



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“Caracterizaciones de los estados post-colapso del
inflatón en el origen cuántico de las
fluctuaciones cosmológicas primordiales”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

GABRIEL LEÓN GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS: DR. DANIEL E. SUDARSKY SAIONZ

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DRA. MYRIAM MONDRAGÓN CEBALLOS

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

El paradigma inflacionario se considera actualmente como la piedra angular de la cosmología moderna debido a que, presuntamente, brinda una explicación acerca del origen de las pequeñas anisotropías observadas en el Fondo Cósmico de Radiación (CMB¹) que, a su vez, son necesarias para la evolución de estructura cósmica. Sin embargo, la explicación propuesta por el modelo inflacionario es poco satisfactoria. El problema fundamental radica en el hecho de que al evolucionar unitariamente el estado vacío del campo del inflatón, de acuerdo a las reglas estándar de la Mecánica Cuántica en un universo en expansión, el estado permanecerá homogéneo e isotrópico en cualquier época.

El trabajo [89] plantea que para entender la transición de un estado homogéneo e isotrópico a uno que no lo es, es necesario un colapso de la función de onda, asociada al estado cuántico homogéneo e isotrópico original, si es que queremos terminar (como lo muestran los datos observacionales del CMB) con una situación inhomogénea y anisotrópica. Por otra parte, estos mismos autores muestran que este colapso, en la interpretación tradicional de la Mecánica Cuántica, no se puede justificar principalmente por el hecho de que no existen observadores externos al universo que provoquen el colapso de la función de onda. Motivados por este último punto recurren a las ideas de Penrose sobre el colapso de la función de onda en Mecánica Cuántica, donde se propone que es la gravedad (y no los observadores) la que provoca el colapso.

En este trabajo de tesis nos basaremos en la hipótesis del colapso. Particularmente obtendremos la amplitud de las perturbaciones trabajando en el esquema del colapso y mostraremos la relación que existe entre los parámetros que caracterizan el colapso y el problema de ajuste fino del potencial inflacionario. Adicionalmente asumiremos la hipótesis de colapsos múltiples en cada uno de los modos del Campo Cuántico. Los resultados obtenidos, considerando la hipótesis de colapsos múltiples, requieren una caracterización más detallada en los estados post-colapso que la considerada en trabajos anteriores. La constricción más importante que encontramos está en el

¹del inglés Cosmic Microwave Background.

número posible de colapsos. Finalmente, incluiremos la propuesta de colapso dentro del marco de cuantización tradicional y analizaremos las diferencias conceptuales que existen entre nuestro enfoque y el enfoque usual. Mostraremos que, dependiendo del enfoque que se utilice para tratar los aspectos cuánticos de la gravedad, las predicciones teóricas sobre las propiedades de las semillas de estructura cósmica cambian sustancialmente.

Abstract

The inflationary paradigm is considered the corner stone of modern cosmology because, supposedly, it provides an explanation on the origin of the small anisotropies observed in the Cosmic Microwave Background (CMB), which in turn, are needed for the evolution of cosmic structure. However, the explanation proposed by the inflationary model is less than satisfactory. The fundamental problem resides in the fact that the unitary evolution of the vacuum state of the inflaton field, according to the standard rules of Quantum Mechanics in an expanding universe, will remain homogeneous and isotropic at any given epoch.

The work [89] propose that in order to understand the transition from an homogeneous and isotropic state to another one which is not, is necessary a collapse of the wave function associated with the original homogeneous and isotropic quantum state, if we want to end up (as confirmed by the observational data) with an inhomogeneous and anisotropic state. On the other hand, these authors show that the collapse, in the traditional interpretation of Quantum Mechanics, is not completely justified because of the fact that there were no external observers of the universe that could provoke the collapse of the wave function. Motivated by this point, they resort to Penrose's ideas regarding the collapse of the wave function in Quantum Mechanics, where it is proposed that gravity (and not an observer) induces the collapse.

In this thesis, we will adopt *the collapse hypothesis*. Particularly we will obtain the amplitude of the perturbations working in the collapse scheme and we will show the existing relation between the parameters characterizing the collapse and the fine tuning problem of the inflaton's potential. Additionally, we will assume the hypothesis of multiple collapses in each mode of the Quantum Field. The results obtained, considering the multiple collapse hypothesis, require a more detailed description of the post-collapse states than those considered in previous works. The most important constriction we found is in the possible number of collapses. Finally, we will include the collapse proposal within the traditional quantization treatment and we will analyze the conceptual differences between our approach and the standard one. We will show that, depending on how one deals with the quantum aspects of gravity, the

theoretical predictions about the properties of the seeds of cosmic structure change substantially.

Agradecimientos

Agradezco a Daniel Sudarsky

Índice

1. Introducción	1
1.1. Motivación General	1
1.2. El problema fundamental y el punto de partida	2
2. Cosmología Estándar	7
2.1. Homogeneidad e Isotropía	8
2.2. La ecuación de Friedmann	10
2.3. Parámetros Cosmológicos	14
2.4. Relación entre <i>redshift</i> y distancias.	15
2.5. Historia térmica y Termodinámica del universo primitivo	21
3. Inflación y origen de estructura	31
3.1. Problema de Planitud	32
3.2. Problema del Horizonte	32
3.3. Reliquias no deseadas	34
3.4. Inflación	34
3.5. El universo inflacionario	36
3.5.1. El inflatón	38
3.5.2. Condiciones <i>slow-roll</i>	40
3.5.3. Cantidad de inflación	42
3.5.4. Recalentamiento	43
3.6. Origen de estructura	44
3.6.1. Perturbaciones cosmológicas clásicas	46
3.6.2. Nociones termodinámicas del campo inflacionario	53

3.6.3.	Conservación de ζ	56
3.6.4.	Perturbaciones cosmológicas cuánticas	57
3.7.	Evolución de las perturbaciones después de inflación	66
3.7.1.	El espectro angular de las anisotropías del CMB	66
3.7.2.	Crecimiento lineal de estructura	69
4.	El problema fundamental y la propuesta de colapso	73
4.1.	Decoherencia	75
4.2.	Decoherencia sin decoherencia	78
4.3.	Interpretación de varios universos	79
4.4.	El colapso auto-inducido	81
4.5.	Análisis detallado del esquema de colapso	84
4.5.1.	Esquemas de colapso cuántico	90
5.	El <i>esquema de colapso</i> y la amplitud del espectro primordial	93
5.1.	Argumentos Anteriores.	94
5.2.	El espectro de las inhomogeneidades dentro del marco del colapso	97
6.	Colapsos múltiples	111
6.1.	Conexión con las cantidades observacionales	111
6.2.	Esquema de colapsos múltiples	114
6.3.	Evolución entre colapsos	116
6.4.	Caracterización de los estados post-colapso	122
6.4.1.	Estados coherentes como estados post-colapso	122
6.4.2.	Estados squeezed como estados post-colapso	124
6.4.3.	Contacto con los datos observacionales	125
7.	El <i>esquema de colapso</i> en el proceso de cuantización tradicional	129
7.1.	Análisis detallado del colapso en el nuevo enfoque	130
7.2.	Predicciones teóricas bajo el nuevo enfoque	135
7.3.	Análisis preliminar sobre los modos tensoriales	139
8.	Conclusiones y Trabajo Futuro	143

Apéndices	149
A. Convenciones y unidades	149
B. Escala temporal	151
C. Estadística de las perturbaciones Gaussianas	154
D. Estados <i>squeezed</i> como estados post-colapso	161
Bibliografía	171

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación General

La motivación fundamental en la realización de este trabajo de tesis está en el hecho de que el escenario cosmológico nos proporciona un ‘laboratorio’ natural donde es posible explorar fenómenos en los cuales la gravedad y la mecánica cuántica se encuentran íntimamente ligadas. Actualmente no tenemos acceso a datos experimentales que nos ayuden a comprender el como la gravedad y la mecánica cuántica se relacionan a nivel fundamental. Sin embargo, se cree que las fluctuaciones observadas en el espectro de la Radiación Cósmica de Fondo (CMB) tienen un origen cuántico y, posteriormente, fueron amplificadas por la gravedad. Por lo cual, tenemos datos observacionales sobre el comportamiento de la gravedad y la mecánica cuántica que es conveniente que sean analizados por una teoría de la gravedad cuántica debido, entre otras cosas, a que las escalas de energía en la época donde se cree que tuvieron origen las anisotropías observadas en el CMB, coinciden justamente con las escalas de energía¹ donde la gravedad y la mecánica cuántica se encuentran relacionadas fundamentalmente. Hasta el día de hoy, no contamos con una teoría de la gravedad cuántica completamente desarrollada, sin embargo, creemos que los primeros pasos en la búsqueda de esta teoría pueden darse si consideramos modelos fenomenológicos que nos sirvan de guía hacia la teoría fundamental. Uno de los modelos fenomenológicos existentes, que podrían explicar la realidad, es el que expondremos en este trabajo de tesis.

¹Generalmente se piensa que esta escala de energía está dada por la energía de Planck $\sqrt{\hbar c^5/G} \approx 1.22 \times 10^{19}$ GeV.

1.2. El problema fundamental y el punto de partida

El estudio del origen y la evolución de la estructura a gran escala del universo constituye un aspecto central en la cosmología moderna. En años recientes, las observaciones provenientes de los estudios de supernovas [90, 91, 93, 114], de la estructura a gran escala [115, 1] y principalmente de las observaciones del CMB [100] han contribuido notablemente al éxito del modelo cosmológico. En particular los datos observacionales recolectados por el satélite WMAP [60] han creado un escenario propicio para comparar los diversos modelos teóricos sobre el origen del universo con las observaciones. La explicación ampliamente más aceptada sobre dicho origen se encuentra en la idea de la inflación. Originalmente propuesta por A. Guth [42], la inflación postula que el universo sufrió una expansión acelerada durante sus primeras etapas. Históricamente, esta idea surgió de la necesidad de explicar ciertos problemas de naturalidad del modelo del Big Bang conocidos como: el problema del horizonte, el problema de planitud y reliquias no deseadas². Sin embargo, en la cosmología moderna la importancia de la inflación radica en el hecho de que se dice capaz de explicar el origen de las estructuras que observamos en el universo [80] tales como galaxias, cúmulos de galaxias y las anisotropías en el CMB. La idea del modelo inflacionario puede describirse brevemente de la siguiente manera: Comenzando con condiciones relativamente arbitrarias sobre nuestro universo, la expansión acelerada lo lleva a un estado homogéneo e isotrópico; posteriormente durante la época inflacionaria las fluctuaciones cuánticas del vacío asociadas al inflatón se ‘congelan’ (esto es, la amplitud de la fluctuación del inflatón permanece constante) y a partir de este instante se invita a tratar a las fluctuaciones cuánticas como clásicas. Esta transición ocurre cuando la longitud de onda física asociada a las fluctuaciones es mayor que el radio de Hubble (H^{-1}). A las fluctuaciones del vacío, se les asocia con las perturbaciones a la densidad de energía que sobreviven después de la inflación y que se identifican con el origen de toda la estructura observada en el universo, en particular, son las responsables de las anisotropías observadas en el CMB. De esta manera, una predicción de la inflación es que toda la estructura que observamos en el universo es el resultado de una fluctuación cuántica durante la época inflacionaria.

Por otra parte en un trabajo reciente [89] A. Perez et al. muestran que el modelo inflacionario no provee una explicación satisfactoria sobre la transición de un estado homogéneo e isotrópico del universo primitivo hacia un estado posterior inhomogéneo y anisotrópico, que concuerda con los datos observacionales. Este problema³

²Estos problemas los analizaremos detalladamente el Capítulo 3.

³Frecuentemente en la literatura este problema se caracteriza como “la transición de un regimen

está íntimamente relacionado con el problema de la medición en mecánica cuántica que hasta el momento no tiene una explicación que sea universalmente aceptada. Muchos físicos recurren a la interpretación de Copenhagen ó a las explicaciones ligadas al programa de *Decoherencia* [92, 117, 97] cuando se enfrentan a situaciones de este estilo, es decir, conectar cantidades cuánticas con observaciones experimentales. Sin embargo, en el contexto cosmológico donde el sistema a analizar es el universo mismo, la version estándar de decoherencia falla en explicar esta conexión, principalmente porque la decoherencia necesita de la identificación de un ambiente y un sistema (el cual interactúa con el ambiente); y en el contexto cosmológico es complicado definir un ambiente no trivial. Además, el hecho de que tenemos acceso a un sólo universo, complica la interpretación estadística en el contexto tradicional de Decoherencia (véase Capítulo 4 y [106]).

Todo lo anterior sugiere que hay algo que falta, por lo menos a nivel conceptual ó fundamental, para entender dicha transición. De hecho, desde el punto de vista de este trabajo, el ingrediente faltante es algo que va más allá de la física estándar, puesto que queremos justificar plenamente el poder predictivo de la inflación.

Para ilustrar la física detrás del aspecto faltante, utilizaremos el modelo fenomenológico expuesto en [89]. La idea principal de este modelo consiste en invocar el colapso dinámico de la función de onda como el mecanismo responsable de romper la simetría en el universo. El enfoque del colapso dinámico de la función de onda utilizado en [89] (y que es el que adoptaremos en este trabajo) está fuertemente inspirado en las propuestas de colapso de R. Penrose [86, 87, 88]. La idea de R. Penrose establece que el colapso de la función de onda es realmente un proceso dinámico donde la gravedad -y no los observadores o mediciones externas- fuerza al sistema a tomar una realización específica de entre diversos estados, alterando en el proceso la evolución unitaria dada por la mecánica cuántica. Aún más, estas ideas sugieren que la teoría de la gravedad a nivel cuántico juega un papel importante en la física del colapso⁴.

El modelo desarrollado en [89] es una descripción efectiva en el sentido de que no explica la transición de un estado homogéneo é isotrópico a otro que no lo es y tampoco está basado en algún mecanismo físico conocido, simplemente se propone una parametrización general sobre dicha transición. Esta parametrización involucra un estado post-colapso inhomogéneo y anisotrópico. Este es el punto de partida de

cuántico a un regimen clásico”. El punto de vista que adoptaremos en este trabajo es que no hay regímenes clásicos ni cuánticos. La descripción fundamental siempre es cuántica, pero hay regímenes en los que ciertas cantidades pueden describirse con suficiente precisión por sus contrapartes clásicas representando a sus correspondientes valores de expectación.

⁴Sin embargo, no se descartan otros posibles mecanismos de colapso como por ejemplo el propuesto por Ghirardi-Rimini-Weber [41].

esta tesis, donde tomando como base la hipótesis del colapso, incorporaremos nuevos elementos a dicha hipótesis y posteriormente, al comparar los resultados obtenidos con las observaciones provenientes del CMB, obtendremos nueva información acerca de las características del colapso.

Este trabajo de tesis estará organizado de la siguiente manera:

- En los **Capítulos 2 y 3** se sentarán las bases del marco teórico en el cual nos basaremos para desarrollar el trabajo contenido en esta tesis. La intención en estos capítulos es sintetizar y resumir el trabajo existente en la literatura y que sirva de ayuda para que el lector logre una mayor comprensión de los capítulos siguientes.
- En el **Capítulo 4** estableceremos el problema fundamental del paradigma inflacionario y discutiremos los diferentes enfoques que se encuentran en la literatura para lidiar con este problema. Uno de los enfoques existentes es la propuesta del *colapso* [89], dicha propuesta es la que adoptaremos y de la cual se derivará el trabajo original de esta tesis. Adicionalmente, realizaremos una descripción detallada de la hipótesis del colapso.
- En el **Capítulo 5** presentamos el cálculo de la amplitud de las perturbaciones de la métrica bajo el esquema de colapso. Mostraremos la relación existente entre los parámetros que caracterizan el colapso y el problema del ajuste fino del potencial del inflatón. El cálculo presentado toma en cuenta la transición entre distintas épocas cosmológicas, por lo que es un cálculo más realista que el considerado en trabajos anteriores [89, 32].
- En el **Capítulo 6** exploraremos las implicaciones que resultan de asumir colapsos múltiples en la función de onda del campo inflacionario. Mostraremos que la hipótesis de colapsos múltiples requiere de una caracterización más detallada de los estados post-colapso que la utilizada en trabajos previos [89, 32]. En la descripción de los estados post-colapso consideraremos dos opciones simples y, tomando en cuenta las observaciones, extraeremos nueva información de los parámetros que describen el colapso.
- En el **Capítulo 7**, siguiendo el procedimiento tradicional de cuantización de las perturbaciones primordiales pero adoptando la hipótesis del colapso, estudiaremos las diferencias conceptuales que existen en este nuevo enfoque y el enfoque original del **Capítulo 4**. Adicionalmente, mostraremos que las predicciones teóricas cambian radicalmente dependiendo del enfoque que se utilice.

-
- Finalmente, en el **Capítulo 8** presentamos las conclusiones del trabajo expuesto en esta tesis.
 - En el **Apéndice A** se presentan las unidades y convenciones que seguiremos en este trabajo de tesis
 - En el **Apéndice B** presentamos los valores numéricos de las distintas cantidades que caracterizan algunos instantes importantes dentro de la historia del universo.
 - En el **Apéndice C** se presenta un resumen de las propiedades estadísticas de las perturbaciones Gaussianas.
 - En el **Apéndice D** demostramos que los estados *squeezed* poseen las características requeridas para que puedan considerarse como estados post-colapso.

Capítulo 2

Cosmología Estándar

La cosmología es el estudio del universo como un todo, su estructura, su origen, y su evolución. La cosmología se basa en observaciones tales como: la detección de la Radiación Cósmica de Fondo, la detección de los rayos cósmicos, la medición del *redshift*¹ de las galaxias y los demás objetos interestelares que nos rodean.

Como ciencia, la cosmología enfrenta una restricción severa: sólo hay un universo disponible. No podemos realizar experimentos en cosmología, y las observaciones están restringidas a un sólo objeto: el universo. De esta manera, no es posible realizar estudios comparativos o estadísticos entre varios universos. Gracias a este aspecto muy especial en la cosmología, es muy posible que algunas preguntas importantes permanezcan sin respuesta alguna.

Sin embargo, en las últimas décadas se ha obtenido un progreso notable dentro de la cosmología debido a que la precisión de los datos observacionales ha mejorado gracias al desarrollo de instrumentos astronómicos más modernos. Actualmente, contamos con un mayor entendimiento de la historia y la estructura del universo, pero todavía quedan preguntas abiertas importantes, como por ejemplo, la naturaleza de la materia y la energía oscura.

Una de las observaciones fundamentales detrás de la teoría del *Big Bang* es que el espectro de las galaxias distantes se encuentra corrido hacia longitudes de onda mayores, de hecho este corrimiento es mayor para las galaxias más lejanas. A dicho corrimiento se le denomina el *redshift* de las galaxias. Dentro del marco de la Relatividad General, es posible entender este corrimiento como resultado de la expansión misma del espacio intergaláctico. A medida que el espacio se expande, la longitud de

¹El *redshift* se refiere al corrimiento hacia el rojo del espectro de objetos cósmicos (galaxias, cuásares, etc.) debido a la expansión del universo, la definición más formal la haremos en la Sección 2.4.

onda de la luz que viaja a través del espacio también se expande.

La cosmología utiliza a la Relatividad General como herramienta principal para su estudio. La esencia de la Relatividad General [109] se puede escribir de la siguiente manera: El espacio-tiempo es una variedad 4-dimensional en la cual está definida una métrica g_{ab} , con signatura Lorentziana. La métrica y la distribución de materia en el espacio-tiempo se relacionan de acuerdo a las ecuaciones de Einstein, $G_{ab} = 8\pi GT_{ab}$, donde G_{ab} es el tensor de Einstein (y depende de la métrica) y T_{ab} es el tensor de energía-momento.

Así, una de las preguntas vitales formuladas por la teoría es: ¿Cuál solución de las ecuaciones de Einstein describe al espacio tiempo que observamos?, i.e., ¿Cuál es la solución correspondiente a nuestro universo, o, al menos, a un modelo idealizado de nuestro universo?. Si pretendemos responder a estas preguntas, primero es necesario proveer suficiente información basada en datos observacionales, y segundo, realizar ciertas suposiciones acerca de nuestro universo. Una vez que contemos con esta información, nos es posible analizar las ecuaciones de Einstein y posteriormente realizar predicciones concernientes a la evolución dinámica del universo.

La discusión que presentaremos en este capítulo estará basada en el libro de Wald [109].

2.1. Homogeneidad e Isotropía

Desde el tiempo de Copernico, se ha considerado la posibilidad de que no ocupamos una posición privilegiada en el universo. Adicionalmente, podemos asumir que el universo es isotrópico, es decir, que las observaciones a escalas suficientemente grandes (aproximadamente mayores a 100 Mpc) deben arrojar resultados independientes de la dirección en que miremos. De hecho, observaciones recientes, esto es, observaciones del CMB, parecen confirmar fuertemente la hipótesis de que nuestro universo es altamente isotrópico (con desviaciones del orden de 10^{-5}). Esta isotropía, combinada con la hipótesis de que la Tierra no se encuentra en el ‘centro’ del universo, nos lleva a concluir que el universo es muy homogéneo a escalas cosmológicas.

Así, una de nuestras primeras tareas es definir la hipótesis de homogeneidad e isotropía. Vagamente hablando, ‘homogeneidad’ significa que para un ‘instante de tiempo’ dado, cada punto del ‘espacio’ debe ser muy parecido a cualquier otro punto. Una formulación más precisa de esta idea es la siguiente [109]: Un espacio tiempo se dice que es (espacialmente) *homogéneo*, si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies Σ_t espacialoides foliando el espacio-tiempo parametrizadas por el tiempo coordenado t , tal que para cada t y para cualesquiera 2 puntos $p, q \in \Sigma_t$, existe una isometría de la métrica del espacio-tiempo, g_{ab} , la cual lleva p a q .

Con respecto a la isotropía, un noción intuitiva sería que para un ‘instante de tiempo’ dado, todas las direcciones del ‘espacio’ deben ser iguales. Formalmente [26] diríamos que: Un espacio-tiempo se dice que es (espacialmente) *isotrópico*, si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies Σ_t espacialoides foliando el espacio-tiempo parametrizadas por el tiempo coordenado t y si para cualesquiera 2 vectores digamos $v, w \in T_p \Sigma_t$ dados alrededor de un punto $p \in \Sigma_t$, existe una isometría de la métrica del espacio-tiempo, g_{ab} tal que el *pushforward* de w bajo la isometría es paralelo a v (sin el *pushforward*).

La utilidad de la hipótesis de homogeneidad e isotropía es que simplifica el tratamiento analítico debido a que es posible considerar al espacio como máximamente simétrico². Por tanto, una buena aproximación para describir al universo real consiste en asumir que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico, pero que evoluciona con el tiempo. En Relatividad General esto último equivale a suponer que el universo se puede foliar con hipersuperficies espacialoides tal que cada hipersuperficie 3-dimensional es máximamente simétrica. Consecuentemente, asumiremos que nuestro espacio-tiempo es $\mathbf{R} \times \Sigma$, donde \mathbf{R} representa la dirección de la coordenada temporal y Σ es una 3-variedad máximamente simétrica.

La métrica que describe a un universo con secciones espacialmente homogéneas e isotrópicas, es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [109, 26]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.1)$$

Las coordenadas (t, r, θ, ϕ) de la métrica (2.1) se llaman coordenadas comóviles. Las coordenadas comóviles son aquellas que asignan valores constantes a las coordenadas espaciales de los observadores comóviles. Los observadores comóviles son los observadores que perciben al universo homogéneo e isotrópico. El tiempo coordenado t es el *tiempo cósmico* y corresponde justamente al parámetro con el cual la familia uniparamétrica de hipersuperficies Σ_t espacialoides (homogéneas e isotrópicas) folían al espacio-tiempo.

El factor de escala $a(t)$ es una función del tiempo adimensional y se relaciona directamente con la expansión del universo.

La constante K está relacionada con la curvatura del espacio y tiene unidades de $[\text{longitud}]^{-2}$. Si $K = 0$, la parte espacial ($t = \text{const.}$) de la métrica de FRW es *plana*, esto es, corresponde al espacio Euclideo ordinario escrito en coordenadas esféricas, donde la distancia radial está dada por ar . No obstante, el espacio-tiempo

²Un espacio máximamente simétrico es una variedad n -dimensional que contiene $\frac{1}{2}n(n+1)$ vectores de Killing linealmente independientes, esto es, el mismo número de vectores de Killing linealmente independientes que contiene \mathbf{R}^n .

posee curvatura distinta de cero debido a que $a(t)$ depende de t . En la terminología usual, es común referirse a este caso como un universo *plano*.

Para estudiar el caso $K > 0$ conviene realizar una transformación de coordenadas $r = K^{-\frac{1}{2}} \sin \chi$, esto es, la métrica (2.1) se reescribe como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)K^{-1}[d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2]. \quad (2.2)$$

La parte espacial de la métrica³ corresponde a una 3-esfera, la nueva coordenada angular χ varía de 0 a π . El caso $K > 0$, describe a un universo con curvatura (espacial) positiva⁴. La 3-esfera, que representa la geometría de la parte espacial del universo, es una variedad compacta, y por lo tanto, describe a un universo finito pero que no tiene frontera. A este universo se le llama universo *cerrado*.

Análogamente al caso anterior, para analizar el caso $K < 0$ conviene hacer un cambio de coordenadas $r = |K|^{-\frac{1}{2}} \sinh \chi$, donde $0 \leq \chi < \infty$. En este caso, la métrica (2.1) se expresa como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)|K|^{-1}[d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.3)$$

La geometría de la parte espacial del universo se representa por un hiperboloide en 3 dimensiones, el cual corresponde a una variedad no-compacta. Un universo con $K < 0$ se le conoce como universo *abierto*.

La métrica de FRW tiene (a un tiempo dado) dos escalas de longitudes asociadas. La primera es el radio de curvatura, $r_{curv} \equiv a|K|^{-1/2}$. La segunda está dada por la escala temporal de la expansión conocida como el *tiempo de Hubble*, $t_H \equiv H^{-1}$, donde $H \equiv \dot{a}/a$ es el *parámetro de Hubble*. El tiempo de Hubble multiplicado por la velocidad de la luz, $c = 1$, es igual a la *longitud o radio de Hubble*, $l_H \equiv ct_H \equiv H^{-1}$.

2.2. La ecuación de Friedmann

En esta sección aplicaremos las ecuaciones de Einstein al caso homogéneo é isotrópico lo que nos lleva a la cosmología de FRW. La métrica del espacio-tiempo es la métrica de FRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.4)$$

³Notemos además que la aparente ‘singularidad’ en $r = 1/\sqrt{K}$, en la métrica (2.1), desaparece con este cambio de coordenadas.

⁴La curvatura positiva (negativa) se refiere a que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es mayor (menor) que 180° .

Calculando el tensor de Einstein $G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R$, a partir de la métrica de FRW, se encuentra que

$$G^{00} = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + K), \quad (2.5)$$

$$G^{11} = G^{22} = G^{33} = -\frac{1}{a^2}(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + K). \quad (2.6)$$

Por otra parte, para poder utilizar las ecuaciones de Einstein, en cosmología generalmente se asume que toda la materia contenida en el universo, en cualquier era cosmológica, puede describirse por el tensor de energía-momento correspondiente a un fluido perfecto, esto es,

$$T^{ab} = (\rho + P)u^a u^b + P\eta^{ab}, \quad (2.7)$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski, u^a es la cuadrivelocidad del fluido, ρ y P representan la densidad de energía y presión del fluido respectivamente. De hecho, (2.7) es la forma más general de T_{ab} consistente con las hipótesis de homogeneidad e isotropía.

La isotropía implica que el fluido permanece en reposo en las coordenadas de la métrica, i.e., $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, de esta manera

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

La hipótesis de homogeneidad implica que $\rho = \rho(t)$, $P = P(t)$. Por tanto, de las ecuaciones de Einstein $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$, se obtiene

$$\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + K) = 8\pi G\rho, \quad (2.9)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{K}{a^2} = 8\pi GP. \quad (2.10)$$

Manipulando algebraicamente las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.11) y (2.12) son las *ecuaciones de Friedmann* (la ‘ecuación de Friedmann’ se refiere en particular a (2.11)).

Utilizando la ecuación de conservación de energía en Relatividad General, $\nabla_a T^{ab} = 0$, se tiene

$$\dot{\rho} = -3H(P + \rho), \quad (2.13)$$

donde $H \equiv \dot{a}/a$. La cantidad $H = H(t)$ es el *parámetro de Hubble* y representa la tasa de expansión del universo. Su valor actual H_0 es la *constante de Hubble* y tiene dimensiones de 1/[tiempo] (o [velocidad]/[longitud]). La ecuación de Friedmann (2.11) relaciona tres cantidades: la densidad de energía ρ , la curvatura del espacio K/a^2 , y la tasa de expansión del universo H ,

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(H^2 + \frac{K}{a^2} \right) = \rho_c + \frac{3K}{8\pi G a^2}, \quad (2.14)$$

donde la *densidad crítica* ρ_c , se define como

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.15)$$

De la definición de la densidad crítica, observamos que su dinámica está dada por el parámetro de Hubble. En general, por densidad crítica nos referimos a su valor actual fijado por el valor de la constante de Hubble,

$$\rho_c \equiv \rho_c(t_0) \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.16)$$

Así, la naturaleza de la curvatura depende de la densidad ρ :

$$\begin{aligned} \rho < \rho_c &\Rightarrow K < 0 \\ \rho = \rho_c &\Rightarrow K = 0 \\ \rho > \rho_c &\Rightarrow K > 0. \end{aligned}$$

El *parámetro de densidad* $\Omega(t)$ se define como

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}. \quad (2.17)$$

Si $\Omega = 1$ implica un universo plano, para $\Omega < 1$ tenemos un universo abierto, y para $\Omega > 1$ un universo cerrado. En términos del parámetro de densidad, la ecuación de Friedmann se escribe

$$\Omega(t) = 1 + \frac{K}{H(t)^2 a(t)^2}. \quad (2.18)$$

Notamos que K es constante y todas las otras cantidades son funciones del tiempo $\Omega(t)$, $H(t)$, y $a(t)$. Por otra parte, observamos que si $K \neq 0$ y si $\Omega < 1$ (o $\Omega > 1$), entonces Ω permanecerá menor (o mayor) que uno, aún cuando $\Omega(t)$ evolucione con el tiempo. Sin embargo, si $\Omega = 1$ (esto es, $K = 0$), permanecerá constante, i.e., $\Omega = \Omega_0 = 1$. Las observaciones sugieren que la densidad del universo es muy cercana a la crítica $\Omega_0 \approx 1$.

Para resolver las ecuaciones de Friedmann, es necesaria la ecuación de estado $P(\rho)$. Los casos más simples son:

1. **MATERIA:** (llamada ‘materia’ en cosmología y ‘polvo’ en Relatividad General) Por materia nos referimos a materia no relativista (la velocidad de las partículas es $v \ll 1$), para la cual $P \ll \rho$, de tal manera que nos podemos olvidar de la presión y aproximar $P = 0$. De (2.13) tenemos $d(\rho a^3)/dt = 0$, ó $\rho \propto a^{-3}$.
2. **RADIACIÓN:** Se refiere a materia ultra-relativista (donde la energía de las partículas es mucho mayor que su masa en reposo, lo cual es siempre cierto para partículas no masivas como los fotones) para la cual $P = \rho/3$. La ecuación (2.13) implica $d(\rho a^4)/dt = 0$, ó $\rho \propto a^{-4}$.
3. **ENERGÍA DE VACÍO** (ó constante cosmológica): En este caso $\rho = \text{const}$, por lo que de (2.13) se sigue que la ecuación de estado para la energía de vacío es $P = -\rho$. Así, una energía de vacío positiva corresponde a una presión de vacío negativa.

En un universo que contenga los tres componentes de energía, la ecuación de Friedmann (2.11) toma la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \alpha^2 a^{-4} + \beta^2 a^{-3} - K a^{-2} + \frac{1}{3}\Lambda, \quad (2.19)$$

donde α, β, K , y Λ son constantes. Los 4 términos en el lado derecho de (2.19) representan radiación, materia, curvatura, y energía de vacío, en ese orden. Mientras el universo se expande ($a(t)$ crece), los diferentes componentes en el lado derecho se vuelven más dominantes a diferentes tiempos. Dentro de las primeras etapas de la evolución del universo, la radiación era la forma dominante de energía. Actualmente, sabemos [60] que el último término de (2.19) comienza a ser el dominante, por lo que, eventualmente la energía de vacío será la forma dominante de energía.

Adicionalmente, los datos observacionales [60] indican que la geometría del universo es muy cercana a la plana, i.e., $K \ll 1$. En las etapas medias de la evolución existen las eras dominadas por la materia.

La contribución a la densidad de energía, proveniente de la radiación, es insignificante actualmente. En la época inflacionaria existió ‘algo’⁵ muy parecido a una energía de vacío, y que posteriormente desapareció del universo.

Asumiendo que cualquiera de los tres primeros términos de la ecuación de Friedmann (2.19) es dominante sobre el resto, es posible resolver (2.19) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \lambda^2 a^{-n} \\ a^{n/2-1} da &= \lambda dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Integrando ambos lados de la última ecuación obtenemos

$$\frac{2}{n} a^{n/2} = \lambda t, \quad (2.21)$$

donde escogemos $a(t=0) = 0$. Si nos olvidamos del término correspondiente a la energía de vacío, existen 3 casos:

- $n = 4$ universo dominado por radiación $a \propto t^{1/2}$
- $n = 3$ universo dominado por materia $a \propto t^{2/3}$
- $n = 2$ universo dominado por la curvatura ($K < 0$) $a \propto t$

El caso en el que la energía de vacío es el término dominante corresponde a una expansión ‘acelerada’, i.e., $\ddot{a}(t) > 0$ (e.g., cuando el factor de escala $a(t)$ aumenta exponencialmente).

2.3. Parámetros Cosmológicos

La densidad total de materia en el universo, está dada por la suma de los diferentes tipos de materia, es decir, materia no relativista⁶, radiación⁷ (ó materia ultra-

⁵En el Capítulo 3, analizaremos detalladamente esta época, pero podemos adelantar que ese *algo* se refiere a un campo escalar llamado inflatón.

⁶En la época cosmológica actual, por *materia no relativista* nos referimos a materia bariónica y materia oscura (cold dark matter).

⁷La contribución actual a este tipo de materia corresponde a fotones y neutrinos.

relativista) y vacío

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_{vac}, \quad (2.22)$$

y de igual manera para el parámetro de densidad tenemos

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda, \quad (2.23)$$

donde $\Omega_m \equiv \rho_b/\rho_c$, ρ_b es la densidad de energía bariónica, $\Omega_r \equiv \rho_r/\rho_c$ y $\Omega_\Lambda \equiv \rho_{vac}/\rho_c \equiv \Lambda/3H^2$. Ω_m , Ω_r , y Ω_Λ son funciones del tiempo (aunque ρ_{vac} es constante, $\rho_c(t)$ no lo es). En notación estándar, Ω_m , Ω_r , y Ω_Λ denotan los valores actuales de estos parámetros de densidad; escribiremos $\Omega_m(t)$, $\Omega_r(t)$, y $\Omega_\Lambda(t)$, si nos queremos referir a sus valores a otros tiempos. Por lo tanto escribimos

$$\Omega_0 \equiv \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda. \quad (2.24)$$

La densidad de radiación actual, cuya mayor contribución proviene de los fotones del CMB [60], se conoce con mucha precisión y es relativamente pequeña, $\Omega_r \approx 10^{-5}$. Por lo tanto, generalmente se acostumbra a escribir al parámetro de densidad actual como

$$\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda. \quad (2.25)$$

El modelo cosmológico de FRW está completamente definido si se dan los valores actuales de los tres parámetros cosmológicos restantes, H_0 , Ω_m , y Ω_Λ .

El valor actual de la constante de Hubble [60] es $H_0 \equiv h$ km/s/Mpc donde $h = 0.71 \pm 0.025$. Los datos obtenidos por el satélite WMAP [60] arrojan los valores $\Omega_\Lambda = 0.734 \pm 0.029$ y $\Omega_m = 0.266 \pm 0.029$. Por tanto, la evidencia observable apunta a un universo (espacialmente) plano $\Omega_0 \approx 1$.

2.4. Relación entre *redshift* y distancias.

Como mencionamos anteriormente, la evidencia observable más directa de la expansión del universo proviene del *redshift* de las líneas espectrales de galaxias distantes. Para entender más claramente este concepto, realizaremos el cálculo del *redshift* de una galaxia A.

La luz sale de la galaxia A ubicada en $r = r_A$ a un tiempo t_1 con longitud de onda λ_1 y llega a la galaxia O en $r = 0$ al tiempo t_2 con longitud de onda λ_2 . El tiempo que toma enviar una longitud de onda completa es $\delta t_1 = \lambda_1/c = 1/\nu_1$ mientras que

recibir una longitud de onda completa toma un tiempo $\delta t_2 = \lambda_2/c = 1/\nu_2$. Por otra parte, sabemos que la luz viaja en trayectorias nulas, esto es, $ds^2 = 0$.

Empleando la métrica (2.1) y asumiendo a θ y ϕ constantes, tenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - Kr^2} = 0, \\ \Rightarrow \frac{dt}{a(t)} &= \frac{-dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si seguimos dos rayos de luz enviados a diferentes tiempos t_1 y $t_1 + \delta t_1$ podemos integrar (2.26); para el primer rayo obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_A} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (2.27)$$

mientras que para el segundo rayo

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_A} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.28)$$

Dado que la fuente y el receptor de las señales permanecen en reposo respecto a los observadores comóviles (el receptor se encuentra en $r = r_A$ y el emisor en $r = 0$), el lado derecho de (2.27) y (2.28) son iguales, así

$$0 = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_2}^{t_2 + \delta t_2} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \frac{\delta t_2}{a(t_2)} - \frac{\delta t_1}{a(t_1)}. \quad (2.29)$$

Por tanto, el tiempo para recibir una longitud de onda es

$$\delta t_2 = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \delta t_1. \quad (2.30)$$

Esta *dilatación del tiempo cosmológico* se aplica para cualquier evento observado en la galaxia A. Mientras observamos la galaxia A, vemos todo sucediendo como en ‘cámara lenta’ por un factor $a(t_2)/a(t_1)$, el cual nos dice que tanto se ha expandido el universo desde que la luz dejó la galaxia.

El *redshift* z se define

$$z \equiv \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (2.31)$$

por lo que de (2.30), se sigue que

$$1 + z = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)}. \quad (2.32)$$

Por tanto, el *redshift* de una galaxia corresponde físicamente a comparar el factor de escala cuando la luz dejó la galaxia, con el factor de escala actual.

En cosmología, las velocidades típicas de las galaxias respecto a los observadores comóviles (denominadas *velocidades peculiares*) son pequeñas $v < 1000$ km/s, por lo que no tenemos que preocuparnos por contracciones de Lorentz.

La expansión del universo trae consigo otras complicaciones al concepto de distancia. Por ejemplo, al preguntarnos por la distancia hacia una galaxia nos referimos a ¿la distancia a la que se encuentra actualmente? ó ¿a la distancia a la que se encontraba cuando la luz de la galaxia salió de ella? ó ¿a la distancia que la luz ha recorrido desde la galaxia hasta nosotros?.

En particular la *distancia propia* entre dos objetos a un tiempo coordenado t , es igual a la longitud de la geodésica espacial que conecta a dichos objetos cuando el factor de escala está fijo a un valor $a(t)$. Por *distancia comóvil* nos referimos a la distancia propia evaluada al valor actual del factor de escala (la distancia comóvil permanece constante para cualquier valor de $a(t)$).

Nuestra siguiente tarea será calcular la distancia propia entre dos galaxias a un tiempo fijo t , fijando nuestro origen de coordenadas en la galaxia O (observador). Sea la coordenada r de la galaxia A igual a r_A . Asumiendo que la velocidad peculiar de la galaxia A es 0, entonces la coordenada r_A es constante.

De la métrica FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.33)$$

obtenemos la distancia propia $d(t)$ integrando sobre un camino con $t = \theta = \phi = \text{const.}$, lo que implica que $dt = d\theta = d\phi = 0$, así $ds^2 = a^2(t) \frac{dr^2}{1 - Kr^2}$. Realizando la integral

$$d(t) = \int_0^{r_A} a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (2.34)$$

obtenemos

$$d(t) = \begin{cases} K^{-1/2} a(t) \sin^{-1} K^{1/2} r_A & \text{si } K > 0, \\ a(t) r_A & \text{si } K = 0, \\ |K|^{-1/2} a(t) \sinh^{-1} (|K|^{1/2} r_A) & \text{si } K < 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Para facilitar el manejo de los 3 casos simultáneamente, definimos el ‘seno generalizado’

$$S_K(x) \equiv \begin{cases} K^{-1/2} \sin(K^{1/2}x) & \text{si } K < 0, \\ x & \text{si } K = 0, \\ |K|^{-1/2} \sinh(|K|^{1/2}x) & \text{si } K > 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Si denotamos S_K^{-1} para sus funciones inversas, la distancia propia (2.35) se escribe de una manera más compacta

$$d(t) = a(t)S_K^{-1}(r). \quad (2.37)$$

Por otra parte, la relación entre el *redshift* (2.32) y la distancia propia a un tiempo $t < t_0$ viene dada por

$$d(t) = a(t)S_K^{-1}(r) = \frac{a_0}{1+z}S_K^{-1}(r) = \frac{d_0}{1+z}, \quad (2.38)$$

donde d_0 es el valor actual de la distancia propia a r , ó en otras palabras, es la distancia comóvil a r . A diferencia del *redshift*, la distancia d y la coordenada r a una galaxia no son directamente observables. Por tanto, nuestra siguiente tarea será encontrar una relación directa entre el *redshift* y la distancia propia, es decir, queremos resolver la siguiente cuestión: Si se observa una galaxia con un *redshift* z , ¿A qué distancia (comóvil y propia) se encuentra? (Asumiremos que z se debe completamente a la expansión de Hubble, $1+z = a_0/a$, i.e., ignoraremos la contribución de la velocidad peculiar de la galaxia y del observador).

Partiendo de la ecuación de Friedmann con cuatro componentes distintos de materia, tenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \Omega_r H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_m H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda H_0^2 - \frac{K}{a^2} \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow \frac{da}{dt} = H_0 a_0 \sqrt{\Omega_r a_0^2 a^{-2} + \Omega_m a_0 a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2 a_0^{-2} - K H_0^{-2} a_0^{-2}}. \quad (2.40)$$

Definiendo

$$x \equiv \frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}, \quad (2.41)$$

y utilizando (2.18) llegamos finalmente a

$$\frac{1}{a_0} \frac{da}{dt} \equiv \frac{dx}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_r x^{-2} + \Omega_m x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2 + (1 - \Omega_0)}. \quad (2.42)$$

Por otro lado, dado que para un rayo de luz se cumple

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - Kr^2} = 0, \quad (2.43)$$

tenemos

$$dt = -a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \frac{d(t)}{a(t)} = \frac{d_0}{a_0}. \quad (2.44)$$

La distancia comóvil a un *redshift* z es entonces

$$d_0(z) = a_0 \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{x(a(t_1))}^{x(a(t_0))} \frac{dx}{x} \frac{1}{\dot{x}}. \quad (2.45)$$

Recordemos que \dot{x} viene dado por (2.42) por lo que

$$\begin{aligned} d_0(z) &= \int_{x(a(t_1))}^{x(a(t_0))} \frac{dx}{x} \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_m x^{-1} + \Omega_r x^{-2} + \Omega_\Lambda x^2 + (1 - \Omega_0)}} \\ &= H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + (1 - \Omega_0)x^2 + \Omega_m x + \Omega_r}} \\ &\approx H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + (1 - \Omega_0)x^2 + \Omega_m x}} \\ &= H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_0(x - x^2) - \Omega_\Lambda(x - x^4) + x^2}}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde despreciamos el término Ω_r , y utilizamos que $\Omega_m \approx \Omega_0 - \Omega_\Lambda$ la tercera línea. A la expresión (2.46) se le conoce como la *relación distancia-redshift*. Observamos que depende de tres parámetros cosmológicos independientes, i.e., H_0, Ω_0 y Ω_Λ . En esta parametrización, la distancia a un *redshift* dado es proporcional al radio de Hubble H_0^{-1} .

Por otra parte, si la galaxia se ha mantenido al mismo valor de la coordenada r en la época actual, i.e., no tiene velocidad peculiar, entonces la distancia comóvil es igual a la distancia actual. La distancia física a la galaxia al tiempo t_1 que la luz salió de la galaxia viene dada por (2.38)

$$d_1(z) = \frac{d_0(z)}{1+z}. \quad (2.47)$$

Si extrapolamos la validez de la Relatividad General hasta el inicio del universo, i.e., hasta $a = 0$ ó $z = \infty$, entonces la distancia comóvil que la luz ha recorrido durante toda la edad del universo es

$$d_{hor} = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + (1 - \Omega_0)x^2 + \Omega_m x + \Omega_r}} \quad (2.48)$$

La distancia d_{hor} (o la esfera con radio d_{hor} , centrada en el observador) es llamada el *horizonte* en cosmología, dado que es la máxima distancia que podemos ‘ver’, o mejor dicho recibir información alguna. En cosmología (y en Relatividad General) hay muchos conceptos diferentes de distancia llamados horizontes; en particular, el definido en (2.48) es el *horizonte de partículas*. Sin embargo, cuando la materia satisface la condición fuerte de energía, $\rho + 3P > 0$, el horizonte de partículas es usualmente del orden de la escala de Hubble (también conocida como radio de Hubble) H^{-1} . Por consiguiente, los nombres ‘radio de Hubble’ y ‘horizonte de partículas’ se usan frecuentemente de manera intercambiable. Aunque el radio de Hubble y el horizonte de partículas son de magnitudes similares para algunos modelos, pueden llegar a diferir por un gran factor cuando se viola la condición fuerte de energía, $\rho + 3P < 0$, por ejemplo cuando $\ddot{a} > 0$, esto es, cuando ocurre una expansión acelerada. De hecho, el radio de Hubble H^{-1} es conceptualmente muy distinto a un horizonte principalmente porque es una escala dinámica que caracteriza la tasa de expansión y es del orden de la escala de 4-curvatura. A pesar del hecho de que el radio de Hubble no es propiamente un horizonte, el uso del término ‘horizonte’, al referirse a la escala de curvatura, se ha convertido de uso común en la literatura por lo que ocasionalmente seguiremos la ‘terminología tradicional’. Sin embargo, a lo largo de este trabajo tendremos en mente la distinción entre horizonte de partículas y radio de Hubble.

Otros conceptos de horizonte son el *horizonte de eventos*, que está relacionado a cuan lejos puede viajar la luz en el futuro; el *horizonte de Cauchy*; *horizonte aparente* y *horizonte de Killing*, todos ellos son diferentes conceptos de horizontes utilizados en Relatividad General [109].

Suponiendo el caso más simple, $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$ (con $\Omega_r \approx 0$), (2.46) es simplemente

$$d_0(z) = H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{x^{1/2}} = 2H_0^{-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right). \quad (2.49)$$

La distancia al horizonte (horizonte de partículas) en este caso es:

$$d_{hor} \equiv d_0(z = \infty) = 2H_0^{-1}. \quad (2.50)$$

Por otro lado, expandiendo $1/\sqrt{1+z}$ para $z \ll 1$ obtenemos $1/\sqrt{1+z} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 - \frac{5}{16}z^3 - \dots$, lo cual podemos sustituir en (2.49)

$$d_0(z) = H_0^{-1}(z - \frac{3}{4}z^2 + \frac{5}{8}z^3 - \dots). \quad (2.51)$$

Así, para *redshift* pequeños, $z \ll 1$, obtenemos la Ley de Hubble, $z = H_0 d_0$.

La expresión (2.49) también nos permite encontrar la distancia propia en función de z al tiempo en que la luz que observamos salió de la galaxia

$$d_1(z) = \frac{1}{1+z}d_0(z) = 2H_0^{-1}\left(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right). \quad (2.52)$$

Nuevamente para *redshift* pequeños, $z \ll 1$, podemos expandir el termino entre paréntesis de la última expresión obteniendo

$$d_1(z) = H_0^{-1}(z - \frac{7}{4}z^2 + \frac{19}{8}z^3 - \dots). \quad (2.53)$$

A primer orden en z , esta última expresión es igual a la Ley de Hubble $d_1(z) = H_0^{-1}z$. De esta manera la Ley de Hubble es válida para z pequeña sin importar nuestra definición de distancia.

2.5. Historia térmica y Termodinámica del universo primitivo

Al mirar al espacio podemos ver casi toda la historia del universo con nuestros telescopios. Esto es, a un *redshift* $z = 1100$ nuestra vista encuentra la última superficie de dispersión, en la cual se origina la radiación del CMB. Antes de esta época, llamada época del desacople, el universo no era transparente, por lo que no podemos ‘ver’ más atrás en el tiempo hasta el origen del universo. Sin embargo, el espectro de cuerpo negro de la radiación cósmica de fondo, indica que los fotones y la materia estuvieron en equilibrio térmico a una temperatura distinta de cero en épocas anteriores al desacople (el equilibrio térmico se mantenía ya que los fotones y electrones interactuaban mediante dispersión de Thomson). De esta manera podemos emplear a la Termodinámica para estudiar la historia del universo temprano. Esta sección y la siguiente estarán basadas en las referencias bibliográficas [58, 109, 36, 83].

En equilibrio termodinámico, la *función de distribución*, la cual corresponde al número de partículas por unidad de volumen en el espacio fase, depende sólo de la energía del estado. Esta función, de acuerdo con la física estadística, es

$$f(|\vec{p}|) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}, \quad (2.54)$$

donde + es para fermiones y – es para bosones. La función de distribución anterior tiene 2 parámetros, la temperatura T y el potencial químico μ .

Si todas las especies de partículas i tienen una función de distribución del tipo (2.54) para algún μ_i y T_i , se dice que están en *equilibrio cinético*. Si todas las especies están a la misma temperatura entonces el sistema se encuentra en *equilibrio térmico*; este tipo de equilibrio requiere que las interacciones entre los constituyentes del sistema ocurran de manera frecuente. Si esta condición se satisface, entonces es posible describir al universo como evolucionando a través de una secuencia de estados en equilibrio térmico y utilizar las cantidades termodinámicas como la temperatura T , presión P , etc., para cada tiempo t . Si el sistema se encuentra en *equilibrio químico*, los potenciales químicos de las diferentes especies de partículas están relacionados de acuerdo a las formulas de reacción, $i + j \leftrightarrow k + l$, $\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l$, por lo cual, todos los potenciales químicos pueden expresarse en términos de potenciales químicos de cantidades conservadas, como por ejemplo, el potencial químico bariónico.

La densidad de partículas en el espacio fase es la densidad de estados multiplicada por la función de distribución $\frac{g}{(2\pi)^3} f(\vec{p})$, donde g es el número de grados de libertad internos de la partícula. Es posible obtener la densidad de partículas en el espacio ordinario integrando sobre el espacio de momentos

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p. \quad (2.55)$$

Análogamente, la densidad de energía y presión en el espacio de configuraciones están dadas por

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) E(\vec{p}) d^3p, \quad (2.56)$$

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) \frac{|\vec{p}|^2}{3E} d^3p. \quad (2.57)$$

Si la temperatura es mucho mayor que la masa de la partícula, $T \gg m$, esto es en el límite ultra-relativista, podemos aproximar $E = \sqrt{p^2 + m^2} \sim p$. Adicionalmente, si $|\mu| \ll T$, podemos aproximar, $\mu \approx 0$ y $m \approx 0$ obteniendo

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1}, \quad (2.58)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1}, \quad (2.59)$$

$$P = \frac{g}{3(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{1}{3}\rho. \quad (2.60)$$

En el caso de *fermiones* ultra-relativistas tenemos

$$n_f = \frac{3}{4\pi^2} \zeta(3) g T^3, \quad (2.61)$$

$$\rho_f = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4, \quad (2.62)$$

$$P_f = 1.0505 n_f T, \quad (2.63)$$

mientras que para los *bosones*

$$n_b = \frac{1}{\pi^2} \zeta(3) g T^3, \quad (2.64)$$

$$\rho_b = \frac{\pi^2}{30} g T^4, \quad (2.65)$$

$$P_b = 0.9004 n_b T, \quad (2.66)$$

donde $\zeta(3) \equiv \sum_{n=1}^\infty (1/n^3) = 1.20206$, es la función zeta de Riemann. Si calculamos la energía promedio por partícula $\langle E \rangle = \frac{\rho}{n}$ obtenemos para los fermiones $\langle E \rangle_f = 3.151T$ mientras que para bosones $\langle E \rangle_b = 2.701T$.

Si el potencial químico $\mu = 0$, hay igual número de partículas que de antipartículas. Si $\mu \neq 0$, encontramos que para fermiones en el límite ultra-relativista $T \gg m$ el número neto de partículas es

$$\begin{aligned} n - \bar{n} &= \frac{g}{2\pi^3} \int_0^\infty dp \quad 4\pi p^2 \left(\frac{1}{e^{(p-\mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(p+\mu)/T} + 1} \right) \\ &= \frac{gT^3}{6\pi^2} \left(\pi^2 \left(\frac{\mu}{T} \right) + \left(\frac{\mu}{T} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Mientras que la densidad de energía total es

$$\begin{aligned}
\rho + \bar{\rho} &= \frac{g}{2\pi^3} \int_0^\infty dp \, 4\pi p^3 \left(\frac{1}{e^{(p-\mu)/T} + 1} + \frac{1}{e^{(p+\mu)/T} + 1} \right) \\
&= \frac{7}{8} g \frac{\pi^2}{15} T^4 \left(1 + \frac{30}{7\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right) + \frac{15}{7\pi^4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right). \tag{2.68}
\end{aligned}$$

Notamos que (2.67) y (2.68) no son series truncadas, sino expresiones exactas.

En el caso del límite no relativista, $T \ll m$ y $T \ll m - \mu$; además la energía cinética típica es mucho menor que la masa, por lo que podemos aproximar $E = m + p^2/2m$. La condición, $T \ll m - \mu$, nos lleva a números de ocupación $\ll 1$, i.e., un sistema diluido. Por lo tanto, es válida la aproximación

$$e^{(E-\mu)/T} \pm 1 \approx e^{(E-\mu)/T}, \tag{2.69}$$

esto es, la estadística de Maxwell-Boltzmann y no existe distinción entre la estadística de fermiones y bosones. Por lo tanto

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m-\mu}{T}}, \tag{2.70}$$

$$\rho = n \left(m + \frac{3T}{2} \right), \tag{2.71}$$

$$P = nT \ll \rho, \tag{2.72}$$

$$\langle E \rangle = m + \frac{3T}{2}, \tag{2.73}$$

$$n - \bar{n} = 2g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T} \sinh \frac{\mu}{T}. \tag{2.74}$$

Comparando los límites ultra-relativista ($T \gg m$) y no relativista ($T \ll m$), observamos que la densidad de partículas, la densidad de energía, y la presión de las partículas decae exponencialmente conforme la temperatura decae por debajo de la masa de la partícula. Físicamente, lo que sucede es que las partículas y las antipartículas se aniquilan unas a otras. A altas temperaturas dichas aniquilaciones también se llevan a cabo, pero están balanceadas por la producción de pares partícula-antipartícula. A temperaturas bajas, la energía térmica de las partículas no es suficiente para la producción de pares.

La entropía $S(V, T)$ es otra cantidad termodinámica de gran importancia. De la primera ley de la termodinámica encontramos

$$S(V, T) = \frac{V}{T}[\rho(T) + P(T)]. \quad (2.75)$$

Por otra parte, reescribiendo la ecuación de continuidad (2.13) se tiene

$$a^3 \frac{dP}{dT} = \frac{d}{dt}[a^3(\rho + P)], \quad (2.76)$$

y al combinarla con

$$\frac{dP(T)}{dT} = \frac{1}{T}[\rho(T) + P(T)], \quad (2.77)$$

obtenemos una ecuación de conservación para la entropía

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (2.78)$$

donde identificamos V con $a^3(t)$. Si definimos a la densidad de entropía $s \equiv S/V$, la ecuación de conservación se escribe como

$$\frac{d}{dt}(a^3 s) = 0. \quad (2.79)$$

Para las especies relativistas la densidad de entropía viene dada por

$$s = \frac{\rho + P}{T}. \quad (2.80)$$

En el caso de los fermiones

$$s_f = \frac{7\pi^2}{180} g T^3, \quad (2.81)$$

mientras que para bosones

$$s_b = \frac{2\pi^2}{45} g T^3. \quad (2.82)$$

El caso no relativista no es importante, ya que la entropía de la radiación es mucho mayor que la entropía de las especies no relativistas. La entropía producida durante los diferentes procesos que ocurren en el universo es insignificante comparada con la entropía total del universo, por lo que se dice que el universo es *adiabático*.

La conservación de la entropía S implica que tanto para fermiones y bosones tenemos que $ga^3T^3 = \text{const.}$, lo que nos lleva una relación útil entre el factor de escala y la temperatura

$$a(t) \propto T^{-1} \quad (2.83)$$

De acuerdo con la ecuación de Friedmann, la expansión del universo está gobernada por la densidad de energía total

$$\rho(T) = \sum \rho_i(T), \quad (2.84)$$

donde el índice i corre sobre las diferentes especies de materia que pudieran estar presentes en el universo. Dado que la densidad de energía de especies relativistas es mucho mayor que la de las no relativistas, es suficiente con incluir sólo las relativistas (Esto es válido para el universo primitivo, pero no para tiempos posteriores. Eventualmente, las masas en reposo de las partículas que quedaron después de la aniquilación comienzan a dominar y entramos en una era dominada por materia). De esta manera usando los resultados de la sección anterior tenemos

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4, \quad (2.85)$$

donde

$$g_*(T) = g_b(T) + \frac{7}{8} g_f(T)$$

y $g_b = \sum_i g_i$ suma sobre bosones relativistas y $g_f = \sum_i g_i$ suma sobre fermiones relativistas. Para la presión tenemos $P(T) \approx \frac{\rho(T)}{3}$.

Los resultados anteriores nos permiten describir la historia térmica del universo. El cuadro (2.1) presenta las épocas más importantes en la historia del universo primitivo.

A temperaturas $T \gg 175$ GeV (masa en reposo del quark *top*) todas las partículas son relativistas, esto es, para $t > 10^{-12}$ segundos y $g_* = 107$, donde estamos sumando los grados de libertad internos de todos los fermiones (quarks, leptones) y bosones (gluones, fotones, W^\pm , Z^0 , Higgs) conocidos. Cerca de $T \sim 100$ GeV ocurrió la transición de fase electro-débil.

Después de que sucedió la transición de fase electro-débil, la temperatura del universo era $T \sim 100$ GeV, $t \sim 20$ ps, y la aniquilación del quark t comenzaba a suceder. El boson de Higgs y los bosones de norma W^\pm , Z^0 se aniquilaron posteriormente. A la temperatura $T \sim 10$ GeV, tenemos $g_* = 86.25$ y es alrededor de esta etapa en que

Cuadro 2.1: Eventos más importantes en el universo primitivo

Evento cosmológico	Temperatura	Tiempo cosmológico
Transición de fase electrodébil	$T \sim 100 \text{ GeV}$	$t \sim 20 \text{ ps}$
Transición de fase QCD	$T \sim 150 \text{ MeV}$	$t \sim 20 \mu\text{s}$
Desacople de neutrinos	$T \sim 1 \text{ MeV}$	$t \sim 1 \text{ s}$
Aniquilación electrón-positrón	$T \sim 0.5 \text{ MeV}$	$t \sim 10 \text{ s}$
Big Bang Nucleosíntesis	$T \sim 50 - 100 \text{ keV}$	$t \sim 10 \text{ min.}$
Igualdad entre materia y radiación	$T \sim 0.8 \text{ eV}$	$t \sim 60 \text{ mil años}$
Recombinación y desacople de fotones	$T \sim 0.3 \text{ eV}$	$t \sim 380 \text{ mil años}$

los quarks b y c se aniquilan junto con el meson τ lo que reduce los grados internos de libertad $g_* = 51.25$.

A la mitad del proceso de aniquilación del quark s , sucede una transición importante: La transición de fase QCD (también llamada transición de fase quark-hadron). Esta transición tiene lugar a $T \sim 150 \text{ MeV}$, $t \sim 20 \mu\text{s}$. La temperatura y por consiguiente la energía de los quarks decayó tanto que los quarks perdieron su llamada *libertad asintótica*, la cual habían tenido a altas energías. Las interacciones entre los quarks y gluones (la fuerza nuclear fuerte o la fuerza de color) comenzaron a ser considerables (las formulas de la densidad de energía de la sección pasada ya no aplican). Los quarks y gluones dejaron de ser libres, por lo que el plasma quark-gluon comenzó a transformarse en un gas de hadrones. Los quarks y los gluones formaron sistemas ligados de 3 quarks⁸, llamados bariones, y pares quarks-antiquarks, llamados mesones. En esta etapa se tiene $g_* = 17.25$. Poco después de la transición de fase QCD, cuando la temperatura alcanza $T = 20 \text{ MeV}$, $g_* = 10.75$, los piones y los muones comienzan a decaer en electrones y positrones.

Cuando la edad del universo era de aproximadamente un segundo y la temperatura $T \approx 1 \text{ MeV}$, la materia en el universo consistía casi totalmente de neutrinos, fotones, electrones, positrones, neutrones, y protones en equilibrio térmico; la temperatura era lo suficientemente baja para que la abundancia de partículas elementales más pesadas fuera despreciable. Alrededor de esta época, las interacciones de los neutrinos se volvieron suficientemente débiles y se desacoplaron del resto de la materia. Por el resto de la historia del universo, estos neutrinos sólo sufrieron un corrimiento hacia el rojo, lo cual implica que su energía fue decayendo hasta formar un fondo cósmico de radiación similar al CMB pero compuesto de neutrinos. Sin embargo la

⁸Quarks de valencia.

detección de estos neutrinos es complicada debido a la tecnología actual.

A $t = 4$ segundos, tenemos que la temperatura $T \approx 0.5$ MeV. En esta etapa los electrones y positrones comienzan a aniquilarse; la tasa de producción de pares cae por debajo de la tasa de aniquilación, y poco tiempo después se aniquilan la mayor parte de los positrones, dejando una población relativamente pequeña de electrones residuales. Esencialmente toda la energía de los pares positron-electron se transfirió a los fotones, calentándolos a una temperatura ~ 1.4 veces mayor que la temperatura de los neutrinos.

Cuando la temperatura alcanza aproximadamente los 100 keV, y $t \approx 3$ minutos, comienza la *nucleosíntesis*, produciendo núcleos de He^4 . La nucleosíntesis de elementos más allá del He^4 es poco considerable debido a la poca estabilidad de núcleos con peso atómico entre 5 y 8. Esencialmente todos los neutrones presentes en esa época que no decayeron se convirtieron en núcleos de He^4 , resultando en una abundancia de cerca del 25% , con abundancias más pequeñas de núcleos de H^2 , He^3 , y Li^7 .

La predicción de abundancia de los elementos formados durante la nucleosíntesis se ha confirmado por las observaciones y de hecho es uno de los grandes logros del modelo estándar cosmológico. Esta predicción es sorprendente ya que las relaciones de las abundancias respecto a la abundancia del Hidrógeno, cubre varios ordenes de magnitud: $\text{He}^4/\text{H} \sim 0.08$ hasta $\text{Li}^7/\text{H} \sim 10^{-10}$, así para esa predicción y su confirmación existen cotas muy restrictivas a posibles desviaciones del model estándar cosmológico [39, 36].

Después de la nucleosíntesis, el universo continuó expendiéndose y enfriándose. El siguiente evento cosmológico de gran importancia tuvo lugar cuando la temperatura cayo a los ≈ 0.3 eV, $t \sim 400$ mil años (esta edad depende mucho de si el universo siguió dominado por radiación hasta esta época ó si la materia ya empezaba a contribuir a la densidad de energía). A esta temperatura y por debajo de ella, los electrones y protones libres se combinaron para formar hidrógeno neutro. Debido a este proceso, esta etapa se le conoce como *recombinación* (aunque en realidad los protones y electrones no habían estado combinados antes). Las interacciones entre materia y radiación decayeron precipitosamente, los fotones se desacoplaron por completo de la materia y después de la recombinación se enfriaron debido a la expansión del universo. Las escasas interacciones entre fotones y materia durante la evolución del universo después de la recombinación tuvo como consecuencia que actualmente observamos un fondo de radiación con un temperatura $T \approx 2.7\text{K}$ (correspondiente a microondas), esta es la famosa Radiación Cómica de Fondo, descubierta por Penzias y Wilson en 1965.

El desacople entre materia y radiación en esta época tuvo un gran efecto en el crecimiento de las perturbaciones gravitacionales, que tuvo como consecuencia la

formación de galaxias. En algún tiempo entre $t \sim 10^3$ años y $t \sim 10^7$ años, la materia se volvió la forma dominante de energía en el universo. La dinámica del universo se transformó de una solución dominada por radiación a una dominada por materia. Finalmente a $t \sim 14$ mil millones de años el universo alcanzó su estado actual.

Capítulo 3

Inflación y origen de estructura

En el capítulo anterior, estudiamos el modelo cosmológico del Big Bang, dicho modelo ha resultado ser muy exitoso; las evidencias observacionales más fuertes que apoyan las predicciones de este modelo son:

- La expansión del Universo.
- La existencia del Fondo Cósmico de Radiación.
- Las abundancias de los elementos ligeros en el Universo (nucleosíntesis).

Sin embargo, el modelo cosmológico estándar tiene tres problemas de naturalidad bien conocidos: el problema de *planitud*, el problema del *horizonte* y *reliquias no deseadas*. Estos problemas no son indicio de inconsistencias lógicas de la cosmología estándar, sino más bien están relacionados con un conjunto de condiciones iniciales muy particulares para poder explicar la evolución del universo con las características que observamos hoy en día. El esquema inflacionario es una solución elegante a los problemas mencionados de la cosmología del Big Bang, sin embargo, el gran éxito actual del paradigma inflacionario radica en que supuestamente brinda una explicación acerca del origen de las inhomogeneidades observadas en el CMB. En este capítulo comenzaremos analizando los problemas tradicionales del modelo del Big Bang, y posteriormente, introduciremos el modelo de Inflación y estudiaremos detalladamente su conexión con el origen de las semillas de estructura cósmica. Las referencias que seguiremos a lo largo de este capítulo son [63, 79, 69].

3.1. Problema de Planitud

Si ignoramos una posible contribución debido a una constante cosmológica, la ecuación de Friedmann (2.18) puede reescribirse como

$$|\Omega(t) - 1| = \frac{|K|}{a^2(t)H^2(t)}. \quad (3.1)$$

En la evolución estándar dada por la teoría del Big Bang, a^2H^2 siempre disminuye, por lo que $|\Omega(t) - 1|$ aumenta conforme t se incrementa, por ejemplo

1. Universo dominado por materia

$$a \propto t^{2/3}, H \propto t^{-1} \Rightarrow \frac{1}{aH} \propto t^{1/3} \quad \Rightarrow |1 - \Omega| \propto t^{2/3}. \quad (3.2)$$

2. Universo dominado por radiación

$$a \propto t^{1/2}, H \propto t^{-1} \Rightarrow \frac{1}{aH} \propto t^{1/2} \quad \Rightarrow |1 - \Omega| \propto t. \quad (3.3)$$

Actualmente sabemos que Ω_0 es del orden de la unidad (recordemos que Ω_0 se refiere al valor en la época actual), también sabemos que la temperatura actual de la radiación del CMB es de $T \sim 10^{-13}$ GeV. Utilizando esta temperatura, es posible deducir el valor de $|\Omega(t) - 1|$ en la época de nucleosíntesis; empleando que la temperatura en dicha época fue de $T_N \sim 1$ MeV encontramos

$$\frac{|\Omega - 1|_{T=T_N}}{|\Omega - 1|_{T=T_0}} \approx \left(\frac{a_N^2}{a_0^2} \right) \approx \left(\frac{T_0^2}{T_N^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-16}), \quad (3.4)$$

es decir, el valor de Ω_N debió ser prácticamente 1 para que actualmente observemos dicho valor, por tanto, tenemos un problema de ajuste fino, necesitamos una condición inicial muy particular para que coincidan los datos observacionales de la época actual.

3.2. Problema del Horizonte

Las observaciones del CMB indican que los fotones provenientes de direcciones opuestas en el cielo observable, aparentan estar en equilibrio térmico a casi la misma temperatura. La explicación más natural es que el universo ha alcanzado un estado

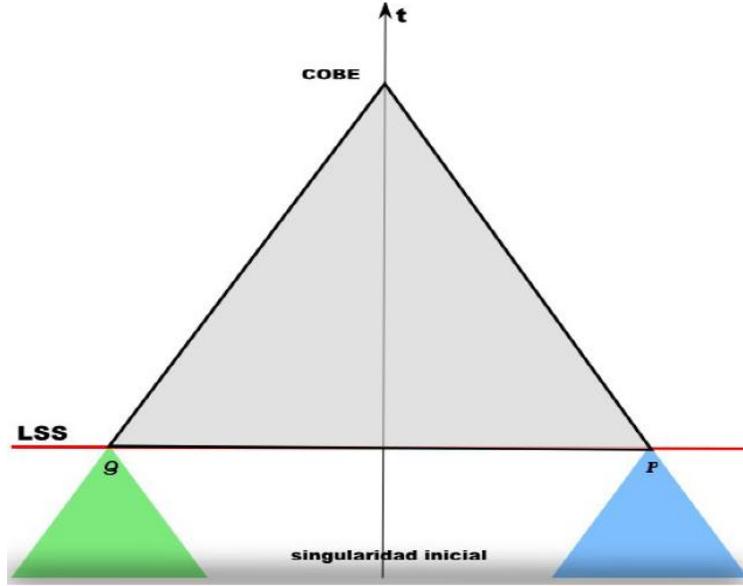


Figura 3.1: *Problema del Horizonte:* Puntos opuestos (P y Q) en la última superficie de dispersión (LSS) nunca estuvieron en contacto causal (i.e. sus conos de luz pasados no se interesectan) y aún así tienen propiedades similares.

de equilibrio térmico a través de las interacciones entre las diferentes regiones del CMB. Sin embargo, esta explicación no es compatible con la teoría del Big Bang estándar: No existió suficiente tiempo para que esas regiones interactuaran antes de que los fotones fueran emitidos (Fig. 3.1), lo cual es debido a que el horizonte de partículas es finito y de hecho se cumple que

$$\int_0^{t_D} \frac{dt}{a(t)} \ll \int_{t_D}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.5)$$

donde t_D es el tiempo de desacople. La desigualdad anterior puede demostrarse de la siguiente manera: Suponiendo que el universo ha estado dominado por materia no relativista desde el tiempo de desacople t_D hasta hoy en día t_0 , entonces

$$a_D \int_{t_D}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \approx 3(t_D^2 t_0)^{1/3}. \quad (3.6)$$

Por otra parte, si asumimos que desde $t = 0$ a t_D el universo estaba dominado por radiación entonces

$$a_D \int_0^{t_D} \frac{dt}{a(t)} = 2t_D. \quad (3.7)$$

Utilizando el hecho observable que $t_0 \approx 10^{10}$ años, mientras que $t_D \approx 10^5$ años, notamos que se satisface la desigualdad (3.5).

Físicamente, (3.5) nos dice que la distancia que la luz pudo haber viajado antes de que se formara el CMB es más pequeña que la distancia del horizonte (horizonte de partículas) actual. De hecho las regiones separadas por más de 2 grados en el cielo estarían causalmente desconectadas en la teoría del Big Bang. Por lo tanto, en la teoría estándar del Big Bang resulta complicado concebir una explicación al por qué el universo aparenta ser tan isotrópico, por lo que dicha isotropía debería corresponder a una condición inicial.

3.3. Reliquias no deseadas

Adicionalmente a los problemas del horizonte y de la planitud tenemos un problema de *Reliquias no deseadas*. Este problema¹ consiste en que si el Big Bang comienza a una temperatura muy alta, las teorías más populares de Gran Unificación predicen la existencia de objetos (e.g., gravitinos, monopolos magnéticos) que pudieran haber sobrevivido hasta la época actual, pero que son descartados por las observaciones.

3.4. Inflación

El esquema inflacionario no es un reemplazo de la teoría del Big Bang sino un ingrediente adicional; se asume que la inflación tuvo lugar durante las primeras etapas del universo (e.g., $t \sim 10^{-35}$ s) y al término de esta época el universo siguió con su evolución descrita por el modelo del Big Bang, de esta manera las predicciones de la cosmología estándar no se ven afectadas.

Consideremos primero la relación entre inflación y el problema de planitud. En la expresión (3.1) notamos que el problema viene del hecho de que al evolucionar $\Omega(t)$ se aleja siempre de 1 (ya sea que $\Omega(t)$ se vuelva una cantidad mucho mayor que 1 ó que se vuelva una cantidad mucho menor que 1), lo cual se puede analizar de la siguiente manera

¹Algunos especialistas consideran que el problema de reliquias no deseadas es realmente un problema solo si las Teorías de Gran Unificación (e.g., Supersimetría) resultan favorecidas por los datos experimentales.

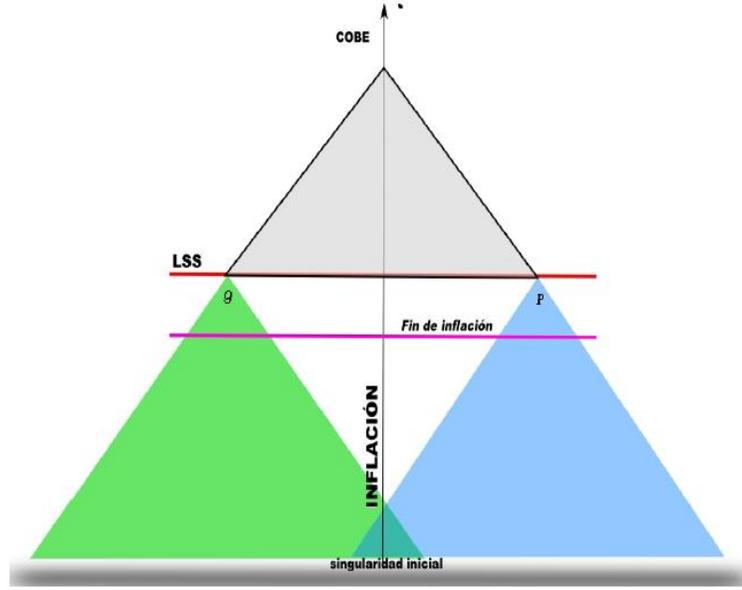


Figura 3.2: *Solución del Problema del Horizonte:* Debido a la expansión acelerada del universo, existe suficiente ‘tiempo’ para que los conos de luz pasados de los puntos P y Q hayan estado en contacto causal.

$$\frac{d}{dt}|\Omega - 1| = |K| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a^2 H^2} \right) = |K| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{a}^2} \right) = \frac{-2|K|}{\dot{a}^3} \ddot{a}. \quad (3.8)$$

Si el universo se expande, entonces $aH = \dot{a} > 0$ por lo que $\dot{a}^3 > 0$. En las expresiones (3.2) y (3.3) observamos que dada la forma explícita de $a(t)$, tanto en los universos dominados por materia y radiación, se cumple que $\ddot{a} < 0$, lo que implica que

$$\frac{d}{dt}|\Omega - 1| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{a} < 0. \quad (3.9)$$

La conclusión que se obtiene de la expresión anterior es que el problema de la planitud es ocasionado por una expansión *desacelerada* del universo. Si tuviéramos una época temprana en la historia del universo, donde la expansión fuera acelerada, i.e., $\ddot{a} > 0$, entonces $|\Omega - 1| = |K|/(aH)^2$ tendería a cero rápidamente para condiciones iniciales genéricas. Una vez que $\Omega(t)$ se acercara lo suficiente a 1, esta época llegaría a su fin y se seguiría la evolución estándar del universo pero $\Omega(t)$ ya no se alejaría

tanto de 1, coincidiendo así con las observaciones actuales. Esta época temprana de expansión acelerada del universo se conoce como *Inflación*.

Una época de expansión acelerada también resuelve el *problema del horizonte*. Por ejemplo, si el factor de escala es una función exponencial del tipo $\exp(Ht)$, donde H es una constante positiva, es fácil que se cumpla la desigualdad

$$\int_{t_i}^{t_D} \frac{dt}{a(t)} \gg \int_{t_D}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.10)$$

donde t_i es el tiempo al inicio de la inflación.

El problema de *reliquias no deseadas* se resuelve si la expansión acelerada del universo diluye rápidamente dichas reliquias, lo cual es factible debido a que la densidad de energía durante la inflación decae más lentamente que la densidad de partículas de las reliquias. La solución dada por la inflación a este problema es posible sólo si, después de la inflación, la densidad de energía del universo se convierte en materia convencional sin crear reliquias no deseadas. De hecho, si nos aseguramos que durante la conversión, conocida como *recalentamiento*, la temperatura no aumente demasiado (aproximadamente 10^{14} GeV) es muy factible que no haya recreación de reliquias; de esta manera el recalentamiento sólo produciría partículas observadas. El recalentamiento nos permite llevar al universo del régimen inflacionario a la evolución estándar dada por el Big Bang, recuperando todas sus predicciones exitosas como la nucleosíntesis y todas las predicciones sobre el CMB.

3.5. El universo inflacionario

La posibilidad de la existencia de una expansión acelerada del universo fue contemplada por muchos autores mucho antes de que se considerara algún modelo específico. En la referencia [82] puede encontrarse un compendio de escenarios pre-inflacionarios. El primer modelo inflacionario, que se consideró propiamente como modelo físico, fue propuesto por Alan Guth [42] en 1981. A este primer modelo inflacionario se le conoce como ‘inflación vieja’. En el modelo de Guth, se asumía que un campo escalar quedaba atrapado en un estado de falso vacío con una alta densidad de energía, muy parecida a una constante cosmológica. Este falso vacío era metaestable y sólo se podía salir a través de un proceso de nucleación de burbujas via efecto túnel cuántico. Poco tiempo después, el mismo Guth reconoció que su modelo no era viable.

El primer modelo viable fue propuesto por Linde [64], y Albrecht y Steinhardt [3] en 1982, en dicho modelo se consideró un campo escalar (el inflatón), que bajo

condiciones apropiadas, *rodaría lentamente*² hasta llegar al mínimo de un potencial plano, a este modelo se le denominó como ‘nueva inflación’. Posteriormente, en 1983 Linde [65] propuso otro modelo inflacionario en el cual, los valores iniciales del campo escalar supuestamente variaban de forma caótica para diferentes regiones del universo y por esta razón a este modelo se le conoce como ‘inflación caótica’. Años más tarde, el modelo caótico fue favorecido por las observaciones. En este trabajo de tesis nos enfocaremos a los modelos genéricos que contengan la condición *slow-roll* (estos modelos los discutiremos más detalladamente en la Sección 3.5.1).

En los años 90 la comunidad continuó explorando diversos modelos inflacionarios tales como ‘inflación extendida’[59] y la ‘inflación híbrida’[66, 67]. Actualmente hay una gran variedad de escenarios inflacionarios, entre los cuales podemos mencionar aquellos relacionados con Supersimetría, Teoría de Branas, Teoría de Cuerdas, etc.

Históricamente la inflación surgió para resolver los problemas del modelo del Big Bang estándar, sin embargo, actualmente el mayor éxito del paradigma inflacionario radica en la convicción de que provee una explicación³ acerca de la generación de las semillas de estructura cósmica.

La inflación no es tanto una teoría, sino más bien una idea general sobre cierto tipo de comportamiento del universo. El punto importante es que la inflación hace predicciones genéricas, i.e., predicciones que son independientes de un modelo particular de inflación. Los datos observacionales actuales concuerdan con estas predicciones. Por tanto, se cree ampliamente que algo como la inflación tuvo lugar en el universo primitivo (aunque existen otras alternativas, e.g., [48]).

Recordemos entonces que la inflación es una época en la que el universo se expandió aceleradamente, i.e., $\ddot{a} > 0$. Teniendo esto en mente fijemos nuestra atención en la segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (3.11)$$

$$\text{Inflación } (\ddot{a} > 0) \Leftrightarrow \rho + 3P < 0. \quad (3.12)$$

Observamos que la inflación requiere de presión negativa, $P < -1/3\rho$ (siempre se asume que $\rho \geq 0$). Ni un universo dominado por radiación o por materia satisfacen dicha condición (para radiación $P = \rho/3$ y para materia $P = 0$). Pospongamos por el momento la discusión del candidato más favorable a satisfacer la condición $P < 0$. Supongamos que $P = -\rho$ y estudiemos las propiedades que esto implica. Un periodo del universo en el cual se tuvo $P = -\rho$ se le denomina etapa de *de Sitter*.

²*slow-roll* en inglés.

³En el Capítulo 4 analizaremos críticamente esta ‘explicación’.

Inspeccionando las ecuaciones (2.11) y (2.13), se encuentra que durante la fase de de Sitter $\rho = \text{const.}$ y $H_I = \text{const.}$, donde H_I es el parámetro de Hubble en inflación. Correspondientemente, resolviendo (2.11) se obtiene

$$a(t) = a_i e^{H_I(t-t_i)}, \quad (3.13)$$

donde t_i denota el tiempo al cual comienza la inflación. Adicionalmente dado que la inflación es una etapa en la que $\Omega(t) \approx 1$, se puede asumir que el universo está descrito por la métrica de FRW con $K = 0$, es decir,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.14)$$

3.5.1. El inflatón

En la mayoría de los modelos inflacionarios, la inflación es causada por un campo escalar (aunque existen modelos en los que no se usan campos escalares [111]). Este campo escalar (y su correspondiente partícula de spin-0) se llama *inflatón*.

La acción de un campo escalar ϕ con acople mínimo y término cinético estándar se escribe como:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \nabla_a \phi \nabla^a \phi + V(\phi) \right]. \quad (3.15)$$

Variando la acción (3.15) respecto al campo se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial^a \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\delta \partial^a \phi} - \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\delta \phi} = 0. \quad (3.16)$$

La expresión (3.16) se reduce a la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar. Considerando el caso particular donde la métrica es la de FRW (3.14) se obtiene la ecuación de movimiento del campo

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + \partial_\phi V(\phi) = 0. \quad (3.17)$$

Variando la acción respecto a la métrica se encuentra el tensor de energía-momento del campo escalar

$$T^{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L} \sqrt{-g})}{\delta g_{ab}}, \quad (3.18)$$

el cual, para el caso de un campo escalar, se reduce a

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \mathcal{L}. \quad (3.19)$$

Las correspondientes densidad de energía ρ y presión P , para la métrica de FRW (3.14), son

$$T_{00} = \rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{(\nabla\phi)^2}{2a^2}, \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = P = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{(\nabla\phi)^2}{6a^2}. \quad (3.21)$$

Para analizar el comportamiento dinámico del campo ϕ es usual hacer la separación

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t), \quad (3.22)$$

con $\delta\phi(\mathbf{x}, t) \ll \phi_0(t)$, esto es, estamos asumiendo que la parte homogénea del campo $\phi_0(t)$ es dominante sobre la parte que representarían las inhomogeneidades de dicho campo $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$. Hasta este punto no estamos asumiendo que existan inhomogeneidades de algún tamaño definido en el universo inflacionario, simplemente analizaremos su dinámica en caso de que hubieran existido. El aspecto que tiene que ver con la presencia de dichas inhomogeneidades y su magnitud se trata a un nivel cuántico, esto se revisará con detalle en la Sección 3.6.4.

Abusando un poco de la notación, en las próximas secciones nos referiremos a la parte homogénea del inflatón por ϕ en lugar de ϕ_0 , sin embargo, regresaremos a la notación original cuando de pie a alguna confusión. La densidad de energía y presión de la parte homogénea del campo son, respectivamente,

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.23)$$

$$P = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.24)$$

Si se cumpliera que $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$ obtendríamos la condición $P \approx -\rho$. Con este simple cálculo, notamos que un campo escalar, cuya densidad energía es la dominante en el universo y cuya energía potencial domina sobre su término cinético, da como resultado una época inflacionaria.

3.5.2. Condiciones *slow-roll*

En base a los resultados de la sección anterior es posible hacer un análisis cuantitativo de las circunstancias bajo las cuales ocurre la inflación. La ecuación de movimiento del campo clásico homogéneo es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \partial_{\phi}V(\phi) = 0. \quad (3.25)$$

Para que la inflación tenga lugar en el universo primitivo es necesario imponer ciertas restricciones sobre el potencial y las condiciones iniciales del campo escalar, a estas restricciones se les conoce como condiciones *slow-roll* y se caracterizan de la siguiente manera: Si el potencial es lo suficientemente plano (i.e., $\partial_{\phi}V \ll 1$) y se satisface la condición $\dot{\phi}^2 \ll V$ para algunos valores de $\dot{\phi}$, entonces el campo escalar ‘rodará lentamente’ sobre su propio potencial provocando una expansión acelerada del universo. Esta es la razón por la que a un periodo con estas características se le conoce como inflación *slow-roll*. Adicionalmente, debido a que el potencial es plano, es válido suponer $\ddot{\phi} \approx 0$ (la analogía que se utiliza normalmente para explicar las condiciones *slow-roll* es la de el movimiento de un objeto cayendo con velocidad terminal bajo la influencia de la gravedad en un medio viscoso, debido a que (3.25) tiene la misma estructura que la ecuación de movimiento de dicho objeto). Por consiguiente, las condiciones *slow-roll* están dadas por

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (3.26)$$

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}. \quad (3.27)$$

Por otra parte, la ecuación de Friedmann para un universo con $K = 0$ es

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.23) en la expresión anterior y considerando que la componente de energía predominante en el universo inflacionario proviene del inflatón, encontramos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.29)$$

Aplicando las condiciones *slow-roll* a (3.25) y (3.29) se encuentran las *ecuaciones slow-roll*

$$H^2 = \frac{V(\phi)}{3M_{pl}^2}, \quad (3.30)$$

$$3H\dot{\phi} = -\partial_{\phi}V(\phi). \quad (3.31)$$

Por otra parte, los parámetros *slow-roll* (adimensionales) están definidos como

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{1}{2}M_{pl}^2 \left(\frac{\partial_{\phi}V}{V} \right)^2, \quad (3.32)$$

$$\eta(\phi) \equiv M_{pl}^2 \frac{\partial_{\phi}^2 V}{V}, \quad (3.33)$$

donde $M_P \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = 2.436 \times 10^{18}$ GeV es la masa reducida de Planck.

Las desigualdades (3.26) y (3.27) implican que $\epsilon \ll 1$ y $|\eta| \ll 1$, notemos que la implicación sólo va en ese sentido. Las condiciones $\epsilon \ll 1$ y $|\eta| \ll 1$ son necesarias, pero no suficientes para que la aproximación *slow-roll* sea válida debido a que las condiciones $\epsilon \ll 1$ y $|\eta| \ll 1$ son condiciones sobre la forma del potencial y son útiles para identificar una sección *slow-roll*, esto es, donde la aproximación *slow-roll* puede ser válida. La ecuación de movimiento del campo (3.25) es una ecuación de 2do. orden, por lo que acepta condiciones iniciales arbitrarias de ϕ y $\dot{\phi}$. De esta manera, (3.26) y (3.27) pudieran no cumplirse inicialmente, aún si el potencial es lo suficientemente plano. Sin embargo, sucede que la solución *slow-roll*, i.e., la solución de (3.30) y (3.31), es un atractor de las ecuaciones completas (3.25) y (3.29), lo cual se traduce a que la solución de las ecuaciones completas se aproxima rápidamente a la solución *slow-roll*, sin importar las condiciones iniciales. En realidad, siendo más precisos, no son condiciones iniciales demasiado arbitrarias; las condiciones iniciales deben estar dentro del *rango de atracción*, para que el atractor sea efectivo. El que las condiciones iniciales se encuentren dentro del rango de atracción significa que ϕ debe encontrarse en la sección *slow-roll* del potencial, i.e., $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$

La descripción entre atractor y región de atracción puede precisarse un poco más: Si el universo (o una región de él) se encuentra inicialmente (o entra) en el rango de atracción de la inflación *slow-roll*, esto es, hay una región donde la curvatura es suficientemente pequeña; el inflatón realiza una contribución importante la densidad total de energía; es suficientemente homogéneo, y está en la sección *slow-roll* del potencial, entonces esta región comienza a inflarse, y rápidamente se vuelve muy homogénea y plana, todas las contribuciones a la densidad de energía distintas a la del inflatón se vuelven despreciables, y la inflación se describe por las soluciones de las ecuaciones *slow-roll*.

Por lo tanto la inflación borra toda memoria de las condiciones iniciales, y podemos predecir la evolución del universo sólo de la forma de $V(\phi)$ y la suposición de que ϕ comenzó lo bastante cerca de la parte *slow-roll*.

Para entender un poco más la relación entre la aproximación *slow-roll* y la inflación fijemos nuestra atención en el parámetro ϵ , este parámetro puede usarse directamente para saber cuando nos encontramos en una etapa inflacionaria: Suponiendo que la aproximación *slow-roll* es válida, se demuestra que $\dot{H}/H^2 = \epsilon$, por consiguiente

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \left(1 - \frac{\dot{H}}{H^2}\right)H^2 = (1 - \epsilon)H^2. \quad (3.34)$$

Por lo que llegamos a la conclusión:

$$\epsilon < 1 \quad \text{y} \quad \dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad \Rightarrow \quad \text{Inflación } \textit{slow-roll}.$$

A medida que ϕ se aproxima al mínimo del potencial, $\epsilon(\phi)$ se aproxima a la unidad. Cuando se cumple que $\epsilon(\phi) \approx 1$ generalmente se dice que la inflación ha llegado a su fin y es posible determinar el valor del campo ϕ al final de la inflación.

3.5.3. Cantidad de inflación

Durante la inflación el factor de escala $a(t)$ crece prácticamente de manera exponencial. Una vez que conocemos la forma explícita de $a(t)$, es posible cuantificar que tanto se ha expandido el universo, desde un tiempo inicial t_i hasta un tiempo $t > t_i$, mediante el número de *e-folds* definido como

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t)}{a(t_i)} = \int_{t_i}^t H(\tilde{t})d\tilde{t} \simeq \frac{1}{M_{pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi} \frac{V(\tilde{\phi})}{\partial_{\tilde{\phi}}V(\tilde{\phi})}d\tilde{\phi}, \quad (3.35)$$

donde se utilizaron las ecuaciones *slow-roll* en la última igualdad. El número de e-foldings mínimo para que la inflación resuelva los problemas de planitud y horizonte es de ~ 60 [101].

En resumen, básicamente un modelo de inflación estándar requiere de:

1. Un campo escalar con un potencial $V(\phi)$.
2. Un mecanismo que describa el fin de la inflación.

A su vez, se han contemplado dos maneras en que la inflación puede terminar:

1. La aproximación *slow-roll* deja de ser válida, ya sea que ϕ se aproxime al mínimo del potencial o que $\epsilon(\phi) \approx 1$ y $|\eta(\phi)| \approx 1$.
2. Interviene física extra para terminar la inflación (la inflación termina aún cuando la aproximación *slow-roll* es válida).

3.5.4. Recalentamiento

El recalentamiento es el mecanismo mediante el cual la expansión inflacionaria se conecta con la evolución estándar del universo dada por la teoría Big Bang, dicho de otro modo, al mecanismo físico mediante el cual, la energía del inflatón se convierte en radiación, se le conoce como *Recalentamiento*.

La teoría de recalentamiento aún se encuentra incompleta, no sólo por los detalles, sino porque todo el esquema depende de manera crucial de la teoría fundamental de física de partículas que va más allá del Modelo Estándar. Es debido a esta razón que, por el momento, sólo existen modelos de juguete cuyo propósito es ayudarnos a comprender los procesos físicos que dan como resultado un universo que siga la cosmología del Big Bang estándar.

Para el propósito de esta tesis, asumiremos que el entendimiento del proceso de recalentamiento no tiene una importancia en particular. Sin embargo, el mecanismo de decaimiento del inflatón es un tema de investigación actual, por lo que es relevante analizar algunas de sus propiedades.

Comencemos considerando el modelo más simple de recalentamiento: Cuando la época inflacionaria llega a su fin, el inflatón ϕ , comienza a oscilar alrededor del mínimo del potencial. El potencial inflacionario puede aproximarse cerca del mínimo como $V(\phi) \approx \frac{1}{2}m^2\phi^2$. Esta aproximación nos permite obtener (de (3.25) y (3.23))

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \simeq -m^2\phi, \quad \rho \simeq \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2). \quad (3.36)$$

De las expresiones (3.36) tenemos

$$\dot{\rho} + 3H\rho = \frac{3}{2}H(m^2\phi^2 - \dot{\phi}^2). \quad (3.37)$$

Y dado que ϕ oscila alrededor del mínimo del potencial, el promedio sobre un periodo de oscilación (en el límite donde el periodo es $\ll H^{-1}$) del término entre paréntesis del lado derecho de (3.37), es cero. Por lo tanto

$$\langle \dot{\rho}(t) \rangle + 3H\langle \rho(t) \rangle = 0. \quad (3.38)$$

Así, la densidad de energía promedio va como $\langle \rho \rangle \propto a^{-3}$, justamente como en el caso de un universo dominado por materia.

Para estudiar el decaimiento del inflatón en otras partículas es usual agregar un término fenomenológico $\Gamma\langle \rho(t) \rangle$ a la izquierda de (3.38), esto es

$$\langle \dot{\rho}(t) \rangle + 3H\langle \rho(t) \rangle + \Gamma\langle \rho(t) \rangle = 0, \quad (3.39)$$

donde $\Gamma \equiv \tau^{-1}$ y a τ se le denomina el tiempo de decaimiento. Físicamente, el término $\Gamma \langle \rho(t) \rangle$ representa la transferencia de energía del inflatón a otras partículas. En 1994, Kofman [55] encontró que (3.39) da lugar una etapa de recalentamiento muy ineficiente y en 1997 [56] propuso un modelo llamado *resonancia paramétrica* cuyo propósito era estudiar el decaimiento del inflatón en bosones y fermiones. El modelo de resonancia paramétrica involucra tiempos de decaimiento mucho menores que el tiempo de Hubble.

Sin importar el mecanismo específico de recalentamiento, las partículas creadas a partir del inflatón, continúan interaccionando entre sí, creando nuevas partículas, dando como resultado una sopa de partículas que eventualmente alcanza el equilibrio térmico a una cierta temperatura T_{reh} . Estas nuevas partículas se comportan como un gas relativista, es decir, la velocidad media de las partículas es cercana a c . La temperatura de recalentamiento está determinada por la densidad de energía ρ_{reh} al término de la época de recalentamiento

$$\rho_{reh} = g_*(T_{reh})T_{reh}^4$$

Al finalizar la época del recalentamiento, se sigue la historia del Big Bang estándar.

3.6. Origen de estructura

Hasta este punto hemos analizado al universo en términos de un modelo isotrópico y homogéneo (al cual nos referiremos, en lo que resta de esta tesis, como el universo no perturbado ó de fondo). Claramente el universo actual es bastante inhomogéneo, manifestando una estructura no lineal a escalas menores que 100 Mpc; al estudio del origen de dicha inhomogeneidad se le denomina formación u origen de estructura. La estructura se manifiesta en diversas formas, por ejemplo, en la existencia de galaxias y su distribución irregular; (i.e., las galaxias se organizan en cúmulos de galaxias). Actualmente entendemos que la estructura se formó por la amplificación gravitacional de pequeñas inhomogeneidades primordiales ó semillas de estructura cósmica. El análisis de la formación de estructura, puede dividirse en dos partes principales:

1. *La generación de las inhomogeneidades primordiales, ‘semillas de galaxias’.* Esta es la parte más especulativa de la teoría de formación de estructura. No podemos asegurar con certeza que conocemos la teoría que explica el nacimiento de las inhomogeneidades primordiales, aunque tenemos un buen candidato,

el modelo inflacionario, cuyas predicciones concuerdan con los datos observacionales, y de hecho, se espera que en un futuro próximo los datos observacionales (e.g., los recolectados por el satélite Planck [19]) confirmen el paradigma inflacionario. En el modelo de inflación estándar, la estructura se origina por *fluctuaciones cuánticas* del estado vacío del inflatón. Las fluctuaciones cuánticas del inflatón $\hat{\delta\phi}$ se cuantizan de la misma manera que un campo escalar en un espacio-tiempo curvo (en este caso, el espacio-tiempo está descrito por la métrica de FRW). A cada uno de los modos de las fluctuaciones del campo $\hat{\delta\phi}_{\mathbf{k}}$, caracterizados por un número de onda \mathbf{k} , se les asocia una longitud de onda física $\lambda_{ph} = \frac{2\pi a}{k}$. La longitud de onda física es inicialmente mucho menor que el radio de Hubble H^{-1} , i.e., $k \gg aH$. Conforme el universo se expande, $a(t)$ aumenta y la longitud de onda física del modo alcanza el radio de Hubble, esto es, $k = aH$. Es en este instante cuando se dice que las escalas cruzan al horizonte⁴ y su amplitud se ‘congela’, i.e., se mantiene constante (Fig. 3.3). Las fluctuaciones cuánticas se identifican con el espectro (clásico) de las inhomogeneidades y, posteriormente, su espectro se asocia con las fluctuaciones (clásicas) de la densidad de energía $\delta\rho_{\mathbf{k}}$. Las fluctuaciones de la densidad evolucionan hasta el final de la época inflacionaria y, después de esta época, la descripción de su evolución se realiza dentro del régimen de la cosmología estándar. El espectro obtenido de las fluctuaciones se compara con las observaciones del CMB. Es en estas pequeñas inhomogeneidades donde se piensa que se encuentran las ‘semillas’ que originaron toda la estructura que observamos en el universo.

2. *El crecimiento de estas pequeñas inhomogeneidades hasta llegar a las estructuras observables en el universo.* Esta parte es menos especulativa debido a que los procesos físicos involucrados son bien entendidos (e.g., física de plasmas) y además contamos con una teoría bien establecida de la gravedad: la Relatividad General. Sin embargo, aún existe mucha incertidumbre en esta parte por el hecho de que se desconoce cual es la naturaleza de los componentes dominantes de la densidad de energía del universo, esto es, la *materia oscura* y *energía oscura*.

Debido a estas razones se piensa que la inflación liga la estructura a gran escala del universo con la micro-física. El espectro resultante de las inhomogeneidades no es muy sensible a detalles de un modelo particular de inflación y tiene una forma casi universal, lo cual lleva a predicciones concretas sobre el espectro de las anisotropías del CMB.

⁴En realidad por horizonte nos referimos al radio de Hubble H^{-1} .

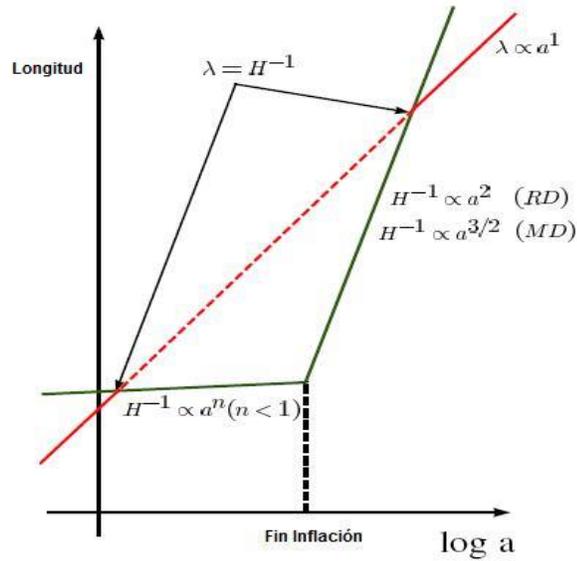


Figura 3.3: La evolución del horizonte y una escala física genérica λ durante y después de inflación. Las abreviaciones RD y MD corresponden a universos dominados por radiación y materia respectivamente (tomada de la referencia [57]).

En la Sección 3.6.1 consideraremos un modelo inflacionario simple y junto con la aproximación *slow-roll*, revisaremos la solución de las ecuaciones para las perturbaciones clásicas. Posteriormente en la Sección 3.6.4 estudiaremos rigurosamente el tratamiento cuántico de las perturbaciones bajo la visión estándar del paradigma inflacionario, terminando con el cálculo de la amplitud del espectro de las perturbaciones escalares.

El tratamiento que revisaremos a continuación fue desarrollado principalmente por V. Mukhanov et al. [80, 23] en 1992 y representa actualmente el enfoque estándar para explicar la formación de estructura. Por lo que para dar una representación del formalismo en la visión estándar del modelo inflacionario seguiremos de cerca el Capítulo 8 de la referencia [79].

3.6.1. Perturbaciones cosmológicas clásicas

Actualmente se cree firmemente que las anisotropías observadas en el CMB, tuvieron su origen en las perturbaciones primordiales de la densidad del universo primitivo. El tratamiento teórico de dichas perturbaciones se da en el marco de la teoría

lineal de perturbaciones en Relatividad General. La literatura que cubre esta rama de estudio es muy extensa [54, 37, 70, 15, 72] por mencionar algunos. En este capítulo cubriremos solo la parte que se relaciona directamente con los capítulos siguientes.

La idea básica de la teoría lineal de perturbaciones en Relatividad General es sencilla: tanto la métrica g_{ab} como el tensor de energía-momento T_{ab} son perturbados, i.e., $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$ y $T_{ab} \rightarrow T_{ab} + \delta T_{ab}$. Posteriormente las perturbaciones se sustituyen en las Ecuaciones de Einstein, obteniendo ecuaciones perturbadas de la forma $L[g_{ab}]\delta g_{ab} = \delta T_{ab}$, donde L es un operador diferencial de segundo orden que depende de la métrica de fondo g_{ab} .

Por otra parte, la teoría de perturbaciones en Relatividad General tiene el problema de la elección de norma. El problema de la norma está relacionado con el hecho de que, al realizar perturbaciones, se están comparando dos variedades pseudo-Riemannianas: la del fondo (M, g_{ab}, ϕ) (variedad, métrica y campo) y la perturbada (M', g'_{ab}, ϕ') . Al realizar esta comparación, es necesario lidiar con la arbitrariedad que existe en la elección de la manera en que se realizará la identificación de los puntos en M' con los puntos en M y, de esta forma, poder evaluar las diferencias $\delta g_{ab} \equiv g'_{ab} - g_{ab}$ y $\delta \phi \equiv \phi' - \phi$.

Existen dos opciones para lidiar con el problema de norma de forma genérica:

1. Escoger una norma.
2. Trabajar con cantidades invariantes de norma.

En cosmología, generalmente se favorece a la opción 2, principalmente porque existen ciertas combinaciones de los componentes de las perturbaciones de la métrica (asociados a una elección previa de coordenadas preferidas definidas en un fondo homogéneo e isotrópico), y de las perturbaciones de la densidad, que tienen la propiedad de ser invariantes ante transformaciones infinitesimales de coordenadas. Sin embargo, por razones que expondremos detalladamente en el Capítulo 4, en todo lo que resta de este trabajo de tesis nos inclinaremos por la primera opción.

Sea δg_{ab} la perturbación de la métrica en un universo de Friedmann. Las perturbaciones de la métrica se pueden separar de la siguiente manera:

$$\delta g_{ab} = (\delta g_{00}, \delta g_{0i}, \delta g_{ij}). \quad (3.40)$$

Las perturbaciones de la métrica se clasifican en: escalares, vectoriales y tensoriales (los términos escalar, vector y tensor están definidos [102] de acuerdo a su comportamiento bajo rotaciones sobre el espacio-tiempo de fondo en las hipersuperficies con $t = \text{const.}$). Resulta evidente que la perturbación $\delta g_{00} = A$ es un escalar. El teorema de Helmholtz nos dice que siempre se puede descomponer un vector en

el gradiente de un escalar y un vector con divergencia cero. Así, la perturbación δg_{0i} toma la forma

$$\delta g_{0i} = (\nabla_i B + S_i), \quad (3.41)$$

donde B es un escalar y S_i un vector con divergencia cero, i.e. $\nabla_i S^i = 0$. Es posible realizar una descomposición similar para la cantidad δg_{ij} repitiendo esencialmente el mismo análisis pero para dos índices. Consecuentemente, la cantidad δg_{ij} se descompone como

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} &= \psi \delta_{ij} + (\nabla_i F_j + \nabla_j F_i) \\ &+ \left[\frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_j + \nabla_j \nabla_i) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right] E \\ &+ h_{ij}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde ψ y E son funciones escalares, F_i -al igual que S_i - es un vector con divergencia cero y h_{ij} es un tensor simétrico con traza cero.

La norma que elegiremos, y mantendremos a lo largo de esta tesis, será la norma longitudinal (también conocida como Newtoniana). En esta norma, las perturbaciones escalares de la métrica toman la forma: $A = \Phi$, $\psi = \Psi$ y $B = E = 0$.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de las perturbaciones, se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Einstein, las cuales relacionan δg_{ab} con δT_{ab} . El separar las perturbaciones de la métrica en perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales, nos permite aplicar el Teorema de descomposición [54, 112]. Este teorema nos dice que a orden lineal las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales se desacoplan⁵ y, por tanto, pueden analizarse por separado en las ecuaciones de Einstein.

El siguiente paso, es aplicar la teoría lineal de perturbaciones al universo inflacionario. Comencemos recordando que en el modelo inflacionario, la materia dominante en el universo primitivo se representa por un campo escalar ϕ junto con su potencial $V(\phi)$. El potencial inflacionario actúa como una constante cosmológica, que luego es ‘apagada’ (esto sucede cuando el inflatón llega al mínimo del potencial) como resultado de la dinámica del campo escalar, posteriormente se tiene una etapa de recalentamiento que ‘trae de vuelta’ al universo a la dinámica evolutiva descrita por la teoría del Big Bang.

⁵En el Capítulo 7 veremos que este teorema tiene una implicación directa en la producción de ondas gravitacionales provenientes de inflación.

El modelo inflacionario se caracteriza por la acción de un campo escalar acoplado minimamente a la gravedad

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R[g] - \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - V + \mathcal{L}_{mat.} \right], \quad (3.43)$$

donde el término $\mathcal{L}_{mat.}$ representa el lagrangiano de la materia distinta al inflatón que pudiera estar presente, sin embargo, durante el regimen inflacionario este término es despreciable. El análisis comienza con un espacio-tiempo de fondo que, como resultado de una expansión cuasi-exponencial, ha alcanzado un estado homogéneo e isotrópico, caracterizado por la geometría del espacio-tiempo descrita por la métrica de FRW espacialmente plana (3.14) y un campo escalar homogéneo.

Resulta práctico realizar un cambio de coordenadas en la parte temporal. Definimos el *tiempo conforme* como

$$d\eta \equiv \frac{a_0}{a(t)} dt, \quad \text{ó} \quad \eta = a_0 \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (3.44)$$

con $a(t_0) = a_0$ el valor actual del factor de escala y que siempre puede escogerse igual a la unidad, i.e., $a(t_0) = a_0 = 1$. En las coordenadas de tiempo conforme, la métrica (3.14) y el campo escalar homogéneo están dados por

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j], \quad \phi_0(\eta). \quad (3.45)$$

La métrica de fondo y el campo homogéneo representan hasta este punto un fondo clásico homogéneo e isotrópico (o ‘valor de expectación’).

La contribución al tensor de energía-momento está dada por todos los campos de materia conocidos (materia no-relativista, materia relativista, etc.), representados por el término $\mathcal{L}_{mat.}$, y el inflatón. Durante la etapa inflacionaria, el campo inflacionario tiene una mayor contribución al tensor de energía-momento, sin embargo, al término de la inflación, y posterior a la etapa de recalentamiento, comienza la época dominada por radiación. El tratamiento se simplifica si consideramos la expresión general de un fluido perfecto con tensor de energía-momento $T_{ab} = (\rho + P)U_a U_b + P g_{ab}$, que para el caso particular del campo inflacionario, las expresiones de densidad de energía y presión son

$$\rho = X + V(\phi), \quad P = X - V(\phi), \quad (3.46)$$

y la cuadrivelocidad es

$$U^a \equiv -g^{ab} \partial_b \phi / \sqrt{2X}, \quad (3.47)$$

donde $X \equiv -\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi$. Las cantidades ρ , P y U^a , para el campo homogéneo de fondo ϕ_0 , están dadas por

$$\rho = \frac{(\phi'_0)^2}{2a^2} + V(\phi_0), \quad P = \frac{(\phi'_0)^2}{2a^2} - V(\phi_0), \quad U^a = \frac{1}{a(\eta)} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right)^a. \quad (3.48)$$

Las ecuaciones de Einstein para el fondo, $G_{00}^{(0)} = 8\pi GT_{00}^{(0)} = 8\pi Ga^2\rho$ y $G_{ii}^{(0)} = 8\pi GT_{ii}^{(0)} = 8\pi Ga^2P$, implican las ecuaciones de Friedmann, que en tiempo conforme, toman la forma

$$3\mathcal{H}^2 = 8\pi Ga^2\rho, \quad -2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = 8\pi Ga^2P, \quad (3.49)$$

donde $\mathcal{H} \equiv a'(\eta)/a(\eta)$ (no confundir con el factor de Hubble $H \equiv \dot{a}(t)/a(t)$); recordemos que la prima denota derivada respecto al tiempo conforme η ; ρ y P denotan la densidad de energía y presión total del sistema respectivamente.

Las ecuaciones de Friedmann (3.49) pueden manipularse algebraicamente para encontrar una expresión que será de gran utilidad en los siguientes cálculos, es decir,

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = 4\pi Ga^2(\rho + P). \quad (3.50)$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la acción (3.43) (ignorando los acoplamiento a la materia ordinaria), nos ayudan a encontrar la ecuación de movimiento (en tiempo conforme) para el campo inflacionario homogéneo ϕ_0

$$\phi_0'' + 2\mathcal{H}\phi_0' + a^2\partial_\phi V = 0. \quad (3.51)$$

Las ecuaciones anteriores describen la evolución dinámica del regimen inflacionario, que en tiempo conforme, está caracterizada por el factor de escala

$$a(\eta) \approx -1/[H_I(1 - \epsilon)\eta], \quad (3.52)$$

con $H_I^2 \approx 8\pi GV/3$, el parámetro *slow-roll* $\epsilon \equiv 1 - \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2$ (durante inflación se cumple que $\epsilon \ll 1$) y con el campo escalar ϕ_0 en el regimen *slow-roll*, i.e., $\phi_0' = -(a^3/3a')\partial_\phi V$. Posterior al término de la era inflacionaria se sigue el periodo de recalentamiento, donde los campos de materia ordinaria comienzan a dominar en el universo, finalizando con la cosmología estándar derivada de la teoría del Big Bang.

El régimen inflacionario llega a su fin a un tiempo conforme $\eta = \eta_r$, el cual es un número negativo y muy cercano a cero ($\eta_r \approx -10^{-22}$ Mpc, véase Apéndice B), dicho de otro modo, el tiempo conforme durante la era inflacionaria se encuentra en el rango $-\infty < \eta \leq \eta_r$, por lo que $\eta = 0$ es un valor particular del tiempo

conforme que no corresponde al periodo inflacionario, de hecho pertenece al periodo dominado por radiación. El factor de escala evaluado al final del régimen inflacionario lo denotaremos como $a_r \equiv a(\eta_r)$.

La siguiente tarea es considerar las ecuaciones de Einstein a primer orden en las perturbaciones. En el enfoque tradicional, es en este punto cuando se asume que las fluctuaciones cuánticas generan anisotropías e inhomogeneidades en la métrica del espacio tiempo. Recordemos que las perturbaciones de la métrica se clasifican en componentes escalares, vectoriales y tensoriales. En el caso del sistema gravedad-inflatón, sólo influyen las componentes escalares y tensoriales. Por el momento, nos evocaremos al estudio de las perturbaciones escalares, por consiguiente, la métrica perturbada (en la norma longitudinal) toma la forma

$$ds^2 = a(\eta)^2[-(1 + 2\Phi(\eta, \mathbf{x}))d\eta^2 + (1 - 2\Psi(\eta, \mathbf{x}))\delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (3.53)$$

donde Φ y Ψ son funciones de las coordenadas del espacio-tiempo η, x^i ; a la perturbación Ψ se le conoce como el potencial Newtoniano.

Las ecuaciones $\delta G_0^0 = 8\pi G\delta T_0^0$ y $\delta G_i^0 = 8\pi G\delta T_i^0$, están dadas, respectivamente, por

$$\nabla^2\Psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = -4\pi G a^2 \delta T_0^0, \quad (3.54)$$

$$\partial_i(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = -4\pi G a^2 \delta T_i^0. \quad (3.55)$$

Por otra parte, la ecuación $\delta G_j^i = 8\pi G\delta T_j^i$ es

$$[\Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi)]\delta_j^i - \frac{1}{2}\partial^i\partial_j(\Phi - \Psi) = 4\pi G a^2 \delta T_j^i. \quad (3.56)$$

En las situaciones de interés en este trabajo, y tomando en cuenta la métrica (3.53), podemos escribir $\delta T_0^0 = -\delta\rho$, $\delta T_i^0 = (\rho + P)U^0\delta U_i$ y $\delta T_j^i = \delta P\delta_j^i$.

Es fácil notar de (3.56) que para el caso $i \neq j$, junto con las condiciones de borde apropiadas (lo cual es más fácil de observar haciendo una transformada de Fourier), se obtiene $\Psi = \Phi$ (asumimos estrés anisotrópico). De ahora en adelante utilizaremos este resultado.

Para materia hidrodinámica genérica, la presión P es función tanto de la densidad de energía ρ como de la entropía de materia S , por consiguiente

$$\delta P = c_s^2\delta\rho + \tau\delta S, \quad (3.57)$$

con $c_s^2 \equiv (\partial P/\partial\rho)_S$ la velocidad del sonido adiabática y $\tau \equiv (\partial P/\partial S)_\rho$. Las expresiones (3.54), (3.56) y (3.57) pueden combinarse para obtener la ecuación de movimiento de Ψ ,

$$\Psi'' - c_s^2 \nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Psi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s)]\Psi = 4\pi G\tau\delta S. \quad (3.58)$$

Es conveniente reescribir (3.58) en términos de una nueva variable u , definida

$$u \equiv \frac{\Psi}{4\pi G\sqrt{\rho + p}} \quad (3.59)$$

Empleando la ecuación de continuidad $\rho' = -3\mathcal{H}(\rho + P)$ y la definición de c_s^2 se encuentra que $1 + c_s^2 = -(\rho' + P')/[3\mathcal{H}(\rho + P)]$. Sustituyendo esta última ecuación en (3.58) y realizando el cambio de variable de Ψ a u , la ecuación de evolución para u toma la forma

$$u'' - c_s^2 \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta} u = \mathcal{N}, \quad (3.60)$$

donde $\theta \equiv \mathcal{H}/[a^2(\rho + P)^{\frac{1}{2}}]$ y $\mathcal{N} = a^2\tau\delta S/(\rho + P)^{\frac{1}{2}}$. La ecuación de movimiento (3.60) o equivalentemente (3.58) es de gran utilidad porque nos permite determinar la evolución de las perturbaciones en un universo hidrodinámico, sin importar la época cosmológica.

En la época inflacionaria, es posible obtener una ecuación similar a (3.58), la cual se obtiene siguiendo los mismos pasos algebraicos que nos llevaron a la deducción de dicha ecuación. Esto es, de la expresión general del tensor de energía-momento para el inflatón

$$T_b^a = g^{ac}\partial_c\phi\partial_b\phi + \delta_b^a\left(-\frac{1}{2}g^{cd}\partial_c\phi\partial_d\phi - V(\phi)\right), \quad (3.61)$$

se obtienen las componentes a primer orden en las perturbaciones

$$\delta T_0^0 = a^{-2}[\phi_0'^2\Phi - \phi_0'\delta\phi' - \partial_\phi V a^2\delta\phi], \quad \delta T_i^0 = \partial_i(-a^{-2}\phi_0'\delta\phi), \quad (3.62a)$$

$$\delta T_j^i = a^{-2}[\phi_0'\delta\phi' - \phi_0'^2\Phi - \partial_\phi V a^2\delta\phi]\delta_j^i. \quad (3.62b)$$

Consecuentemente, las ecuaciones de Einstein (3.54), (3.55), (3.56) toman la forma

$$\nabla^2\Psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = 4\pi G[-\phi_0'^2\Phi + \phi_0'\delta\phi' + \partial_\phi V a^2\delta\phi], \quad (3.63)$$

$$\partial_i(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = 4\pi G\partial_i(\phi_0'\delta\phi), \quad (3.64)$$

$$[\Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi)]\delta_j^i - \frac{1}{2}\partial^i\partial_j(\Phi - \Psi) = 4\pi G[\phi_0'\delta\phi' - \phi_0''\Phi - \partial_\phi V a^2\delta\phi]\delta_j^i. \quad (3.65)$$

Substrayendo (3.63) de (3.65) y utilizando: $\Psi = \Phi$, la ecuación de movimiento para el campo escalar homogéneo (3.51) y (3.64), se encuentra la ecuación de movimiento para Ψ durante el regimen inflacionario

$$\Psi'' - \nabla^2\Psi + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\phi_0''}{\phi_0'}\right)\Psi' + 2\left(\mathcal{H}' - \frac{\mathcal{H}\phi_0''}{\phi_0'}\right)\Psi = 0. \quad (3.66)$$

Así, realizando la identificación

$$c_s^2 = \frac{-1}{3}\left(1 + \frac{2\phi_0''}{\mathcal{H}\phi_0'}\right) \quad y \quad \tau\delta S = \frac{(1 - c_s^2)\nabla^2\Psi}{4\pi G a^2}, \quad (3.67)$$

en (3.58), se obtiene directamente (3.66). De manera equivalente, sustituyendo (3.67) en (3.60) se encuentra

$$u'' - \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta}u = 0 \quad (3.68)$$

Resumiendo, hemos encontrado una ecuación de movimiento para el potencial Newtoniano, (3.58) (o de forma equivalente (3.60)) la cual es válida para cualquier época cosmológica, ya sea para el regimen inflacionario o para las posteriores etapas dominadas por materia ordinaria. La información referente a la época cosmológica particular de interés entrará en las cantidades c_s^2 y $\tau\delta S$, e.g., en inflación vienen dadas por (3.67). Sin embargo, es importante notar que, para el caso de un campo escalar, los conceptos termodinámicos tales como ‘ecuación de estado’, ‘entropía de materia’ o ‘velocidad del sonido’, deben interpretarse con cuidado, ya que en este caso, no estamos trabajando realmente con materia hidrodinámica.

3.6.2. Nociones termodinámicas del campo inflacionario

En la presente sección presentaremos una discusión detallada, que refleja la justificación tradicional encontrada en la literatura [36, 112, 69, 79], cuando se desea aplicar las nociones termodinámicas al universo inflacionario, tales como: ecuación de estado, perturbaciones a la entropía y la velocidad del sonido adiabática.

Comenzamos presentando un ejemplo que ilustra las posibles confusiones que pueden surgir cuando se intenta encontrar una ecuación de estado para el inflatón.

Para un campo escalar canónico, i.e., un campo escalar tal que $P = X - V(\phi)$ y $\rho = X + V(\phi)$, las expresiones anteriores implican que $P = -\rho + 2X$, por lo que se concluiría que $c_s^2 = -1$ y $\tau\delta S = 2\delta X$. Sin embargo, también es posible encontrar que $P = \rho - 2V$ y en este caso $c_s^2 = 1$ y $\tau\delta S = -2\partial_\phi V\delta\phi$. El conflicto aparente se resuelve notando que ni $P = -\rho + 2X$ ni $P = \rho - 2V$ representan la ecuación de estado del ‘fluido’.

Es claro que necesitamos definir los conceptos termodinámicos de una manera más precisa antes de aplicar (3.58) al universo inflacionario. Es necesario mencionar que el análisis que haremos a continuación ilustra lo que se encuentra de manera general en la literatura y es un resumen de la discusión detallada presentada en [29].

Partiendo de (3.57)

$$\delta P = c_s^2 \delta \rho + \tau \delta S,$$

observamos que la velocidad del sonido adiabática c_s^2 tiene que ser a orden cero en las perturbaciones, y debido a que todas las cantidades de fondo dependen únicamente del tiempo conforme, encontramos que

$$c_s^2 = \frac{P'_0}{\rho'_0}, \quad (3.69)$$

donde el subíndice 0 denota que nos referimos a la cantidad de fondo. Recordemos que en (3.69) no hemos hecho una referencia a un sistema particular, sólo hemos aplicado la definición de la velocidad del sonido adiabática para un sistema termodinámico genérico, el cual está caracterizado por tres variables P, ρ, S , de las cuales ρ, S son independientes.

Si ahora nos concentramos en el escenario inflacionario, siempre es posible parametrizar la presión y la densidad de energía como funciones de X y ϕ , i.e., $P = P(X, \phi)$ y $\rho = \rho(X, \phi)$ lo cual implica que las perturbaciones de P y ρ están dadas por

$$\delta P = \partial_X P \delta X + \partial_\phi P \delta \phi, \quad \delta \rho = \partial_X \rho \delta X + \partial_\phi \rho \delta \phi. \quad (3.70)$$

Así, la cantidad $\tau\delta S$ es

$$\tau\delta S = \delta P - c_s^2 \delta \rho = \partial_\phi P \left(\frac{\partial_\phi P}{\partial_\phi \rho} - c_s^2 \right) \delta \phi + \partial_X \rho \left(\frac{\partial_X P}{\partial_X \rho} - c_s^2 \right) \delta X, \quad (3.71)$$

donde $\delta X = -\frac{1}{2}\delta g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\delta\phi$. La expresión para δX a orden lineal en las perturbaciones es

$$\delta X = -\frac{1}{2}\delta g^{00}\phi_0'^2 - g^{00}\phi_0'\delta\phi' = a^{-2}(-\phi_0'^2\Psi + \phi_0'\delta\phi'), \quad (3.72)$$

por lo que la velocidad del sonido adiabática, durante el regimen inflacionario, se obtiene de (3.69) dando como resultado

$$c_s^2 = \frac{P'_0}{\rho'_0} = \frac{\frac{\partial P}{\partial X}|_{X=X_0}X'_0 + \frac{\partial P}{\partial\phi}|_{\phi=\phi_0}\phi'_0}{\frac{\partial\rho}{\partial X}|_{X=X_0}X'_0 + \frac{\partial\rho}{\partial\phi}|_{\phi=\phi_0}\phi'_0}, \quad (3.73)$$

donde $X_0 = \phi_0'/2a^2$. Considerando ahora un campo escalar canónico ($P = X - V$ and $\rho = X + V$) y usando (3.72), la expresión (3.71) se reduce a

$$\tau\delta S = (-\phi_0'^2\Psi + \phi_0'\delta\phi')(1 - c_s^2) - \partial_\phi V a^2\delta\phi(1 + c_s^2), \quad (3.74)$$

mientras que la velocidad del sonido adiabática estaría dada por

$$c_s^2 = \frac{-1}{3} \left(1 + \frac{2\phi_0''}{3\mathcal{H}} \right), \quad (3.75)$$

lo cual es compatible con la identificación que se hizo para obtener (3.67). A continuación haremos una pequeña digresión en este punto para señalar que existe otra fuente de confusión respecto a la cantidad c_s^2 . Es común encontrar en la literatura [79, 40, 5] otra definición de la ‘velocidad del sonido adiabática’

$$\tilde{c}_s^2 \equiv \frac{\partial_X P}{\partial_X \rho}, \quad (3.76)$$

por lo que, utilizando la definición anterior, para un campo escalar canónico $\tilde{c}_s^2 = 1$. La definición (3.76), como comentan los autores de [40], está motivada por el hecho de que es precisamente esta cantidad la que aparece multiplicando al término ∇^2 en la ecuación de Klein-Gordon para las perturbaciones del campo, esto es, \tilde{c}_s^2 es la velocidad a la cual viajan las perturbaciones del campo en el fondo, por lo tanto, las perturbaciones de un campo escalar canónico viajan a la velocidad de la luz [40, 79].

La velocidad del sonido adiabática $c_s^2 \equiv (\partial P/\partial\rho)_S$ describe la respuesta de la presión a un cambio en la densidad de energía a entropía constante; la cantidad \tilde{c}_s^2 representa la velocidad a la cual viajan las perturbaciones a través del sistema. Un campo escalar puede describirse como un fluido hidrodinámico, pero la analogía es sutil. Mientras que para un fluido clásico la cantidad \tilde{c}_s^2 y la velocidad del sonido adiabática c_s^2 son iguales, esto no se cumple en el caso de un campo escalar (lo cual

es evidente de (3.73) y (3.76)). La velocidad a la cual viajan las perturbaciones esta dada por \tilde{c}_s^2 y la velocidad del sonido adiabática viene dada por (3.69).

Es posible encontrar otra expresión para $\tau\delta S$ que será de gran utilidad para el caso del inflatón. Utilizando (3.51), la ecuación de Einstein $\mathcal{H}\Psi + \Psi' = 4\pi G\phi'_0\delta\phi$ y sustituyendo (3.75) en (3.74) encontramos

$$\tau\delta S = \frac{(1 - c_s^2)\nabla^2\Psi}{4\pi G a^2}. \quad (3.77)$$

Por lo tanto (3.58) (ó equivalentemente (3.60)) pueden aplicarse al regimen inflacionario con las cantidades c_s^2 y $\tau\delta S$ dadas por las expresiones (3.75) y (3.77) respectivamente.

3.6.3. Conservación de ζ

En esta sección discutiremos la ‘ley de conservación’ para la cantidad ζ . La conservación de ζ es de gran utilidad ya que bajo ciertas condiciones, es válida para cualquier época cosmológica, por lo cual nos ayuda a conectar cantidades en distintas épocas cosmológicas, por ejemplo, el potencial Newtoniano. La cantidad ζ se le denomina la ‘perturbación de la curvatura intrínseca’ y fue introducida originalmente en [7] y actualmente es de uso común en la literatura [24, 68, 37, 79]. La definición de ζ es

$$\zeta \equiv \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^{-1}\Psi' + \Psi}{1 + w} + \Psi, \quad (3.78)$$

donde $w \equiv P(\rho, S)/\rho$ viene de la ecuación de estado. En el caso de un universo dominado por radiación o materia no-relativista, el parámetro w es 1/3 o 0 respectivamente. Sin embargo, durante una transición de fase, w puede cambiar por un factor muy grande, e.g., durante la fase de recalentamiento. En el universo inflacionario (y considerando un campo escalar canónico) es posible obtener el parámetro w de la siguiente manera:

$$w \equiv \frac{P}{\rho} = \frac{X - V(\phi)}{X + V(\phi)}. \quad (3.79)$$

Calculando la derivada de ζ respecto al tiempo conforme, tenemos

$$\zeta' = \frac{2}{3\mathcal{H}(1+w)} \left[\Psi'' + \left(\frac{3\mathcal{H}(1+w)}{2} - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} - \frac{w'}{1+w} + \mathcal{H} \right) \Psi' - \mathcal{H} \frac{w'}{1+w} \Psi \right]. \quad (3.80)$$

Si utilizamos la definición de $c_s^2 \equiv P'/\rho'$ y la ecuación de continuidad $\rho' = -3\mathcal{H}(\rho + P)$ es posible relacionar c_s^2 con w' y w de la siguiente manera

$$c_s^2 = \frac{-3w'}{3\mathcal{H}(1+w)} + w. \quad (3.81)$$

La expresión (3.81), junto con las ecuaciones de Friedmann ((3.49) y (3.50)) nos permiten reexpresar (3.80) como

$$\zeta' = \frac{2}{3\mathcal{H}(1+w)} \left\{ \Psi'' + 3\mathcal{H}(1+c_s^2)\Psi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1+3c_s^2)]\Psi \right\}. \quad (3.82)$$

Finalmente, utilizando (3.58) obtenemos la expresión final para ζ'

$$\zeta' = \frac{2}{3\mathcal{H}(1+w)} \left[c_s^2 \nabla^2 \Psi + 4\pi G a^2 \tau \delta S \right]. \quad (3.83)$$

La ecuación (3.83) es válida para cualquier era cosmológica.

La ‘ley de conservación’ para ζ se obtiene fácilmente si nos concentramos en escalas mayores que el radio de Hubble (lo cual significa que podemos despreciar el término con el gradiente espacial) y las perturbaciones de la entropía son despreciables (en este caso es permitido escribir $P = w(\rho)\rho$ lo cual implica que $\tau\delta S = 0$).

Durante el régimen inflacionario, las ‘perturbaciones a la entropía’ vienen dadas por $4\pi G a^2 \tau \delta S = (1 - c_s^2) \nabla^2 \Psi$ consecuentemente $\zeta'_{inf} = \nabla^2 \Psi$, por lo tanto, durante el periodo inflacionario y en el límite de escalas mayores que el radio de Hubble, la cantidad ζ' se anula, esto es, no se necesita de la ‘adiabaticidad’ de las perturbaciones del inflatón.

Sin embargo, el decaimiento del inflatón en partículas relativistas (i.e., radiación) es probablemente un proceso no-adiabático, el cual genera una gran cantidad de entropía. No obstante, si se considera una transición suave entre el régimen inflacionario y la época dominada por radiación, a pesar de la no-adiabaticidad de los procesos involucrados, y adicionalmente se asume que el sistema inflatón-radiación se comporta como un fluido perfecto, es posible llegar a la misma ecuación de conservación para ζ como se puede estudiar en [71]. Adicionalmente, en los trabajos [73, 33] se analiza la influencia sobre la evolución de las perturbaciones de la densidad, provocada por las transiciones entre diferentes épocas cosmológicas.

3.6.4. Perturbaciones cosmológicas cuánticas

En esta sección procederemos a describir el tratamiento usual de cuantización de las fluctuaciones tanto de la métrica como del campo escalar. El tratamiento que

seguiremos es el tratamiento estándar [80, 79].

Utilizando la ecuación de movimiento para el campo escalar homogéneo (3.51) y las expresiones (3.48), podemos reescribir las ecuaciones de Einstein (3.63) y (3.64), respectivamente, como:

$$\nabla^2\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2(\rho + P) \left[\left(\frac{\delta\phi}{\phi'_0} \right)' - \Psi - 2\mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi'_0} \right], \quad (3.84)$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Psi = 4\pi Ga^2(\rho + P) \left(\frac{\delta\phi}{\phi'_0} \right). \quad (3.85)$$

Combinando (3.85) y (3.50), se encuentra que

$$\left(a^2 \frac{\Psi}{\mathcal{H}} \right)' = \frac{4\pi Ga^4(\rho + P)}{\mathcal{H}^2} \left(\mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi'_0} + \Psi \right), \quad (3.86)$$

Por otra parte, las expresiones (3.84), junto con (3.49), (3.50) y (3.85), nos conducen a la ecuación

$$\nabla^2\Psi = \frac{4\pi Ga^2(\rho + P)}{\mathcal{H}} \left(\mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi'_0} + \Psi \right)'. \quad (3.87)$$

Es conveniente reexpresar (3.86) y (3.87), en términos de la variable u (introducida en (3.59)) y una nueva variable v conocida como variable de Mukhanov-Sasaki [77, 78, 96]

$$v \equiv a \left(\delta\phi + \frac{\phi'_0}{\mathcal{H}} \Psi \right), \quad (3.88)$$

por lo que (3.86) y (3.87) toman la forma

$$\nabla^2 u = z \left(\frac{v}{z} \right)', \quad v = \theta \left(\frac{u}{\theta} \right)', \quad (3.89)$$

con $z \equiv \theta^{-1} \equiv a^2(\rho + P)^{1/2}\mathcal{H}^{-1}$. El siguiente paso, en el enfoque tradicional, consiste en escribir la teoría de campo cuántica para las variables de campo u y v . El procedimiento usual consiste en realizar una expansión del campo escalar, a segundo en las perturbaciones, en la acción del campo escalar y gravitacional de fondo. Despreciando términos de derivadas totales, el resultado se reduce a una expresión simple que contiene únicamente a la variable v ,

$$S \equiv \int d\eta d^3x \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left(v'^2 + v \nabla^2 v + \frac{z''}{z} v^2 \right). \quad (3.90)$$

Los detalles de este cálculo pueden consultarse en la sección 10 de [80]. De la acción (3.90), se encuentra la ecuación de movimiento para v ,

$$v'' - \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0. \quad (3.91)$$

La estructura de (3.91) es un indicio (véase página 341 de [79]) de que la cuantización de las perturbaciones cosmológicas, dada por la acción (3.90), es formalmente equivalente a la cuantización de un ‘campo escalar libre’ en el espacio-tiempo de Minkowski con una ‘masa’ dependiente del tiempo $m^2 = -z''/z$.

Es importante señalar que la variable v , que es una combinación de las perturbaciones escalares de la métrica y el campo, es, en el enfoque estándar, sometida al proceso de cuantización. Lo cual significa que al cuantizar v automáticamente se cuantiza Ψ y $\delta\phi$.

El momento canónico π conjugado a v es $\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v'$. Las relaciones de conmutación a ‘tiempos iguales’ correspondientes a los operadores \hat{v} y $\hat{\pi}$ son

$$[\hat{v}(\eta, x), \hat{v}(\eta, y)] = [\hat{\pi}(\eta, x), \hat{\pi}(\eta, y)] = 0, \quad [\hat{v}(\eta, x), \hat{\pi}(\eta, y)] = i\delta(x - y). \quad (3.92)$$

La solución general para la ecuación de movimiento (3.91), en su versión para operadores (considerando a la teoría cuántica en el esquema de Heisenberg), se escribe como

$$\hat{v}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [v_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + v_k^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+], \quad (3.93)$$

donde las funciones $v_k(\eta)$ satisfacen

$$v_k'' + \omega_k^2(\eta) v_k = 0, \quad \omega_k^2 \equiv k^2 - z''/z. \quad (3.94)$$

La condición de normalización sobre las soluciones $v_k(\eta)$ se escoge de tal manera que $v_k' v_k^* - v_k v_k'^* = 2i$, lo que nos lleva a las relaciones de conmutación estándar para los operadores de aniquilación y creación $\hat{a}_{\mathbf{k}}^-$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$,

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^-, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^-] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^+, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}^-, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.95)$$

La elección de $v_k(\eta)$, corresponde a la elección del estado vacío $|0\rangle$ para el campo. Dicha elección, para nuestro caso particular, y al igual que en cualquier espacio-tiempo no-estacionario, no es única. Sin embargo, en este punto, cabe señalar que

cualquier selección de un estado vacío (realizada a través de la elección de los $v_k(\eta)$ basada en su comportamiento como soluciones de energía positiva), será un estado del campo espacialmente homogéneo e isotrópico, lo cual se puede comprobar aplicando directamente los operadores de rotación o traslación (asociados con las hipersuperficies $\eta = \text{const.}$ del espacio-tiempo de fondo) al estado vacío. El candidato más natural para dicho estado con el que trabajaremos es el llamado vacío de Bunch-Davies [25, 16]. El vacío de Bunch-Davies está caracterizado por la elección

$$v_k(\eta) = \left(\frac{-\pi\eta}{4} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i[\nu+(1/2)](\pi/2)} H_\nu^{(1)}(-k\eta), \quad (3.96)$$

donde $\nu \equiv 3/2 + \epsilon$, y $H_\nu^{(1)}$ corresponden a las funciones de Hankel de primer tipo y de orden ν . En el límite $\eta \rightarrow -\infty$, las soluciones $v_k(\eta) \rightarrow e^{-ik\eta}/\sqrt{2k}$, esto es, se comportan como las soluciones de frecuencia positiva estándar en el espacio-tiempo de Minkowski. Esto constituye nuestra elección del vacío de la teoría.

A partir de (3.94), junto con (3.85) y las ecuaciones de Friedmann en la aproximación *slow-roll*, es posible encontrar la ecuación de movimiento para los modos de las perturbaciones del campo $\delta\phi_k(\eta)$, esto es,

$$\delta\phi_k'' + 2\mathcal{H}\delta\phi_k' + k^2\delta\phi_k = 0. \quad (3.97)$$

Si utilizamos una nueva variable $y_k(\eta) \equiv a(\eta)\delta\phi_k(\eta)$, la ecuación anterior se convierte en

$$y_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) y_k = 0, \quad (3.98)$$

cuya solución, imponiendo las condiciones iniciales heredadas de v_k y considerando la forma explícita del factor de escala durante la inflación, es

$$y_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) e^{-ik\eta}. \quad (3.99)$$

Para escalas menores que el radio de Hubble ($k \gg \mathcal{H} \Rightarrow -k\eta \rightarrow -\infty$), los modos se aproximan a

$$y_k(\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta} \Rightarrow \delta\phi_k(\eta) \simeq \frac{1}{a\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad (3.100)$$

por consiguiente, para escalas menores que el horizonte, los modos $\delta\phi_k$ oscilan y su amplitud disminuye conforme a aumenta. En el límite de escalas mayores que el horizonte ($k \ll \mathcal{H} \Rightarrow -k\eta \rightarrow 0$) tenemos

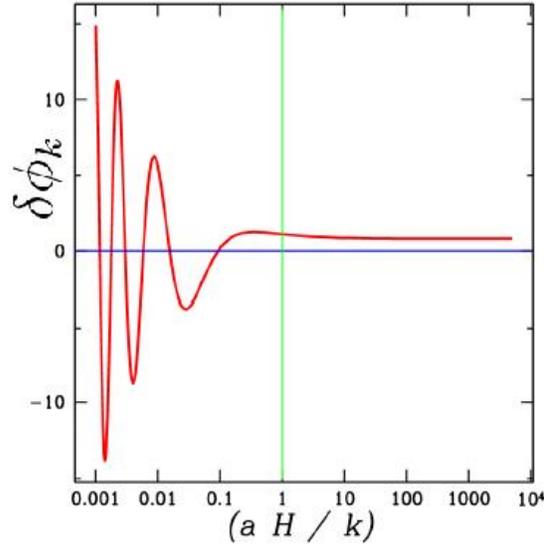


Figura 3.4: Los modos $\delta\phi_k$ exhiben un comportamiento oscilatorio para escalas menores que el horizonte $k/aH > 1$, y se ‘congelan’ cuando salen del horizonte, $k/aH < 1$.

$$y_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{pmatrix} i \\ -k\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{pmatrix} aH \\ k \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

Por lo tanto, tomando en cuenta que H es aproximadamente constante durante la inflación, la amplitud del campo $\delta\phi_k$ está dada por

$$|\delta\phi_k| = \left| \frac{y_k}{a} \right| \rightarrow \frac{H}{\sqrt{2k^{3/2}}} = \text{const.} \quad (3.102)$$

Los resultados anteriores, en el enfoque tradicional, llevan a la conclusión que el modo cuántico se ‘congela’ al cruzar el horizonte, Figura 3.4.

El siguiente paso consiste en calcular la función de correlación de dos puntos e interpretarla como el espectro de potencias del potencial gravitacional. En otras palabras, el análisis que sigue está basado en la identificación

$$\langle 0 | \hat{\Psi}(\eta, \mathbf{x}) \hat{\Psi}(\eta, \mathbf{y}) | 0 \rangle \equiv \overline{\Psi(\eta, \mathbf{x}) \Psi(\eta, \mathbf{y})}, \quad (3.103)$$

es decir, los promedios cuánticos se identifican con promedios sobre un ensamble de configuraciones de campos clásicos. La identificación (3.103) permite realizar la

‘predicción’ del espectro primordial de estructura cósmica. Los problemas relacionados con la justificación de dicha identificación están íntimamente correlacionados con los problemas conceptuales mencionados brevemente en la Introducción, la discusión detallada se realizará en el siguiente capítulo, sin embargo, es importante señalar que este es uno de los puntos delicados del paradigma inflacionario. Continuaremos con la estimación de la amplitud de las perturbaciones en el enfoque estándar haciendo uso de la identificación (3.103).

De (3.59), (3.89) y (3.93) se obtiene una expresión para el operador $\hat{\Psi}$

$$\hat{\Psi}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{4\pi G(\rho + P)^{1/2}}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} [u_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + u_k^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+], \quad (3.104)$$

donde las funciones de los modos $u_k(\eta)$ satisfacen

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{\theta''}{\theta} \right) u_k = 0. \quad (3.105)$$

La ecuación (3.105) es la versión en modos de Fourier correspondiente a (3.68). El valor de expectación de $\hat{\Psi}(\eta, x)\hat{\Psi}(\eta, y)$ en el estado $|0\rangle$ es

$$\langle 0 | \hat{\Psi}(\eta, x) \hat{\Psi}(\eta, y) | 0 \rangle = \int \frac{dk}{k} 4G^2(\rho + P) |u_k|^2 k^3 \frac{\sin kr}{kr}, \quad (3.106)$$

donde $r \equiv |x - y|$. Tomando en cuenta que la definición del espectro de potencias para un campo gaussiano (véase Apéndice C) es

$$\overline{\Psi(x, \eta) \Psi(y, \eta)} = \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\Psi}(k, \eta) \frac{\sin kr}{kr}, \quad (3.107)$$

es posible leer directamente de (3.106), el espectro de potencias de las perturbaciones de la métrica, es decir,

$$\mathcal{P}_{\Psi}(k, \eta) = 4G^2(\rho + P) |u_k(\eta)|^2 k^3. \quad (3.108)$$

El resto de los cálculos (que realizaremos más adelante) para obtener el espectro de potencias, se pueden resumir de la siguiente manera: dadas las condiciones iniciales $v_k(\eta_i)$ and $v_k'(\eta_i)$, fijadas por el vacío de Bunch-Davies, se obtienen las condiciones iniciales $u_k(\eta_i)$ and $u_k'(\eta_i)$ de (3.89). Una vez encontradas las condiciones iniciales, se resuelve (3.105). Posteriormente se utiliza la solución $u_k(\eta)$ en la expresión (3.108) obteniendo el espectro de potencias. La ecuación para $u_k(\eta)$ (3.105) se resuelve normalmente considerando una situación temprana en la época inflacionaria, en la cual

la escala física de los modos se encuentra ‘dentro del horizonte’ $k \gg aH$ (longitud de onda corta). Esta solución se conecta con la solución obtenida en el régimen donde la escala física del modo se encuentra ‘fuera del radio de Hubble’ $k \ll aH$ (longitud de onda larga). Revisemos esta serie de pasos.

Las condiciones iniciales para $u_k(\eta_i)$ y $u'_k(\eta_i)$ obtenidas de (3.89) son

$$u_k(\eta_i) = -ik^{-3/2}, \quad u'_k(\eta_i) = k^{-1/2}, \quad (3.109)$$

donde se usó el límite $k \gg \mathcal{H}$ (i.e, modos dentro del horizonte) debido a que, a tiempos suficientemente cercanos al inicio de la inflación, todos los modos se encuentran en ese régimen. La solución $u_k(\eta)$ de (3.105) para modos dentro del horizonte ($k^2 \gg \mathcal{H}^2 \gg \theta''/\theta$), durante la era inflacionaria y dadas las condiciones iniciales anteriores, está dada por

$$u_k(\eta) = \frac{-i}{k^{3/2}} e^{ik(\eta-\eta_i)}. \quad (3.110)$$

En el régimen de longitud de onda larga $k^2 \ll \theta''/\theta \ll \mathcal{H}^2$, y para cualquier era cosmológica, (3.105) toma la forma

$$u_k''(\eta) - \frac{\theta''(\eta)}{\theta(\eta)} u_k(\eta) = 0. \quad (3.111)$$

Es importante enfatizar que (3.111) puede obtenerse directamente de (3.60) asumiendo la adiabaticidad de las perturbaciones $\delta S = 0$ y tomando el límite de longitud de onda larga ($c_s^2 k^2 \ll \theta''/\theta$). Esto es, bajo las dos suposiciones anteriores (3.111) es válida incluso a tiempos posteriores del término del régimen inflacionario, lo cual se debe a que (3.60) se obtuvo independientemente de cualquier consideración que se limitara a una época cosmológica en particular. Por tanto, las soluciones de (3.111) son válidas tanto para el régimen inflacionario como para las épocas dominadas por radiación ó materia no-relativista.

La solución general de (3.111) es

$$u_k(\eta) = \alpha_k \theta(\eta) + \beta_k \theta(\eta) \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\tilde{\eta}}{\theta^2(\tilde{\eta})} \quad (3.112)$$

donde α_k y β_k son constantes de integración que se determinarán más adelante y η_0 es un valor arbitrario de tiempo conforme. Observamos que, al realizar la evaluación de la integral en el segundo término de (3.112), la contribución al límite de integración inferior dada por η_0 , es $C\theta$ donde C es una constante. Esta contribución puede, por tanto, incluirse en el primer término y, consecuentemente, será ignorada en los cálculos subsecuentes.

Utilizando (3.50) encontramos una nueva expresión para θ que resultará más conveniente

$$\theta \equiv \frac{\mathcal{H}}{a^2(\rho + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{4\pi G}}{a} \left(1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.113)$$

Integrando por partes en (3.112) y usando la definición de θ dada por (3.113) se obtiene

$$u_k(\eta) = \alpha_k \theta(\eta) + \frac{\beta_k \theta(\eta)}{4\pi G} \left(\frac{a^2(\eta)}{\mathcal{H}(\eta)} - \int^\eta a^2(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right). \quad (3.114)$$

Las constantes de integración α_k y β_k se determinan conectando las soluciones (3.114) y (3.110) (imponiendo continuidad en las funciones y sus respectivas primeras derivadas), al tiempo en el cual se da la transición del regimen de longitud de onda corta al regimen de longitud de onda larga, este tiempo particular se le conoce como ‘el cruce del horizonte’, esto es, al tiempo que $k = aH$. Este cálculo es justificado en la literatura [36, 79, 69] por el hecho de que las perturbaciones de interés (aquellas que observamos en el CMB y en la estructura a gran escala) ‘cruzaron el horizonte’ (de acuerdo a la vision estándar) cuando el universo aún se encontraba en la fase inflacionaria.

Por consiguiente, es posible utilizar las ecuaciones *slow-roll*: $3\mathcal{H}\phi'_0 = -a^2\partial_\phi V$ y $\mathcal{H}^2 = a^2V/3M_{pl}^2$ en el cálculo de la integral que aparece en (3.114), obteniendo

$$u_k(\eta) = \frac{\alpha_k}{M_{pl}\sqrt{2a}} \left(1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \beta_k M_P \frac{\sqrt{2}a}{\mathcal{H}} \left(1 - \frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{H}'^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_k}{M_{pl}\sqrt{2\epsilon a}} + \beta_k M_P^2 \sqrt{\frac{6\epsilon}{V}} \quad (3.115)$$

donde se utilizó la definición del parámetro *slow-roll* en tiempo conforme $\epsilon \equiv \frac{1}{2}M_{pl}^2(\partial_\phi V)^2/V^2 = 1 - \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2$. Recordemos que durante la inflación $\epsilon \ll 1$, por lo que es válido despreciar los términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ en (3.114) al evaluar la integral.

Es relevante señalar que la expresión para $u_k(\eta)$ dada por (3.115) es válida solamente durante inflación, ya que se utilizó la forma explícita de $a(\eta)$ correspondiente a dicha época.

La expresión (3.112), permite calcular $u'_k(\eta)$,

$$u'_k(\eta) = \frac{d}{d\eta} \left(\alpha_k \theta(\eta) + \beta_k \theta(\eta) \int^\eta \frac{d\tilde{\eta}}{\theta^2(\tilde{\eta})} \right) = \left(\alpha_k + \beta_k \int^\eta \frac{d\tilde{\eta}}{\theta^2} \right) \theta' + \frac{\beta_k}{\theta}. \quad (3.116)$$

Las cantidades θ y θ' se obtienen directamente considerando (3.113) durante el regimen inflacionario. Nuevamente, despreciando términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ se encuentra

$$\begin{aligned}
u'_k(\eta) &= -\alpha_k \left(2 - \frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{H}'}\right) \frac{\mathcal{H}}{aM_P\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \beta_k \left(1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}M_P a \\
&= -\frac{\alpha_k(1+\epsilon)}{M_P^2} \sqrt{\frac{V}{6\epsilon}} - \beta_k \epsilon^{3/2} \sqrt{2}M_P a
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Las condiciones de continuidad para $u_k(\eta)$ y $u'_k(\eta)$ al ‘tiempo del primer cruce del horizonte’ conducen a

$$\frac{\alpha_k}{kM_P^2} \sqrt{\frac{V}{6\epsilon}} + \beta_k M_P^2 \sqrt{\frac{6\epsilon}{V}} = -ik^{-3/2} e^{ik(\eta_k - \eta_i)}, \tag{3.118}$$

$$\frac{-\alpha_k}{M_P^2} \sqrt{\frac{V}{6\epsilon}} (1+\epsilon) - \beta_k M_P^2 \sqrt{\frac{6}{V}} k \epsilon^{3/2} = k^{-1/2} e^{ik(\eta_k - \eta_i)}, \tag{3.119}$$

donde se utilizó que al momento del ‘cruce del horizonte’ $a(\eta_k) = kH^{-1} = kM_P\sqrt{3/V}$ (donde a su vez utilizamos la ecuación *slow-roll* $H^2 = V/3M_P^2$). Finalmente, las constantes α_k y β_k están dadas por

$$\alpha_k = k^{-\frac{1}{2}} M_P^2 \sqrt{\frac{6\epsilon}{V}} e^{ik(\eta_k - \eta_i)} (-1 + i\epsilon), \quad \beta_k = k^{-\frac{3}{2}} \frac{e^{ik(\eta_k - \eta_i)}}{M_P^2} \sqrt{\frac{V}{6\epsilon}} (1 - i(\epsilon + 1)). \tag{3.120}$$

Por lo tanto, la expresión para $u_k(\eta)$ en los 2 regímenes es

$$u_k(\eta) = \frac{-i}{k^{3/2}} e^{ik(\eta - \eta_i)} \quad \text{para} \quad k^2 \gg \frac{\theta''}{\theta} \tag{3.121}$$

y

$$u_k(\eta) = \alpha_k \theta(\eta) + \frac{\beta_k \theta(\eta)}{4\pi G} \left(\frac{a^2(\eta)}{\mathcal{H}(\eta)} - \int^\eta a^2(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right) \quad \text{para} \quad k^2 \ll \frac{\theta''}{\theta}, \tag{3.122}$$

con α_k y β_k dados en (3.120). El paso final es calcular el espectro de potencias (3.108) considerando que los modos relevantes ($u_k(\eta)$) se encuentran en el régimen de longitud de onda larga durante la época dominada por radiación ($a(\eta) \propto \eta$). Por lo que, despreciando el primer término en (3.122) (θ es inversamente proporcional a $a(\eta)$ la cual es una función creciente), podemos expresar $u_k(\eta)$ como

$$u_k(\eta) \approx \frac{2}{3} \frac{\beta_k}{4\pi G(\rho + P)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.123)$$

Sustituyendo (3.123) en (3.108) se obtiene

$$\mathcal{P}_\Psi(k, \eta) = \frac{|\beta_k|^2 k^3}{4\pi^2} \left(\frac{2}{3}\right)^2. \quad (3.124)$$

Y finalmente, usando (3.120) en (3.124), se obtiene el espectro de potencias para la perturbación de la métrica

$$\mathcal{P}_\Psi(k, \eta) = \frac{V}{54\pi^2 M_P^4 \epsilon} (2 + 2\epsilon + \epsilon^2) \approx \frac{V}{27\pi^2 M_P^4 \epsilon}, \quad (3.125)$$

esto es, se obtiene un espectro de potencias prácticamente invariante de escala compatible con el espectro plano de Harrison-Zel'dovich.

3.7. Evolución de las perturbaciones después de inflación

A lo largo de este capítulo, hemos estudiado como se originan las perturbaciones primordiales, así como su evolución durante inflación. Sin embargo, otra parte importante relacionada con este análisis corresponde a la evolución de las perturbaciones primordiales hasta la estructura que observamos hoy en día: estrellas, galaxias, cúmulos de galaxias, supercúmulos, vacíos, etc.

La teoría de formación de estructura ha sido ampliamente estudiada [84, 85] y típicamente sólo se necesita conocer las condiciones iniciales para aplicar todo su formalismo. Los datos iniciales incluyen información acerca de la composición del universo, la cantidad de materia no-relativista, el espectro y el tipo de perturbaciones primordiales.

3.7.1. El espectro angular de las anisotropías del CMB

La Radiación Cómica de Fondo (CMB) es una fotografía del universo en el momento de la última dispersión, esto es, cuando los fotones del CMB se desacoplaron del plasma caliente primordial y, posteriormente, se propagaron hasta llegar a nuestros satélites. Los primeros datos precisos fueron recolectados por el satélite COBE [100], seguido por MAXIMA [45], BOOMERANG [81], DASI [44] y WMAP [60]. Todos ellos detectaron fluctuaciones en la temperatura del CMB al orden $\Delta T/T \sim 10^{-5}$.

Las fluctuaciones en la temperatura se asocian con las fluctuaciones en la densidad de energía en la época de recombinación, i.e., $\Delta T/T \approx \Delta\rho/\rho$.

Los procesos físicos involucrados en el origen de las fluctuaciones de la temperatura son muy diversos, mientras que unos generan una mayor contribución a escalas angulares grandes, $\theta \gg 1^\circ$, otros lo hacen a escalas menores $\theta \ll 1^\circ$. Los procesos que contribuyen a escalas angulares pequeñas tienen que ver con procesos microfísicos y los analizaremos brevemente al final de esta sección.

El proceso físico, que da lugar a las fluctuaciones de la temperatura a escalas angulares grandes, es el llamado *efecto Sachs-Wolfe* [94, 113, 49, 50]. Dicho efecto consiste en el hecho de que los fotones pueden ganar o perder energía en presencia de pozos de potencial gravitacional en la última superficie de dispersión. La forma matemática del efecto Sachs-Wolfe está dada por

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \frac{1}{3}\Psi(\mathbf{x}_D, \eta_D), \quad (3.126)$$

donde η_D se refiere al tiempo conforme del desacople y $\mathbf{x}_D = R_D(\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, \cos\theta)$ con R_D el radio de la superficie de última dispersión y (θ, φ) las coordenadas de la 2-esfera celeste.

La razón por la cual nos interesan las escalas angulares en las que el efecto Sachs-Wolfe es el dominante, es debido a que el horizonte de partículas, en la época del desacople, corresponde aproximadamente⁶ a $\theta \simeq 2^\circ$. Las anisotropías mayores a esta escala no han evolucionado significativamente y por lo tanto, reflejan las ‘fluctuaciones primordiales’.

Es común realizar una expansión de las fluctuaciones de la temperatura en armónicos esféricos

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.127)$$

El *espectro de potencias angular* se define como:

$$C_l \equiv \langle |\alpha_{lm}|^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |\alpha_{lm}|^2. \quad (3.128)$$

⁶Esto se puede calcular de manera aproximada de la siguiente manera: para calcular el horizonte de partículas al tiempo de desacople t_d , obtenemos $d_{HP}^c(t_d) \equiv \int_0^{t_d} dt/a(t) \simeq 0.168h^{-1}\text{Mpc}$, si calculamos su valor hoy, $\sim d_{HP}^c(t_d)(a_0/a_d) \simeq 184h^{-1}\text{Mpc}$, que comprado con la distancia que viajaron los fotones (i.e., la distancia a la última superficie de dispersión), $D_c = a_0 \int_{t_d}^{t_0} (dt'/a(t')) \simeq 6000h^{-1}\text{Mpc}$, el ángulo subtendido es $\theta \simeq 184/6000 \sim 2^\circ$.

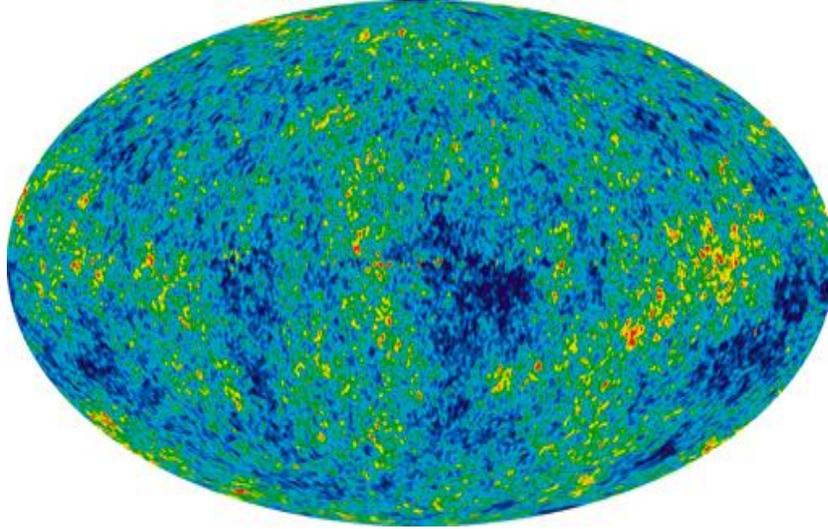


Figura 3.5: Mapa (WMAP año 7) de las fluctuaciones de la temperatura $\delta T/T$ después de minimizar el ruido. La temperatura promedio es de $T = 2.725$ K. Los puntos amarillos y rojos son más calientes que el promedio, los azules más fríos que el promedio (NASA/WMAP Science Team).

Debido a la homogeneidad e isotropía, los C_l 's no dependen de la posición espacial de los observadores ni de m . El espectro de potencias angular está relacionado con el espectro de potencias de las perturbaciones de la métrica, \mathcal{P}_Ψ . Se puede mostrar (véase Apéndice C) que

$$C_l = 4\pi \int_0^\infty \frac{dk}{k} j_l^2(kR_D) \mathcal{P}_\Psi(k), \quad (3.129)$$

donde $j_l(x)$ son las funciones esféricas de Bessel de orden l ; el espectro de potencias $\mathcal{P}_\Psi(k)$ es el que se obtuvo en (3.125). La expresión (3.129) es válida para $2 < l \ll 100$, que corresponde las escalas angulares en las cuales el efecto Sachs-Wolf es dominante. Además, se puede observar que si $\mathcal{P}_\Psi(k)$ es independiente de escala (plano) entonces $l(l+1)C_l$ es constante.

Los resultados de las observaciones del satélite WMAP (7 años) se muestran en las figuras 3.5 y 3.6.

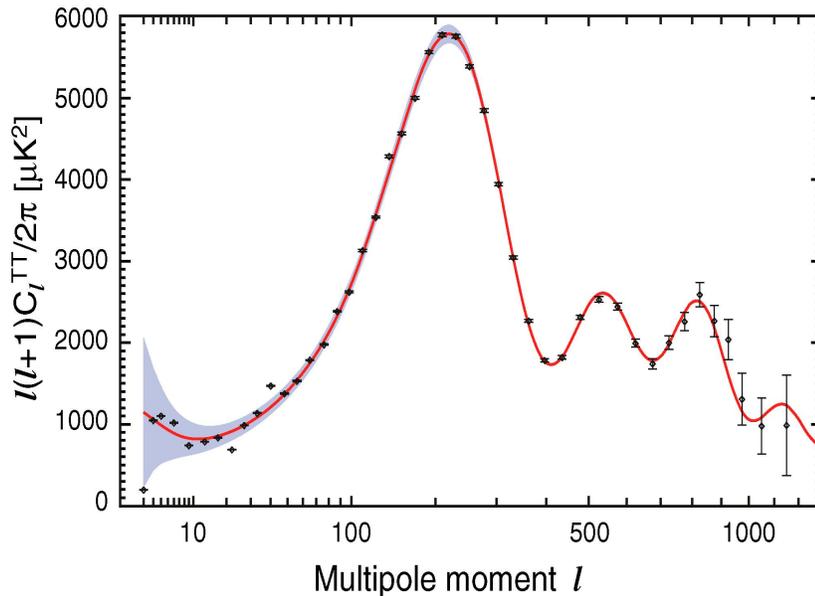


Figura 3.6: Espectro de potencias angular de las anisotropías del CMB, misión WMAP año 7 (Figura tomada de [60])

3.7.2. Crecimiento lineal de estructura

En el paradigma inflacionario, las fluctuaciones al inflatón, producidas durante la inflación, son ‘alargadas’ a escalas mucho mayores que el horizonte y, después de que salen del horizonte, su amplitud permanece constante, i.e., se ‘congelan’. Una pregunta interesante que surge es el estudiar como evolucionan estas fluctuaciones después que reentran al horizonte e investigar los posibles efectos que pueden tener en el universo.

A medida que las perturbaciones de la curvatura entran al horizonte, se comienzan a formar fluctuaciones en la densidad de energía $\delta\rho_k$ vía pozos de potencial gravitacional. Se define a las fluctuaciones de la densidad como:

$$\delta_k \equiv \frac{\delta\rho_k}{\rho_0}, \quad (3.130)$$

donde ρ_0 es la densidad de energía promedio del fondo.

Antes de investigar cual es el destino de las fluctuaciones de la densidad después de entrar en el horizonte, haremos un breve análisis de su comportamiento a escalas mayores que el horizonte.

Las ecuación de evolución para Ψ_k se puede obtener de (3.58), la cual es válida para cualquier época cosmológica, en particular, es válida durante la época dominada por materia (MD). En esta época, la ecuación de estado correspondiente es $P = 0$, por lo que la ecuación de evolución para Ψ_k es

$$\Psi_k'' + \frac{6}{\eta}\Psi_k' = 0, \quad (3.131)$$

y su solución es

$$\Psi_k = A_1(k) + \frac{A_2(k)}{\eta^5}, \quad (3.132)$$

donde $A_1(k)$ y $A_2(k)$ son constantes de integración que se determinan mediante las condiciones iniciales. Utilizando (3.132) y (3.54), podemos encontrar (véase las referencias [84, 79]) que

$$\delta_k = aA_3(k) + \frac{A_4(k)}{a^{5/2}}. \quad (3.133)$$

Puesto que, $a(\eta)$ es una función creciente se suele ignorar el segundo termino del lado derecho de (3.133) denominándolo el ‘modo que decae’, por lo que para la época MD $\delta_k \propto a$.

Para una época dominada por radiación (RD), la ecuación de evolución para Ψ_k y sus soluciones se estudiarán detalladamente en el Capítulo 5. En esta caso, utilizando Ψ_k para la época RD y (3.54), se encuentra que $\delta_k \propto a^2$.

En resumen, para las escalas mayores al horizonte, las fluctuaciones a la densidad crecen como:

$$\delta_k = \begin{cases} a^2, & \text{RD,} \\ a, & \text{MD,} \end{cases} \quad (3.134)$$

donde RD denota un universo dominado por radiación y MD un universo dominado por materia no-relativista.

Por otra parte, después de que las perturbaciones entran al horizonte, normalmente se argumenta [79] que es válido aplicar teoría de perturbaciones Newtoniana, de la cual se obtiene la *ecuación lineal de la perturbación*:

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + \left(c_s^2 \frac{k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_0 \right) \delta_k = 0, \quad (3.135)$$

donde $c_s^2 = \dot{P}/\dot{\rho}$ es la velocidad del sonido. Si el modo entra al horizonte durante RD, los bariones y los fotones se encuentran tan fuertemente acoplados que la δ_k no

puede aumentar debido a la presión del baño de fotones, por lo que el comportamiento de δ_k es oscilatorio.

Si el modo entra al horizonte durante MD, el crecimiento de δ_k es posible, dependiendo de si la combinación $c_s^2 k^2 / a^2$ es mayor, ó menor que $4\pi G \rho_0$ en (3.135). Lo anterior significa que existe una escala característica $k_J \equiv \sqrt{4\pi G \rho_0} / c_s$, donde k_J se define como el *número de onda de Jeans*, el cual permite hacer una distinción entre los modos gravitacionalmente estables e inestables. Los modos $k \gg k_J$ son estables y corresponden a oscilaciones, mientras que para $k \ll k_J$ son inestables y dan lugar a la formación de estructura. Por lo tanto, la época de igualdad entre materia y radiación, la cual corresponde a la época de transición de la etapa dominada por radiación a la época dominada por materia, fija una escala importante para la formación de estructura

$$k_{eq} = H^{-1}(a_{eq}) \simeq 0.08h \text{ Mpc}^{-1}. \quad (3.136)$$

Las perturbaciones con $k \gg k_{eq}$ están suprimidas respecto a las perturbaciones con $k \ll k_{eq}$, por un factor $(a_{ent}/a_{eq})^2 = (k_{eq}/k)^2$, donde a_{ent} denota el factor de escala al instante en que las perturbaciones, correspondientes a la escala k , entran al horizonte.

Después de que el universo se vuelve dominado por materia no-relativista, el espectro de potencias primordial de las perturbaciones de la densidad es influenciado por las inestabilidades gravitacionales y la formación de estructura es posible. Resolviendo (3.135) en la época MD, se obtiene la evolución del modo creciente δ_k^+

$$\delta_k^+ \propto t^{2/3} \propto a \propto (1+z)^{-1}. \quad (3.137)$$

El valor de δ_k , obtenido teóricamente en un universo dominado por materia bariónica, al tiempo actual es $\delta_B(t = t_0) < 0.1$, el cual es un número muy pequeño comparado con la gran cantidad de inhomogeneidades observadas en el universo. Esto quiere decir que en un universo dominado exclusivamente por materia bariónica, la formación de galaxias no sería posible. La teoría de formación de estructura requiere de la presencia de materia débilmente interactuante no-bariónica y no-relativista. Este tipo de materia se le denomina *materia oscura* y es esencial en la teoría de formación de estructura.

Actualmente, existen muchos argumentos cosmológicos y astrofísicos en favor de la existencia de la materia oscura en el universo. La materia oscura interactúa débilmente con la materia ordinaria. El adjetivo “oscuro” viene del hecho de que no puede absorber ni emitir ningún tipo de radiación electromagnética, incluyendo el espectro visible. Adicionalmente, se sabe que no ha perdido la suficiente energía

cinética como para asentarse en los discos de galaxias, tal y como ha sucedido con la materia bariónica. Esto significa particularmente que dichas partículas deben ser eléctricamente neutras [99]. Los estudios detallados de la dinámica de los cúmulos de galaxias indican que las partículas de materia oscura deben ser ‘frías’ en el sentido de que sus velocidades son altamente no-relativistas [18].

Una manera de determinar el contenido de materia oscura en el universo, es utilizar las observaciones provenientes del CMB. En el contexto del modelo estándar cosmológico (también llamado modelo de ‘concordancia’ o modelo Λ CMD), es posible determinar, dentro de otros parámetros, la densidad total de materia Ω_m y la densidad de materia bariónica Ω_b . Los datos más recientes provienen de las observaciones de 7 años del WMAP [60], las cuales dan el siguiente valor, para la densidad de materia bariónica: $\Omega_b = 0.0449 \pm 0.0028$, mientras que el valor que se infiere para la densidad total de materia es $\Omega_m = 0.266 \pm 0.029$. Por tanto, la densidad de materia total es claramente mayor que la densidad de materia bariónica, lo cual es un indicio de la existencia de un componente de materia oscura no-bariónica, con una densidad $\Omega_{DM} \simeq 0.2$.

Capítulo 4

El problema fundamental y la propuesta de colapso

En el capítulo anterior se analizó la solución dada por inflación para ayudar a resolver los problemas del Big Bang (problema del horizonte, problema de la planitud, reliquias no deseadas), pero además se repasó un argumento estándar respecto al origen de las inhomogeneidades en nuestro universo: Las fluctuaciones cuánticas del estado vacío del inflatón dieron origen a las semillas primordiales de estructura cósmica.

Sin embargo, hay un problema fundamental en la explicación tradicional propuesta por el paradigma inflacionario: El argumento estándar dice que el universo, como resultado de la dinámica inflacionaria, fue llevado a un estado originalmente simétrico (homogéneo e isotrópico), junto con un campo escalar (el inflatón) cuyo estado vacío también es homogéneo e isotrópico, y finalmente llegamos a una situación no simétrica (inhomogéneo y anisotrópico) que concuerda satisfactoriamente con los datos observacionales. Es precisamente en este punto donde existe una problemática, que se ha discutido ampliamente en [89, 103, 105, 104, 106]; tomando en cuenta la interpretación ortodoxa de la Mecánica Cuántica, la teoría cuántica establece que: La evolución unitaria de un estado cuántico (el proceso U en [86]), con una simetría que sea conservada por el Hamiltoniano, no romperá esta simetría inicial, sin embargo, la medición de un observable, cuyos eigenestados no sean simétricos, fuerza al sistema (a través del colapso, denominado proceso R en [86]) a reducirse a uno de los posibles estados no simétricos. El surgimiento de esta asimetría ocurre sólo como resultado de una medición, y por lo tanto, únicamente cuando los observables medidos no conmutan con los generadores de la simetría.

Debido a lo anterior, en el contexto cosmológico surgen varias cuestiones: ¿A

qué nos referimos exactamente con una medición que colapse la función de onda?, ¿Cuándo ocurrió la ‘medición’?, ¿Cuál fue el observable que se midió?. No podemos pensar que el universo era perfectamente homogéneo e isotrópico hasta antes de que los primeros satélites comenzaran a recolectar datos del CMB, ya que las condiciones de nuestra existencia se deben a la evolución de dichas inhomogeneidades primordiales.

Más aún, existen aspectos problemáticos ligados a cuestiones relacionadas al valor predictivo cuando se realizan predicciones con una sola medición. Lo anterior nos lleva a la siguiente cuestión: ¿Cómo es que aseguramos tener un poder predictivo si solamente nos es posible realizar mediciones únicas debido a que tenemos acceso sólo a un universo?.

Las preguntas anteriores están relacionadas con el problema de la medición en Mecánica Cuántica [14, 12], es decir, como se da la transición de un tratamiento cuántico a uno clásico¹. Cabe señalar que existen muchos miembros en la comunidad cosmológica [79, 112, 69] que aceptan la existencia de un elemento faltante en la explicación tradicional. Incluso, existe una gran cantidad de trabajos en la literatura dedicados a comprender los aspectos que relacionan la Mecánica Cuántica con el contexto cosmológico en general [116, 27, 43].

Basados en lo anterior, se puede apreciar que la explicación propuesta por el modelo inflacionario, respecto a las anisotropías e inhomogeneidades primordiales de la densidad, no puede calificarse como satisfactoria mientras no se tome en cuenta el problema de la medición. De hecho, todas las posibles soluciones al problema de medición deberían poder decir algo respecto a la siguiente cuestión: ¿Es posible describir a todos los procesos físicos mediante la Mecánica Cuántica (i.e., el universo es esencialmente cuántico?)?. Por ejemplo, según Von Neumann, si el universo es cuántico, resultaría casi imposible resolver el problema de la macro-objetificación. Su argumento [108](ó en su versión no idealizada hecha por Bassi y Ghirardi [10]) está basado en la linealidad de la evolución dictada por la ecuación de Schrödinger.

Mención aparte, merecen todos los aspectos relacionados con la estadística general involucrada en la explicación tradicional, es decir, es necesario establecer la naturaleza de los diferentes promedios, fluctuaciones, etc.. Como se discute en [89], por un lado, se tienen valores de expectación de operadores cuánticos. En este caso la naturaleza estadística se refleja en el indeterminismo usual que existe en las mediciones futuras de ciertas cantidades cuando el estado del sistema no coincide con

¹En realidad la mayoría de los expertos concuerdan en que no hay regímenes clásicos ó cuánticos. La descripción fundamental siempre es cuántica, pero hay regímenes en los cuales ciertas cantidades se pueden describir satisfactoriamente por sus contrapartes clásicas que representan valores de expectación de las cantidades cuánticas.

los eigenestados del observable. En otras palabras, el aspecto estadístico de la teoría cuántica emerge únicamente cuando se selecciona un observable particular asociado a una medición. Por otra parte, se tiene toda la estadística asociada con el ensamble clásico representado por el campo estocástico ϕ y sus correspondientes inhomogeneidades que, a su vez, caracterizan a los correspondientes ensambles de universos. Y finalmente, se tiene toda la descripción estadística de las inhomogeneidades dentro de *nuestro universo*, el cual puede pensarse como una realización arbitraria genérica dentro del ensamble de universos mencionado. El punto aquí es poder distinguir en principio entre la estadística del ensamble de universos y la estadística de nuestro universo.

Con el objetivo de introducir al lector con los diferentes enfoques existentes en la literatura para tratar con el problema fundamental del paradigma inflacionario estándar, a lo largo de este capítulo haremos una revisión básica de las propuestas más populares. Adicionalmente, resumiremos los argumentos más elaborados expuestos en [89, 103, 105, 104, 106] para señalar el porqué dichas propuestas nos parecen insatisfactorias.

4.1. Decoherencia

La *decoherencia*, en su interpretación estándar [117, 97, 118], describe el hecho de que cuando consideramos un sistema cuántico con varios grados de libertad, la mayoría de los cuales se ignoran (considerándolos como ‘el ambiente’), la matriz de densidad para un subconjunto de los grados de libertad restantes, evolucionan (denominándolos ‘observables’) y, después de realizar un promedio temporal, la matriz de densidad se vuelve diagonal. Es en este punto donde se dice que tenemos el surgimiento del comportamiento clásico de los observables de interés, debido a que los elementos fuera de la diagonal, que representan la interferencia cuántica, se aproximan rápidamente a cero. En resumen, un análisis típico basado en el programa de decoherencia consta de los siguientes pasos:

1. Dividir los grados de libertad: sistema + ambiente (identificarlos como inaccesibles ó irrelevantes).
2. Calcular la matriz de densidad reducida (i.e., realizar la traza sobre los grados de libertad del ambiente).
3. Realizar un promedio temporal de tal manera que los elementos fuera de la diagonal se anulen.

4. Utilizar a la matriz de densidad diagonal para describir un ensamble clásico.

De hecho, es justo decir que la decoherencia por si misma no ha resuelto el problema de la medición en Mecánica Cuántica. Por ejemplo citando a la referencia [17]:

“¿Decoherencia resuelve el problema de la medición? Claramente no. Lo que decoherencia nos dice es que ciertos objetos aparentan ser clásicos cuando son observados. Pero, ¿qué es una observación?, en algún momento necesitaremos aplicar las reglas de probabilidad usuales de la Teoría Cuántica” E.Joos

Por otra parte, en [2], se señala que decoherencia no explica el porqué, después de realizar una medición, no se observa al sistema en una superposición de estados.

En [89, 106], se exhiben dos problemas importantes en el esquema estándar de decoherencia:

- i) *El problema de la base*: Es claro que si se realiza un cambio de base, en el espacio de Hilbert del sistema, la matriz de densidad dejaría de ser diagonal. En el uso estándar de decoherencia, para tratar de lidiar con este problema, se dice que todo sistema siempre se encuentra interactuando con el ambiente, y que es el ambiente el que selecciona la base privilegiada en la que la matriz de densidad se vuelve diagonal. Sin embargo, si tomamos como ejemplo una situación en la que el ambiente seleccionara la base de posición, el momento del sistema quedaría indeterminado, por lo cual sería complicado afirmar que emergió la clasicidad del sistema. El problema de la base, se magnifica en el contexto cosmológico, ya que en este escenario surgen las siguientes cuestiones: ¿Quién juega el papel del ambiente en el universo?, ¿Cuál es el mecanismo físico con el que se selecciona la base en que la matriz de densidad se vuelve diagonal?. Si afirmamos que somos nosotros, los seres que evolucionaron a partir de las inhomogeneidades cuánticas amplificadas gravitacionalmente las cuales dieron origen a nuestra existencia, a través de nuestros estudios de la radiación cósmica de fondo, los responsables de seleccionar dicha base, entonces entraríamos a un círculo cerrado de causas y efectos. Este último punto ha motivado a algunos autores (e.g., [46, 47]) a sugerir la necesidad de ir más allá de la Mecánica Cuántica. Por lo tanto, si quisiéramos afirmar que la decoherencia resuelve el problema en el escenario cosmológico, necesitaríamos comenzar escogiendo una base preferente, seleccionada por algún mecanismo físico, y un criterio para poder separar los grados de libertad en ambiente y sistema.

- ii) *El problema del estado mixto*: El problema consiste en la ausencia de una justificación satisfactoria que nos permita interpretar al estado mixto, caracterizado por la matriz de densidad, como una descripción del sistema en términos de un ensamble estadístico. Estrictamente hablando, el sistema compuesto total todavía se encuentra descrito por una superposición de estados cuánticos, i.e., es la función de onda, compuesta por una superposición de estados cuánticos, y no la matriz de densidad reducida, la que contiene la información del estado del sistema. En otras palabras, tenemos un conjunto de posibles realidades coexistiendo simultáneamente, lo cual es distinto a afirmar que cada uno de los miembros del ensamble tiene una realización definida (pero aún desconocida) con determinada probabilidad. De hecho, el querer asignarle a los estados mixtos una incertidumbre puramente clásica, entra en conflicto con las llamadas desigualdades de Bell [13, 76] las cuales han sido verificadas experimentalmente [6].

Actualmente, existen trabajos [9, 8] que han intentado justificar el uso de decoherencia en el contexto cosmológico atacando los problemas anteriores, sin embargo, todos los esquemas comparten el mismo problema: Incluso, comenzando con un estado perfectamente simétrico, y construyendo una matriz de densidad para un cierto subconjunto de grados de libertad físicos, los cuales se expresan en una base tal que los elementos fuera de la diagonal se anulan, y cuya elección se realizó a través de una selección justificada de los grados de libertad que se consideran como el ambiente, no es posible terminar con un estado mixto asimétrico, ya que no hay ningún aspecto en la situación inicial que pueda conducir a tal ruptura de la simetría. Por tanto, el estado mixto descrito por la matriz de densidad es perfectamente simétrico. Posteriormente a la matriz de densidad se le da una interpretación estadística, donde se deja de asociar a la matriz de densidad al estado correspondiente a nuestro universo, y en cambio se utiliza como la representación de un ensamble estadístico de universos, dentro de los cuales uno de ellos corresponde a nuestro universo. El ensamble, como un todo, es claramente simétrico, pero puede suceder que uno de sus elementos sean asimétricos. De esta manera, se identifica a *nuestro* universo como un elemento asimétrico del ensamble de muchos universos. Sin embargo, es claro que esto no explica como *nuestro* universo originalmente en un estado homogéneo e isotrópico evolucionó a un estado inhomogéneo y anisotrópico. Por lo tanto, si buscamos un entendimiento realista del origen de la inhomogeneidad y anisotropía en nuestro universo, cualquier esquema basado en decoherencia no es el adecuado.

4.2. Decoherencia sin decoherencia

En esta propuesta [92, 52, 53] únicamente se considera al campo escalar y no existe ningún otro sistema físico que juegue el papel del ambiente. La idea básica consiste en que comenzando con un estado cuántico puro del campo, se observa que ciertos modos del campo escalar se anulan asintóticamente debido a la dinámica inflacionaria del universo, por lo que se sugiere tratarlos como inobservables y se ignoran, posteriormente, tomando la traza sobre ellos, se obtiene un estado mixto a partir de lo que era inicialmente un estado cuántico puro del campo.

Por otra parte, en este enfoque, se utiliza el hecho de que durante la inflación, el estado vacío inicial para cada modo, evoluciona hacia un estado *squeezed*. Recordemos que un estado *squeezed* es aquel que tiene una incertidumbre mínima en un nuevo par de variables canónicas ‘rotadas’ y no en las variables estándar de posición y momento. Así, en este caso, se obtiene una incertidumbre en el valor del campo y su momento conjugado que es mucho mayor que el valor mínimo permitido por el principio de incertidumbre. Por lo tanto, en este esquema se argumenta que la incertidumbre mínima (establecida por la Mecánica Cuántica) es despreciable si se compara con la incertidumbre actual y de esta manera la Mecánica Cuántica es irrelevante. Lo anterior se toma como un indicio de que ocurrió una transición cuántico-clásica.

Las críticas que presentaremos hacia esta propuesta constituyen un resumen de la crítica más detallada expuesta en [106].

Este esquema tiene los mismos problemas que el programa de decoherencia estándar en el sentido de que no describe satisfactoriamente la transición de un estado cuántico, homogéneo e isotrópico hacia uno también cuántico pero inhomogéneo y anisotrópico. Tampoco se expone un mecanismo físico capaz de romper la simetría del estado inicial. Adicionalmente podemos mencionar dos problemas en específico de este esquema:

1. El hecho de que ciertos modos se aproximen asintóticamente a cero no es justificación suficiente para considerarlos como inobservables, el valor cero del campo es tan bueno como cualquier otro valor. Incluso aceptando el hecho de que existieran algunos grados de libertad inobservables; esto no necesariamente implica que al estado mixto se le pueda dar una interpretación de ensamble estadístico. Un sistema cuántico, no deja de serlo sólo porque alguno de sus componentes sean inobservables (e.g., un proton, en circunstancias apropiadas, puede describirse por un estado cuántico puro, a pesar de que en estas mismas condiciones, sus constituyentes-quarks y gluones-sean, en la práctica, inobservables).

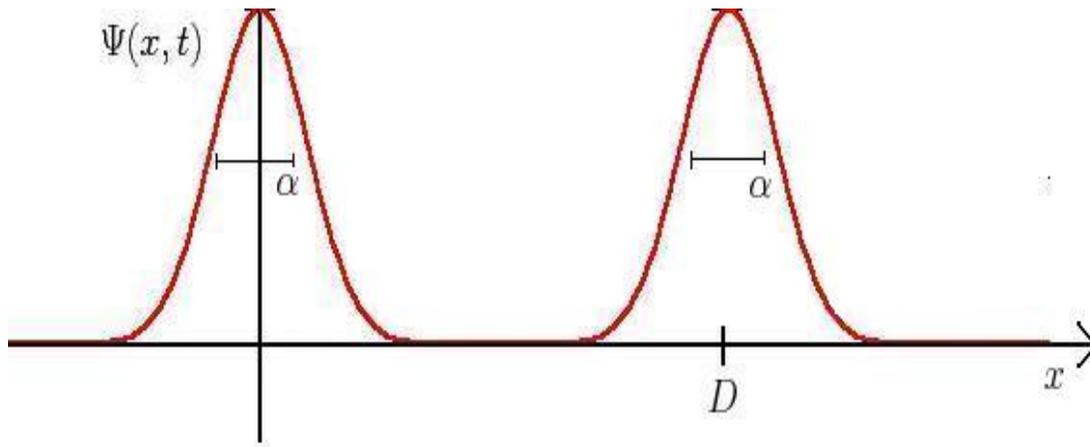


Figura 4.1: Función de onda de un electrón en un estado de superposición de dos paquetes de onda mínimos.

2. El criterio sobre la clasicidad de un sistema, basado en comparar las incertidumbres de sus variables canónicas respecto al valor mínimo permitido por el principio de incertidumbre, no está completamente justificado. Esto se puede ilustrar más claramente con un ejemplo: Pensemos en un electrón representado por un paquete de onda mínimo (i.e., tipo Gaussiano) localizado en el origen de tal manera que la incertidumbre en su posición es $\Delta\hat{x} = \alpha$ y en su momento canónico conjugado es $\Delta\hat{p} = \hbar/2\alpha$. Hagamos ahora una superposición de este estado con otro idéntico (Figura 4.1) desplazado por una distancia D con $D \gg \alpha$. El producto de las incertidumbres es aproximadamente $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \sim D\hbar/2\alpha$, el cual se puede hacer tan grande como uno quiera. Es claro que este sistema no se aproxima a un sistema clásico.

4.3. Interpretación de varios universos

Esta propuesta pareciera ser la menos popular de todas, si empleamos como indicador de popularidad el número de trabajos encontrados en la literatura, pero, a su vez, es la que muchos investigadores sobre el tema adoptan cuando se les cuestiona acerca de los problemas mencionados al inicio de este capítulo.

En este esquema se toma la postura de que nuestro universo nunca fue homogéneo e isotrópico, sino que el verdadero estado cuántico, homogéneo e isotrópico, describe

al ensamble de muchos universos, uno de los cuales corresponde a nuestro universo. Dentro de este enfoque, el tratamiento estándar del paradigma inflacionario se interpreta como el reflejo del aspecto más probable que se espera de nuestro universo, cuando se considera estadísticamente dentro de dicho ensamble. En esta interpretación, aparentemente no hay problemas abiertos, no hay necesidad de un colapso y mucho menos de recurrir a física nueva.

Cabe señalar que esta postura es diferente a la interpretación de ‘varios mundos’ de Everett [38]. Esta interpretación sostiene que un sistema físico existe en forma simultánea en todos sus posibles estados, antes y después de haberse sometido a mediciones. En la interpretación de varios mundos, cada una de estas existencias simultáneas forma parte de una realidad separada. Cada vez que medimos un sistema físico y descubrimos que está en un estado particular de todos los posibles, nuestro ‘mundo’ se bifurca hacia uno de los ‘mundos’ donde el sistema está en ese estado particular en ese preciso momento. No obstante, el sistema continúa existiendo en sus otros posibles estados, en “los otros mundos”.

Así, en la postura de varios mundos, no hay un colapso de la función de onda sino una ramificación de diferentes realidades. Cabe señalar que hay un mapeo entre la propuesta de la separación de los mundos con lo que llamaríamos ‘mediciones’ en la interpretación ortodoxa ó de Copenhagen. Por tanto cada problema señalado anteriormente, para explicar la transición de un estado simétrico, correspondiente al universo inflacionario, a un estado que no lo es, utilizando la interpretación de Copenhagen, tiene su correspondiente formulación en la interpretación de varios mundos: ¿Cuándo ocurre la separación en diversos mundos?; ¿Por qué y bajo qué circunstancias ocurre?; ¿Qué provoca dicha separación?

En el paradigma de ‘varios universos’ no hay ninguna separación, en particular, queremos enfatizar que en el enfoque de ‘varios universos’ nuestro universo nunca fue homogéneo e isotrópico.

La interpretación, que surge de la postura de ‘varios universos’, es que cada uno de los universos pertenecientes al ensamble tuvo una realización concreta de asimetrías. Sin embargo, la afirmación anterior implica que cada uno de estos universos estaría sujeto a una descripción, en particular, una descripción de sus asimetrías. Esta descripción debe hacerse clásica ó cuánticamente.

Si decidimos considerar que la descripción sea clásica, entonces no hay superposiciones y la Mecánica Cuántica no tiene lugar. Por lo tanto estaríamos afirmando que cada uno de estos universos se encuentra en una realización específica (que no se conoce aún, pero que posee determinada probabilidad) mucho antes de que se realizara algún tipo de medición, esto es, estaríamos diciendo que las asimetrías de cada uno de los universos en el ensamble (en particular nuestro universo) ya existían

desde el origen mismo del universo. Por lo tanto, la explicación del origen de las inhomogeneidades en nuestro universo es inexistente ya que su origen se da simplemente por construcción.

Por otra parte, si tomamos la postura que la descripción de las asimetrías en nuestro universo (el cual pertenece a un ensamble de muchos universos) sea cuántica, estaríamos afirmando que nuestro universo se encuentra en un estado cuántico que no es simétrico, pero que, cuando se superpone con los estados cuánticos no simétricos de los demás universos pertenecientes al ensamble, nos da un estado cuántico homogéneo e isotrópico. El problema con esta descripción es que viola las reglas de la Mecánica Cuántica: Si tenemos dos sistemas, cada uno de los cuales se describe por un estado cuántico $|\Psi_1\rangle$ y $|\Psi_2\rangle$, entonces, el sistema compuesto NO se describe por la superposición de dos estados cuánticos $C_1|\Psi_1\rangle + C_2|\Psi_2\rangle$ sino por el producto directo ó ‘tensorial’ de los vectores en cada uno de los espacios de Hilbert correspondientes $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$.

Finalmente es necesario señalar que cualquier explicación estándar, basada en la interpretación de Copenhagen de la Mecánica Cuántica, no es factible si no es posible definir a los ‘observadores externos’, lo cual en el contexto cosmológico es una tarea bastante difícil (sino imposible).

4.4. El colapso auto-inducido

La hipótesis del colapso auto-inducido, aplicada al universo inflacionario, fue introducida originalmente en [89] y ha dado lugar a resultados interesantes [32, 62, 61], también existen trabajos relacionados con esta propuesta que discuten aspectos más específicos del esquema del colapso [103, 105, 104, 106]. A continuación presentaremos las ideas básicas de dicha propuesta.

A lo largo de este capítulo hemos estudiado las diferentes propuestas existentes en la comunidad para lidiar con el *problema fundamental*, i.e., encontrar una explicación satisfactoria sobre la transición de un estado homogéneo e isotrópico, correspondiente al universo primitivo, hacia el escenario actual, donde el universo se encuentra en una situación altamente inhomogénea. Sin embargo, cada una de las propuestas consideradas se basan en las reglas y postulados de la Mecánica Cuántica estándar. No obstante, hemos discutido que en el contexto cosmológico no es clara la aplicación de dichas reglas. La propuesta del “colapso auto-inducido” que presentaremos en esta sección, tiene como motivación dar una explicación más clara a las preguntas formuladas por el problema fundamental, pero para ello, modifica el postulado del colapso de la función de onda en la interpretación ortodoxa de la Mecánica Cuántica. Tal modificación consiste en reemplazar a los “observadores externos”, responsables

del colapso de la función de onda en la interpretación usual, por un *colapso auto-inducido*. De esta manera, la explicación propuesta por el esquema de colapso, para resolver el problema fundamental, consiste en: El estado cuántico simétrico, correspondiente al universo temprano, evoluciona unitariamente hasta que un aspecto intrínseco al sistema, provoca el colapso de la función de onda original, dando lugar a un estado inhomogéneo compatible con las observaciones actuales.

La propuesta del colapso auto-inducido se basa profundamente en las ideas de L. Diósi [35, 34] y Roger Penrose [87, 86, 88] acerca del colapso de la función de onda en Mecánica Cuántica. Estas propuestas señalan que el colapso de la función de onda es realmente un proceso dinámico, donde la *Gravedad* forza al sistema a tomar una realización específica de entre diversos estados, rompiendo en el proceso la evolución unitaria de la Mecánica Cuántica. Más aún, las ideas de Penrose sugieren que la teoría unificada de la Gravedad Cuántica requiere una modificación en la Mecánica Cuántica y no únicamente en la Gravedad como comúnmente se piensa.

La hipótesis de Penrose, sobre la manera en que la gravedad interviene en el auto-colapso, puede explicarse a grandes rasgos de la siguiente manera:

Consideremos un trozo de material en una superposición cuántica de encontrarse en dos lugares distintos. A cada lugar donde se encuentra el material, se le asocia un campo gravitacional estático producido por el mismo trozo de material que también se describe por un estado cuántico. El estado resultante es un estado enredado, esto es,

$$|\Psi\rangle = \mu|\psi\rangle|G_\psi\rangle + \lambda|\chi\rangle|G_\chi\rangle, \quad (4.1)$$

donde μ y λ son números complejos que representan la amplitud de probabilidad de que el trozo de material se encuentre en uno u otro lugar; los estados estacionarios $|\psi\rangle$ y $|\chi\rangle$ representan los 2 lugares alternos en los que se puede localizar al trozo de material; los estados $|G_\psi\rangle$ y $|G_\chi\rangle$ representan los estados cuánticos del campo gravitacional del trozo de material correspondiente al los lugares descritos por $|\psi\rangle$ y $|\chi\rangle$ respectivamente. Posteriormente, como se discute en [87], se encuentra que el estado $|\Psi\rangle$ es inestable (en analogía con una partícula inestable) y decae ó colapsa en una de los posibles alternativas. El tiempo de decaimiento T está caracterizado por

$$T = \frac{\hbar}{E_\Delta}, \quad (4.2)$$

donde E_Δ es la energía de interacción gravitacional entre las dos posibles alternativas descritas por $|\Psi\rangle$. Observamos que en este esquema, el decaimiento ó el colapso

de la función de onda $|\Psi\rangle$, en uno de los dos posibles estados, se produjo por la interacción gravitacional entre ellos, no hubo ningún observador o algún agente externo al sistema que colapsara la función de onda.

Tomando en cuenta la hipótesis del colapso de Penrose, el esquema que se propone en [89] para lidiar con el problema fundamental, puede desglosarse de la siguiente manera:

1. Separar al campo escalar inflacionario y a la métrica en un fondo más pequeñas perturbaciones.
2. A la perturbación del campo escalar se le asigna un tratamiento de campo cuántico evolucionando en el espacio-tiempo clásico de fondo (i.e., se aplica el formalismo de Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos), dicha evolución sigue una dinámica estándar, excepto cuando la gravedad (ó algún aspecto intrínseco al sistema) induce el colapso de un estado cuántico del campo.
3. El colapso se describe fenomenológicamente, sin ninguna referencia a un mecanismo físico en particular.
4. Las perturbaciones de la métrica se acoplan con los valores de expectación del campo cuántico de acuerdo con las ecuaciones semiclásicas de Einstein

$$G_{ab} = 8\pi G \langle \hat{T}_{ab} \rangle. \quad (4.3)$$

Debemos señalar que, durante el periodo que ocurre el colapso, resulta problemático el no poder definir la ecuación de conservación de energía, ya que

$$\nabla_a \langle \hat{T}^{ab} \rangle = \nabla_a \langle \Theta(t) | \hat{T}^{ab} | \Theta(t) \rangle \neq 0. \quad (4.4)$$

Lo anterior se debe básicamente a que el estado $|\Theta(t)\rangle$, durante el colapso, evoluciona de alguna manera no unitaria, hasta terminar en el estado de post-colapso. Cabe señalar que, estamos considerando a la evolución de los operadores y los estados bajo el esquema de Heisenberg antes y después del colapso, esto es, los operadores son dependientes del tiempo y los estados están fijos, sin embargo, durante el colapso (lo que identificaremos como la ‘interacción’) consideraremos el esquema de Interacción, es decir, es el estado el que cambia con el tiempo. Por lo que $\partial t |\Theta(t)\rangle$ no necesariamente es cero durante el colapso. Esta posible ruptura de la aproximación semiclásica se representa formalmente por la presencia de un término Q_{ab} , en las ecuaciones semiclásicas de Einstein, que es distinto de cero sólo durante el colapso

$$G_{ab} + Q_{ab} = 8\pi G \langle \hat{T}_{ab} \rangle. \quad (4.5)$$

En el Capítulo 3, mencionamos que a lo largo de este trabajo de tesis utilizaríamos la teoría de perturbaciones cosmológicas en una norma fija. El motivo por el cual trabajaremos con una norma particular (la longitudinal) y no con cantidades invariantes de norma, es debido a que, en el esquema de colapso, las perturbaciones de la métrica tienen una naturaleza distinta a las perturbaciones del campo escalar. La métrica se considera como una variable clásica (la cual describe de manera efectiva los grados de libertad más fundamentales de la teoría de gravedad-cuántica que creemos se encuentra detrás de dicha descripción), mientras que los campos de materia, específicamente las perturbaciones del inflatón, están descritas por la teoría cuántica de campos en espacios curvos. La elección de norma, implica que la coordenada temporal se asocia a una foliación específica del espacio-tiempo perturbado y, por tanto, con nuestra identificación de las hipersuperficies (de tiempo constante) correspondientes a aquellas asociadas con la incidencia de colapsos, —lo cual se considera como un proceso físico real—. Consecuentemente, la elección de norma, en realidad se vuelve una elección de hipersuperficies particulares asociadas al proceso físico detrás del colapso. Lo anterior nos lleva naturalmente a un aspecto problemático con la covarianza de la teoría fundamental, lo cual es un problema que afecta a todos los modelos de colapso conocidos, y en el escenario no-gravitacional se traduce en una incompatibilidad con la invariancia de Lorentz ó Poincare. Debemos reconocer que este es un problema genérico que aqueja a todos los modelos de colapso y es, sin duda, un problema abierto en la hipótesis del colapso. Sin embargo, creemos que su resolución está conectada con lo que denominamos el mecanismo de colapso de la función de onda (el cual emplearemos únicamente de manera efectiva). De hecho, desde nuestro punto de vista, creemos que la física detrás de la teoría fundamental, ayudará a relacionar el tratamiento cuántico de la gravedad con los problemas fundamentales que afligen a la teoría cuántica en general, particularmente a aquellos relacionados con el problema de la medición.

En la siguiente sección, basándonos en el trabajo [89], realizaremos un análisis más detallado donde se ilustra el formalismo utilizado al adoptar la propuesta del colapso.

4.5. Análisis detallado del esquema de colapso

El análisis expuesto en esta sección estará basado en la teoría de perturbaciones cosmológicas clásicas introducidas en el Capítulo 3. Esto es, separaremos a la métrica

y al campo escalar en una parte espacialmente homogénea a la que denominamos el fondo y una parte inhomogénea llamada “fluctuación”, i.e., el campo escalar se escribe $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, mientras que la métrica perturbada (en la norma longitudinal) se escribe como (3.53) .

Las ecuaciones que gobiernan al universo de fondo y al campo escalar homogéneo $\phi_0(\eta)$ son, de nuevo, la ecuación del campo escalar (3.51) y las ecuaciones de Friedmann (3.49) y (3.50).

Recordemos que de la teoría de perturbaciones clásicas obtuvimos el resultado $\Psi = \Phi$, el cual incorporaremos en las ecuaciones de Einstein (3.63) y (3.64). Fijando las condiciones de borde apropiadas, (3.64) se reduce a

$$\Psi' + \mathcal{H}\Psi = 4\pi G\phi_0'\delta\phi. \quad (4.6)$$

Substituyendo la expresión anterior en el lado izquierdo de (3.63) y notando que $4\pi G\phi_0'^2\Psi = 4\pi Ga^2(\rho + P)\Psi = (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Psi$ (donde la última igualdad se sigue de (3.50)) obtenemos

$$\nabla^2\Psi + \mu\Psi = 4\pi G(\omega\delta\phi + \phi_0'\delta\phi'), \quad (4.7)$$

donde $\mu \equiv \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'$ and $\omega \equiv 3\mathcal{H}\phi_0' + a^2\partial_\phi V$, y al utilizar la expresión para $\partial_\phi V$ que viene de (3.51), obtenemos $\omega = \mathcal{H}\phi_0' - \phi_0''$. La aproximación *slow-roll* en términos del tiempo cósmico está dada por: $\partial^2\phi_0/\partial t^2 \approx 0$. Es posible escribir esta aproximación en términos del tiempo conforme: $\phi_0'' - \mathcal{H}\phi_0' \approx 0$, esto es, $\phi_0'' \approx \mathcal{H}\phi_0'$. Así, la ecuación de movimiento para el campo escalar homogéneo en la aproximación *slow-roll* es

$$3\mathcal{H}\phi_0' + a^2\partial_\phi V \approx 0. \quad (4.8)$$

La ecuación (4.8) implica que $\omega \approx 0$. Por lo tanto (4.7) se reduce a

$$\nabla^2\Psi + \mu\Psi = 4\pi G\phi_0'\delta\phi'. \quad (4.9)$$

Por otra parte, la ecuación de evolución para la fluctuación del campo, obtenida de la acción (3.43) y utilizando la aproximación *slow-roll* para el potencial del campo, es

$$\delta\phi'' - \nabla^2\delta\phi + 2\mathcal{H}\delta\phi' = 0. \quad (4.10)$$

El siguiente paso consiste en cuantizar la teoría. Es necesario enfatizar que el

campo homogéneo ϕ_0 se describe de una manera clásica² y solamente cuantizaremos la fluctuación³ $\delta\phi$.

Cabe señalar que el proceso de cuantización, en el esquema de colapso, es significativamente distinto al enfoque tradicional, donde se cuantiza la variable v (3.88) que es una combinación de las perturbaciones de la métrica Ψ y de las fluctuaciones del campo escalar $\delta\phi$. Es decir, en el enfoque de colapso, la parte cuántica involucra únicamente a los campos de materia y no a las cantidades relacionadas con la geometría del espacio-tiempo.

Es conveniente trabajar con el campo auxiliar y introducido anteriormente $y \equiv a\delta\phi$, de esta manera (4.10), en su versión para operadores cuánticos, se reescribe como

$$\hat{y}'' - \left(\nabla^2 + \frac{a''}{a} \right) \hat{y} = 0. \quad (4.11)$$

El momento canónico conjugado a \hat{y} es $\hat{\pi} = \hat{y}' - \hat{y}a'/a$. Evitaremos distracciones innecesarias, debido a divergencias infrarrojas, por lo que consideraremos al sistema dentro una caja de lado L con condiciones de borde periódicas. Descomponiendo al campo y su momento conjugado en modos de Fourier tenemos

$$\hat{y}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{y}_{\mathbf{k}}(\eta), \quad (4.12a)$$

$$\hat{\pi}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta), \quad (4.12b)$$

donde el vector de onda satisface $k_i L = 2\pi n_i$ para $i = 1, 2, 3$. Los coeficientes del campo se escriben como: $\hat{y}_{\mathbf{k}}(\eta) \equiv y_k(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}} + \bar{y}_k(\eta)\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \equiv g_k(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}} + \bar{g}_k(\eta)\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger$. Las funciones $y_k(\eta)$ y $g_k(\eta)$ reflejan la elección del estado vacío. En nuestro caso, escogeremos, como es usual, el llamado vacío de Bunch-Davies (estudiado en el Capítulo 3), lo que resulta en

$$y_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{\eta k} \right) \exp(-ik\eta), \quad (4.13a)$$

²Por *clásico*, en este contexto, nos referimos a que el campo homogéneo de fondo $\phi_0(\eta)$ se toma como una descripción aproximada de la cantidad cuántica $\langle \psi | \hat{\phi}(x, \eta) | \psi \rangle$, donde el estado $|\psi\rangle$ corresponde al estado vacío de $\hat{\phi}(x, \eta)$.

³Recordemos que estamos considerando a la evolución de los operadores y los estados bajo el esquema de Heisenberg antes y después del colapso, esto es, los operadores son dependientes del tiempo y los estados están fijos, sin embargo, durante el colapso (lo que identificaremos como la ‘interacción’) consideraremos el esquema de Interacción, es decir, es el estado el que cambia con el tiempo.

$$g_k(\eta) = -i\sqrt{\frac{k}{2}} \exp(-ik\eta). \quad (4.13b)$$

El estado vacío correspondiente satisface $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ para todo \mathbf{k} , y fácilmente se observa que es homogéneo e isotrópico, lo cual se puede comprobar aplicando directamente los operadores de rotación o traslación (asociados con las hipersuperficies $\eta = \text{const.}$ del espacio-tiempo de fondo) al estado vacío. Como discutimos en la sección anterior, el auto-colapso opera de manera análoga a una ‘medición’ en el sentido tradicional de la Mecánica Cuántica, pero sin requerir a un observador ó apartado externo que pudiera referirse como el responsable de realizar dicha medición. Asumiremos que el auto-colapso ocurre de manera independiente para cada modo del campo. Esto es, asumimos que a un cierto tiempo η_k^c (de ahora en adelante nos referiremos a este tiempo particular como el *tiempo de colapso*), el estado de cada modo \mathbf{k} del campo, que inicialmente correspondía al estado vacío, cambia de manera espontánea a otro estado. El colapso auto-inducido, inspirado en las ideas de Penrose, parte de que la gravedad juega un papel importante en la física detrás del colapso de la función de onda y no requiere de agentes externos para producirse. Sin embargo, el esquema de colapso, como lo emplearemos en este trabajo de tesis, no propone, hasta este punto, un mecanismo físico concreto, aunque se esperaría que una teoría de la gravedad-cuántica contenga alguna explicación satisfactoria que nos brinde un mayor entendimiento de dicho mecanismo. Las motivaciones e ideas originales se discuten en gran detalle en las referencias [89, 103, 104, 105].

Siguiendo lo expuesto en [89] es conveniente descomponer el campo $\hat{y}_{\mathbf{k}}$ y su momento conjugado $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}$ en sus respectivas partes reales e imaginarias, las cuales son completamente Hermitianas $\hat{y}_{\mathbf{k}}(\eta) = \hat{y}_{\mathbf{k}}^R(\eta) + i\hat{y}_{\mathbf{k}}^I(\eta)$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) = \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R(\eta) + i\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I(\eta)$, donde

$$\hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(y_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)} + \bar{y}_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger(R,I)} \right), \quad (4.14a)$$

$$\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(g_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)} + \bar{g}_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger(R,I)} \right), \quad (4.14b)$$

con

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}), \quad \hat{a}_{\mathbf{k}}^I \equiv \frac{-i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{-\mathbf{k}}). \quad (4.15)$$

El conmutador de los operadores de aniquilación y creación, reales e imaginarios, es

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^R, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{R\dagger}] = L^3 (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}), \quad (4.16a)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^I, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{I\dagger}] = L^3 (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}). \quad (4.16b)$$

Para cualquier estado $|\Xi\rangle$ del campo \hat{y} , definimos las siguientes cantidades

$$d_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \equiv \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \rangle_{\Xi}, \quad (4.17a)$$

$$c_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \equiv \langle (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)})^2 \rangle_{\Xi}, \quad (4.17b)$$

$$e_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \equiv \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \rangle_{\Xi}. \quad (4.17c)$$

De esta manera, los valores de expectación de los modos del campo y su momento conjugado toman la forma

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} = \sqrt{2} \Re \left(y_k(\eta) d_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right), \quad (4.18a)$$

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} = \sqrt{2} \Re \left(g_k(\eta) d_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right), \quad (4.18b)$$

mientras que sus incertidumbres respectivas están dadas por

$$(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{\Xi}^2 = \Re \left(y_k^2(\eta) c_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right) + \frac{1}{2} |y_k(\eta)|^2 \left(L^3 + 2e_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right) - 2 \left[\Re \left(y_k(\eta) d_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right) \right]^2, \quad (4.19a)$$

$$(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{\Xi}^2 = \Re \left(g_k^2(\eta) c_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right) + \frac{1}{2} |g_k(\eta)|^2 \left(L^3 + 2e_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right) - 2 \left[\Re \left(g_k(\eta) d_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right) \right]^2, \quad (4.19b)$$

específicamente, para el estado vacío $|0\rangle$, se tiene, $d_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = c_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = e_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = 0$, y por tanto

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_0 = 0, \quad \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_0 = 0, \quad (4.20)$$

con las incertidumbres dadas por

$$\left(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \right)_0^2 = \frac{1}{2} |y_k(\eta)|^2 L^3, \quad (4.21a)$$

$$\left(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \right)_0^2 = \frac{1}{2} |g_k(\eta)|^2 L^3. \quad (4.21b)$$

Una vez que especificamos el valor de expectación de los modos del campo $\hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$, en el estado post-colapso $|\Xi\rangle$ evaluados al tiempo de colapso η_k^c ,

$|0\rangle \rightarrow |\Xi\rangle :$

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \equiv \langle \Xi | \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) | \Xi \rangle, \quad (4.22)$$

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \equiv \langle \Xi | \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) | \Xi \rangle,$$

es posible obtener la evolución de los valores de expectación para cualquier tiempo posterior al tiempo de colapso, asumiendo que no existió un colapso adicional. De hecho, comparando (4.22) con (4.18) obtenemos

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} = A(\eta, \eta_k^c) \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} + B(\eta, \eta_k^c) \langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi}, \quad (4.23a)$$

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} = C(\eta, \eta_k^c) \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} + D(\eta, \eta_k^c) \langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi}, \quad (4.23b)$$

donde A, B, C y D son funciones dependientes del tiempo y describen la evolución temporal del sistema cuántico desde el tiempo η_k^c hasta η . En particular, durante el regimen inflacionario, estas funciones toman la forma

$$A(\eta, \eta_k^c) = \cos(k\eta - k\eta_k^c) + \frac{\sin(k\eta - k\eta_k^c)}{k\eta_k^c}, \quad (4.24a)$$

$$B(\eta, \eta_k^c) = -k \sin(k\eta - k\eta_k^c), \quad (4.24b)$$

$$C(\eta, \eta_k^c) = \frac{\cos(k\eta - k\eta_k^c)}{k} \left(\frac{1}{k\eta} - \frac{1}{k\eta_k^c} \right) + \frac{\sin(k\eta - k\eta_k^c)}{k} \left(\frac{1}{k\eta \cdot k\eta_k^c} + 1 \right), \quad (4.24c)$$

$$D(\eta, \eta_k^c) = \cos(k\eta - k\eta_k^c) - \frac{\sin(k\eta - k\eta_k^c)}{k\eta}. \quad (4.24d)$$

Las ecuaciones (4.23) pueden escribirse en forma matricial, esto es,

$$\Upsilon(\eta, \Xi) = \mathbf{U}(\eta, \eta_k^c) \Upsilon(\eta_k^c, \Xi), \quad (4.25)$$

donde

$$\Upsilon(\eta, \Xi) \equiv \begin{pmatrix} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} \\ \langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} \end{pmatrix}, \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{U}(\eta, \eta_k^c) \equiv \begin{pmatrix} A(\eta, \eta_k^c) & B(\eta, \eta_k^c) \\ C(\eta, \eta_k^c) & D(\eta, \eta_k^c) \end{pmatrix}, \quad (4.26b)$$

$$\Upsilon(\eta_k^c, \Xi) \equiv \begin{pmatrix} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \\ \langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \end{pmatrix}. \quad (4.26c)$$

En esta notación, es claro que la matriz $\mathbf{U}(\eta, \eta_k^c)$ representa la evolución unitaria estándar⁴, para los valores de expectación de los campos, desde un tiempo η_k^c hasta un tiempo arbitrario η .

⁴Por evolución unitaria estándar nos referimos a la evolución tradicional dada por la Mecánica Cuántica aplicada a los estados u operadores, y no debe confundirse a la matriz $\mathbf{U}(\eta, \eta_k^c)$ con una matriz unitaria. No lo es, y no hay razón para que lo sea.

La evolución de las incertidumbres $(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{\Xi}^2$ y $(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{\Xi}^2$ depende del estado post-colapso específico. En particular, las cantidades $c_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $e_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ dependen del estado después del colapso. Esto es, una vez que especifiquemos el estado post-colapso (y por lo tanto, las cantidades $c_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $e_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ queden especificadas), podemos emplear (4.19) para obtener la evolución de las incertidumbres.

4.5.1. Esquemas de colapso cuántico

Un paso importante, dentro de la propuesta de colapso, consiste en especificar el esquema de colapso cuántico responsable de llevar al campo inflacionario hacia un estado inhomogéneo y anisotrópico. En trabajos previos [89, 32] se estudiaron tres esquemas de colapso distintos. Dos de ellos, llamados esquema *Independiente* y *Newtoniano* se expusieron en [89] y el tercero de ellos se presentó en [32]. A continuación realizaremos una breve descripción de cada uno de ellos.

Esquema de colapso Independiente

En este esquema, tanto el valor de expectación del campo $\hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$, como el valor de expectación del momento conjugado $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ en el estado post-colapso $|\Xi\rangle$ al tiempo η_k^c están distribuidos aleatoriamente en los respectivos rangos de las incertidumbres del estado vacío $|0\rangle$ y no se encuentran correlacionados estadísticamente. El valor de expectación considerado se selecciona de manera aleatoria como

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = x_{\mathbf{k},I}^{(R,I)} \sqrt{(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c))_0^2}, \quad (4.27)$$

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = x_{\mathbf{k},II}^{(R,I)} \sqrt{(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c))_0^2}. \quad (4.28)$$

en este esquema, el valor de expectación salta hacia un valor aleatorio $x_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ multiplicado por la incertidumbre del estado vacío del campo. Las variables aleatorias $x_{\mathbf{k},I}^{(R,I)}$, $x_{\mathbf{k},II}^{(R,I)}$ toman valores entre -1 y 1 , además están distribuidas de acuerdo a una Gaussiana centrada en cero con dispersión uno (normalizada), y no están correlacionadas estadísticamente, lo que explica la naturaleza del nombre del esquema. En otras palabras, ignoramos la correlación natural que existe entre los campos en el estado pre-colapso.

Esquema de colapso Newtoniano

La motivación en este esquema se basa en la observación que en la ecuación de tipo Poisson (4.9), únicamente aparece el valor de $\delta\phi' = a^{-1}\pi$. Por lo tanto, siguiendo las ideas de Penrose respecto a las incertidumbres cuánticas que se heredarían al potencial Newtoniano provenientes de las incertidumbres cuánticas de los campos de materia, como los factores fundamentales responsables de provocar el colapso, se considera un esquema en el que ‘solamente $\hat{\pi}^{(R,I)}$ colapsa’, manteniendo el valor de expectación de $\hat{y}^{(R,I)}$ sin modificación

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = 0, \quad (4.29)$$

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = x_{\mathbf{k},II}^{(R,I)} \sqrt{\left(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \right)_0^2}. \quad (4.30)$$

Al igual que en el esquema anterior, $x_{\mathbf{k},II}^{(R,I)}$ representa una variable aleatoria Gaussiana centrada en cero con dispersión uno.

El esquema de colapso de Wigner

El ultimo esquema de colapso, estudiado detalladamente en [32, 31] tiene por objetivo tomar en cuenta la correlación existente en el estado pre-colapso entre $\hat{y}^{(R,I)}$ y $\hat{\pi}^{(R,I)}$ y caracterizarla en términos de la función de Wigner. La función de Wigner del estado vacío de cada modo del campo es una función Gaussiana bi-dimensional. Este hecho se utiliza para modelar el colapso resultante del campo cuantico. La suposición consiste en que, a un cierto tiempo η_k^c , la parte del estado que caracteriza al modo k se colapsará, llevándolo hacia un nuevo estado en el cual los valores de expectación de los campos tomarán la forma:

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = x_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \Lambda_k \cos \Theta_k, \quad (4.31)$$

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = x_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \Lambda_k k \sin \Theta_k, \quad (4.32)$$

donde $x_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ es una variable aleatoria, caracterizada por una distribución Gaussiana centrada en cero con dispersion uno. Λ_k está dada por el semi-eje mayor de la elipse que caracteriza a la función Gaussiana bi-dimensional (la elipse corresponde a la frontera de la region en el ‘espacio fase’ donde la función de Wigner tiene magnitud mayor que 1/2 de su valor máximo), y Θ_k es el ángulo entre dicho eje y el eje $\hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$. Las cantidades Λ_k y Θ_k , en términos de η_k^c , se expresan como:

$$\Lambda_k = \frac{4\eta_k^c \sqrt{\hbar L^3 k}}{\sqrt{1 + 5(k\eta_k^c)^2 - \sqrt{1 + 10(k\eta_k^c)^2 + 9(k\eta_k^c)^4}}}, \quad (4.33)$$

$$2\Theta_k = \arctan\left(\frac{4k\eta_k^c}{1 - 3(k\eta_k^c)^2}\right). \quad (4.34)$$

En los siguientes capítulos, emplearemos la propuesta de colapso, en situaciones específicas, y obtendremos nueva información sobre sus propiedades.

Capítulo 5

El *esquema de colapso* y la amplitud del espectro primordial

Una de las principales motivaciones del trabajo expuesto en este capítulo consistía en estudiar la hipótesis presentada en trabajos anteriores [89, 103, 105, 104], en la cual se planteaba que el esquema de colapso podría resolver el problema de ajuste-fino del potencial inflacionario.

El problema de ajuste fino del potencial, se puede apreciar del hecho que la amplitud de las perturbaciones es proporcional a V/ϵ . Este es un resultado incómodo debido a que, para obtener un espectro compatible con los datos observacionales, el enfoque tradicional requiere que el parámetro *slow-roll* ϵ sea, por un lado lo suficientemente “pequeño” (aproximadamente 10^{-2} en los modelos más populares [11]) para producir un espectro plano, y por otro, tiene que ser suficientemente “grande” para asegurar que las perturbaciones sean tan “pequeñas” (10^{-5}) como lo indican las observaciones. Para lidiar con este problema hay que recurrir a un ajuste fino de la escala de energía del potencial inflacionario.

Por otra parte, en el esquema de colapso, es posible encontrar un conjunto particular de características para el colapso que evitarían la necesidad de un ajuste particular. Esto es, el esquema de colapso admite un modelo específico para el colapso el cual daría como resultado un espectro cuyo comportamiento dependería de ϵ en la forma adecuada: si ϵ disminuye el espectro se vuelve más plano y pequeño. Sin embargo, como mostraremos en este mismo capítulo, no es un aspecto genérico del esquema de colapso, y en la mayoría de los casos la predicción teórica será la misma que el enfoque tradicional V/ϵ . Hasta el momento de escribir esta tesis, no existe un mecanismo natural que favoreciera las características particulares mencionadas, y el único camino de obtener tal comportamiento parece involucrar un ajuste de los

parámetros del colapso con las características de la época de recalentamiento, en lo que podría denominarse, un ajuste teleológico¹.

En la literatura se pueden encontrar diversas propuestas para lidiar con el problema del ajuste-fino: Por ejemplo, en el contexto de inflación híbrida, donde se consideran dos campos escalares, el problema parece resolverse [67] (véase también la página 216 de la referencia [63]), sin embargo, reaparece cuando se considera el modelo de inflación híbrida supersimétrica [21]. Otras propuestas [20, 28] ofrecen una resolución en el contexto de Inflación de Branas. De hecho, existen otras propuestas en diferentes contextos inflacionarios [51, 74, 75]. Todas las propuestas anteriores involucran suposiciones importantes, como asumir dimensiones extra ó multiplicidad de campos, sin embargo, a diferencia de la propuesta del colapso, ninguna de ellas se ocupa de los problemas conceptuales del paradigma inflacionario.

En este capítulo revisaremos detalladamente el procedimiento para obtener una estimación de la magnitud de las perturbaciones en el esquema de colapso. Los resultados que presentaremos corresponden a una descripción más realista que la expuesta en trabajos previos [89, 32] principalmente porque tomaremos en cuenta la transición entre las épocas cosmológicas, es decir, obtendremos la amplitud de las perturbaciones en la misma era cosmológica que el enfoque tradicional. Recordemos que en el paradigma estándar, se obtiene una expresión para el espectro de potencias que es proporcional a V/ϵ (3.125). A continuación, expondremos el estudio detallado para obtener la amplitud de las perturbaciones en el esquema de colapso.

5.1. Argumentos Anteriores.

Al inicio de este capítulo, mencionamos que una de nuestras motivaciones para encontrar la amplitud de las fluctuaciones bajo el esquema del colapso, era estudiar la posibilidad de lidiar con el problema de ajuste fino. En el enfoque estándar, es posible rastrear el origen del problema al hecho de que, durante la transición del regimen inflacionario hacia la época dominada por radiación, el espectro de las fluctuaciones sufrió una gran amplificación. Siendo más precisos, empleando el análisis que presentamos en el Capítulo 3, el hecho de que \mathcal{P}_Ψ sea proporcional a $V/M_P^4\epsilon$ puede rastrearse al comportamiento de $u_k(\eta)$ a tiempos posteriores a la época inflacionaria, lo cual se puede apreciar en (3.123), i.e., es proporcional a $|\beta_k|^2$ que a su vez es directamente proporcional a $V/M_P^4\epsilon$. Por lo tanto, el resultado correspondiente a

¹El término teleología proviene de los dos términos griegos *Télos* (fin, meta, propósito) y *Lógos* (razón, explicación). Así pues, teleología puede ser traducido como *razón de algo en función de su fin, o la explicación que se sirve de propósitos o fines*.

la amplitud del espectro, está completamente ligado al comportamiento de $u_k(\eta)$ en la aproximación de onda larga durante la época dominada por radiación, la cual se considera como la época donde se imprimen las inhomogeneidades en el CMB, y a las condiciones bajo las cuales se obtienen las constantes de integración α_k y β_k durante el llamado “cruce del horizonte” (caracterizado en (3.117), (3.118), y (3.119)).

Con el objetivo de entender detalladamente la naturaleza del factor por el cual $\Psi_k(\eta)$ se amplifica durante la transición, enfocaremos nuestra atención en la cantidad ζ (3.78) introducida previamente en el Capítulo 3. Recordemos que la definición de ζ viene dada por:

$$\zeta \equiv \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^{-1} \Psi' + \Psi}{1 + w} + \Psi, \quad (5.1)$$

donde $w \equiv P/\rho$. En la sección 3.6.3, mostramos que, para escalas “mayores que el horizonte” y para “perturbaciones adiabáticas”, la cantidad ζ es esencialmente constante, independiente del régimen cosmológico y de la naturaleza de la materia dominante.

La conservación de ζ durante la transición de la época inflacionaria a la época dominada por radiación, se puede emplear para obtener una relación entre los valores del potencial Newtoniano durante los regímenes mencionados ($\Psi_k^{inf}(\eta)$ y $\Psi_k^{rad}(\eta)$)

$$\zeta^{inf} = \zeta^{rad} \quad \Rightarrow \quad \Psi_k^{inf} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{w_{inf} + 1} \right) + 1 \right] = \frac{3}{2} \Psi_k^{rad}, \quad (5.2)$$

donde, para obtener el lado derecho de (5.2) utilizamos la ecuación de estado $P = \rho/3$, y el lado izquierdo se obtuvo empleando la ecuación de estado $P = w_{inf} \rho$ con $w_{inf} + 1 = \phi_0'^2/a^2 \rho$. Cabe señalar que el potencial Newtoniano también presenta un comportamiento constante (para escalas mayores que el radio de Hubble) tanto en la época inflacionaria como en la época dominada por radiación, por lo que se utilizó en ambos lados de la ecuación que $\Psi_k' \simeq 0$; aunque Ψ_k es constante en la época inflacionaria, es distinto a la constante en la época dominada por radiación, esto es debido a que durante la transición de épocas cosmológicas Ψ_k no es constante. Finalmente, basándonos en la validez de la aproximación *slow-roll* durante el régimen inflacionario $\phi_0'^2/a^2 = \frac{2}{3} V \epsilon$, la expresión (5.2) se transforma en

$$\Psi_k^{rad} = \frac{2}{3} \frac{\Psi_k^{inf}}{\epsilon}. \quad (5.3)$$

Notemos las diferencias entre el espectro de potencias obtenido a diferentes épocas cosmológicas

$$\mathcal{P}_\Psi^{inf}(k, \eta) = \frac{k^3}{4\pi^2} \epsilon^2 |\beta_k|^2, \quad \mathcal{P}_\Psi^{rad}(k, \eta) = \frac{k^3}{4\pi^2} \frac{4}{9} |\beta_k|^2, \quad (5.4)$$

y dado que $|\beta_k|^2 \propto k^{-3} V / M_P^4 \epsilon$ la expresión anterior implica que

$$\mathcal{P}_\Psi^{inf}(k, \eta) \propto \frac{V \epsilon}{M_P^4}, \quad \mathcal{P}_\Psi^{rad}(k, \eta) \propto \frac{V}{\epsilon M_P^4}. \quad (5.5)$$

Consideremos ahora el mismo análisis pero trabajando con la hipótesis de colapso. La diferencia fundamental en nuestro enfoque, es que existe una mayor libertad intrínseca, que va más allá de la especificación del conjunto de campos y del potencial. En nuestro esquema es necesario especificar el tiempo de colapso y el estado post-colapso, lo cual pareciera sugerir que en el esquema de colapso, se podría prevenir que el potencial Newtoniano Ψ_k fuera amplificado durante la transición del regimen inflacionario hacia la época dominada por radiación. En los artículos [89, 103, 105, 104] se realizó un análisis preliminar de esta posibilidad que consistió en analizar el comportamiento de la cantidad ζ . A continuación presentamos un resumen de dicho análisis.

Durante la época inflacionaria, la expresión (5.1) puede reescribirse (empleando $\delta G_i^0 = 8\pi G \delta T_i^0$ en su versión semi-clásica junto con $\rho + P = \phi_0'^2 / a^2$ y $1 + w = 8\pi G \phi_0'^2 / 3\mathcal{H}^2$) como:

$$\zeta_{inf} = \Psi_{inf} + \frac{\mathcal{H}}{\phi_0'} \langle \hat{\delta}\phi(\eta) \rangle_\Theta, \quad (5.6)$$

donde al campo $\delta\phi$ lo reemplazamos por el valor de expectación de su correspondiente operador, evaluado en el estado post-colapso $|\Theta\rangle$. Desde luego, estamos trabajando con valores de expectación cuánticos, y podrían surgir preocupaciones respecto a la validez de utilizar propiedades derivadas de las correspondientes cantidades en el mundo clásico. Sin embargo, sabemos que la evolución dinámica dada por los esquema de Schrödinger ó Heisenberg implica que, para este sistema, los valores de expectación siguen las mismas ecuaciones de movimiento que sus contrapartes clásicas (Teorema de Ehrenfest [95]). No obstante, es cierto que la evolución, específicamente durante el colapso, no se da de una manera tan suave, sin embargo, dado que nos evocaremos al comportamiento de las cantidades a tiempos tardíos (i.e., posteriores a la época de recalentamiento), y asumiendo que el colapso ocurre durante la época inflacionaria, parecería justificable el obtener conclusiones empleando el comportamiento clásico de ζ .

Asumiendo que el estado post-colapso $|\Theta\rangle$, es tal que $\langle \hat{\delta}\phi(\eta_k^c) \rangle = 0$ (como es el caso del esquema Newtoniano introducido en 4.5.1), y utilizando el hecho de que ζ es una cantidad constante (para modos con $k\eta \ll 1$) se infiere que

5.2 El espectro de las inhomogeneidades dentro del marco del colapso 97

$$\zeta_{inf} = \Psi_{inf}. \quad (5.7)$$

Durante la época dominada por radiación, la expresión para ζ que se obtiene de (5.1) y considerando $w = 1/3$ junto con $\Psi \simeq \text{const.}$ para modos fuera del horizonte, es

$$\zeta_{rad} = \frac{3}{2}\Psi_{rad}. \quad (5.8)$$

Empleando la conservación de ζ , es posible obtener una relación entre Ψ_{inf} y Ψ_{rad} dentro del marco del colapso ((5.7) y (5.8)):

$$\zeta^{rad} = \zeta^{inf} \quad \Rightarrow \quad \Psi_k^{rad} = \frac{2}{3}\Psi_k^{inf}. \quad (5.9)$$

Por lo tanto, este ultimo resultado indica que en el enfoque de colapso, la amplitud de la métrica se “amplifica”, durante la transición del regimen inflacionario a la época dominada por radiación, únicamente por un factor de $2/3$. Este resultado difiere drásticamente del que se obtiene en el enfoque tradicional ya que, en ese caso, la amplificación de la perturbación de la métrica, durante la transición, es de $1/\epsilon$. En la ausencia de tal amplificación, la amplitud final del espectro sería simplemente proporcional a $V\epsilon/M_P^4$. En la siguiente sección realizaremos un estudio más cuidadoso y veremos como esta feliz conclusión no es del todo cierta. Sin embargo, podemos adelantar que la razón por la cual la relación (5.9) no es del todo válida es debido a que la expresión para ζ evaluada al tiempo de colapso, y tomando en cuenta el esquema en el que $\langle \delta\hat{\phi}(\eta_k^c) \rangle = 0$, no contiene información del regimen $k \ll \mathcal{H}$, esto es, el regimen donde la cantidad ζ es una cantidad constante. Dicho de otro modo el valor de ζ al tiempo de colapso no es igual al valor de ζ para modos mayores que el radio de Hubble. Por lo tanto no podemos usar el valor de ζ al tiempo de colapso para cualquier otro tiempo de la época inflacionaria.

5.2. El espectro de las inhomogeneidades dentro del marco del colapso

En el resto de este capítulo nos enfocaremos al esquema de colapso particular² dado por (5.10) y (5.11) debido a que, como veremos más adelante, contiene las características necesarias para obtener la amplitud del espectro,

²El esquema de colapso que utilizaremos en esta sección es en realidad muy parecido al esquema de colapso independiente 4.5.1 que presentamos en el Capítulo 4

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta_k^c) \rangle_{\Theta} = \lambda_{k,1} x_{k,1}^{R,I} \sqrt{(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})_0^2} = \lambda_{k,1} x_{k,1}^{R,I} |y_k(\eta_k^c)| \sqrt{L^3/2}, \quad (5.10)$$

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta_k^c) \rangle_{\Theta} = \lambda_{k,2} x_{k,2}^{R,I} \sqrt{(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})_0^2} = \lambda_{k,2} x_{k,2}^{R,I} |g_k(\eta_k^c)| \sqrt{L^3/2}, \quad (5.11)$$

donde $\lambda_{k,1}$ y $\lambda_{k,2}$ representan parámetros reales (i.e., $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2} \in \mathcal{R}$); η_k^c representa el tiempo de colapso para el modo k y $x_{k,1}^{R,I}$, $x_{k,2}^{R,I}$ se seleccionan de manera aleatoria de una distribución Gaussiana centrada en cero con dispersion uno. Debemos enfatizar que nuestro universo corresponde a una sola realización de estas variables aleatorias, y por tanto cada una de estas cantidades posee un valor específico.

Las ecuaciones semi-clásicas de Einstein perturbadas a primer orden, en particular (4.6) y (4.9) evaluadas al tiempo de colapso, se transforman, después de realizar una descomposición en modos de Fourier, en

$$\Psi'_k(\eta_k^c) + \mathcal{H}\Psi_k(\eta_k^c) = 4\pi G \frac{\phi'_0}{a} \langle \hat{y}_k(\eta_k^c) \rangle, \quad (5.12)$$

$$-k^2 \Psi_k(\eta_k^c) + \mu \Psi_k(\eta_k^c) = 4\pi G \frac{\phi'_0}{a} \langle \hat{\pi}_k(\eta_k^c) \rangle. \quad (5.13)$$

Es fácil notar que, **antes** del colapso, el valor de expectación en el lado derecho de (5.12) y (5.13) es exactamente cero, esto es, el universo es **homogéneo e isotrópico** (a la escala correspondiente) y, sólo es **después** del colapso cuando nacen las inhomogeneidades en la métrica.

Las expresiones (5.12) y (5.13) se obtuvieron a partir de las ecuaciones de Einstein con componentes $\delta G_0^0 = 8\pi G \delta T_0^0$ y $\delta G_i^0 = 8\pi G \delta T_i^0$. Un resultado bien conocido es que estas ecuaciones en particular, no son en realidad ecuaciones de movimiento, sino ecuaciones de constricción. La ecuación de movimiento viene de la ecuación con componentes $\delta G_j^i = 8\pi \delta T_j^i$ la cual, después de emplear la ecuación de constricción (3.63) y durante el periodo inflacionario, se representa por (3.66) (ó equivalentemente por (3.68)).

Por consiguiente, es posible utilizar las ecuaciones de constricción (5.12) y (5.13), para obtener los datos iniciales correspondientes a (3.66), i.e., (5.12) y (5.13) nos permiten especificar $\Psi(\eta_k^c)$ y $\Psi'(\eta_k^c)$ que servirán de condiciones iniciales para (3.66). Por lo tanto, suponiendo que el tiempo de colapso η_k^c ocurre durante los primeros momentos del regimen inflacionario, para el cual los modos de interés satisfacen $k^2 \gg \epsilon \mathcal{H}^2(\eta_k^c) = \mu \Rightarrow |k\eta_k^c| \gg \epsilon$, entonces (5.13) nos arroja la condición inicial

$$\Psi(\eta_k^c) = -4\pi G \frac{\phi'_0(\eta_k^c)}{a(\eta_k^c)k^2} \langle \hat{\pi}_k(\eta_k^c) \rangle. \quad (5.14)$$

5.2 El espectro de las inhomogeneidades dentro del marco del colapso 99

Sustituyendo (5.14) en (5.12) encontramos la segunda condición inicial

$$\Psi'_k(\eta_k^c) = 4\pi G \frac{\phi'_0(\eta_k^c)}{a(\eta_k^c)} \left[\langle \hat{y}_k(\eta_k^c) \rangle + \frac{\mathcal{H}_c}{k^2} \langle \hat{\pi}_k(\eta_k^c), \rangle \right], \quad (5.15)$$

donde \mathcal{H}_c denota \mathcal{H} evaluado al tiempo de colapso η_k^c .

Una vez obtenidas las condiciones iniciales, procederemos a resolver (3.66) ó, equivalentemente, (3.68):

$$u''_k(\eta) + \left(k^2 - \frac{\theta''}{\theta} \right) u_k(\eta) = 0.$$

Durante la inflación, la cantidad θ se puede aproximar por $\theta = 1/\sqrt{2\epsilon}M_{Pa}$. Considerando que en la aproximación *slow-roll* se cumple que $1 \gg \epsilon \approx \text{const.}$, encontramos

$$\frac{\theta''}{\theta} = \epsilon \mathcal{H}^2 = \frac{\epsilon}{(1-\epsilon)^2 \eta^2} = \frac{\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)}{\eta^2} \approx \frac{\epsilon}{\eta^2}, \quad (5.16)$$

donde en la segunda igualdad utilizamos la expresión explícita para $\mathcal{H} = -1/[\eta(1-\epsilon)]$ (véase Apéndice B). Consecuentemente, (3.68) toma la forma

$$u''_k(\eta) + \left(k^2 - \frac{\epsilon}{\eta^2} \right) u_k(\eta) = 0. \quad (5.17)$$

La solución general de (5.17) es

$$u_k(\eta) = C_1 \sqrt{-\eta} J_\nu(-k\eta) + C_2 \sqrt{-\eta} Y_\nu(-k\eta), \quad (5.18)$$

donde $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\epsilon}$ y J_ν , Y_ν corresponden a las funciones de Bessel de primer y segundo tipo respectivamente. Utilizando la definición de $u \equiv \Psi/(4\pi G\sqrt{\rho+p})$, obtenemos la expresión exacta para el potencial Newtoniano durante el regimen inflacionario:

$$\Psi_k^{inf}(\eta) = \frac{s}{a} \left(C_1 \sqrt{-\eta} J_\nu(-k\eta) + C_2 \sqrt{-\eta} Y_\nu(-k\eta) \right), \quad (5.19)$$

donde $s \equiv 4\pi G\phi'_0$. Después de imponer las condiciones iniciales (5.14) y (5.15) a la solución general, y utilizando el esquema de colapso dado por (5.10) y (5.11), encontramos a las constantes C_1 y C_2

$$\begin{aligned}
C_1 = & \left(\frac{L}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi\sqrt{k}}{4} \left\{ \lambda_{k,1}(x_{k,1}^R + ix_{k,1}^I) \sqrt{|z_k|} Y_\nu(|z_k|) + \right. \\
& \left. + \lambda_{k,2}(x_{k,2}^R + ix_{k,2}^I) \left[\left(\frac{1}{1-\epsilon} - \nu - \frac{1}{2} \right) \frac{Y_\nu(|z_k|)}{\sqrt{|z_k|}} + \sqrt{|z_k|} Y_{\nu+1}(|z_k|) \right] \right\}, \tag{5.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & -\left(\frac{L}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi\sqrt{k}}{4} \left\{ \lambda_{k,1}(x_{k,1}^R + ix_{k,1}^I) \sqrt{|z_k|} J_\nu(|z_k|) + \right. \\
& \left. + \lambda_{k,2}(x_{k,2}^R + ix_{k,2}^I) \left[\left(\frac{1}{1-\epsilon} - \nu - \frac{1}{2} \right) \frac{J_\nu(|z_k|)}{\sqrt{|z_k|}} + \sqrt{|z_k|} J_{\nu+1}(|z_k|) \right] \right\}, \tag{5.21}
\end{aligned}$$

donde $z_k \equiv k\eta_k^c$ y el factor de Hubble comóvil al tiempo de colapso es $\mathcal{H}_c = -1/(1-\epsilon)\eta_k^c = k/(1-\epsilon)|z_k|$.

Puesto que asumimos que el tiempo de colapso ocurre durante las primeras etapas del periodo inflacionario, el valor de z_k se encuentra dentro del rango $-\infty < z_k \ll k\eta_r$ (recordemos que en el Apéndice B obtuvimos $\eta_r \approx -10^{-22}$ Mpc, por lo tanto $z_k < 0$).

El resultado que aparece en (5.19) representa la evolución dinámica de $\Psi_k(\eta)$ durante el régimen inflacionario bajo la hipótesis del colapso. Para obtener un ‘espectro de potencias’ y compararlo con las observaciones, estrictamente no podemos utilizar el $\Psi_k(\eta)$ que aparece en (5.19), debido a que las observaciones (i.e., las fluctuaciones de la temperatura) se relacionan con el valor de $\Psi_k(\eta)$ durante la última superficie de dispersión y no con el comportamiento del potencial Newtoniano durante el régimen inflacionario, el cual viene dado por (5.19). Por lo tanto, un análisis más realista involucra el comportamiento de $\Psi_k(\eta)$ durante todas las épocas cosmológicas anteriores al tiempo del desacople. Así, el siguiente paso es obtener $\Psi_k(\eta)$ durante la época dominada por radiación, la cual es posterior al régimen inflacionario.

Para obtener el valor del potencial Newtoniano durante la época dominada por radiación, debemos conectar esta época con la época anterior. Este es el punto donde nuestro análisis se desvía del tradicional, ya que en nuestro caso, la métrica contiene inhomogeneidades y anisotropías (no cuánticas) mucho antes de que la inflación llegue a su fin. El llamado proceso de recalentamiento, donde el inflatón decae a partículas de materia ordinaria y fotones (incluyendo muy probablemente partículas de materia oscura) es un proceso complicado y no entendido en la actualidad, donde

5.2 El espectro de las inhomogeneidades dentro del marco del colapso

posiblemente existió una gran creación de entropía y otras complejidades. Estas complicaciones generalmente se ignoran en la literatura y nosotros procederemos de igual manera.

Después de que el periodo inflacionario llega a su fin, la evolución dinámica de las perturbaciones de la métrica, estará conectada a la densidad de energía de la radiación, las ecuaciones que dictan la evolución son, naturalmente, las ecuaciones de Einstein. Recordemos que (3.58), la cual viene dada por

$$\Psi'' - c_s^2 \nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Psi' + [(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s^2))\Psi] = 4\pi G a^2 \tau \delta S,$$

describe justamente la evolución de Ψ para cualquier época cosmológica (véase sección 3.6.1). En un universo dominado por radiación, la ecuación de estado es $P = \rho/3$, por consiguiente $c_s^2 = 1/3$ y $\tau \delta S = 0$. Una vez, conocida la ecuación de estado, el factor de escala se calcula utilizando las ecuaciones para el fondo, obteniendo $a(\eta) = C_{rad}(\eta - \eta_r) + a_r$ donde: $C_{rad}^2 \equiv \frac{8}{3}\pi G \rho a^4$ es una constante; η_r es el valor del tiempo conforme al cual comienza la época dominada por radiación; a_r es el valor del factor de escala evaluado en η_r con $\eta_r < \eta_{eq}$ donde η_{eq} es el valor del tiempo conforme al cual se da la igualdad entre materia y radiación.

En base a los argumentos anteriores, tomaremos el valor de η_r , correspondiente al instante (en tiempo conforme) en que termina la inflación, igual al instante en que comienza la época dominada por radiación.

En la época dominada por radiación, la versión para modos de Fourier de (3.58), toma la forma

$$\Psi_k'' + \frac{4}{\eta - \eta_r + D_{rad}} \Psi_k' + \frac{1}{3} k^2 \Psi_k = 0, \quad (5.22)$$

donde $D_{rad} \equiv a_r/C_{rad}$. La solución analítica a (5.22) es

$$\begin{aligned} \Psi_k^{rad}(\eta) = & \frac{3}{(k\eta - \xi_k)^2} \left[C_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{(k\eta - \xi_k)} \sin \left(\frac{k\eta - \xi_k}{\sqrt{3}} \right) - \cos \left(\frac{k\eta - \xi_k}{\sqrt{3}} \right) \right) \right. \\ & \left. + C_4 \left(\frac{\sqrt{3}}{(k\eta - \xi_k)} \cos \left(\frac{k\eta - \xi_k}{\sqrt{3}} \right) + \sin \left(\frac{k\eta - \xi_k}{\sqrt{3}} \right) \right) \right], \quad (5.23) \end{aligned}$$

donde $\xi_k \equiv k\eta_r - kD_{rad}$. Observamos de (5.23) que $\Psi_k(\eta)$ contiene el denominador $(k\eta - \xi_k)^{-1}$, lo que podría provocar que $\Psi_k(\eta)$ se volviera singular, sin embargo, notamos que este denominador es esencialmente, $C_{rad}/ka(\eta)$, por lo que la posibilidad de una divergencia es nula debido al hecho de que $a(\eta) \neq 0$, y además es una función creciente.

Las constantes C_3 y C_4 las obtendremos del valor de $\Psi(\eta)$ y $\Psi'(\eta)$ evaluadas al tiempo de la transición η_r del regimen inflacionario hacia la época dominada por radiación. Para ello, aproximaremos continuamente el cambio de la ecuación de estado por un salto brusco debido a que no conocemos cual es la ecuación de estado exacta al momento de la transición, esto es, no podemos conocer la solución exacta de (3.58) durante la transición. Por lo tanto, asumiremos que $P^{inf}(\rho^{inf}(\eta_r)) = P^{rad}(\rho^{rad}(\eta_r))$. Esto nos lleva a la aproximación $\Psi^{inf}(\eta_r) = \Psi^{rad}(\eta_r)$, la cual es de esperarse debido a que Ψ , el cual representa las perturbaciones en la métrica, se piensa que es continuo durante la transición. Las condiciones para unir Ψ' en la época de la transición, las derivaremos de la ecuación de movimiento para u ((3.60), asumiendo perturbaciones adiabáticas), la cual puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\left[\theta^2 \left(\frac{u_k}{\theta} \right)' \right]' = -k^2 c_s^2 \theta u_k. \quad (5.24)$$

Integrando (5.24) desde $\eta_r - \delta$ a $\eta_r + \delta$, donde δ es un número real positivo y muy pequeño en términos absolutos, obtenemos

$$\left[\theta_{rad}^2 \left(\frac{u_{k,rad}}{\theta_{rad}} \right)' \right] \Big|_{\eta_r+\delta} - \left[\theta_{inf}^2 \left(\frac{u_{k,inf}}{\theta_{inf}} \right)' \right] \Big|_{\eta_r-\delta} = -k^2 \int_{\eta_r-\delta}^{\eta_r+\delta} c_s^2 \theta u_k d\eta. \quad (5.25)$$

Tomando el limite $\delta \rightarrow 0$, las condiciones para pegar a Ψ_k en la transición son

$$\theta_{inf}^2 \left(\frac{u_{k,inf}}{\theta_{inf}} \right)' \Big|_{\eta=\eta_r} = \theta_{rad}^2 \left(\frac{u_{k,rad}}{\theta_{rad}} \right)' \Big|_{\eta=\eta_r}, \quad \Psi_k^{inf}(\eta_r) = \Psi_k^{rad}(\eta_r). \quad (5.26)$$

Notemos que las condiciones anteriores son equivalentes a las condiciones Deruelle-Mukhanov [33]. A partir de estas condiciones, podemos encontrar el valor de las constantes C_3 y C_4

$$C_3 = - \left[\left(\frac{D_k^2}{3} - 3 \right) \cos \left(\frac{D_k}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{3} D_k \sin \left(\frac{D_k}{\sqrt{3}} \right) \right] A(k\eta_r, z_k) + \left[\frac{D_k}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{D_k}{\sqrt{3}} \right) + \frac{D_k^2}{3} \sin \left(\frac{D_k}{\sqrt{3}} \right) \right] \frac{\sqrt{3}}{k} B(k\eta_r, z_k), \quad (5.27)$$

$$C_4 = \left[\left(\frac{D_k^2}{3} - 3 \right) \sin \left(\frac{D_k}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt{3} D_k \cos \left(\frac{D_k}{\sqrt{3}} \right) \right] A(k\eta_r, z_k) - \left[\frac{D_k}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{D_k}{\sqrt{3}} \right) - \frac{D_k^2}{3} \cos \left(\frac{D_k}{\sqrt{3}} \right) \right] \frac{\sqrt{3}}{k} B(k\eta_r, z_k), \quad (5.28)$$

5.2 El espectro de las inhomogeneidades dentro del marco del colapso

donde

$$\begin{aligned}
A(k\eta_r, z_k) \equiv & \frac{-s\pi}{4a} \left(\frac{L}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \lambda_{k,1}(x_{k,1}^R + ix_{k,1}^I) \left(1 + \frac{1}{z_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{|z_k|} \left[J_\nu(|z_k|) Y_\nu(-k\eta_r) - \right. \right. \\
& \left. \left. - Y_\nu(|z_k|) J_\nu(-k\eta_r) \right] + \lambda_{k,2}(x_{k,2}^R + ix_{k,2}^I) \left[- \left(\sqrt{|z_k|} Y_{\nu+1}(|z_k|) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{1-\epsilon} - \nu - \frac{1}{2} \right) \frac{Y_\nu(|z_k|)}{\sqrt{|z_k|}} \right) J_\nu(-k\eta_r) + \left(\left(\frac{1}{1-\epsilon} - \nu - \frac{1}{2} \right) \frac{J_\nu(|z_k|)}{\sqrt{|z_k|}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{|z_k|} J_{\nu+1}(|z_k|) \right) Y_\nu(-k\eta_r) \right] \left. \right\} \sqrt{-k\eta_r}, \tag{5.29}
\end{aligned}$$

$$B(k\eta_r, z_k) \equiv \frac{2}{\epsilon} \left[-k \frac{\partial A(-k\eta_r, z_k)}{\partial(-k\eta_r)} + \mathcal{H}(\eta_r) A(-k\eta_r, z_k) \right], \tag{5.30}$$

y $D_k \equiv kD_{rad}$. La cantidad $A(k\eta_r, z_k)$ puede aproximarse, considerando que si $\epsilon \ll 1$ entonces $\nu \approx \frac{1}{2}$, por

$$\begin{aligned}
A(k\eta_r, z_k) \approx & \frac{-s}{2a} \left(\frac{L}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\lambda_{k,1}(x_{k,1}^R + ix_{k,1}^I) \left(1 + \frac{1}{z_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \Delta_r + \right. \\
& \left. + \lambda_{k,2}(x_{k,2}^R + ix_{k,2}^I) \left(\cos \Delta_r + \frac{\sin \Delta_r}{z_k} \right) \right], \tag{5.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(k\eta_r, z_k) \approx & \frac{s}{2a} \left(\frac{L}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2k}{\epsilon} \left\{ \lambda_{k,1}(x_{k,1}^R + ix_{k,1}^I) \left(1 + \frac{1}{z_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \Delta_r - \frac{\sin \Delta_r}{k\eta_r} \right) \right. \\
& \left. + \lambda_{k,2}(x_{k,2}^R + ix_{k,2}^I) \left[\cos \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r} - \frac{1}{z_k} \right) + \sin \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r z_k} + 1 \right) \right] \right\}, \tag{5.32}
\end{aligned}$$

donde $\Delta_r \equiv k\eta_r - z_k$. A pesar de la aparente complejidad de las constantes C_3 y C_4 , notamos que, para las escalas de interés $10^{-3} \text{ Mpc}^{-1} < k < 1 \text{ Mpc}^{-1}$ y tomando en cuenta que $D_{rad} = a_r/C_{rad} \approx 1.5 \times 10^{-22} \text{ Mpc}$, el valor numérico de D_k es $D_k \in [10^{-25}, 10^{-22}]$. Consecuentemente, es valido hacer una expansion a primer orden en D_k en las expresiones (5.27) y (5.28)

$$C_3 = 3A(k\eta_r, z_k) + \frac{D_k}{k} B(k\eta_r, z_k) + \mathcal{O}(D_k^2), \tag{5.33}$$

$$C_4 = \mathcal{O}(D_k^2) \simeq 0. \quad (5.34)$$

Es importante señalar que la aproximación dada por las expresiones anteriores corresponde, en el tratamiento estándar del modelo inflacionario, a despreciar el “modo que decae”. Sin embargo, notamos que es una consecuencia natural de las condiciones de pegado y del rango de valores de las cantidades relevantes.

Con estos resultados podemos escribir una expresión aproximada, durante la época dominada por radiación, para el potencial Newtoniano,

$$\Psi_k^{rad}(\eta) \approx \left[3A(k\eta_r, z_k) + \frac{D_k}{k} B(k\eta_r, z_k) \right] \frac{3}{(k\eta - \xi_k)^2} \left[\frac{\sqrt{3}}{(k\eta - \xi_k)} \sin\left(\frac{k\eta - \xi_k}{\sqrt{3}}\right) - \cos\left(\frac{k\eta - \xi_k}{\sqrt{3}}\right) \right], \quad (5.35)$$

donde las constantes $A(k\eta_r, z_k)$ y $B(k\eta_r, z_k)$ están dadas en (5.31) y (5.32) respectivamente.

El siguiente paso consiste en enfocarnos a las cantidades observacionales. Como discutimos en la sección 3.7.1 el potencial Newtoniano, evaluado en la última superficie de dispersión $\Psi(\eta_D, \mathbf{x}_D)$, se conecta con los coeficientes α_{lm}

$$\alpha_{lm} = \int d^2\Omega \quad \Psi(\eta_D, \mathbf{x}_D) Y_{lm}^*(\theta, \varphi), \quad (5.36)$$

donde $\mathbf{x}_D = R_D(\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, \cos\theta)$ y R_D representa el radio de la última superficie de dispersión. Al evaluar la expresión anterior, es conveniente descomponer, a las perturbaciones de la métrica, en modos de Fourier

$$\Psi(\eta, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{L^3} \Psi_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (5.37)$$

Sustituyendo (5.37) y (5.35) en (5.36) obtenemos

$$\alpha_{lm} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{-s}{2a_r(Lk)^{\frac{3}{2}}} \left[3F(k\eta_r, z_k) - \frac{2D_k}{\epsilon} G(k\eta_r, z_k) \right] E(k\eta_D, k\eta_r) 4\pi i^l j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{k}), \quad (5.38)$$

donde

5.2 El espectro de las inhomogeneidades dentro del marco del colapso

$$\begin{aligned}
 F(k\eta_r, z_k) \equiv & \lambda_{k,1}(x_{k,1}^R + ix_{k,1}^I) \left(1 + \frac{1}{z_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \Delta_r + \\
 & + \lambda_{k,2}(x_{k,2}^R + ix_{k,2}^I) \left(\cos \Delta_r + \frac{\sin \Delta_r}{z_k}\right), \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(k\eta_r, z_k) \equiv & \lambda_{k,1}(x_{k,1}^R + ix_{k,1}^I) \left(1 + \frac{1}{z_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \Delta_r - \frac{\sin \Delta_r}{k\eta_r}\right) + \\
 & + \lambda_{k,2}(x_{k,2}^R + ix_{k,2}^I) \left[\cos \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r} - \frac{1}{z_k}\right) + \sin \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r z_k} + 1\right)\right], \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

$$E(k\eta, k\eta_r) \equiv \frac{3}{(k\eta - \xi_k)^2} \left[\frac{\sqrt{3}}{(k\eta - \xi_k)} \sin \left(\frac{k\eta - \xi_k}{\sqrt{3}}\right) - \cos \left(\frac{k\eta - \xi_k}{\sqrt{3}}\right) \right], \quad (5.41)$$

$j_l(x)$ son las funciones de Bessel esféricas de orden l , y \hat{k} indica la dirección el vector \mathbf{k} .

La cantidad anterior debe ser evaluada al tiempo (conforme) del desacople η_D que pertenece la época dominada por materia. Sin embargo, en los cálculos anteriores utilizamos la expresión para $\Psi_k(\eta)$ en la era dominada por radiación (5.23), extendiendo de alguna manera el rango de validez para (5.38), que va de η_r a $\eta_{eq} < \eta_D$. Los cambios, durante el periodo desde el inicio de la época dominada por materia no-relativista hasta la época del desacople (donde el factor de escala sólo cambia por un factor de 10, i.e., $a(\eta_D)/a(\eta_{eq}) \approx 10$), son naturalmente irrelevantes para los asuntos que nos interesa tratar en esta sección, y por lo tanto, el valor aproximado que se obtuvo para α_{lm} utilizando (5.23) debe corresponder a una buena aproximación del valor exacto.

Además, observamos que el parámetro *slow-roll* ϵ se encuentra en el denominador de uno de los términos de (5.38), y como mostraremos más adelante, el origen de la amplificación del espectro se debe precisamente a este factor. La posibilidad de evitar este problema en el esquema de colapso, que no tiene una contraparte en el tratamiento estándar, emerge esencialmente de la libertad de seleccionar los detalles del colapso y, de esta manera, asegurar que el coeficiente del factor $1/\epsilon$ se anule en (5.38). Discutiremos detalladamente esta posibilidad más adelante.

Otro aspecto importante que queremos señalar es que es precisamente en (5.38) donde la justificación acerca de las consideraciones estadísticas se vuelve evidente a pesar del hecho de que estamos trabajando con un sólo universo (incluso si asumimos que existen muchos universos, el hecho empírico es que tenemos acceso a uno sólo). Nuestro interés recae en la cantidad α_{lm} , la cual como se observa en (5.38), es el resultado de las contribuciones combinadas del colapso de las funciones de onda de un conjunto de osciladores armónicos (uno para cada uno de los modos \mathbf{k} del campo cuántico), cada uno contribuyendo con un número complejo a la suma, conduciendo a lo que efectivamente se conoce como una caminata al azar en 2-dimensiones cuyo desplazamiento total corresponde a la cantidad observable de interés. Es claro que, como en cualquier caminata aleatoria, no es posible evaluar tal cantidad y lo único que resta es evaluar el valor más probable de dicho desplazamiento. Para obtener el valor más probable de la ‘caminata al azar’ asociada a la cantidad α_{lm} , consideramos un ensamble de universos imaginarios y realizaremos la identificación del valor más probable con el valor medio del ensamble. Estas dos cantidades coinciden en condiciones normales, i.e., que la distribución de probabilidad posea un máximo global y que no sea patológica en ningún otro aspecto. Por lo tanto, podemos suponer que la cantidad observada se aproxima de buena manera al valor más probable (que a su vez identificamos con el valor medio del ensamble de universos imaginarios).

La magnitud esperada de α_{lm} , después de tomar el límite continuo ($L \rightarrow \infty$) es (véase [89] para los detalles):

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 = \frac{s^2}{2\pi a_r^2} \int \frac{d^3 k}{k^3} H(k\eta_r, z_k) E^2(k\eta_D, k\eta_r) j_l^2(kR_D) |Y_{lm}(\hat{k})|^2, \quad (5.42)$$

donde

$$\begin{aligned} H(k\eta_r, z_k) \equiv & 2\lambda_{k,1}^2 \left(1 + \frac{1}{z_k^2}\right) \left[3 \sin \Delta_r - \frac{2D_k}{\epsilon} \left(\cos \Delta_r - \frac{\sin \Delta_r}{k\eta_r}\right)\right]^2 + \\ & + 2\lambda_{k,2}^2 \left\{3 \left(\cos \Delta_r + \frac{\sin \Delta_r}{z_k}\right) - \frac{2D_k}{\epsilon} \left[\cos \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r} - \frac{1}{z_k}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sin \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r z_k} + 1\right)\right]\right\}^2. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Por lo tanto, el valor esperado para la cantidad observada (el espectro de potencias angular) $OB_l \equiv l(l+1)C_l = l(l+1)(2l+1)^{-1} \sum_m |\alpha_{lm}^{obs}|^2$ es

5.2 El espectro de las inhomogeneidades dentro del marco del colapso

$$OB_l = l(l+1) \frac{s^2}{\epsilon^2 \pi a_r^2} \int \frac{dk}{k} H(k\eta_r, z_k) E^2(k\eta_D, k\eta_r) j_l^2(kR_D). \quad (5.44)$$

Como se demuestra en el Apéndice C, la cantidad observada OB_l está relacionada con la amplitud del potencial Newtoniano, esto es, podemos extraer un “espectro de potencias equivalente” para las perturbaciones de la métrica:

$$\mathcal{P}_\Psi^{col}(k, \eta) = \frac{s^2}{8\pi^2 a_r^2} H(k\eta_r, z_k) E^2(k\eta_D, k\eta_r). \quad (5.45)$$

Observamos que si $\mathcal{P}_\Psi^{col}(k, \eta)$ es independiente de k , entonces la cantidad OB_l es independiente de l lo cual corresponde a las observaciones.³

Es fácil mostrar, con la ayuda de $a(\eta)$ durante la época de radiación, que la cantidad $(k\eta - \xi_k)/\sqrt{3}$ que aparece en (5.41), es de hecho $k/\sqrt{3}\mathcal{H}$. Por lo discutido anteriormente, esta cantidad se debe evaluar al tiempo del desacople η_D . Sin embargo, los modos de interés satisfacen la condición $k/\mathcal{H} \ll 1$. Lo anterior corresponde a enfocarse a los denominados “modos mayores que el horizonte”. Esto es, debemos considerar en (5.41), las escalas $k \ll aH$, por lo que $E(k\eta, k\eta_r)$ es aproximadamente

$$E(k\eta, k\eta_r) \approx \frac{1}{3}. \quad (5.46)$$

Considerando (5.46) y tomando en cuenta: la definición $s \equiv 4\pi G\phi'_0$; la ecuación de movimiento para el campo en la aproximación *slow-roll* $\phi'_0 = -\partial_\phi V a^3/3a'$; la ecuación de Friedmann en el regimen *slow-roll* $3a'^2 = 8\pi G a^4 V(\phi_0)$; la definición del parámetro *slow-roll* $\epsilon \equiv \frac{1}{2} M_{pl}^2 (\partial_\phi V/V)^2$ y la definición de la masa reducida de Planck $M_{pl}^2 = 1/(8\pi G)$, tenemos que la amplitud total del espectro de potencias, predicha por el esquema del colapso, es

$$\mathcal{P}_\Psi^{col}(k, \eta) = \frac{1}{432\pi^2} \frac{V\epsilon}{M_P^4} H(k\eta_r, z_k). \quad (5.47)$$

La cantidad $H(k\eta_r, z_k)$ depende de los parámetros que caracterizan al colapso, esto es, depende de $\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k,2}$, y z_k . Debemos notar que la libertad de escoger dichos valores corresponde a la caracterización de algunos de los detalles del mecanismo de colapso, y que no existe una libertad análoga cuando se decide ignorar los problemas conceptuales del Capítulo 4, los cuales motivaron las propuestas para modificar el paradigma inflacionario mediante la hipótesis del “colapso de la función de onda”.

³Las observaciones a las que nos referimos son el espectro de potencias angular Figura 3.6 pero sin tomar en cuenta la física de plasmas que da origen a los picos acústicos, esto es, un espectro plano o de Harrison-Zel'dovich.

Como mencionamos, podemos escoger los detalles del colapso de tal manera que los términos no deseados se anulen. Por ejemplo, si ajustamos los parámetros $\lambda_{k,1} = 0$, $\lambda_{k,2} = 1$ y el tiempo de colapso satisface

$$\cos \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r} - \frac{1}{z_k} \right) + \sin \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r z_k} + 1 \right) = 0, \quad (5.48)$$

la cantidad $H(k\eta_r, z_k)$ toma la forma

$$H(k\eta_r, z_k) = 18 \left(\cos \Delta_r + \frac{\sin \Delta_r}{z_k} \right)^2, \quad (5.49)$$

la cual no contiene los molestos términos proporcionales a $1/\epsilon$. La amplitud total de las perturbaciones de la métrica, bajo las suposiciones anteriores, es

$$\mathcal{P}_\Psi^{\star col}(k, \eta) = \frac{1}{24\pi^2} \frac{V\epsilon}{M_P^4} \left(\cos(k\eta_r - z_k) + \frac{\sin(k\eta_r - z_k)}{z_k} \right)^2, \quad (5.50)$$

donde la \star sobre \mathcal{P}_Ψ denota que el resultado (5.50) se obtiene de un modelo muy específico del colapso. La amplitud dada por (5.50) tiene el rasgo distintivo de tener al factor ϵ en el numerador en lugar del denominador, lo que contrasta con los resultados obtenidos del modelo de inflación estándar. Por lo tanto, a medida que el parámetro *slow-roll* ϵ disminuye, la amplitud de las fluctuaciones del espectro también va disminuyendo, lo cual es totalmente opuesto a lo que ocurre en el enfoque tradicional. El resultado anterior nos daría una resolución natural del problema de ajuste fino, que aqueja a la mayoría de los modelos inflacionarios, si hubiera una manera natural de explicar los valores que caracterizan a este esquema de colapso en particular. En principio, y dado que no conocemos con certeza la física detrás del colapso (que como creemos está íntimamente conectado con los aspectos de la gravedad cuántica de la manera en que lo sugiere R. Penrose), no es un aspecto problemático desde este punto de vista. Sin embargo, existe un asunto muy problemático relacionado con la elección de los parámetros, que pareciera comparten todas las opciones posibles para alcanzar el comportamiento deseado, esto es, que depende de un valor muy particular de z_k , una cantidad que es determinada por la etapa a la cual comienza la época del recalentamiento η_r , y la cual pensamos que está en el futuro del tiempo de colapso $\eta_k^c \ll \eta_r$. En otras palabras, existe un aspecto teleológico en la elección de los parámetros del colapso, lo que nos lleva a una situación verdaderamente complicada de justificar mediante un proceso físico razonable, atado ó no, a la gravedad cuántica.

Respecto a la “invariancia de escala” del espectro, notamos que si $|z_k| \gg |k\eta_r|$, lo cual no es una suposición muy fuerte debido a que $|\eta_r| \approx 1.157 \times 10^{-22}$ Mpc, lo

5.2 El espectro de las inhomogeneidades dentro del marco del colapso

que implica que $10^{-25} < |k\eta_r| < 10^{-22}$; entonces, la dependencia de la escala, en el espectro de potencias predicho, estará contenida únicamente en z_k , llevándonos a la conclusión que sólo existe una opción simple para recuperar el espectro plano que se observa en las regiones $2 < l < 100$ del espectro de potencias angular. Esto es, asumiendo que el tiempo de colapso de los diferentes modos depende de la frecuencia de acuerdo a $\eta_k^c = z/k$, de tal manera que z_k es independiente de k (véase [89] para una posible explicación física detrás de tal patrón), obtenemos una forma para el espectro predicho que concuerda con la llamada invariancia de escala que se obtiene de los estudios observacionales, sin embargo, debido a que los datos observacionales no son infinitamente precisos, en [32] se exploran otras opciones. En lo que resta de este capítulo nos enfocaremos en el caso z_k independiente de k debido a su simplicidad, y porque estamos más interesados en la amplitud del espectro que en su forma.

Regresando a la magnitud total del espectro de las fluctuaciones, notamos que para un esquema de colapso genérico, el termino (5.43) el cual contiene el factor $1/\epsilon$ se vuelve dominante y la cantidad $H(k\eta_r, z_k)$ puede aproximarse por

$$H(k\eta_r, z_k) \approx \frac{8D_k^2}{\epsilon^2} \left\{ \lambda_{k,1}^2 \left(1 + \frac{1}{z_k^2} \right) \left(\cos \Delta_r - \frac{\sin \Delta_r}{k\eta_r} \right)^2 + \lambda_{k,2}^2 \left[\cos \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r} - \frac{1}{z_k} \right) + \sin \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r z_k} + 1 \right) \right]^2 \right\}. \quad (5.51)$$

Insertando esta última expresión en (5.47), obtenemos el espectro de potencias para las perturbaciones de la métrica en un esquema de colapso genérico

$$\mathcal{P}_\Psi^{col}(k, \eta) = \frac{1}{54\pi^2} \frac{V}{\epsilon M_P^4} \left\{ D_k^2 \lambda_{k,1}^2 \left(1 + \frac{1}{z_k^2} \right) \left(\cos \Delta_r - \frac{\sin \Delta_r}{k\eta_r} \right)^2 + D_k^2 \lambda_{k,2}^2 \left[\cos \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r} - \frac{1}{z_k} \right) + \sin \Delta_r \left(\frac{1}{k\eta_r z_k} + 1 \right) \right]^2 \right\}, \quad (5.52)$$

mostrando así, que en general, la amplitud total del espectro de potencias es proporcional a $V/\epsilon M_P^4$ al igual que en el enfoque estándar.

Capítulo 6

Colapsos múltiples

En los capítulos anteriores, hemos mencionado que, hasta el momento, la propuesta de colapso es un modelo puramente fenomenológico; en el sentido de que no intenta explicar el proceso en términos de una nueva teoría física, sino simplemente brindar, una parametrización general de la transición cuántica involucrada. Los resultados que se han obtenido a partir de la propuesta de colapso, se encuentran relacionados con el tiempo de colapso [32] y también con la relación de los parámetros del colapso con el problema de ajuste fino del potencial inflacionario (Capítulo 5, véase también [62]). Sin embargo, hasta ahora el análisis se ha basado solamente en el caso en el que hay un único colapso de la función de onda del inflatón para cada modo. Esta restricción ha permitido avanzar en la investigación sin tener que caracterizar al estado post-colapso más allá de los valores de expectación del campo y su momento conjugado. La motivación de este capítulo, es extraer una mayor información sobre los procesos asociados al colapso en cada uno de los modos del campo. Para ello, consideraremos la posibilidad de múltiples colapsos en cada uno de los modos del campo, esta consideración requiere, a su vez, una mayor especificación de los estados post-colapso; en particular, nos enfocaremos en modelos donde los estados post-colapso puedan identificarse como *coherentes* ó *squeezed*. El trabajo original expuesto en este capítulo puede consultarse en la referencia [61].

6.1. Conexión con las cantidades observacionales

El objetivo de esta sección será introducir las cantidades teóricas que necesitamos para hacer conexión con los datos observacionales.

Comenzamos nuestro análisis recordando la expresión (4.9):

$$\nabla^2 \Psi + \mu \Psi = 4\pi G \phi'_0 \delta \phi'.$$

Utilizando la expresión para el factor de escala $a(\eta) = -1/[H_I \eta(1 - \epsilon)]$ en la definición de $\mu \equiv \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'$, obtenemos que $\mu \simeq 0$, lo cual simplifica (4.9) de la siguiente manera

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G \phi'_0 \delta \phi' = s \delta \phi', \quad (6.1)$$

donde $s \equiv 4\pi G \phi'_0$, la cantidad s , utilizando la expresión del parámetro *slow-roll*, la ecuación *slow-roll* para ϕ'_0 y las ecuaciones de Friedmann, puede reescribirse como $s = a\sqrt{V}\epsilon/\sqrt{6}M_P^2$.

Los coeficientes $\Psi_{\mathbf{k}}$, que se obtienen después de realizar una descomposición de Fourier $\Psi(\mathbf{x}, \eta) = \sum_{\mathbf{k}} (\Psi_{\mathbf{k}}/L^3) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, satisfacen

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{-s}{k^2} \delta \phi'_{\mathbf{k}}(\eta). \quad (6.2)$$

Utilizando las ecuaciones semi-clásicas de Einstein: $G_{ab} = 8\pi G \langle \hat{T}_{ab} \rangle$ la expresión anterior toma la forma

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{-s}{ak^2} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle, \quad (6.3)$$

donde utilizamos que $\langle \delta \hat{\phi}'_{\mathbf{k}} \rangle_{\Xi}$ está conectado al valor de expectación del momento del campo a través de $\langle \delta \hat{\phi}'_{\mathbf{k}} \rangle_{\Xi} = \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \rangle_{\Xi} / a(\eta)$ en el estado $|\Xi\rangle$.

Recordando que $s \equiv a\sqrt{V}\epsilon/\sqrt{6}M_P^2$, la expresión para el potencial Newtoniano se reescribe como:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\eta) = -\frac{1}{k^2 M_P^2} \sqrt{\frac{V\epsilon}{6}} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle. \quad (6.4)$$

Como mencionamos en el capítulo anterior, antes de que ocurra el colapso, el estado del campo corresponde al vacío de Bunch-Davies, para este estado $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle = 0$, consecuentemente $\Psi_{\mathbf{k}}(\eta) = 0$, y el universo es homogéneo e isotrópico. Sin embargo, después del colapso, el nuevo estado tendrá un valor de expectación genérico $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle \neq 0$ lo que implica la aparición de perturbaciones en la métrica. Esto es, el primer colapso del modo correspondiente, se asocia con el nacimiento de las inhomogeneidades para cada escala.

Nuevamente, para obtener una predicción teórica y compararlo con las observaciones, necesitamos la expresión del potencial Newtoniano durante la época dominada por radiación, dicha expresión la calculamos en el capítulo anterior (5.23). Sin embargo, podemos encontrar una expresión aproximada a partir de (6.4) que

nos permitirá simplificar los cálculos en gran medida. La aproximación que tenemos en mente consiste en enfocarnos a los modos de interés observacional, i.e., aquellos modos para los cuales el efecto Sachs-Wolfe $\delta T/T \sim \Psi$ es dominante, esto es, los modos mayores que el radio de Hubble. Puesto que nos concentraremos en los modos mayores que el horizonte, podemos recurrir nuevamente a la cantidad conservada ζ para poder relacionar las perturbación de la métrica durante el regimen inflacionario (6.4), con su correspondiente expresión en la era dominada por radiación. La relación que buscamos, la calculamos en el capítulo anterior (ecuación (5.3)) obteniendo:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{rad} = \frac{2}{3} \frac{\Psi_{\mathbf{k}}^{inf}}{\epsilon}. \quad (6.5)$$

Por lo tanto, substituyendo (6.4) en (6.5), la expresión aproximada para el potencial Newtoniano es

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{rad}(\eta) = \frac{-1}{2M_P^2} \sqrt{\frac{8V}{27\epsilon}} \frac{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle}{k^2}. \quad (6.6)$$

La expresión anterior es válida para los modos $k \ll \mathcal{H}$, i.e., debemos tomar el límite $k/\mathcal{H} \ll 1$ en $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle$. Además, el resultado (6.6) muestra que para un esquema de colapso genérico, existe una amplificación del potencial Newtoniano de $1/\epsilon$ que concuerda con los resultados del capítulo anterior (véase también [62]).

La cantidad de interés observacional, son los coeficientes α_{lm} que presentamos en 3.7.1 (véase también Apéndice C)

$$\alpha_{lm} = \int d^2\Omega \Psi(\eta_D, \mathbf{x}_D) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (6.7)$$

donde η_D es el tiempo conforme del desacople y $\mathbf{x}_D = R_D(\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta)$ con R_D el radio de la última superficie de dispersion, θ, ϕ son coordenadas esféricas correspondientes a la 2-esfera celeste.

Utilizando la descomposición en modos de Fourier $\Psi(\eta_D, \mathbf{x}_D) = \sum_{\mathbf{k}} (\Psi_{\mathbf{k}}(\eta_D)/L^3) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_D}$, y empleando (6.6) para los coeficientes $\Psi_{\mathbf{k}}$, obtenemos

$$\alpha_{lm} = \int d^2\Omega \sum_{\mathbf{k}} \frac{-1}{2M_P^2 k^2 L^3} \sqrt{\frac{8V}{27\epsilon}} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta_D) \rangle Y_{lm}^*(\theta, \phi) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_D}. \quad (6.8)$$

Utilizando las relaciones entre la función exponencial y los armónicos esféricos: $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_D} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kR_D) Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}})$, donde j_l corresponden a las funciones esféricas de Bessel y realizando la integral sobre la parte angular en (6.8), tenemos

$$\alpha_{lm} = 4\pi i^l \sum_{\mathbf{k}} \frac{-1}{2M_P^2 k^2 L^3} \sqrt{\frac{8V}{27\epsilon}} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta_D) \rangle j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}). \quad (6.9)$$

La magnitud esperada de α_{lm} es, por tanto,

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 = (4\pi)^2 \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{2V}{27\epsilon M_P^4} \frac{1}{k^2 k'^2 L^6} \overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta_D) \rangle \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^\dagger(\eta_D) \rangle} j_l(kR_D) j_l(k'R_D) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}'). \quad (6.10)$$

La discusión, respecto a la naturaleza estadística de $|\alpha_{lm}|^2$ en el esquema de colapso, se expuso en la Sección 5.2

En el resto de este capítulo nos evocaremos a calcular la cantidad $\overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^\dagger(\eta) \rangle}$ bajo condiciones específicas de los estados post-colapso.

6.2. Esquema de colapsos múltiples

Una vez que se propone la existencia de algún tipo de proceso físico no conocido que afecta al sistema bajo investigación, parece lógico considerar la posibilidad de que ocurra más de una vez y en circunstancias diferentes a las cuales se propuso originalmente. El estudio exhaustivo de este aspecto, va más allá de este trabajo de tesis y requeriría considerar algún mecanismo de colapso particular. Sin embargo, en el contexto cosmológico que nos atañe se vuelve relativamente accesible profundizar nuestro análisis.

En esta sección estudiaremos los 3 esquemas de colapso presentados en el Capítulo 4 bajo la suposición de que ocurran colapsos múltiples, es decir, nos enfocaremos a los valores de expectación, de las cantidades relevantes, evaluados a cualquier tiempo η y después de n colapsos.

Nuestro primer paso será generalizar la notación para poder manejar los tres esquemas de colapso de manera unificada. Comencemos asumiendo que a un tiempo $\eta_k^{c_1}$ ocurrió un sólo colapso, llevando el estado $|c_0\rangle$ al estado $|c_1\rangle$ ¹. La suposición más natural, que generaliza las suposiciones encontradas para el valor de expectación del campo (y su momento conjugado) en un estado post-colapso $|c_1\rangle$, consiste en

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}) \rangle_{c_1} = x_{\mathbf{k},I}^{(1)(R,I)} \sigma_y^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}, c_0) + \langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}) \rangle_{c_0}, \quad (6.11a)$$

¹En esta sección, hemos cambiado un poco la notación, el estado post-colapso lo denotaremos $|c_n\rangle$ en vez de $|\Xi\rangle$ como lo habíamos hecho en las secciones anteriores. Esto es, el estado $|c_0\rangle$, representa el estado vacío; $|c_1\rangle$ denota el primer colapso y así sucesivamente.

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}) \rangle_{c_1} = x_{\mathbf{k},II}^{(1)(R,I)} \sigma_{\pi}^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}, c_0) + \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}) \rangle_{c_0}, \quad (6.11b)$$

donde $x_{\mathbf{k},I}^{(1)(R,I)}$ y $x_{\mathbf{k},II}^{(1)(R,I)}$ se refieren a los valores aleatorios que caracterizan el cambio del valor de expectación de $\hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ respectivamente. El superíndice (1) indica que las variables aleatorias están asociadas al primer colapso, mientras que las cantidades en el último término del lado derecho de (6.11) representan el valor de expectación de los operadores correspondientes como si no hubiera existido un colapso. La razón por la cual escogimos la generalización (6.11) es porque, después del primer colapso, la función de onda ya no está centrada en cero y tiene un nuevo ancho. El primer término del lado derecho de (6.11) refleja el proceso estocástico del colapso mientras que el segundo toma en cuenta la información en el estado pre-colapso.

La correlación entre las variables aleatorias depende del esquema de colapso particular. Las funciones $\sigma_y^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}, c_0)$ y $\sigma_{\pi}^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}, c_0)$ denotan las incertidumbres de los valores de expectación de los campos para un esquema de colapso. La notación empleada tiene como por objetivo recordarnos las cantidades principales que caracterizan a los valores de expectación, es decir, el estado pre-colapso $|c_0\rangle$ (que para el caso de un sólo colapso corresponde al estado vacío), el tiempo de colapso $\eta_k^{c_1}$, y las variables aleatorias $x_{\mathbf{k},I}^{(1)(R,I)}$, $x_{\mathbf{k},II}^{(1)(R,I)}$.

Observamos que el lado izquierdo de (6.11) se encuentra evaluado en el estado post-colapso $|c_1\rangle$, mientras que el lado derecho se encuentra evaluado en el estado anterior $|c_0\rangle$, i.e., el nuevo estado depende del viejo estado. También notamos que la expresión completa (6.11) se encuentra evaluada al tiempo $\eta_k^{c_1}$, el tiempo al cual ocurrió el primer colapso. El segundo término del lado derecho representa el valor de expectación del modo en el estado $|c_0\rangle$ *evolucionado* hasta el tiempo $\eta_k^{c_1}$. Esta evolución dinámica está dictada por (4.25). La generalización de las ideas anteriores nos permite escribir el esquema de colapso para el colapso n -simo $|c_{n-1}\rangle \rightarrow |c_n\rangle$:

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}) \rangle_{c_n} = x_{\mathbf{k},I}^{(n)(R,I)} \sigma_y^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}, c_{n-1}) + \langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}) \rangle_{c_{n-1}}, \quad (6.12a)$$

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}) \rangle_{c_n} = x_{\mathbf{k},II}^{(n)(R,I)} \sigma_{\pi}^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}, c_{n-1}) + \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}) \rangle_{c_{n-1}}. \quad (6.12b)$$

El segundo término del lado derecho de (6.12) representa el valor de expectación en el estado $(n-1)$ -simo *evaluado al tiempo de colapso n -simo* $\eta_k^{c_n}$. Recurriendo a la notación matricial introducida en el Capítulo 4, esto es,

$$\Upsilon(\eta, c_n) \equiv \begin{pmatrix} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{c_n} \\ \langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{c_n} \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

podemos reescribir el esquema de colapso (6.12) como:

$$\Upsilon(\eta_k^{c_n}, c_n) = \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(n)(R,I)}, \eta_k^{c_n}, c_{n-1}) + \Upsilon(\eta_k^{c_n}, c_{n-1}), \quad (6.14)$$

donde introducimos un nuevo objeto:

$$\Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(n)(R,I)}, \eta_k^{c_n}, c_{n-1}) \equiv \begin{pmatrix} x_{\mathbf{k},I}^{(n)(R,I)} \sigma_y^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}, c_{n-1}) \\ x_{\mathbf{k},II}^{(n)(R,I)} \sigma_\pi^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}, c_{n-1}) \end{pmatrix},$$

con $i = I, II$.

6.3. Evolución entre colapsos

La ecuación (4.25) caracteriza la evolución entre dos colapsos sucesivos, e.g., n y $n - 1$. En otras palabras, esto significa que (4.25) es válida desde un tiempo $\eta_k^{c_{n-1}}$ (su condición inicial) hasta $\eta_k^{c_n}$. Para entender más claramente esta dependencia reescribimos (4.25), con la notación adoptada en este capítulo, obteniendo

$$\Upsilon(\eta_k^{c_n}, c_{n-1}) = \mathbf{U}(\eta_k^{c_n}, \eta_k^{c_{n-1}}) \Upsilon(\eta_k^{c_{n-1}}, c_{n-1}). \quad (6.15)$$

La expresión (6.15) es válida para el intervalo $\eta_k^{c_{n-1}}$ y $\eta_k^{c_n}$. Por lo tanto, la *evolución* desde $\eta_k^{c_{n-1}}$ hasta $\eta_k^{c_n}$, de los valores de expectación en el estado $|c_{n-1}\rangle$, está determinada por (6.15) pero utilizando, como condición inicial, el valor de expectación dado por el colapso $n - 2$, el cual evolucionó de manera similar. Esto nos llevará a una relación de recurrencia para la ecuación dinámica del valor de expectación del campo después de n colapsos. Observamos que dicha evolución corresponde a la evolución ortodoxa en Mecánica Cuántica: Entre las ‘mediciones’² la función de onda evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger, y en los tiempos cuando ocurre la ‘medición’ la función de onda ‘colapsa’ ó se reduce. Posteriormente, la función de onda continua evolucionando de acuerdo a la ecuación de Schrödinger pero ahora con las condiciones iniciales del estado cuántico ‘post-medición’.

Los argumentos anteriores, implican que (6.15) depende de los estados de colapso $(n - 1)^{simo}$, $(n - 2)^{simo}$, ..., 1^{ero} . Por consiguiente, nuestra siguiente tarea será obtener una nueva expresión para (6.15) que muestre esta dependencia explícitamente.

Comenzamos sustituyendo (6.14) en (6.15) obteniendo:

$$\Upsilon(\eta, c_n) = \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_n}) \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(n)(R,I)}, \eta_k^{c_n}, c_{n-1}) + \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_n}) \Upsilon(\eta_k^{c_n}, c_{n-1}). \quad (6.16)$$

²Le recordamos al lector que en realidad no se está realizando ninguna ‘medición’, simplemente es una manera de referirnos al proceso que dispara el colapso.

La cantidad $\Upsilon(\eta_k^{c_n}, c_{n-1})$ contiene la información del valor de expectación de los campos en el estado $|c_{n-1}\rangle$ al tiempo $\eta_k^{c_n}$, no obstante (6.15) nos da el valor de Υ a cualquier tiempo η y para cualquier estado $|c_n\rangle$. Es decir, podemos utilizar (6.15) y la ‘receta’ de colapso (6.14) (para obtener $\Upsilon(\eta_k^{c_{n-1}}, c_{n-1})$) para calcular $\Upsilon(\eta_k^{c_n}, c_{n-1})$. Este cálculo resultará en un termino $\Upsilon(\eta_k^{c_{n-1}}, c_{n-2})$ el cual, de nuevo, se puede obtener de (6.15) y (6.14), por consiguiente, (6.16) es una relación recursiva que depende explícitamente desde el primer colapso hasta el $(n-1)$ -simo estado post-colapso. Por ejemplo, si ocurre un sólo colapso tenemos

$$\Upsilon(\eta, c_1) = \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_1}) \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(1)(R,I)}, \eta_k^{c_1}, c_0), \quad (6.17)$$

debido a que $|c_0\rangle$ corresponde al estado vacío y $\Upsilon(\eta_k^{c_1}, c_0) = 0$. Para dos colapsos obtenemos

$$\Upsilon(\eta, c_2) = \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_2}) \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(2)(R,I)}, \eta_k^{c_2}, c_1) + \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_2}) \mathbf{U}(\eta_k^{c_2}, \eta_k^{c_1}) \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(1)(R,I)}, \eta_k^{c_1}, c_0). \quad (6.18)$$

Así, la expresión general para $\Upsilon(\eta, c_n)$ después de n colapsos es

$$\begin{aligned} \Upsilon(\eta, c_n) &= \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_n}) \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(n)(R,I)}, \eta_k^{c_n}, c_{n-1}) \\ &+ \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_n}) \mathbf{U}(\eta_k^{c_n}, \eta_k^{c_{n-1}}) \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(n-1)(R,I)}, \eta_k^{c_{n-1}}, c_{n-2}) \\ &+ \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_n}) \mathbf{U}(\eta_k^{c_n}, \eta_k^{c_{n-1}}) \mathbf{U}(\eta_k^{c_{n-1}}, \eta_k^{c_{n-2}}) \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(n-2)(R,I)}, \eta_k^{c_{n-2}}, c_{n-3}) + \dots + \\ &+ \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_n}) \mathbf{U}(\eta_k^{c_n}, \eta_k^{c_{n-1}}) \mathbf{U}(\eta_k^{c_{n-1}}, \eta_k^{c_{n-2}}) \mathbf{U}(\eta_k^{c_{n-2}}, \eta_k^{c_{n-3}}) \dots \mathbf{U}(\eta_k^{c_2}, \eta_k^{c_1}) \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(1)(R,I)}, \eta_k^{c_1}, c_0). \end{aligned} \quad (6.19)$$

De la expresión (6.15) es evidente que la matriz $\mathbf{U}(\eta_k^{c_n}, \eta_k^{c_{n-1}})$ representa la evolución unitaria para los valores de expectación del campo en el estado $|c_{n-1}\rangle$ desde $\eta_k^{c_{n-1}}$ hasta $\eta_k^{c_n}$. Debido a la evolución unitaria, se cumple que $\mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_n}) \mathbf{U}(\eta_k^{c_n}, \eta_k^{c_{n-1}}) \dots \mathbf{U}(\eta_k^{c_2}, \eta_k^{c_1}) = \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_1})$. Utilizando esta propiedad en (6.19), obtenemos finalmente

$$\Upsilon(\eta, \eta_k^{c_n}) = \sum_{m=1}^n \mathbf{U}(\eta, \eta_k^{c_m}) \Delta(x_{\mathbf{k},i}^{(m)(R,I)}, \eta_k^{c_m}, c_{m-1}). \quad (6.20)$$

La ecuación (6.20) nos permite extraer la evolución para el valor de expectación de $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta)$ después de n colapsos

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{c_n} &= \sum_{m=1}^n \left[-k \sin(k\eta - k\eta_k^{c_m}) x_{\mathbf{k},I}^{(m)(R,I)} \sigma_y^{(R,I)}(\eta_k^{c_m}, c_{m-1}) \right. \\
&\quad \left. + \left(\cos(k\eta - k\eta_k^{c_m}) + \frac{\sin(k\eta - k\eta_k^{c_m})}{k\eta_k^{c_m}} \right) x_{\mathbf{k},II}^{(m)(R,I)} \sigma_{\pi}^{(R,I)}(\eta_k^{c_m}, c_{m-1}) \right].
\end{aligned} \tag{6.21}$$

El resultado (6.21) corresponde a la generalización de (4.23a) para colapsos múltiples durante la época inflacionaria. Observamos que la evolución de $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \rangle_{c_n}$ dada por (6.21) es parecida a la suma de muchos valores de expectación de $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$, donde para cada valor de expectación ocurrió un sólo colapso a un tiempo diferente; para calcular $\sigma_y^{(R,I)}$ y $\sigma_{\pi}^{(R,I)}$, es necesario emplear las expresiones (4.19), las cuales contienen información más genérica respecto a los estados post-colapso.

Como mencionamos al final de la Sección 6.1, para conectar las cantidades predichas teóricamente con las cantidades observacionales, necesitamos calcular $|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2$ (6.10). Esto es, necesitamos obtener $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{c_n} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(\eta) \rangle_{c_n}$, lo cual será nuestra siguiente tarea.

Primeramente, observamos que, en la notación introducida en (6.11), el valor de expectación de cada esquema de colapso se descompuso genéricamente como $x_{\mathbf{k},I}^{(1)(R,I)} \sigma_y^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}, c_0)$ y $x_{\mathbf{k},II}^{(1)(R,I)} \sigma_{\pi}^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}, c_0)$, donde las variables aleatorias son adimensionales, y σ_y, σ_{π} corresponden a la parte del esquema de colapso que contiene las unidades (e.g., en el esquema de colapso Independiente $\sigma_{\pi}^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}, c_0) = \sqrt{L^3/2}|g_k(\eta)|$ y $\sigma_y^{(R,I)}(\eta_k^{c_1}, c_0) = \sqrt{L^3/2}|y_k(\eta)|$). El valor medio del producto de $x_{\mathbf{k},i}^{(n)(R,I)}$ depende del esquema de colapso particular. En el esquema *Independiente* el valor medio del producto es

$$\overline{x_{\mathbf{k},i}^{(n)R} x_{\mathbf{k}',i}^{(m)R}} = (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}) \delta_{m,n}, \tag{6.22a}$$

$$\overline{x_{\mathbf{k},i}^{(m)I} x_{\mathbf{k}',i}^{(n)I}} = (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}) \delta_{m,n}, \tag{6.22b}$$

donde $i = I, II$, y con todas las otras posibles combinaciones iguales a cero.

Mientras tanto, en el esquema *Newtoniano* tenemos

$$\overline{x_{\mathbf{k},II}^{(n)R} x_{\mathbf{k}',II}^{(m)R}} = (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}) \delta_{m,n}, \tag{6.23a}$$

$$\overline{x_{\mathbf{k},II}^{(m)I} x_{\mathbf{k}',II}^{(n)I}} = (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}) \delta_{m,n}, \tag{6.23b}$$

y en el esquema de *Wigner*

$$\overline{x_{\mathbf{k}}^{(n)R} x_{\mathbf{k}'}^{(m)R}} = (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}) \delta_{m,n}, \quad (6.24a)$$

$$\overline{x_{\mathbf{k}}^{(m)I} x_{\mathbf{k}'}^{(n)I}} = (\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}) \delta_{m,n}. \quad (6.24b)$$

La $\delta_{m,n}$ significa que, en los tres esquemas, estamos asumiendo que las variables aleatorias, asociadas a distintos colapsos, son independientes (e.g., la variable aleatoria $x_{\mathbf{k},I}^{(1)I}$ es independiente de $x_{\mathbf{k},I}^{(2)I}$).

Después de seleccionar un esquema de colapso particular (con la correspondiente caracterización del valor medio del producto de las variables aleatorias (7.30), (6.23), (6.24)), y tomando en cuenta que $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{c_n} = \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R(\eta) \rangle_{c_n} + i \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I(\eta) \rangle_{c_n}$ (usando (6.21)), obtenemos la cantidad $\overline{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{c_n} \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^\dagger(\eta) \rangle_{c_n}}$ para cada esquema de colapso. El cálculo se simplifica debido al hecho de, al realizar los promedios de las variables aleatorias (para los 3 esquemas), los términos cruzados se cancelan. Por tanto, tomando el límite continuo ($L \rightarrow \infty$), la expresión para $|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2$ (6.10), después de N colapsos es

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 = \frac{4}{27\pi} \frac{V}{\epsilon M_P^4} \int \frac{dk}{k^2} |j_l(kR_D)|^2 \sum_{n=1}^N C_l^{(n)}(k, \eta_D), \quad (6.25)$$

donde $C_l^{(n)}(k, \eta_D)$ depende del esquema de colapso considerado. En el esquema *independiente*, esta expresión toma la forma

$$\begin{aligned} C_l^{(n)}(k, \eta_D) &= \left(k \sin(k\eta_D - k\eta_k^{c_n}) \right)^2 \left(Y_{\mathbf{k}}^+ + (-1)^l Y_{\mathbf{k}}^- \right) \\ &+ \left(\cos(k\eta_D - k\eta_k^{c_n}) + \frac{\sin(k\eta_D - k\eta_k^{c_n})}{k\eta_k^{c_n}} \right)^2 \left(\Pi_{\mathbf{k}}^+ + (-1)^l \Pi_{\mathbf{k}}^- \right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

mientras tanto, en el caso del esquema *Newtoniano*

$$C_l^{(n)}(k, \eta_D) = \left(\cos(k\eta_D - k\eta_k^{c_n}) + \frac{\sin(k\eta_D - k\eta_k^{c_n})}{k\eta_k^{c_n}} \right)^2 \left(\Pi_{\mathbf{k}}^+ + (-1)^l \Pi_{\mathbf{k}}^- \right), \quad (6.27)$$

las cantidades $Y_{\mathbf{k}}^\pm$ y $\Pi_{\mathbf{k}}^\pm$ se definen como

$$Y_{\mathbf{k}}^\pm \equiv (\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2 \pm (\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2, \quad (6.28a)$$

$$\Pi_{\mathbf{k}}^{\pm} \equiv (\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2 \pm (\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2. \quad (6.28b)$$

Finalmente, en el esquema de *Wigner*, $C_l^{(n)}(k, \eta)$ está dado por

$$\begin{aligned} C_l^{(n)}(k, \eta_D) &= 2k^2 \Lambda_{k,n}^2 \left[\sin(k\eta_D - k\eta_k^{c_n}) \sin \Theta_{k,n} \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos(k\eta_D - k\eta_k^{c_n}) + \frac{\sin(k\eta_D - k\eta_k^{c_n})}{k\eta_k^{c_n}} \right) \cos \Theta_{k,n} \right]^2, \end{aligned} \quad (6.29)$$

con $\Lambda_{k,n}$ y $\Theta_{k,n}$ definidas de la siguiente manera:

$$\Lambda_{k,n} \equiv \frac{4\eta_k^{c_n} \sqrt{k}}{\sqrt{1 + 5(k\eta_k^{c_n})^2 - \sqrt{1 + 10(k\eta_k^{c_n})^2 + 9(k\eta_k^{c_n})^4}}}, \quad (6.30a)$$

$$2\Theta_{k,n} \equiv \arctan \left(\frac{4k\eta_k^{c_n}}{1 - 3(k\eta_k^{c_n})^2} \right). \quad (6.30b)$$

Es importante comentar que las incertidumbres que aparecen en (6.25) siempre se evalúan en el estado de colapso $(n-1)$ -simo.

Antes de discutir las implicaciones físicas del resultado general (6.25), comencemos analizando la suposición de que ocurrió un sólo colapso y lo caracterizamos por el esquema Independiente, en este caso (6.25) se reduce a

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 = \frac{4V}{54\pi\epsilon M_P^4} \int \frac{dk}{k} |j_l(kR_D)|^2 \left(1 + 2 \frac{\sin^2(k\eta_D - k\eta_k^{c_1})}{(\eta_k^{c_1})^2} + \frac{\sin 2(k\eta_D - k\eta_k^{c_1})}{k\eta_k^{c_1}} \right). \quad (6.31)$$

De manera análoga, para un sólo colapso en el esquema Newtoniano, (6.25) se expresa como

$$\begin{aligned} |\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 &= \frac{4V}{54\pi\epsilon M_P^4} \int \frac{dk}{k} |j_l(kR_D)|^2 \left[1 + \sin^2(k\eta_D - k\eta_k^{c_1}) \left(\frac{1}{(k\eta_k^{c_1})^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin 2(k\eta_D - k\eta_k^{c_1})}{k\eta_k^{c_1}} \right]. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Los resultados (6.31) y (6.32) son consistentes con los obtenidos en [89] y [32]. El resultado que se obtiene de (6.25), para un sólo colapso en el esquema de *Wigner*, también corresponde al presentado en [32, 31].

Observamos que, para los tres esquemas de colapso, en el caso de un sólo colapso $N = 1$, únicamente las incertidumbres del estado vacío contribuyen a la integral en (6.25). El punto es que para un sólo colapso, (6.25) no contiene ninguna información caracterizando al estado post-colapso (la información que define un estado post-colapso particular está contenida en las incertidumbres evaluadas en ese preciso estado). Esto es, no necesitamos especificar el estado post-colapso. Sin embargo, si asumimos colapsos múltiples, entonces las incertidumbres de los estados post-colapso contribuirán a la integral en (6.25), y puesto que las incertidumbres dependerán de los estados post-colapso, que ahora son diferentes al estado vacío, entonces necesitaremos especificar todos los estados pre-colapso (lo cual es el tema central de la siguiente sección).

En los esquemas Independiente y Newtoniano surge un aspecto importante; para estos casos, (6.25) exhibe una dependencia explícita de l en los terminos³

$Y_{\mathbf{k}}^+ + (-1)^l Y_{\mathbf{k}}^-$ y $\Pi_{\mathbf{k}}^+ + (-1)^l \Pi_{\mathbf{k}}^-$. Si l es par, $Y_{\mathbf{k}}^+ + (-1)^l Y_{\mathbf{k}}^- = 2(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2$ y $\Pi_{\mathbf{k}}^+ + (-1)^l \Pi_{\mathbf{k}}^- = 2(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2$; si l es impar, $Y_{\mathbf{k}}^+ + (-1)^l Y_{\mathbf{k}}^- = 2(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2$ y $\Pi_{\mathbf{k}}^+ + (-1)^l \Pi_{\mathbf{k}}^- = 2(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2$. Por lo tanto, dependiendo de la paridad de l , la cantidad predicha $|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2$ involucrará la incertidumbre de la parte real o imaginaria de $\hat{y}_{\mathbf{k}}(\eta_k^{c_n})$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta_k^{c_n})$ lo cual no es enteramente compatible con la predicción estándar, es decir, un espectro plano. Con el propósito de recuperar la predicción estándar, la dependencia de l debe evitarse, y la opción más natural es que las incertidumbres satisfagan la condición:

$$(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2 = (\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2, \quad (6.33a)$$

$$(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2 = (\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2. \quad (6.33b)$$

Evidentemente, la condición (6.33) no se cumple para los casos genericos⁴, y no debe tomarse como una condición necesaria para la compatibilidad de nuestras predicciones teóricas con las observaciones del CMB, debido a que todavía necesitamos considerar la física de las épocas cosmológicas posteriores al regimen inflacionario, y sobre todo, hay que tomar en cuenta que los datos observacionales no son infinitamente precisos. Cabe señalar que, la condición para las incertidumbres de la parte real e imaginaria de $\hat{y}_{\mathbf{k}}(\eta_k^{c_n})$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta_k^{c_n})$, sólo aplica para los esquemas Inde-

³Existe otra dependencia explícita de l en el termino $|j_l(kR_D)|^2$, sin embargo esta dependencia no afecta la compatibilidad de las predicciones teóricas obtenidas en nuestro enfoque con las obtenidas del enfoque estándar (las cuales están confirmadas observacionalmente), puesto que para estas ultimas la dependencia de l se da de la misma manera.

⁴Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, si caracterizamos a los estados post-colapso como estados coherentes, la condición se satisface automáticamente.

pendiente y Newtoniano. En el esquema de Wigner, no existe tal condición para los parámetros $\Lambda_{k,n}$ y $\Theta_{k,n}$ que caracterizan las incertidumbres en ese esquema.

Finalmente, señalamos que todas las cantidades involucradas en (6.25) son positivas. En otras palabras, tenemos una suma de términos positivos definidos. Por consiguiente, si tomamos el límite $N \rightarrow \infty$ la suma diverge genéricamente⁵, lo que implica que no podemos considerar un número infinito de colapsos, ya que la cantidad predicha $|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2$ tendería al infinito. Por lo tanto, la restricción que se obtiene es que **el número de colapsos debe ser finito**. Es importante notar que, en los pasos que nos llevaron al resultado (6.25), no consideramos ningún estado post-colapso particular. Desde luego (y lo haremos en la siguiente sección), podemos asumir un estado post-colapso particular y esa información entrara en las incertidumbres. Por lo tanto, si consideramos un estado-post colapso genérico, en cualquiera de los tres esquemas de colapso, la expresión (6.25) nos lleva a la conclusión de que el número de colapsos es finito.

6.4. Caracterización de los estados post-colapso

La información que caracteriza un estado post-colapso particular está contenida en las incertidumbres del campo (y su momento) a través de los parámetros que caracterizan al estado post-colapso. Por lo tanto, una de nuestras primeras tareas será enfocarnos en calcular las incertidumbres para los estados coherentes y squeezed, posteriormente emplearemos los resultados de las secciones anteriores para realizar predicciones sobre las cantidades observacionales.

6.4.1. Estados coherentes como estados post-colapso

Una elección simple para un estado post-colapso es un estado coherente. Un estado coherente es un estado específico del oscilador armónico y su dinámica es muy similar a la de un oscilador armónico clásico. Los estados coherentes $|\xi\rangle$ están definidos como los eigenestados del operador de aniquilación \hat{a} ,

$$\hat{a}|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle, \quad (6.34)$$

puesto que \hat{a} no es un operador hermítico, ξ es un número complejo y puede representarse en su forma polar $\xi = |\xi|e^{i\chi}$, donde $|\xi|$ es la amplitud y χ la fase.

⁵A menos que cada uno de los términos de la suma se acerquen rápidamente a cero, ese caso no lo vamos a considerar aquí.

El significado físico de la ecuación (6.34) consiste básicamente en que $|\xi\rangle$ no se ve afectado por la detección o aniquilación de una partícula. Para un estado coherente, las incertidumbres cuánticas de \hat{p} y \hat{q} (el momento y la posición del oscilador respectivamente) toman el valor mínimo, i.e., $\Delta\hat{p}\Delta\hat{q} = \frac{1}{2}\hbar$.

Con la excepción del estado vacío $|0\rangle$ (que también es un estado coherente), es posible obtener cualquier estado coherente mediante la aplicación del operador de *Desplazamiento* $\hat{D}(\xi) = \exp(\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a})$ al estado vacío

$$|\xi\rangle = \hat{D}(\xi)|0\rangle.$$

Si asumimos que el estado post-colapso de cada modo del campo es un estado coherente $|\xi_{\mathbf{k}}\rangle$ y, utilizando las propiedades simples de los estados coherentes, es posible calcular las cantidades $d_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$, $e_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $c_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ (4.17)

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{k}}^{(R,I)} &= \xi_{\mathbf{k}}^{(R,I)}, \\ c_{\mathbf{k}}^{(R,I)} &= (\xi_{\mathbf{k}}^{(R,I)})^2, \\ e_{\mathbf{k}}^{(R,I)} &= |\xi_{\mathbf{k}}^{(R,I)}|^2. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Las expresiones (6.35) y (4.19) nos permiten obtener la evolución de las incertidumbres del campo y su momento conjugado para cualquier estado coherente. Si aplicamos los mismos argumentos que generalizaron (4.25) a la expresión (6.15), la expresión (4.19) puede generalizarse al caso de colapsos múltiples de igual manera. Por lo tanto, asumiendo que todos los estados post-colapsos son estados coherentes ($|\xi_{\mathbf{k}}^{(n)}\rangle = |c_n\rangle$), tenemos

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{c_n}^2 &= \Re[y_k^2(\eta)(\xi_{\mathbf{k}}^{(n)(R,I)})^2] + \frac{1}{2}|y_k(\eta)|^2(L^3 + 2|\xi_{\mathbf{k}}^{(n)(R,I)}|^2) - 2\Re[y_k(\eta)\xi_{\mathbf{k}}^{(n)(R,I)}]^2 \\ &= \frac{1}{2}|y_k(\eta)|^2L^3 = \frac{L^3}{4k} \left(1 + \frac{1}{(k\eta)^2}\right), \end{aligned} \quad (6.36a)$$

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{c_n}^2 &= \Re[g_k^2(\eta)(\xi_{\mathbf{k}}^{(n)(R,I)})^2] + \frac{1}{2}|g_k(\eta)|^2(L^3 + 2|\xi_{\mathbf{k}}^{(n)(R,I)}|^2) - 2\Re[g_k(\eta)\xi_{\mathbf{k}}^{(n)(R,I)}]^2 \\ &= \frac{1}{2}|g_k(\eta)|^2L^3 = \frac{kL^3}{4}. \end{aligned} \quad (6.36b)$$

Este último resultado muestra que las incertidumbres, del n -simo estado coherente post-colapso, tienen la misma forma que las del estado vacío. Además, resulta interesante que la incertidumbre del momento conjugado se mantiene constante durante la época inflacionaria.

6.4.2. Estados squeezed como estados post-colapso

Los estados squeezed se consideran como un caso más general de los estados coherentes. Cuantitativamente, un estado squeezed es un estado que tiene incertidumbre mínima, pero no en las variables de posición o momento, que de hecho son mayores que el mínimo, sino en un nuevo par de variables canónicas ‘rotadas’ (las cuales se denominan comúnmente como variables de *cuadratura* [110]). Sean \hat{Q} y \hat{P} estas nuevas variables. Para un estado squeezed, se puede tener ‘mayor (ó menor)’ incertidumbre ya sea en \hat{Q} ó \hat{P} , siempre y cuando su producto sea igual al mínimo permitido por el principio de incertidumbre de Heisenberg. Los parámetros del estado squeezed controlan el ángulo de ‘rotación’ y ‘squeezing’ de las incertidumbres.

El trabajar con los estados squeezed se simplifica si introducimos el siguiente operador

$$\hat{S}(\omega) \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\omega^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\omega \hat{a}^{\dagger 2}\right), \quad (6.37)$$

donde ω es un número complejo. En particular ω se expresa como $\omega = r e^{i\theta}$. El operador $\hat{S}(\omega)$ se le conoce como el Operador de *Squeeze*. Aplicando los operadores de Squeeze y Desplazamiento al estado vacío, obtenemos un estado squeezed

$$|\xi\omega\rangle \equiv \hat{D}(\xi)\hat{S}(\omega)|0\rangle. \quad (6.38)$$

Así, un estado *squeezed* $|\xi\omega\rangle$ está completamente definido por cuatro parámetros: $|\xi|, \chi, r, \theta$

Algunas propiedades bien conocidas de los operadores $\hat{D}(\xi)$ y $\hat{S}(\omega)$ son:

1. $\hat{D}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{D}(\xi) = \hat{a} + \xi$.
2. $\hat{D}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\xi) = \hat{a}^\dagger + \bar{\xi}$.
3. $\hat{S}^\dagger(\omega)\hat{a}\hat{S}(\omega) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{-i\theta} \sinh r$.
4. $\hat{S}^\dagger(\omega)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\omega) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{i\theta} \sinh r$.
5. \hat{D} y \hat{S} son operadores unitarios.

Asumiendo que los estados post-colapso de cada modo corresponden a estados squeezed (véase Apéndice D) y utilizando las propiedades 1-5, podemos calcular (de(4.17)) las cantidades $d_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$, $c_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $e_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$, esto es,

$$d_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = \xi_{\mathbf{k}}^{(R,I)}, \quad (6.39a)$$

$$c_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = -L^3 \cosh r_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \sinh r_{\mathbf{k}}^{(R,I)} e^{-i\theta_{\mathbf{k}}^{(R,I)}} + (\xi_{\mathbf{k}}^{(R,I)})^2, \quad (6.39b)$$

$$e_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = L^3 \sinh^2 r_{\mathbf{k}}^{(R,I)} + |\xi_{\mathbf{k}}^{(R,I)}|^2. \quad (6.39c)$$

Si $r_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = 0$, entonces (6.39) se reduce a los resultados particulares obtenidos para el caso de los estados coherentes (6.35).

Las ecuaciones (4.19) dictan la evolución de las incertidumbres, en términos de las cantidades $d_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$, $c_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $e_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$. Al igual que con los estados coherentes, (4.19) se generaliza directamente al caso de colapsos múltiples. Por tanto, considerando a los estados post-colapso como estados squeezed, podemos sustituir (6.39) en (4.19), que para el caso de colapsos múltiples, nos da el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{c_n}^2 &= \frac{L^3}{4k} \left[1 + \frac{1}{(k\eta)^2} \right] \left\{ -\sinh(2r_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)}) \cos \left[\theta_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)} + 2 \arctan \left(\frac{1}{k\eta} \right) + 2k\eta \right] \right. \\ &\quad \left. + \cosh(2r_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)}) \right\}, \end{aligned} \quad (6.40a)$$

$$(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{c_n}^2 = \frac{L^3 k}{4} \left[\sinh(2r_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)}) \cos(\theta_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)} + 2k\eta) + \cosh(2r_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)}) \right]. \quad (6.40b)$$

Los parámetros de squeezing $r_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)}$ y $\theta_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)}$ se refieren a los parámetros del estado squeezed post-colapso n -simo para cada modo. La situación ahora es completamente distinta al caso coherente, ya que para ese caso, a pesar de haber considerado n colapsos, las incertidumbres estaban completamente caracterizadas por el estado vacío. En el caso de los estados squeezed, resulta evidente (6.40) que las dispersiones $(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{c_n}^2$, $(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta))_{c_n}^2$ están determinadas por los parámetros squeeze $r_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)}$ y $\theta_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)}$. Por lo tanto, hemos encontrado una diferencia crucial con el caso coherente ya que, en este último caso, las incertidumbres son independientes de los parámetros que caracterizan al estado coherente. Notamos también que, si $r_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)} = 0$, entonces (6.40) se reduce a (6.36), como debe ser, ya que $r_{\mathbf{k}}^{c_n(R,I)} = 0$ reduce un estado squeezed a un estado coherente.

6.4.3. Contacto con los datos observacionales

Las incertidumbres del campo están caracterizadas por el estado post-colapso particular y por el esquema de colapso. Por el resto de este capítulo nos enfocaremos al esquema de colapso Independiente, sin embargo, si se consideran los otros dos esquemas de colapso propuestos, las conclusiones generales obtenidas no se ven afectadas, salvo a detalles que no son importantes para nuestra discusión.

Estados post-colapso caracterizados por estados squeezed

El contacto con las observaciones lo haremos bajo las siguientes suposiciones: I) La función de onda se ha colapsado N veces y los N estados post-colapso son estados squeezed. II) Las incertidumbres $(\Delta\hat{y}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2$ y $(\Delta\hat{y}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2$ son iguales (de igual manera para las incertidumbres $(\Delta\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2$ y $(\Delta\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2$), lo anterior está motivado por la discusión presentada al final de Sección 6.3.

Bajo la suposición II), la expresión (6.25) (recordemos que estamos trabajando bajo el esquema de colapso Independiente) se simplifica

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 = \frac{8}{27\pi} \frac{V}{\epsilon M_P^4} \int \frac{dk}{k^2} |j_l(kR_D)|^2 \sum_{n=1}^N \left[\left(k \sin(k\eta_D - k\eta_k^{c_n}) \right)^2 (\Delta\hat{y}_{\mathbf{k}}(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2 + \left(\cos(k\eta_D - k\eta_k^{c_n}) + \frac{\sin(k\eta_D - k\eta_k^{c_n})}{k\eta_k^{c_n}} \right)^2 (\Delta\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\eta_k^{c_n}))_{c_{n-1}}^2 \right]. \quad (6.41)$$

Después de realizar un poco de algebra, la expresión para $|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2$, que se obtiene de substituir (6.40) en (6.41), es

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 = \frac{2}{27\pi} \frac{V}{\epsilon M_P^4} \int \frac{dk}{k} |j_l(kR_D)|^2 \times \sum_{n=1}^N \left[\left(1 + \frac{\sin 2(k\eta_D - k\eta_k^{c_n})}{k\eta_k^{c_n}} \right) \times \left(\cosh 2r_{\mathbf{k}}^{c_{n-1}} + \sinh 2r_{\mathbf{k}}^{c_{n-1}} \cos(\theta_{\mathbf{k}}^{c_{n-1}} + 2k\eta_k^{c_n}) \right) + \frac{2 \sin^2(k\eta_D - k\eta_k^{c_n})}{(k\eta_k^{c_n})^2} \times \left(\cosh 2r_{\mathbf{k}}^{c_{n-1}} + k\eta_k^{c_n} \sinh 2r_{\mathbf{k}}^{c_{n-1}} \sin(\theta_{\mathbf{k}}^{c_{n-1}} + 2k\eta_k^{c_n}) \right) \right]. \quad (6.42)$$

El resultado anterior nos lleva a la conclusion que, para obtener un espectro de potencias razonable, esto es, un espectro plano de Harrison-Zel'dovich, sólo existe una simple opción caracterizada por dos condiciones particulares:

Primero, para cada uno de los n estados post-colapso, $k\eta_k^{c_n}$ debe ser independiente de k pero dependiente de n debido a que para el tiempo de colapso para cada colapso es distinto. En otras palabras, el tiempo de colapso para los n estados post-colapso de los diferentes modos, debe depender de la frecuencia del modo de acuerdo a $\eta_k^{c_n} = f_n/k$. Esta condición no es sorprendente y de hecho se obtuvo en [89] donde se consideró únicamente un sólo colapso (una posible desviación de tal 'receta' se estudió en [32]). El resultado (6.42) simplemente generaliza la condición $\eta_k^c \propto 1/k$ para el caso de colapsos múltiples.

Segundo, para recuperar un espectro de potencias prácticamente plano, la solución más sencilla es que los parámetros del estado squeezed se caractericen como independientes de k , esto es, $r_{\mathbf{k}}^{c_n} = r^{c_n}$ y $\theta_{\mathbf{k}}^{c_n} = \theta^{c_n}$. Sin embargo, cabe la posibilidad de que existan desviaciones permitidas por la imprecisión de los datos experimentales, aunque este resultado genérico parece una fuerte limitación así como una guía para entender la física detrás del colapso. La condición $r_{\mathbf{k}}^{c_n} = r^{c_n}$ y $\theta_{\mathbf{k}}^{c_n} = \theta^{c_n}$ no implica que las incertidumbres de todos los modos sean iguales, ya que las incertidumbres también están caracterizadas por el tiempo de colapso y la frecuencia de cada modo (6.40).

Una cota superior para el número de colapsos utilizando a los estados coherentes como estados post-colapso

Uno de los resultados importantes que obtuvimos en la sección 6.3, es que, genéricamente, el número de colapsos para cada modo debe ser finito, en esta sección haremos una simple estimación de este número. Seguiremos trabajando bajo el esquema de colapso Independiente, pero asumiremos ahora que todos los N estados post-colapso son estados coherentes (los cuales, después de todo, son una clase particular de estados squeezed con $r_{\mathbf{k}} = 0$). Es decir, utilizaremos las incertidumbres (6.36) para obtener una estimación teórica de $|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2$. Cabe señalar, que en el caso de los estados coherentes, la suposición (II) de la sección anterior 6.4.3 se obtiene naturalmente debido a que las incertidumbres de los estados coherentes son iguales a las incertidumbres del estado vacío y satisfacen automáticamente $(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k))_{c_0}^2 = (\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k))_{c_0}^2$ (así como también $(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k))_{c_0}^2 = (\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k))_{c_0}^2$). Substituyendo (6.36) en (6.25) obtenemos

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 = \frac{2}{27\pi} \frac{V}{\epsilon M_P^4} \int \frac{dk}{k} |j_l(kR_D)|^2 \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{\sin 2(k\eta_D - k\eta_k^{c_n})}{k\eta_k^{c_n}} + \frac{2 \sin^2(k\eta_D - k\eta_k^{c_n})}{(k\eta_k^{c_n})^2} \right). \quad (6.43)$$

De esta última expresión, es relativamente simple obtener información respecto al número máximo de colapsos. Si asumimos que $|k\eta_k^{c_n}| \gg k\eta_D$, esto es, que el tiempo de colapso para el 1^{ero}, 2^{ndo}, ..., N ^{simo} colapso ocurre dentro de las primeras etapas del régimen inflacionario; entonces (6.43) se puede aproximar por

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 \approx \frac{2}{27\pi} \frac{V}{\epsilon M_P^4} \int \frac{dk}{k} |j_l(kR_D)|^2 N, \quad (6.44)$$

utilizando que $\int x^{-1} j_l^2(x) dx = \pi/l(l+1)$, la expresión anterior se reduce a

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 \approx \frac{2}{27} \frac{V}{\epsilon M_P^4} \frac{N}{l(l+1)}. \quad (6.45)$$

En general $|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2$ es independiente de m y la cantidad que se presenta como resultado de las observaciones, es el espectro angular de potencias, i.e., $OB_l = l(l+1)C_l$, donde $C_l = (2l+1)^{-1} \sum_m |\alpha_{lm}^{obs}|^2$. Ignorando la física de plasmas que sigue después de la época de recalentamiento, OB_l es esencialmente una cantidad independiente de l correspondiente a la amplitud de las perturbaciones de la métrica (la cual es aproximadamente 10^{-5}). Por lo tanto, fijando $OB_l \equiv A$, el número máximo de colapsos N_{max} permitido por las observaciones es

$$N_{max} \approx \frac{27\epsilon M_P^4 A}{2V}. \quad (6.46)$$

Creemos que esta restricción podría ser de gran ayuda al estudiar propuestas concretas acerca del mecanismo de colapso y podría servir como guía de las investigaciones asociadas a un mecanismo físico de colapso, el cual a su vez, está detrás de nuestro modelo fenomenológico.

Capítulo 7

El *esquema de colapso* en el proceso de cuantización tradicional

En este capítulo mostraremos como incorporar el esquema de colapso al proceso de cuantización tradicional del paradigma inflacionario [80, 22, 79, 101]. Esto es, estudiaremos las implicaciones de asumir el esquema de colapso pero dejando de lado el enfoque de gravedad semi-clásica, adoptando en su lugar, la postura de que la descripción de la gravedad, basada en la métrica, se mantiene a nivel cuántico. Este cambio de postura se debe a los siguientes motivos: Primero, cabe la posibilidad de que el mecanismo de colapso no tenga nada ver que con la gravitación. Segundo, que la gravitación cuántica sea, de alguna manera, la cuantización de las variables ligadas a la métrica, y que la cuantización perturbativa, de los grados de libertad gravitacionales, tenga que realizarse en conjunto con la cuantización perturbativa de los grados de libertad de la materia. De esta manera, el procedimiento de cuantización tradicional (presentado en el Capítulo 3) correspondería a encontrar las combinaciones de las variables que se podrían cuantizar lo mas parecido a “lo usual” en teoría de perturbaciones, por consiguiente, tendríamos una cuantización de las fluctuaciones gravitacionales y de materia de manera conjunta. Es importante enfatizar, que aún cuando abandonemos el enfoque de gravedad semi-clásica, es necesario incluir la hipótesis del colapso, ya que de lo contrario, de acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 4, no hay una explicación satisfactoria que pueda explicar las inhomogeneidades observadas partiendo de una situación homogénea.

Sin embargo, mostraremos que el precio que pagaremos al adoptar este nuevo enfoque, será que el análisis se vuelve menos transparente y tendrá algunos problemas conceptuales. Además, mostraremos que algunas de las predicciones teóricas obtenidas en este nuevo enfoque contrastan con las de los capítulos anteriores.

7.1. Análisis detallado del colapso en el nuevo enfoque

En el Capítulo 3 estudiamos el proceso de cuantización tradicional, recordemos que las ecuaciones que inspiraron dicho proceso fueron (3.89), en particular, la ecuación para u está dada por

$$\nabla^2 u = z \left(\frac{v}{z} \right)' \quad (7.1)$$

donde la variable u , durante inflación, es $u = \Psi a / (4\pi G \phi_0')$. En términos del potencial Newtoniano, la ecuación (7.1) se reescribe como

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G \frac{\phi_0'}{a} \left(v' - \frac{z'}{z} v \right) \quad (7.2)$$

Por otra parte, como vimos en el Capítulo 3, la variable de cuantización, en el procedimiento usual, es la variable de Mukhanov-Sasaki, i.e., v que se define como $v \equiv a\delta\phi + a\phi_0'\Psi/\mathcal{H}$. Así, al cuantizar la variable v se da una cuantización automática de la perturbación de la métrica Ψ . Por lo tanto, nuestra variable cuántica de campo será \hat{v} y su momento conjugado (véase sección 3.6.4) $\hat{\pi}_v = \hat{v}'$. Descomponiendo a \hat{v} en modos de Fourier, tenemos

$$\hat{v}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) \quad (7.3)$$

donde nuevamente asumimos que el campo se encuentra en una caja de lado L con condiciones de borde periódicas. La ecuación de movimiento para $v_{\mathbf{k}}$ se obtiene de (3.91), es decir,

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}} = 0, \quad (7.4)$$

Las reglas de conmutación para los operadores \hat{v} y $\hat{\pi}_v$ son: $[\hat{v}(\eta, x), \hat{v}(\eta, y)] = [\hat{\pi}_v(\eta, x), \hat{\pi}_v(\eta, y)] = 0$, $[\hat{v}(\eta, x), \hat{\pi}_v(\eta, y)] = i\delta(x - y)$.

Durante el periodo inflacionario, la cantidad z está definida como $z \equiv a\phi_0'/\mathcal{H}$, utilizando la aproximación *slow-roll*, dicha cantidad la podemos reescribir como $z = a\sqrt{\epsilon/(4\pi G)}$. Utilizando que durante el regimen inflacionario $\epsilon \simeq \text{const.}$, tenemos que $z''/z \simeq a''/a$, por lo que la ecuación de movimiento para los modos $v_{\mathbf{k}}$ se reescribe como

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0. \quad (7.5)$$

La solución de (7.5), en el régimen inflacionario, es

$$v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) e^{-ik\eta}, \quad (7.6)$$

donde nuevamente, la elección de $v_k(\eta)$ está relacionada con el vacío de la teoría, i.e., el vacío de Bunch-Davies. Por lo tanto, el estado vacío $|0\rangle$ es un estado del campo espacialmente homogéneo e isotrópico, lo cual se puede comprobar aplicando directamente los operadores de rotación o traslación (asociados con las hipersuperficies $\eta = \text{const.}$ del espacio-tiempo de fondo) al estado vacío.

Es en este punto donde introducimos la propuesta del ‘auto-colapso’. Esto es, asumimos que a un tiempo η_k^c el estado $|0\rangle$ cambió, debido a un aspecto intrínseco del sistema, que podría o no estar ligado a la gravedad, a un nuevo estado $|\Xi\rangle$. Siguiendo las ideas presentadas en Capítulo 4, parametrizaremos este colapso de una manera fenomenológica, teniendo como objetivo la extracción de información acerca de los detalles que caracterizan al ‘auto-colapso’.

Nuevamente, es conveniente reexpresar al campo \hat{v} y su momento conjugado $\hat{\pi}_v$ como:

$$\hat{v}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \hat{\pi}_v(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (7.7)$$

donde $\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) \equiv v_k(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}} + v_k^*(\eta)\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{\pi}_{v\mathbf{k}}(\eta) \equiv v_k'(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}} + v_k'^*(\eta)\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger$. Descomponiendo a $\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta)$ y $\hat{\pi}_{v\mathbf{k}}(\eta)$ en sus respectivas partes reales e imaginarias, que además son completamente Hermitianas, tenemos $\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) = \hat{v}_{\mathbf{k}}^R(\eta) + i\hat{v}_{\mathbf{k}}^I(\eta)$ y $\hat{\pi}_{v\mathbf{k}}(\eta) = \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^R(\eta) + i\hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^I(\eta)$, donde

$$\hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v_k(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)} + v_k^*(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger(R,I)} \right), \quad (7.8a)$$

$$\hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v_k'(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)} + v_k'^*(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger(R,I)} \right), \quad (7.8b)$$

donde

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}), \quad \hat{a}_{\mathbf{k}}^I \equiv \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{-\mathbf{k}}). \quad (7.9)$$

Las reglas de conmutación, para los operadores de aniquilación y creación, reales e imaginarios, son, respectivamente

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^R, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{R\dagger}] = L^3(\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}), \quad (7.10a)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^I, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{I\dagger}] = L^3(\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}). \quad (7.10b)$$

Sea $|\Xi\rangle$ cualquier estado del campo \hat{v} , definimos a las cantidades $D_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$, $C_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $E_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ de la siguiente manera:

$$D_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \equiv \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \rangle_{\Xi}, \quad (7.11a)$$

$$C_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \equiv \langle (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)})^2 \rangle_{\Xi}, \quad (7.11b)$$

$$E_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \equiv \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \rangle_{\Xi}, \quad (7.11c)$$

Utilizando las cantidades anteriores, encontramos los valores de expectación de los modos del campo y su momento conjugado, es decir,

$$\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} = \sqrt{2} \Re \left(v_k(\eta) D_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right), \quad (7.12a)$$

$$\langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} = \sqrt{2} \Re \left(v'_k(\eta) D_{\mathbf{k}}^{(R,I)} \right). \quad (7.12b)$$

En particular, para el estado vacío $|0\rangle$, tenemos que $D_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = C_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = E_{\mathbf{k}}^{(R,I)} = 0$, y consecuentemente

$$\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_0 = 0, \quad \langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_0 = 0, \quad (7.13)$$

con las incertidumbres dadas por

$$\left(\Delta \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \right)_0^2 = \frac{1}{2} |v_k(\eta)|^2 L^3, \quad (7.14a)$$

$$\left(\Delta \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \right)_0^2 = \frac{1}{2} |v'_k(\eta)|^2 L^3. \quad (7.14b)$$

El siguiente paso consiste en especificar las reglas bajo las cuales ocurre el colapso, i.e., especificar el esquema de colapso. De nuevo, en este punto el criterio a utilizar será la simpleza y naturalidad. Para continuar con el cálculo, y puesto que en este capítulo no estamos interesados en caracterizar al estado post-colapso, dejaremos de lado las cantidades $C_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $E_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$, las cuales están relacionadas con el ancho del paquete de onda que describe al estado post-colapso. Por lo tanto, nos enfocaremos en la cantidad $D_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$: en el estado vacío, los valores de expectación de $\hat{v}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{\pi}_{v\mathbf{k}}$ se

encuentran distribuidos individualmente de acuerdo a una Gaussiana centrada en 0 con dispersion $(\Delta \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c))_0^2$ y $(\Delta \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c))_0^2$. Ignorando la correlación entre la variable de campo y su momento conjugado en el estado vacío, supondremos que los valores de expectación de $\hat{v}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{\pi}_{v\mathbf{k}}$ en el estado post-colapso $|\Xi\rangle$ están caracterizados por

$$\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = x_{\mathbf{k},I}^{(R,I)} \sqrt{(\Delta \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c))_0^2} = x_{\mathbf{k},I}^{(R,I)} |v_k(\eta_k^c)| \sqrt{L^3/2}, \quad (7.15a)$$

$$\langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = x_{\mathbf{k},II}^{(R,I)} \sqrt{(\Delta \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c))_0^2} = x_{\mathbf{k},II}^{(R,I)} |v'_k(\eta_k^c)| \sqrt{L^3/2}, \quad (7.15b)$$

donde $x_{\mathbf{k},I}^{(R,I)}$, $x_{\mathbf{k},II}^{(R,I)}$ son variables aleatorias distribuidas a lo largo de una Gaussiana centrada en cero con dispersion 1.

Utilizando las expresiones (7.12), evaluadas al tiempo de colapso η_k^c , e igualándolas con (7.15), es posible obtener $D_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ en términos de $\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi}$ y $\langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi}$, de esta manera, las expresiones correspondientes a la evolución de los valores esperados de $\hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta)$ y $\hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta)$ son

$$\begin{aligned} \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} &= \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{k\eta z_k} - \frac{1}{z_k^2} \right) \cos(k\eta - z_k) + \left[\frac{1}{k\eta} \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) + \frac{1}{z_k} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \sin(k\eta - z_k) \right\} + \langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \left[\left(1 + \frac{1}{k\eta z_k} \right) \sin(k\eta - z_k) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{k\eta} - \frac{1}{z_k} \right) \cos(k\eta - z_k) \right], \end{aligned} \quad (7.16a)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta) \rangle_{\Xi} &= k \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \left\{ \left[\frac{1}{k\eta} \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) - \frac{1}{z_k} \left(\frac{1}{(k\eta)^2} - 1 \right) \right] \cos(k\eta - z_k) - \left[\frac{1}{k\eta z_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{(k\eta)^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) \right] \sin(k\eta - z_k) \right\} + \langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \left\{ \left[1 + \frac{1}{k\eta z_k} - \frac{1}{(k\eta)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \cos(k\eta - z_k) - \left[\frac{1}{k\eta} - \frac{1}{z_k} \left(\frac{1}{(k\eta)^2} - 1 \right) \right] \sin(k\eta - z_k) \right\}, \end{aligned} \quad (7.16b)$$

donde $z_k \equiv k\eta_k^c$. Es importante señalar que las expresiones (7.16) son distintas a (4.23), las cuales describen la evolución de los valores de expectación de los campos $\hat{y}_k^{(R,I)}(\eta)$, y su momento conjugado, correspondientes al procedimiento de cuantización presentado en el Capítulo 4.

Con la ayuda de (7.2), podemos calcular $\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi}$ en el estado post-colapso, es decir,

$$\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi} = \frac{-4\pi G \phi'_0}{ak^2} \left(\langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi} + \frac{1}{\eta} \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi} \right). \quad (7.17)$$

Sustituyendo (7.16) en (7.17) tenemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi} &= \frac{-s}{ak^2} \left\{ k \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \left[\frac{\cos(k\eta - z_k)}{z_k} + \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) \sin(k\eta - z_k) \right] \right. \\ &\quad \left. + \langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} \left[\cos(k\eta - z_k) + \frac{\sin(k\eta - z_k)}{z_k} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

con $s \equiv a\sqrt{V}\epsilon/(\sqrt{6}M_P^2)$, $\langle \hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^R(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} + i \langle \hat{v}_{\mathbf{k}}^I(\eta_k^c) \rangle_{\Xi}$ y $\langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} = \langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^R(\eta_k^c) \rangle_{\Xi} + i \langle \hat{\pi}_{v\mathbf{k}}^I(\eta_k^c) \rangle_{\Xi}$. Tomando en cuenta el esquema de colapso (7.15), finalmente encontramos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi} &= -\frac{sL^{3/2}}{2ak^{3/2}} \left\{ (x_{\mathbf{k},I}^R + ix_{\mathbf{k},I}^I) \left[1 + \frac{1}{z_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos \Delta_k}{z_k} + \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) \sin \Delta_k \right] \right. \\ &\quad \left. + (x_{\mathbf{k},II}^R + ix_{\mathbf{k},II}^I) \left[1 - \frac{1}{z_k^2} + \frac{1}{z_k^4} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\cos \Delta_k + \frac{\sin \Delta_k}{z_k} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

donde $\Delta_k \equiv k\eta - z_k$.

Es aquí donde se comienza a observar la diferencia conceptual con el enfoque del colapso (i.e., el que se estudió en el Capítulo 4). Recordemos que la cantidad observable corresponde a las fluctuaciones de la temperatura $\delta T/T$ en el CMB. Como se discutió en la sección 3.7.1, $\delta T/T$ se relaciona directamente con el potencial Newtoniano Ψ , el cual es una cantidad clásica o mejor dicho un observable. Por lo tanto, es necesario hacer la identificación $\langle \hat{\Psi} \rangle = \Psi$ y además justificar dicha identificación. Sin embargo, resulta complicado encontrar una justificación para realizar la identificación $\langle \hat{\Psi} \rangle = \Psi$ debido a que existen algunos problemas conceptuales que mencionaremos a continuación.

Los estados post-colapso $|\Xi\rangle$ “permitidos”, son aquellos para los cuales podemos hacer la identificación $\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi} \simeq \Psi_{\mathbf{k}}(\eta)$, esto es, necesitamos que el estado post-colapso sea tal que permita asociar la cantidad clásica $\Psi_{\mathbf{k}}$ con el valor de expectación del operador cuántico $\hat{\Psi}_{\mathbf{k}}$, lo cual siempre se puede hacer si el estado post-colapso $|\Xi\rangle$ es un estado “muy picudo”. Sin embargo, el criterio sobre los posibles estados post-colapso permitidos, basado únicamente en que la identificación $\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi} \simeq \Psi_{\mathbf{k}}(\eta)$

sea válida, no es un criterio general y, puesto que desconocemos el mecanismo de colapso, realmente no existe una justificación fuerte que nos permita pasar de valores de expectación cuánticos a promedios sobre ensambles de campos clásicos¹. Notemos que en el esquema de colapso presentado en el Capítulo 4 (esto es, haciendo uso de las ecuaciones semi-clásicas) no tenemos que lidiar con este problema ya que la métrica (y sus perturbaciones) siempre es una cantidad clásica.

Por otra parte, cabe señalar que, el estado vacío es justamente un estado que permite relacionar $\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_0 \simeq \Psi_{\mathbf{k}}(\eta)$, no obstante, de (7.17) encontramos que $\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_0 = 0$, lo que implica que $\Psi_{\mathbf{k}}(\eta) = 0$, esto es el universo es homogéneo e isotrópico, y por tanto, es sólo hasta después del colapso cuando aparecen las inhomogeneidades de la métrica.

En la siguiente sección calcularemos las predicciones teóricas, asumiendo que, de alguna manera, la identificación $\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle_{\Xi} \simeq \Psi_{\mathbf{k}}(\eta)$ es válida.

7.2. Predicciones teóricas bajo el nuevo enfoque

Para relacionar la cantidad $\Psi_{\mathbf{k}}(\eta)$, obtenida de (7.19), con las cantidades observacionales, recurriremos nuevamente a la cantidad ζ , debido a que, para modos “fuera del horizonte” y “perturbaciones” adiabáticas (estas condiciones se discutieron en la sección 3.6.3), es una cantidad conservada en cualquier era cosmológica, lo cual nos permite relacionar el potencial Newtoniano de la época de radiación (i.e., la época de donde se obtienen los datos observacionales) con el correspondiente proveniente de inflación. Los modos fuera del horizonte se caracterizaron por la condición $k \ll \mathcal{H}$, utilizando que durante la inflación $\mathcal{H} \simeq -1/\eta$, la condición $k \ll \mathcal{H}$ se puede reexpresar como $-k\eta \ll 1$ (recordemos que $\eta < 0$ durante la inflación). Por tanto, al tomar el límite $-k\eta \rightarrow 0$ en las funciones $\Psi_{\mathbf{k}}(\eta)$ (calculadas en la época inflacionaria), equivale a considerar los modos fuera del horizonte. De esta manera el potencial Newtoniano $\Psi_{\mathbf{k}}^{inf}(\eta)$ durante el regimen inflacionario (7.19), en el límite $-k\eta \rightarrow 0$, se expresa como:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}^{inf}(\eta) = & -\frac{sL^{3/2}}{2ak^{3/2}} \left\{ (x_{\mathbf{k},I}^R + ix_{\mathbf{k},I}^I) \left[1 + \frac{1}{z_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos z_k}{z_k} - \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) \sin z_k \right] \right. \\ & \left. + (x_{\mathbf{k},II}^R + ix_{\mathbf{k},II}^I) \left[1 - \frac{1}{z_k^2} + \frac{1}{z_k^4} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\cos z_k - \frac{\sin z_k}{z_k} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

¹En el paradigma inflacionario estándar (i.e., sin introducir la propuesta de colapso) se hace la suposición, no justificada, de que para modos fuera del horizonte (i.e., modos con $-k\eta \rightarrow 0$) se cumple que $\hat{\Psi}_{\mathbf{k}} \rightarrow \Psi_{\mathbf{k}}$ y posteriormente se obtienen las predicciones teóricas.

donde utilizamos que $\Delta_k \rightarrow -z_k$ si $-k\eta \rightarrow 0$. La conservación de ζ , para modos $k \ll \mathcal{H}$, implica la expresión (5.9), es decir, $\Psi_{\mathbf{k}}^{rad} = \frac{2}{3}\Psi_{\mathbf{k}}^{inf}$. Por lo que, el potencial Newtoniano en la época dominada por radiación, en el límite $-k\eta \rightarrow 0$, es

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}}(\eta)^{rad} &= -\sqrt{\frac{V}{54\epsilon}} \frac{L^{3/2}}{M_P^2 k^{3/2}} \left\{ (x_{\mathbf{k},I}^R + ix_{\mathbf{k},I}^I) \left[1 + \frac{1}{z_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos z_k}{z_k} - \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) \sin z_k \right] \right. \\ &\quad \left. + (x_{\mathbf{k},II}^R + ix_{\mathbf{k},II}^I) \left[1 - \frac{1}{z_k^2} + \frac{1}{z_k^4} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\cos z_k - \frac{\sin z_k}{z_k} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

donde además usamos la definición de $s \equiv a\sqrt{V\epsilon}/\sqrt{6}M_P^2$. Es importante señalar que existen dos razones por las cuales trabajaremos en el límite $k \ll \mathcal{H}$: Primero, la cantidad ζ se conserva únicamente para dichos modos, y es por ello que nos fue posible obtener el resultado (7.21). Segundo, el Efecto Sachs-Wolfe $\delta T/T \sim \Psi$, el cual se relaciona directamente con los datos observacionales, es dominante para los modos mayores que el radio de Hubble (como se discutió en la sección 3.7.1).

Recordemos que la cantidad de interés observacional son los coeficientes α_{lm} (3.7.1) (véase también Apéndice C), que en términos del potencial Newtoniano, se escriben como

$$\alpha_{lm} = \int d^2\Omega \Psi(\eta_D, \mathbf{x}_D) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (7.22)$$

donde η_D es el tiempo conforme del desacople y $\mathbf{x}_D = R_D(\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta)$ con R_D el radio de la última superficie de dispersión, θ, ϕ son coordenadas esféricas correspondientes a la 2-esfera celeste.

Descomponiendo al potencial Newtoniano en modos de Fourier $\Psi(\eta_D, \mathbf{x}_D) = L^{-3} \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}(\eta_D) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_D}$, y utilizando (7.21), obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_{lm} &= -\int d^2\Omega \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{V}{54\epsilon}} \frac{L^{-3/2}}{M_P^2 k^{3/2}} \left\{ (x_{\mathbf{k},I}^R + ix_{\mathbf{k},I}^I) \left[1 + \frac{1}{z_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos z_k}{z_k} - \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) \sin z_k \right] \right. \\ &\quad \left. + (x_{\mathbf{k},II}^R + ix_{\mathbf{k},II}^I) \left[1 - \frac{1}{z_k^2} + \frac{1}{z_k^4} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\cos z_k - \frac{\sin z_k}{z_k} \right] \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} Y_{lm}^*(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Utilizando las relaciones entre la función exponencial y los armónicos esféricos: $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_D} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kR_D) Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}})$, donde j_l corresponden a las funciones esféricas de Bessel y realizando la integral sobre la parte angular en (7.23), tenemos

$$\alpha_{lm} = - \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{V}{54\epsilon}} \frac{4\pi L^{-3/2}}{M_P^2 k^{3/2}} X(z_k) j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{k}), \quad (7.24)$$

donde

$$\begin{aligned} X(z_k) \equiv & (x_{\mathbf{k},I}^R + ix_{\mathbf{k},I}^I) \left[1 + \frac{1}{z_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos z_k}{z_k} - \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) \sin z_k \right] \\ & + (x_{\mathbf{k},II}^R + ix_{\mathbf{k},II}^I) \left[1 - \frac{1}{z_k^2} + \frac{1}{z_k^4} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\cos z_k - \frac{\sin z_k}{z_k} \right] \end{aligned} \quad (7.25)$$

La cantidad predicha en el esquema de colapso, es el valor más probable de $|\alpha_{lm}|^2$. Esto es, utilizamos un ensamble imaginario de universos y la estimación del valor más probable $|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2$ dado por el valor medio del ensamble $|\overline{\alpha_{lm}}|^2$ (véase la discusión de la naturaleza estadística de $|\alpha_{lm}|^2$ en la sección 5.2).

Como un primer paso, calculemos la cantidad $|\alpha_{lm}|^2$, esto es,

$$|\alpha_{lm}|^2 = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{V}{54\epsilon} \frac{16\pi^2 L^{-3}}{M_P^4 k^{3/2} k'^{3/2}} X(z_k) X^*(z_{k'}) j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{k}) j_l(k'R_D) Y_{lm}^*(\hat{k}'). \quad (7.26)$$

El siguiente paso es tomar el valor medio del ensamble. El cálculo del valor medio se simplificará debido al hecho que, como es usual, el promedio sobre las variables aleatorias lleva a una cancelación de los términos cruzados. En nuestro caso, encontramos

$$\overline{X(z_k) X^*(z_{k'})} = M_k M_{k'} (\overline{x_{k,I}^R x_{k',I}^R} + \overline{x_{k,I}^I x_{k',I}^I}) + N_k N_{k'} (\overline{x_{k,II}^R x_{k',II}^R} + \overline{x_{k,II}^I x_{k',II}^I}), \quad (7.27)$$

donde

$$M_k \equiv \left[1 + \frac{1}{z_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos z_k}{z_k} - \left(\frac{1}{z_k^2} - 1 \right) \sin z_k \right], \quad (7.28)$$

$$N_k \equiv \left[1 - \frac{1}{z_k^2} + \frac{1}{z_k^4} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\cos z_k - \frac{\sin z_k}{z_k} \right], \quad (7.29)$$

y también utilizamos la independencia entre los cuatro conjuntos de las variables aleatorias $x_{k,I}^R, x_{k,I}^I, x_{k,II}^R, x_{k,II}^I$. Sin embargo, recordemos que dentro de cada conjunto, las variables correspondientes a \mathbf{k} y \mathbf{k}' no son independientes. Esto último se verá reflejado en los promedios

$$\overline{x_{\mathbf{k},i}^R x_{\mathbf{k}',i}^R} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}, \quad (7.30a)$$

$$\overline{x_{\mathbf{k},i}^I x_{\mathbf{k}',i}^I} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}, \quad (7.30b)$$

donde $i = I, II$. Por lo tanto,

$$\overline{X(z_{\mathbf{k}})X^*(z_{\mathbf{k}'})} = (M_{\mathbf{k}}^2 + N_{\mathbf{k}}^2)\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \quad (7.31)$$

Consecuentemente, la expresión para el valor más probable, el cual como comentamos es una buena aproximación para el valor medio del ensamble, es

$$|\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{V}{54\epsilon} \frac{16\pi^2 L^{-3}}{M_P^4 k^3} (M_{\mathbf{k}}^2 + N_{\mathbf{k}}^2) j_l^2(kR_D) |Y_{lm}(\hat{k})|^2. \quad (7.32)$$

Recordando que los valores permitidos para los componentes de \mathbf{k} están separados por $\Delta k_i = 2\pi/L$, escribiremos la suma como una integral

$$\begin{aligned} |\alpha_{lm}|_{M.P.}^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{V}{54\epsilon} \frac{16\pi^2}{M_P^4 k^3} (M_{\mathbf{k}}^2 + N_{\mathbf{k}}^2) j_l^2(kR_D) |Y_{lm}(\hat{k})|^2 \\ &= \frac{V}{27\pi\epsilon M_P^4} \int \frac{dk}{k} (M_{\mathbf{k}}^2 + N_{\mathbf{k}}^2) j_l^2(kR_D) \int d\Omega_{\hat{k}} |Y_{lm}(\hat{k})|^2 \\ &= \frac{V}{27\pi\epsilon M_P^4} \int \frac{dk}{k} U(z_{\mathbf{k}}) j_l^2(kR_D) \end{aligned} \quad (7.33)$$

donde $U(z_{\mathbf{k}}) \equiv M_{\mathbf{k}}^2 + N_{\mathbf{k}}^2$. Recordemos que la cantidad que se presenta como resultado de las observaciones es el espectro de potencias angular, i.e., $OB_l = l(l+1)C_l$, donde $C_l = (2l+1)^{-1} \sum_m |\alpha_{lm}^{obs}|^2$. Ignorando la física de plasmas correspondiente a la época posterior del regimen inflacionario, OB_l es esencialmente una cantidad independiente de l correspondiente a la amplitud de las perturbaciones de la métrica.

Asumiendo que el tiempo de colapso ocurre dentro de los primeros instantes de la inflación $z_{\mathbf{k}} \rightarrow -\infty$, i.e., $U(z_{\mathbf{k}}) \rightarrow 1$ y utilizando que $\int x^{-1} j_l^2(x) dx = \pi/[l(l+1)]$, encontramos

$$OB_l = \frac{V}{27\epsilon M_P^4}. \quad (7.34)$$

Nuevamente recuperamos el espectro invariante de escala. Al igual que en los capítulos anteriores, es posible recuperar el espectro plano (confirmado observacionalmente), para el caso de un tiempo de colapso finito, imponiendo la condición $\eta_{\mathbf{k}}^c \propto k^{-1}$, es decir, $z_{\mathbf{k}}$ independiente de k , también nos lleva a la predicción estándar de un espectro plano de Harrison-Zel'dovich.

7.3. Análisis preliminar sobre los modos tensoriales

Hasta este punto en este capítulo, las dificultades que hemos encontrado al dejar de lado el enfoque semi-clásico pero manteniendo la hipótesis del colapso, han sido a nivel conceptual. Sin embargo, las predicciones teóricas, relacionadas con la amplitud del espectro de las fluctuaciones escalares de la métrica, han sido las mismas que en los Capítulos 5 y 6. En esta sección realizaremos un análisis preliminar de las predicciones teóricas provenientes de las perturbaciones tensoriales de la métrica.

Comencemos nuestra discusión retomando el enfoque de gravedad semi-clásica $G_{ab} = 8\pi G \langle \hat{T}_{ab} \rangle$ aplicado al universo inflacionario y la hipótesis de colapso. En este enfoque la fuente de las fluctuaciones que dan origen a las anisotropías e inhomogeneidades, está relacionada con las incertidumbres cuánticas del campo escalar, el cual colapsa, debido algún efecto cuántico-gravitacional desconocido. Una vez que ocurre el colapso, las inhomogeneidades y anisotropías en la densidad alimentan a los grados de libertad gravitacionales, lo que produce perturbaciones no triviales en las fluctuaciones de la métrica, en particular, el potencial Newtoniano. Sin embargo, la métrica misma no es fuente del colapso ‘auto-inducido’. Consecuentemente, el campo escalar no es fuente de los modos tensoriales -al menos no al orden más bajo-, los modos tensoriales no se excitan. Por lo tanto, como se ha discutido en [89, 103], la predicción del esquema de colapso, junto con en el enfoque de gravedad semi-clásica, es una amplitud de cero -ó al menos fuertemente suprimida- para las ondas gravitacionales en el CMB.

Por otra parte, en el caso del sistema inflatón-gravedad, las perturbaciones a primer orden del tensor de Einstein G_{ab} , para los modos tensoriales, toman la forma

$$\delta G_0^0 = \delta G_i^i = 0, \quad (7.35a)$$

$$\delta G_j^i = - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \left(\frac{1}{a^2} \right) \nabla^2 h_{ij} \right). \quad (7.35b)$$

donde h_{ij} es un tensor simétrico, con divergencia y traza cero. El tensor h_{ij} posee dos grados de libertad independientes, correspondientes al tipo de polarización asociada a las ondas gravitacionales. Si adoptamos el enfoque de que la métrica es una variable fundamental a nivel cuántico, entonces es posible realizar un procedimiento de cuantización de la cantidad h_{ij} , el cual es muy parecido al de las perturbaciones escalares. El procedimiento de cuantización tradicional [80, 79, 112], comienza realizando una expansión en la acción (3.43) a segundo orden en las perturbaciones de la métrica h_{ij} . El resultado es

$$S = \frac{1}{64\pi G} \int d\eta d^3x a^2 (h_j^{i'} h_i^{j'} - \nabla_l h_j^i \nabla^l h_i^j) \quad (7.36)$$

Al cuantizar el campo \hat{h}_{ij} (en el esquema de Heisenberg), obtenemos

$$\hat{h}_{ij}(\mathbf{x}, \eta) = \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3x [h_{\mathbf{k}}(\eta) \hat{\beta}(\mathbf{k}, \lambda) e_{ij}(\hat{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + h_{\mathbf{k}}^*(\eta) \hat{\beta}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e_{ij}^*(\hat{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (7.37)$$

donde e_{ij} es un tensor de polarización independiente de η y satisface las condiciones

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad e_{ii} = 0, \quad k^i e_{ij} = 0, \quad (7.38)$$

las funciones $h_{\mathbf{k}}(\eta)$ son soluciones de la ecuación

$$h_{\mathbf{k}}'' + 2\mathcal{H}h_{\mathbf{k}}' + k^2 h_{\mathbf{k}} = 0. \quad (7.39)$$

Las relaciones de conmutación para los operadores de aniquilación y creación vienen dadas por

$$[\hat{\beta}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{\beta}(\mathbf{k}', \lambda')] = 0, \quad [\hat{\beta}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{\beta}^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (7.40)$$

Como en el caso de las perturbaciones escalares, asumimos que durante la inflación, el universo se encuentra en el estado cuántico $|0\rangle$, el cual satisface la condición de vacío $\hat{\beta}(\mathbf{k}, \lambda)|0\rangle = 0$. Por lo tanto, en el estado vacío se tiene que $\langle \hat{h}_{ij}(\mathbf{x}, \eta) \rangle_0 = 0$.

Es en este punto del análisis donde se aprecia la necesidad de incluir la hipótesis del colapso, ya que de lo contrario, como se discutió en el capítulo 4, no hay una justificación satisfactoria de obtener inhomogeneidades en la métrica, es decir, es sólo después de un colapso de la función de onda, que podemos afirmar que se imprimen las inhomogeneidades en el CMB. En otras palabras, el hecho de que para un estado post-colapso $|\Xi\rangle$, se cumpla que $\langle \hat{h}_{ij}(\mathbf{x}, \eta) \rangle_\Xi \neq 0$, permite de alguna manera, la identificación $\langle \hat{h}_{ij} \rangle \simeq h_{ij}$. Por lo tanto, el asumir que la descripción de la gravedad basada en la métrica se mantiene a nivel fundamental, aunado a la hipótesis de colapso, nos lleva, en principio, a la predicción de que la amplitud de los modos tensoriales es distinta de cero. Evidentemente, para confirmar esto último necesitaríamos continuar con un análisis más detallado, i.e., relacionar las predicciones teóricas correspondientes a los modos tensoriales (e.g., el espectro de potencias de los modos tensoriales)

con las cantidades observacionales (e.g., la polarización del CMB), dicho análisis es un trabajo en proceso por parte del autor de esta tesis.

Es importante señalar que, aunque en el enfoque de este capítulo es posible obtener predicciones acerca de los datos observacionales, sigue existiendo un aspecto conceptual problemático, el cual consiste en pasar de la descripción cuántica (\hat{h}_{ij}) al tratamiento clásico (h_{ij}).

Debido a lo anterior, concluimos que, aún adoptando la hipótesis del colapso, las predicciones sobre las cantidades observacionales, pueden llegar a ser realmente distintas dependiendo de la descripción fundamental de la gravedad, como es el caso de la existencia de ondas gravitacionales en el CMB provenientes del periodo inflacionario.

Capítulo 8

Conclusiones y Trabajo Futuro

El punto de partida de este trabajo de tesis está basado en la propuesta que se presentó por primera vez en [89]. Ahí, se argumentó que la explicación propuesta por el paradigma inflacionario, acerca del origen de la estructura cósmica, posee un serio problema, esto es, la emergencia de estructura a partir de un estado inicial homogéneo e isotrópico, lo cual no es claro si no es posible identificar el mecanismo mediante el cual la simetría original se rompe. La propuesta planteada, denominada *la hipótesis del colapso auto-inducido*, motivada para lidiar con este problema, consistió en introducir una modificación de la teoría cuántica estándar correspondiente a la reducción dinámica de la función de onda, lo cual es de particular importancia en el contexto cosmológico debido a que no existen “observadores que colapsen” a la función de onda, ni tampoco es clara la identificación de un ambiente no trivial para el estado vacío. Adicionalmente, al considerar a la métrica como una descripción efectiva de los grados de libertad más fundamentales relacionados con la gravedad (es decir, la métrica siempre es una cantidad clásica), no tuvimos que enfrentar la justificación de la transición de un tratamiento cuántico, correspondiente a las perturbaciones de la métrica, hacia su descripción clásica, lo cual es una ventaja sobre el paradigma inflacionario estándar, donde se pretende justificar la identificación de las correlaciones de dos puntos cuánticas con correlaciones estadísticas clásicas.

En este contexto cabe plantearse las siguientes preguntas: ¿Qué fue lo que se ganó al introducir, en la teoría física, un elemento ad-hoc y sin explicación conocida?, ¿Por qué no aceptar un simple paso (problemático) en el argumento dentro del paradigma teórico establecido?. La respuesta: Primero, se reconoce explícitamente que existe un aspecto faltante y que debe someterse a una investigación más profunda. Segundo, el modelo y la parametrización de la física no conocida pueden servir como el punto de partida para la investigación de los aspectos de la física que

aún no se han incorporado a nuestras teorías fundamentales. De hecho, el escenario cosmológico ofrece una gran cantidad de datos observacionales, que junto con los análisis llevados a cabo y los resultados obtenidos, nos indican que estamos en la posición de enfrentar, con estudios científicos serios, el reto de entender algunas de las características que posee la nueva física.

La investigación, basada en la hipótesis de colapso, ha continuado desde que se propuso por primera vez [103, 105, 104, 107, 106], obteniendo resultados interesantes [32, 62, 61]. El trabajo original en esta tesis representa la continuación de la investigación de dicha propuesta.

Uno de los temas que se investigaron fue el problema de ajuste fino del potencial inflacionario. Este problema se refiere al hecho de que, en el enfoque inflacionario tradicional, se obtiene que la escala de energía del potencial V se encuentra restringida de manera no-natural, debido a que la predicción correspondiente a la amplitud del espectro primordial es $\sim V/\epsilon M_P^4$. Lo anterior puede considerarse como un problema de ajuste fino debido a que, en el modelo tradicional, V debe disminuir a medida que ϵ disminuye. Esto es, para obtener un espectro plano ϵ debe tener un valor muy pequeño (aproximadamente 10^{-2} en los modelos más populares [11]), lo que implica que V debe ajustarse para prevenir que la escala de las fluctuaciones aumente de tal manera que se vuelva incompatible con las observaciones. Por otro lado, el paradigma inflacionario estándar sufre de los ya mencionados problemas conceptuales ligados al origen de las inhomogeneidades. En el caso de los análisis anteriores de la propuesta de colapso [89, 103, 105, 104, 107], se pensó que esta propuesta podría resolver de manera natural el problema –más técnico– de ajuste fino.

En el Capítulo 5, concluimos que, efectivamente, existe una predicción dentro del esquema de colapso, en la cual la amplitud del espectro de potencias puede ser $\sim \epsilon V/M_P^4$, siempre y cuando escojamos una caracterización muy particular de los parámetros del colapso. Para un colapso genérico, no obstante, obtenemos el mismo resultado incómodo que el enfoque estándar. Además, encontramos que la elección de los parámetros, que dan lugar a un espectro con el comportamiento adecuado, parece involucrar un aspecto teleológico no deseado. Este es el principal argumento en contra de las expectativas anteriores respecto al problema de ajuste fino. Sin embargo, el hecho de que el nuevo enfoque involucre aspectos diferentes como parte de la explicación del nacimiento de las inhomogeneidades primordiales, puede conducir a enfoques viables e inesperados para lidiar con este y otros aspectos problemáticos de los modelos inflacionarios.

Es importante señalar que el modelo de colapso no se introdujo originalmente para lidiar con el problema de la amplitud del espectro, sino para enfrentar los problemas conceptuales más importantes que afligen a la explicación estándar sobre el origen

de la estructura cósmica. En este sentido, debemos remarcar que los resultados del Capítulo 5, muestran que las ideas detrás del esquema de colapso no son de índole meramente filosófico, sino que son susceptibles a un estricto análisis cuantitativo y abren la posibilidad de contrastar la teoría con las observaciones. Además, el hecho de que en el modelo de colapso exista una posibilidad técnica para ajustar los parámetros que describen al colapso, de tal manera que se resuelva el problema de ajuste fino, y a pesar del hecho de que tal solución parezca poco convincente (al menos en la ausencia de un mecanismo causal que pudiera justificar la condición (5.48)), puede calificarse como algo ilustrativo del potencial que ofrece el nuevo enfoque para lidiar con los problemas más específicos y técnicos de la cosmología inflacionaria.

En el Capítulo 6, estudiamos la posibilidad de ocurrieran colapsos múltiples en cada uno de los modos del campo cuántico. Para realizar este estudio, fue requerida una caracterización más detallada de los estados post-colapso, lo cual, a su vez, requirió de la introducción de suposiciones extras. En particular nos enfocamos en la posibilidad de que los estados post-colapso pudieran describirse en términos de estados coherentes o en su caso más general como estados squeezed, y bajo estas suposiciones, nos fue posible constreñir aún más (comparado con los análisis previos) los detalles del colapso necesarios para la compatibilidad con los datos observacionales.

El primer resultado obtenido del Capítulo 6 señala que, tanto en el esquema Independiente como en el Newtoniano, para poder recuperar un espectro plano, y asumiendo la hipótesis de colapso múltiples, las incertidumbres de la parte real e imaginaria de las fluctuaciones del campo inflacionario, i.e., $\hat{y}_{\mathbf{k}}$ y su momento conjugado $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}$, deben ser iguales. Este requerimiento nos sirve como guía para identificar a los candidatos más naturales a jugar el papel de estados post-colapso. De hecho, en la sección 6.4.1 encontramos que, para los estados coherentes, la relación anterior, entre las incertidumbres de la parte real e imaginaria de $\hat{y}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}$, se satisface automáticamente. Por consiguiente, un estado coherente es un candidato natural para un estado post-colapso. El hecho de que un estado coherente actúe como un buen candidato para un estado post-colapso, es compatible con la noción de que, un estado coherente del campo es el estado cuántico más parecido a una descripción clásica del campo y donde cabría esperar la validez de la aproximación semi-clásica.

Por otro lado, para un estado squeezed genérico $|\Sigma\rangle$, $(\Delta\hat{y}_{\mathbf{k}}^R)_{\Sigma}^2 \neq (\Delta\hat{y}_{\mathbf{k}}^I)_{\Sigma}^2$ y $(\Delta\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^R)_{\Sigma}^2 \neq (\Delta\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^I)_{\Sigma}^2$, lo cual no significa que los estados post-colapso squeezed están prohibidos por las observaciones. Esto es, podemos considerar estados post-colapso tales que los parámetros de squeezing $r_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ y $\theta_{\mathbf{k}}^{(R,I)}$ cumplan que $r_{\mathbf{k}}^R = r_{\mathbf{k}}^I$ y $\theta_{\mathbf{k}}^R = \theta_{\mathbf{k}}^I$ lo que ocasionaría que la relación entre las incertidumbres se cumpla. Además, en la sección 6.4.3, argumentamos que, dada una colección de múltiples estados post-colapso squeezed caracterizados por $r_{\mathbf{k}}^{c_n}$ y $\theta_{\mathbf{k}}^{c_n}$, entonces, la elección más simple, que nos per-

mite recuperar el espectro plano estándar, es que los parámetros de squeezing sean independientes de \mathbf{k} . El punto que queremos enfatizar es que estamos empleando a las observaciones como guía para inferir las características particulares del estado squeezed para que este pudiera considerarse como un estado post-colapso razonable. Debemos notar que, como se discutió en [32], no podemos esperar que dicho patrón se cumpla de manera estricta en una teoría que involucra un colapso controlado por eventos fundamentalmente aleatorios, y como tal, en principio, se deben investigar los efectos de las desviaciones de dicho patrón en los datos observacionales. La investigación detallada del aspecto peculiar de dichas desviaciones, así como también las cotas observacionales impuestas (i.e. análogas a las que se consideraron en [32]), es parte de nuestra investigación a seguir.

Otro resultado importante que obtuvimos en este trabajo de tesis es que el número de colapsos debe ser finito bajo condiciones genéricas. Sin embargo, en principio, es posible seleccionar un conjunto de estados post-colapso y ajustar las incertidumbres del campo (y su momento conjugado) y los tiempos de colapso de tal manera que la cantidad observacional predicha (la suma en (6.25)) permaneciese finita, incluso para un número infinito de colapsos. Evidentemente, esto resultaría en un ajuste fino del esquema, lo cual nos parece una opción poco convincente. Por otro lado, debemos mencionar que si el colapso, el cual da origen a las inhomogeneidades observadas en el CMB, fuera un proceso que ocurriese de manera indefinida, incluso después del término de la época inflacionaria, los Potenciales Newtonianos también estarían cambiando, afectando de una manera muy aleatoria la propagación de los fotones desde la última superficie de dispersión hasta nuestros satélites. Estas ideas podrían estar ligadas, al menos al nivel fenomenológico, con las presentadas en [30]. En este trabajo de tesis, nos enfocamos únicamente en las condiciones genéricas para el colapso durante el régimen inflacionario y encontramos, no sólo que el número de colapsos debe ser finito, sino también obtuvimos –bajo condiciones particulares sobre el estado post-colapso– una estimación aproximada del número de colapsos en términos de los parámetros del potencial inflacionario.

En el Capítulo 7, exploramos la idea de incorporar la propuesta de colapso al proceso de cuantización tradicional. Esto es, utilizamos el procedimiento usual de cuantizar tanto los campos de materia como las perturbaciones de la métrica. El precio que pagamos al seguir este camino fue que perdimos parte del entendimiento conceptual proporcionado por el esquema de colapso en el contexto de gravedad semi-clásica. En otras palabras, si bien las inhomogeneidades (espaciales) de la métrica siguen teniendo su origen sólo después de ocurrió un colapso, no se vislumbra una explicación satisfactoria de como dar el siguiente paso que nos relacionaría con las cantidades observacionales, es decir, no existe una buena justificación para la asociación

de valores de expectación cuánticos $\langle \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \rangle$ con los campos clásicos $\Psi_{\mathbf{k}}$. De hecho, este problema tiene su origen en la manera en que se decida tratar a la gravedad a nivel fundamental. Si creemos que la descripción dada por la métrica es sólo una descripción efectiva de los grados de libertad más fundamentales descritos por una teoría cuántica de la gravedad –como lo plantea el enfoque de gravedad semi-clásica– entonces no nos veríamos forzados a tratar con la “transición cuántico-clásica” de las variables gravitacionales, en cambio, si creemos que la descripción de la gravedad en términos de la métrica se mantiene incluso al nivel fundamental, tendríamos que enfrentar el problema tradicional de la macro-objetificación de la Mecánica Cuántica en el contexto inflacionario y el asunto de que no sabríamos a que atribuir el origen del colapso (en el enfoque del Capítulo 4 estaría ligado a la gravedad).

Este último argumento sirve también para explicar el porqué, bajo el esquema de colapso y en el contexto de gravedad semi-clásica, la predicción sobre la amplitud de las ondas gravitacionales en el CMB es cero (a orden lineal), esto es, el campo de fondo es homogéneo e isotrópico y el tensor de energía-momento es cuadrático en el campo, de manera que a primer orden en las perturbaciones no hay términos tensoriales en el tensor de energía-momento y por tanto, no hay ondas gravitacionales. Por otro lado, en el enfoque tradicional, los modos tensoriales siguen sin tener una fuente dada por los campos de materia, pero en este caso, a la métrica se le da un tratamiento cuántico, por lo tanto, lo que sea que genere las anisotropías en las fluctuaciones escalares, es de esperar que también lo haría en el caso de las fluctuaciones tensoriales lo que nos llevaría a esperar la generación de ondas gravitacionales. El análisis formal que involucra a la hipótesis del colapso con los modos tensoriales cuánticos es un tema en el cual el autor de esta tesis se encuentra trabajando. Por otra parte, el resultado que obtuvimos en el Capítulo 7, respecto a la relación del tiempo de colapso con la frecuencia del modo, i.e., $\eta_k^c \propto k^{-1}$, coincide con la obtenida en todos los trabajos anteriores, lo que nos lleva a suponer que esta dependencia es más robusta que con el mecanismo de colapso; evidentemente, esto último sólo lo podríamos asegurar hasta tener mayor información del proceso físico detrás del colapso.

Toda la discusión anterior muestra que, aunque en principio no conocemos la naturaleza de la física detrás de lo que denominamos *el colapso*, nos es posible, de hecho, obtener algunas pistas de las ‘reglas’ que lo gobiernan, i.e., aquellas que determinan la naturaleza de los estados post-colapso, los tiempos de colapso y el número de colapsos para cada modo, mediante la comparación de nuestras predicciones teóricas con los datos observacionales. Actualmente, estamos comenzando a investigar la posible conexión de nuestra propuesta con algunos mecanismos de colapso más elaborados que involucren modificaciones no unitarias a la teoría cuántica. Por lo tanto, el camino a seguir, por parte del autor de esta tesis, es explorar los mecanismos de

colapso que sean compatibles con las conclusiones obtenidas de esta tesis y de los trabajos previos. También estamos comenzando a incorporar la física de plasmas, que da origen a los picos acústicos en el CMB, a la hipótesis del colapso y de esta manera, estudiar como se afecta el espectro de potencias predicho por los esquemas de colapso para realizar predicciones directamente contrastables con las observaciones.

Creemos que, en el caso del paradigma inflacionario, no podemos conformarnos con el hecho de que los cálculos nos lleven a resultados que concuerden satisfactoriamente con las observaciones pero que no pueden justificarse dentro del contexto de las interpretaciones dadas por nuestras teorías físicas actuales. Reconocemos que, aunque nuestra propuesta ofrece una explicación más clara sobre el origen de la semillas de estructura cósmica, bien puede resultar siendo una propuesta incorrecta que necesite ser reemplazada por algo mucho más complejo que los paradigmas físicos establecidos. Lo que es claro es que la explicación tradicional sobre el genesis de estructura cósmica, algo que está íntimamente relacionado con el nacimiento de las condiciones necesarias para nuestra propia existencia, no es completamente satisfactoria y por otro lado, el acceso que tenemos en la actualidad (y tendremos en el futuro), a los datos empíricos, convierten a este problema en uno, no sólo susceptible a un análisis científico riguroso, sino también, desde nuestro punto de vista, en uno de los terrenos más fértiles y prometedores donde es posible explorar cuestiones mucho más fundamentales.

Apéndice A

Convenciones y unidades

Como sucede en prácticamente todas las ramas de la física, las unidades y convenciones se establecen de acuerdo al problema que se va analizar. En este Apéndice mencionaremos las convenciones y unidades que emplearemos en esta tesis.

La signatura que emplearemos para la métrica será $(- + + +)$. Para el tensor de Riemann utilizaremos la convención de Wald [109].

El punto (ó puntos) sobre las funciones $f(\dot{t})$ representa derivada de f respecto al tiempo cósmico t , mientras que la prima (ó primas) sobre funciones $f'(\eta)$ representa derivada respecto al tiempo conforme η

Respecto a las unidades, emplearemos las llamadas unidades naturales, las cuales consisten en tomar $c = k_B = \hbar = 1$, con k_B la constante de Boltzmann, pero mantendremos la constante gravitacional G . Por tanto, todas las dimensiones pueden expresarse en unidades de energía. La unidad de energía que adoptaremos será el GeV = 10^9 eV, así

$$[\text{Energía}] = [\text{Masa}] = [\text{Temperatura}] = [\text{Longitud}]^{-1} = [\text{Tiempo}]^{-1}.$$

La constante gravitacional G en unidades naturales es $G = 6.7186 \times 10^{-39} \text{ GeV}^{-2}$. En terminos de la Masa de Planck reducida M_P , la constante gravitacional viene dada por $G = 1/(8\pi M_P^2)$, donde $M_P = 2.436 \times 10^{18} \text{ GeV}$.

A continuación enlistamos algunos factores de conversion que serán de gran utilidad

$$\begin{aligned}1\text{GeV} &= 1.60 \times 10^{-3} \text{ erg (Energía)} \\1\text{GeV} &= 1.16 \times 10^{13} \text{ K (Temperatura)} \\1\text{GeV} &= 1.78 \times 10^{-24} \text{ g (Masa)} \\1\text{GeV}^{-1} &= 1.97 \times 10^{-14} \text{ cm (Longitud)} \\1\text{GeV}^{-1} &= 6.58 \times 10^{-25} \text{ s (Tiempo)}\end{aligned}$$

En ocasiones, adoptaremos unidades empleadas en astronomía tales como el *parsec*. Un parsec se define como la distancia a la que una unidad astronómica¹ subtende un ángulo de un segundo de arco. En otras palabras, una estrella dista un parsec si su paralaje es igual a 1 segundo de arco; 1 pc = 3.26 años luz. Las distancias típicas entre galaxias son del orden de megaparsecs 1 Mpc = 3.085×10^{22} m.

¹1 u.a. = distancia media entre la Tierra y el Sol.

Apéndice B

Escala temporal

En este apéndice encontraremos los valores numéricos para las diferentes cantidades que describen la evolución del universo en cada una de las épocas cosmológicas relevantes¹.

Hemos considerado tres etapas principales dentro de la historia del universo: 1) época inflacionaria, 2) época dominada por radiación y 3) época dominada por materia.

El factor de escala se obtiene de resolver las ecuaciones de Friedmann y, en coordenadas de tiempo conforme, toma la forma

$$a(\eta) = \begin{cases} -\frac{1}{H_I \eta^{(1-\epsilon)}} & -\infty < \eta \leq \eta_r, \\ C_{rad}(\eta - \eta_r) + a_r & \eta_r \leq \eta \leq \eta_{eq}, \\ \left[\frac{1}{2} C_{mat}(\eta - \eta_{eq}) + \sqrt{a_{eq}} \right]^2 & \eta_{eq} \leq \eta, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde $\epsilon \ll 1$ y las constantes a_r , η_r , a_{eq} y η_{eq} se obtienen imponiendo continuidad en el factor de escala. Nuestra normalización del factor de escala será

$$a(\eta = \eta_0) \equiv a_0 = 1. \quad (\text{B.2})$$

Asumiendo que la ecuación $Ta = cte.$ es válida durante inflación, podemos calcular el factor de escala al final del regimen inflacionario $a(\eta = \eta_r) = a_r$,

$$a_r = \frac{T_0}{T_r}. \quad (\text{B.3})$$

De los datos observacionales sabemos que $T_0 = 2.4 \times 10^{-13}$ GeV; por lo que asumiendo $T_r = T_{plank} \simeq 10^{15}$ GeV, encontramos que $a_r \simeq 0.24 \times 10^{-27}$. Si usamos la expresión para el factor de escala durante inflación podemos encontrar η_r .

¹Trabajaremos en coordenadas de tiempo conforme.

$$\eta_r \simeq \frac{-1}{a_r H_I}, \quad (\text{B.4})$$

donde H_I es el valor del factor de Hubble durante inflación, dicho valor se supone esencialmente constante, su valor puede calcularse de la ecuación de Friedmann (en la aproximación slow-roll),

$$H_I = \frac{8\pi G}{3} V(\phi). \quad (\text{B.5})$$

Suponiendo que la escala energética al final del periodo inflacionario es T_{planck} entonces $V(\phi) \simeq T_{planck}^4$. De esta manera $H_I \simeq 0.2370 \times 10^{12} \text{ GeV} = 0.36 \times 10^{50} \text{ Mpc}^{-1}$. Por tanto $\eta_r = -0.1157 \times 10^{-21} \text{ Mpc}$. Asumiendo que el regimen inflacionario dura aproximadamente 80 e-folds (60 es el mínimo para resolver los problemas de planitud y horizonte) es posible calcular el valor numérico del factor de escala al inicio de inflación $a(\eta = \eta_{ii}) \equiv a_{ii}$,

$$\frac{a_r}{a_{ii}} \simeq e^{80} \quad \Rightarrow \quad a_{ii} = 0.43 \times 10^{-62}, \quad (\text{B.6})$$

mientras que η_{ii} ,

$$\eta_{ii} \simeq \frac{-1}{a_{ii} H_I} = -0.64 \times 10^{13} \text{ Mpc}. \quad (\text{B.7})$$

Las constantes C_{rad} y C_{mat} están dadas por

$$C_{rad}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad} a^4, \quad C_{mat}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{mat} a^3, \quad (\text{B.8})$$

donde ρ_{rad} y ρ_{mat} denotan las densidades de energía y radiación y materia respectivamente. Una vez definida la ecuación de estado, la ecuación de continuidad para ρ implica la conservación de $\rho_{rad} a^4$ y $\rho_{mat} a^3$. Debido a que C_{rad} y C_{mat} son constantes, es posible expresarlas en términos de los parámetros cosmológicos actuales (recordemos que $a_0 = 1$), esto es,

$$C_{rad}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad,0} = H_0^2 \Omega_{rad,0}, \quad C_{mat}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{mat,0} = H_0^2 \Omega_{mat,0}, \quad (\text{B.9})$$

donde H_0 es el factor de Hubble actual; $\Omega_{rad,0}$ y $\Omega_{mat,0}$ son los parámetros de densidad actuales tanto de radiación y materia respectivamente.

Cuando el factor de escala toma el valor a_{eq} se cumple que $\rho_{rad} = \rho_{mat}$, por lo que para el cociente C_{rad}^2/C_{mat}^2 encontramos

Tiempo conforme η	s	Mpc	$a(\eta)$
η_{ii}	-0.641×10^{27}	-0.64×10^{13}	0.43×10^{-62}
η_{planck}	-0.1157×10^{-3}	-0.1157×10^{-17}	0.24×10^{-31}
η_r	-0.1157×10^{-7}	-0.1157×10^{-21}	0.24×10^{-27}
$\eta = 0$	0	0	0.42×10^{-27}
η_{ns}	15×10^9	0.00015	0.24×10^{-9}
η_{eq}	1.2×10^{16}	119.81	0.00019296
η_D	2.6×10^{16}	260.06	0.0009
η_0	8.6×10^{17}	8625.32	1

Cuadro B.1: Valores numéricos para eventos importantes en la historia del universo. (tomado de la referencia [31])

$$\frac{C_{rad}^2}{C_{mat}^2} = \frac{\frac{8\pi G}{3} \rho_{rad} a_{eq}^4}{\frac{8\pi G}{3} \rho_{mat} a_{eq}^3} = a_{eq}. \quad (\text{B.10})$$

Las ecuaciones (B.9) y (B.10) implican que

$$a_{eq} = \frac{\Omega_{rad,0}}{\Omega_{mat,0}} = 1.9296 \times 10^{-4} \quad (\text{B.11})$$

los valores numéricos de $\Omega_{rad,0} = 2.47 \times 10^{-5} h^2$ y $\Omega_{mat,0} = 0.128 h^2$ pueden consultarse en [60]. Con los valores numéricos $\Omega_{rad,0}$ y $\Omega_{mat,0}$ se encuentra que $C_{rad} = 0.161 \times 10^{-5} \text{ Mpc}^{-1}$ y $C_{mat} = 0.000011 \text{ Mpc}^{-1}$. Imponiendo continuidad en el factor de escala,

$$\eta_{eq} = \frac{a_{eq} - a_r}{C_{rad}} + \eta_r = 119.85 \text{ Mpc}. \quad (\text{B.12})$$

En el cuadro B.1 se muestra una tabla con los valores numéricos, del factor de escala y el tiempo conforme, en distintos instantes en la evolución del universo.

Apéndice C

Estadística de las perturbaciones Gaussianas

La naturaleza estadística (Gaussiana) de las perturbaciones del inflatón $\delta\phi$ es heredada a las perturbaciones que dependen linealmente de ellas, como es el caso de las perturbaciones de la métrica. En este apéndice estudiaremos las propiedades de una perturbación Gaussiana genérica.

Sea $g(\mathbf{x})$ una perturbación Gaussiana, esto es,

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (\text{C.1})$$

donde el conjunto de coeficientes $\{g_{\mathbf{k}}\}$ es el resultado de un proceso Gaussiano aleatorio, i.e., cada uno de los coeficientes tiene la misma distribución de probabilidad y además son mutuamente independientes.

La razón por la que trabajaremos con series de Fourier, en lugar de integrales, es por que los cálculos se tornan más simples. El considerar una serie de Fourier, corresponde formalmente a tomar una región cúbica del universo, en coordenadas comóviles y volumen $V = L^3$, donde se asumen condiciones de borde periódicas. La física de la caja no es relevante, sólo es un artificio matemático. Al final siempre es posible tomar el límite $V \rightarrow \infty$ y reemplazar la serie de Fourier con la integral de Fourier.

Asumimos $g(\mathbf{x})$ real, i.e., $g_{-\mathbf{k}} = g_{\mathbf{k}}^*$. Descomponiendo $g_{\mathbf{k}}$ en su parte real e imaginaria tenemos

$$g_{\mathbf{k}} = \alpha_{\mathbf{k}} + i\beta_{\mathbf{k}}. \quad (\text{C.2})$$

Observamos que $g_{\mathbf{k}}$ es una variable aleatoria Gaussiana compleja, mientras que

$\alpha_{\mathbf{k}}$ y $\beta_{\mathbf{k}}$ son variables aleatorias Gaussianas reales. Si conocemos el proceso aleatorio, conocemos la función de distribución $F(g_{\mathbf{k}})$. La función de distribución es la probabilidad de obtener un valor específico $\tilde{\alpha}_{\mathbf{k}}$ y $\tilde{\beta}_{\mathbf{k}}$ en un intervalo $d\alpha_{\mathbf{k}}$ y $d\beta_{\mathbf{k}}$ centrado en $\alpha_{\mathbf{k}}$ y $\beta_{\mathbf{k}}$ respectivamente. Por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_{\mathbf{k}} d\beta_{\mathbf{k}} F(g_{\mathbf{k}}) = 1. \quad (\text{C.3})$$

El promedio estadístico de una cantidad $f(g_{\mathbf{k}})$ que depende de $g_{\mathbf{k}}$ está dado por:

$$\overline{f(g_{\mathbf{k}})} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_{\mathbf{k}} d\beta_{\mathbf{k}} F(g_{\mathbf{k}}) f(g_{\mathbf{k}}). \quad (\text{C.4})$$

Las perturbaciones Gaussianas satisfacen 3 propiedades:

1. La función de distribución $F(g_{\mathbf{k}})$ es una Gaussiana

$$F(g_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_{\mathbf{k}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha_{\mathbf{k}}^2}{s_{\mathbf{k}}^2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_{\mathbf{k}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta_{\mathbf{k}}^2}{s_{\mathbf{k}}^2}\right), \quad (\text{C.5})$$

donde $s_{\mathbf{k}}$ es un parámetro libre llamado *dispersion* y está relacionada con el ancho de la gaussiana; a $s_{\mathbf{k}}^2$ se le conoce como *varianza*.

Utilizando la distribución Gaussiana es posible calcular la media de los coeficientes $g_{\mathbf{k}}$, es decir,

$$\overline{g_{\mathbf{k}}} = 0, \quad (\text{C.6})$$

y su respectiva varianza

$$\overline{|g_{\mathbf{k}}|^2} = 2s_{\mathbf{k}}^2. \quad (\text{C.7})$$

2. La función de distribución es independiente de la dirección del modo \mathbf{k}

$$s_{\mathbf{k}} = s(k) \quad \text{con } k = |\mathbf{k}|. \quad (\text{C.8})$$

3. Las probabilidades de los diferentes modos son independientes (no están correlacionadas), lo cual se traduce matemáticamente a

$$\overline{g_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^*} = 0 \quad \text{con } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'. \quad (\text{C.9})$$

De las propiedades 1 y 3 se obtiene la relación

$$\overline{g_{\mathbf{k}}g_{\mathbf{k}}^*} = 2\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}s_{\mathbf{k}}^2 = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\overline{|g_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (\text{C.10})$$

Regresando al espacio de coordenadas, encontramos que

$$\overline{g(\mathbf{x})} = \overline{\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}} = \sum_{\mathbf{k}} \overline{g_{\mathbf{k}}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0. \quad (\text{C.11})$$

El promedio de la perturbación es cero debido a que como representa una desviación del valor del fondo, las desviaciones positivas y negativas son igualmente probables. El cuadrado de la perturbación puede escribirse como

$$g(\mathbf{x})^2 = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^*e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{C.12})$$

La amplitud típica de la perturbación está dada por la varianza, la cual es igual al valor de expectación del cuadrado de la perturbación

$$\overline{g(\mathbf{x})^2} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \overline{g_{\mathbf{k}}^*g_{\mathbf{k}'}e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}} = \sum_{\mathbf{k}} \overline{|g_{\mathbf{k}}|^2} = 2 \sum_{\mathbf{k}} s_{\mathbf{k}}^2. \quad (\text{C.13})$$

Para las integrales de Fourier, seguiremos la convención

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \quad g(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (\text{C.14})$$

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \quad g(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{C.15})$$

Al tomar el límite $V \rightarrow \infty$ en nuestra caja imaginaria, las sumas se reemplazan por integrales, esto es,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} &\rightarrow \int d^3k \\ \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 g_{\mathbf{k}} &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}g(\mathbf{k}) \\ \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &\rightarrow \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Cuando la aproximación dada por la función de distribución Gaussiana a la función de distribución que corresponde al proceso aleatorio real no es válida, se dice que tenemos correcciones no-gaussianas a la función de distribución. En cosmología, las fluctuaciones de temperatura del CMB se aproximan tanto teóricamente como experimentalmente por variables gaussianas. Sin embargo, siempre existe un grado de no-gaussianidad en los datos observacionales que puede servir para reforzar o descartar diversos modelos inflacionarios que arrojen predicciones específicas sobre no-gaussianidad a las fluctuaciones de temperatura del CMB.

Espectro de Potencias

A la dependencia de la varianza de $g_{\mathbf{k}}$ del número de onda \mathbf{k} se le llama *espectro de potencias* de g y está definido como

$$\mathcal{P}_g(k) \equiv \frac{L^3}{2\pi^2} k^3 \overline{|g_{\mathbf{k}}|^2} = \frac{L^3}{\pi^2} k^3 s_{\mathbf{k}}^2. \quad (\text{C.17})$$

La varianza de $g(\mathbf{x})$ (C.13) se relaciona con el espectro de potencias de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \overline{g(\mathbf{x})^2} &= \sum_{\mathbf{k}} \overline{|g_{\mathbf{k}}|^2} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{4\pi k^3} \mathcal{P}_g(k) \\ &\rightarrow \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 k}{k^3} \mathcal{P}_g(k) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_g(k) = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}_g(k) d \ln k. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Por tanto, si conocemos el espectro de potencias de $g(\mathbf{x})$ conocemos su varianza, y con esta cantidad podemos determinar todas las variables estadísticas de $g(\mathbf{x})$. Una manera alternativa de calcular el espectro de potencias, viene de la función de correlación de dos puntos

$$G_g(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \equiv \overline{g(\mathbf{x})g(\mathbf{y})}. \quad (\text{C.19})$$

Esta función nos dice que tan grandes son las fluctuaciones del campo en diferentes escalas. En el caso homogéneo e isotrópico, la función de correlación depende sólo de la distancia entre los puntos \mathbf{x} y \mathbf{y} . Insertando

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \quad g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{C.20})$$

en (C.19) obtenemos

$$\begin{aligned}
G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3k' \overline{g(\mathbf{k})} g(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{y})} \\
&= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3k' s_{\mathbf{k}}^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{y})} \\
&= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k s_{\mathbf{k}}^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \tag{C.21}
\end{aligned}$$

donde en la segunda línea se utilizó el límite continuo de (C.10) y en la última línea se realizó la integral respecto a \mathbf{k}' . Realizando la integral (C.21), en coordenadas esféricas sobre la parte angular de \mathbf{k} , se obtiene

$$G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \int \frac{dk}{k} \frac{s_{\mathbf{k}}^2 k^3}{\pi^2} \frac{\sin kr}{kr}, \tag{C.22}$$

donde $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. De la definición del espectro de potencias, en el caso continuo, se encuentra

$$G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_g(k) \frac{\sin kr}{kr} \tag{C.23}$$

Por tanto, si calculamos la función de transferencia de 2 puntos, y llegamos a una expresión del tipo (C.23) automáticamente conocemos el espectro de potencias.

Análisis Multipolar

Al realizar el análisis de las fluctuaciones de temperatura del CMB, se considera una función $\delta T(\theta, \varphi)/T_0$ que representa dichas fluctuaciones. Esta función tiene como dominio los puntos sobre la superficie de una 2-esfera con radio constante R_D . Cualquier función definida de la manera anterior $f(\theta, \varphi)$ continua y diferenciable, se puede expandir en armónicos esféricos

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{C.24}$$

empleando la ortogonalidad de los armónicos esféricos, es posible encontrar los coeficientes de la serie, esto es,

$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi). \tag{C.25}$$

Por otra parte, cualquier función $f(\mathbf{x})$ continua y diferenciable, la podemos expandir en series de Fourier

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{C.26})$$

En la referencia [4] se muestra que, para el caso en que $\mathbf{x} = R_D(\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta)$ con R_D constante, la exponencial que aparece en (C.26) se descompone en

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kR_D) Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}), \quad (\text{C.27})$$

con $j_l(x)$ las funciones de Bessel esféricas de orden l . Sustituyendo (C.27) en (C.26) se obtiene

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kR_D) Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}). \quad (\text{C.28})$$

A su vez, sustituyendo (C.28) en (C.25) obtenemos

$$\begin{aligned} a_{lm} &= 4\pi \sum_{\mathbf{k}} \sum_{l'm'} \int d\Omega_{\mathbf{x}} f_{\mathbf{k}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{x}}) i^{l'} j_{l'}(kR_D) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{k}}) \\ &= 4\pi i^l \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

En la última línea usamos de nuevo la ortonormalidad de los armónicos esféricos. Tomando el límite continuo $f_{\mathbf{k}} \rightarrow f(\mathbf{k})$, se encuentra que

$$a_{lm} = \frac{4\pi i^l}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k f(\mathbf{k}) j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}). \quad (\text{C.30})$$

El *espectro de potencias angular* C_l se define como

$$C_l \equiv \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle |a_{lm}|^2 \rangle. \quad (\text{C.31})$$

El espectro de potencias angular que se obtiene utilizando la expresión (C.30) (en el límite discreto) es

$$\begin{aligned}
C_l &= \frac{16\pi^2}{2l+1} \sum_m \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}^* \rangle j_l(kR_D) j_l^*(k'R_D) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') \\
&= \frac{16\pi^2}{2l+1} \sum_m \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle |f_{\mathbf{k}}|^2 \rangle j_l(kR_D) j_l^*(k'R_D) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') \\
&= \frac{16\pi^2}{2l+1} \sum_m \sum_{\mathbf{k}} \langle |f_{\mathbf{k}}|^2 \rangle |j_l(kR_D)|^2 |Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})|^2 \\
&= 4\pi \sum_{\mathbf{k}} \langle |f_{\mathbf{k}}|^2 \rangle |j_l(kR_D)|^2, \tag{C.32}
\end{aligned}$$

donde se utilizó (C.10) en la segunda línea y la propiedad de los armónicos esféricos $\sum_m |Y_{km}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$ en la última línea. Recordemos que la definición del espectro de potencias es $\mathcal{P}_g(k) \equiv \frac{L^3}{2\pi^2} k^3 \langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$, por lo que empleando esta definición en (C.32) se encuentra que

$$C_l = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \frac{\mathcal{P}_f(k)}{k^3} |j_l(kR_D)|^2. \tag{C.33}$$

Tomando el límite continuo en la última expresión, se tiene que

$$C_l = \int d^3k \frac{\mathcal{P}_f(k)}{k^3} |j_l(kR_D)|^2 = 4\pi \int_0^\infty dk \frac{\mathcal{P}_f(k)}{k} |j_l(kR_D)|^2 \tag{C.34}$$

Por tanto, si conocemos el espectro de potencias de una función $\mathcal{P}_f(k)$, es posible obtener automáticamente la cantidad C_l .

Apéndice D

Estados *squeezed* como estados post-colapso

El objetivo principal de este apéndice es demostrar la siguiente afirmación: Dados los valores esperados para cada uno de los modos del campo y sus respectivas incertidumbres, siempre es posible asociar un estado *squeezed* al estado post-colapso. En otras palabras dadas las cantidades $\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$, $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$, $(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$, $(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$, encontraremos un estado *squeezed* particular, i.e., encontraremos los parámetros específicos que lo caracterizan.

Antes de comenzar con la demostración, introduciremos de manera cuantitativa a los estados *squeezed*. Esta introducción se basa en las referencias [110, 98]

Un estado *squeezed* es una versión generalizada de un estado coherente. Para entender más claramente la afirmación anterior, nos enfocaremos al caso del oscilador armónico cuántico. En términos de los operadores de aniquilación y creación, los operadores de momento y posición se escriben¹

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (\text{D.1})$$

La varianza de un operador \hat{O} se define como

$$(\Delta \hat{O})^2 \equiv \langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2. \quad (\text{D.2})$$

Por lo tanto, en un estado coherente, las varianzas de los operadores \hat{p} y \hat{q} son

$$(\Delta \hat{q})^2 = \frac{1}{2\omega}, \quad (\Delta \hat{p})^2 = \frac{\omega}{2}. \quad (\text{D.3})$$

¹Recordemos que estamos trabajando en unidades naturales, i.e., $\hbar = 1$

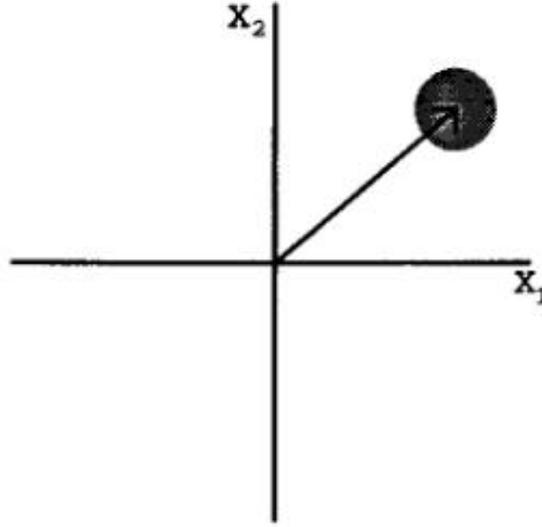


Figura D.1: Gráfica del espacio fase donde se muestra la incertidumbre de un estado coherente $|\xi\rangle$ (gráfica tomada de la referencia [110]).

Consecuentemente, el producto de las incertidumbres es igual al mínimo permitido por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, esto es,

$$(\Delta\hat{p}\Delta\hat{q}) = \frac{1}{2}. \quad (\text{D.4})$$

El resultado anterior, indica que un estado coherente, correspondiente a un estado cuántico del oscilador armónico, representa lo más parecido a un estado clásico del oscilador, i.e, es lo más similar a una localización, en el sentido clásico, del oscilador.

Nuestra siguiente tarea será relacionar la propiedad (D.4), con los estados squeezed. Para ello, utilizaremos la propiedad del operador \hat{a} que se refiere a que este operador siempre se puede expresar como una combinación lineal de dos operadores hermíticos, es decir,

$$\hat{a} = \frac{\hat{X}_1 + i\hat{X}_2}{2}, \quad (\text{D.5})$$

a los operadores \hat{X}_1 y \hat{X}_2 se les conoce como *cuadraturas* [110, 98]. El conmutador entre los operadores \hat{X}_1 y \hat{X}_2 es

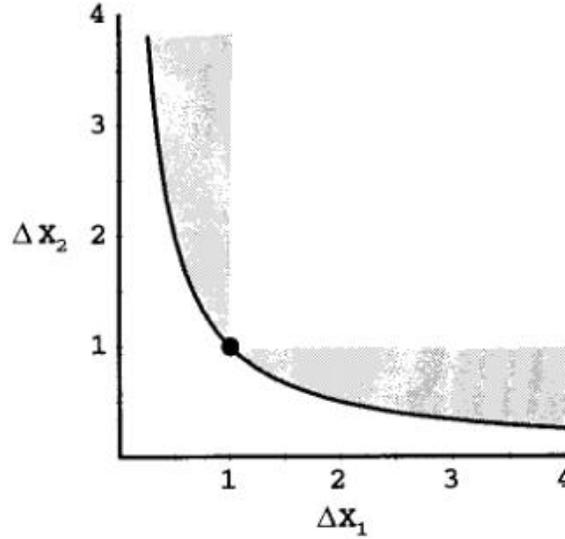


Figura D.2: Gráfica de $\Delta\hat{X}_1$ versus $\Delta\hat{X}_2$ para los estados con incertidumbre mínima. El punto denota las incertidumbres para los estados coherentes mientras que la region sombreada se refiere a los estados *squeezed* (gráfica tomada de la referencia [110]).

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 2i. \quad (\text{D.6})$$

Por lo tanto, el principio de incertidumbre, para estos operadores, toma la forma

$$\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 \geq 1 \quad (\text{D.7})$$

Si en la desigualdad anterior, nos enfocamos en el caso donde se cumple la igualdad, esta ecuación define una familia de estados con mínima incertidumbre. Los estados coherentes son un estado particular de mínima incertidumbre con

$$\Delta\hat{X}_1 = \Delta\hat{X}_2 = 1 \quad (\text{D.8})$$

donde $(\Delta\hat{X}_1)^2 = 2\omega(\Delta\hat{q})^2$ y $(\Delta\hat{X}_2)^2 = 2(\Delta\hat{p})^2/\omega$. Por tanto el estado coherente $|\xi\rangle$ corresponde a un estado para el cual \hat{X}_1 y \hat{X}_2 tienen la mínima incertidumbre y es igual en la fases de las dos cuadraturas. Un estado coherente puede representarse por un ‘círculo de error’ en un plano complejo (Figura D.1) cuyos ejes son \hat{X}_1 y \hat{X}_2 . El centro del círculo estará en $\frac{1}{2}\langle\hat{X}_1 + i\hat{X}_2\rangle = \xi$ y su radio $\Delta\hat{X}_1 = \Delta\hat{X}_2 = 1$ se relaciona con las incertidumbres de \hat{X}_1 y \hat{X}_2 .

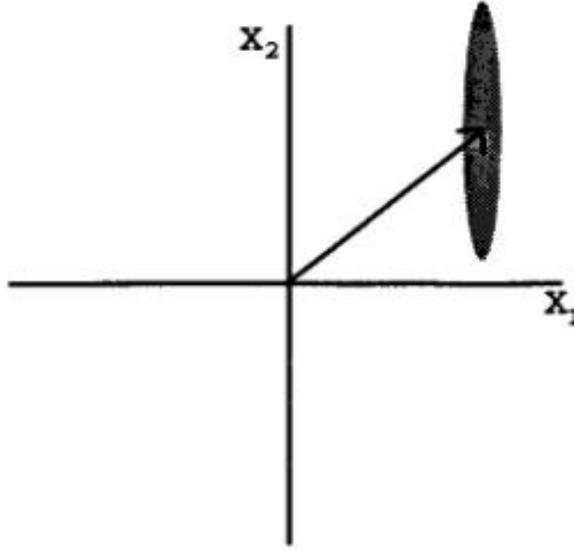


Figura D.3: Gráfica del espacio fase donde se muestra la incertidumbre de un estado squeezed (gráfica tomada de la referencia [110]).

Sin embargo, hay una familia completa de estados de mínima incertidumbre definidos por $\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 = 1$. Si graficamos (Figura D.2) $\Delta\hat{X}_1$ vs. $\Delta\hat{X}_2$, los estados de mínima incertidumbre corresponden a puntos sobre una hipérbola, y debido al principio de incertidumbre, los estados físicos están a la derecha de esta hipérbola. El estado coherente con $\Delta\hat{X}_1 = \Delta\hat{X}_2$ es un caso especial de una clase de estados más generales los cuales pueden tener mayor incertidumbre en una cuadratura si minimizamos la incertidumbre en la otra cuadratura ($\Delta\hat{X}_1 < 1 < \Delta\hat{X}_2$). Estos estados se representan en la region sombreada de la Figura D.2, dichos estados son los llamados estados *squeezed*. Un estado squeezed se puede representar por una ‘elipse de error’ en un plano complejo (Figura D.3).

En el Capitulo 6 mostramos que un estado squeezed $|\xi\omega\rangle$ puede obtenerse aplicando los operadores de Squeeze y Desplazamiento al estado vacío, esto es,

$$|\xi\omega\rangle \equiv \hat{D}(\xi)\hat{S}(\omega)|0\rangle. \quad (\text{D.9})$$

donde ξ y $\omega = re^{i\theta}$ son números complejos. De esta manera, un estado squeezed queda caracterizado por cuatro parámetros: $|\xi|, \arg(\xi), r, \theta$.

Una vez estudiados los estados squeezed, procederemos a demostrar que: A todo

estado post-colapso, correspondiente a cada modo del campo \hat{y} , caracterizado por $\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$, $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$, $(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$, $(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$, se le puede asociar un estado *squeezed*, es decir, podemos encontrar los parámetros $|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}|$, $\arg(\xi_{\mathbf{k}}^{R,I})$, $r_{\mathbf{k}}^{R,I}$, $\theta_{\mathbf{k}}^{R,I}$.

Comencemos recordando que en el modelo de colapso estamos trabajando con los valores esperados de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}^R$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}^I$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{R\dagger}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{I\dagger}$ que a su vez están definidos como:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}), \quad \hat{a}_{\mathbf{k}}^I \equiv \frac{-i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{-\mathbf{k}}). \quad (\text{D.10})$$

Si recordamos que las reglas de conmutación entre los operadores de aniquilación y creación ($\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$) asociados al campo cuántico \hat{y} , están dadas por $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = L^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, es posible obtener, de las definiciones anteriores, las reglas de conmutación para los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}^R$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}^I$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{R\dagger}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{I\dagger}$, esto es,

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^R, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{R\dagger}] = L^3 (\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}^I, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{I\dagger}] = L^3 (\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}). \quad (\text{D.11})$$

Sean $\hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^R$ y $\hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^I$ operadores definidos como

$$\hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^R \equiv \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}}^R}{L^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2L^3}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-k}), \quad \hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^I \equiv \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}}^I}{L^{3/2}} = \frac{-i}{\sqrt{2L^3}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{-k}). \quad (\text{D.12})$$

Las reglas de conmutación para dichos operadores están dadas por

$$[\hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^R, \hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}'}^{R\dagger}] = \delta_{kk'} + \delta_{k-k'} \quad [\hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^I, \hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}'}^{I\dagger}] = \delta_{kk'} - \delta_{k-k'}. \quad (\text{D.13})$$

De esta manera, el conmutador para un sólo modo k toma la forma

$$[\hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^{R,I}, \hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^{R,I\dagger}] = 1. \quad (\text{D.14})$$

De ahora en adelante trabajaremos con los operadores $\hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^R$ y $\hat{\tilde{a}}_{\mathbf{k}}^I$ debido a que ya no aparecerán factores L^3 , lo cual facilita los cálculos, y además quitaremos la tilde sobre dichos operadores.

Utilizando la expresión (D.9) que define a los estados *squeezed* y las reglas de conmutación (D.14), podemos calcular las cantidades $d_{\mathbf{k}}^{R,I}$, $c_{\mathbf{k}}^{R,I}$ y $e_{\mathbf{k}}^{R,I}$ definidas en (4.17), esto es,

$$d_{\mathbf{k}}^{R,I} \equiv \langle \xi\omega | \hat{a}_{\mathbf{k}}^{R,I} | \xi\omega \rangle = \xi_{\mathbf{k}}^{R,I}, \quad (\text{D.15})$$

$$c_{\mathbf{k}}^{R,I} \equiv \langle \xi\omega | (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2 | \xi\omega \rangle = -\cosh r_{\mathbf{k}}^{R,I} \sinh r_{\mathbf{k}}^{R,I} e^{-i\theta_{\mathbf{k}}^{R,I}} + \xi_{\mathbf{k}}^{R,I^2}, \quad (\text{D.16})$$

$$e_{\mathbf{k}}^{R,I} \equiv \langle \xi\omega | \hat{a}_{\mathbf{k}}^{R,I\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{R,I} | \xi\omega \rangle = \sinh^2 r_{\mathbf{k}}^{R,I} + |\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}|^2. \quad (\text{D.17})$$

Por otra parte, las expresiones de los valores de expectación para cada uno de los modos del campo y su momento conjugado, así como sus respectivas incertidumbres, evaluados en el estado de colapso, están dadas en (4.18) y (4.19), es decir,

$$\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta_k^c) \rangle = \sqrt{2} \text{Re}(y_k(\eta_k^c) d_{\mathbf{k}}^{R,I}), \quad (\text{D.18})$$

$$\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta_k^c) \rangle = \sqrt{2} \text{Re}(g_k(\eta_k^c) d_{\mathbf{k}}^{R,I}), \quad (\text{D.19})$$

$$(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta_k^c))^2 = \text{Re}(y_k^2(\eta_k^c) c_{\mathbf{k}}^{R,I}) + (1/2) |y_k(\eta_k^c)|^2 (1 + 2e_{\mathbf{k}}^{R,I}) - 2\text{Re}^2(y_k(\eta_k^c) d_{\mathbf{k}}^{R,I}), \quad (\text{D.20})$$

$$(\Delta \hat{g}_{\mathbf{k}}^{R,I}(\eta_k^c))^2 = \text{Re}(g_k^2(\eta_k^c) c_{\mathbf{k}}^{R,I}) + (1/2) |g_k(\eta_k^c)|^2 (1 + 2e_{\mathbf{k}}^{R,I}) - 2\text{Re}^2(g_k(\eta_k^c) d_{\mathbf{k}}^{R,I}). \quad (\text{D.21})$$

Notemos que, dado que nos interesa encontrar los parámetros que describen al estado squeezed, las expresiones anteriores se encuentran evaluadas al tiempo de colapso η_k^c . El siguiente paso consiste en sustituir las cantidades $d_{\mathbf{k}}^{R,I}$, $c_{\mathbf{k}}^{R,I}$ y $e_{\mathbf{k}}^{R,I}$, calculados para el estado *squeezed* ((D.15) (D.16) y (D.17)), en las expresiones (D.18), (D.19), (D.20) y (D.21), y demostrar que siempre es posible invertirlas para obtener $\arg(\xi_{\mathbf{k}}^{R,I})$, $|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}|$, $r_{\mathbf{k}}^{R,I}$ y $\theta_{\mathbf{k}}^{R,I}$, es decir, demostraremos que a partir de las expresiones (D.18), (D.19), (D.20) y (D.21) podemos encontrar los cuatro parámetros del estado *squeezed* en función de los valores esperados de $\hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I}$, $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I}$, y sus correspondientes incertidumbres.

Observamos que las ecuaciones (D.18) y (D.19) contienen únicamente a la cantidad $d_{\mathbf{k}}^{R,I}$, por lo que de estas dos expresiones podemos encontrar $\arg(\xi_{\mathbf{k}}^{R,I})$ y $|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}|$. De esta manera

$$\tan \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I} = \frac{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle |y_k| \cos \beta_k - \langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle |g_k| \cos \gamma_k}{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle |y_k| \sin \beta_k - \langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle |g_k| \sin \gamma_k}, \quad (\text{D.22})$$

$$|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}| = \frac{\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle}{\sqrt{2} |y_k| \cos(\beta_k + \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I})}, \quad (\text{D.23})$$

donde $\alpha_{\mathbf{k}}^{R,I} \equiv \arg(d_{\mathbf{k}}^{R,I}) = \arg(\xi_{\mathbf{k}}^{R,I})$, $\beta_k \equiv \arg(y_k)$, $\gamma_k \equiv \arg(g_k)$. La expresión (D.23), en términos de $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$ se expresa como:

$$|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}| = \frac{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle}{\sqrt{2} |g_k| \cos(\gamma_k + \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I})}. \quad (\text{D.24})$$

Recordemos que tanto $y_k(\eta_k^c)$ como $g_k(\eta_k^c)$ están siendo evaluadas al tiempo de colapso η_k^c , el cual es un parámetro más a considerarse, a parte de las cantidades $\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$, $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$, $(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$, $(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$ que caracterizan al estado post-colapso.

Enfoquemos nuestra atención en (D.22), observamos que esta ecuación depende de las cantidades $\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$ y $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$, que en principio son arbitrarias, sin embargo, es claro que siempre podemos encontrar un valor $\alpha_{\mathbf{k}}^{R,I}$ para cualquier valor del tiempo de colapso (la dependencia del tiempo de colapso η_k^c entra en las funciones $|y_k|$ y $|g_k|$) debido a que la tangente es una función cuya inversa está definida sobre todo \mathbf{R} . De esta manera, siempre es posible obtener $\alpha_{\mathbf{k}}^{R,I}$, el cual corresponde a uno de los 4 parámetros del estado *squeezed*

Por otra parte, tenemos la expresión explícita de las funciones $y_k(\eta)$ y $g_k(\eta)$ (4.13)

:

$$y_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{\eta k} \right) \exp(-ik\eta),$$

$$g_k(\eta) = -i\sqrt{\frac{k}{2}} \exp(-ik\eta).$$

De la forma explícita de $y_k(\eta)$ y $g_k(\eta)$, encontramos a las siguientes cantidades:

$$-\beta_k(\eta) = \arctan\left(\frac{1}{k\eta}\right) + k\eta; \quad |y_k(\eta)| = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{1}{(k\eta)^2} \right)^{1/2}, \quad (\text{D.25})$$

$$-\gamma_k(\eta) = k\eta + \pi/2; \quad |g_k(\eta)| = \sqrt{k/2}. \quad (\text{D.26})$$

Para encontrar el siguiente parámetro $|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}|$, utilizaremos (D.24) debido a que los calculos se vuelven más sencillos, no obstante, es posible calcular $|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}|$ tanto de (D.24) como (D.23) sin ninguna ambigüedad. Por lo tanto, sustituyendo (D.26), en (D.24), obtenemos

$$|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}| = \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle}{\sin(-k\eta_c^k + \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I})}. \quad (\text{D.27})$$

En principio (D.27) parecería tener problemas si $\sin(-k\eta_c^k + \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I}) = 0$, es decir, cuando $-k\eta_c^k + \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I} = n\pi$ con n un número entero. Sin embargo, de (D.22) notamos que la única posibilidad en la que se da la igualdad $-k\eta_c^k + \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I} = n\pi$ es cuando $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle = 0$, lo cual no es posible², y aunque lo fuera, la expresión (D.27) seguiría siendo finita (tendríamos una situación del tipo $\sin x/x$ con $x \rightarrow 0$).

Otra posible dificultad surgiría si $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$ y $\sin(k\eta_c^k + \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I})$ tuvieran el signo contrario, ya que en ese caso, $|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}| < 0$. No obstante, el ángulo $\alpha_{\mathbf{k}}^{R,I}$ viene de invertir la

²Recordemos que si la expresión $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle = 0$ implica que $\Psi_{\mathbf{k}} = 0$ y no hay inhomogeneidades.

función $\tan \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I} = F(\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle, \langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle, \eta_k^c)$, la cual es multivaluada, por lo que siempre podemos escoger el $\alpha_{\mathbf{k}}^{R,I}$ adecuado que haga que $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$ tenga el mismo signo que $\sin(k\eta_k^c + \alpha_{\mathbf{k}}^{R,I})$, esto es, siempre podemos encontrar $\alpha_{\mathbf{k}}^{R,I}$ tal que $|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}| > 0$. Por tanto, (D.24) (ó equivalentemente (D.23)) siempre está bien definida; consecuentemente, siempre se puede encontrar la cantidad $|\xi_{\mathbf{k}}^{R,I}|$, la cual pertenece al conjunto de parámetros que caracterizan el estado squeezed.

Para encontrar los parámetros restantes ($r_{\mathbf{k}}^{R,I}$ y $\theta_{\mathbf{k}}^{R,I}$), sustituimos (D.15), (D.16) y (D.17) en (D.20) y (D.21), obteniendo

$$\frac{(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{|y_k|^2} - \frac{1}{2} = -\cosh r_{\mathbf{k}}^{R,I} \sinh r_{\mathbf{k}}^{R,I} \cos(2\beta_k - \theta_{\mathbf{k}}^{R,I}) + \sinh^2 r_{\mathbf{k}}^{R,I}, \quad (\text{D.28})$$

$$\frac{(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{|g_k|^2} - \frac{1}{2} = -\cosh r_{\mathbf{k}}^{R,I} \sinh r_{\mathbf{k}}^{R,I} \cos(2\gamma_k - \theta_{\mathbf{k}}^{R,I}) + \sinh^2 r_{\mathbf{k}}^{R,I}. \quad (\text{D.29})$$

Empleando las propiedades de los senos y cosenos hiperbólicos, las expresiones anteriores toman la forma

$$\frac{2(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{|y_k|^2} = -\sinh(2r_{\mathbf{k}}^{R,I}) \cos(\theta_{\mathbf{k}}^{R,I} - 2\beta_k) + \cosh(2r_{\mathbf{k}}^{R,I}), \quad (\text{D.30})$$

$$\frac{2(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{|g_k|^2} = -\sinh(2r_{\mathbf{k}}^{R,I}) \cos(\theta_{\mathbf{k}}^{R,I} - 2\gamma_k) + \cosh(2r_{\mathbf{k}}^{R,I}). \quad (\text{D.31})$$

Sustituyendo la forma explícita de $|y_k|$, $|g_k|$, β_k y γ_k (i.e., (D.25) y (D.26) evaluadas al tiempo de colapso η_k^c) en (D.30) y (D.31), encontramos las expresiones

$$a = -\sinh R_{\mathbf{k}}^{R,I} \cos(\Theta_{\mathbf{k}}^{R,I} - \delta) + \cosh R_{\mathbf{k}}^{R,I}, \quad (\text{D.32})$$

$$b = \sinh R_{\mathbf{k}}^{R,I} \cos \Theta_{\mathbf{k}}^{R,I} + \cosh R_{\mathbf{k}}^{R,I}, \quad (\text{D.33})$$

donde $z \equiv k\eta_k^c$,

$$a \equiv 2 \frac{(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{|y_k|^2}, \quad (\text{D.34})$$

$$b \equiv 2 \frac{(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{|g_k|^2}, \quad (\text{D.35})$$

$$R_{\mathbf{k}}^{R,I} \equiv 2r_{\mathbf{k}}^{R,I}, \quad (\text{D.36})$$

$$\Theta_{\mathbf{k}}^{R,I} \equiv \theta_{\mathbf{k}}^{R,I} + 2z, \quad (\text{D.37})$$

$$\delta \equiv -2 \arctan \left(\frac{1}{z} \right). \quad (\text{D.38})$$

De esta manera, invertiremos (D.32) y (D.33), para encontrar $R_{\mathbf{k}}^{R,I}$ y $\Theta_{\mathbf{k}}^{R,I}$ en términos de a , b y δ , estas cantidades están fijadas por los parámetros iniciales $(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$, $(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$ y $\eta_{\mathbf{k}}^c$. Después de un cálculo que involucra diversas identidades trigonométricas, encontramos una expresión para $\cosh R_{\mathbf{k}}^{R,I}$:

$$\cosh R_{\mathbf{k}}^{R,I} = \frac{(a+b) + \sqrt{2ab(1-\cos\delta) + \sin^2\delta}}{(1+\cos\delta)}. \quad (\text{D.39})$$

La expresión (D.39) se volvería singular si $1 + \cos\delta = 0$, es decir, cuando se cumpliera que $\delta = n\pi$ con n un número entero. No obstante, de la definición de δ (D.38) notamos que $\delta = n\pi$ si y sólo si $z = 0$, esto es, que el tiempo del colapso sucediera después del periodo inflacionario (véase Apéndice B), lo cual no es posible. Este es el único caso en el que la expresión (D.39) podría estar indeterminada (el término dentro de la raíz cuadrada siempre es positivo), por lo que el 3er. parámetro del estado *squeezed* ($r_{\mathbf{k}}^{R,I} = \frac{R_{\mathbf{k}}^{R,I}}{2}$) queda siempre definido.

El último parámetro que nos falta por determinar ($\theta_{\mathbf{k}}^{R,I} = \Theta_{\mathbf{k}}^{R,I} - 2z$) es el más laborioso de todos; después de un cálculo bastante largo encontramos que

$$\Theta_{\mathbf{k}}^{R,I} = \frac{1}{2} \left[\arccos \left(\frac{2R - S}{\sqrt{R^2 + T^2}} \right) + \arctan \left(\frac{T}{S} \right) \right], \quad (\text{D.40})$$

donde:

$$R \equiv (a-b)^2 - (b^2-1) \sin^2 \delta, \quad (\text{D.41})$$

$$S \equiv (a^2-1) + (b^2-1) \cos(2\delta) + 2(ab-1) \cos \delta, \quad (\text{D.42})$$

$$T \equiv (b^2-1) \sin(2\delta) + 2(ab-1) \sin \delta. \quad (\text{D.43})$$

Para analizar los posibles problemas de la expresión (D.40) conviene reescribirla de la siguiente manera:

$$\cos \left[2\Theta_{\mathbf{k}}^{R,I} - \arctan \left(\frac{T}{S} \right) \right] = \frac{2R - S}{\sqrt{S^2 + T^2}}. \quad (\text{D.44})$$

El término en el lado izquierdo de (D.44), $\arctan(\frac{T}{S})$, corresponde siempre a un ángulo cuya tangente es T/S , no importa que valor de T ó S tengamos (incluso $S = 0$), la tangente de un ángulo siempre está bien definida. Finalmente, para mostrar que (D.44) no queda indeterminada de ninguna manera, basta demostrar que la desigualdad

$$\left| \frac{2R - S}{\sqrt{S^2 + T^2}} \right| \leq 1, \quad (\text{D.45})$$

se satisface siempre. Sin embargo, el demostrar la desigualdad

$$T^2 - 4R(R - S) \geq 0, \quad (\text{D.46})$$

implica demostrar la desigualdad (D.45). Sustituyendo las definiciones de R , S y T dados por (D.41), (D.42), y (D.43), en el lado izquierdo de (D.46) obtenemos

$$-\cos^2 \delta + 2ab(\cos \delta + 1) - 2\cos \delta - 1 \geq 0. \quad (\text{D.47})$$

Para demostrar la desigualdad (D.47) recurrimos al principio de incertidumbre

$$(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2 (\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (\text{D.48})$$

Puesto que $a \equiv 2 \frac{(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{|y_{\mathbf{k}}|^2}$ y $b \equiv 2 \frac{(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2}{|g_{\mathbf{k}}|^2}$, el principio de incertidumbre en términos de a , b y δ se reescribe como:

$$ab \geq 2(\cos \delta + 1). \quad (\text{D.49})$$

Consecuentemente, el valor mínimo del producto ab es $(ab)_{\min} = 2(\cos \delta + 1)$, esto implica que

$$-\cos^2 \delta + 2ab(\cos \delta + 1) - 2\cos \delta - 1 \geq -\cos^2 \delta + 4(\cos \delta + 1)^2 - 2\cos \delta - 1, \quad (\text{D.50})$$

pero $-\cos^2 \delta + 4(\cos \delta + 1)^2 - 2\cos \delta - 1 = 3(\cos \delta + 1)^2 \geq 0$.

Por lo tanto la desigualdad (D.47) se satisface siempre, lo que implica que la expresión para $\Theta_{\mathbf{k}}^{R,I}$ (D.44) está bien definida.

Concluimos entonces que al estado post-colapso, caracterizado por un tiempo de colapso $\eta_{\mathbf{k}}^c$ y por los valores esperados $\langle \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$ y $\langle \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I} \rangle$, así como por sus respectivas incertidumbres $(\Delta \hat{y}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$ y $(\Delta \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{R,I})^2$, siempre es posible asignarle un estado *squeezed*.

Bibliografía

- [1] K. N. Abazajian et al. The Seventh Data Release of the Sloan Digital Sky Survey. *Astrophys. J. Suppl.*, 182:543, 2009.
- [2] S. L. Adler. Why Decoherence has not solved the Measurement Problem: A Response to P. W. Anderson. *Stud. Hist. Philos. Mod. Phys.*, 34:135, 2003.
- [3] A. Albrecht and P. J. Steinhard. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220, 1982.
- [4] G. B. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Fourth (International) edition, 1995.
- [5] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt. Essentials of k-essence. *Phys. Rev. D*, 63:103510, 2001.
- [6] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger. Experimental test of Bell's inequalities using time varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804, 1982.
- [7] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner. Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe. *Phys. Rev. D*, 28:679, 1983.
- [8] A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik, and C. Kiefer. Origin of the inflationary universe. *Mod. Phys. Lett. A*, 14:1083, 1999.
- [9] A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik, C. Kiefer, and I. V. Mishakov. Decoherence in quantum cosmology at the onset of inflation. *Nucl. Phys. B*, 551:374, 1999.
- [10] A. Bassi and G.C. Ghirardi. A General Argument Against the Universal Validity of the Superposition Principle. *Phys. Lett. A*, 275:373, 2000.

- [11] D. Baumann. TASI Lectures on Inflation. 2009. [arXiv:0907.5424](#).
- [12] J. S. Bell. Against measurement. *Physics World*, August:33, 1990.
- [13] J. S. Bell. *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Second edition, 2004.
- [14] M. Bell, K. Gottfried, and M. Veltman, editors. *John S. Bell on The Foundations of Quantum Mechanics*. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [15] E. Bertschinger. Cosmological Perturbation Theory and Structure Formation, 2001. [arXiv:astro-ph/0101009](#).
- [16] N. D. Birrel and P. C. W. Davies. *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press, 1994.
- [17] P. Blanchard, D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, and I.-O. Stamatescu, editors. *Decoherence: Theoretical, Experimental, and Conceptual Problems*, volume 538 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 2000.
- [18] G.R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack, and M. J. Rees. Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter. *Nature*, 311:517, 1984.
- [19] F. R. Bouchet. The Planck satellite: Status & perspectives. *Mod. Phys. Lett. A*, 22:1857, 2007.
- [20] H. Boutaleb, A. Chafik, and A. L. Marrakchi. Supersymmetric hybrid inflation in the braneworld scenario. *Phys. Lett. B*, 574:89, 2003.
- [21] H. Boutaleb, A. Chafik, and A.L. Marrakchi. Supersymmetric two-stage Inflation. *Acta Phys. Slovaca*, 51:289, 2001.
- [22] R. H. Brandenberger. Lectures on the theory of cosmological perturbations. *Lect. Notes Phys.*, 646:127, 2004.
- [23] R. H. Brandenberger, H. Feldman, and V. Mukhanov. Classical and quantum theory of perturbations in inflationary universe models, 1993. [arXiv:astro-ph/9307016](#).
- [24] R. H. Brandenberger and R. Kahn. Cosmological perturbations in inflationary-universe models. *Phys. Rev. D*, 29:2172, 1984.

- [25] T. S. Bunch and P. C. W. Davies. Quantum Field Theory in de Sitter Space: Renormalization by Point Splitting. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 360:117, 1978.
- [26] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003.
- [27] M. A. Castagnino and F. Lombardo. Origin and measurement of time in quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, 48:1722, 1993.
- [28] A. Chafik. Brane inflation and the fine-tuning problem. *Int. J. Theor. Phys.*, 46:2488, 2007.
- [29] A. J. Christopherson and K. Malik. The non-adiabatic pressure in general scalar field systems. *Phys. Lett. B*, 675:159, 2009.
- [30] R. C. Contaldi, F. Dowker, and L. Philpott. Polarization diffusion from space-time uncertainty. *Class. Quant. Grav.*, 27:172001, 2010.
- [31] A. De Unánue. *The quantum origins of the cosmological asymmetry*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2010.
- [32] A. De Unanue and D. Sudarsky. Phenomenological analysis of quantum collapse as source of the seeds of cosmic structure. *Phys. Rev. D*, 78:043510, 2008.
- [33] N. Deruelle and V. Mukhanov. On matching conditions for cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, 52:5549, 1995.
- [34] L. Diósi. Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects. *Phys. Lett. A*, 105:199, 1984.
- [35] L. Diósi. Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations. *Phys. Rev A*, 40:1165, 1989.
- [36] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [37] R. Durrer. Cosmological perturbation theory. Technical report, Université de Genève, Département de Physique Théorique, 2005. <http://theory.physics.unige.ch/durrer/courses/syros.pdf>.
- [38] H. Everett. Relative state formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 29:454, 1957.

- [39] B. Fields and S. Sarkar. Big-Bang nucleosynthesis. *Phys. Lett. B*, 667:228, 2008.
- [40] V. Garriga, J. and Mukhanov. Perturbations in k-inflation. *Phys. Lett. B*, 458:219, 1999.
- [41] G. C. Ghirardi, A. Rimini, and T. Weber. Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. *Phys. Rev. D*, 34:470, 1986.
- [42] A. H. Guth. The inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347, 1981.
- [43] J. Halliwell. Decoherence in Quantum Cosmology. *Phys. Rev. D*, 39:2912, 1989.
- [44] N. W. Halverson et al. DASI First Results: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Angular Power Spectrum. *Astrophys. J.*, 568:38, 2002.
- [45] S. Hanany et al. MAXIMA-1: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on angular scales of 10 arcminutes to 5 degrees. *Astrophys. J.*, 545:L5, 2000.
- [46] J. Hartle. Quantum cosmology: Problems for the 21st century. 1997. arXiv:gr-qc/9701022.
- [47] J. Hartle. Generalizing quantum mechanics for quantum gravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 45:1390, 2006.
- [48] S. Hollands and R. M. Wald. An alternative to inflation. *Gen. Rel. Grav.*, 34:2043, 2002.
- [49] J. Hwang and H. Noh. Sachs-Wolfe effect: Gauge independence and a general expression. *Phys. Rev. D*, 59:067302, 1999.
- [50] J. Hwang, T. Padmanabhan, O. Lahav, and H. Noh. 1/3 factor in the CMB Sachs-Wolfe effect. *Phys. Rev. D*, 65:043005, 2002.
- [51] P. Kanti and K. A. Olive. On the realization of assisted inflation. *Phys. Rev. D*, 60:043502, 1999.
- [52] C. Kiefer. Origin of classical structure from inflation. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 88:255, 2000.

- [53] C. Kiefer and D. Polarski. Why do cosmological perturbations look classical to us?, 2008. [arXiv:0810.0087](#).
- [54] H. Kodama and M. Sasaki. Cosmological Perturbation Theory. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 78:1, 1984.
- [55] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky. Reheating after inflation. *Phys. Rev. Lett.*, 73(24):3195, 1994.
- [56] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky. Towards the theory of reheating after inflation. *Phys. Rev. D*, 56:3258, 1997.
- [57] E. W. Kolb. Dynamics of the inflationary era. 1999. [arXiv:hep-ph/9910311](#).
- [58] E. W. Kolb and M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison Wesley, 1990.
- [59] D. La and P. J. Steinhardt. Extended inflationary cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 62:376, 1989.
- [60] D. Larson et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 192:16, 2011.
- [61] G. León, A. De Unánue, and D. Sudarsky. Multiple quantum collapse of the inflaton field and its implications on the birth of cosmic structure, 2010. [arXiv:1012.2419](#).
- [62] G. León and D. Sudarsky. The slow roll condition and the amplitude of the primordial spectrum of cosmic fluctuations: Contrasts and similarities of standard account and the “collapse scheme”. *Class. Quant. Grav.*, 27:225017, 2010.
- [63] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [64] A. D. Linde. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Phys. Lett. B*, 108:389, 1982.
- [65] A. D. Linde. Chaotic Inflation. *Phys. Lett. B*, 129:177, 1983.
- [66] A. D. Linde. Axions in inflationary cosmology. *Phys. Lett. B*, 259:38, 1991.
- [67] A. D. Linde. Hybrid inflation. *Phys. Rev. D*, 49:748, 1994.

- [68] D. H. Lyth. Large Scale Energy Density Perturbations and Inflation. *Phys. Rev. D*, 31:1792, 1985.
- [69] D. H. Lyth and Liddle A. R. *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Cambridge University Press, 2009.
- [70] C. P. Ma and E. Bertschinger. Cosmological perturbation theory in the synchronous vs. conformal newtonian gauge. *Astrophys. J.*, 455:7, 1995.
- [71] R. Maartens and D. Tilley. Exact perturbations for inflation with smooth exit. *Gen. Rel. Grav.*, 30:289, 1998.
- [72] K. Malik and D. R. Matravers. A Concise Introduction to Perturbation Theory in Cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 25:193001, 2008.
- [73] J. Martin and D. J. Schwarz. The influence of cosmological transitions on the evolution of density perturbations. *Phys. Rev. D*, 57:3302, 1998.
- [74] A. Matacz. A New Theory of Stochastic Inflation. *Phys. Rev. D*, 55:1860, 1997.
- [75] A. Matacz. Inflation and the fine-tuning problem. *Phys. Rev. D*, 56:1836, 1997.
- [76] N. D. Mermin. Is the moon there when nobody looks? reality and the quantum theory. *Physics Today*, April:38, 1985.
- [77] V. Mukhanov. Gravitational Instability of the Universe Filled with a Scalar Field. *JETP Lett.*, 41:493, 1985.
- [78] V. Mukhanov. The quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations. *Zhurnal Eksperimental noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 94:1, 1988.
- [79] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [80] V. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rept.*, 215:203, 1992.
- [81] C. B. Netterfield et al. A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background. *Astrophys. J.*, 571:604, 2002.
- [82] K. A. Olive. Inflation. *Phys. Rept.*, 190:307, 1990.

- [83] J. A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [84] P. J. E. Peebles. *The large-scale structure of the universe*. Princeton University Press, 1980.
- [85] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.
- [86] R. Penrose. *The Emperors New Mind*. Oxford University Press, 1989.
- [87] R. Penrose. On gravity's role in quantum state reduction. *Gen. Rel. Grav.*, 28:581, 1996.
- [88] R. Penrose. *The Road to Reality. A complete guide to the laws of the universe*. Jonathan Cape, Londres, 2004.
- [89] A. Perez, H. Sahlmann, and D. Sudarsky. On the quantum origin of the seeds of cosmic structure. *Class. Quant. Grav.*, 23:2317, 2006.
- [90] S. Perlmutter et al. Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First 7 Supernovae at z greater/equal 0.35. *Astrophys. J.*, 483:565, 1997.
- [91] S. Perlmutter et al. Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe and its Cosmological Implications. *Nature*, 391:51, 1998.
- [92] D. Polarski and A. A. Starobinsky. Semiclassicality and decoherence of cosmological perturbations. *Class. Quant. Grav.*, 13:377, 1996.
- [93] A. G. Riess et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astron. J.*, 116:1009, 1998.
- [94] R. K. Sachs and A. M. Wolfe. Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. *Astrophys. J.*, 147:73, 1967.
- [95] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Addison Wesley, 1993.
- [96] M. Sasaki. Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe. *Prog. Theor. Phys.*, 76:1036, 1986.
- [97] M. Schlosshauer. *Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition*. Springer-Verlag Berlin, 2007.

- [98] M. Scully and M. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [99] P. F. Smith and J. R. J. Bennett. A search for heavy stable particles. *Nucl. Phys. B*, 149:525, 1979.
- [100] G. F. Smoot et al. First results of the COBE satellite measurement of the anisotropy of the cosmic microwave background radiation. *Advances in Space Research*, 11:193, 1991.
- [101] L. Sriramkumar. An introduction to inflation and cosmological perturbation theory. 2009. [arXiv:0904.4584](https://arxiv.org/abs/0904.4584).
- [102] J. M. Stewart. Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models. *Class. Quant. Grav.*, 7:1169, 1990.
- [103] D. Sudarsky. The seeds of cosmic structure as a door to new physics. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 68, 2007.
- [104] D. Sudarsky. The seeds of cosmic structure as door to quantum gravity phenomena. *PoSQG-Ph*, 38, 2007.
- [105] D. Sudarsky. A signature of quantum gravity at the source of the seeds of cosmic structure? *J. Phys.: Conf. Ser.*, 67, 2007.
- [106] D. Sudarsky. Shortcomings in the Understanding of Why Cosmological Perturbations Look Classical, 2009. [arXiv:0906.0315](https://arxiv.org/abs/0906.0315) .
- [107] D. Sudarsky and A. De Unanue. A window to quantum gravity phenomena in the emergence of the seeds of cosmic structure. *J. Phys. Conf. Ser.*, 174:012059, 2009.
- [108] J. Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1996.
- [109] R. M. Wald. *General Relativity*. Chicago University Press, 1984.
- [110] D. Walls and G. Milburn. *Quantum Optics*. Springer-Verlag, 1994.
- [111] S. Watson, M. J. Perry, G. L. Kane, and F. C. Adams. Inflation without inflaton(s). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007:017, 2007.
- [112] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.

- [113] M. White and W. Hu. The Sachs-Wolfe effect. *Astronomy and Astrophysics*, 89, 1997.
- [114] W. M. Wood-Vasey et al. Observational Constraints on the Nature of the Dark Energy: First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey. *Astrophys. J.*, 666:694, 2007.
- [115] D. G. York et al. The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary. *Astronomical Journal*, 120:1579, 2000.
- [116] W. H. Zurek. Environment-induced superselection in cosmology, 1990. <http://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/6356333-NR0gPP/6356333.pdf>.
- [117] W. H. Zurek. Decoherence and the transition from quantum to classical. *Physics Today*, 44:36, 1991.
- [118] W. H. Zurek. Relative states and the environment: Einselection, enviance, quantum darwinism, and the existential interpretation. 2007. [arXiv:0707.2832](https://arxiv.org/abs/0707.2832).