Christiansen encuentra las funciones holomorfas A, B, C, D de la parametrización de Nevanlinna para las soluciones al Problema de los Momentos de la Densidad Log-Normal.

Lo que mostramos a continuación es una familia de medidas discretas que son soluciones al Problema de los Momentos de la Log-Normal que se estudió en el Capítulo 3.

$$\mu_c = \frac{1}{k(c)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c^m q^{m^2/2} \delta_{cq^m},$$

donde $q \in (0, 1)$ y

$$k(c) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c^m q^{m^2/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Es claro que estas medidas son solución, pues

$$\begin{aligned} s_n(\mu_c) &= \frac{1}{k(c)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c^m q^{m^2/2} (cq^m)^n \\ &= \frac{q^{-n^2/2}}{k(c)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c^{m+n} q^{(m+n)^2/2} \\ &= q^{-n^2/2}, \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. En 1998 Berg (ver [6]) utilizó integración vectorial para obtener soluciones absolutamente continuas al Problema de los Momentos de la Log-Normal a partir de la familia $\{\mu_c\}_{c \in \mathbb{R}}$, y en ese mismo año halló una nueva familia de medidas discretas que también son soluciones al Problema de los Momentos de la Densidad Log-Normal (ver [7]):

$$\mu_s = \frac{1}{c(q^{1/2})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k^2/2+k/2} (1 + s(-1)^k) \delta_{q^{k+1/2}}, \quad s \in [-1, 1],$$

lo cual es una consecuencia de la identidad

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{k^2/2+k/2} = 0.$$

El nuevo método que desarrolló Christiansen (ver [21]) en 2003, permite hallar otras medidas discretas que son soluciones al Problema de los Momentos de la Densidad Log-Normal.



Figura 5.3: Rolf Nevanlinna

Apéndice A

Análisis de Aproximación

Para estudiar los siguientes temas se recomienda al lector consultar [4, páginas 169-172] .

A.1. Los Polinomios de Bernstein

Introducimos los Polinomios de Bernstein en la Sección 2.1 y a continuación mostramos algunas de sus propiedades más importantes. Si $r \in \mathbb{N}_0$ y $m = 0, \dots, r$, entonces se cumplen:

1. Partición de la unidad.

$$\sum_{m=0}^r B_{m,r}(x) = 1, \text{ para toda } x \in [0, 1]. \quad (\text{A.1})$$

Demostración.

$$\sum_{m=0}^r B_{m,r}(x) = \sum_{m=0}^r \binom{r}{m} x^m (1-x)^{r-m} = (x + (1-x))^r = 1.$$

□

2. No-negatividad.

$$B_{m,r}(x) \geq 0, \text{ para toda } x \in [0, 1].$$

3. Simetría.

$$B_{m,r}(x) = B_{r-m,r}(1-x), \text{ para toda } x \in [0, 1].$$

4. Definición recursiva.

$$B_{m,r}(x) = (1-x)B_{m,r-1}(x) + xB_{m-1,r-1}(x), \text{ para toda } x \in [0, 1],$$

donde convenimos $B_{r+1,r}(x) \equiv 0 \equiv B_{-1,r}(x)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (1-x)B_{m,r-1}(x) + xB_{m-1,r-1}(x) &= \binom{r-1}{m} x^m (1-x)^{r-m} + \binom{r-1}{m-1} x^m (1-x)^{r-m} \\ &= \binom{r}{m} x^m (1-x)^{r-m} \\ &= B_{m,r}(x). \end{aligned}$$

□

Proposición A.1. Sean $r \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \{0, \dots, r\}$. Entonces para toda $x \in [0, 1]$,

1.

$$xB_{m,r}(x) = \frac{m+1}{r+1} B_{m+1,r+1}(x). \quad (\text{A.2})$$

2.

$$(1-x)B_{m,r}(x) = \frac{r-m+1}{r+1} B_{m,r+1}(x). \quad (\text{A.3})$$

3.

$$B_{m,r-1}(x) = \left(\frac{r-m}{r}\right) B_{m,r}(x) + \left(\frac{m+1}{r}\right) B_{i+1,r}(x). \quad (\text{A.4})$$

Demostración. Sólo demostramos el tercer enunciado,

$$\begin{aligned} \binom{r}{m}^{-1} B_{m,r}(x) + \binom{r}{m+1}^{-1} B_{m+1,r}(x) &= x^m (1-x)^{r-m} + x^{m+1} (1-x)^{r-(m+1)} \\ &= x^m (1-x)^{r-m-1} ((1-x) + x) \\ &= \binom{r-1}{m}^{-1} B_{m,r-1}(x). \end{aligned}$$

□

A.2. Teorema de Aproximación de Weierstrass

Lema A.2. Sea $r \in \mathbb{N}_0$. Entonces

1.

$$\sum_{m=0}^r B_{m,r}(x)(m - rx) = 0, \text{ para toda } x \in [0, 1].$$

2.

$$\sum_{m=0}^r B_{m,r}(x)(m - rx)^2 = rx(1 - x) \leq \frac{r}{4}, \text{ para toda } x \in [0, 1].$$

Teorema A.3 (Aproximación de Weierstrass). Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una sucesión de polinomios $\{P_r\}_{r=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}[x]$ tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_r \equiv f,$$

donde la convergencia es uniforme en $[0, 1]$.

Demostración. Para cada $r \in \mathbb{N}$ definimos $P_r \in \mathbb{R}[x]$ como sigue:

$$P_r(x) = \sum_{m=0}^r B_{m,r}(x) f\left(\frac{m}{r}\right), \text{ para toda } x \in [0, 1]. \quad (\text{A.5})$$

Como f es uniformemente continua en $[0, 1]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$, si $|x - y| < \delta$, $x, y \in [0, 1]$. Además sabemos que existe $C \geq 0$ tal que $|f(x)| < C$, para toda $x \in [0, 1]$.

A partir de (A.1) y de (A.5) obtenemos

$$f(x) - P_r(x) = \sum_{m=0}^r B_{m,r}(x) \left(f(x) - f\left(\frac{m}{r}\right) \right),$$

para toda $r \in \mathbb{N}$ y $x \in [0, 1]$. Por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\left| f(x) - P_r(x) \right| \leq \sum_{m=0}^r B_{m,r}(x) \left| f(x) - f\left(\frac{m}{r}\right) \right|, \quad (\text{A.6})$$

para toda $r \in \mathbb{N}$. Procedemos entonces a dividir la suma del lado derecho de (A.6),

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^r B_{m,r}(x) \left| f(x) - f\left(\frac{m}{r}\right) \right| &= \sum_{|x - m/r| < \delta} B_{m,r}(x) \left| f(x) - f\left(\frac{m}{r}\right) \right| \\ &+ \sum_{|x - m/r| \geq \delta} B_{m,r}(x) \left| f(x) - f\left(\frac{m}{r}\right) \right|, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

para toda $r \in \mathbb{N}$. Es evidente que el primer sumando de (A.7) cumple

$$\sum_{|x-m/r|<\delta} B_{m,r}(x) \left| f(x) - f\left(\frac{m}{r}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{A.8})$$

Ocupamos el Lema A.2 para analizar el segundo sumando:

$$\begin{aligned} \sum_{|x-m/r|\geq\delta} B_{m,r}(x) \left| f(x) - f\left(\frac{m}{r}\right) \right| &\leq 2C \sum_{|x-m/r|\geq\delta} B_{m,r}(x) \\ &\leq \frac{2C}{\delta^2} \sum_{|x-m/r|\geq\delta} B_{m,r}(x) \left(x - \frac{m}{r}\right)^2 \\ &\leq \frac{C}{2\delta^2 r}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Basta tomar $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$\frac{C}{2\delta^2 r} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

A.3. Productos Infinitos

Para este tema nos apoyamos en [29, Capítulo 8]

Definición A.4. Sea $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. El producto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$$

es convergente si

1. Sólomente un número finito de a_j 's es igual a -1 .
2. Dada $N_0 > 0$ tal que $a_j \neq -1$ si $j > N_0$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=N_0+1}^N (1 + a_j)$$

existe y no es nulo

Si $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$ converge, entonces definimos su valor como

$$\left[\prod_{j=1}^{N_0} (1 + a_j) \right] \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=N_0+1}^{\infty} (1 + a_j).$$

Proposición A.5. Sea $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, entonces se cumple

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

si y sólo si

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |a_j|)$$

converge.

Teorema A.6. Si el producto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |a_j|)$$

converge, entonces también lo hace

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j).$$

Apéndice B

Teoría de la Medida

Para la demostración de los siguientes tres resultados, nos apoyamos en [3, Capítulos 4,5,8].

B.1. Teorema de la Convergencia Monótona

Teorema B.1 (Convergencia Monótona). *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de funciones no negativas e integrables sobre \mathbb{R} tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv f,$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n dx. \quad (\text{B.1})$$

Demostración. Es evidente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f dx. \quad (\text{B.2})$$

Ahora vemos la otra desigualdad. Tomamos $\alpha \in (0, 1)$ y φ una función simple que satisfaga $0 \leq \varphi \leq f$. Definimos una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, como sigue

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \geq \alpha \varphi(x) \right\}.$$

Entonces $A_n \subset A_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ahora observamos que

$$\int_{A_n} \alpha \varphi(x) dx \leq \int_{A_n} f_n(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Tomando el límite en la desigualdad tenemos

$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Como lo anterior se cumple para toda $\alpha \in (0, 1)$, se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx,$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \right\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx. \quad (\text{B.3})$$

□

Corolario B.2. Sean $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de funciones no negativas e integrables sobre \mathbb{R} tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv f,$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dF = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n dF. \quad (\text{B.4})$$

B.2. Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

Lema B.3 (Fatou). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de funciones no negativas e integrables sobre \mathbb{R} . Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Demostración. Definimos a cada término de la sucesión $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ como sigue:

$$g_m = \inf \{f_m, f_{m+1}, \dots\}.$$

Claramente $g_m \leq f_n$, si $n \geq m$, y así

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx, \text{ si } m \leq n.$$

Tomando el límite inferior tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx, \text{ para toda } m \in \mathbb{N}.$$

Como $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ es creciente y converge a $\liminf f_n$, obtenemos del *Teorema de la Convergencia Monótona*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

□

Teorema B.4 (Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables sobre \mathbb{R} tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv f.$$

Si existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, tal que $|f_n| \leq g$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx. \quad (\text{B.5})$$

Demostración. Usamos el hecho de que $g + f_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y el *Lema de Fatou* para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (g + f(x)) dx &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (g + f_n(x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx, \end{aligned}$$

y tener así

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx. \quad (\text{B.6})$$

Análogamente, usamos que $g - f_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y el *Lema de Fatou* para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx. \quad (\text{B.7})$$

□

B.3. Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

Teorema B.5 (Lebesgue-Radon-Nikodym). *Sea μ una medida absolutamente continua definida en (los borelianos de) \mathbb{R} . Entonces existe una función positiva f tal que*

$$d\mu = f dx.$$

B.4. Teorema de Diferenciación de Lebesgue

Una demostración de lo siguiente puede ser hallada en [63, Capítulo 8].

Teorema B.6 (Diferenciación de Lebesgue). *Sea f una función integrable sobre \mathbb{R} . Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define por*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$

entonces $F \in NBV(\mathbb{R})$, F es absolutamente continua y

$$F'(x) = f(x) \text{ c.d.s. } x \in \mathbb{R}.$$



Figura B.1: Henri Léon Lebesgue

Apéndice C

Análisis Funcional

C.1. Teorema de Extensión de Hahn-Banach

La demostración del siguiente resultado está basada en [52, páginas 132-141]

Teorema C.1 (Extensión de Hahn-Banach). *Sea X un espacio vectorial normado sobre \mathbb{R} y $S \subset X$ un subespacio propio. Si M es una funcional lineal definida en S y existe $C > 0$ tal que*

$$|M(x)| \leq C\|x\|, \text{ para toda } x \in S,$$

entonces existe una extensión lineal \widetilde{M} de M a todo X tal que

$$|\widetilde{M}(x)| \leq C\|x\|, \text{ para toda } x \in X.$$

Demostración. Consideramos $z \in X \setminus S$ fijo. Para cualesquiera $x, y \in S$, tenemos $M(x) - M(y) \leq C\|x + z\| + C\|-z - y\|$ y $-C\|-z - y\| - M(y) \leq C\|x + z\| - M(x)$. Así,

$$\alpha = \sup_{y \in S} \{-C\|-z - y\| - M(y)\} \leq C\|x + z\| - M(x),$$

para toda $x \in S$, lo que implica que

$$\alpha \leq \inf_{x \in S} \{C\|x + z\| - M(x)\}.$$

Por lo tanto, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$-C\|-z - y\| - M(y) \leq r \leq C\|y + z\| - M(y), \text{ para toda } y \in S. \quad (\text{C.1})$$

Definimos entonces el subespacio $S_z = \{x + tz \mid x \in S \text{ y } t \in \mathbb{R}\}$. Es claro que para $w \in S_z$, la representación $w = x + tz$ es única, ya que $z \notin S$. Introducimos la funcional h , definida en S_z , dada por

$$h(w) = M(x) + tr.$$

Es claro que h es lineal en S_z , por lo tanto es una extensión lineal de M a S_z . Si ponemos $y = x/t$ en (C.1) y consideramos los casos $t > 0$ y $t < 0$, podemos ver que

$$|h(w)| \leq C\|w\|, \text{ para toda } w \in S_z.$$

Para concluir la demostración usamos el *Lema de Zorn*. Sea P el conjunto de parejas ordenadas (S', h') , donde $S \subset S'$ y h' es una extensión de M a S' tal que $|h(w)| \leq C\|w\|$, para toda $w \in S'$. Ordenamos parcialmente el conjunto definiendo el orden \prec sobre P como sigue: $(S', h') \prec (S'', h'')$ si y sólo si $S' \subset S''$ y $h''|_{S'} \equiv h'$. Si $C = \{(S_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A} \subset P$ es una cadena, es fácil ver que

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha, H \right),$$

es una cota superior, donde $H|_{S_\alpha} \equiv h_\alpha$.

Por lo tanto P tiene un elemento maximal, digamos (S_∞, H_∞) . Si suponemos que $S_\infty \neq X$ entonces podemos extender (S_∞, H_∞) de tal forma que $(S_\infty, H_\infty) \prec (S'_\infty, H'_\infty)$, contradiciendo la maximalidad de (S_∞, H_∞) . Entonces $S_\infty = X$. Tomamos $\widetilde{M} = H_\infty$ para terminar. \square

C.2. Teorema de Representación de Riesz

Para ver una demostración del resultado, el lector puede consultar [2, Capítulo 13]

Definición C.2. Sea $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. La variación total de F en $[0, 1]$ está dada por

$$V(F, [0, 1]) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \right\},$$

donde

$$x_0 = 0, x_n = 1, \text{ y } x_{j-1} < x_j, \text{ para toda } j = 1, \dots, n.$$

Si una función F es tal que $V(F, [0, 1]) < \infty$, decimos que F es de variación acotada en $[0, 1]$ y escribimos $F \in BV[0, 1]$.

Más aún, decimos que F es de variación acotada normalizada en $[0, 1]$ (denotado por $F \in NBV[0, 1]$), si $F \in BV[0, 1]$, $F(0) = 0$ y F es continua por la izquierda.

Teorema C.3 (Representación de Riesz). Sea $\widetilde{M} \in (C[0, 1])^*$. Existe una única función $F \in NBV[0, 1]$, de tal forma que

$$\widetilde{M}(f) = \int_0^1 f(x) dF, \text{ para toda } f \in C[0, 1],$$

y $\|\widetilde{M}\| = V(F, [0, 1])$.

C.3. Teorema de Gram-Schmidt

El lector interesado en ver una demostración de lo siguiente, puede consultar [44].

Teorema C.4 (Gram-Schmidt). *Sea X un espacio con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto linealmente independiente en X . Si definimos*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{\det(D_{n-1})\det(D_n)}} \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \dots & \langle v_n, v_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_1, v_{n-1} \rangle & \langle v_2, v_{n-1} \rangle & \dots & \langle v_n, v_{n-1} \rangle \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix},$$

donde

$$\det(D_0) = 1, \quad y \quad \det(D_n) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \dots & \langle v_n, v_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_1, v_n \rangle & \langle v_2, v_n \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal en X .

Bibliografía

- [1] Akhiezer, N.I., The classical moment problem and some related questions in analysis, Hafner Publishing Co., New York x+253 pp. (1965).
- [2] Bachman G., & Narici, L., Functional Analysis, Dover Publications, Inc., Mineola, NY xii+532 pp. (2000).
- [3] Bartle R.G., The elements of integration, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney x+129 pp. (1966).
- [4] Bartle, R. G., The elements of real analysis. Second edition. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, xv+480 pp. (1976).
- [5] Berg C., Indeterminate moment problems and the theory of entire functions, J. Comp. Appl. Math., 65 (1995), 27-55.
- [6] Berg C., From discrete to absolutely continuous solutions of indeterminate moment problems, Arab J. Math. Sci., 4 (2) (1998) 1-18.
- [7] Berg C., On some indeterminate moment problems for measures on a geometric progression, J. Comput. Appl. Math., 99 (1998), 67-75.
- [8] Berg C., Chen Y., Ismail M.E.H., Small eigenvalues of large Hankel matrices: the indeterminate case, Math. Scand. 91 (2002), 67-81.
- [9] Berg C., The cube of a normal distribution is indeterminate. Ann. Prob. 16 (1988), 910-913.
- [10] Bertoin J., Biane P., Yor M., Poissonian exponential functionals, q-series, q-integrals, and the moment problem for log-normal distributions. Proceedings Stochastic Analysis, Ascona, Progress in Probability vol. 58, Birkhäuser, (2004), 45-56.
- [11] Bienaymé I., Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. Comptes Rendus Académie des Sciences, Paris 37 (1853), 309-326, Journal de Mathématiques pures et appliquées (2) 12 (1867), 158-176.
- [12] Bondesson L., Generalized Gamma Convolutions and Related Classes of Distributions and Densities, Lecture Notes in Statistics, 76. Springer-Verlag, New York viii+173 pp. (1992).

- [13] Cannon J.R., *The One-Dimensional Heat Equation* Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA xxv+483 pp. (1984).
- [14] Carleman T., *Les fonctions quasi-analytiques* Collection Borel Gauthier-Villars, París, *Jbuch Fortschritte Math.* 52, 255 (1926).
- [15] Castro Smirnova M., *Convergence Conditions for Vector Stieltjes Continued Fractions.* *J. Approx. Theory*, 115, (2002), no. 1, 100-119.
- [16] Chebyshev P., *Sur les valeurs limites des intégrales.* *Journal de Mathématiques pures et appliquées*(2) (1874), 157-160.
- [17] Chevyshev P., *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités* (1887). Todas las referencias fueron reimpresas en 1890-1891 *Acta Mathematica* 144, 114-166.
- [18] Chihara T.S., *A characterization and a class of distribution functions for the Stieltjes-Wigert polynomials,* *Canad. Math. Bull.* 13 (1970), 529-532.
- [19] Chihara T.S., *On generalized Stieltjes-Wigert and related orthogonal polynomials,* *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 5 (1979), no. 4, 291-297.
- [20] Choque Rivero A. E., Korobov V., Skylar G., *The admissible control problem from the moment problem point of view.* *App. Math. Lett.* 23 (2010), 58-63.
- [21] Christiansen J.S., *The moment problem associated with the Stieltjes-Wigert polynomials.* *J. Math. Anal. Appl.* 277 (2003), 218-245.
- [22] Conway J.H., *On enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties,* *Computational Problems in Abstract Algebra*, (1967), 329-358.
- [23] Cox, D. R., *Renewal theory*, Methuen & Co. Ltd., London; John Wiley & Sons, Inc., New York ix+142 pp. (1962).
- [24] Ducgon, M., Debiève, C., *Moment problem for double fuzzy sequences,* *Tatra Mt. Math. Publ.* 40 (2008), 185-192.
- [25] Garnett J.B., *Bounded Analytic Functions*, Springer, New York xiv+459 pp. (2007).
- [26] Gasper G., Rahman, M., *Basic hypergeometric series.* With a foreword by Richard Askey. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 35. Cambridge University Press, Cambridge xx+287 pp. (1990).
- [27] Goldman J.R., Kauffman L.H., *Rational tangles,* *Adv. in Appl. Math.* 18 (1997), no. 3, 300-332.
- [28] Gómez-Aiza R., López-García M., *A family of heat functions as solutions of indeterminate moment problems,* *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, (2007), Art. ID 41526, 11 pp., doi:10.1155/2007/41526.

- [29] Greene, R.E.; Krantz, S.G. Function theory of one complex variable. Third edition. Graduate Studies in Mathematics, 40. American Mathematical Society, Providence, RI, x+504 pp. (2006).
- [30] Grommer J., Ganze trazedenten Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 144 (1914), 114-166.
- [31] Gut A., On the moment problem, Bernoulli, 8 (3) (2002), 407-421.
- [32] Hamburger H., Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche, Math. Z. 4 (1919), 186-222.
- [33] Hamburger H., Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentproblems, Math. A. (1920-1921), 81, 235-319, 82, 120-164, 168-187.
- [34] Hausdorff F., Summationsmethoden und Momentfolgen, Math. Z. 9 (1921), 74-109, 208-299.
- [35] Hausdorff F., Momentprobleme für ein endliches Intervall, Math. Z. 16 (1923), 220-248.
- [36] Hermite Ch., Correspondance d'Hermite et de Stieltjes I & II, Paris: Gauthier-Villars, Vol. I, xx+477 pp.; vol.II, vi+464 pp. (1905).
- [37] Hoff T., The early history of the moment problem, Historia Mathematica 20 (1993), 19-44.
- [38] Jones W.B., Thron W.J. Continued fractions. Analytic theory and applications, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. xxix+428 pp.(1980).
- [39] Kapteyn, M. M. W., Kluyver, J. C., Van de Sande Bakhuyzen, E. F., Oeuvres complètes de Thomas Jan Stieltjes (1914-1918), Eds., II, 402-566. Groningen: Noordhoff. Todas las referencias están en Oeuvres complètes.
- [40] Kauffman L. H., Lambropoulou S., On the classification of rational tangles. Adv. in Appl. Math., 33 (2004), no.2, 199-237.
- [41] Krein M. G., On a problem of extrapolation of A. N. Kolmogoroff, Acad. Sci. URSS 46 (1945), 306-309.
- [42] Krein M.G., Nudelman A.A., The Markov moment problem and extremal problems, Ideas and problems of P.L. Cebysev and A.A. Markov and their further development, Vol. 50. American Mathematical Society, Providence, R.I., v+417 pp.(1977).
- [43] Laguerre, E., Sur l'intégrale $\int_x^\infty e^{-x}x^{-1}dx$, Bull. Soc. Math. France 7, (1879), 72-81.
- [44] Lang, S., Linear algebra. Reprint of the third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, x+285 pp. (1989)

- [45] Leiva, V., Sanhueza, A., Angulo, J.M. 2009. A length-biased version of the Birnbaum-Saunders distribution with application in water quality, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* (2009) 23:299-307.
- [46] Lin G. D., On the moment problems, *Statist. Probab. Lett.*, 35 (1997), 85-90.
- [47] Lin, G. D., The cube of a logistic distribution is indeterminate. *Austral. J. Statist.*, 39, (1997), 247-252.
- [48] López-García M., Characterization of distributions with the length-bias scaling property *Elect. Comm. in Probab.*, 14 (2009), 186-191.
- [49] López-García M., Characterization of solutions to the log-normal moment problem, por aparecer en *Theory of Probability and its Applications*.
- [50] López-García M., Characterization of solutions to the Stieltjes-Wigert moment problem *Statist. Probab. Lett.*, 79 (2009), 10, 1337-1342.
- [51] López-García M., El Problema de los Momentos, por aparecer en *Miscelánea Matemática*.
- [52] Maddox I. J., *Elements of Functional Analysis* Springer, Berlin, v+122 pp. (1988).
- [53] Muller H. Fractal scaling models of resonant oscillations in chain systems of harmonic oscillators, *Progress in Physics*, vol. 2, (2009), 72-76.
- [54] Nevanlinna R., Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentproblem. *Annales Academiae Scientiarum Finaciae*, 18 (1922), 5, 1-53.
- [55] Pakes A. G., Khattree, R., Length-biasing, characterization of laws, and the moment problem., *Austral. J. Statist.* 34 (1992), 307-322.
- [56] Pakes A. G., Khattree, R., Length biasing and laws equivalent to the log-normal, *J. Math. Anal. Appl.* 197 (1996), 825-854.
- [57] Pakes A. G., Structure of Stieltjes classes of moment-equivalent probability laws, *J. Math. Anal. Appl.* 326 (2007) 1268-1290.
- [58] Pedersen, H.L. On Krein's theorem for indeterminacy of the classical moment problem, *J. Approx. Theory* 95 (1998), no. 1, 90-100.
- [59] Perron O., Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche, *Math. A.*, 74 (1913), 545-554.
- [60] Riesz F., Sur les opérations fonctionelles linéaires. *Comptes Rendus Académie des Sciences, Paris*, 149 (1909), 974-977.
- [61] Riesz, M., Sur le problème des moments. Troisième note. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 17 (1923), 1-52.

- [62] Riesz M., Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant, *Acta Litt. ac Sci.*, 1 (1922), 209-225.
- [63] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, Tercera edición. McGraw-Hill Book Co., New York xiv+416 pp.(1987).
- [64] Shohat J.A., Tamarkin J.D., *The problem of moments*, American Mathematical Society, New York xiv+140 pp. (1943).
- [65] Slud, E.V. The moment problem for polynomial forms in normal random variables. *Ann. Probab.*, 21 (1993), 2200-2214.
- [66] Stieltjes T., *Recherches sur les fractions continues Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse pour les Sciences Mathématiques et les Sciences Physiques* (1), 8 (1894-1895), 1-122; 9, 5-47.
- [67] Stieltjes T., *Recherches sur quelques séries semi-convergentes. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3 (1886), 201-258.
- [68] Stoyanov J., Krein condition in probabilistic moment problems, *Bernoulli* 6 (2000), 939-949.
- [69] Stoyanov J., Stieltjes classes for moment-indeterminate probability distributions, *J. Appl. Probab.* 41A (2004), 281-294.
- [70] Stoyanov J., Tolmatz L., Method for constructing Stieltjes classes for M-indeterminate probability distributions, *Appl. Math. Comput.* 165, (2005), 669-685.
- [71] Stoyanov J., Tolmatz L., New Stieltjes classes involving generalized gamma distributions, *Stat. Prob. Lett.* 69 (2004), 213-219.
- [72] Stoyanov, J., Inverse Gaussian distribution and the moment problem. *J. Appl. Statist. Sci.*, 9 (1999), 61- 71.
- [73] Stoyanov, J., *Counterexamples in Probability*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester xxiv+313 pp. (1997).
- [74] Szegő G., *Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications*, vol. 23. New York, American Mathematical Society, ix+401 pp. (1939).
- [75] Van Vleck E., On an extension of the 1894 memoir of Stieltjes. *Trans. Am. Math. Soc.* 4 (1903), 297-332.
- [76] Wigert S., Sur les polynomes orthogonaux et l'approximation des fonctions continues, *Arkiv for matematik, astronomi och fysik*, 17 (1923), 1-15.
- [77] Wall H.S., *Analytic theory of continued fractions*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N.Y. xiii+433 p.p. (1967).