



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## FACULTAD DE CIENCIAS

UN PRIMER ENTRÓN A LA  
FAMILIA  $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \mu/z$ .

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MARCO ANTONIO MONTES DE OCA BALDERAS

DIRECTOR DE TESIS: DR. JEFFERSON EDWIN KING DÁVALOS

MÉXICO, D.F.

ENERO, 2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

**A mi familia.** En especial a mi madre, a mi padre y mis hermanos.

**A mis maestros.**

**A los compañeros de lucha.**

**A los amigos.**

Especialmente a quienes hicieron posible este trabajo con su ayuda tanto en la parte matemática como en la parte técnica.



# Introducción.

En este trabajo estudiamos algunos aspectos de la dinámica de la familia

$$f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \frac{\mu}{z}.$$

Si  $\lambda$  y  $\mu$  son ambos distintos de cero,  $f_{\lambda,\mu}$  es analítica en el plano complejo salvo en el cero donde la función tiene un polo, además tiene una singularidad esencial en infinito. Esto es,  $f_{\lambda,\mu}$  es una función meromorfa trascendente. Demostramos que para esta función el infinito es un valor no excepcional.

A  $SV(f)$  se le llama el *el conjunto de valores singulares* de  $f$ , que es la cerradura del conjunto de todos los valores críticos y asíntóticos de  $f$ . Demostramos que si ambos parámetros son distintos de cero,  $SV(f_{\lambda,\mu})$  es un conjunto infinito y acotado, además de que el cero es punto de acumulación de los valores singulares de  $f_{\lambda,\mu}$ .

Hacemos una exploración de la dinámica de  $f_{\lambda,\mu}$  para diversos parámetros empleando imágenes generadas con Mathematica. En ellas localizamos algunas cuencas de atracción y posibles dominios de Baker de periodo 2. Damos una descripción de algunos aspectos que se aprecian en estas imágenes, en particular lo referente a la posibilidad de que el conjunto de Julia de  $f_{\lambda,\mu}$  contenga un Cantor bouquet.

Abordamos una sección del mapa de parámetros de  $f_{\lambda,\mu}$ . Esta sección corresponde al caso en que ambos parámetros son reales. En este plano identificamos el conjunto de parámetros para los cuales la función real  $f_{\lambda,\mu}(x) = \lambda e^x + \mu/x$  tiene un punto fijo superatractor o indiferente con derivada 1 y  $-1$ . Ello nos permite localizar un conjunto de regiones en el plano  $(\lambda, \mu)$  donde conjeturamos que  $f_{\lambda,\mu}$  tiene al menos un punto fijo atractor.

Todos estos aspectos de la familia  $f_{\lambda,\mu}$  se encuentran en el Capítulo 4. A lo largo del trabajo planteamos diversas preguntas y conjeturas sentando algunas bases para investigar la dinámica de la familia  $f_{\lambda,\mu}$  cuando ambos parámetros son diferentes de cero.

Pocos son los teoremas de carácter general aplicables a la familia  $f_{\lambda,\mu}$  y estos abarcan conjuntos de funciones más amplios como es el caso de las funciones meromorfas. En la literatura revisada no hay resultados que establezcan comportamientos globales en la familia  $f_{\lambda,\mu}$  como ocurre con el teorema 3.5.6 en relación a la familia  $E_\lambda = \lambda e^z$ . Sólo en [6] y [13] encontramos algunos aspectos de la función  $f_{-1,1}$ .

Hacemos una revisión de conceptos y resultados sobre la iteración de funciones meromorfas, de sistemas dinámicos discretos y el análisis complejo; esto se encuentra principalmente en los Capítulos 1 y 2. Abordamos en el Capítulo 3 algunos aspectos de la ampliamente estudiada familia exponencial  $E_\lambda(z)$ , ver [24], no sólo porque es la familia que resulta del caso  $\mu = 0$  para  $f_{\lambda,\mu}$ , sino porque nos ayuda a estudiar el caso en que ambos parámetros son diferentes de cero. En esta revisión, las discusiones de los conceptos y las demostraciones de los resultados no son parte del objetivo de este trabajo pero en algunos casos se incorporan.

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1. Funciones analíticas. . . . .	4
1.2. Familias de funciones normales. . . . .	8
1.3. Elementos de sistemas dinámicos discretos. . . . .	10
1.3.1. Mapa de parámetros. . . . .	14
<b>2. Iteración de funciones meromorfas</b>	<b>16</b>
2.1. Funciones meromorfas. . . . .	17
2.2. Propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou. . . . .	18
<b>3. Aspectos dinámicos de <math>E_\lambda(z) = \lambda e^z</math></b>	<b>24</b>
3.1. La función exponencial compleja. . . . .	25
3.2. Bifurcaciones de $E_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ . . . . .	26
3.3. Cantor bouquet . . . . .	29
3.4. Trasplante de cabellos . . . . .	32
3.5. Dicotomía de $E_\lambda(z)$ . . . . .	33
<b>4. El caso <math>\lambda, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}</math></b>	<b>37</b>
4.1. Aspectos básicos generales. . . . .	38
4.1.1. Dinámica en los dominios de Baker. . . . .	40
4.2. Planos dinámicos. . . . .	40
4.3. Sección real del mapa de parámetros. . . . .	51
4.4. Conjuntos de Julia de $f_{\lambda, \mu}$ en distintas regiones de la sección real del mapa de parámetros. . . . .	59
4.5. Valores singulares, dominios de Baker y dominios errantes. . . . .	71



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo revisaremos algunos conceptos y teoremas de análisis complejo y los sistemas dinámicos discretos. Muchos forman parte de los cursos básicos de estas áreas, aunque también incluimos definiciones y teoremas que generalmente se presentan en cursos más avanzados.

Salvo referencias concretas, el material de este capítulo se encuentra en [2], [19], [10] y [20]. En adelante, las funciones de las que hablemos tendrán dominio y rango en los complejos a menos que señalemos otro caso.

### 1.1. Funciones analíticas.

Las cualidades de las funciones derivables de variable compleja hacen de ellas objetos matemáticos muy importantes. Si una función  $f$  definida en un abierto  $G$  es derivable en todos los puntos de  $G$ , decimos que la función es *analítica*, o bien, *holomorfa* en  $G$ . Cuando la función es analítica en todo el plano complejo se le suele llamar *función entera*. Una de las diferencias contrastantes con las funciones reales derivables de variable real de las funciones analíticas, es que las segundas tienen derivadas de todos los órdenes. Además, todas las funciones analíticas no constantes son abiertas.

Debido a la abundancia de resultados acerca de las funciones analíticas, presentaremos oportunamente sólo algunos, aquellos que utilizaremos directamente en los siguientes capítulos.

A continuación enunciamos dos teoremas de suma importancia: El Teorema de Riemann y el Lema de Schwarz. Para ello recordemos que, por definición, una región es simplemente conexa si tiene un complemento conexo.

Intuitivamente ello significa que no tiene “hoyos”.

**Teorema 1.1.1. Teorema de Riemann.** *Sea  $G$  un conjunto abierto simplemente conexo que no sea todo el plano. Sean  $z_0$  elemento de  $G$  y  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , el disco unitario. Entonces existe una única función analítica  $h : G \rightarrow D$ , que cumple las siguientes propiedades:*

1.  $h(z_0) = 0$  y  $h'(z_0) > 0$ .
2.  $h(G) = D$ .
3.  $h$  es inyectiva en  $G$ .

De hecho  $h$  es biholomorfa, o sea, es holomorfa y su inversa también. A  $h$  se le conoce como la uniformización de  $G$  en el disco unitario.

**Teorema 1.1.2. Lema de Schwarz.** *Sea  $D$  el disco unitario y  $f$  una función analítica definida en  $D$  que cumple:*

1.  $f(D) \subseteq D$ .
2.  $f(0) = 0$

*Entonces  $|f'(0)| \leq 1$  y  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z$  en  $D$ .*

*Además, si  $|f'(0)| = 1$ , o bien, si  $|f(z_0)| = |z_0|$  para algún  $z_0$  distinto de cero, entonces, existe una constante  $c$ ,  $|c| = 1$ , tal que  $f(z) = cz$  para todo  $z$  en  $D$ .*

Del Lema de Schwarz y el Teorema de Riemann se desprende un corolario, que de hecho es una variante del Lema de Schwarz y que resulta muy útil en el estudio de sistemas dinámicos discretos. Aquí lo formulamos y abordamos su demostración.

**Definición 1.1.3.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos y sean  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son topológicamente conjugadas si y sólo si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ . En tal caso  $h$  es una conjugación topológica entre  $f$  y  $g$ . Cuando adicionalmente  $h$  es analítica decimos que  $f$  y  $g$  son analíticamente conjugadas.*

**Corolario 1.1.4.** *Sea  $G$  una región simple conexa que no sea todo el plano. Sea  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  con  $f(G) \subseteq G$ , analítica. Supóngase que  $f(z_0) = z_0$  para algún punto en  $G$ . Entonces, una de las siguientes dos condiciones se cumple:*

1.  $|f'(z_0)| < 1$  y en este caso  $f^n(z) \rightarrow z_0$  para todo punto  $z_0$  en  $G$ , o
2.  $f'(z_0) = e^{i\theta}$  y en tal caso  $f$  es analíticamente conjugada, en  $G$ , a una rotación  $R : D \rightarrow D$  del disco unitario dada por  $R(z) = e^{i\theta}z$ .

**Demostración 1.1.5.** *Por el Teorema de Riemann existe  $h$  analítica que satisface:*

- a)  $h(z_0) = 0$  y  $h'(z_0) > 0$ .
- b)  $h$  es inyectiva.
- c)  $h(G) = D$ .

*Definimos una función  $g$  como sigue:*

$$g(z) = h \circ f \circ h^{-1}(z).$$

*Veamos que ésta función así definida satisface las condiciones de Lema de Schwarz.*

$$g(D) = h \circ f \circ h^{-1}(D) = h \circ f(G) \subseteq h(G) = D.$$

*Con ello tenemos que  $g : D \rightarrow D$ . Ahora veamos la siguiente condición.*

$$g(0) = h \circ f \circ h^{-1}(0) = h \circ f(z_0) = h(z_0) = 0.$$

*De la definición de  $g$ ,  $g \circ h(z) = h \circ f(z)$  y así:*

$$[g \circ h]'(z_0) = [h \circ f]'(z_0) \Rightarrow$$

$$g'(h(z_0)) \cdot h'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

*Como  $h(z_0) = 0$  y  $f(z_0) = z_0$ , cancelando en ambos lados de la igualdad llegamos a que:*

$$g'(0) = f'(z_0).$$

*En ese caso  $|g'(0)| = 1$  o  $|g'(0)| < 1$  y por lo tanto  $g$  cumple las condiciones del Lema de Schwarz. Es decir, si  $|g'(0)| = 1$ , entonces  $g(z) = cz = e^{i\theta}z$ , pues el módulo de  $c$  es 1. De la definición de  $g$  se cumple también que:*

$$f(z) = h_1 \circ g \circ h_1^{-1}(z).$$

*Donde  $h_1 = h^{-1}$ , con lo cual se concluye que  $f$  es analíticamente conjugada con una rotación del disco unitario por  $e^i = e^{i\theta}$ .*

*Para demostrar que si  $|f(z_0)| < 1$ , entonces  $f^n(z) \rightarrow z_0$ , tenemos que probar que  $g^n(z) \rightarrow 0$ . El caso en que  $z$  es  $z_0$  para la  $f$  y el caso en que  $z$  es cero para la  $g$  es trivial, así pasamos al otro caso.*

Sea  $z_1$  distinto de cero en el disco unitario. Dado que  $|g(z_1)| < |z_1|$ , tenemos que  $|g^n(z_1)|$  es una sucesión decreciente y obviamente acotada, por lo tanto converge. Demostremos que el valor límite es cero. Supongamos que es distinto de cero, entonces existe una subsucesión de las iteraciones tal que  $g^{n_k}(z_1) \rightarrow z_2$ , con  $z_2$  distinto de cero. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g^{n_k}(z_1)| = |z_2|$$

por la continuidad de  $g$  tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^{n_k+1}(z_1) = g(z_2)$$

así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g^{n_k+1}(z_1)| = |g(z_2)|.$$

Como  $z_2$  es distinto de cero,  $|g(z_2)| < |z_2|$ . Con ello hemos encontrado dos subsucesiones de la sucesión de módulos que convergen a valores distintos, lo cual genera una contradicción. Por lo tanto la sucesión de módulos converge a cero y con ello se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = 0,$$

para todo punto en  $D$ . Ahora resulta inmediato que para todo punto en  $G$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0.$$

Recordemos que  $f$  se puede escribir como:

$$f(z) = h_1 \circ g \circ h_1^{-1}(z).$$

Como  $h_1^{-1}(z) = z^*$  es un punto en  $D$  y por la continuidad de  $h_1$ , tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_1 \circ g^n(z^*) = h_1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z^*) \right) = h_1(0) = z_0,$$

así hemos terminado la prueba del corolario. ■

## 1.2. Familias de funciones normales.

Aunque el tema de convergencia de funciones puede tratarse en un contexto muy general, aquí nos interesan resultados muy propios de la teoría de variable compleja, como es el caso del Teorema de Montel.

Por esta razón, a menos que especifiquemos lo contrario, siempre que hablemos de una sucesión o de una familia de funciones, supondremos que éstas están definidas en un dominio adecuado  $G$  en el plano complejo o en la esfera de Riemann. A cualquiera de estos dos espacios lo denotamos por  $X$ .

Para este tipo de sucesiones existen diferentes criterios de convergencia, sin embargo, para el estudio de sistemas dinámicos discretos de variable compleja nos interesa la convergencia uniforme.

**Definición 1.2.1.** *Una sucesión de funciones  $\{f_n\}$ ,  $f_n : G \subseteq X \rightarrow X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge uniformemente a  $f$  en  $G$  si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  de forma que si  $n \geq N$  se cumple que  $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ , para todo  $z$  en  $G$ .*

Esta definición se puede extender a lo que llamamos convergencia uniforme a infinito. Esto ocurre si para todo  $M$  real, existe  $N$  natural de forma que si  $n \geq N$ ,  $|f_n(z)| > M$  para todo  $z$  en el dominio.

En el caso de sucesiones de números reales o complejos contamos con el importante teorema de Bolzano-Weierstrass, que establece que una sucesión acotada siempre tiene una subsucesión convergente. Antes de hablar de condiciones necesarias y suficientes, para que una sucesión de funciones contenga subsucesiones uniformemente convergentes, definimos el concepto de familia normal.

**Definición 1.2.2.** *Sea  $\mathfrak{F}$  una familia de funciones. Decimos que  $\mathfrak{F}$  es normal en  $G$  si para toda sucesión  $\{f_n\}$  contenida en la familia, existe una subsucesión uniformemente convergente en todo subconjunto compacto de  $G$  a una función  $f$  o a infinito.*

Observemos que en esta definición nos interesa la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de  $G$ . Esto es porque pedir que una sucesión converja uniformemente en todo  $G$  es demasiado restrictivo y se obtienen importantes resultados sin necesidad de ello. Muestra de ello es el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.3.** *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones analíticas definidas en un dominio  $G \subseteq X$ . Si  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  en cada subconjunto compacto de  $G$ , entonces,  $f$  es analítica. En tal caso decimos que la sucesión converge uniformemente en compactos a  $f$ .*

Este teorema es de gran trascendencia pues establece la completez del espacio métrico de funciones analíticas definidas en un dominio  $G \subseteq X$ . La métrica es la inducida por la convergencia uniforme en compactos.

Para ejemplificar lo anterior, tomemos la sucesión de funciones  $f_n(z) = z^n$ . Si bien la sucesión no converge uniformemente en el disco unitario abierto  $D$ , sí lo hace en compactos a la función constante cero.

Montel estableció condiciones necesarias y suficientes para que una familia de funciones analíticas sea normal. Para ello requerimos introducir el concepto de familia localmente acotada.

**Definición 1.2.4.**  *$\mathfrak{F}$  es una familia localmente acotada si para cada punto  $z_0$  en el dominio existe un valor real  $M$  y una vecindad de  $z_0$  en donde  $|f(z)| < M$ , para todo punto  $z$  en la vecindad y toda función en la familia.*

Y así podemos formular ahora el Teorema de Montel.

**Teorema 1.2.5. Teorema de Montel.** *Sea  $\mathfrak{F}$  una familia de funciones analíticas. Entonces  $\mathfrak{F}$  es normal si y sólo si ocurre una de estas dos opciones:*

1. *La familia es localmente acotada.*
2. *Toda sucesión en  $\mathfrak{F}$  tiene una subsucesión que converge uniformemente a  $\infty$  en cada subconjunto compacto del dominio.*

Usando el Teorema de Montel se prueba el siguiente resultado cuyo corolario nos será muy útil.

**Teorema 1.2.6. Teorema de Montel-Carathéodory.** *Sea  $\mathfrak{F}$  una familia de funciones analíticas en un dominio  $G$ . Si existen dos valores distintos  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{C}$  tales que  $a \notin f(G)$  y  $b \notin f(G)$  para toda función  $f$  en la familia, entonces  $\mathfrak{F}$  es normal en  $G$ .*

**Corolario 1.2.7.** *Sea  $\mathfrak{F}$  una familia de funciones analíticas tal que para toda vecindad  $V$  de  $z_0$  la familia no es normal. Entonces,*

$$\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(V)$$

*omite a lo más dos puntos en  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .*

Un complemento a la definición 1.2.4 es la idea de una familia de funciones acotadas uniformemente en un conjunto  $G \subseteq X$ . Introducimos aquí este concepto pues permite utilizar de forma simple el Teorema de Montel.

**Definición 1.2.8.** Sea  $\mathfrak{F}$  una familia de funciones definida en  $G \subseteq X$ . Decimos que  $\mathfrak{F}$  es uniformemente acotada en  $G$ , si y sólo si, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(z)| < M$  para toda  $f$  en la familia y todos los puntos  $z$  en  $G$ .

Es inmediato que una familia de funciones acotada uniformemente lo es localmente. De ello se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.9.** Sea  $\mathfrak{F}$  una familia de funciones acotada uniformemente en  $G \subseteq X$ , entonces  $\mathfrak{F}$  es normal en  $G$ .

### 1.3. Elementos de sistemas dinámicos discretos.

Dada una función  $f : G \rightarrow G$ , a la composición de ésta consigo misma le llamamos una *iteración de  $f$* . Tenemos que  $f^0(z) = z$ ,  $f^1(z) = f(z)$ ,  $f^2(z) = f(f(z))$  y así sucesivamente. Entonces,  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \circ f$ ,  $n$  veces, le llamamos *la  $n$ -ésima iteración de  $f$* .

El objeto de estudio de los sistemas dinámicos discretos es el comportamiento de los puntos del dominio al evaluarlos con las sucesivas iteraciones de una función. Como siempre en matemáticas, no sólo nos va a interesar conocer el comportamiento particular de las iteraciones en un punto del dominio, sino poder abarcar aspectos cada vez más generales.

Dado un punto  $z_0$ , el conjunto  $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$  donde  $z_n = f^n(z_0)$  le llamamos *la órbita hacia adelante de  $z_0$  bajo  $f$* , y lo denotamos por  $O^+(z_0, f)$ . Al conjunto de puntos límite de la órbita de  $z_0$  bajo  $f$ , le llamamos *el omega conjunto límite de  $z_0$  bajo  $f$* , y lo denotamos por  $\omega(z_0, f)$ .

Por otro lado, *la órbita hacia atrás de un punto  $z_0$  bajo  $f$* ,  $O^-(z_0, f)$ , se define como:

$$O^-(z_0, f) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(z_0).$$

La *órbita completa* de  $z_0$  es la unión de la órbita hacia adelante con la órbita hacia atrás.

Si  $f(z_0) = z_0$  decimos que  $z_0$  es un punto fijo.

Si para algún  $n \neq 0$  se cumple que  $f^n(z_0) = z_0$ ,  $z_0$  es un punto periódico. Cuando  $n$  es el natural menor que satisface esta igualdad, decimos que  $z_0$  es de periodo  $n$ . Evidentemente un punto fijo es un punto periódico de periodo 1.

Los puntos fijos y periódicos se clasifican de acuerdo al módulo de la derivada. Esto se debe a las consecuencias dinámicas que de ello se desprenden.

**Definición 1.3.1.** Sea  $f$  analítica y  $z_0$  un punto fijo. Si:

1.  $|f'(z_0)| = 0$ , entonces  $z_0$  es un punto fijo superatractor.
2.  $|f'(z_0)| < 1$ , entonces  $z_0$  es un punto fijo atractor.
3.  $|f'(z_0)| > 1$ , entonces  $z_0$  es un punto fijo repulsor.
4.  $|f'(z_0)| = 1$  y es una raíz de la unidad, entonces  $z_0$  es un punto fijo indiferente racional.
5.  $|f'(z_0)| = 1$ , pero  $f'(z_0)$  no es una raíz de la unidad, entonces  $z_0$  es un punto fijo indiferente irracional.

Esta definición se generaliza a puntos periódicos considerando que si  $z_0$  es de periodo  $n$ , entonces  $z_0$  es punto fijo para  $f^n$ . Tenemos pues, puntos periódicos superatractores, atractores, repulsores, indiferentes racionales e irracionales según  $|(f^n)'(z_0)|$  sea cero, menor a uno y distinto de cero, mayor a uno, siendo uno si es raíz de la unidad o no, respectivamente. Al valor de  $(f^n)'(z_0)$  se le conoce como *el multiplicador* de  $z_0$ . Si  $z_0$  es el infinito, entonces el multiplicador de  $z_0$  está dado por  $(g^n)'(0)$ , donde

$$g(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

En muchas ocasiones, siempre que un punto periódico, o fijo, cumpla que  $|(f^n)'(z_0)| = 1$ , nos referimos a  $z_0$  simplemente como punto periódico, o fijo, indiferente.

Si  $z_0$  es un punto periódico de periodo  $n$ , entonces diremos que la órbita hacia adelante de  $z_0$  es un *ciclo atractor, repulsor o indiferente*, según  $z_0$  sea atractor, repulsor o indiferente.

Los puntos no periódicos para los que existe  $n$  natural tal que su imagen bajo  $f^n$  es un punto periódico, se llaman *preperiódicos* o *eventualmente periódicos*.

Además de los puntos periódicos y preperiódicos, hablaremos de los conjuntos de valores *críticos*  $CV(f)$ , *asintóticos*  $AV(f)$  y *excepcionales*  $E(f)$ . Como es bien sabido, los puntos críticos son aquellos donde la derivada se



anula,  $z_0$  es valor crítico si es la imagen de un punto crítico. Decimos que  $z_0$  es un valor asintótico si existe una curva  $z(t)$  con  $0 \leq t < 1$  tal que si:

$$\lim_{t \rightarrow 1} z(t) \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} f(z(t)) = z_0.$$

En el caso de la exponencial el cero es valor asintótico y  $\mathbb{R}^-$  corresponde a la curva  $z(t)$ .

A la cerradura en  $\mathbb{C}$  del conjunto de valores críticos y asintóticos de una función  $f$  se le suele llamar conjunto de *valores singulares* de  $f$  y lo identificamos con  $SV(f)$ .

Finalmente,  $z_0$  es valor excepcional si  $O^-(z_0)$  es un conjunto finito de puntos, en el caso particular en que  $O^-(z_0) = \phi$ , a  $z_0$  se le llama *valor omitido* (ver también 2.1.1). En el caso de la exponencial, el cero es un valor excepcional y omitido, mientras que para la función  $ze^z$  el cero no es omitido pero es excepcional.

Ahora pasemos a definir dos conjuntos esenciales para la dinámica de las funciones.

Decimos que  $f : G \rightarrow G$  es *normal* en  $z_0$  si la familia de iteraciones  $\mathfrak{F} = \{f^0, f^1, f^2, \dots\}$  es normal en alguna vecindad  $V$  que tenga a  $z_0$  como elemento.

Naturalmente  $f$  *no es normal* en  $z_0$  si para toda vecindad de  $z_0$  la familia de iteraciones no es normal. Con base en esto se pueden clasificar los puntos del dominio en dos conjuntos ajenos.

**Definición 1.3.2.** Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . El conjunto

$F(f) = \{z \in \mathbb{C} : f \text{ es normal en } z\}$  es llamado el conjunto de Fatou de  $f$ , o el conjunto estable de  $f$ .

$J(f)$  se define como el complemento del conjunto de Fatou y se llama el conjunto de Julia de  $f$ .

Históricamente al conjunto de puntos donde  $f$  no es normal se le ha identificado con el nombre de conjunto de Julia. Más recientemente, en 1984, al conjunto estable se le empezó a llamar conjunto de Fatou. Estos nombres se deben a los creadores de la teoría, dos matemáticos franceses, Pierre Fatou y Gaston Julia, alrededor de 1918.

Cuando  $f(A) \subseteq A$  para algún subconjunto del dominio de  $f$ , decimos que  $A$  es un conjunto invariante hacia adelante. Si  $f^{-1}(A) \subseteq A$  se dice que  $A$  es invariante hacia atrás. En el caso de darse la igualdad, se dice que  $A$  es

fuertemente invariante hacia adelante o hacia atrás, según sea el caso. Si el conjunto cumple ambas condiciones se le llama *completamente invariante*.

**Teorema 1.3.3.** *Sea  $f$  analítica, entonces los conjuntos de Julia y Fatou de  $f$  son completamente invariantes.*

**Demostración 1.3.4.** *Si  $z_0 \in F(f)$ , entonces existe  $V$  vecindad de  $z_0$  donde la familia de iteraciones es normal.*

*Dado que  $f$  es continua,  $f^{-1}(V) = U$  es abierto y contiene a todos los puntos de  $f^{-1}(z_0)$ . Todo compacto  $K \subset U$  cumple que  $C = f(K) \subset V$  y es un compacto. En virtud de la normalidad de  $f$  en  $z_0$  existe una subsucesión  $\{f^{n_k}\}$  uniformemente convergente en  $C$ , por tanto la subsucesión  $\{f^{n_k+1}\}$  es uniformemente convergente en  $K$  y con ello tenemos que  $f^{-1}(F(f)) \subset F(f)$ .*

*Si  $f$  es constante,  $F(f)$  es todo el plano y se cumple que  $f(F(f)) \subset F(f)$ . En el caso en que  $f$  no es constante usaremos que  $f$  es abierta. Si  $w_0 = z_0$ , entonces  $f(V) = U$  es un abierto que contiene a  $w_0$ . Dado un compacto  $K \subset U$ , entonces  $f^{-1}(K) \cap V = C$  es un compacto porque  $f$  es abierta. Por la normalidad de  $f$  en  $z_0$  existe una subsucesión  $\{f^{n_k}\}$  uniformemente convergente en  $C$ . Entonces la subsucesión  $\{f^{n_k-1}\}$  es uniformemente convergente en  $K$ . Por lo tanto  $f(F(f)) \subset F(f)$ . ■*

Una órbita atractora y los puntos que convergen a ella forman un conjunto abierto y se le llama *la cuenca de atracción de la órbita*. Cada elemento  $z_j$  del ciclo atractor pertenece a una componente abierta de la cuenca de atracción que se conoce como *la cuenca inmediata de atracción de  $z_j$* .

Las componentes del conjunto de Fatou tienen la siguiente clasificación:

**Definición 1.3.5.** *Sea  $\Phi$  una componente de  $F(f)$  el conjunto de Fatou.*

1.  $\Phi$  es periódica, si existe  $n > 0$  tal que  $f^n(\Phi) = \Phi$ .
2.  $\Phi$  es eventualmente periódica o preperiódica, si existe  $n$  natural y  $\Gamma \subset F(f)$  componente periódica, tal que  $f^n(\Phi) \subset \Gamma$ .
3.  $\Phi$  es errante, si para todo  $n \geq 0$  los conjuntos  $f^n(\Phi)$  son ajenos por pares entre sí.

Para describir la dinámica en el conjunto de Julia recurriremos a la noción de caos. Hay variantes de cómo éste se define. Aquí presentamos la que utiliza Devaney que parte desde un punto de vista topológico.

**Definición 1.3.6.** *Decimos que  $f$  es caótica en  $X$  si se cumplen las siguientes propiedades:*

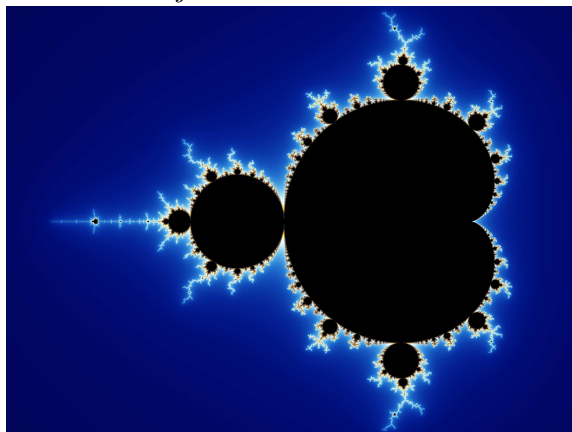
1. *El conjunto de puntos periódicos es denso en  $X$ .*
2.  *$f$  es topológicamente transitiva en  $X$ .*

### 1.3.1. Mapa de parámetros.

En el estudio de los sistemas dinámicos discretos generados por una familia de funciones  $\mathfrak{F} = \{f\}$  es de interés comprender cómo se altera la dinámica generada por  $f \in \mathfrak{F}$  al modificar el valor de un parámetro. Como en el caso de una perturbación que depende de un parámetro.

El caso más estudiado y famoso es el de la familia cuadrática  $Q_c(z) = z^2 + c$ , donde aparece el conjunto de Mandelbrot  $\mathfrak{M}$ . Para esta familia los conjuntos de Julia presentan una dicotomía que depende del parámetro  $c$ . Esto es, o bien  $J(Q_c)$  es conexo o es totalmente desconexo. Al identificar en el plano a cuáles parámetros les corresponde un Julia conexo, obtenemos el conjunto de Mandelbrot.

**Figura 1.3.7.** *Conjunto de Mandelbrot. Tomada de [53].*



Además de identificar el conjunto de parámetros donde el conjunto de Julia es conexo, se puede localizar el conjunto de parámetros donde la función tiene una órbita de periodo uno atractora. Este conjunto está formado por la cardioide en negro. Los *bulbos* pegados a la cardioide, que son las zonas en negro circulares, son conjuntos de parámetros donde se tiene la presencia de una órbita periódica atractora.

Como en un mapa, cuando se sabe leer, se puede conocer información acerca de la dinámica de una familia de funciones dada por la variación de uno o varios parámetros. En general, se identifican las bifurcaciones de la familia y los dominios de estabilidad. En el caso del conjunto de Mandelbrot, se puede localizar los conjuntos de parámetros donde hay órbita atractora de periodo 3, 5, 7, etc. Por ello es natural que al plano donde se identifica el conjunto de Mandelbrot se le conozca como *mapa de parámetros* de la familia

cuadrática, o bien, *plano de parámetros* de la familia cuadrática. Al plano donde se localiza el conjunto de Julia de una función  $f$  se le conoce como el *plano dinámico* de  $f$ .

Al final del capítulo 3 incluimos aspectos sobre el mapa de parámetros de la familia exponencial  $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ . En el capítulo 4 abordamos algunos aspectos del mapa de parámetros de la familia  $f_{\lambda,\mu}$ .

## Capítulo 2

# Iteración de funciones meromorfas

El estudio de los sistemas dinámicos discretos en el campo de la dinámica holomorfa se dio a comienzos del siglo XX con los matemáticos franceses G. Julia y P. Fatou. Si bien en estos comienzos la mayor parte de los trabajos eran respecto a funciones racionales, también se estudiaron funciones trascendentes como la función exponencial. En las últimas dos décadas del siglo XX se retomó el estudio de la dinámica holomorfa teniendo un importante desarrollo el caso de las funciones enteras trascendentes. En las últimas dos décadas, esto ha ocurrido también para el caso de funciones meromorfas trascendentes.

Uno de los caminos que se siguen con frecuencia para el estudio de la dinámica de funciones meromorfas, es la búsqueda de generalizar resultados conocidos para el caso racional. Por otro lado, las funciones meromorfas trascendentes presentan fenómenos que no son posibles en el caso racional.

En la primer sección, veremos la definición de función meromorfa y algunos resultados básicos respecto a las singularidades esenciales. En la segunda sección, veremos propiedades topológicas y dinámicas de los conjuntos de Julia y Fatou para funciones meromorfas. Otros resultados serán abordados oportunamente en los capítulos siguientes. Salvo referencias concretas, el material de este capítulo se encuentra principalmente en [13], [3]; así como en [2], [19], [10] y [20].

## 2.1. Funciones meromorfas.

Cuando una función  $f$  es analítica en un disco perforado  $D - \{z_0\}$  decimos que  $z_0$  es una *singularidad aislada*. Estas singularidades se clasifican de la siguiente manera:

1. La singularidad es *removible* si existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .
2. Es un *polo* de la función si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .
3. Es *esencial* en cualquier otro caso.

Una función es *meromorfa* en  $\mathbb{C}$  si es analítica en  $\mathbb{C}$  salvo en los polos. Por definición, en una función meromorfa los polos deben ser aislados de otros. La suma, el producto y el cociente de funciones meromorfas son meromorfas.

Un famoso resultado que es sumamente útil para estudiar la dinámica de funciones meromorfas se debe a Picard, ver [42].

**Teorema 2.1.1. Teorema pequeño de Picard.** *Sea  $f$  meromorfa en  $\mathbb{C}$  y no constante. Entonces  $f$  toma todos los valores en  $\mathbb{C}$  salvo a lo más dos puntos.*

Los puntos que excluye una función meromorfa se conocen como *valores de Picard*. Por ejemplo, para la función  $E(z) = e^z$  el 0 es un valor de Picard. A estos valores también se les conoce como *valores omitidos*. Nótese que los valores omitidos son excepcionales.

Las funciones meromorfas se clasifican en diferentes familias, en las cuales son válidos resultados del análisis complejo o bien de sistemas dinámicos discretos. Por supuesto los polinomios y las funciones racionales son funciones meromorfas. Las siguientes familias nos serán de utilidad más adelante.

**Definición 2.1.2.** *1. Las funciones enteras trascendentes, son funciones analíticas en el plano complejo que no son polinomios. Es decir, los coeficientes de su serie de Taylor que son diferentes de cero son una cantidad infinita.*

*2. Las funciones meromorfas trascendentes son aquellas funciones meromorfas que no son racionales.*

Las funciones trascendentes se caracterizan por tener *singularidades esenciales*. En el caso de las meromorfas trascendentes, siempre el punto al infinito es la única singularidad esencial. El comportamiento de una función alrededor de estas singularidades queda establecida en el clásico teorema de Weierstrass:

**Teorema 2.1.3.** *Una función analítica toma valores arbitrariamente cercanos a cualquier valor complejo en toda vecindad de una singularidad esencial.*

Eso no es todo, con el Teorema grande de Picard podemos tener una idea más precisa del comportamiento de las funciones cerca de una singularidad esencial.

**Teorema 2.1.4. Teorema grande de Picard.** *Sea  $z_0$  singularidad esencial de  $f$ , entonces en toda vecindad de  $z_0$ ,  $f$  asume una infinidad de veces cualquier valor complejo en la esfera de Riemann, salvo posiblemente dos valores.*

Este teorema nos dice que una función trascendente tiene a lo más dos valores excepcionales. En la función  $e^z/z$ , el infinito es valor excepcional no omitido, pues hay un polo en cero, en tanto que 0 es valor omitido.

## 2.2. Propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou.

Los conjuntos de Julia y Fatou juegan un papel central en el estudio de los sistemas dinámicos. Aquí presentamos algunas de las propiedades de estos conjuntos. En adelante, las funciones referidas son meromorfas no lineales ni constantes. Convenientemente, en cada resultado haremos referencia al caso racional.

Si llamamos  $V_{z_0}$  a una vecindad donde  $f$  es normal en  $z_0$ , tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $f$  meromorfa, entonces:*

$$F(f) = \bigcup_{z \in F(f)} V_z.$$

**Demostración 2.2.2.** *Una de las contenciones es obvia. Para garantizar la otra, necesitamos probar que dado  $z_0 \in F(f)$ ,  $V_{z_0} \subseteq F(f)$ . Sea  $z$  elemento de  $V_{z_0}$ , entonces existe una vecindad  $V$  de  $z$  contenida en  $V_{z_0}$ , con ello  $f$  es normal en  $V$  y por tanto  $z$  es elemento del Fatou, quedando demostrada la igualdad anterior. ■*

Al ser el conjunto de Fatou una unión arbitraria de abiertos, el conjunto es abierto y por tanto el conjunto de Julia es cerrado.

Los puntos periódicos juegan un papel central en el estudio de los sistemas dinámicos. De hecho están íntimamente relacionados con los conjuntos de Julia y Fatou. Se puede probar que los puntos periódicos atractores y sus cuencas de atracción pertenecen al conjunto de Fatou. También se puede demostrar que la frontera de la cuenca de atracción está contenida en el conjunto de Julia.

En el caso de los puntos periódicos indiferentes, los racionalmente indiferentes siempre pertenecen al conjunto de Julia. Los irracionalmente indiferentes son caprichosos, pueden ser parte del Julia o del Fatou. Más sobre el tema se puede consultar en [49].

Otro teorema es que los puntos periódicos repulsores pertenecen al conjunto de Julia. Más todavía, para el caso de funciones meromorfas se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.3.** *Sea  $f$  meromorfa. Entonces el conjunto  $J(f)$  es la cerradura del conjunto de puntos periódicos repulsores.*

Este resultado lo probaron Fatou y Julia para el caso racional. Baker lo extendió para el caso de las funciones enteras trascendentes. Battacharyya para el caso de la familia  $P$  y Baker, Kotus y Lü para  $M$ . En las pruebas del caso trascendente se usó un teorema sobre la teoría de Ahlfors de superficies cubrientes, [13]. Posteriormente Bolsch [18] extendió al caso de las funciones meromorfas una prueba más sencilla de este hecho hecha por Schwick [48] para funciones enteras y racionales, ver [11].

En la prueba seguida por Julia para este teorema es indispensable la existencia de puntos periódicos repulsores. Al respecto se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.4.** *Sea  $f$  una función meromorfa trascendente y  $n \geq 2$ , entonces  $f$  tiene una infinidad de puntos periódicos repulsores de periodo  $n$ .*

No siempre las funciones trascendentes tienen puntos fijos, por ejemplo la función  $f(z) = e^z + z$  no los tiene, dado que la ecuación  $f(z) - z$  no se anula. Baker probó en [4] que si una función racional de grado  $d \geq 2$  no tiene puntos periódicos de periodo  $n$ , entonces  $n = 2$  y  $d \in \{2, 3, 4\}$  o si  $n = 3$  y  $d = 2$ .



Del resultado anterior se desprende que el conjunto de Julia es no vacío para funciones trascendentes. Esto es válido más en general para todas las funciones meromorfas y de hecho se tiene el siguiente:

**Teorema 2.2.5.** *Si  $f$  es meromorfa, entonces  $J(f)$  es perfecto, es decir, es cerrado, no vacío y no tiene puntos aislados.*

La prueba en el caso racional seguida por Julia y Fatou es mostrando que existe un punto fijo repulsor o con multiplicador 1. Una vez que se encuentra  $z_0 \in J(f)$ , se muestra que  $O^-(z_0)$  es infinito. Con ello y el Teorema de Montel se tiene que  $J$  es perfecto. Si  $f$  es trascendente la prueba se hace por casos. Más adelante daremos una clasificación de las funciones meromorfas trascendentes.

La dinámica en el conjunto de Julia resulta ser muy complicada. Recordemos que si  $f$  no es normal en  $z$ , quiere decir que en ninguna vecindad de  $z$  la familia tiene una subsucesión uniformemente convergente. Las consecuencias dinámicas de este hecho en el conjunto de Julia se resume en el siguiente resultado, ver [21].

**Teorema 2.2.6.** *Sea  $f$  analítica, no inyectiva ni constante. Entonces,  $f$  es caótica, en el sentido de Devaney, en  $J(f)$ .*

Para funciones meromorfas trascendentes la familia de iteraciones no está definida en todo el plano complejo, en tanto que todas las iteraciones de las funciones racionales están bien definidas en la esfera de Riemann.

Como ya mencionamos, el comportamiento del punto al infinito en el caso de las funciones racionales es sumamente distinto al caso de las funciones enteras trascendentes. Por ejemplo, para los polinomios el infinito es un punto superatractor generando una componente de la cuenca de atracción. En general, el comportamiento dinámico del punto al infinito para las funciones racionales no se distingue del resto de los puntos. En cambio, las funciones meromorfas trascendentes tienen en el infinito una singularidad esencial. Por ello el infinito juega un papel central en la dinámica de estas funciones, que en el área se suelen clasificar según el infinito sea omitido, excepcional no omitido o no excepcional formando las siguientes familias:

1.  $f \in E$  si el infinito es omitido, por tanto  $E$  es la familia de funciones enteras trascendentes. La familia de iteraciones de  $f$  en este caso está bien definida en el plano complejo.

2. La familia  $P$  es la de aquellas funciones trascendentes  $f$  tal que tienen sólo un polo en  $z_0$  que resulta ser un valor omitido. Entonces las iteraciones

están bien definidas en  $\mathbb{C} - \{z_0, \infty\}$ . Esto es, las funciones de la familia  $P$  tienen al infinito como un valor excepcional no omitido. Como una función trascendente tiene a lo más dos valores excepcionales, la órbita hacia atrás del infinito tiene un único elemento que debe ser un valor omitido.

3. La familia  $M$  es la de aquellas funciones meromorfas trascendentes donde el infinito es no excepcional. Por lo señalado en (2), si  $f$  tiene al menos dos polos, el infinito es no excepcional. En tal caso, o si  $f$  tiene sólo un polo que no es un valor omitido, entonces  $O^-(\infty)$  resulta ser un conjunto infinito. A los elementos de la órbita hacia atrás del infinito los llamaremos *prepolos*. Sea  $z$  un prepolo, entonces existe  $n$  tal que  $f^n(z) = \infty$ , es decir,  $z$  es eventualmente singularidad esencial, por tanto  $f^{n+1}$  no se puede definir en  $z$ . Esto constituye una diferencia importante del conjunto de Julia cuando el infinito es no excepcional de cuando sí lo es. En el capítulo 4 veremos que este es el caso de las funciones de la familia  $f_{\lambda, \mu}$  si ambos parámetros no son cero.

Si  $z \in \overline{O^-(\infty)}$ , la familia de iteraciones de  $f \in M$  no se puede definir continuamente en alguna vecindad de  $z$ . Dado que  $\overline{\mathbb{C} - O^-(\infty)}$  es invariante hacia adelante bajo  $f$  y  $O^-(\infty)$  tiene más de dos puntos, por el Teorema de Montel, se concluye que  $\{f^n\}$  es normal en  $\overline{\mathbb{C} - O^-(\infty)}$ .

Lo anterior nos da una caracterización del conjunto de Fatou para una función en  $M$ . Esta es, como el conjunto abierto más grande donde podemos definir todas las iteraciones de  $f$ . En este caso, se tiene que:

$$J(f) = \overline{O^-(\infty)}.$$

Empleando el corolario 1.2.7 del Teorema de Montel se puede demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.7.** *Sea  $f$  meromorfa, entonces  $J(f)$  es denso en ninguna parte o es todo el plano.*

**Demostración.** Si  $J(f)$  no es todo el plano, entonces el conjunto de Fatou es no vacío. Siendo el conjunto de Fatou abierto, existe una infinidad de puntos donde  $f$  es normal. Dado un punto  $z_0$  en el conjunto de Julia y una vecindad arbitraria  $V_{z_0}$  de este punto, como  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(V_{z_0})$  sólo puede excluir a lo más dos puntos de  $\overline{\mathbb{C}}$  (corolario 1.2.7) debe existir  $N$  natural, tal que  $f^N(V_{z_0})$  tiene intersección no vacía con el conjunto de Fatou. Tomemos a  $w \in F(f) \cap f^N(V_{z_0})$ . Entonces  $f^{-N}(\{w\})$  intersecta a  $V_{z_0}$ . Al ser Fatou completamente

invariante, encontramos elementos de este conjunto arbitrariamente cerca de  $z_0$ . En tal caso el Julia debe ser denso en ninguna parte. ■

Tenemos más consecuencias del Teorema de Montel. Una es que si  $z_0$  no es excepcional, entonces  $J(f) = \overline{O^-(z_0)}$ .

Otra más es que si  $z_0$  pertenece al conjunto de Julia de  $f$ , si  $U$  es un abierto que contiene a  $z_0$ , entonces  $O^+(U)$  omite a las más dos puntos en  $\overline{\mathbb{C}}$ , los excepcionales. Más aún, si  $f$  no tiene valores excepcionales o estos pertenecen al conjunto de Fatou, entonces  $f^n(J(f) \cap U) = J(f)$ , para algún natural  $n$  suficientemente grande. Conviene tener presente que las funciones meromorfas tienen a lo más dos valores excepcionales, si  $f$  es entera trascendente,  $\infty$  siempre es excepcional, por lo que en este caso la función puede tener a lo más un valor finito excepcional.

Para terminar esta sección de resultados, enunciamos el Teorema de clasificación de dominios periódicos para funciones meromorfas, que caracteriza la dinámica en el conjunto de Fatou de las componentes periódicas. Se sabe además que una función meromorfa tiene a lo más un dominio invariante [34].

**Teorema 2.2.8.** *Sean  $f$  meromorfa y  $U$  componente periódica de  $F(f)$  de periodo  $n$ . Entonces se tiene una de las siguientes 5 posibilidades:*

1. *La componente  $U$  contiene un punto  $z_0$  atractor de periodo  $n$ . Entonces  $f^{nk}(z) \rightarrow z_0$  para toda  $z$  en  $U$  cuando  $k$  tiende a infinito. La componente  $U$  se llama la cuenca inmediata de atracción de  $z_0$ .*

2. *La frontera de  $U$  contiene un punto periódico  $z_0$  de periodo  $n$ , tal que  $f^{nk}(z) \rightarrow z_0$  para toda  $z$  en  $U$  cuando  $k$  tiende a infinito. Entonces  $|(f^n)'(z_0)| = 1$ . En este caso a  $U$  se le llama dominio de Leau o dominio parabólico.*

3. *Existe un homeomorfismo analítico  $\varphi : U \rightarrow D$ , con  $D$  el disco unitario, tal que  $\varphi$  conjuga a  $f^n$  con  $e^{2\pi\alpha}z$  para  $\alpha$  irracional, es decir, con una rotación irracional. En tal caso,  $U$  se llama disco de Siegel.*

4. *Existe un homeomorfismo analítico  $\varphi : U \rightarrow A$  donde  $A$  es un anillo,  $A = \{z : 0 < |z| < r\}$ , con  $r > 1$ , tal que  $\varphi$  conjuga a  $f^n$  con  $e^{2\pi\alpha}z$  para  $\alpha$  irracional, es decir, con una rotación irracional. En tal caso  $U$  se llama anillo de Herman.*

5. *Existe un punto  $z_0$  en la frontera de  $U$ , tal que  $f^{nk}(z) \rightarrow z_0$  para toda  $z$  en  $U$  cuando  $k$  tiende a infinito, pero  $f^n(z_0)$  no está definida. En este caso  $U$  se llama dominio de Baker.*

La caracterización de los dominios periódicos del conjunto de Fatou fue

dada para el caso de funciones racionales por Sullivan entre 1982 y 1983, resultado que se conoce como Teorema de clasificación de Sullivan, . El caso general por Baker, Kotus y Lü en 1991, ver [13].

Conviene hacer notar que en el caso del ciclo de dominios de Baker, siempre existe una componente donde  $z_0 = \infty$ , más aún cualquier componente cumple que el  $z_0$  correspondiente es un prepolo, [13].

# Capítulo 3

## Aspectos dinámicos de

$$E_\lambda(z) = \lambda e^z$$

En 1981 Misiurewicz demostró que el conjunto de Julia de  $f_{1,0}(z) = E_1(z) = E(z) = e^z$  es todo el plano, contestando a una pregunta de Fatou que había quedado abierta durante 60 años. Si bien en la actualidad se cuentan con sofisticadas herramientas que simplifican enormemente la demostración de este hecho, la virtud del procedimiento seguido por Misiurewicz es la utilización de resultados básicos del análisis complejo, ver [20] y [43]. En la demostración de Misiurewicz se exhibe un comportamiento geométrico de la función exponencial y su dinámica que nos permite “sentir” el resultado, ver [44].

Con la familia  $E_\lambda$  se ilustra parte importante de la riqueza de fenómenos que se presentan en la dinámica de funciones trascendentes. Varios de estos aspectos serán de utilidad para abordar a la familia  $f_{\lambda,\mu}$  y nos conduce al planteamiento de varias preguntas. Por ejemplo:

**Pregunta 3.0.9.** *¿El conjunto de Fatou de  $f_{\lambda,\mu}$  puede ser vacío si  $\mu$  es diferente de cero?*

En este capítulo, además de hacer una revisión de resultados, abordamos la demostración de la dicotomía de  $J(E_\lambda)$ , teorema 3.5.6, siguiendo la idea presentada en [24] y en [13]. De este resultado se desprende como un caso particular el hecho de que  $J(E_1) = \mathbb{C}$ . Esta prueba es sumamente contrastante a la presentada por Misiurewicz, pues utiliza propiedades dinámicas de carácter general para distintas clases de familias meromorfas, abarcando

con ello no sólo el caso  $\lambda = 1$ , sino que caracteriza los parámetros en que  $J(E_\lambda) = \mathbb{C}$  en función de la órbita del cero.

### 3.1. La función exponencial compleja.

Definimos la función exponencial compleja  $E(z) = e^z$ ,  $z = x + iy$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , como sigue:

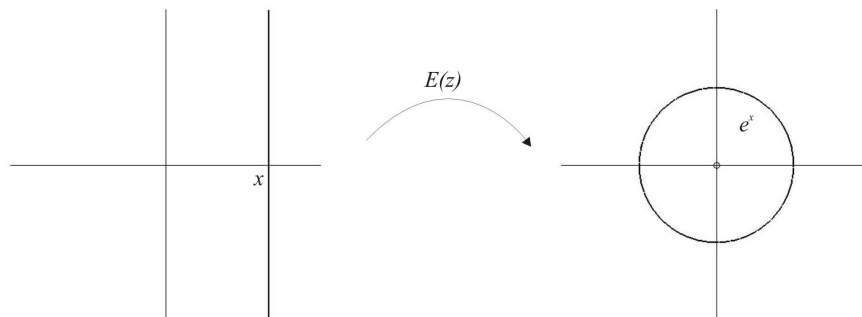
$$E(z) = e^x \cos y + e^x i \sin y.$$

Por tanto, la función satisface que  $|E(z)| = e^x$  y  $\text{Arg}(E(z)) = y$ . Esto trae como consecuencia propiedades analíticas y geométricas peculiares. El cero es un punto omitido en la imagen de la exponencial. Mientras que la imagen de cualquier recta horizontal forma un rayo cuyo ángulo es  $y$ , la imagen de cualquier recta vertical es una circunferencia cuyo radio es  $e^x$  dando una infinidad de vueltas al cero.

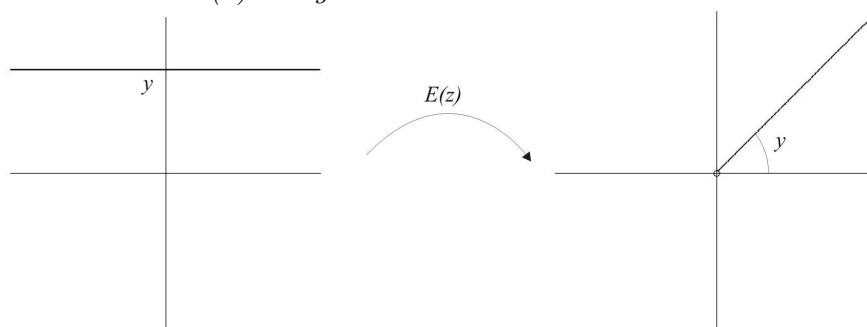
En franjas horizontales de altura  $2\pi$  la exponencial es una función biyectiva con imagen  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

Como  $E'(z) = E(z)$  la función no tiene punto críticos. Además,  $|E'(z)| = e^x$ .

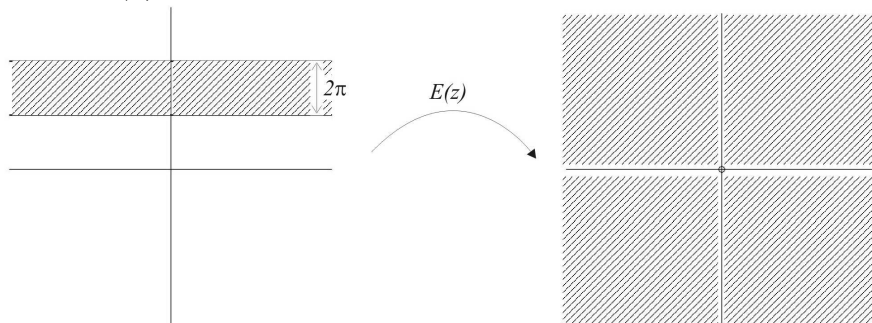
**Figura 3.1.1.** (a) Imagen de rectas verticales.



(b) Imagen de rectas horizontales.



(c) Imagen de franjas horizontales de altura  $2\pi$ .



Si tomamos un valor  $\lambda$  en  $\mathbb{C} - \{0\}$ , para la función  $E_\lambda(z) = \lambda e^z$  las propiedades anteriores se preservan, es decir: la imagen de rectas verticales son circunferencias, la imagen de rectas horizontales son rayos desde el origen sin el cero y la imagen de franjas horizontales de altura  $2\pi$  es todo el plano sin el cero. Además la exponencial es simétrica respecto a la conjugación:  $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$ .

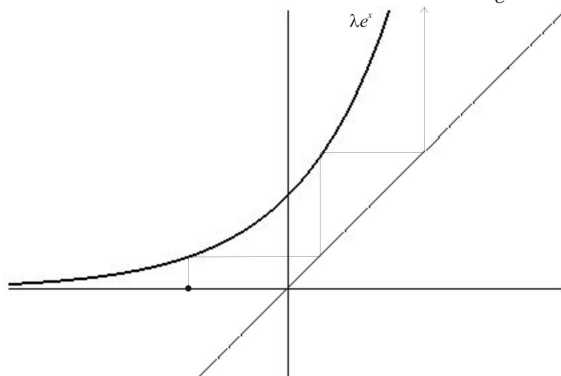
### 3.2. Bifurcaciones de $E_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Como ocurre con muchas familias de funciones, si limitamos la variable y el parámetro a los números reales la dinámica puede resultar bastante simple. A continuación presentaremos este caso porque nos ayudará en el estudio posterior del caso complejo. Este procedimiento lo seguiremos también para analizar  $f_{\lambda,\mu}$ .

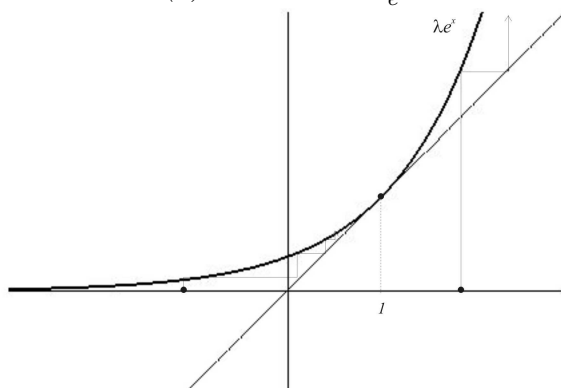
En esta familia aparecen dos fenómenos con el cambio del parámetro. Por un lado tenemos una bifurcación tangente o de punto silla cuando  $\lambda = \frac{1}{e}$ . Por otro, una bifurcación de duplicación de periodo cuando  $\lambda = -e$ .

Observemos en las gráficas de las Figuras 3.2.1 y 3.2.2 estas bifurcaciones. Para el caso  $\lambda > 0$ , ver Figura 3.2.1, tenemos 3 casos.

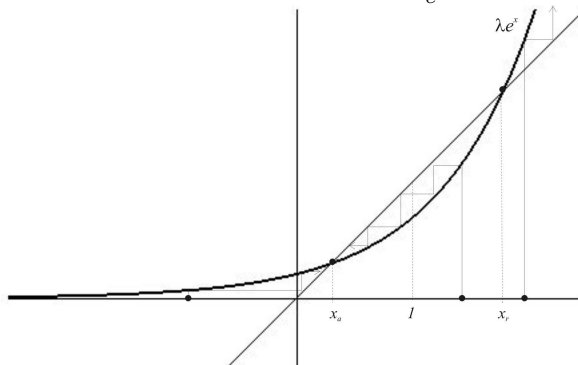
**Figura 3.2.1.** (a) El caso  $\lambda > \frac{1}{e}$ .



(b) El caso  $\lambda = \frac{1}{e}$ .



(c) El caso  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ .



Si  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$  tenemos dos puntos fijos. Uno  $x_a$  que es atractor y otro  $x_r$  repulsor. Además se cumple que  $0 < x_a < 1 < x_r$ . Si  $x \in (-\infty, x_r)$  su órbita



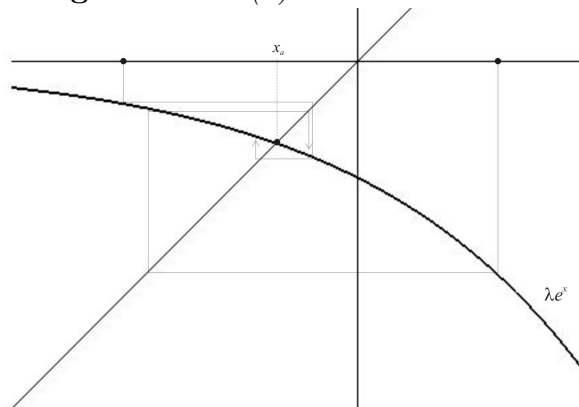
converge a  $x_a$ . Si  $x \in (x_r, \infty)$  su órbita se va a infinito.

Si  $\lambda = \frac{1}{e}$  tenemos un punto fijo indiferente en  $x = 1$ . Si  $x \in (-\infty, 1]$  su órbita converge a 1 y si  $x \in (1, \infty)$  su órbita crece hacia infinito.

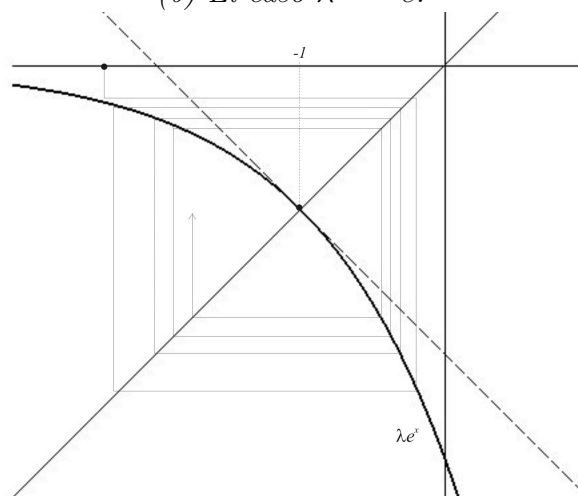
Si  $\lambda > \frac{1}{e}$  no existe punto fijo y la órbita de todos los puntos se va a infinito.

Cuando  $\lambda < 0$ , tenemos nuevamente tres casos, ver Figura 3.2.2.

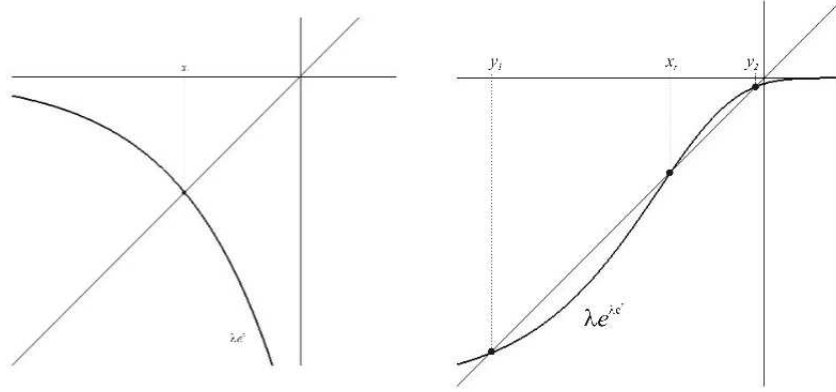
**Figura 3.2.2.** (a) El caso  $-e < \lambda < 0$ .



(b) El caso  $\lambda = -e$ .



(c) El caso  $\lambda < -e$ . Primera y segunda iteraciones.



En el caso (a) si  $-e < \lambda < 0$  hay un punto fijo atractor y las órbitas de todos los puntos convergen a éste.

En el caso (b), cuando  $\lambda = -e$ , hay un punto fijo indiferente en  $x = -1$ . Como  $E'_\lambda(-1) = -1$  el punto fijo es no hiperbólico, todas las órbitas convergen a él.

En el caso (c), si  $\lambda < -e$ , hay un punto fijo repulsor y un ciclo atractor de periodo dos, a éste último convergen las órbitas de todos los puntos, excepto la del punto fijo.

### 3.3. Cantor bouquet

De la dinámica del caso real sabemos que para  $\lambda = \frac{1}{e}$  hay un punto fijo indiferente. En el caso  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$  tenemos dos puntos fijos. Uno menor a uno,  $z_a$ , que es atractor; otro mayor a uno que es repulsor,  $z_r$ . Los puntos en el conjunto de Fatou tienen órbitas convergentes al punto fijo atractor  $z_a$ . Además, el conjunto de Fatou es homeomorfo a un disco abierto, ver [24].

Para estos parámetros se tiene que el conjunto de Julia es un Cantor bouquet. En [44] presentamos la construcción geométrica que da Devaney para el caso  $\lambda = \frac{1}{e}$  y se puede consultar también en [24]. Aquí damos la definición y enlistamos algunas propiedades, además de mostrar una imagen que da una idea aproximada del tipo de conjunto que es el conjunto de Julia.

**Definición 3.3.1.** *Un cepillo recto  $B$  es un subconjunto de  $[0, \infty) \times \mathbb{I}$  en  $\mathbb{R}^2$ , donde  $\mathbb{I}$  son los irracionales.  $B$  tiene las siguientes propiedades:*

(a) **Cabellosidad.** Para todo  $(y, \alpha) \in B$  existe  $t_\alpha \in [0, \infty)$  tal que  $t_\alpha \leq y$  y  $\{t : (t, \alpha) \in B\} = [t_\alpha, \infty)$ . El punto  $e_\alpha = (t_\alpha, \alpha)$  se llama el extremo del cabello en  $\alpha$  dado por  $c_\alpha = [t_\alpha, \infty) \times \{\alpha\}$ .

(b) **Densidad.** El conjunto  $P = \{\alpha \in \mathbb{I} : (y, \alpha) \in B \text{ para alguna } y\}$  es denso en  $\mathbb{I}$ . Además para cualquier  $(y, \alpha) \in B$ , existen sucesiones  $\{\beta_n\}$  y  $\{\gamma_n\}$  contenidas en  $P$  que satisfacen que  $\beta_n \uparrow \alpha$ ,  $\gamma_n \downarrow \alpha$ ,  $t_{\beta_n} \rightarrow t_\alpha$  y  $t_{\gamma_n} \rightarrow t_\alpha$ .

(c) **Secciones compactas.**  $B$  es cerrado en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 3.3.2.** Un subconjunto  $C_b$  del plano es un Cantor bouquet si y sólo si existe un homeomorfismo entre el conjunto  $C_b$  y un cepillo recto  $B$ .

Si  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$  el conjunto de Julia cumple las siguientes propiedades, resultando sorprendente que este tipo de conjuntos, además de los continuos indescomponibles, aparezcan en la dinámica de la familia exponencial:

(a) Existe un cepillo recto homeomorfo al conjunto de Julia de  $E_\lambda$ , con  $0 < \lambda \leq \frac{1}{e}$ , ver [1]. Es decir, el conjunto de Julia es un Cantor bouquet.

(b) Todo punto en el conjunto de Julia es elemento de sólo una curva continua homeomorfa al intervalo  $[0, \infty)$ , ello determina los cabellos y sus extremos. De hecho las curvas son  $C^\infty$ , un resultado de Viana en [50].

(c) El conjunto de puntos periódicos repulsivos está contenido en la corona que es el conjunto de extremos de los cabellos.

(d) La órbita de los puntos en los cabellos tiende a infinito. Algunos puntos en la corona también tienden a infinito.

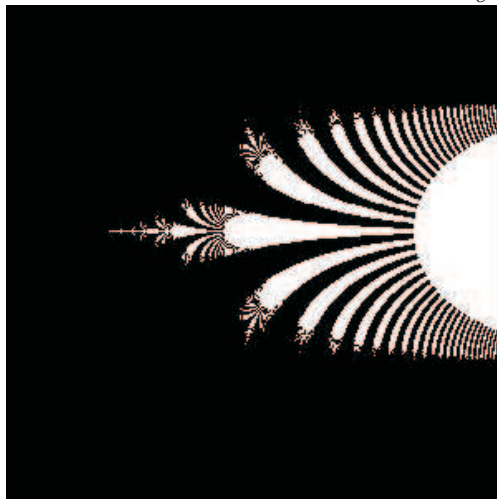
(e) Dado que la corona contiene los puntos periódicos repulsivos, la corona es densa en el conjunto de Julia.

(f) Los puntos de los cabellos son inaccesibles desde el complemento. Esto es, dado  $z$  en el Julia, no existe una curva continua  $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\gamma(1) = z$  y  $\gamma(t)$  pertenece al conjunto de Fatou para todo  $t \neq 1$ . Sólo los elementos de la corona son accesibles desde el complemento, [22].

(g) El infinito es un “punto de explosión” de la corona, [41]. Es decir, en la esfera de Riemann la corona y el infinito forman un conjunto conexo, en tanto que sólo la corona es un conjunto totalmente diconexo.

Para generar en computadora las imágenes de la Figura 3.3.3 se utiliza el hecho de que los puntos cuya órbita tiende a infinito son densos en el Julia. Para ello se elige cierto número de iteraciones y se busca aquellos  $z$  en el plano tal que,  $Re(z) \geq 50$ . En blanco se muestran estos puntos, dándonos una aproximación de  $J\left(E_{\frac{1}{e}}(z)\right)$ , ver [24].

**Figura 3.3.3.** (a) El conjunto de Julia para  $\lambda = \frac{1}{e}$ . Tomada de [24].



(b) Detalle del conjunto de Julia para  $\lambda = \frac{1}{e}$ . Tomada de [24].



Devaney y Tangermann en [31] muestran que este tipo de conjuntos aparecen en el conjunto de Julia de muchas familias de funciones. Por ejemplo, Fagella probó en [36] que si  $\lambda \neq 0$ , el conjunto de Julia para cada función de la familia  $\lambda ze^z$  contiene un Cantor bouquet, ver [3].

**Conjetura 3.3.4.** *El conjunto de Julia de  $f_{\lambda,\mu}$  contiene un Cantor bouquet.*

### 3.4. Trasplante de cabellos

En esta sección ilustraremos el fenómeno de “trasplante de cabellos” [27]. Esto ocurre en la bifurcación de duplicación de periodo cuando el parámetro pasa por  $\lambda = -e$ .

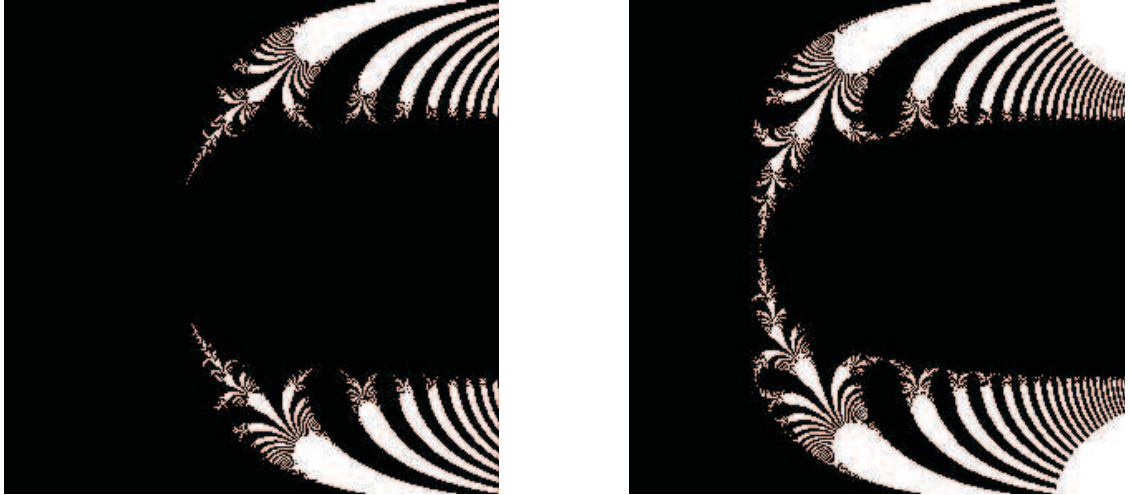
Para  $0 > \lambda > -e$ , tenemos un punto fijo atractor y el Julia es un Cantor bouquet con las mismas propiedades del caso en que  $\lambda$  es positivo.

Conforme  $\lambda$  se aproxima al valor  $-e$ , una órbita repulsora de periodo 2 se aproxima al punto fijo atractor, llevando consigo los cabellos de los puntos periódicos repulsores. Cuando  $\lambda = -e$ , la órbita repulsora se “funde” con el punto fijo atractor creando un punto fijo indiferente, convirtiéndose en el extremo de dos cabellos. Al pasar el parámetro por la bifurcación, es decir, cuando  $\lambda < -e$ , el punto fijo se convierte en repulsor volviéndose el extremo de dos cabellos. Tengamos presente que los cabellos y sus extremos son conjuntos ajenos en un Cantor bouquet, por tanto también en los conjuntos de Julia cuando  $0 > \lambda > -e$ , al pasar el parámetro por la bifurcación, dos cabellos originalmente ajenos se juntan en los extremos. A este fenómeno se le conoce como “trasplante de cabellos”. Ver Figura 3.4.1.

Para  $\lambda < -e$ , el conjunto de Julia ya no tiene la misma topología que los cepillos rectos, sin embargo, sigue conteniendo conjuntos de Cantor invariantes. Además, los conjuntos de Julia siguen siendo familias de curvas continuas cuyos extremos son densos en el Julia, ver [15].

Otra consecuencia de esta unión de cabellos es que el conjunto de Fatou deja de tener sólo una componente y se fracciona en una infinidad de ellas.

**Figura 3.4.1.** Tomado de [24]. Los conjuntos de Julia de  $E_\lambda$  para  $\lambda = -2,5$  y  $\lambda = -3,5$ .



### 3.5. Dicotomía de $E_\lambda(z)$ .

En esta sección enunciaremos resultados de carácter general para distintas clases de funciones meromorfas que se encuentran en [13]. Uno de ellos es la generalización del Teorema de Sullivan de la no existencia de dominios errantes. Estos los utilizaremos para la demostración del teorema que establece las condiciones de la dicotomía para el caso de la familia  $E_\lambda(z)$ .

La dicotomía de la familia exponencial es en el sentido de que para unos parámetros el conjunto de Julia es todo el plano y para el resto, además de tener interior vacío, contiene un Cantor bouquet, ver [24]. Para argumentar la dicotomía básica, es decir, que el Julia es  $\mathbb{C}$  o tiene interior vacío, comencemos por enunciar el Teorema de Sullivan que establece que las funciones racionales no tienen dominios de Fatou errantes, uno de los teoremas más importantes en la iteración de funciones racionales, [13].

**Teorema 3.5.1.** *Sea  $f$  racional y  $\Phi$  una componente del conjunto de Fatou, entonces  $\Phi$  es eventualmente periódico, es decir, existe  $n$  natural y  $\Gamma \subset F(f)$  componente periódica, tal que  $f^n(\Phi) \subset \Gamma$ .*

La generalización mencionada abarca cierto tipo de funciones.

**Definición 3.5.2.** *Sea  $f$  meromorfa.  $f \in S$  si y sólo si  $SV(f)$  es un conjunto finito.*

El siguiente resultado se debe a Baker, Kotus y Lü, [7].

**Teorema 3.5.3.** *Sea  $f$  meromorfa en  $S$ , entonces  $f$  no tiene dominios errantes.*

Este resultado no es válido para funciones enteras trascendentes en general, Baker fue el primero en presentar un ejemplo, [13]. Un caso simple de una función entera con dominio errante es  $f(z) = z + \lambda \operatorname{sen} z$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$  apropiada.

En cuanto a los dominios de Baker, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 3.5.4.** *Las funciones meromorfas en  $S$  no tienen dominios de Baker.*

El siguiente teorema vincula los puntos singulares de  $f$  con los ciclos periódicos del conjunto de Fatou.

**Teorema 3.5.5.** *Sea  $f$  meromorfa y  $C = \{U_0, U_1, \dots, U_{n-1}\}$  un ciclo periódico de componentes de  $F$ , es decir,  $f(U_j) = U_{j+1}$  si  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  y  $f(U_{n-1}) = U_0$ . Entonces:*

(a) *Si  $C$  es un ciclo de cuencas inmediatas de atracción o de dominios parabólicos, entonces algún  $U_j$  contiene un valor singular de  $f$ , para alguna  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . El punto no puede ser preperiódico y si es periódico entonces es crítico.*

(b) *Si  $C$  es un ciclo de discos de Siegel o de anillos de Herman, entonces la frontera de  $U_j$  está contenida en la cerradura de la órbita hacia adelante de todos los puntos singulares de  $f$ .*

Estos resultados los podemos usar para la familia  $E_\lambda$  donde el cero es valor asintótico y no hay puntos críticos.

**Teorema 3.5.6.** *Sea  $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ . Entonces una de las siguientes condiciones se cumple para el conjunto de Julia de esta función:*

(a) *Si la órbita de 0 tiende a infinito, entonces el Julia es todo el plano.*

(b) *Si 0 es preperiódico, entonces el Julia es todo el plano.*

(c) *Si existe una órbita atractora o indiferente, entonces el Julia es denso en ninguna parte.*

**Demostración 3.5.7.** *Por el Teorema de clasificación de dominios 2.2.8, el teorema 3.5.3 y el 3.5.4, sólo puede haber cuencas inmediatas de atracción, dominios de Leau, discos de Siegel o anillos de Herman.*

*Caso 1, la órbita de cero tiende a infinito. De existir una cuenca de atracción o un dominio parabólico, por la parte a) del teorema 3.5.5 y al ser 0 el único singular, su órbita sería acotada. Por lo tanto  $E_\lambda$  no tiene cuencas de atracción ni dominios parabólicos. Como la órbita hacia adelante del 0 es una sucesión convergente a infinito, no puede contener la frontera de ningún disco de Siegel o anillo de Herman. Por la parte b) del teorema 3.5.5,  $E_\lambda$  no tiene de este tipo de dominios. Por lo tanto si 0 tiene órbita convergente a infinito el conjunto de Fatou es vacío.*

*Caso 2, el cero es preperiódico. Al ser 0 un valor omitido, no puede ser periódico. Si 0 es preperiódico, tampoco puede haber cuencas de atracción ni dominios de Leau, en virtud de la parte a) del teorema 3.5.5 y del hecho de que  $E_\lambda$  no tiene puntos críticos. Por otro lado, en el caso de que 0 sea preperiódico, al ser su órbita hacia adelante un conjunto finito, es igual a su cerradura, por lo que no puede ser la frontera de ningún disco de Siegel o anillo de Herman. En razón de la parte b) del mismo teorema, tampoco hay discos de Siegel ni anillos de Herman. Por lo tanto el conjunto de Fatou es vacío.*

*Caso 3, existe punto periódico atractor o indiferente. En tal caso el conjunto de Fatou es no vacío. Como consecuencia del Teorema de Montel, por el teorema 2.2.7, el Julia es denso en ninguna parte. ■*

En la Figura 3.5.8 aparece una aproximación del mapa de parámetros. En negro aparece el conjunto de parámetros donde el Julia es todo el plano. Este conjunto de parámetros es denso en ninguna parte y contiene una unión no numerable de curvas homeomorfas al  $[0, \infty)$ .



**Figura 3.5.8.** Tomado de [24]. El mapa de parámetros de la familia  $E_\lambda(z)$ .



# Capítulo 4

## El caso $\lambda, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$

Como ya hemos mencionado, el caso  $\mu = 0$  está ampliamente estudiado. Si  $\lambda = 0$  la función  $f_{0,\mu}(z) = \mu/z$  es una transformación de Möbius y su dinámica es muy simple: el conjunto de Julia es vacío, todos son puntos periódicos si  $\mu \neq 0$ , las dos raíces de  $\mu$  son puntos fijos y todos los demás puntos son periódicos de periodo 2. En adelante, al referirnos a  $\lambda$  y  $\mu$  los consideramos ambos distintos de cero.

Si bien en las últimas décadas ha avanzado el estudio de la dinámica de funciones meromorfas, diversos resultados no se aplican a la familia  $f_{\lambda,\mu}$  cuando ambos parámetros son distintos de cero al tener una infinidad de valores críticos. Ya en 1991 Baker, Kotus y Lü mostraron en [6] que si  $\lambda = -1$  y  $\mu = 1$ , existe un dominio de Baker de periodo 2, cuyos puntos convergen a 0 bajo las iteraciones de  $f_{-1,1}^2$ . Bergweiler en [13] hace notar que en este caso tenemos una función con una infinidad de valores críticos y que, siendo acotados, se acumulan en 0, veremos que estos hechos se generalizan sin importar los valores de  $\lambda$  y  $\mu$ .

En la primera sección de este capítulo abordaremos algunos aspectos básicos de la familia  $f_{\lambda,\mu}$ . Demostraremos que en efecto  $f_{\lambda,\mu}$  pertenece a la familia  $M$ , esto es, que teniendo solamente un polo en 0, éste no es omitido y que por tanto hay una infinidad de valores cuya imagen es 0. También probaremos que la función tiene una infinidad de valores críticos y que siendo 0 el único valor asintótico,  $SV(f)$  es acotado y que 0 es punto de acumulación de los valores críticos. En la segunda sección presentaremos algunos dibujos de computadora del plano dinámico para algunos parámetros, explicando el algoritmo utilizado y describiremos algunas estructuras que se aprecian en ellos.

En la tercera sección abordaremos el caso  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Al tomar los dos parámetros reales, podremos tomar una sección del mapa de parámetros de la familia. Tengamos presente que al tener dos parámetros complejos, el mapa de parámetros tiene dimensión 2 compleja, es decir, dimensión 4 real. La sección real del mapa de parámetros tiene dimensión 2 real y con ello podemos tener un primer acercamiento a un mapa de parámetros para esta familia. Explicaremos algunas bifurcaciones y mostraremos más figuras del plano dinámico complejo para algunos parámetros reales.

## 4.1. Aspectos básicos generales.

Tenemos que  $f_{\lambda, \mu}$  es analítica en  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Además  $\lim_{z \rightarrow 0} f_{\lambda, \mu}(z) = \infty$ , por lo que 0 es un polo de la función. Al ser el único y siendo analítica en el resto,  $f_{\lambda, \mu}$  es meromorfa. Al no ser  $f_{\lambda, \mu}$  una función racional, es meromorfa trascendente, por lo tanto,  $\infty$  es una singularidad esencial.

**Proposición 4.1.1.** *El infinito es un valor no excepcional para  $f_{\lambda, \mu}$  y por tanto  $f_{\lambda, \mu} \in M$ .*

**Demostración 4.1.2.** *Como en cero la función  $f_{\lambda, \mu}$  tiene un polo, es suficiente con probar que el cero es no excepcional. Tenemos que si  $z \neq 0$ ,  $\lambda e^z + \frac{\mu}{z} = 0$  si y sólo si  $\lambda z e^z + \mu = 0$ , o sea, si y sólo si  $z e^z = -\frac{\mu}{\lambda}$ . La función  $z e^z$  es entera trascendente, por lo que a lo más puede tener solo un valor finito excepcional. Como  $z e^z = 0$  si y sólo si uno de los factores se anula y  $e^z$  no se anula, el producto sólo se anula si  $z = 0$ . Por lo tanto  $O^-(0) = \{0\}$  y 0 es un valor excepcional. Como  $z e^z$  no puede tener más valores excepcionales finitos, entonces  $z e^z = -\frac{\mu}{\lambda}$  en una infinidad de valores. Por lo tanto  $f_{\lambda, \mu}$  se anula en una infinidad de puntos. ■*

De lo anterior, y por lo visto en el Capítulo 2,  $J(f_{\lambda, \mu}) = \overline{O^-(\infty)}$ . Siendo 0 el único polo y al no poder tener el Julia puntos aislados,  $J(f_{\lambda, \mu}) = \overline{O^-(0)}$ . El cero, además de ser polo y no ser excepcional, es un valor asintótico. Si  $z \in \mathbb{R}^-$ ,  $\lim_{z \rightarrow -\infty} f_{\lambda, \mu}(z) = 0$  si  $z \rightarrow -\infty$ .

Respecto a los valores críticos, comencemos por observar que  $(f_{\lambda, \mu})'(z) = \lambda e^z - \frac{\mu}{z^2}$ , como en  $z = 0$  se tiene un polo, esto significa que la derivada se anula solamente si  $z^2 e^z = \frac{\mu}{\lambda}$ . Similarmente a los argumentos dados para la función  $z e^z$ ,  $z^2 e^z$  tiene un valor excepcional en 0, por lo que cualquier otro lo toma una infinidad de veces. Por lo tanto,  $f_{\lambda, \mu}$  tiene una infinidad de puntos críticos.

**Proposición 4.1.3.** *La función  $f_{\lambda,\mu}$  tiene una infinidad de valores críticos.*

**Demostración 4.1.4.** *Si  $z$  es punto crítico, entonces:*

$$f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \frac{\mu}{z} = \lambda e^z - \frac{\mu}{z^2} + \frac{\mu}{z^2} + \frac{\mu}{z} = \frac{\mu}{z^2} + \frac{\mu}{z}. \quad (4.1)$$

Sean  $z_1$  y  $z_2$  dos puntos críticos diferentes y supongamos que sus imágenes bajo  $f_{\lambda,\mu}$  son iguales. Por lo anterior:

$$\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_2}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{z_2^2 - z_1^2}{z_1^2 z_2^2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$$

y en consecuencia:

$$z_1 z_2 = z_1 + z_2.$$

Entonces  $z_1 \neq 1$  y  $z_2 = \frac{z_1}{z_1 - 1}$ .

Como la función  $\frac{z}{z-1}$  es inyectiva, los puntos críticos que dan un mismo valor crítico sólo son dos. Habiendo una infinidad de puntos críticos, tenemos una infinidad de valores críticos. ■

**Proposición 4.1.5.** *El conjunto de valores críticos de  $f_{\lambda,\mu}$  es acotado y se acumula en 0.*

**Demostración 4.1.6.** *Como la derivada de  $f_{\lambda,\mu}$  tiene un polo en cero, existe  $\varepsilon > 0$  tal que en el disco  $D_\varepsilon(0)$  no existen puntos críticos. Por lo tanto si  $z$  es punto crítico,  $|z| > \varepsilon$ . Usando 4.1.4, cualquier valor crítico cumple que:*

$$|f_{\lambda,\mu}(z)| \leq \left| \frac{\mu}{z^2} \right| + \left| \frac{\mu}{z} \right| < |\mu| \left| \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right|.$$

Por lo tanto el conjunto de valores críticos es acotado. De la ecuación 4.1, no sólo sabemos que la igualdad se da en una infinidad de puntos, sino que al ser  $\infty$  singularidad esencial, hay una sucesión de puntos  $\{z_n\}$  que tiende a infinito donde la derivada se anula. Sea  $\varepsilon > 0$  y  $N$  tal que  $|\frac{\mu}{z_N^2}| < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $|\frac{\mu}{z_N}| < \frac{\varepsilon}{2}$ , de 4.1.6 concluimos que  $|f_{\lambda,\mu}(z_N)| < \varepsilon$ . Por lo tanto 0 es punto de acumulación de los valores críticos. ■

### 4.1.1. Dinámica en los dominios de Baker.

En cuanto a la dinámica en los dominios de Baker, al tener  $f_{\lambda,\mu}$  sólo un polo, la función tiene una conjugación conforme en los términos establecidos por König [37]. Veamos este resultado.

**Definición 4.1.7.** *Sea  $B \subset \mathbb{C}$  dominio de una función  $f$  holomorfa. Decimos que un dominio  $V \subset B$  es absorbente o fundamental para  $f$  si:  $V$  es simplemente conexo;  $V$  es invariante hacia adelante y, para todo conjunto compacto  $K \subset B$ , existe  $N$  que depende sólo de  $K$  tal que  $f^N(K) \subset V$ .*

**Definición 4.1.8.** *Sea  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0\}$ . La terna  $(V, \varphi, T)$  es una conjugación conforme de  $f$  en  $B$ , que denotamos con  $f \sim T$ , si y sólo si se cumple:*

- (a) *el dominio  $V \subset B$  es absorbente para  $f$ .*
- (b)  *$\varphi : B \rightarrow \Omega$ , donde  $\Omega \in \{\mathbb{H}, \mathbb{C}\}$ ,  $\varphi$  es holomorfa e inyectiva en  $V$ .*
- (c)  *$T$  es una transformación de Möbius de  $\Omega$  en sí mismo y  $\varphi(V)$  es absorbente para  $T$ .*
- (d) *Para toda  $z \in B$  se tiene que  $\varphi(f(z)) = T(\varphi(z))$ .*

**Teorema 4.1.9.** *Sea  $f$  meromorfa con una cantidad finita de polos. Si  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$  es un ciclo de dominios de Baker de periodo  $n$  entonces existe una conjugación conforme de  $f^n$  en  $B_j$ , para toda  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ .*

Además se sabe que  $T$  es de la forma  $z+1$ ,  $z \pm i$  o  $cz$  con  $c > 1$ . Es decir, la dinámica de  $f$  tiene, en esencia, un comportamiento lineal en los dominios de Baker, como es el caso de  $f_{\lambda,\mu}$ .

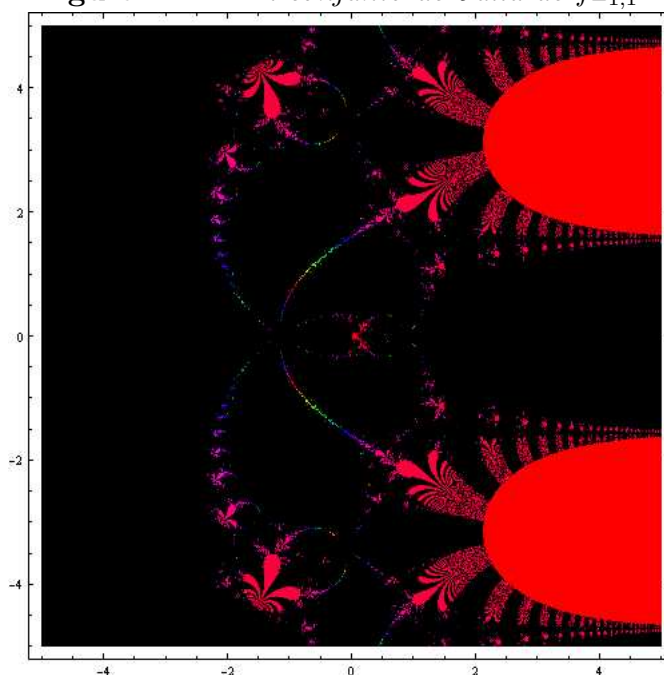
**Pregunta 4.1.10.** *De acuerdo a la clasificación de König de los dominios de Baker, ¿de qué tipo se pueden presentar en la familia  $f_{\lambda,\mu}$ ?*

## 4.2. Planos dinámicos.

Se sabe que en el caso  $(\lambda, \mu) = (-1, 1)$  existe un dominio de Baker cuyos puntos convergen a 0 bajo la segunda iteración, ver [6]. En las figuras que presentamos están identificados en color los puntos cuya norma es mayor que un cierto valor después de un cierto número de iteraciones de  $f_{\lambda,\mu}^2$ . A ese valor lo llamamos *valor de escape* y los puntos que cumplen esta condición se dice que son *puntos que escapan*. Conviene resaltar que este lenguaje es en el contexto del cómputo de imágenes del conjunto de Julia.

Utilizamos Mathematica 7.0 de Wolfram, modificando el código para la exponencial presentado en [47]. En negro aparecen los pixeles que no escapan. En rojo están los que escapan rápidamente y en otros colores los que tardan en hacerlo. El valor de escape es 5,000 en Mathematica y superior en ItFun. En Mathematica se pueden obtener resultados semejantes con valores de escape menores, la elección ayuda a tener una imagen mejor definida.

**Figura 4.2.1.** *El conjunto de Julia de  $f_{-1,1}$ .*



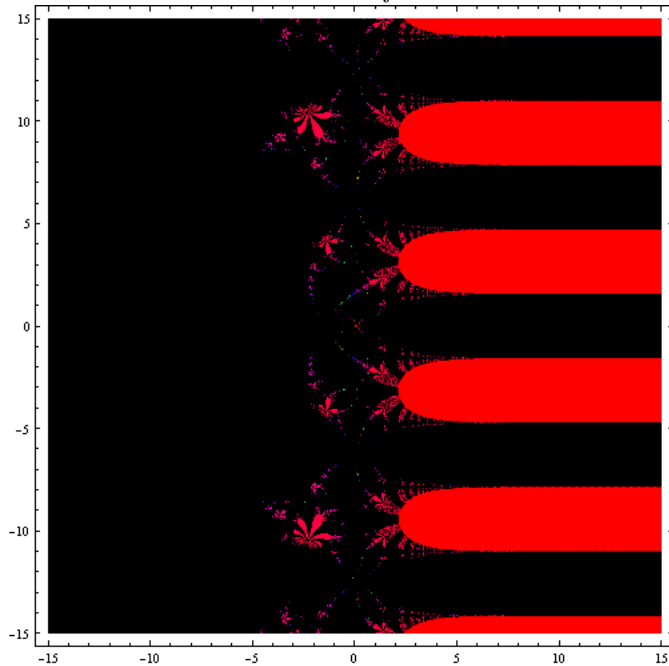
Si bien los prepolos rebasan rápidamente el valor de escape, el programa define una indeterminación y los identifica en negro. Sin embargo, en toda vecindad de un prepolo deben existir valores donde la función está definida y su módulo crece rápidamente. Como los prepolos son densos en el Julia, el conjunto está aproximado por el conjunto de pixeles en color.

El origen está en el centro y se aprecia en un semiplano izquierdo en negro el dominio de Baker que es atraído hacia  $-\infty$ . Si bien las órbitas de estos puntos deben eventualmente escapar, al hacerlo de manera lineal como lo establece König 4.1.9, tardan en escapar y por ello aparecen en negro. Si se disminuye el valor de escape, estos puntos aparecen en color. Sobre el eje real negativo, se aprecia el punto fijo repulsor, adonde convergen 6 estructuras en color.

En las imágenes se pueden apreciar en el semiplano derecho estructuras que recuerdan a la del Cantor bouquet mostradas en el capítulo anterior, que les llamaremos *racimos*. Sabemos que el Julia de la exponencial contiene un Cantor bouquet si el Fatou es no vacío. Revisando la construcción geométrica del Cantor bouquet en [44] vemos que cada subdedo  $D_{k_0, k_1, \dots, k_n}$  contiene un Cantor bouquet, por lo que toda vecindad de infinito contiene una infinidad de estos conjuntos.

Ahora bien, en una vecindad de infinito  $|\frac{w}{z}| < b$ , para cualquier  $b > 0$ . La función  $ae^z + b$  es conjugada con  $\lambda e^z$  y se tiene que  $a = \lambda e^{-b}$ , por lo que si  $|b| \approx 0$  entonces  $a \approx \lambda$ . Siempre que  $\lambda e^z$  tiene una órbita atractora, la dinámica es estable en una vecindad de  $\lambda$ , en particular las vecindades de infinito contienen un Cantor bouquet y esto puede explicar los racimos que se aprecian en el semiplano derecho de la siguiente figura.

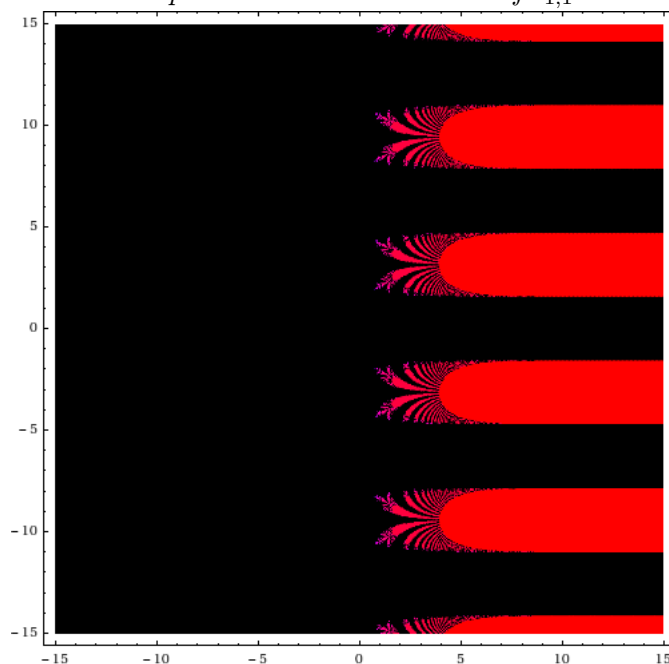
**Figura 4.2.2.** *El Julia de  $f_{-1,1}$ , en el semiplano derecho, racimos que brotan de infinito.*



Otra explicación geométrica de los racimos en el semiplano derecho también se pueden hallar al retomar otro aspecto de la construcción geométrica del mismo Cantor bouquet para  $\lambda = \frac{1}{e}$ . En ella, se toman preimágenes bajo  $E_\lambda$  de un semiplano izquierdo que se sabe está contenido en Fatou. Eso genera

los dedos y subdedos que contienen copias del Cantor bouquet que resulta de intersectar la infinidad de subdedos. Los racimos que se aprecian en las imágenes generadas con computadora son la aproximación al Cantor bouquet. En el caso de  $f_{-1,1}$ , se aprecia en la figura anterior que al menos localmente un semiplano izquierdo  $G$  es parte del conjunto estable. Si  $Re z \gg 1$ , se tiene que  $|\frac{w}{z}| \approx 0$ , por lo que al tomar la preimagen de  $G$  contenida en un semiplano derecho  $H$  bajo  $f_{-1,1}$ , el resultado es similar a tomar la preimagen bajo  $-e^z$ .

**Figura 4.2.3.** *El Julia de  $-e^z$ . Nótese la similitud de los racimos en el semiplano derecho con los de  $f_{-1,1}$ .*

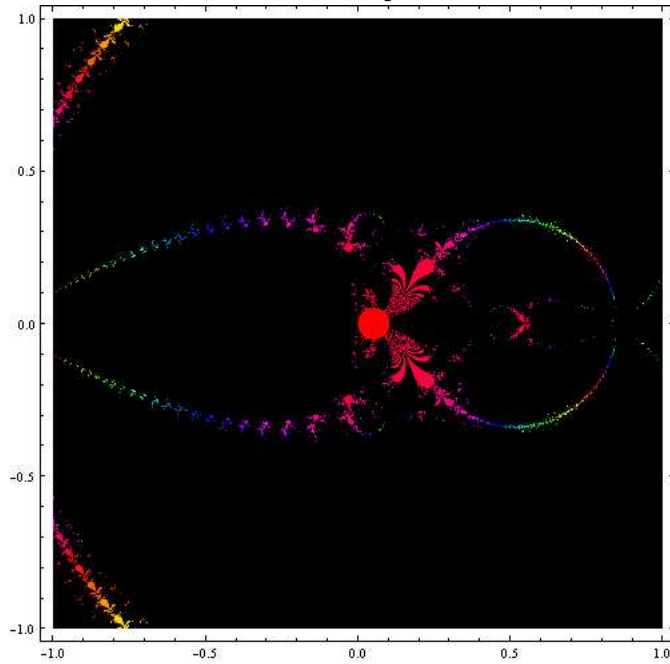


La estabilidad del Cantor bouquet en infinito explica los racimos que se aprecian cerca del polo en la siguiente figura. Como el Julia es completamente invariante, un sector de una vecindad de 0 es mapeado en el semiplano derecho donde están los racimos que brotan de infinito. Por lo que algunos de los racimos cerca del polo deben brotar de él. El dominio de Baker está a la izquierda del 0, que está en el borde izquierdo del disco rojo del centro. Como estamos trabajando con la segunda iteración, el 0 es singularidad esencial, mostrándose su cuenca de atracción que es el dominio de Baker en negro y en el disco rojo los puntos que escapan rápidamente. Este comportamiento debe



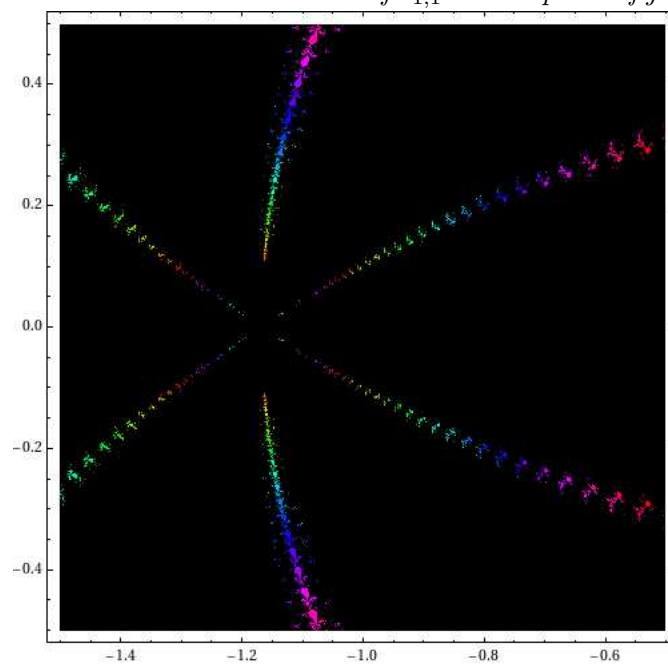
ocurrir en los demás prepolos, por lo que es de esperar que en los bordes de los discos rojos se encuentre un prepolo acompañados de racimos que brotan de ellos.

**Figura 4.2.4.** *Acercamiento en el origen del Julia de  $f_{-1,1}$ . A la izquierda del disco rojo central, en negro está el dominio de Baker de puntos que convergen a 0 bajo la segunda iteración. A la derecha del disco, racimos que brotan del polo.*



Como el conjunto de prepolos es denso en el Julia, los racimos se aprecian en las figuras por todas las zonas en color. En la siguiente figura se puede ver cómo los racimos se acumulan en un punto fijo repulsor que está en los reales negativos.

**Figura 4.2.5.** *Detalle del Julia de  $f_{-1,1}$  en un punto fijo repulsor.*



Estos elementos geométricos están presentes en  $f_{\lambda,\mu}$  para otros parámetros. Veamos algunas imágenes.

Figura 4.2.6. El conjunto de Julia de  $f_{-1,i}$ .

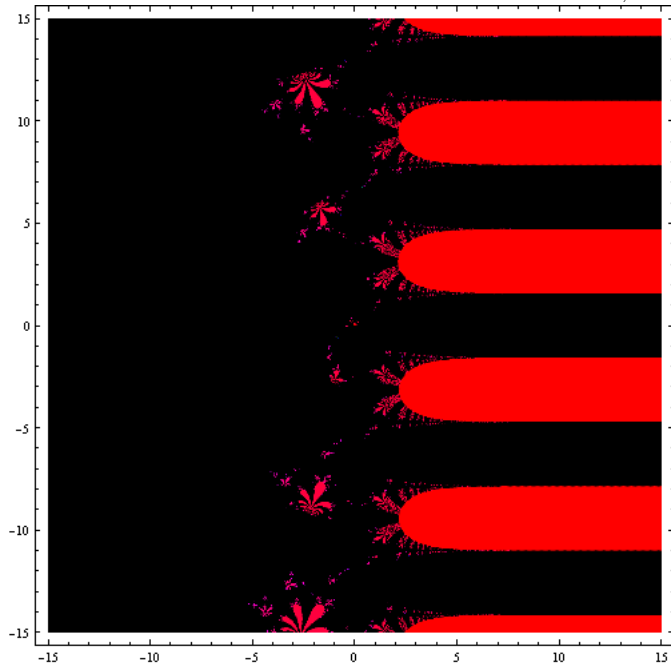
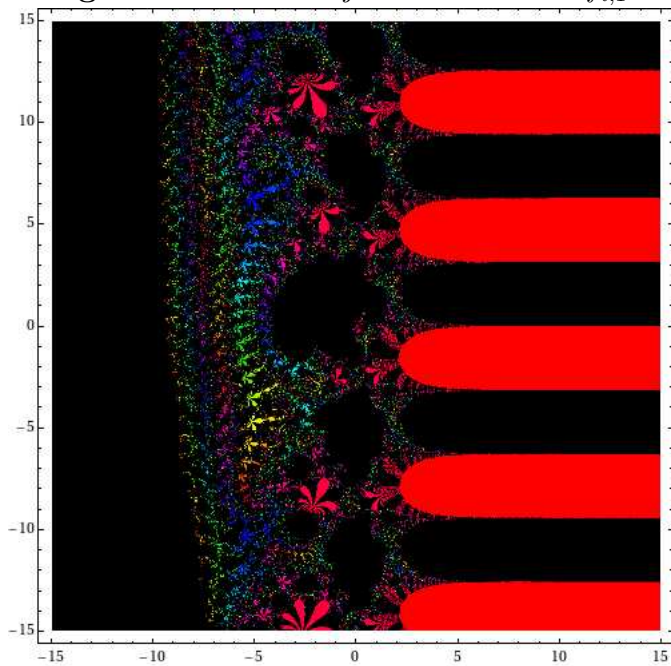


Figura 4.2.7. El conjunto de Julia de  $f_{i,1}$ .

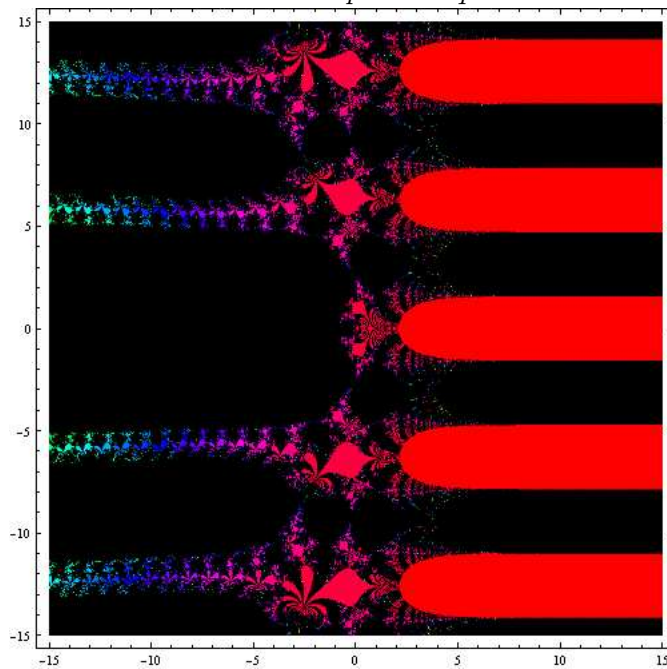


**Pregunta 4.2.8.** *¿En toda vecindad de un punto del conjunto de Julia de  $f_{\lambda,\mu}$  está contenido un Cantor bouquet?*

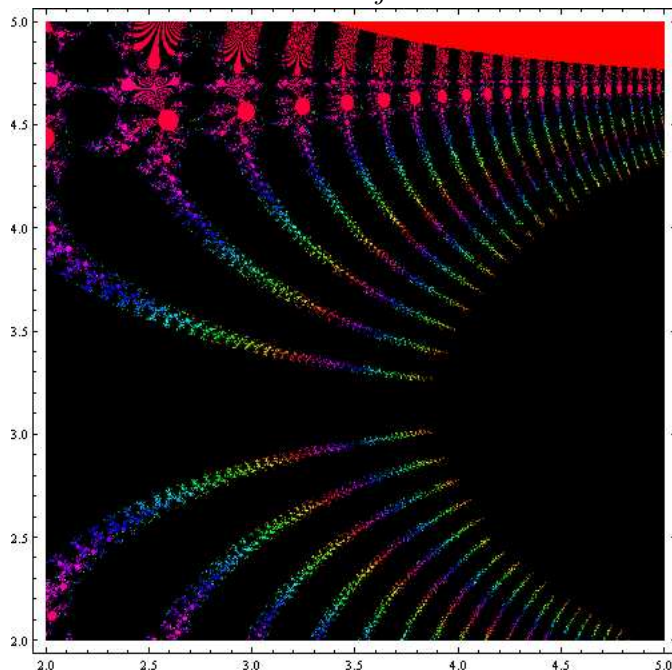
En el caso  $(1, 1)$ , sabemos que en los reales negativos hay un punto de periodo dos atractor para  $f_{1,1}$ . Podemos ver que en el semiplano izquierdo los dominios estables están contenidos en franjas de cierta altura. Cada par contiguo de estos dominios está dividido por una estructura del conjunto de Julia que llamaremos *encaje* que aparece en varios colores.

Estos dominios se extienden hacia la izquierda. Como en el caso  $(-1, 1)$ , al localizar la preimagen de un semiplano izquierdo contenida en un semiplano derecho se explican los racimos rojos horizontales a la derecha. En las franjas negras horizontales entre estos racimos rojos se encuentra la preimagen del semiplano izquierdo bajo  $f_{1,1}$ . Al hacer un acercamiento en esta zona, se puede distinguir la preimagen de los encajes.

**Figura 4.2.9.** (a) *El Julia de  $f_{1,1}$ . Los encajes aparecen en colores azul y verde en el semiplano izquierdo.*

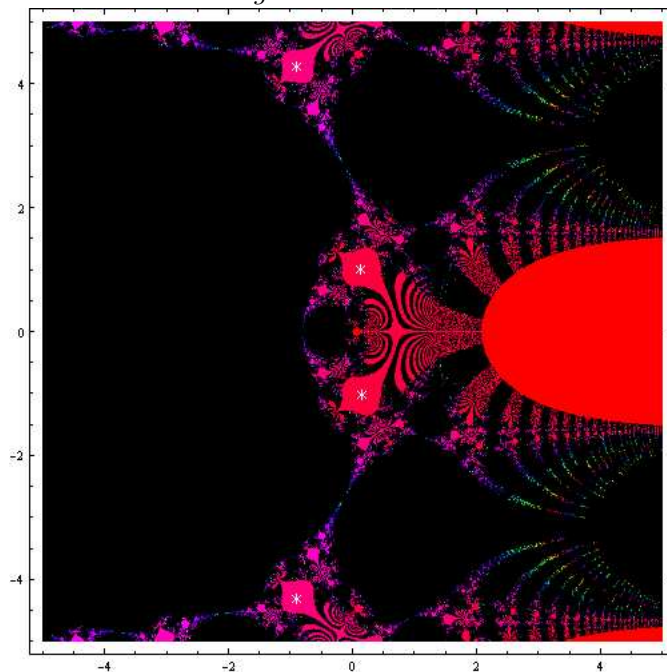


(b) Detalle del semiplano derecho del Julia de  $f_{1,1}$ , parte de la preimagen de los encajes.



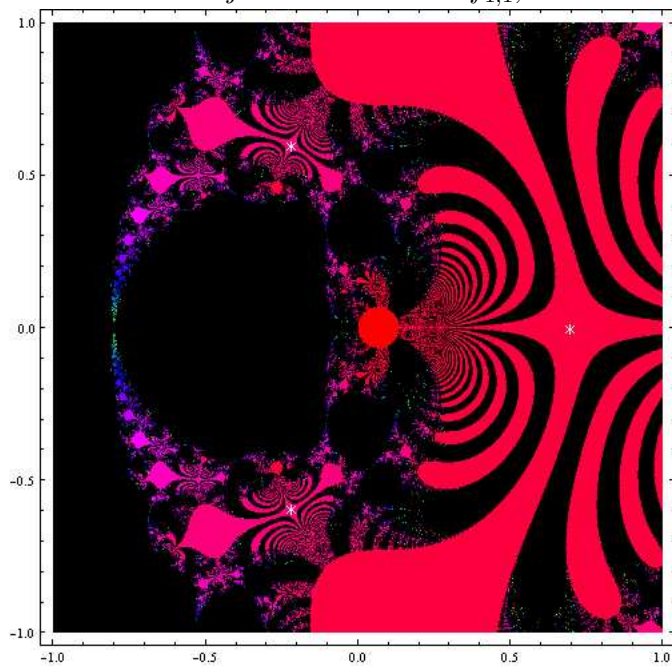
Para el caso  $f_{1,1}$  se vuelven a apreciar los racimos asociados a los prepolos. Además se distinguen racimos peculiares que se enciman en los extremos. Recordemos el fenómeno de trasplante de cabellos en la familia  $\lambda e^z$  cuando hay ciclo atractor de periodo dos o mayor, como lo vimos en el capítulo anterior. Esto ocurriría cuando dos racimos se juntan en algunos de sus extremos. En el caso de  $f_{1,1}$ , los racimos se juntan de tal manera que parecen tener un bulbo en el extremo. Es de esperar que estos bulbos contienen algún tipo de estructura que la aproximación de la computadora no logra distinguir. En la siguiente figura están algunos bulbos marcados con asteriscos blancos.

**Figura 4.2.10.** *El conjunto de Julia de  $f_{1,1}$ , bulbos en los extremos de algunos racimos.*



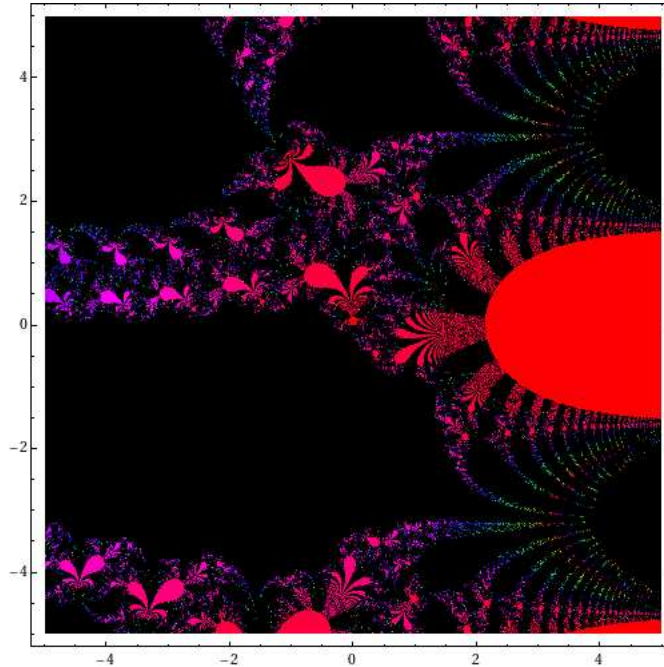
Para finalizar el caso  $f_{1,1}$ , se observa otro fenómeno peculiar. En la siguiente figura están marcadas con asteriscos blancos zonas donde se cruzan diferentes racimos. En cada cruce se juntan cuatro racimos, dos en los extremos con dos en la base, estos últimos tienen bulbo en sus extremos.

**Figura 4.2.11.** *El conjunto de Julia de  $f_{1,1}$ , cruce de racimos.*



Para terminar esta sección incluimos otra figura donde se pueden apreciar los encajes y algunas preimágenes.

Figura 4.2.12. El conjunto de Julia de  $f_{1,i}$ .



### 4.3. Sección real del mapa de parámetros.

Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lambda e^z \in \mathbb{R}$  y  $\mu/z \in \mathbb{R}$ , por lo tanto  $f_{\lambda,\mu}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ . Por esta razón, la restricción de  $f_{\lambda,\mu}$  a los reales nos define un sistema dinámico discreto en  $\mathbb{R}$ .

El estudio de la dinámica real nos ayuda a comprender la dinámica compleja, como ocurre con la familia  $\lambda e^z$ . El plano de parámetros para la restricción de  $f_{\lambda,\mu}$  a los reales será muy útil para estudiar la sección del mapa de parámetros del caso general complejo en el caso  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ , que llamaremos *sección real del mapa de parámetros*. En particular, si localizamos los puntos en el plano  $(\lambda, \mu)$  para los cuales  $f_{\lambda,\mu}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , tiene un ciclo atractor en los reales, lo mismo ocurre en la dinámica compleja.

En esta sección presentamos un primer acercamiento al conjunto de parámetros para los cuales  $f_{\lambda,\mu}$  tienen un punto fijo atractor en  $\mathbb{R}$  y presentamos algunos conjuntos de Julia de  $f_{\lambda,\mu}$  generados igual que en la sección anterior. Identificaremos los conjuntos de parámetros para los cuales  $f_{\lambda,\mu}$  tiene un punto fijo con derivada 0, 1 y  $-1$ . Las curvas donde esto ocurre están



generadas usando Fooplot, un recurso en línea.

Comencemos por localizar el conjunto de parámetros para los cuales hay punto fijo superatractor. En general un punto fijo satisface:

$$\lambda e^x + \frac{\mu}{x} = x. \quad (4.2)$$

En tanto que un punto crítico satisface:

$$\lambda e^x - \frac{\mu}{x^2} = 0. \quad (4.3)$$

Usando (4.1.4), que nos da el valor crítico, en 4.2, obtenemos:

$$x = \frac{\mu}{x^2} + \frac{\mu}{x} = \mu \left( \frac{1+x}{x^2} \right),$$

entonces:

$$\mu = \frac{x^3}{x+1}. \quad (4.4)$$

Sustituyendo este valor de  $\mu$  en (4.3):

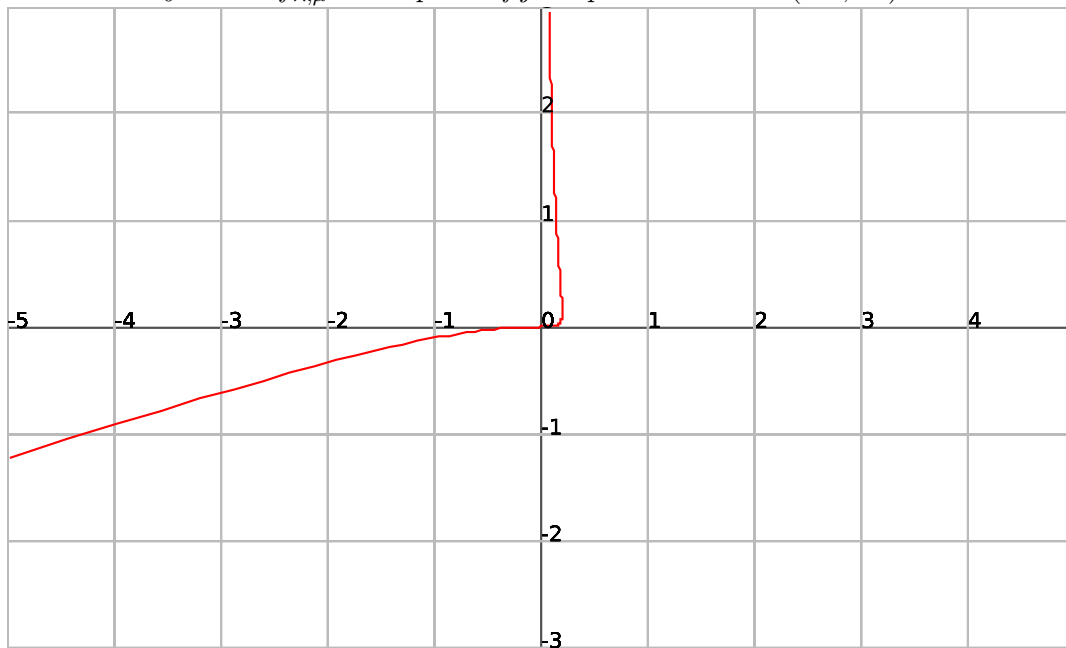
$$\lambda e^x = \frac{x}{x+1},$$

por tanto:

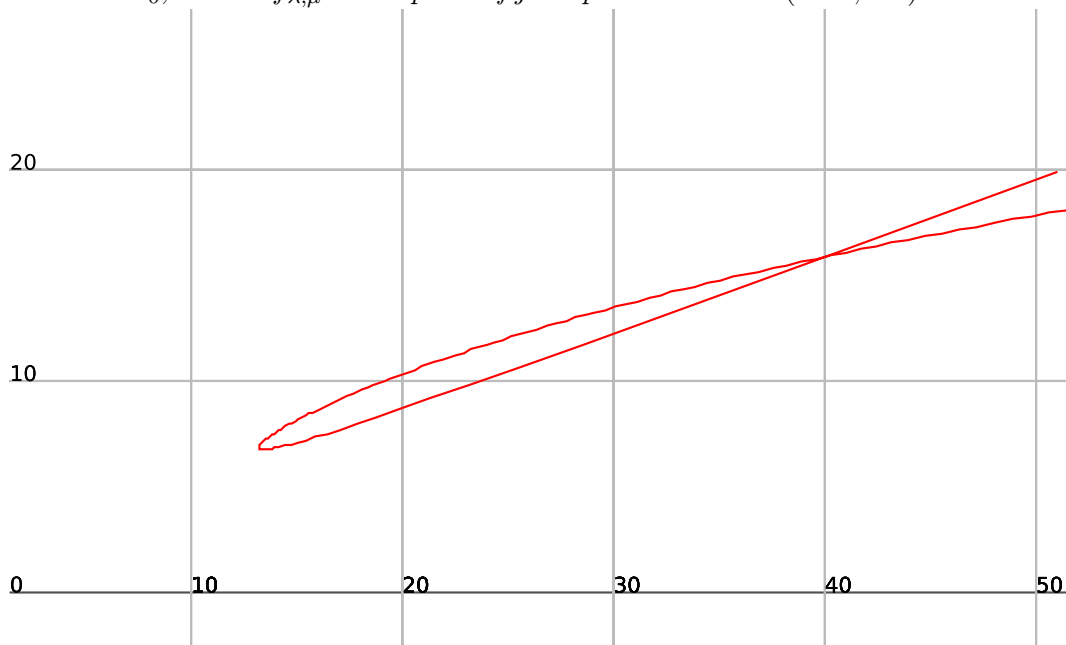
$$\lambda = \frac{e^{-x}x}{x+1}. \quad (4.5)$$

Las ecuaciones (4.4) y (4.5), nos dicen que para cada  $x \neq -1$  hay un par de parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  para los cuales hay un punto fijo superatractor. Con ello obtenemos una curva  $L_0$  parametrizada por  $x$  en el plano  $(\lambda, \mu)$ . La curva  $L_0$  tiene dos componentes conexas, una es la imagen del rayo  $(-\infty, -1)$  y la otra es la imagen del rayo  $(-1, \infty)$ .

**Figura 4.3.1.** Sección real del plano de parámetros  $(\lambda, \mu)$ . En rojo la curva  $L_0$  donde  $f_{\lambda, \mu}$  tiene punto fijo superatractor en  $(-1, \infty)$ .



**Figura 4.3.2.** Sección real del plano de parámetros  $(\lambda, \mu)$ . En rojo la curva  $L_0$ , donde  $f_{\lambda, \mu}$  tiene punto fijo superatractor en  $(-\infty, -1)$ .



Ahora localicemos el conjunto de parámetros para los que  $f_{\lambda, \mu}$  tiene punto fijo indiferente. Empecemos por resolver el caso  $f'_{\lambda, \mu}(x) = -1$ , donde sustituimos el valor de  $\mu$  dado por la ecuación (4.2):

$$\lambda e^x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Como  $\lambda e^x \neq 0$  para toda  $x$ , la ecuación anterior se cumple sólo si  $1 + 1/x = 0$ , por lo que  $x = -1$ . De 4.2 obtenemos:

$$\mu = 1 + e^{-1}\lambda.$$

Lo que nos da una recta en el plano  $(\lambda, \mu)$  que llamaremos  $L_{-1}$ . Ahora resolvemos para el caso  $f'_{\lambda, \mu}(x) = 1$ , donde sustituimos el valor de  $\mu$  dado por 4.2.

$$\lambda e^x \left( \frac{1+x}{x} \right) = 2,$$

despejando  $\lambda$  se tiene

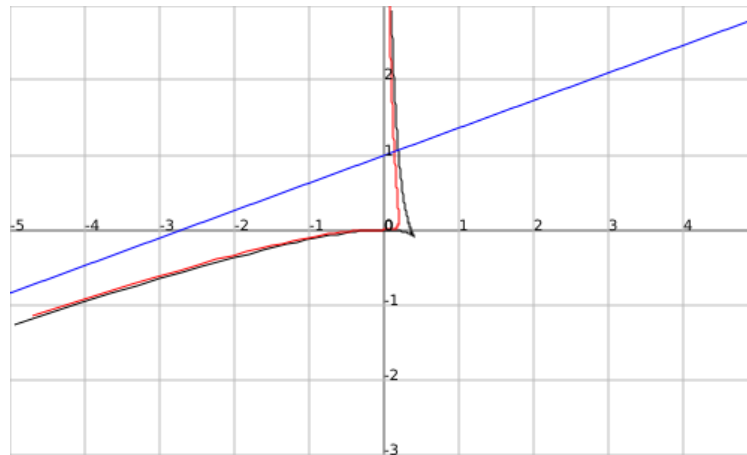
$$\lambda = \frac{2xe^{-x}}{x+1}.$$

Con lo que obtenemos al sustituir en (4.2):

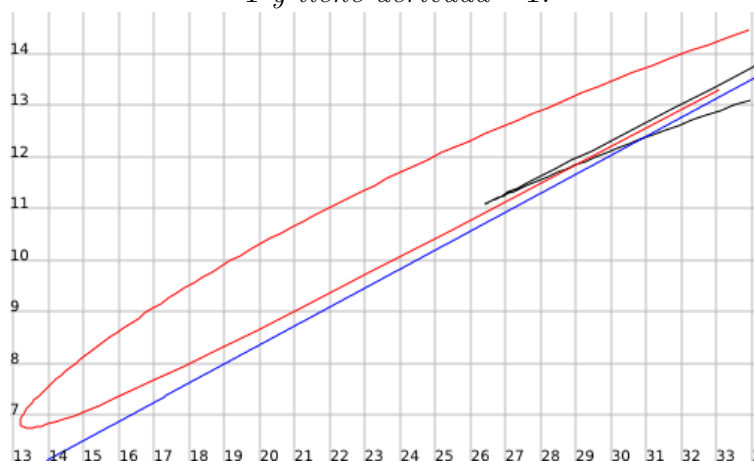
$$\mu = x \left( x - \frac{2x}{x+1} \right) = \frac{x^2(x-1)}{x+1}.$$

Como en el caso del punto fijo superatractor, las ecuaciones anteriores parametrizan una curva  $L_1$  en el plano de parámetros, con dos componentes conexas.

**Figura 4.3.3.** (a) Sección real del mapa de parámetros de  $f_{\lambda,\mu}$ . En color, parámetros para los que  $f_{\lambda,\mu}$  tiene punto fijo. En rojo  $L_0$ , donde el punto fijo es superatractor en  $(-1, \infty)$ . En negro  $L_1$ , donde el punto fijo está en  $(-1, \infty)$  y tiene derivada 1. En azul  $L_{-1}$ , donde el punto fijo es  $-1$  y tiene derivada  $-1$ .



(b) Sección real del mapa de parámetros de  $f_{\lambda,\mu}$ . En color, parámetros para los que  $f_{\lambda,\mu}$  tiene punto fijo atractor o indiferente. En rojo  $L_0$ , donde el punto fijo es superatractor en  $(-\infty, -1)$ . En negro  $L_1$ , donde el punto fijo está en  $(-\infty, -1)$  y tiene derivada 1. En azul  $L_{-1}$ , donde el punto fijo es  $-1$  y tiene derivada  $-1$ .

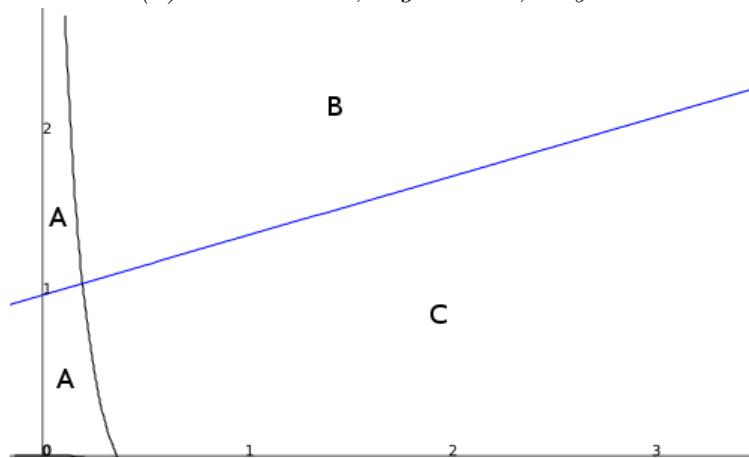


Los parámetros sobre estas curvas indican que el conjunto de Fatou no es vacío, pues hay al menos una cuenca de atracción o un dominio parabólico. Las curvas  $L_1$  y  $L_{-1}$  dividen el plano en diferentes regiones, llamemos  $\mathfrak{R}$  a la colección de estas regiones, ver Figura 4.3.5. Tomando en cuenta que en estas curvas son los únicos parámetros donde la función real puede tener un punto fijo indiferente; así como la continuidad de  $f_{\lambda,\mu}$  y de su derivada, nos lleva a establecer la siguiente:

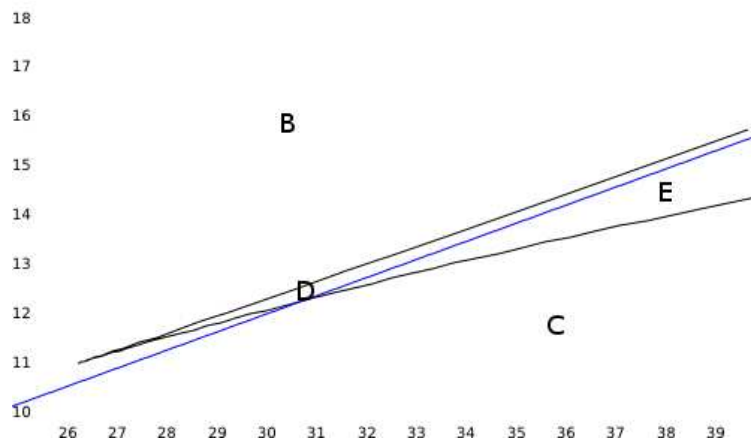
**Conjetura 4.3.4.** *En cada región de  $\mathfrak{R}$  para  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , con  $x \in \mathbb{R}$ , el número de puntos fijos atractores y repulsores se conserva.*

Figura 4.3.5. *Regiones en sección real del plano de parámetros*  
 $(\lambda, \mu)$ .

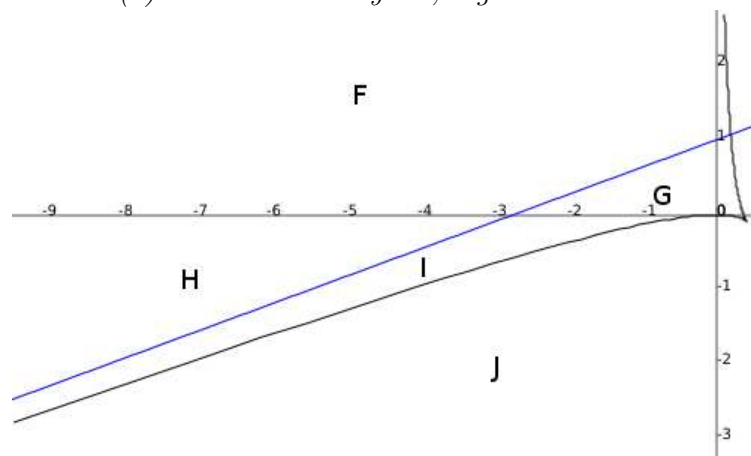
(a) *Cuadrante I, regiones A, B y C.*



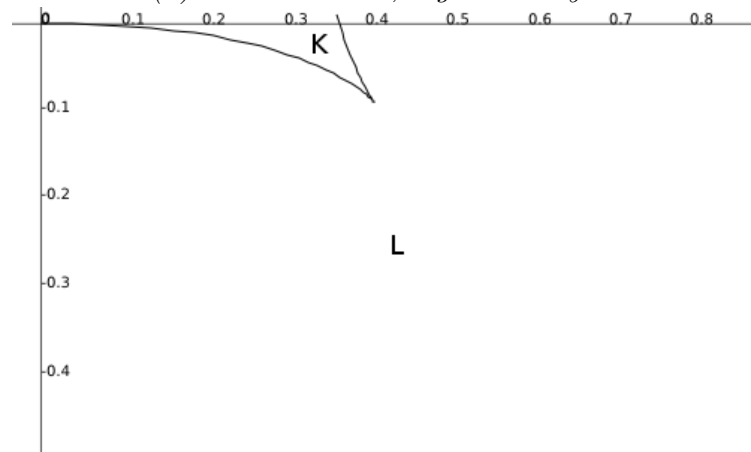
(b) *Cuadrante I, regiones B, C, D y E.*



(c) Cuadrantes II y III, regiones F a J.



(d) Cuadrante IV, regiones K y L.



Como  $L_0$  tiene intersección no vacía con las regiones A, I, B, D y E, de ser verdadera la conjetura 4.3.4, en estas regiones existiría un punto fijo atractor y por tanto Fatou sería no vacío. Mediante métodos numéricos es posible identificar que las regiones G y K, contienen cada una un punto  $(\lambda, \mu)$  para el cual  $f_{\lambda, \mu}$  tiene un punto fijo atractor. Esto y aceptando la conjetura nos llevaría a que en G y K el conjunto de Fatou es no vacío. Siguiendo el mismo procedimiento podríamos identificar que en las regiones C, F, H y L los puntos fijos son todos repulsivos. En tanto que en la región J no existirían puntos fijos para  $f_{\lambda, \mu}(x)$ .

**Pregunta 4.3.6.** ¿Cómo es el conjunto de parámetros en la sección real para los cuales existe una órbita periódica atractor?

#### 4.4. Conjuntos de Julia de $f_{\lambda,\mu}$ en distintas regiones de la sección real del mapa de parámetros.

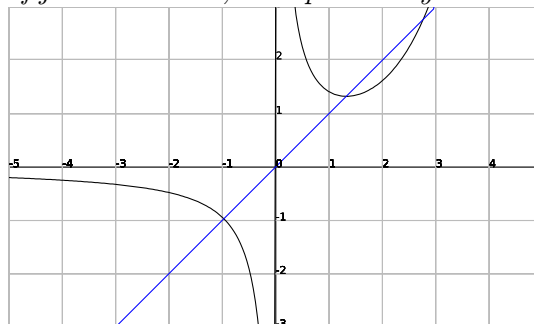
A continuación presentamos figuras donde se muestran conjuntos de Julia de  $f_{\lambda,\mu}$  con parámetros en las regiones  $\mathfrak{R}$  de la sección anterior, junto con la gráfica de la función real y según convenga su segunda iteración. Con estas gráficas, generadas con Fooplot, podemos identificar ciclos atractores y así cuencas de atracción en el Julia correspondiente. En las figuras se pueden apreciar algunos fenómenos geométricos abordados en el capítulo y otros más. Esta exploración experimental y la revisión de [3] nos condujo a las siguientes conjeturas:

**Conjetura 4.4.1.** *El dominio de Baker en el caso  $(-1, 1)$  es “estable”. Es decir, existe una vecindad  $V$  de este punto en  $\mathbb{C}^2$ , tal que para todo  $(\lambda, \mu) \in V$ ,  $f_{\lambda,\mu}$  tiene dominio de Baker.*

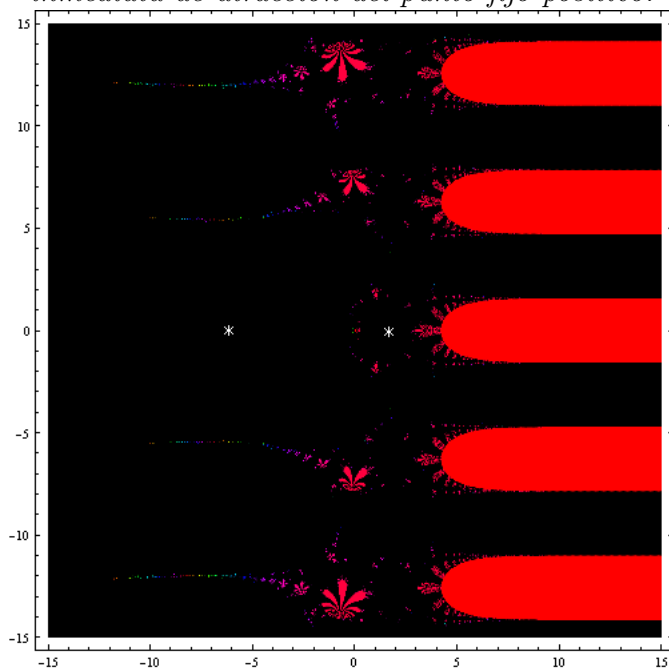
**Conjetura 4.4.2.** *Si  $\lambda \in \mathbb{R}^-$  y  $\mu$  no es cero, la función  $f_{\lambda,\mu}$  tiene dominio de Baker.*



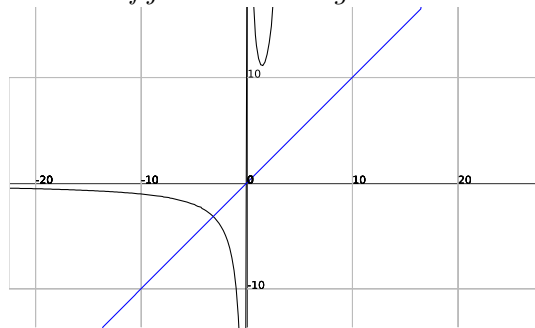
**Figura 4.4.3.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(0,1515,1)$ , región A. Hay dos puntos fijos atractores, uno positivo y otro negativo.



(b) El conjunto de Julia. A la izquierda con asterisco, la cuenca inmediata de atracción del punto fijo negativo. A la derecha con asterisco, la cuenca inmediata de atracción del punto fijo positivo.



**Figura 4.4.4.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(1,10)$ , región B. Hay un punto fijo atractor negativo.



(b) El conjunto de Julia. A la izquierda con asterisco, la cuenca inmediata de atracción del punto fijo negativo.

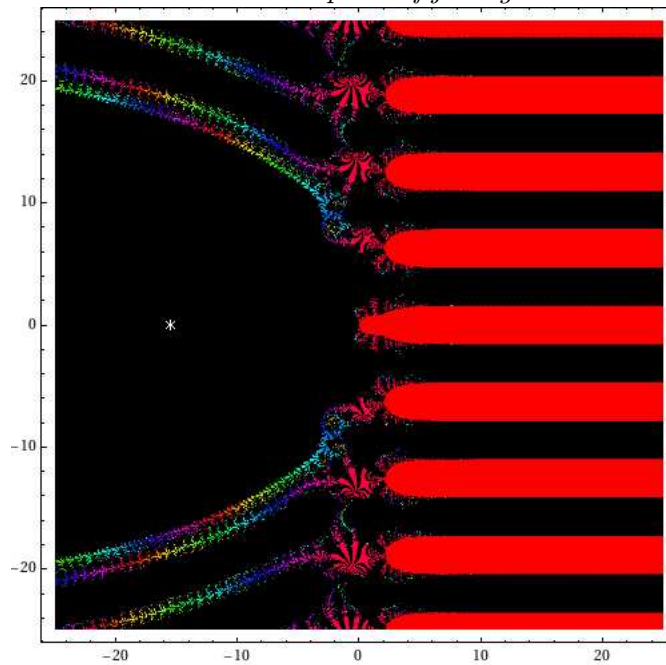
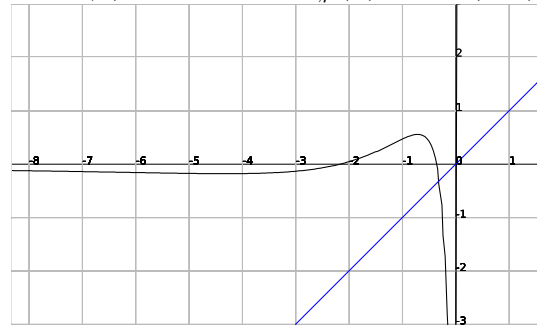
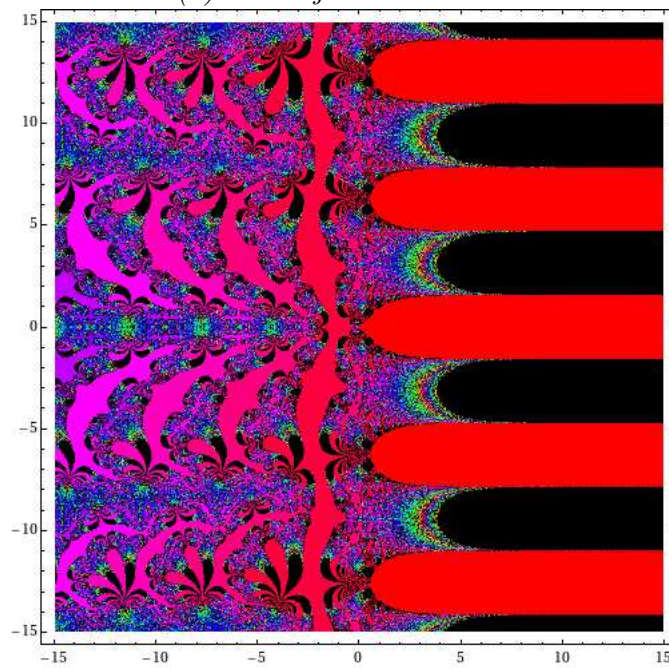


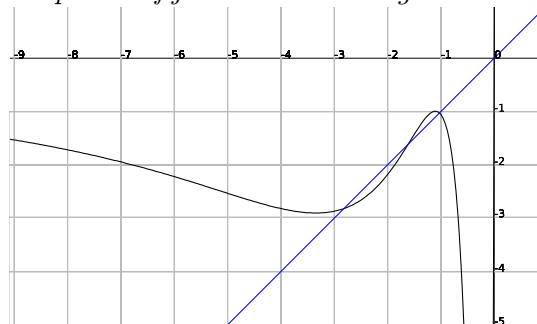
Figura 4.4.5. (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso (4,1), región C.



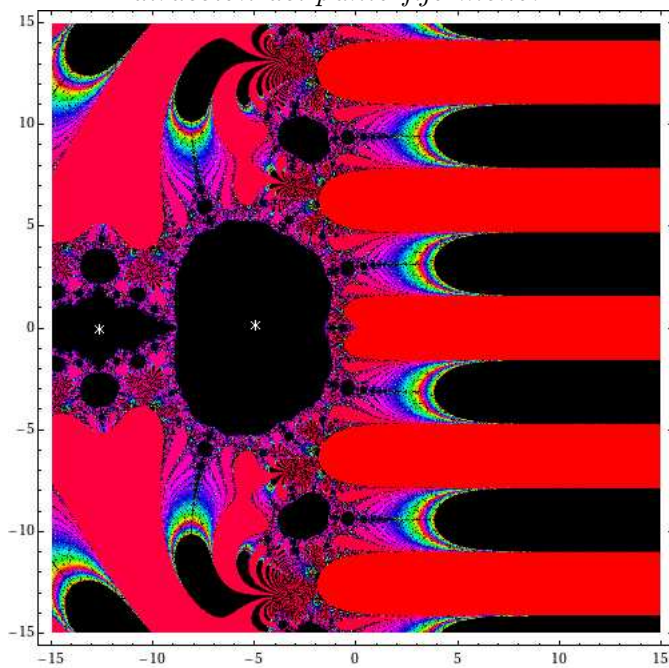
(b) El conjunto de Julia.



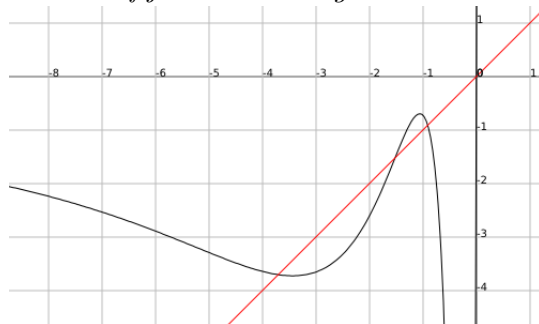
**Figura 4.4.6.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(34,7,13,8)$ , región  $D$ . Hay dos puntos fijos atractores negativos.



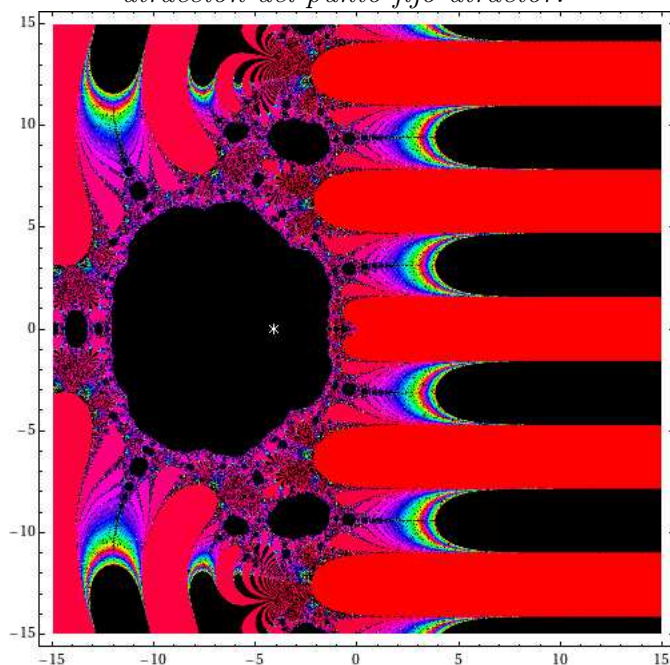
(b) El conjunto de Julia. A la izquierda con asterisco blanco, una componente de la preimagen de la cuenca inmediata de atracción del punto fijo mayor. A la derecha con asterisco blanco, la cuenca inmediata de atracción del punto fijo menor.



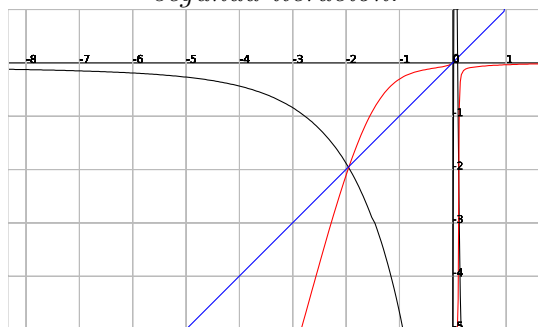
**Figura 4.4.7.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso (47, 18), región E. Hay un punto fijo atractor negativo.



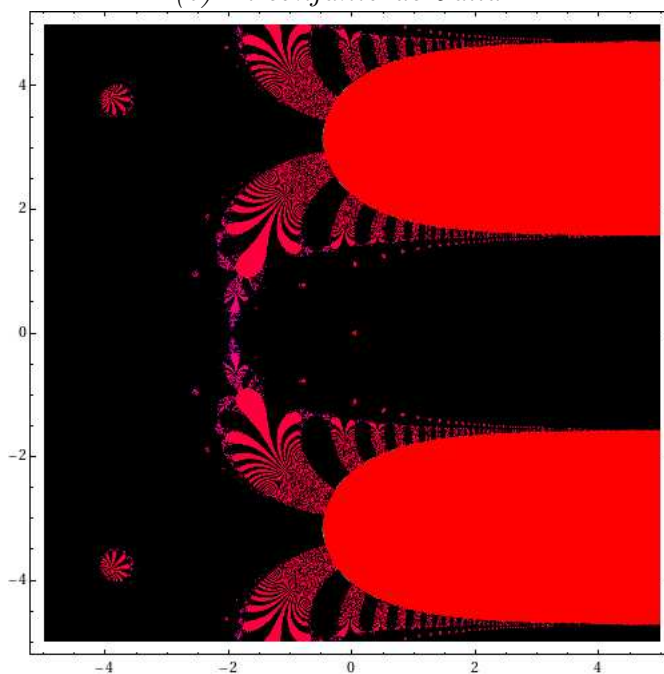
(b) El conjunto de Julia. Con asterisco blanco, la cuenca inmediata de atracción del punto fijo atractor.



**Figura 4.4.8.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(-10, 1)$ , región  $F$ . En rojo la segunda iteración. El cero atrae los puntos de un intervalo en  $\mathbb{R}^-$  bajo la segunda iteración.

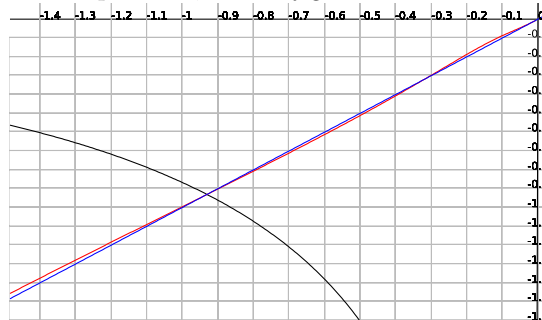


(b) El conjunto de Julia.

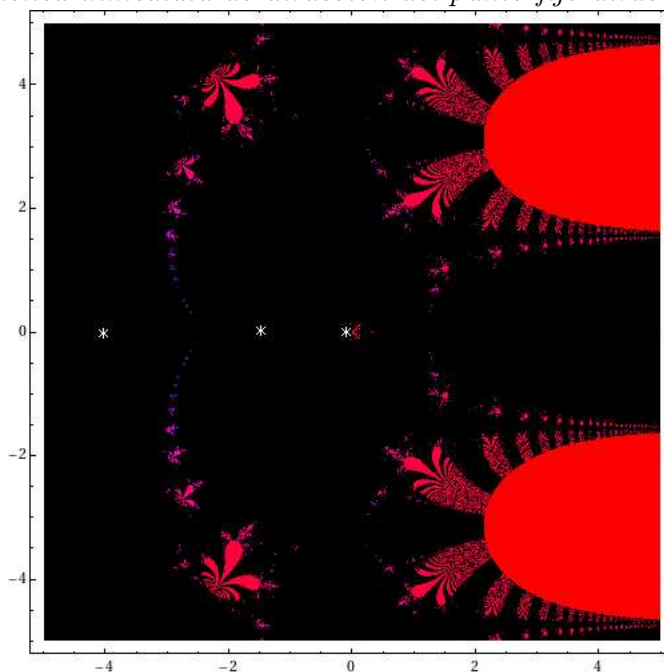


**Conjetura 4.4.9.** Si  $(\lambda, \mu) = (-10, 1)$  existe trasplante de cabellos similar al caso  $\lambda e^z$  y dominios de Baker de periodo 2.

**Figura 4.4.10.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(-1, 0,5)$ , región  $G$ . En rojo la segunda iteración. El 0 atrae los puntos de un intervalo en  $\mathbb{R}^-$  bajo la segunda iteración. Hay un punto fijo atractor en medio de una órbita de periodo 2 repulsora, en la figura sólo uno de ellos.

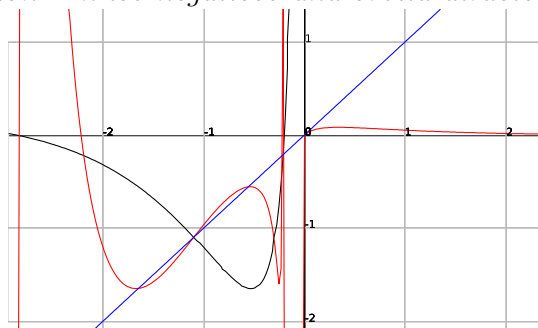


(b) El conjunto de Julia. Tres regiones con asterisco blanco. En medio, cuenca inmediata de atracción del punto fijo atractor.

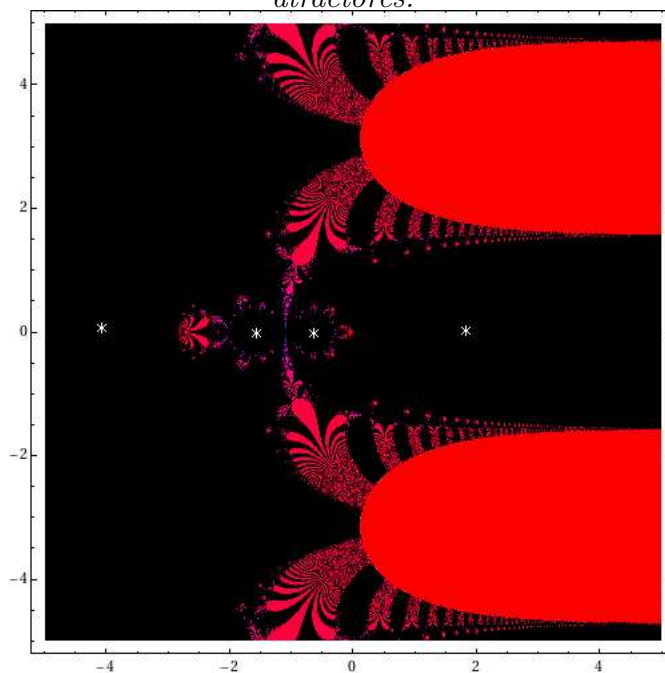


**Conjetura 4.4.11.** Si  $(\lambda, \mu) = (-1, 0,5)$  hay un ciclo de dominios de Baker de periodo 2. En la figura 4.4.10 (b) son las regiones marcadas con asterisco blanco en los extremos.

**Figura 4.4.12.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(-6, -1)$ , región H. En rojo la segunda iteración. En los negativos una órbita atractora de periodo 2.



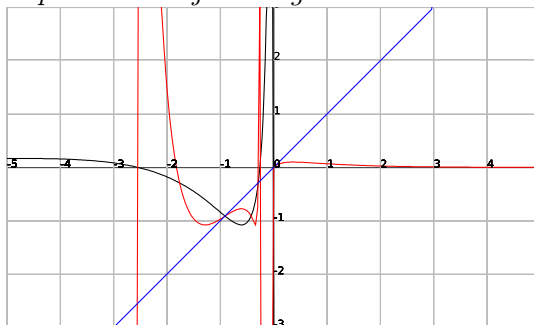
(b) El conjunto de Julia. Cuatro zonas marcadas con asterisco blanco. En medio, las cuencas inmediatas de atracción de los puntos de periodo 2 atractores.



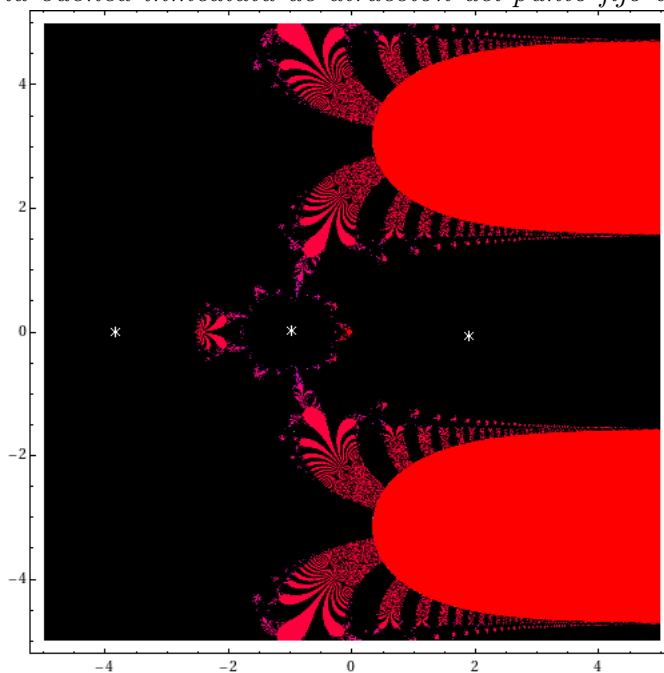
**Conjetura 4.4.13.** Si  $(\lambda, \mu) = (-6, -1)$  hay un ciclo de dominios de Baker de periodo 2. En la Figura 4.4.12 (b) son las regiones marcadas con asterisco blanco en los extremos.



**Figura 4.4.14.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(-5, -1)$ , región I. En rojo la segunda iteración. Hay un punto fijo atractor. El 0 atrae a los reales positivos bajo la segunda iteración.

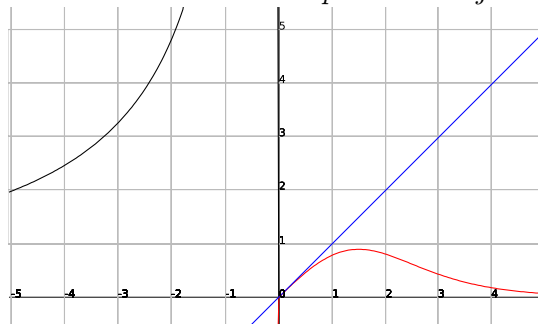


(b) El conjunto de Julia. Tres regiones marcadas con asterisco blanco. En medio la cuenca inmediata de atracción del punto fijo atractor.

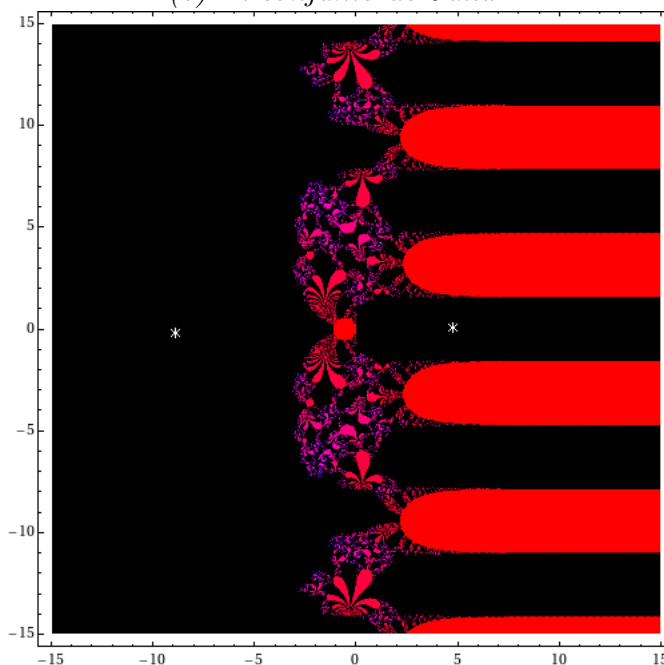


**Conjetura 4.4.15.** Si  $(\lambda, \mu) = (-5, -1)$  hay un ciclo de dominios de Baker de periodo 2. En la figura 4.4.14 (b) son las regiones marcadas con asterisco blanco en los extremos.

**Figura 4.4.16.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(-1, -10)$ , región J. En rojo la segunda iteración. El 0 atrae a los reales positivos bajo la segunda iteración.

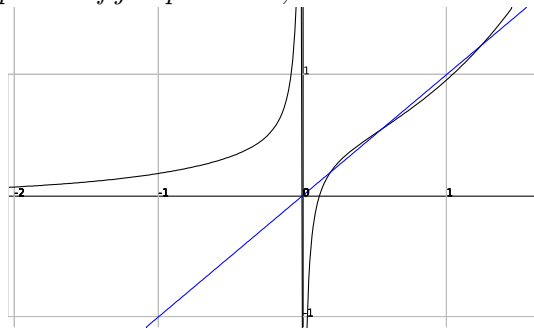


(b) El conjunto de Julia.

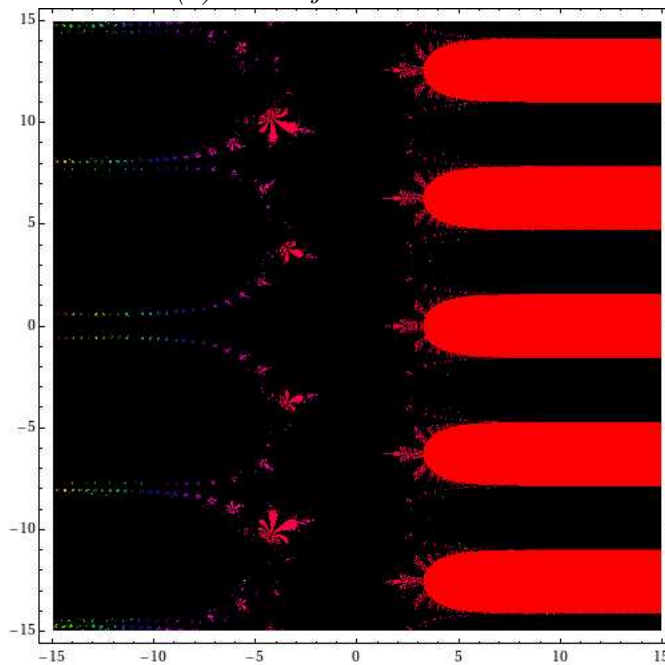


**Conjetura 4.4.17.** Si  $(\lambda, \mu) = (-1, -10)$  hay un ciclo de dominios de Baker de periodo 2. En la figura 4.4.16 (b) son las regiones marcadas con asterisco blanco.

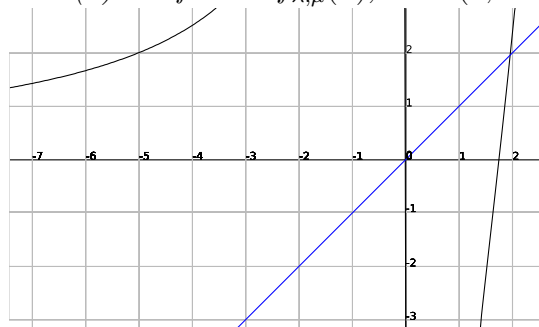
**Figura 4.4.18.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(0,37, -0,05)$ , región  $K$ . Hay tres puntos fijos positivos, en medio uno atractor.



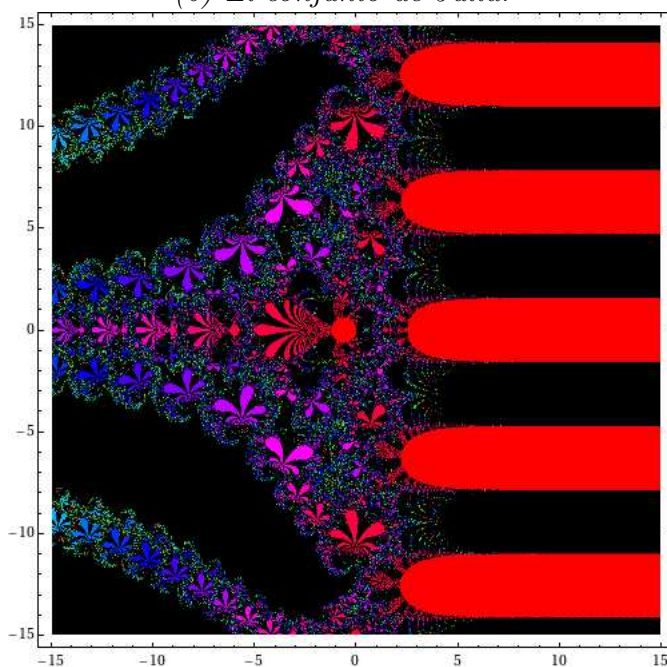
(b) El conjunto de Julia.



**Figura 4.4.19.** (a) Gráfica de  $f_{\lambda,\mu}(x)$ , caso  $(1, -10)$ , región  $L$ .



(b) El conjunto de Julia.



## 4.5. Valores singulares, dominios de Baker y dominios errantes.

En el teorema 3.5.5 se establece una relación entre los valores singulares de  $f$  y los ciclos periódicos de las componentes de Fatou que no son dominios de Baker. En cambio, la relación entre los valores singulares y los dominios errantes o de Baker no es tan simple.

En 1919 Fatou dio el ejemplo  $f(z) = z - 1 + e^z$ . Esta función tiene un dominio de Baker invariante que contiene un semiplano izquierdo. El dominio contiene a todos valores singulares, que son una infinidad. En 1985 Herman mostró que para cierto valor  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la función  $f(z) = z + i\lambda + e^{-z}$  tiene un dominio de Baker que contiene un semiplano, pero este dominio no contiene valores singulares. En 1997 Baker y Dominguez mostraron que la función  $f(z) = z + e^{-z}$  contiene una infinidad de dominios de Baker, cada uno contenido en una franja de altura  $2\pi$ , y cada uno con un único valor singular, ver [3].

El *conjunto postsingular* de  $f$  se define como:

$$PS(f) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f^n(SV(f)).$$

Bergweiler en 1995, [12], mostró que la función  $f(z) = 2 - \log 2 + 2z - e^z$  tiene un dominio de Baker tal que su distancia a  $PS(f)$  es estrictamente positiva. Herman notó que se puede seguir la idea de Sullivan en el teorema de no existencia de dominios errantes para funciones racionales, para probar que cualquier ciclo de Baker en una función del tipo  $f(z) = z + P(z)e^{Q(z)}$  contiene valores singulares, donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son funciones racionales. Este resultado se puede extender a otras familias de funciones, [13].

**Pregunta 4.5.1.** *¿Cuál es la relación entre los valores singulares y los dominios de Baker en esta familia?*

Eremenko y Lyubich en [35] probaron que si una función entera tiene un dominio de Baker, el conjunto  $SV(f)$  es no acotado. La función  $f_{-1,1}$  de nuestra familia es un ejemplo de una función meromorfa trascendente con  $SV(f)$  acotado pero con dominio de Baker, [13].

Los mismos Eremenko y Lyubich probaron también que una función entera con  $SV(f)$  acotado, no tiene dominios errantes. Ver [35]. Varias son las familias de funciones meromorfas trascendentes que no tienen dominios errantes, como lo es la familia  $S$ , ver [13], ninguna de las cuales abarca a la familia  $f_{\lambda,\mu}$  cuando ambos parámetros son diferentes de cero. Esto nos lleva a la siguiente:

**Pregunta 4.5.2.** *¿La función  $f_{\lambda,\mu}$  tiene dominios errantes?*

# Bibliografía

- [1] Jan M. Aarts, Lex G. Oversteegen, *The geometry of the Julia Sets*, Transactions of the American Mathematical Society **338**, No. 2, (1993), 897-918.
- [2] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, second edition, McGraw-Hill, International Student Edition, (1966).
- [3] Arnd Lauber, *On the Stability of Julia Sets of Functions having Baker Domains*, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematische-Naturwissenschaftlichen Fakultäten der Georg-August-Universität-Göttingen, (2004).
- [4] I. Noel Baker, *Fixpoints of polynomials and rational functions*, J. London Math. Soc (2), **39**, (1964), 615-622.
- [5] I. Noel Baker, Patricia Domínguez, *Boundaries of unbounded Fatou components of entire functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **24**(2), (1999), 437-464.
- [6] I. Noel Baker, Janina Kotus, Lü Yinian, *Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains*, Ergodyc Theory and Dynamical Systems **11**, (1991), 603-618.
- [7] I. Noel Baker, Janina Kotus, Lü Yinian, *Iterates of meromorphic functions IV: Critically finite functions*, Results Math. **22**, (1992), 651-656.
- [8] Krzysztof Baranski, Núria Fagella, *Univalent Baker Domains*, Nonlinearity **14**, (2001), 411-429.

- [9] Detlef Bargmann, *Simple proofs of some fundamental properties of the Julia set*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **19**, (1999), 553-558.
- [10] Alan F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, (1991).
- [11] Walter Bergweiler, *Comments and Corrections to Iteration of Meromorphic Functions*, (2009).
- [12] Walter Bergweiler, *Invariant Domains and singularities*, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. **117**, (1995), 525-532.
- [13] Walter Bergweiler, *Iteration of meromorphic functions*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **29**, Number 2, october (1993), 151-188.
- [14] Ranjit Bhattacharjee, Robert L. Devaney, *Tying hairs for structurally stable exponentials*, Preprint.
- [15] Clara Bodelón, Robert L. Devaney, Michal Hayes, Gareth Roberts, Lisa R. Goldberg, John H. Hubbard, *Hairs for the Complex Exponential Family*, International Journal of Bifurcation and Chaos **9**, (1999), 1517-1534.
- [16] Andreas Bolsch, *Iteration of meromorphic functions with countably many essential singularities*, Dissertation, Berlin, (1997).
- [17] Andreas Bolsch, *Periodic Fatou Components of meromorphic functions*, Bull. London Math. Soc. **31**, (1999), 543-555.
- [18] Andreas Bolsch, *Repulsive periodic points of meromorphic functions*, Complex Variables Theory Appl. **31**, (1996), 75-79.
- [19] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, second edition, Springer, Graduate Texts in Mathematics, (1978).
- [20] Robert L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, second edition, Addison-Wesley, (1989).

- [21] Robert L. Devaney, *A Survey of Exponential Dynamics*, Department of Mathematics, Boston University, Boston, USA, (2004).
- [22] Robert L. Devaney, *Cantor bouquets, explosions and Knaster continua: dynamics of complex exponentials*, *Publicacions Matemàtiques* **43**, (1999), 27-54.
- [23] Robert L. Devaney, *Complex Dynamics and Entire Functions*, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* **49**, (1994).
- [24] Robert L. Devaney, *Complex Exponential Dynamics*, (2006), preprint.
- [25] Robert L. Devaney, *Knaster-like Continua and Complex Dynamics*, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **13**, (1993), 627-634.
- [26] Robert L. Devaney, *Open Problems in Complex Dynamics and "Complex" Topology*, (2006), Preprint.
- [27] Robert L. Devaney,  *$\mathbf{Se}^x$ : Dynamics, topology, and bifurcations of complex exponentials*, *Topology and its Applications* **110**, (2001), 133-161.
- [28] Robert L. Devaney, Xavier Jarque, *Indecomposable Continua in Exponential Dynamics*, Preprint. Ver <http://math.bu.edu/people/bob/papers.html>.
- [29] Robert L. Devaney, Michal Krych, *Dynamics of  $\exp(z)$* , *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **4**, (1984), 35-52.
- [30] Robert L. Devaney, Daniel M. Look, David Uminsky, *The Escape Trichotomy for Singularly Perturbed Rational Maps*, <http://math.bu.edu/people/bob/papers.html>, february (2005).
- [31] Robert L. Devaney, F. Tangerman, *Dynamics of entire functions near the essential singularity*, *Ergodic Theory Dynamical Systems* **6**, (1986), 489-503.



- [32] R. E. Lee DeVille, *Itineraries of entire functions*, J. Diff. Eq. Appl. **7**, (2001), 193-214.
- [33] Adrien Douady, Lisa Goldberg, *The nonconjugacy of certain exponential functions*, Holomorphic Functions and Moduli, MSRI Publ., Springer, Berlin, (1988), 1-8.
- [34] Patricia Dominguez, *Dynamics of transcendental meromorphic functions*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica **23**, (1998), 225-250.
- [35] Alexandre E. Eremenko, Mikhail Y. Lyubich, *Dynamical Properties of some classes of entire functions*, Ann. Inst. Fourier **42**, (1992), 989-1020.
- [36] Núria Fagella, *Limiting dynamics of the complex standard family*, Int. J. of Bif. and Chaos **3**, (1995), 673-700.
- [37] Harald König, *Conformal conjugacies in Baker domains*, Journal of London Math. S. (2), **59**(1), (1999), 153-170.
- [38] Bernd Krauskopf, Hartje Kriete, *Hausdorff convergence of Julia sets*, Bull. Belg. Math. Soc. **6**, (1999), 69-76.
- [39] Kazimierz Kuratowski, *Topology Vol. 2*, Academic Press, New York, (1968).
- [40] Mikhail Lyubich, *Measurable dynamics of the exponential*, Soviet Mat. Dokl. **35**, (1987), 223-226.
- [41] John C. Mayer, *An explosion point for the set of endpoints of the Julia set of  $\lambda \exp(z)$* , Ergodyc Theory and Dynamical Systems **10**, (1990), 177-183.
- [42] Alexei Markushevich, *Teoría de las Funciones Analíticas Tomo II*, primera edición, Editorial Mir, (1970).
- [43] Michal Misiurewicz, *On iterates of  $e^z$* , Ergodyc Theory and Dynamical Systems **1**, (1981), 103-106.

- [44] Marco A. Montes de Oca B., *Aspectos dinámicos de la familia  $\lambda e^z$* , Tesis para obtener el grado de matemático, UNAM, junio (2007).
- [45] Mónica Moreno R., *Existence of indecomposable continua for unstable exponentials*, Topology Proceedings **27** No. 1, (2003), 233-244.
- [46] Sam. B. Nadler, *Continuum Theory*, Marcel Dekker, (1992).
- [47] Gustavo N. Rubiano O., *Iteración y fractales (con Mathematica)*, Colección Obra Selecta, Universidad Nacional de Colombia, Vicerrectoría Académica Editorial, (2009).
- [48] Wilhelm Schwick, *Reppelling periodic points in the Julia set*, Bull. London Math. Soc. **29**, (1997), 314-316.
- [49] Carl L. Siegel, *Iteration of analytic functions*, Ann. of Math. (2) **43**, (1942), 607-612.
- [50] Marcelo Viana, *The Differentiability of the Hairs of  $\exp(z)$* , Proc. Amer. Math. Soc. **103**, (1998), 1179-1184.
- [51] Jian H. Zheng, *Singularities and wandering domains in iteration of meromorphic functions*, Illinois Journal of Mathematics **44**, no. 3, (2000).
- [52] *Encyclopaedia of Mathematics*, ISBN 1402006098, (2001).
- [53] Norbert Schwartz, *Fractálica, o de las recurrencias del universo*, Extravía, <http://extravia.net/2009/12/02/fractalica-o-de-las-recurrencias-del-universo/>.