



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**PROGRAMA EN PURE DATA PARA DETERMINAR
LOS INTERVALOS PERCEPTUALMENTE
CONSONANTES A PARTIR DEL ESPECTRO
ACÚSTICO**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

P R E S E N T A:

KEVIN GABRIEL ALTAMIRANO ZUBIRÍA



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. FELIPE ORDUÑA BUSTAMANTE**

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Altamirano
Zubiría
Kevin Gabriel
58 81 83 36
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
404058225

2. Datos del tutor

Dr.
Felipe
Orduña
Bustamante

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Emilio
Lluis
Puebla

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Rodolfo
San Agustín
Chi

5. Datos del sinodal 3

M. en C.
Ana Irene
Ramírez
Galarza

6. Datos del sinodal 4

Mtra.
María Eunice Fabiola
Padilla
León

7. Datos del trabajo escrito

Programa en Pure Data para determinar los intervalos preceptualmente
consonantes a partir del espectro acústico.

54 p.
2011

Índice general

Introducción	III
0.1. Descripción del contenido de la tesis	VI
1. Acústica musical	1
1.1. El oscilador armónico	1
1.2. El oscilador armónico amortiguado	3
1.3. La vibración en una cuerda y la ecuación de onda	5
1.4. Solución a la ecuación de onda	6
1.5. La suma de senoidales	9
1.6. El Teorema de Fourier	10
1.7. La acústica de los instrumentos musicales	13
2. Psicoacústica	15
2.1. Las propiedades perceptuales del sonido	15
2.2. Funcionamiento del oído	16
2.3. La banda crítica	17
2.4. La percepción de altura tonal	17
2.5. Batimientos	18
2.6. Enmascaramiento	19
2.7. Tonos de combinación	19
2.8. Consonancia sensorial y las curvas de Plomp-Levelt	21

2.8.1. La disonancia es necesaria en la práctica musical	23
3. Escalas musicales	25
3.1. El espacio de tonos	25
3.1.1. Cents	27
3.2. La escala pitagórica	27
3.3. Entonaciones justas	29
3.3.1. El p-límite	29
3.4. El temperamento igual con 12 tonos	30
3.4.1. Temperamento igual con n tonos	31
3.5. Temperamentos irregulares	32
3.5.1. La escala Bohlen-Pierce	32
3.6. Escalas musicales asociadas a timbres	33
4. Un modelo de disonancia en Pure Data	36
4.1. Parametrización de las curvas de Plomp y Levelt	36
4.2. Manual del usuario para parciales [~]	40
4.3. Resultados experimentales	44
4.3.1. Timbres armónicos	45
4.3.2. Timbres inarmónicos	45
4.3.2.1. Bonang	45
4.3.2.2. Xilófono	47
4.3.3. Timbres con parciales impares	49
Conclusiones	51
Bibliografía	53

Introducción

Una inspección al arreglo de teclas blancas y negras en un piano, uno de los instrumentos más conspicuos en la historia musical, funciona como una buena introducción a la estructura de la música académica actual. La combinación de notas blancas y negras, que a primera vista parece irregular, muestra un patrón que se repite cada doce notas. La sucesión de teclas dentro de este ciclo no muestra una estructura particularmente ordenada: generalmente una nota blanca sigue a una nota negra pero esto no se cumple en todos los casos.

Por otro lado, el mecanismo que produce sonido en un piano se basa en pequeños martillos que golpean cuerdas resonantes; para asegurar el funcionamiento adecuado del piano, cada cuerda debe ser cuidadosamente afinada. El término afinación será muy vago para alguien que no esté familiarizado con algún instrumento musical y tal vez, como nota aclaratoria, se le puede hacer saber que la afinación de un piano no es una tarea sencilla y que generalmente es un especialista quien debe realizarla.

La estructura y afinación de un a piano parecen a primera vista completamente arbitrarias; sin embargo, la evidente multiplicidad de composiciones armoniosas que se pueden interpretar en un piano es una clara señal de que la afinación correcta y la disposición de notas en un piano son importantes para la interpretación de pasajes musicales agradables. La existencia de música estéticamente agradable en la configuración estándar de un piano no excluye la posibilidad de que existan formas alternativas de afinar un piano que produzcan pasajes musicales interesantes o agradables. Después de todo, la historia musical nos muestra que las afinaciones del piano han cambiado a lo largo del tiempo¹.

¹Por ejemplo, en el libro de Haluska [7] se enlistan cientos de escalas musicales correspondientes a distintas áreas geográficas y épocas en la historia musical.

Las causas de la consonancia de algunos intervalos musicales (si se piensa en el ejemplo del piano, los intervalos son parejas de notas) fueron investigadas por Pitágoras, quien observó que parejas de cuerdas en vibración producían sonidos armoniosos si sus longitudes se encontraban en razones que involucran números enteros pequeños. Galileo propuso una explicación para este fenómeno en términos de la periodicidad de los movimientos ondulatorios, en el caso de notas separadas por una octava (es decir, la frecuencia asociada a una de ellas era el doble de la otra), la suma de dos ondas senoidales conservará la periodicidad. De forma análoga, ondas senoidales cuyas frecuencias están relacionadas por razones simples mantendrán cierta periodicidad; como se explicará más adelante, la explicación de Galileo no es correcta y, para desarrollar una explicación satisfactoria, es necesario considerar los mecanismos fisiológicos que hacen inteligible el sonido.

Los estudios de Hermann von Helmholtz en el siglo diecinueve sentaron las bases para un estudio metodológico sobre la relación entre las propiedades físicas del sonido y la percepción del mismo. Las observaciones de Helmholtz sobre la cognición musical muestran una fuerte relación con la teoría espectral del sonido. Un siglo más tarde, la relación entre cognición musical y el espectro de un sonido planteada por Helmholtz fue utilizada por R. Plomp y W. Levelt para elaborar un modelo de disonancia que predice intervalos de máxima consonancia sensorial en función del espectro de un timbre periódico. Los resultados obtenidos por Plomp y Levelt son consistentes con la escala musical predominante en la música occidental de los dos últimos siglos: el temperamento igual de doce tonos. El modelo de Plomp y Levelt predice que, para timbres armónicos, los puntos de máxima consonancia se encuentran cuando los cocientes entre frecuencias fundamentales son representados por razones simples como $1 : 2$ y $3 : 2$.

Las investigaciones de William Sethares se han enfocado en aplicar el modelo de Plomp-Levelt en timbres inarmónicos, en este caso, los puntos de máxima disonancia no necesariamente coinciden con las notas del temperamento igual de doce tonos. Como el autor describe en el libro *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale* [18], se puede definir una clara correspondencia entre timbre y escala musical que genera intervalos musicales sensorialmente agradables.

El principal objetivo de esta tesis es presentar un modelo computacional de disonancia basado en las ideas postuladas por Plomp y Levelt; sin embargo, dada la naturaleza multidisciplinaria del tema, es necesario introducir al lector a las bases de física, psicoacústica y teoría musical necesarias para comprender los resultados expuestos al final de la tesis. El desarrollo de este texto está fuertemente influenciado por los textos *Music: A Mathematical Offering* de Dave Benson [3] y *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale* de William Sethares, y se recomienda consultarlos a cualquiera interesado en el tema; los temas y resultados expuestos en ambos libros sobrepasan el material expuesto en esta tesis.

0.1. Descripción del contenido de la tesis

En el primer capítulo se presentan algunos modelos físicos de sistemas en vibración, particularmente el modelo de la cuerda en movimiento, también se incluye una sección dedicada al Teorema de Fourier, que sustenta la teoría espectral del sonido. Los modelos y resultados de este capítulo se basan en los libros de acústica musical de Kuttruff [10] y Howard [9]. El objetivo de esta sección es introducir al lector a temas de acústica musical así como motivar el uso de la teoría espectral del sonido para comprender la relación entre el espectro de un timbre y la consonancia sensorial que genera.

El segundo capítulo está dedicado a la psicoacústica, en él se explica brevemente el funcionamiento del aparato auditivo, también se exponen algunos fenómenos fisiológicos y cognitivos que son esenciales para desarrollar una teoría de la disonancia sensorial. Finalmente, se describe la teoría de disonancia sensorial de Plomp-Levelt [14], esencial para comprender los resultados expuestos en la parte final de la tesis. Los modelos descritos en esta sección se basan en los libros de Howard [9] y Helmholtz [8].

En el tercer capítulo se propone una estructura matemática para el espacio de tonos y se describen algunas escalas musicales históricamente notables. Tomando como base la teoría de disonancia expuesta en el capítulo dos, se define formalmente la noción de disonancia sensorial así como la relación entre timbre y escala propuesta por Sethares [17].

Finalmente, en el cuarto capítulo se propone una parametrización de las curvas de disonancia y se describe una implementación del modelo del Plomp-Levelt en el lenguaje de programación Pure Data. Utilizando el programa **parciales**~ se muestran algunos resultados experimentales para distintos tipos de timbres y se derivan algunas escalas musicales.

Capítulo 1

Acústica musical

En este capítulo se desarrollan resultados necesarios para comprender la naturaleza física de los fenómenos vibratorios que generan sonidos musicales. Se exponen algunos modelos acústicos básicos como el oscilador armónico y la cuerda en vibración; también se enuncia el Teorema de Fourier para funciones periódicas, un resultado esencial para el análisis espectral de los sonidos.

1.1. El oscilador armónico

El oscilador armónico es el modelo más sencillo de vibración en un sistema físico; experimentalmente se puede modelar como una cuerda elástica anclada en sus extremos y con un peso en su centro.

Dada cualquier posición inicial, la ley de Hooke dicta que la cuerda ejerce una fuerza F en dirección a la posición de equilibrio y magnitud proporcional a la distancia y de la posición de equilibrio (Figura 1.1). La ecuación de la fuerza que actúa sobre la masa es

$$F = -kx, \tag{1.1}$$

en donde x es el desplazamiento (en metros) de la posición de equilibrio de la masa m (en kilogramos) y k es la constante de elasticidad (en newtons por metro: N/m) de la cuerda, el signo negativo indica que la fuerza es opuesta a la dirección del desplazamiento. Sustituyendo la igualdad (1.1) en la ecuación general de movimiento

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (1.2)$$

en donde d^2x/dt^2 es la aceleración de la masa, se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (1.3)$$

Como k y m son números positivos fijos, se puede definir una constante $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ llamada *frecuencia natural* del sistema, después de hacer la substitución se obtiene la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.4)$$

Cualquier solución de (1.4) puede ser expresada como combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes.

Las funciones $h(t) = \sin(\omega_0 t)$ y $g(t) = \cos(\omega_0 t)$ cumplen con estas características; por lo tanto, una solución general de (1.4) es

$$f(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \sin(\omega_0 t), \quad (1.5)$$

donde a_1 y a_2 son números reales determinados por la posición inicial y la velocidad inicial del peso, $f(0) = x_1$ y $f'(0) = x_2$.

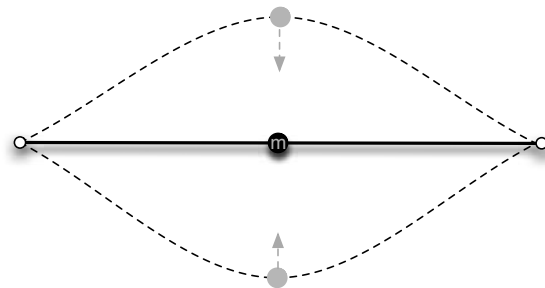


Figura 1.1: Movimiento de una cuerda elástica con un peso en el centro.

La igualdad (1.3) es llamada ecuación del oscilador armónico simple y sus soluciones sugieren que las funciones trigonométricas son importantes para el estudio de fenómenos vibratorios.

Se puede reescribir (1.5) de la siguiente forma¹

¹En donde $a = (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\phi = \arctan(a_1/a_2)$.

$$f(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (1.6)$$

al número real a se le llama *amplitud* del movimiento y a ϕ se le llama *ángulo de fase inicial*.

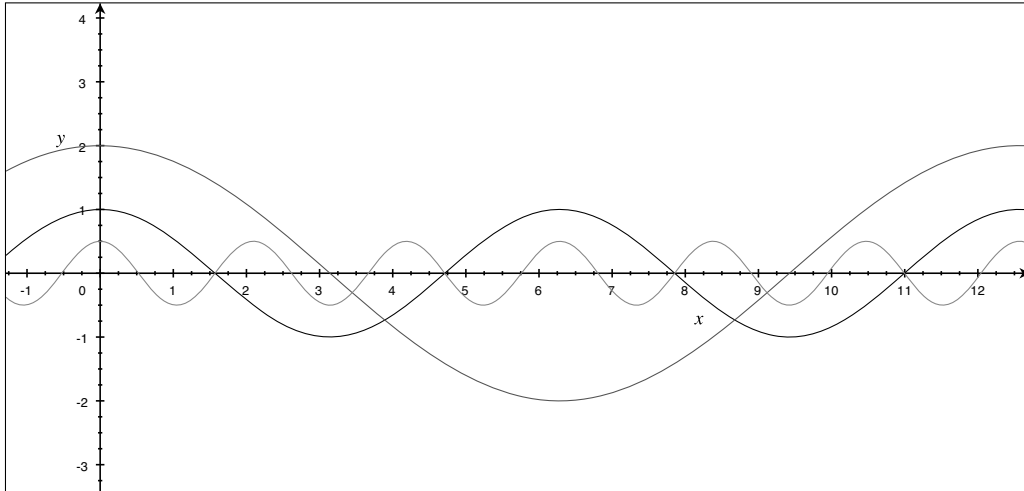


Figura 1.2: Soluciones del oscilador armónico simple con distintas amplitudes y frecuencias.

En la Figura 1.2 se encuentran graficadas algunas soluciones al oscilador armónico para distintos parámetros. El parámetro a está relacionado con la amplitud que toman las oscilaciones, el parámetro ω_0 con la frecuencia o periodicidad de la función y el parámetro ϕ con el valor (fase) que toma la función en el punto $x = 0$.

1.2. El oscilador armónico amortiguado

El modelo de la sección anterior ofrece una explicación simplificada de una cuerda en vibración. Para proponer un modelo más realista hay que notar que, cuando una cuerda oscila, existen fuerzas disipativas que disminuyen la energía de las oscilaciones a lo largo del tiempo. En el modelo de movimiento oscilatorio amortiguado se contempla esta nueva restricción; existe una fuerza que impulsa el oscilador hacia el punto de equilibrio y también hay una fuerza disipativa F_r que se opone al movimiento y es proporcional a la velocidad,

$$F_r = -\mu \frac{dx}{dt},$$

en donde $\mu \geq 0$. Al añadir en la ecuación general de movimiento (1.2) se obtiene una ecuación diferencial lineal de segundo grado con coeficientes constantes

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.7)$$

Para resolver (1.7) se encuentran las raíces del polinomio característico asociado

$$p(x) = x^2 + \mu x + \frac{k}{m};$$

las soluciones son $x_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 - 4k/m}/2$ y $x_2 = \mu - \sqrt{\mu^2 - 4k/m}/2$.

Así, $f_1(x) = e^{x_1 t}$ y $f_2(x) = e^{x_2 t}$ son dos soluciones de la ecuación diferencial que son linealmente independientes; cualquier solución $f(t)$ de (1.7) es combinación lineal de $f_1(x)$ y $f_2(x)$. En el caso en que las raíces del polinomio característico sean números complejos de la forma $x_1 = \alpha + \beta i$ y $x_2 = \alpha - \beta i$, la fórmula de Euler permite reescribir a cada solución como $f_1(x) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$ y $f_2(x) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$.

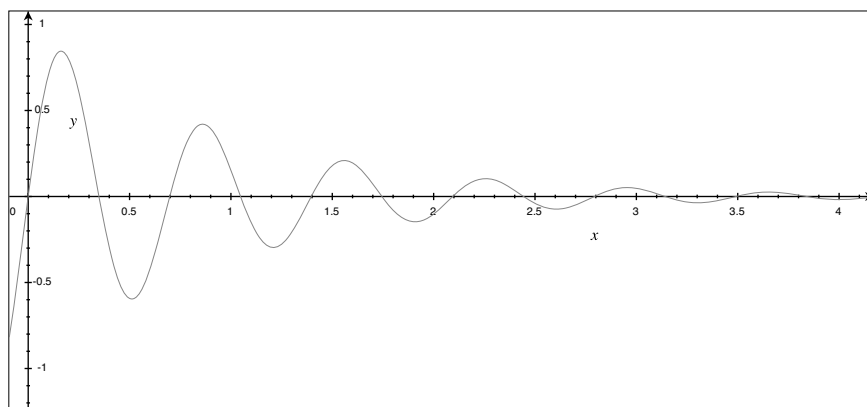


Figura 1.3: Solución asociada al oscilador armónico amortiguado.

En la Figura 1.3 se encuentra graficada una solución, se observa que las oscilaciones disminuyen en amplitud a lo largo del tiempo.

1.3. La vibración en una cuerda y la ecuación de onda

A continuación se presentará un modelo de una cuerda en vibración bajo el supuesto de que la cuerda está atada en sus extremos y que no existen fuerzas que disipen la energía. La cuerda es perfectamente elástica, con densidad uniforme μ (en kilogramos por metro: kg/m) y está estirada con una tensión T (en newtons: N). Como una primera aproximación al movimiento de la cuerda, se puede suponer que la cuerda consta de pequeños segmentos rígidos ds . Cuando los desplazamientos son pequeños, la cuerda se mueve verticalmente y el movimiento horizontal es casi nulo. La fuerza neta dF , que empuja cada segmento ds a su posición de equilibrio, es la resta entre los componentes en y de la tensión T en los extremos del segmento

$$dF_y = (T \sin \theta)_{x+dx} - (T \sin \theta)_x.$$

Aplicando la expansión en series de Taylor,

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx + \dots ,$$

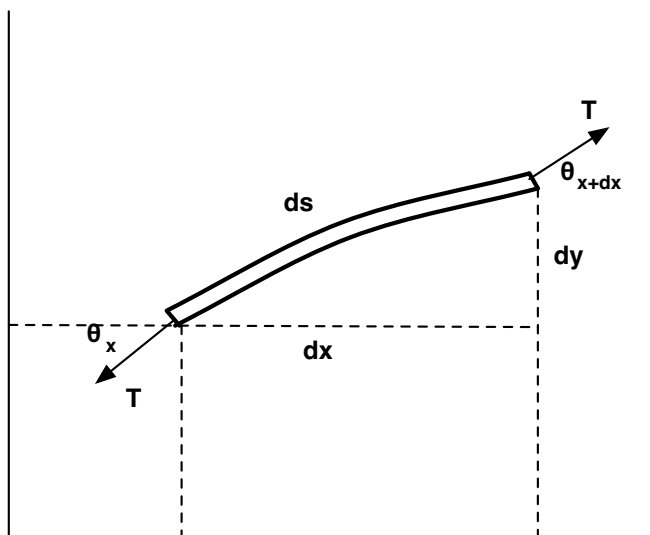


Figura 1.4: Modelo de la cuerda en vibración.

a la función $T \sin \theta$ y dejando sólo los términos de primer orden se obtiene

$$dF_y = \left[(T \sin \theta)_x + \frac{\partial(T \sin \theta)}{\partial x} dx \right] - (T \sin \theta)_x = \frac{\partial(T \sin \theta)}{\partial x} dx.$$

Para un desplazamiento pequeño y , $\sin \theta$ puede ser reemplazado por $\tan \theta$, que es también $\partial x / \partial y$:

$$dF_y = \frac{\partial(T \partial y / \partial x)}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

La masa del segmento ds es μds , entonces la segunda ley del movimiento de Newton se convierte en

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = (\mu ds) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Como dy es pequeño, $ds \cong dx$, si escribimos $c^2 = T/\mu$, resulta la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1.8}$$

llamada ecuación de onda en una dimensión.

1.4. Solución a la ecuación de onda

La ecuación de onda se puede resolver considerando los cambios de variable

$$u = x + ct \quad \text{y} \quad v = x - ct.$$

La siguiente identidad se puede obtener diferenciando y utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Diferenciando de nuevo, se obtiene

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial t},$$

que es igual a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c \left(c \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - c \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right) - c \left(c \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} - c \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right),$$

factorizando c se obtiene la expresión equivalente

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right).$$

Procediendo de manera análoga se derivan las igualdades

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1.8) se obtiene

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right),$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0. \tag{1.9}$$

Integrando (1.9) con respecto a u resulta

$$\frac{\partial y}{\partial v} = g(v),$$

e integrando con respecto a v se llega a

$$y = G(v) + F(u). \tag{1.10}$$

Sustituyendo $u = x + ct$ y $v = x - ct$ en (1.10) se obtiene

$$y(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct). \quad (1.11)$$

Si la cuerda está atada en los extremos y tiene longitud l , necesariamente se cumple que, si $x = 0$ ó $x = l$, entonces $y = 0$ para cualquier valor de t

$$0 = F(ct) + G(-ct) \quad (1.12)$$

y

$$0 = F(l + ct) + G(l - ct). \quad (1.13)$$

De (1.12) se sigue que

$$F(\lambda) = -G(-\lambda)$$

para todo λ , así se puede expresar (1.11) como

$$y(x, t) = G(x - ct) - G(-x - ct). \quad (1.14)$$

Evaluando $x = l$ en (1.14) y utilizando (1.13)

$$0 = G(l - ct) - G(-l - ct)$$

para todo t , equivalentemente

$$G(-l - ct) = G(l - ct),$$

así se obtiene que²

$$G(\lambda) = G(\lambda + 2l)$$

por lo tanto, la función G es periódica con periodo $2l$.

²En donde $\lambda = -l - ct$.

1.5. La suma de senoidales

Cuando dos o más ondas vibran en el mismo espacio, la amplitud total en el medio puede ser calculada como la suma de las amplitudes de cada onda, esta propiedad es conocida como el *principio de superposición* y permite explicar la interacción entre ondas sonoras. Si bien el principio de superposición es un principio físico que no necesita una prueba formal, puede ser explicado sencillamente en términos matemáticos.

Dada una onda con *frecuencia* v en hertz, *amplitud* c y *fase* ϕ

$$c \sin(2\pi vt + \phi).$$

Se puede descomponer la expresión anterior utilizando una conocida identidad trigonométrica³

$$c \sin(\omega t + \phi) = c \sin \phi \cos \omega t + c \cos \phi \sin \omega t.$$

Si $g(t)$ y $h(t)$ son dos ondas senoidales con la misma amplitud a , la misma fase ϕ y con frecuencias ω y $\omega + \epsilon$, la suma de ambas puede expresarse como un producto de funciones trigonométricas

$$g(t) + h(t) = a \cos \omega t + a \cos(\omega + \epsilon)t = 2a \cos\left(\omega + \frac{1}{2}\epsilon\right)t \cos\left(\frac{1}{2}\epsilon t\right). \quad (1.15)$$

Entonces, al sumar dos ondas se obtiene una onda cuya amplitud está determinada por el factor no constante $2a \cos \frac{1}{2}\epsilon t$ y con frecuencia $\omega + \epsilon/2$, cercana a ω si ϵ es cercano a 0.

En general, si se suman dos ondas con la misma amplitud y frecuencias ω_0 , ω_1

$$a \sin(2\pi\omega_0 t) + a \sin(2\pi\omega_1 t) = 2a \left[\cos\left(2\pi \frac{\omega_0 - \omega_1}{2} t\right) \right] \cdot \left[\sin\left(2\pi \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t\right) \right]. \quad (1.16)$$

Esta ecuación será utilizada más adelante para explicar la percepción de batimientos que

³ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

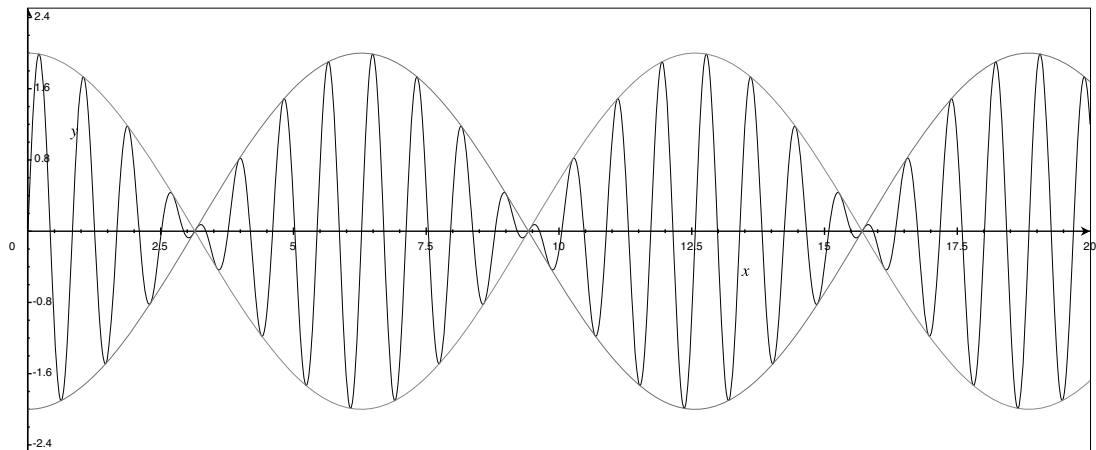


Figura 1.5: Gráfica de la función $\sin 7x + \sin 8x$, las curvas en rojo muestran la modulación de la amplitud.

se presenta cuando se escuchan dos notas simultáneas con frecuencias cercanas.

1.6. El Teorema de Fourier

Dada una función periódica $f(x)$ con periodo 2π , se puede buscar descomponerla en términos de componentes periódicas más simples, como las funciones trigonométricas *seno* y *coseno*. Como una combinación lineal de funciones periódicas con el mismo periodo siempre es periódica, es sensato preguntarse en qué casos se cumple lo opuesto, esto es: ¿Bajo qué condiciones una función con periodo 2π puede ser aproximada por una suma de funciones trigonométricas?, es decir

$$f(x) \approx f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx],$$

para n suficientemente grande, con $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ periódica y $\{a_i, b_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

En las secciones anteriores se ha comprobado que plantear esta pregunta es bastante natural, ya que movimientos periódicos o casi-periódicos (el oscilador armónico simple y el oscilador amortiguado) tienen soluciones que involucran a las funciones trigonométricas *seno* y *coseno*. La respuesta a la pregunta planteada se encuentra en el Teorema de Fourier.

TEOREMA (Fourier)⁴: Sea $f(x)$ una función 2π periódica y C^1 a pedazos, definimos las constantes

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad (1.17)$$

entonces para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx] = \begin{cases} f(x) & \text{Si } f(x) \text{ es continua en } x \\ \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] & \text{Si } f(x) \text{ es discontinua en } x \end{cases} .$$

El teorema muestra que cualquier función que es C^1 a pedazos y 2π -periódica puede ser expresada como una serie de ondas senoidales con frecuencias angulares que son números enteros. Aunque aquí se ha formulado el Teorema de Fourier para funciones con periodo 2π , el resultado puede ser generalizado a cualquier función $f(x)$ con periodo arbitrario P por medio de la sustitución $\tilde{f}(x) = \frac{2\pi}{P} f(x)$. Dada la definición de frecuencia angular, el Teorema de Fourier garantiza que una función $f(x)$ periódica puede ser expresada como suma de ondas senoidales cuyas frecuencias angulares son múltiplos de la frecuencia angular ω de $f(x)$.

A la frecuencia ω se le llama *frecuencia fundamental* y al resto de sus múltiplos se les conoce como *armónicos*; los armónicos se distinguen por su orden consecutivo (ie. primer armónico, segundo armónico, etc) y a los armónicos que no se anulan en la expresión de Fourier se les llama *parciales*.

Para una función periódica, se pueden graficar sus componentes armónicas en el eje de las abscisas contra la amplitud de cada una de ellas en el eje de las ordenadas. El conjunto de todas las parciales correspondientes a una función periódica se llama el *espectro* de la función

⁴Se puede encontrar una prueba del Teorema de Fourier en [12].

y, como se presentará en capítulo 3, la idea de descomponer un sonido en sus componentes senoidales es esencial para comprender el funcionamiento del oído. En el ejemplo siguiente se muestra una aplicación del Teorema de Fourier.

Para la función $s(t) = t$ definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y con periodo 2π , las integrales de Fourier son

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx .$$

Como la función $x \cos kx$ es una impar, por lo tanto $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx = 0$, por otro lado los coeficientes b_{mk} se obtienen integrando por partes

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{2(-1)^{m+1}}{m} .$$

En la Figura 1.6, se grafican las primeras 4 aproximaciones de $s(t)$.

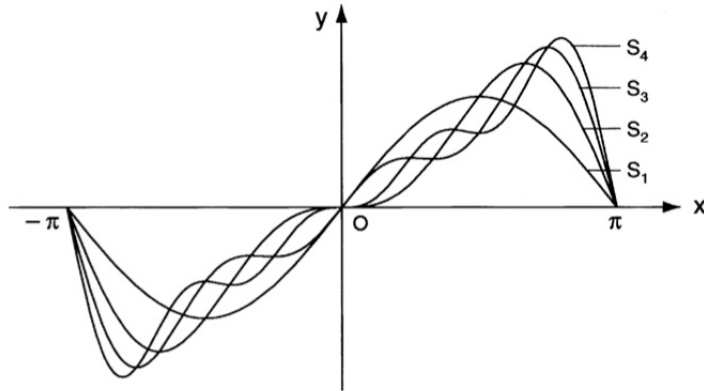


Figura 1.6: *Aproximaciones de fourier para la función $s(t)$.*

En la sección 1.4, se encontró la solución general a la ecuación de onda en una dimensión. Si se toman en cuenta las condiciones iniciales determinadas por una cuerda fija en sus extremos, la solución general está expresada en términos de una función periódica $G(t)$. Una aplicación directa del Teorema de Fourier permite comprender la vibración de la cuerda en términos de los modos de vibración de la cuerda. Si se define el n -ésimo modo de vibración de la cuerda como la función $f_n = C \cos\left(\left(\frac{n\pi(x+ct)}{l}\right) + \phi\right) - C \cos\left(\left(\frac{n\pi(-x+ct)}{l}\right) + \phi\right)$, el Teorema de Fourier asegura que cualquier solución al modelo de la cuerda en vibración es una suma

de los modos de vibración.

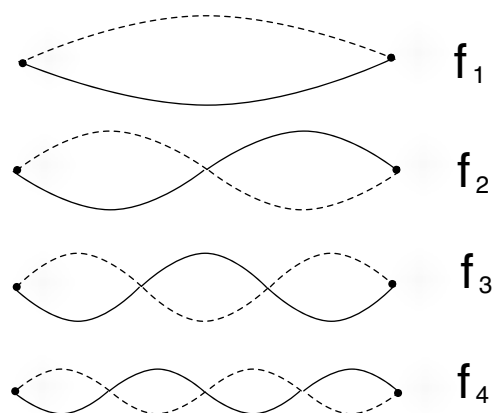


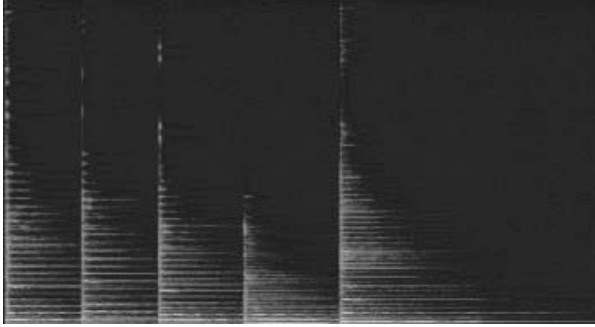
Figura 1.7: Modos de vibración de una cuerda.

1.7. La acústica de los instrumentos musicales

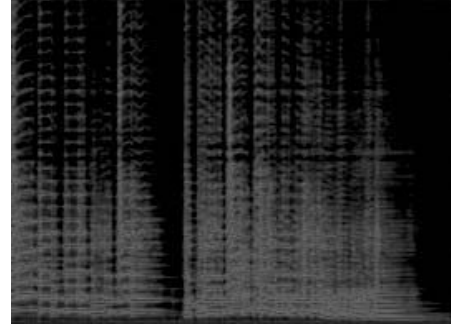
Los resultados obtenidos hasta ahora han permitido introducir conceptos básicos de acústica musical, el análisis de la cuerda en movimiento representa una pequeña parte de los métodos utilizados para producir sonidos musicales. El modelo de la cuerda en vibración es esencialmente distinto a la generación de sonidos en los instrumentos de viento o percusiones, tampoco es útil para explicar el funcionamiento de instrumentos de cuerda como el violín. Las características tonales y tímbricas de cada instrumento pueden ser analizadas experimentalmente utilizando herramientas de software⁵. La inspección de un espectrograma permite localizar las parciales predominantes de un timbre y sus respectivas amplitudes. En la Figura 1.8 se muestran espectrogramas asociados a varios instrumentos musicales; el eje de las abscisas corresponde al tiempo, el eje de las ordenadas corresponde al logaritmo de la frecuencia de cada parcial y la gradación en grises corresponde a la amplitud de cada frecuencia.

Los espectrogramas asociados al piano y al saxofón muestran que las parciales predominantes en ambos instrumentos se distribuyen armónicamente, ya que la distancia entre ellas

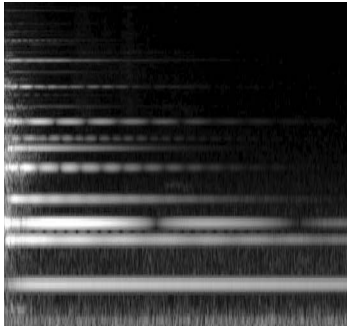
⁵Generalmente se utiliza la *Transformada Rápida de Fourier* (o FFT por sus siglas en inglés), algoritmo diseñado para determinar componentes espectrales.



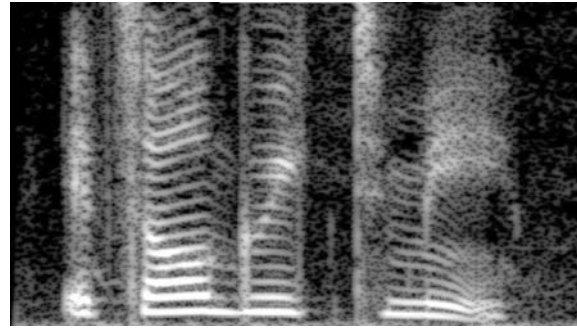
Piano



Saxofón



Campana



Voz Humana

Figura 1.8: Espectrogramas.

es constante y están graficadas en una escala logarítmica. La campana muestra claramente varios picos espectrales que no están armónicamente relacionados, en algunas partes la amplitud no decrece de manera monótona (los instrumentos de percusión generalmente están asociados con espectros inarmónicos). El espectrograma de la voz humana muestra componentes armónicas que varían continuamente en su frecuencia.

Capítulo 2

Psicoacústica

El objetivo de este capítulo es ligar los atributos físicos del sonido (expuestos en el capítulo anterior) con su contraparte perceptual, así como presentar modelos teóricos que los sustentan. En este capítulo se describe brevemente el funcionamiento del sistema auditivo y después se explican fenómenos relacionados con la percepción, particularmente la generación de batimientos cuando se escuchan dos señales con frecuencias fundamentales cercanas. Además, se expone un modelo de consonancia sensorial que está basado en la aparición de batimientos para tonos puros y la teoría espectral del sonido.

2.1. Las propiedades perceptuales del sonido

La percepción auditiva es un fenómeno subjetivo e independiente del conocimiento teórico que se tenga sobre las causas físicas del sonido. Los sonidos generalmente son descritos utilizando términos como duración, volumen o tono; en muchos casos los adjetivos usados para describir la naturaleza de un sonido están relacionados con su espectro, por ejemplo: una onda sonora correspondiente a una onda senoidal con frecuencia f , amplitud a y fase ϕ (se puede pensar en el sonido emitido por un diapasón) se percibirá con un volumen mayor si la amplitud aumenta y un aumento en la frecuencia se escuchará como un tono más agudo. En el caso de sonidos complejos el volumen y el tono también están directamente relacionados con la amplitud y la frecuencia de sus parciales; sin embargo, al considerar timbres con más

de una parcial se generan fenómenos complejos como la aparición de tonos de diferencia, la percepción de batimientos y el enmascaramiento.

2.2. Funcionamiento del oído

Los procesos que permiten la percepción sensorial del sonido se llevan a cabo en la parte interna del oído, que está constituida por un tubo lleno de líquido incompresible enrollado en forma de caracol. A lo largo de la estructura tubular, o cóclea, se encuentra distribuida la membrana basilar; cada sección de la membrana basilar es sensible a un rango determinado de frecuencias y las vibraciones que ingresan al oído interno se propagan a lo largo de la cóclea y resuenan en alguna zona de la membrana basilar. En esencia, la respuesta de la membrana basilar a un estímulo sonoro se puede modelar como el oscilador armónico y, como se mostró en el capítulo anterior, las onda senoidales son soluciones para este modelo. El ancho de la membrana basilar es variable y por esta razón distintas secciones de la misma vibrarán a diferentes frecuencias. De esta manera, la membrana basilar distingue las componentes senoidales de cada sonido entrante y las reporta al cerebro. El comportamiento fisiológico

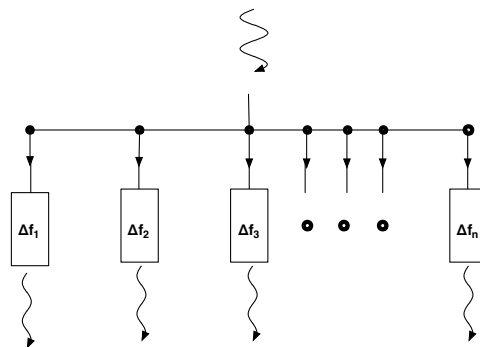


Figura 2.1: Arreglo de filtros $\{\Delta f_n\}$, en el que cada componente permite el paso de un segmento de banda entrante.

del oído es muy parecido al de un banco de filtros (figura 2.1), el oído separa en varios anchos de banda los sonidos entrantes sin distinguir diferencia alguna entre las fases relativas de cada una de las componentes armónicas, esta observación es conocida como la *Ley Acústica de Ohm*.

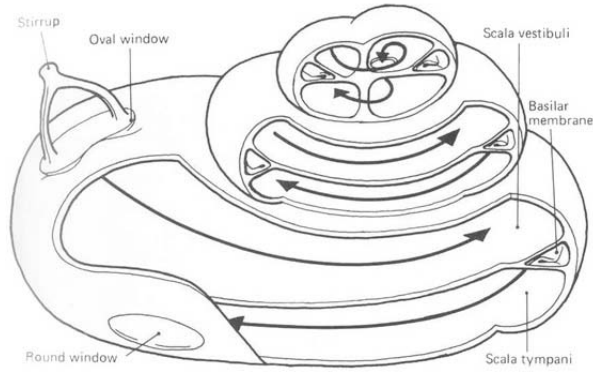


Figura 2.2: La cóclea.

2.3. La banda crítica

Los mecanismos de percepción tonal no son perfectos, es muy importante determinar qué tan preciso es el sistema auditivo para discriminar entre componentes espectrales de un sonido. En el caso de parciales con frecuencias cercanas, el oído no podrá distinguir entre las dos, este fenómeno se manifiesta sensorialmente por medio de la percepción de batimientos, los cuales aparecen cuando la distancia entre frecuencias es (aproximadamente) menor a 12.5 Hz. Si se aumenta la distancia a más de 15 Hz se escucha un tono áspero, al seguir aumentando la diferencia la percepción de aspereza desaparece y da lugar a la aparición de dos tonos distintos. El intervalo de banda en donde cambia la percepción de aspereza a dos tonos distintos es llamado *banda crítica*, y los resultados experimentales sugieren que en promedio toma los mismos valores para todas las personas. En la Figura 2.3 se muestran valores promedio para la banda crítica en función de la frecuencia central.

2.4. La percepción de altura tonal

La mayoría de los instrumentos musicales tiene la capacidad de producir notas en distintos tonos. El estudio de los mecanismos que asignan un tono a cada nota musical es fundamental para comprender las causas de la consonancia sensorial. En el caso de sonidos armónicos en los que ninguna parcial se anula, el proceso de asignación de altura tonal es similar al descrito para ondas puras: los timbres armónicos se asociarán al tono correspondiente con

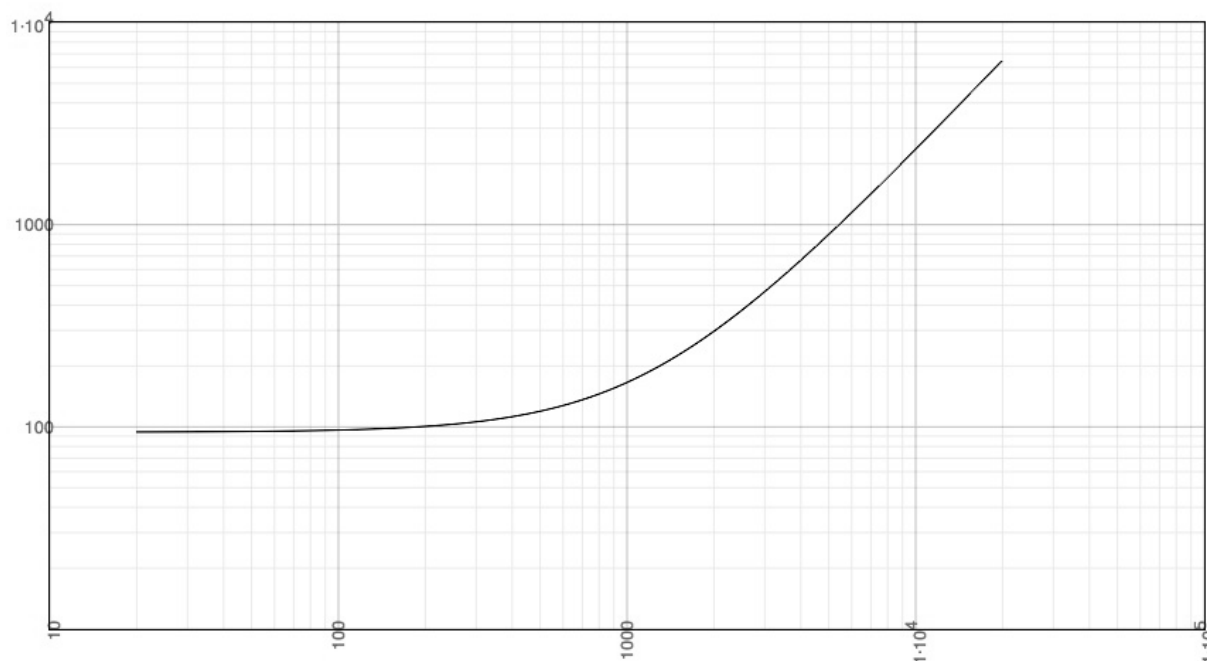


Figura 2.3: Banda Crítica en función de la frecuencia central.

la frecuencia fundamental. Cuando el sistema auditivo procesa sonidos inarmónicos o en los cuales faltan una o más parciales, el proceso de asignación tonal no está completamente entendido y muestra un comportamiento complejo, por ejemplo: dos timbres con espectros distintos $t_1 = \{f, 3f, 5f, 7f, 9f, \dots\}$ y $t_2 = \{3f, 5f, 7f, 9f, \dots\}$ se percibirán con el mismo tono f . La percepción tonal es un tema de discusión activa en la psicoacústica y aún no ha sido completamente explicado.

2.5. Batimientos

Como se expuso en la sección anterior, según Helmholtz el oído funciona como un analizador armónico, es decir, el sistema auditivo es capaz de determinar el contenido espectral de un sonido por medio de ciertos mecanismos fisiológicos. Los resultados experimentales muestran que parejas de senoidales, cuyas frecuencias se encuentran dentro un intervalo pequeño, serán percibidas como un solo tono. En la sección 1.4 se mostró un resultado sobre la combinación lineal de funciones trigonométricas que será útil para explicar la manera en que se perciben dos tonos puros con frecuencias cercanas.

Como primera aproximación se puede pensar en el siguiente experimento que es fácil de recrear: cuando se producen dos tonos con frecuencias 440 Hz y 450 Hz, lo que una persona percibe es un tono con frecuencia constante pero en trémolo. Una explicación matemática del fenómeno puede ser obtenida representando cada tono como una senoidal, en este caso $\sin 2\pi 440t$ y $\sin 2\pi 450t$, al sumar ambas y usando el resultado obtenido en (1.15), obtenemos la expresión $2 \sin 445t \sin 5t$, una función que representa una onda con frecuencia de 445 Hz y una amplitud que varía continuamente de 0 a 2, en donde la variación de la amplitud es periódica con una frecuencia de 10 Hz. La razón por la cual la variación de amplitud no es 5 Hz es que el oído no puede distinguir las fases positiva y negativa de la señal moduladora de 5 Hz. Este resultado coincide con nuestra percepción de un tono en trémolo, la variación de amplitud explica los cambios periódicos en el volumen del tono. Regresando a la ecuación 1.15, la modulación de la amplitud o efecto de trémolo está expresada en función de la diferencia de frecuencias.

2.6. Enmascaramiento

El enmascaramiento es otra de las formas en las que el sistema auditivo genera inconsistencias entre percepción y realidad física; en algunos casos cuando se perciben dos tonos con frecuencias distintas, un tono evita que el otro sea escuchado. Los resultados experimentales muestran que existe un umbral alrededor del tono central que determina si la amplitud de tonos cercanos es suficiente como para no ser cubiertos por el otro. Por ejemplo, cuando se produce una senoidal de 1000 Hz a 60 db este oculta a un tono con frecuencia de 750 Hz y amplitud de 35 db, lo mismo sucede con una senoidal de 1500 Hz y 35 db. La figura 2.4 muestra el cambio en el umbral del escucha cuando se percibe un tono de 1000 Hz, la línea punteada indica el umbral del escucha cuando no hay tonos presentes.

2.7. Tonos de combinación

En 1754 el violinista Giuseppe Tartini descubrió que cuando dos ondas puras son escu-

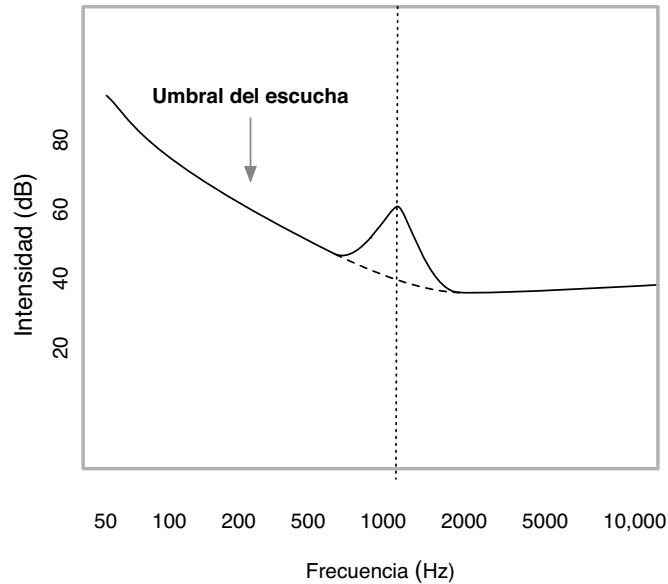


Figura 2.4: *Decibeles necesarios para pasar el umbral de escucha en función de la frecuencia cuando se percibe un tono de 100 Hz a 60dB.*

chadas al mismo tiempo un tercer tono es percibido, además, observó que el tercer tono tenía una frecuencia igual a la diferencia entre las dos notas originales. Posteriormente, Helmholtz descubrió que también se puede percibir un cuarto tono más grave y con frecuencia igual a la suma de las dos frecuencias originales. El hecho de que el tono de suma sea más difícil de percibir está relacionado con el enmascaramiento discutido en la sección anterior.

La aparición de tonos de combinación, como han sido llamados los tonos de diferencia y suma, es un fenómeno psicoacústico que, erróneamente, suele relacionarse con la aparición de batimientos y, por lo tanto, con la consonancia de algunos intervalos musicales. El hecho de que la frecuencia de los batimientos sea igual a la diferencia entre frecuencias sólo podría explicar la aparición de los tonos de diferencia y no la de los tonos de suma. Además, los tonos de diferencia sólo se pueden escuchar cuando al menos uno de los dos oídos procesa ambas señales; en el caso de los batimientos, aparecen incluso cuando los tonos se perciben en oídos distintos. Es por esta razón que en el modelo de disonancia sensorial que será presentado a continuación no se incorpora la aparición de tonos de combinación.

2.8. Consonancia sensorial y las curvas de Plomp-Levelt

La palabra disonancia suele tener distintas definiciones dependiendo del contexto en que sea utilizada. La definición de disonancia que será utilizada en esta tesis se refiere a la *disonancia sensorial*, o el grado en el que un sonido genera aspereza auditiva.

En la década de los sesenta, en el artículo *Tonal Consonance and Critical Bandwidth*, R. Plomp y W. Levelt [14] publicaron resultados experimentales sobre la percepción de aspereza y batimiento en ondas puras. En el artículo se desarrolla un modelo que explica la consonancia que generan ciertos intervalos musicales.

Los autores midieron experimentalmente la percepción de consonancia para parejas de ondas senoidales que varían en su frecuencia. En la figura 2.5 se muestra el promedio de valores de disonancia obtenidos, en el eje horizontal se encuentran valores correspondientes a la banda crítica y en el eje vertical la disonancia percibida. En este caso se puede suponer que un tono se mantiene fijo y el otro varía en su frecuencia, ambos con la misma amplitud.

Sobre la Figura 2.5 hay tres detalles importantes:

- No existen puntos de consonancia que sean “privilegiados”, salvo el unísono que es un mínimo local.
- La disonancia toma el valor máximo en un punto cercano al valor .24.
- La aspereza tiende a 0 cuando la diferencia de frecuencias es mayor a .24.

La forma de la curva varía un poco al cambiar de frecuencia base, en la figura 2.6 se han graficado las distintas formas que adquiere en función de la frecuencia base. Los datos observados para tonos puros no muestran ningún intervalo que sea particularmente consonante, lo que indica que el fenómeno de la consonancia tiene que ser estudiado con sonidos más complejos. Plomp y Levelt proponen que la disonancia total asociada a un tono se calcule sumando las disonancias entre cada pareja de parciales. En la Figura 2.7 se muestran las curvas obtenidas para dos timbres con seis armónicos, se muestra cómo varía la disonancia en función de la longitud del intervalo entre ambos tonos. Existen puntos de máxima consonancia local en

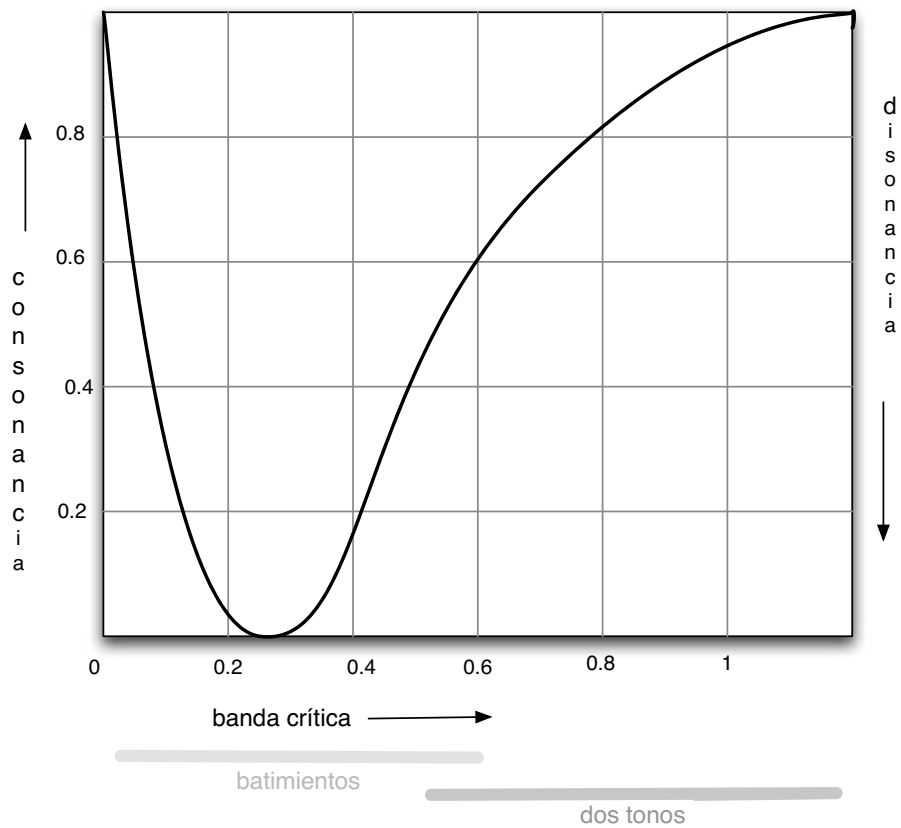


Figura 2.5: Curva de disonancia para una pareja de sinusoidales en función de la banda crítica.

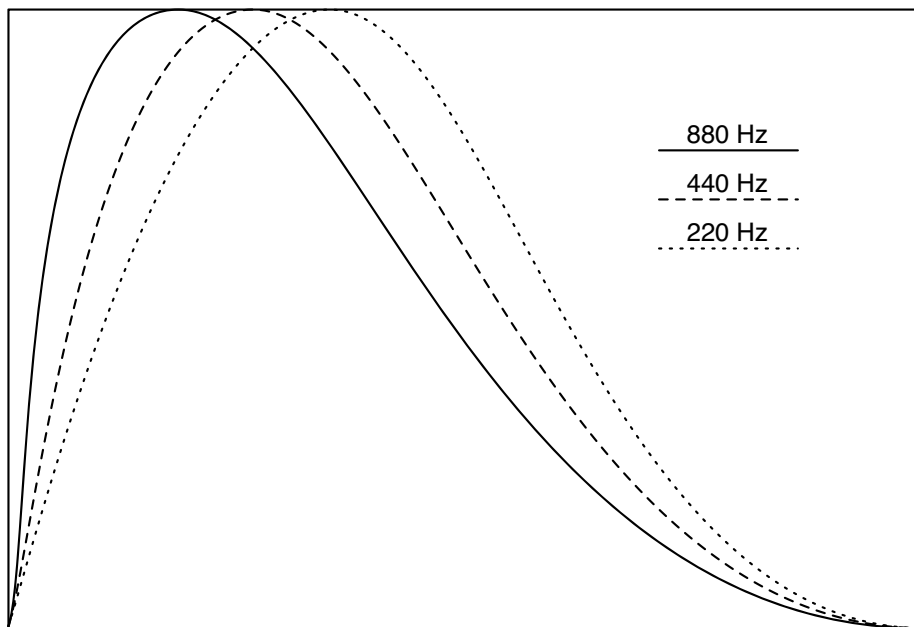


Figura 2.6: Disonancia para distintas frecuencias centrales.

donde el cociente entre las frecuencias fundamentales de ambos tonos es cercano a razones entre números enteros pequeños.

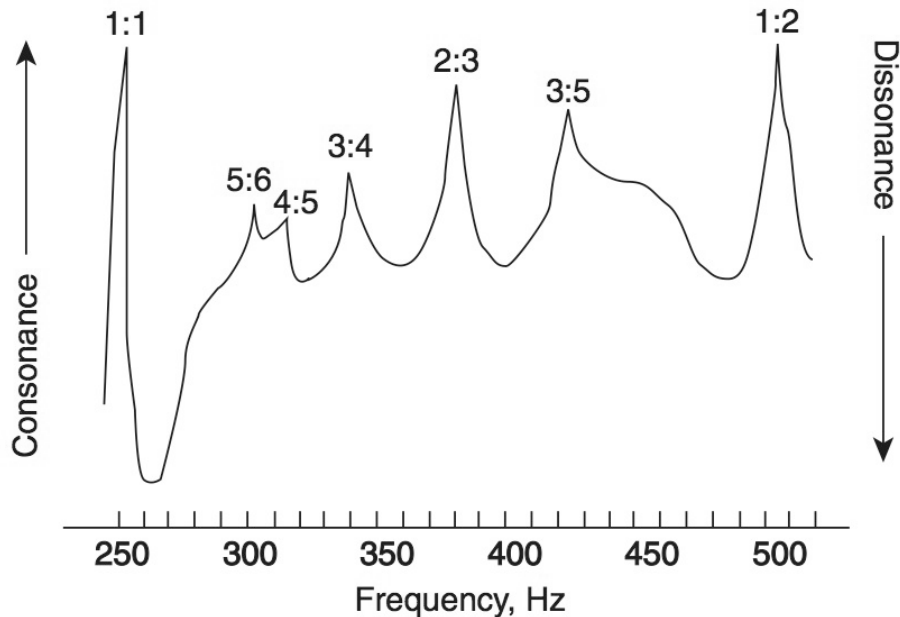


Figura 2.7: Consonancia de dos tonos complejos en función de su intervalo. Fuente: [14].

2.8.1. La disonancia es necesaria en la práctica musical

La interacción entre disonancia y consonancia es esencial para la creación de obras musicales interesantes, si no fuera el caso, las mejores composiciones musicales estarían formadas sólo por intervalos como la quinta y la octava. Por otro lado, también existe un factor de acondicionamiento psicológico que modifica nuestra percepción sobre los que es estéticamente agradable; naturalmente, los intervalos que resulten más familiares tenderán a ser juzgados como más consonantes.

La percepción de batimientos y rugosidad para sonidos con frecuencias cercanas, que es un fenómeno completamente psicoacústico, es necesariamente una característica tímbrica que se desee evitar. Los estudios musicológicos de Pantelis Vassilakis [19] muestran ejemplos concretos de instrumentos, como la *tambura* hindú o el *mikwiz* del mediterráneo, que buscan generar cierta rugosidad auditiva. Por lo tanto, existen elementos considerados disonantes

en el occidente que forman parte de la expresividad musical adoptada en otras partes del mundo.

Capítulo 3

Escalas musicales

El conjunto de frecuencias audibles es infinito y se concentra en el rango de los 20 Hertz a los 20000 Hertz. En la mayoría de los casos la práctica musical se ha centrado en colecciones finitas de notas; por un lado, sólo algunos instrumentos poseen la capacidad de generar un número infinito de notas, además, no todos los intervalos en el continuo de tonos resultan agradables al oído. El uso de colecciones de notas como base de la creación musical es una característica recurrente en la historia y representa un tema de gran interés en la musicología.

En este capítulo se presentan ejemplos de escalas musicales históricamente notables como la escala pitagórica o el temperamento igual de 12 tonos. En todos los casos se muestra una estructura generativa que determina la elección de ciertos subconjuntos finitos del conjunto de tonos audibles. Finalmente, tomando como punto de partida el modelo de Plomp y Levelt presentado en el capítulo anterior, se define una relación entre un timbre periódico y una escala musical.

3.1. El espacio de tonos

Cualquier subconjunto A del conjunto de tonos $[20, 20000]$ será definido como una *escala musical*.

Si \mathbb{T} representa el conjunto de todos los timbres periódicos audibles, cada elemento de este conjunto puede ser representado como una serie de Fourier que involucre frecuencias en

el rango $[20, 20000]$,

$$\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin(f_n t + \phi_n)), \quad nx \in [20, 20000].$$

Como se expuso en la sección 2.4, la asignación de tonalidad para timbres armónicos está determinada por la frecuencia fundamental de cada timbre. En este caso, el estudio de las escalas musicales se simplifica si consideramos que los timbres generalmente¹ se corresponden con una frecuencia dada la función de tonalidad 2.4 $Ton : \mathbb{T} \rightarrow [20, 20000]$ que es una función suprayectiva del espacio de timbres al conjunto de tonos audibles.²

La siguiente relación de equivalencia está definida en el espacio de todos los tonos audibles

$$a \sim b \leftrightarrow Ton(a) = Ton(b).$$

Cada número real en el conjunto $[20, 20000]$ representa a una clase de equivalencia, por lo tanto, existe una biyección entre T/\sim y $[20, 20000]$. El orden natural $([20, 20000], \leq)$ define una relación de orden en el espacio de tonos; $a \leq b$, se lee “ b es más alto que a ”.

Dado que el intervalo de la octava se obtiene multiplicando frecuencias por dos, esto sugiere que la percepción de tonalidad tiene una naturaleza logarítmica sobre las frecuencias; por lo tanto, resulta natural definir una métrica I de la forma $I(a, b) = \ln\left(\frac{\max\{a, b\}}{\min\{a, b\}}\right)$. Considerando la métrica I , existe una relación de equivalencia muy común que define el intervalo de la octava. Se dice que dos tonos se encuentran separados por una *octava* si $I(a, b) = \ln 2$, la relación de equivalencia generada por la octava es

$$a \sim_{oct} b \leftrightarrow \frac{a}{b} = 2^n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Cuando $I(a, b) = n \ln 2$, decimos que a y b se encuentran separados por n octavas.

¹Existen sonidos que no pueden ser asociados con una tonalidad, como el sonido de la consonante s . Las técnicas expuestas en esta tesis sólo se aplican a sonidos que tienen una tonalidad bien definida.

²Trivialmente $Ton(\sin ax) = a \quad \forall a \in [20, 20000]$, por lo tanto $Ton(t)$ es suprayectiva.

3.1.1. Cents

Existe una medida alternativa para asignar una longitud a los intervalos musicales llamada *cents*. Dadas dos frecuencias a y b , si $a \geq b$, el intervalo entre ellas expresado en *cents* es $c(\frac{a}{b}) = 1200 \log_2(\frac{a}{b})$.

La conversión a cents facilita la transposición de intervalos, que se convierte en una suma:

$$c\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'}\right) = 1200 \log_2\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'}\right) = 1200 \log_2\left(\frac{a}{b}\right) + 1200 \log_2\left(\frac{a'}{b'}\right) = c\left(\frac{a}{b}\right) + c\left(\frac{a'}{b'}\right).$$

Dada un intervalo de c cents y una frecuencia a , la otra nota b que define al intervalo c es

$$b = a \cdot 2^{\frac{c}{1200}}.$$

Una escala musical $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ³, determina el conjunto de intervalos en cents (tomando a a_1 como nota base o raíz)

$$I_A = \left\{ 1200 \log_1\left(\frac{a_1}{a_2}\right), 1200 \log_1\left(\frac{a_2}{a_3}\right), \dots, 1200 \log_1\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \right\}.$$

3.2. La escala pitagórica

La escala pitagórica es una de las escalas más antiguas que se conocen y sus orígenes preceden a Pitágoras. Comúnmente se relata que Pitágoras observó que, para parejas de cuerdas en vibración, se obtenían resultados particularmente agradables cuando el cociente entre las longitudes de ambas cuerdas se puede representar por fracciones simples. Pitágoras observó que el intervalo representado por la razón $2 : 1$ era el más consonante de todos, seguido por el intervalo correspondiente a la razón $3 : 2$, así construyó una escala a basada en estas dos razones.

La escala pitagórica se obtiene agregando y restando intervalos correspondientes a la razón $3 : 2$, a partir del unísono,

$$\bar{\mathbb{P}} = \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\},$$

³Suponiendo que el conjunto A ha sido ordenado, esto es $a_i > a_j$ si $i > j$.

equivalentemente,

$$\bar{\mathbb{P}} = \left\{ \dots, \frac{128}{2187}, \frac{64}{729}, \frac{32}{243}, \frac{16}{81}, \frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \frac{729}{64}, \frac{2187}{128}, \dots \right\}.$$

El conjunto $\bar{\mathbb{P}}$, generado por la sucesión infinita de quintas, nunca tendrá dos puntos distintos $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ y $\left(\frac{3}{2}\right)^m$ que estén separados por un número exacto de octavas⁴, por lo tanto, el conjunto $\bar{\mathbb{P}}/\sim_{oct}$ es infinito.

Si se expresa cada fracción como un número en el intervalo $[1, 2)$ utilizando la equivalencia de la octava, la escala pitagórica es el conjunto

$$\bar{\mathbb{P}} = \left\{ \dots, \frac{4096}{2187}, \frac{1024}{729}, \frac{256}{243}, \frac{128}{81}, \frac{32}{27}, \frac{16}{9}, \frac{4}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{64}, \frac{243}{128}, \frac{729}{512}, \frac{2187}{2048}, \dots \right\}.$$

La escala pitagórica de 12 tonos se basa en el hecho de que las fracciones $\frac{729}{512}$ ($\cong 1.4238$) y $\frac{1024}{729}$ ($\cong 1.4046$) son cercanas, es decir, agregar seis veces el intervalo correspondiente a la razón 3 : 2 lleva casi a la misma nota que restar seis veces el mismo intervalo. Así, la escala pitagórica de 12 tonos está caracterizada por la colección de intervalos

$$\mathbb{P}_{12} = \left\{ \frac{1024}{729}, \frac{256}{243}, \frac{128}{81}, \frac{32}{27}, \frac{16}{9}, \frac{4}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{64}, \frac{243}{128} \right\},$$

el subconjunto $\mathbb{P}_7 = \left\{ 1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128} \right\}$ es llamado escala pitagórica de siete tonos.

La sucesión de intervalos correspondientes a la razón 3 : 2 no genera intervalos que son necesariamente consonantes, especialmente si se utilizan notas que no se encuentren en \mathbb{P}_7 . Por ejemplo: la razón entre la primera y segunda nota es $\frac{3}{2}$ y juntas producirán un sonido armonioso en un piano; en cambio, las notas correspondientes a las razones $\frac{1024}{729}$ y $\frac{256}{246}$ generan un intervalo (cercano a la razón 3 : 2) que es altamente disonante, es por esta razón que la transposición de armonías es complicada en la escala pitagórica.

⁴Si suponemos lo contrario, obtenemos una contradicción:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)^m} = 2^l \Rightarrow 3^{n-m} = 2^{l+m-n} \Rightarrow n = m, l = 0!$$

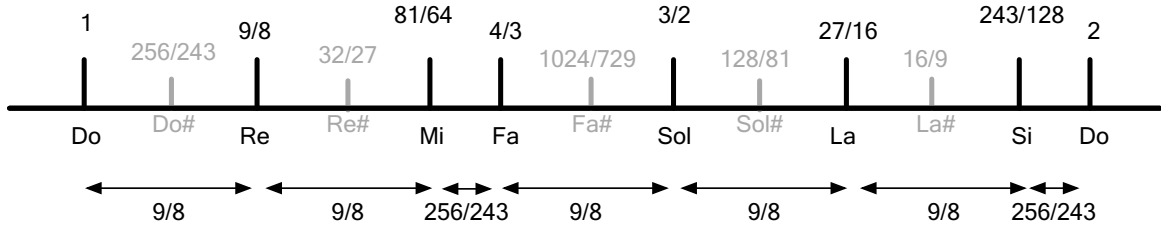


Figura 3.1: *Intervalos de la escala pitagórica.*

3.3. Entonaciones justas

La escala diatónica justa es históricamente notable y se basa en los acordes mayores de la forma $\{1x, \frac{3}{2}x, \frac{5}{4}x \mid x \in [20, 20000]\}$. Partiendo del unísono se obtienen los intervalos $\{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\}$, partiendo del intervalo de la quinta ($\frac{3}{2}$) se obtiene la triada $\{\frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{9}{8}\}$ y el intervalo de la cuarta ($\frac{4}{3}$) se genera la triada $\{\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\}$. Este proceso produce una escala diatónica que conserva triadas puras, aunque en muchos casos los cambios de tonalidad son disonantes.

En general, cualquier escala que esté definida por medio de razones entre números enteros es llamada una entonación justa, las entonaciones justas son implementadas considerando una tonalidad específica y no son aptas para transiciones armónicas.

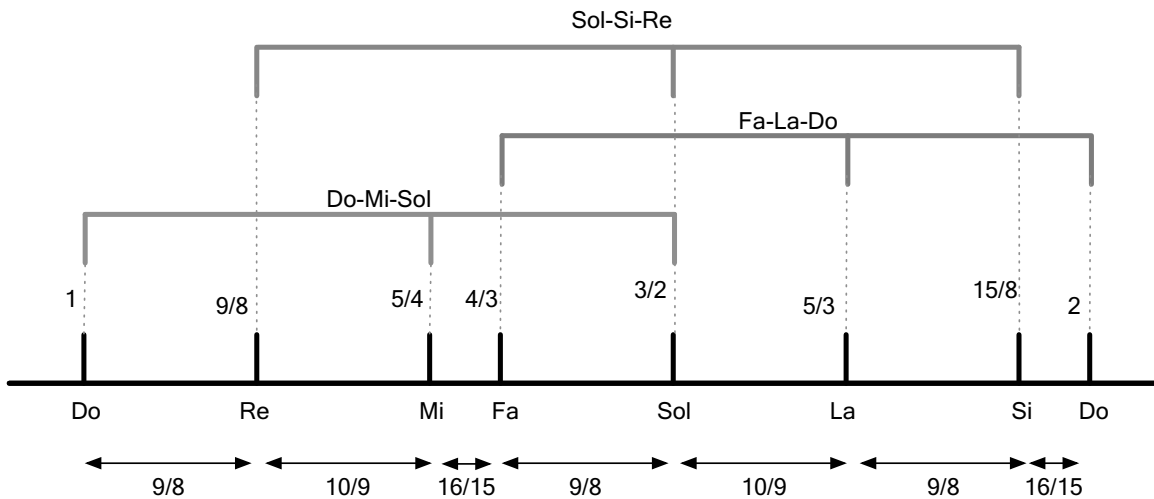


Figura 3.2: *Entonación justa y las triadas que la generan.*

3.3.1. El p-límite

Las entonaciones justas se pueden catalogar por la cantidad de números primos que se

utilicen en la definición de sus intervalos, si una entonación justa utiliza los primeros n números primos, diremos que la entonación está basada en el n -límite. La escala pitagórica está basada en el 3-límite, existen afinaciones como la de Harry Parch basada en el 11-límite y la afinación utilizada por La Monte Young en *The Well Tuned Piano* [20] está basada en el 7-límite.

3.4. El temperamento igual con 12 tonos

El Temperamento igual de 12 tonos, o 12 -*TET*, es la escala musical predominante en la música occidental. La notación musical y afinación actual de instrumentos se basan en ella. Representa una división uniforme de la octava en 12 tonos, partiendo del unísono

$$12 - TET = \{2^{\frac{n}{12}} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

considerando la equivalencia de la octava tenemos 12 clases de equivalencia (notas) distintas.

El intervalo entre cada nota es llamado un *semitono* y el intervalo que comprende dos semitonos es llamado un *tono*. El temperamento igual es una buena aproximación a la escala pitagórica, en ella la disonancia entre intervalos iguales es la misma sin importar la nota base, ya que los intervalos tienen una longitud uniforme. Las disonancias inherentes a la escala pitagórica se distribuyen de manera uniforme en cada nota en el temperamento igual de 12 tonos. La ausencia de intervalos altamente disonantes la convierte en una buena opción para la escritura armónica. En el Cuadro 3.1 se muestra una comparación entre la escala pitagórica, la entonación justa obtenida en 3.3 y el temperamento igual de 12 tonos.

Nota	12-TET	Pitagórica	Entonación Justa
Do	0	0	0
Do#	100	90	112
Re	200	204	204
Re#	300	294	316
Mi	400	408	386
Fa	500	498	498
Fa#	600	612	590
Sol	700	702	702
Sol#	800	792	814
La	900	906	884
La#	1000	996	996
Si	1100	1110	1088
Do	1200	1200	1200

Cuadro 3.1: Intervalos en cents de las escalas 12-TET, Pitagórica y Entonación Justa.

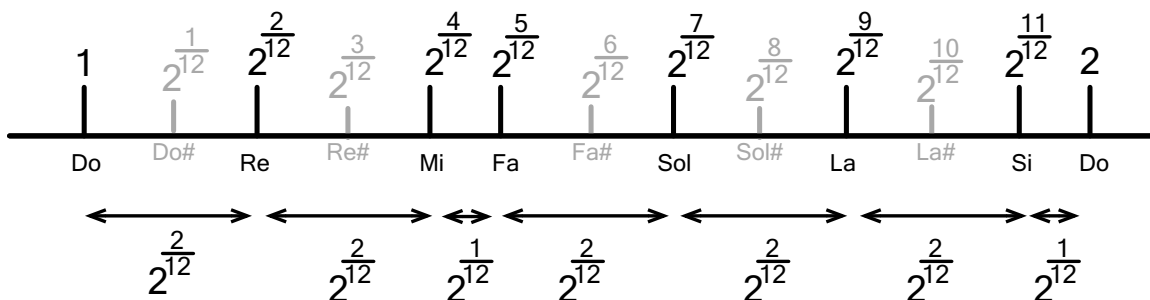


Figura 3.3: 12-TET.

3.4.1. Temperamento igual con n tonos

El *temperamento igual con n tonos* está definido como

$$n - TET = \left\{ 2^{\frac{i}{n}} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$$

y, dada la equivalencia de la octava, parte a dicho intervalo en n notas.

Existen varios temperamentos iguales que han sido utilizados en la práctica musical; los temperamentos 5-TET y 7-TET son comunes en la música tradicional de Bali y Tailandia. En general, cualquier refinamiento de 12-TET tendrá mejores aproximaciones a las quintas puras, como en el caso de 72-TET.

3.5. Temperamentos irregulares

La octava tiene una cualidad que la diferencia de cualquier otro intervalo; si en un piano suenan dos notas separadas por una octava, se podrán distinguir como dos tonos distintos y, al mismo tiempo, como la “misma nota”, una más alta que otra. Esta propiedad de la octava se manifiesta en la identificación de dos notas con frecuencias fundamentales distintas (una es el doble de la otra) con el mismo nombre.

La consonancia de la octava para timbres armónicos puede explicarse sencillamente si notamos que al transponer por una octava un timbre harmónico \mathbb{T} con parciales $\{f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f \dots\}$, obtendremos el timbre $2\mathbb{T}$ con parciales $\{2f, 4f, 6f, 12f, \dots\}$. Las parciales de $2\mathbb{T}$ coinciden con algunas de las parciales de \mathbb{T} y esta alineación de parciales es responsable de la percepción de fisión tonal que se percibe en el intervalo de una octava. Para timbres inarmónicos, la fisión tonal no tiene porqué darse en el intervalo de la octava, como se verá a continuación. Par los timbres con parciales $\{440, 860, 1203, 1683\}$ y $\{225, 440, 615, 860\}$, el intervalo entre sus frecuencias fundamentales es menor a una octava, sin embargo, se percibe consonante. Mientras que los timbres $\{440, 860, 1203, 1683\}$ y $\{220, 430, 602, 841\}$ generan una octava disonante. Este sencillo ejemplo muestra que para sonidos inarmónicos las escalas comúnmente usadas no necesariamente generan los intervalos más consonantes.

El ejemplo anterior es una prueba de que pueden existir escalas que no necesariamente se basen en la octava, estos temperamentos son llamados *temperamentos irregulares*. Las escalas *alfa* y *beta* de Wendy Carlos [5], así como la escala de Bohlen-Pierce, son ejemplos de temperamentos irregulares.

3.5.1. La escala Bohlen-Pierce

Como se ha visto anteriormente, la consonancia de la octava puede explicarse por medio de la alineación de parciales en sonidos armónicos. Al considerar un timbre \mathbb{T} constituido de parciales impares $\{f, 3f, 5f, 7f, \dots\}$, el timbre 2τ tendrá parciales pares $\{2f, 6f, 10f, 14f, \dots\}$ que no se alinean con las parciales del timbre original. La escala de Bohlen-Pierce [13] se basa en la observación de que el timbre 3τ tiene parciales, $\{3f, 9f, 15f, 21f, \dots\}$, que coinciden

con las parciales de τ . El intervalo correspondiente a la razón 3 : 1 fue llamado por John Pierce la *tritava*⁵. La escala de Bohlen-Pierce, o BP, es una división uniforme en 13 tonos de la tritava. La escala está determinada por la siguiente colección de intervalos

$$\mathbb{BP} = \{3^{\frac{n}{13}} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Se define una equivalencia similar a la octava, la *pseudo-octava*, que está determinada por la siguiente relación

$$a \sim_{tri} b \iff \frac{a}{b} = 3^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

dada la equivalencia de la tritava, el conjunto \mathbb{BP}/\sim_{tri} tiene 13 elementos. La Figura 3.4 muestra una comparación de las escalas Bohlen-Pierce y 12-TET. Se puede observar notar que pocos intervalos de la escala temperada de 12 tonos se aproximan a intervalos de BP; por otro lado, la escala de Bohlen-Pierce induce una partición de la octava muy cercana a 8-TET.

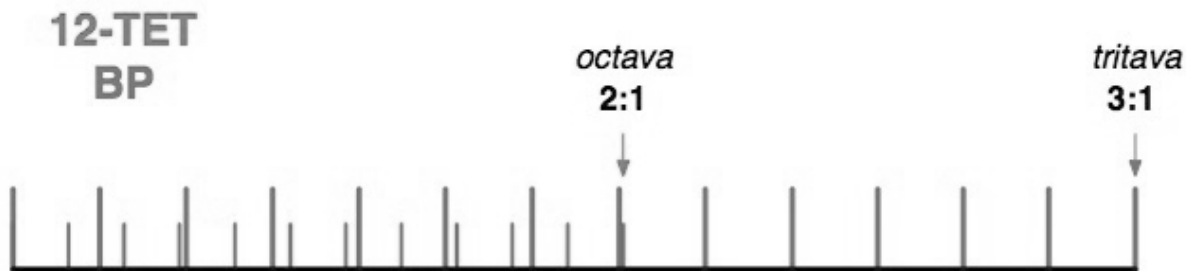


Figura 3.4: Escala de Bohlen-Pierce comparada con 12-TET.

3.6. Escalas musicales asociadas a timbres

En la sección 2.8 se describió un método para dibujar curvas de disonancia asociadas a parejas de timbres complejos. En las curvas de disonancia, los mínimos locales predicen intervalos de consonancia local que pueden ser utilizados para crear escalas musicales basadas en el

⁵

El término tritava es mío, una adaptación del original *tritave*, en inglés.

principio de consonancia sensorial. Las técnicas desarrolladas por Plomp y Levelt permiten dibujar una clara correspondencia entre timbres y escalas musicales. A continuación se presenta una formalización del concepto de disonancia

Definición 1: Sea $\delta(f_1, f_2, a_1, a_2)$ ⁶ una función de \mathbb{R}^4 en \mathbb{R} , decimos que δ es una función de disonancia para las ondas puras $\tau_1(t) = a_1 \sin(f_1 t + \phi_1)$ y $\tau_2(t) = a_2 \sin(f_2 t + \phi_2)$, si cumple con las siguientes propiedades para todo f_1, f_2, a_1 y a_2 :

i) $\delta(f_1, f_2, a_1, a_2)$ es continua.

ii) $\delta(f_1, f_2, a_1, a_2) = \delta(f_2, f_1, a_1, a_2)$.

iii) $\delta(f_1, f_2, a_1, a_2) = \delta(f_1, f_2, a_2, a_1)$.

iii) $\delta(f, f, a_1, a_2) = 0$.

iv) $\delta(f_1, f_2, a_1, a_2) \geq 0$.

v) Para \bar{f}, \bar{a}_1 y \bar{a}_2 fijos; la función de una sola variable $\delta(\bar{f}, \cdot, \bar{a}_1, \bar{a}_2)$ se cumple que

$$\operatorname{argmax}_{g \in \mathbb{R}} \delta(\bar{f}, g, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = \left\{ \bar{f} + \frac{1}{4}CB(\bar{f}), \bar{f} - \frac{1}{4}CB(\bar{f}) \right\}$$

en donde $CB(f)$ es la banda crítica asociada a la frecuencia f .

vi) Para \bar{f}, \bar{a}_1 y \bar{a}_2 fijos

$$\lim_{g \rightarrow +\infty} \delta(\bar{f}, g, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{g \rightarrow -\infty} \delta(\bar{f}, g, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0.$$

Definición 2: Dada una función de disonancia δ , timbres $\tau_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(f_i t + \phi_i)$ y $\tau_2 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \sin(g_i t + \phi_i)$, la función de disonancias agregadas \mathbb{D} es

⁶La expresión para la función δ no involucra las fases de cada onda, este hecho incorpora la Ley Acústica de Ohm implícitamente .

$$\mathbb{D}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \delta(f_i, g_j, a_i, b_j) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \delta(f_i, f_j, a_i, a_j) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \delta(g_i, g_j, b_i, b_j). \quad (3.1)$$

En la expresión para la función de disonancias agregadas, el segundo y tercer sumando representan las disonancias intrínsecas de τ_1 y τ_2 , el primer sumando representa la disonancia generada por la interacción entre las parciales de los dos timbres.

Definición 3: Para τ fijo, se define la función real $\mathbb{D}_\tau(x) : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ como

$$\mathbb{D}_\tau(x) = D(\tau, x\tau).$$

Análogamente, se puede calcular la disonancia entre dos timbres distintos τ_1 y τ_2 , suponiendo que uno se mantiene fijo mientras que el otro varía en una proporción α .

Definición 4: Diremos que un timbre t y una escala musical $A \in \mathbb{R}$ están *relacionados*⁷, si para todo $i \in I_A$ la función real $\mathbb{D}(\mathbb{T}, x\mathbb{T})$ tiene un mínimo local en $x = i$.

⁷Esta relación entre escalas musicales y curvas de disonancia fue postulada por Bill Sethares en [17].

Capítulo 4

Un modelo de disonancia en Pure Data

En este capítulo se presenta un modelo computacional de disonancia, para ello, primero se ofrecerá una parametrización de curvas de disonancia para parejas de tonos puros. El programa `parciales~`, implementado en Pure Data, permite dibujar curvas de disonancia y obtener escalas musicales asociadas a ellas. Al final del capítulo se muestran algunos resultados experimentales para distintos tipos de timbres.

4.1. Parametrización de las curvas de Plomp y Levelt

Los resultados experimentales de Plomp y Levelt [14] indican que, dado un par de ondas senoidales con frecuencias f_1 y f_2 , el intervalo correspondiente a la disonancia máxima se encuentra aproximadamente a una cuarta parte del ancho de banda crítico asociado a la frecuencia base $f = \min(f_1, f_2)$. Es decir, si la función de disonancia es $\delta(f_1, f_2)$ y $CB(f)$ es la función que asigna a cada frecuencia su ancho de banda crítico, la función de una variable $\delta(f_1, \cdot)$ alcanzará su máximo en la frecuencia f_2 que cumpla con la condición $f_2 - f_1 = .25CB(f_1)$.

En esta sección se propone una parametrización que permite ajustar los puntos de máxima disonancia de manera sencilla. A continuación se demostrarán tres proposiciones útiles.

Tres observaciones útiles

Consideramos la siguiente familia de funciones

$$\Upsilon = \left\{ f(x) = \frac{\alpha}{\beta} |x| e^{-\frac{1}{\beta}|x|} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Observación 1: Para toda $f \in \Upsilon$ se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Demostración:

Reagrupando, encontramos una expresión equivalente para $f(x)$

$$f(x) = \frac{\frac{\alpha}{\beta} |x|}{(1/e^{-\frac{1}{\beta}|x|})}$$

aplicando el Teorema de L'Hôpital, podemos calcular el límite cuando $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\frac{\alpha}{\beta} |x|)'}{(1/e^{-\frac{1}{\beta}|x|})'}$$

así

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\left(\frac{x e^{-\frac{1}{\beta}x}}{[e^{-\frac{1}{\beta}|x|}]^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{x}{e^{-\frac{1}{\beta}x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{-\frac{1}{\beta}x}}{\beta x} = 0$$

análogamente se puede probar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. ■

Observación 2: Los puntos críticos de f son β y $-\beta$, además $f(\beta) = f(-\beta) = \frac{\alpha}{e}$.

Demostración:

f es derivable en todo punto salvo el 0, para $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta}x} - \frac{\alpha}{\beta^2} x e^{-\frac{1}{\beta}x} & \text{si } x > 0 \text{ (Caso 1)} \\ -\frac{\alpha}{\beta} e^{\frac{1}{\beta}x} - \frac{\alpha}{\beta^2} x e^{-\frac{1}{\beta}x} & \text{si } x < 0 \text{ (Caso 2)} \end{cases}$$

En el primer caso, igualando la derivada con 0, obtenemos

$$\frac{\alpha}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta}x} - \frac{\alpha}{\beta^2} x e^{-\frac{1}{\beta}x} = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta}x} \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) = 0$$

como $\frac{\alpha}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta}x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{x}{\beta} = 0 \Leftrightarrow x = \beta$$

de manera análoga, para $x < 0$ tenemos que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\beta$.

Evaluando $f(x)$ en los puntos críticos β y $-\beta$, obtenemos

$$f(\beta) = \frac{\alpha}{\beta} |\beta| e^{-\frac{1}{\beta}|\beta|} = \frac{\alpha}{e} = \frac{\alpha}{\beta} |-\beta| e^{-\frac{1}{\beta}|-\beta|} = f(-\beta). \blacksquare$$

Observación 3: β y $-\beta$ son los puntos en los que se alcanza el máximo global de la función f .

Demostración:

De la primera observación tenemos que para cualquier número positivo ϵ , existe un número real positivo M , tal que si $|x| > M$ entonces $f(x) < \epsilon$. Tomando $\epsilon = \frac{\alpha}{e}$ se tiene que $f(x) < \frac{\alpha}{e}$ para cualquier x en el conjunto $(-\infty, -M) \cup (M, \infty)$. De la segunda observación, se deduce que en $[-M, M] - \{0\}$ el máximo global toma el valor $\frac{\alpha}{e}$ en los puntos $\beta, -\beta$. Por último, tenemos que $f(0) = 0$, entonces 0 no puede ser máximo global. En los puntos β y $-\beta$ se alcanza el máximo global de la función f . \blacksquare

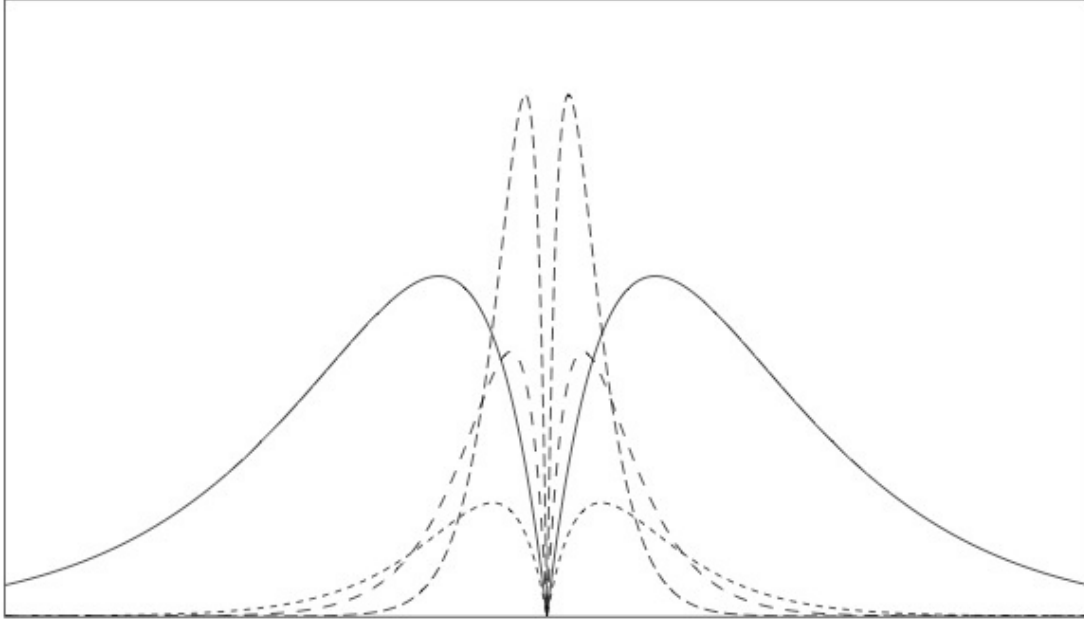


Figura 4.1: *La familia de funciones Υ .*

La tercera observación indica que el parámetro β permite ajustar el punto en donde las funciones alcanzan su máximo; un cambio en β no modifica el valor máximo de la función, que sólo depende del parámetro α .

Si la disonancia máxima se obtiene en un intervalo equivalente a una cuarta parte de la banda crítica, entonces necesariamente $\beta = .25CB(\min(f_1, f_2))$. Para que el valor máximo en todos los casos sea igual a 1 se debe cumplir $\alpha = e$. La función buscada es $\delta(\bar{f}_1, f_2) = \frac{e}{\beta} |f_2 - f_1| e^{-\frac{1}{\beta}|f_2 - f_1|}$.

Una parametrización para el ancho de banda crítico puede ser encontrada en Brinker [4] y está dada por la expresión $CB(\min(f_1, f_2)) = \frac{295}{\pi} + \frac{\min(f_1, f_2)^{1.5}}{445}$. La función $CB(f)$ fue utilizada para graficar la banda crítica en la Figura 2.3. Si se utiliza esta parametrización, dada una frecuencia base $\min(f_1, f_2)$, el punto de mayor disonancia estará en $f' = .25(\frac{295}{\pi} + \frac{\min(f_1, f_2)^{1.5}}{445})$. Sustituyendo f' por β en la función $\delta(f_1, f_2, a_1, a_2)$ obtenemos la expresión

$$\delta(f_1, f_2, a_1, a_2) = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot e}{.25(\frac{295}{\pi} + \frac{\min(f_1, f_2)^{1.5}}{445})} |f_2 - f_1| e^{-\frac{|f_2 - f_1|}{.25(\frac{295}{\pi} + \frac{\min(f_1, f_2)^{1.5}}{445})}}.$$

La parametrización obtenida en esta sección difiere de las parametrizaciones encontradas en la bibliografía consultada en el hecho de que no sólo depende de la distancia relativa entre frecuencias, también varía con el registro; además, considera la observación de que el punto de mayor disonancia entre dos tonos se encuentra cuando se encuentran a una cuarta parte del intervalo correspondiente al ancho de banda crítico.

4.2. Manual del usuario para `parciales~`

El modelo de disonancia de Plomp-Levelt se implementó en Pure Data¹, la parametrización obtenida en la sección 4.1 fue utilizada para calcular la disonancia entre dos timbres.

El nombre del programa es `parciales~.pd` y calcula la disonancia total entre dos timbres, tomando como datos sus espectros. Los timbres pueden tener hasta veinte parciales y el programa cuenta con una interface gráfica que permite identificar puntos de mínima y máxima disonancia.

El programa `parciales~` tiene integrado un analizador espectral que puede ser utilizado para estimar el espectro de un sonido, el análisis espectral se basa en el objeto `fiddle~` desarrollado por Miller Puckette[15]. En el caso de sonidos cuyas parciales varían poco en su amplitud el análisis espectral es exacto, para sonidos de corta duración o sonidos con espectros que varían a lo largo del tiempo el objeto `parciales~` falla en calcular su contenido espectral y es necesario utilizar herramientas más avanzadas como espectrogramas.

Modo manual

1. En el modo manual se debe capturar la información espectral de dos timbres en los recuadros **Espectro 1** y **Espectro 2**, antes de ingresar los datos en cada recuadro es importante seleccionar la cantidad máxima de parciales que serán utilizadas en el recuadro **Curvas**, este paso modifica el algoritmo utilizado en el cálculo de disonancia y, en el caso de timbres con pocas parciales, lo vuelve más eficiente. Al momento de calcular la disonancia el programa

¹Pure Data es un lenguaje de programación gráfico orientado a las aplicaciones en multimedia, el software es gratuito y puede encontrarse en la página web <http://puredata.info/>.

varía el espectro del segundo recuadro mientras el primero se mantiene constante.

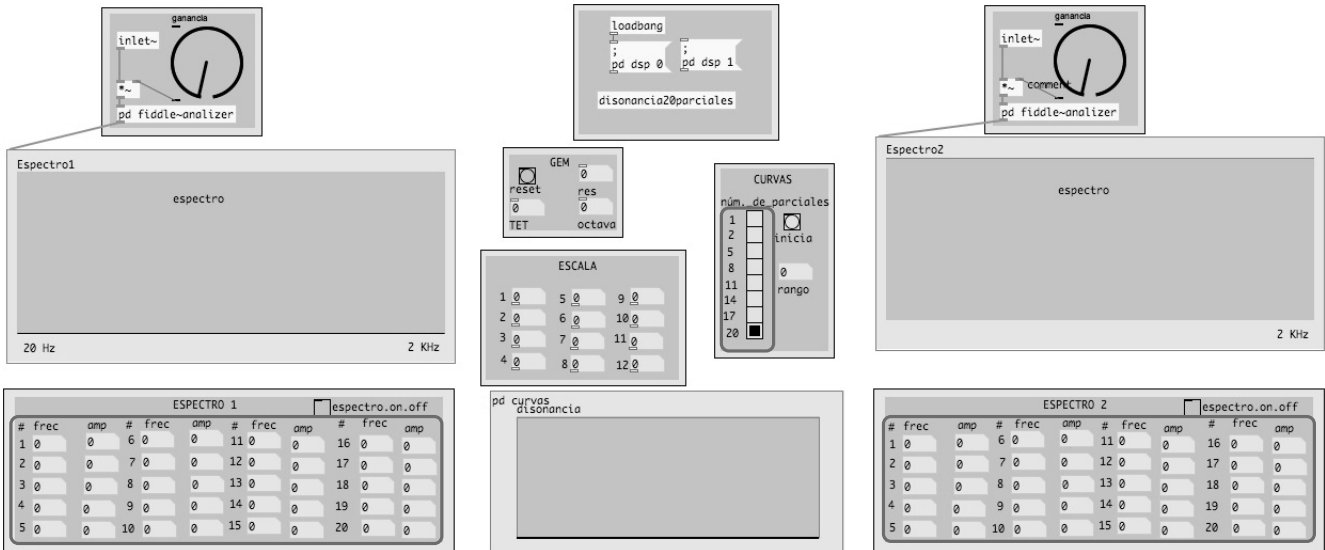


Figura 4.2: *Paso 1.*

2. Se debe seleccionar el rango en el que varía el segundo tono, es decir, el dominio de la función real $\mathbb{D}(\tau_1, \alpha\tau_2)^2$, dados τ_1 y τ_2 fijos . El valor que sea capturado en la entrada **rango** determinará el punto extremo derecho del intervalo $[1, x]$ en el que α toma valores.

3. Se puede agregar la opción para visualizar temperamentos regulares en pseudooctavas. Por ejemplo, si se desean ver los intervalos de 7-TET para la octava usual, se debe ingresar en la entrada **TET** el número de divisiones de la octava (en este caso sería 7) y en **Octava** se ingresa el intervalo que corresponde a la pseudooctava (en este caso es la octava usual y la entrada es 2).

4. En el recuadro **Curvas** se activa el botón **Inicia** para activar el cálculo de las curvas de disonancia.

²La función $\mathbb{D}(\tau_1, \alpha\tau_2)$ se definió previamente en la ecuación 3.1 de la sección 3.6.

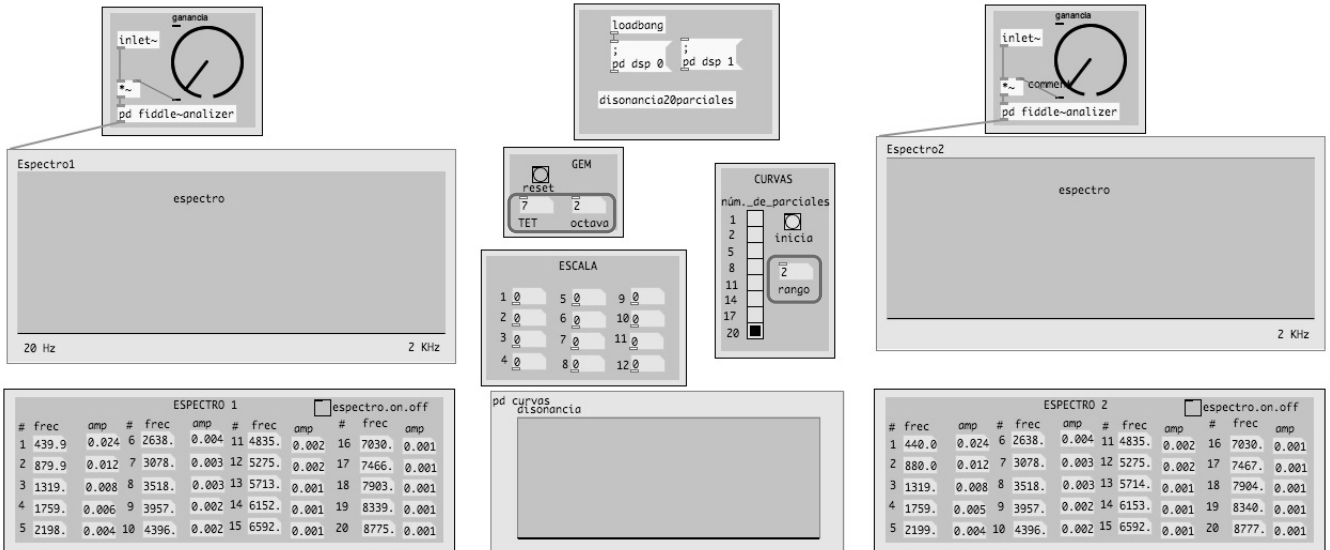


Figura 4.3: Pasos 2 y 3.

5. En la interface gráfica se pueden seleccionar hasta 12 puntos de interés, basta apuntar con el ratón y hacer click. Los puntos seleccionados aparecen en el recuadro **Escala**.

Los intervalos correspondientes al temperamento igual elegido previamente se indican con rectas de color azul. Para repetir este proceso basta seleccionar el botón cuadrado ubicado en la parte superior derecha de la ventana GEM. En la esquina superior derecha se indica con valores numéricos el valor de α correspondiente a la posición vertical del puntero.

Si se desea visualizar otro temperamento para la misma curva de disonancia se debe capturar la información y presionar el botón **Reset** en el recuadro **Gem**.

Modo con análisis espectral

2.1. El objeto `parciales~` permite conectar dos entradas de audio en Pure Data, correspondientes a dos timbres cuyo contenido espectral se quiere estimar.

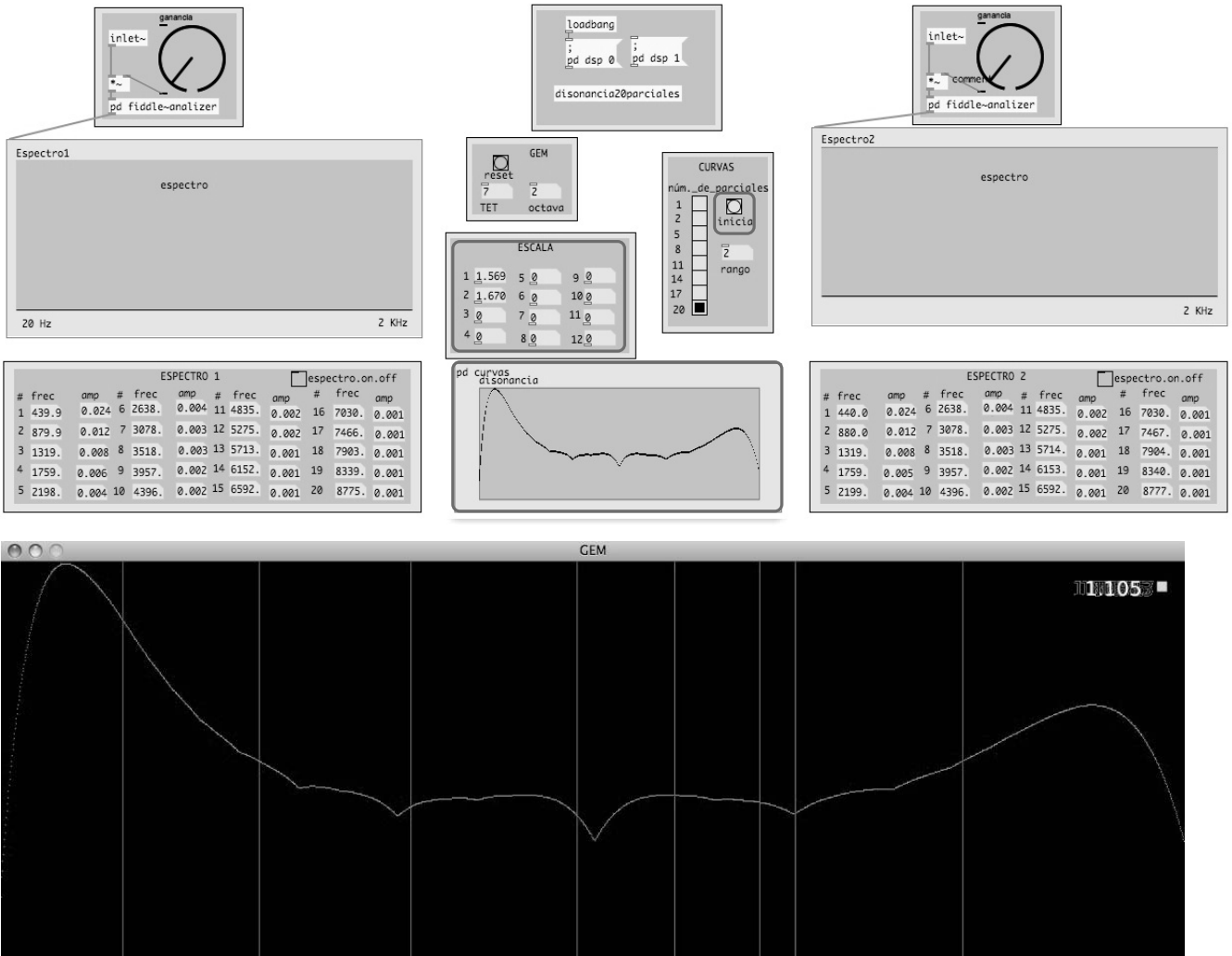


Figura 4.4: Pasos 4 y 5.

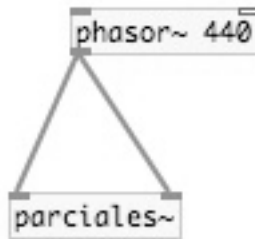


Figura 4.5: Entradas de audio del objeto `parciales~`.

2.2. Para iniciar el análisis se presiona el botón **espectro.on.off** (el análisis está activado cuando el botón muestra una X) y se puede ajustar la ganancia de la señal de audio con **ganancia**.

2.3. El analizador espectral arroja una serie de datos que se estabiliza a lo largo del tiempo y, por lo tanto, será más exacto si se activa por periodos largos de tiempo.³ Cuando se obtengan los resultados del análisis el analizador debe ser apagado.

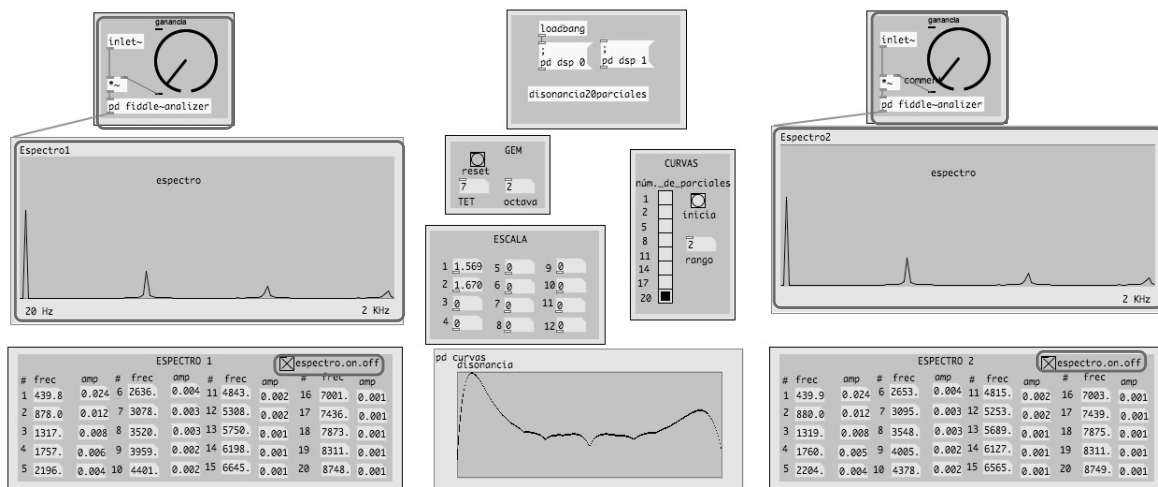


Figura 4.6: Pasos 2.2 y 2.3.

2.4. Una vez que se hayan estimado los espectros, se pueden calcular las curvas de disonancia de la misma forma que en el modo manual.

4.3. Resultados experimentales

El programa **parciales**~ permite estudiar una gran cantidad de parejas de timbres, a continuación se muestran cuatro casos para timbres armónicos e inarmónicos que ejemplifican la utilidad de **parciales**~ para encontrar intervalos de máxima consonancia.

³Minutosdsfsdf

4.3.1. Timbres armónicos

El estudio de timbres armónicos es de particular interés para corroborar que el modelo computacional desarrollado en `parciales~` es consistente con los resultados esperados. Se sintetizaron dos ondas en Pure Data correspondientes a una onda diente de sierra, ambas con frecuencia fundamental de 440 Hz. El análisis espectral arrojó los resultados esperados, con parciales cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

Las curvas de disonancia muestran que el intervalo de mayor consonancia es el de la octava, le siguen intervalos correspondientes a $\alpha = 3/2$, $\alpha = 4/3$, $\alpha = 5/3$ y $\alpha = 5/4$. Estos intervalos se corresponden con la quinta, la cuarta, la sexta y la tercera mayor de la entonación justa, intervalos que son considerados consonantes en la práctica musical. También se puede observar que los puntos de máxima consonancia pueden ser aproximados por puntos en la escala 12-TET.

4.3.2. Timbres inarmónicos

La mayoría de los instrumentos de percusión tiene espectros que no son armónicos, para este tipo de sonidos es interesante buscar escalas musicales distintas a 12-TET que contengan intervalos relacionados⁴ con su espectro. Algunos de los instrumentos utilizados en los conjuntos Gamelan, de Bali y Java, tienen espectros inarmónicos y están afinados en escalas de cinco tonos llamadas slendro. En la práctica musical occidental también existen instrumentos con timbres inarmónicos como la marimba y el vibráfono. A continuación se describen los resultados obtenidos en `parciales~` para el bonang y el vibráfono.

4.3.2.1. Bonang

El bonang es una colección de pequeños gongos en forma de cazuela hechos de bronce que el ejecutante golpea con palos de madera afelpados. Debido a su fabricación de manera artesanal, los timbres suelen tener espectros que varían de instrumento a instrumento, Sethares

⁴Ver sección 3.6.

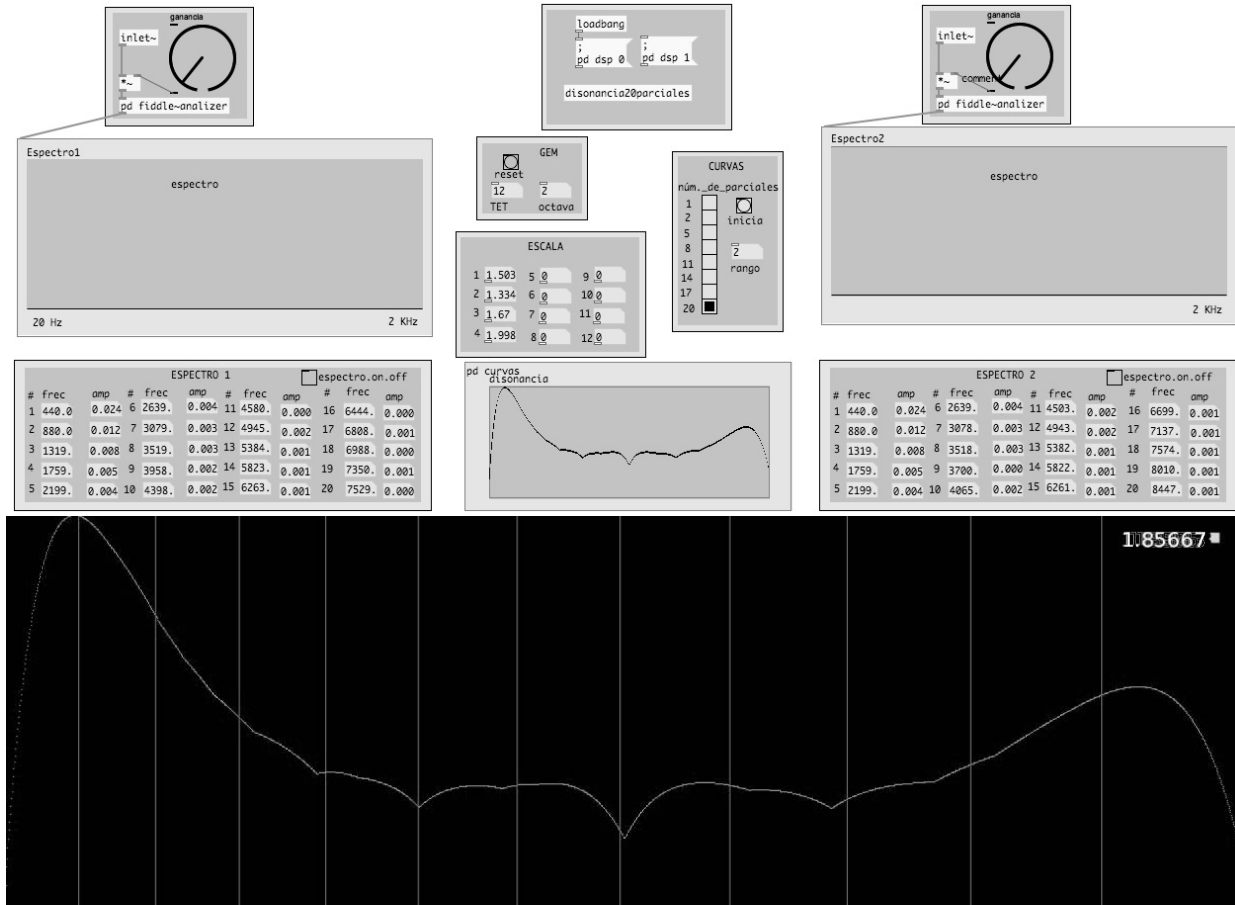


Figura 4.7: Curvas de disonancia para dos timbres armónicos.

[18] propone un espectro típico de Bonang

$$\mathbb{T}_B = \{f, 1.52f, 3.46f, 3.82f\}.$$

El bonang es afinado en la escala Slendro en la que cada intervalo está separado aproximadamente por 240 cents, lo que acerca a 5-TET. En los conjuntos gamelan también se utilizan instrumentos con espectros armónicos como el *rebab*, un instrumento de cuerdas, y el *suling*, un instrumento de viento.

La interacción entre timbres armónicos e inarmónicos puede ser investigada utilizando como herramienta las curvas de disonancia, es por esa razón que se introdujo el espectro del Bonang, con frecuencia fundamental de 200 Hz, en **parciales** y se configuró el programa para visualizar los intervalos de 5-TET. El dominio de la función de disonancia se fijó en

[1, 2], el segundo timbre utilizado para el cálculo de las curvas de disonancia fue un timbre armónico con frecuencia fundamental de 200 Hz y cuatro parciales.

Una rápida inspección a las curvas de disonancia muestra que los intervalos de 5-TET

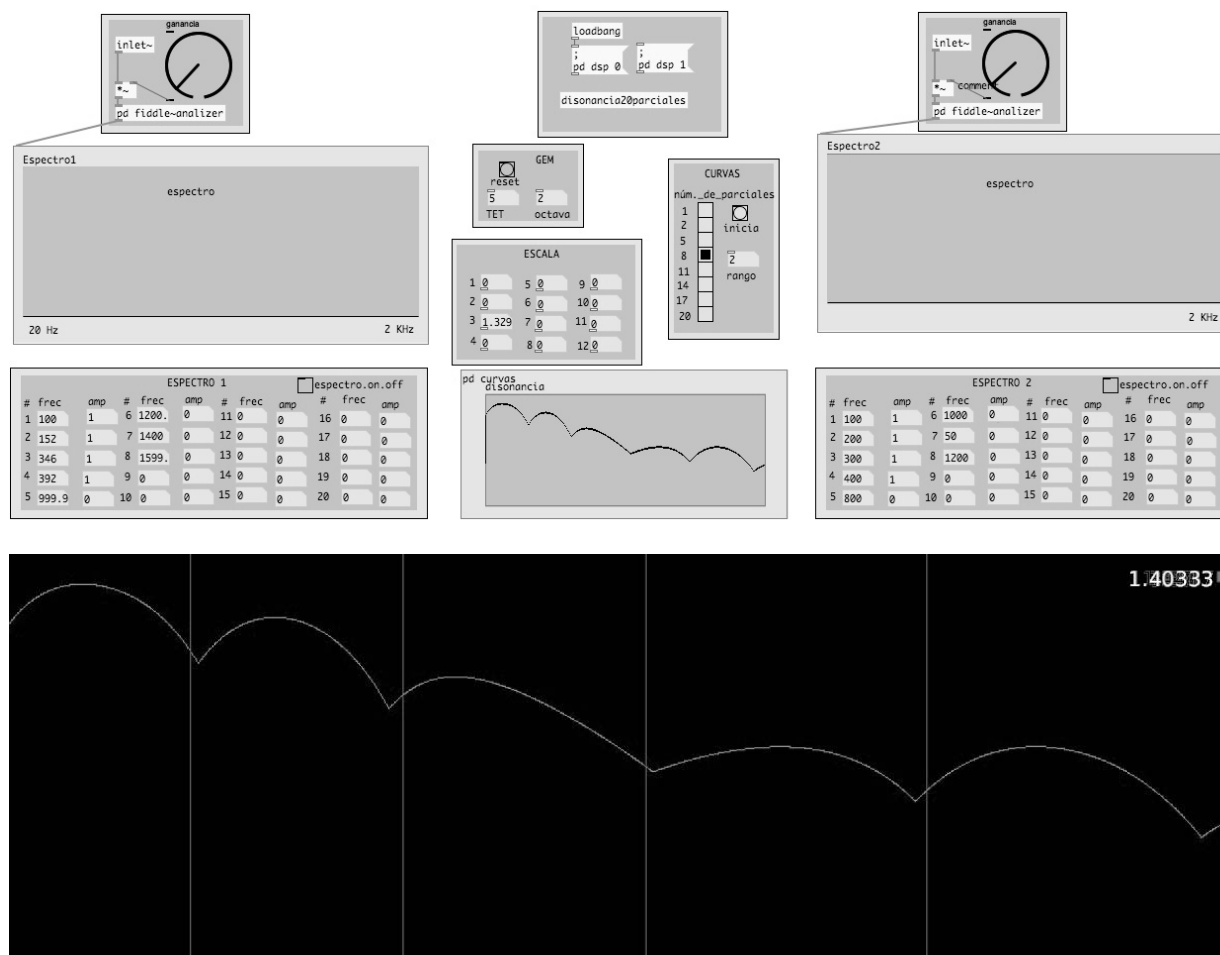


Figura 4.8: Disonancia para el Bonang y un timbre armónico.

aproximan a los intervalos que generan puntos de mínima disonancia local. El intervalo de la octava es el más alejado de los puntos de máxima consonancia y sugiere el uso de divisiones basadas en una pseudooctava cercana a la octava usual.

4.3.2.2. Xilófono

El xilófono es un instrumento de percusión ampliamente utilizado en la música clásica. La afinación más utilizada para este instrumento es 12-TET, pero se puede buscar una afinación

que sea más consonante con la ayuda de curvas de disonancia. Por un lado se puede buscar una afinación que sea consistente con el timbre del mismo instrumento y genere algunos acordes sensorialmente agradables, pero también se puede buscar una afinación que sea compatible con instrumentos cuyo timbre sea armónico. El espectro idealizado de un xilófono es⁵ $\tau_X = \{f, 2.75f, 5.40f, 8.93f, 13.34f, 18.64f\}$. Se analizó el espectro del xilófono con una frecuencia base de 100 Hz. en parciales[~] y se buscaron puntos de máxima consonancia local. El intervalo 1.966, cercano a la octava, y la división uniforme en 12 intervalos de esta

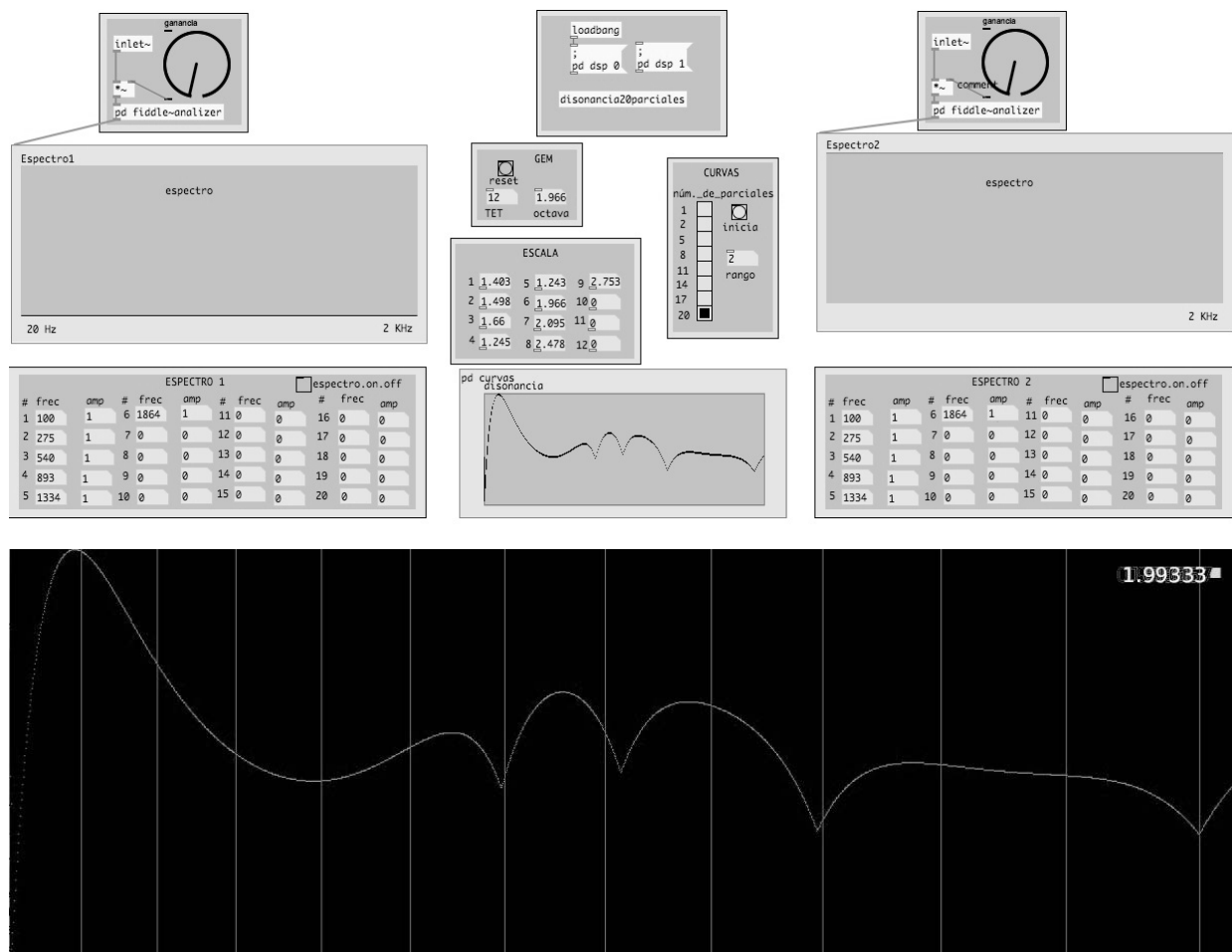


Figura 4.9: Disonancia para el xilófono.

pseudooctava generaron intervalos que se acercan a los puntos de máxima consonancia local. También se estudió la disonancia generada por la contraposición de un espectro armónico, con frecuencia fundamental de 100 Hz., y el espectro del xilófono. En este caso ni el unísono

⁵En [3] se encuentra un modelo físico del xilófono y las soluciones para el espectro.

ni la octava resultan ser puntos de consonancia local; los intervalos de máxima consonancia no se ajustaron a ninguna de las divisiones uniformes de la octava, esto sugiere la utilización de un temperamento irregular para el xilófono.

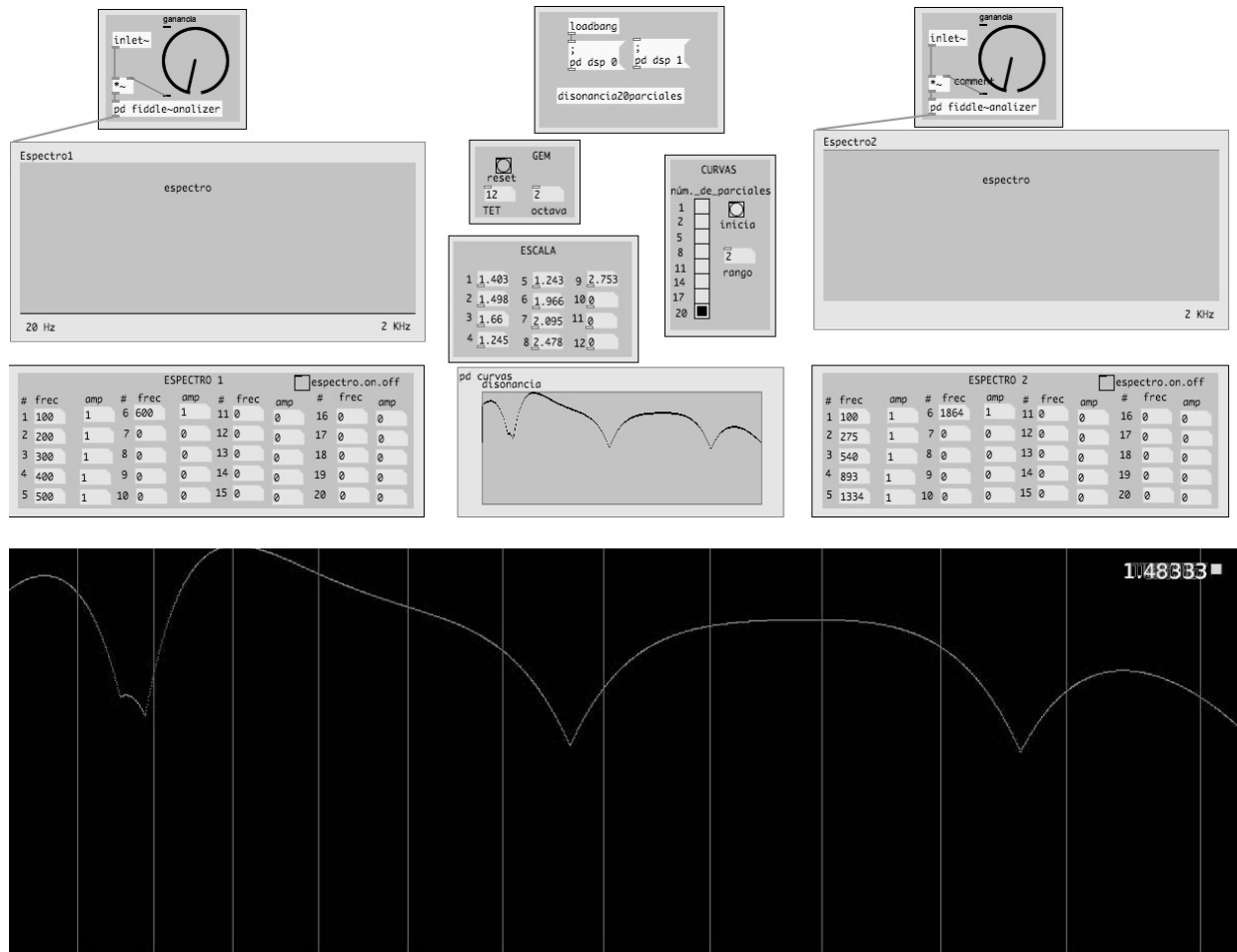


Figura 4.10: Curvas de disonancia para el xilófono y un timbre armónico.

4.3.3. Timbres con parciales impares

Como se expuso en la sección 3.5.1, el uso de timbres armónicos con parciales que son múltiplos impares de la frecuencia fundamental sugiere que la escala Bohlen-Pierce puede generar intervalos consonantes. Los resultados obtenidos en **parciales** coinciden con esta observación, los puntos de máxima consonancia local se encuentran en los intervalos de 13-TET para la tritava.

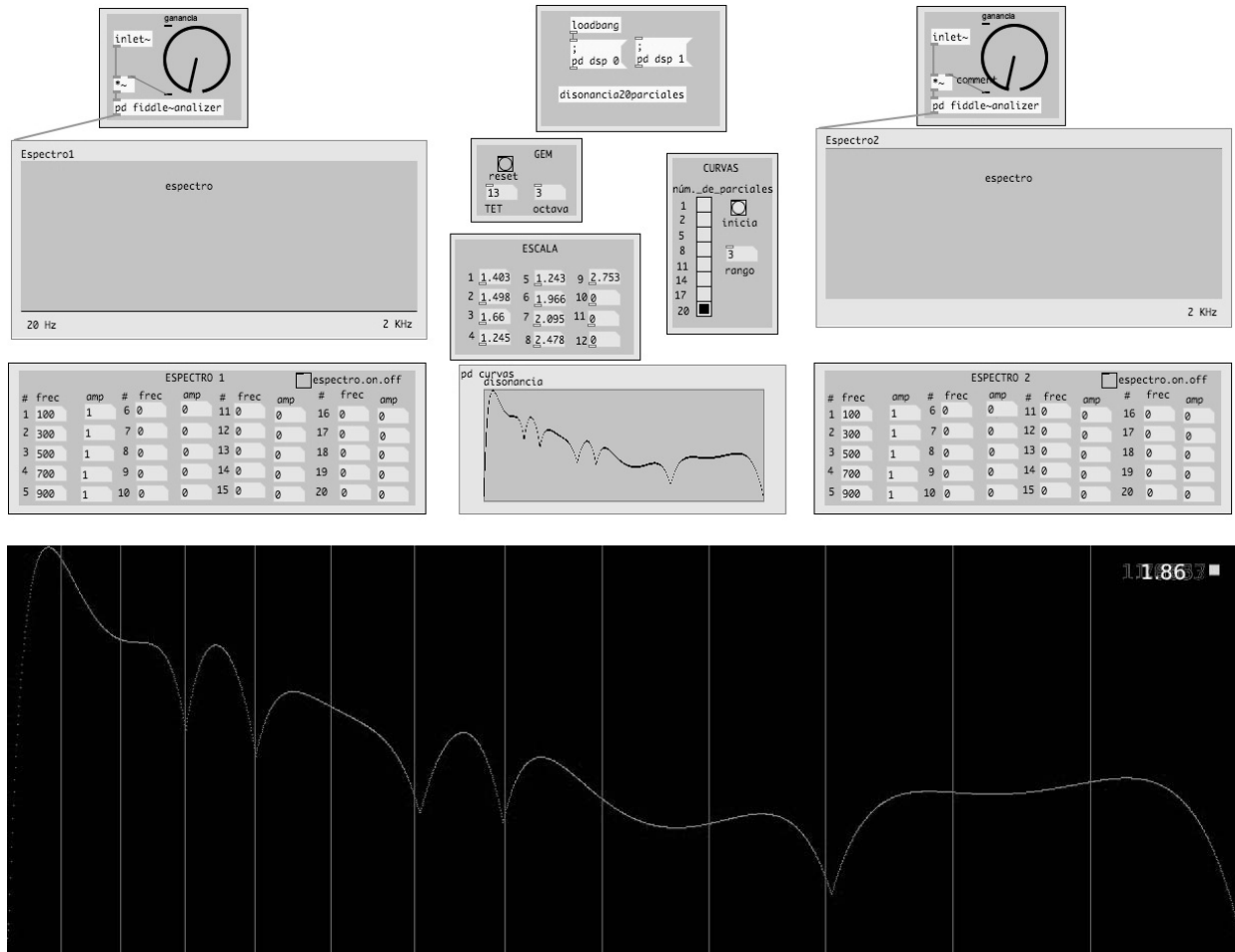


Figura 4.11: *Disonancia para un timbre con parciales impares.*

Conclusiones

El modelo de disonancia desarrollado en Pure Data por medio del programa **parciales~** genera curvas de disonancia e intervalos consonantes que coinciden con los resultados consultados en la bibliografía. Debido a que el modelo implementado en **parciales~** es una extensión de la teoría de Plomp y Levelt, los resultados obtenidos son esencialmente los mismos. En el caso de sonidos armónicos, los puntos de máxima consonancia local coinciden con notas de $12 - TET$; para timbres inarmónicos, el programa **parciales~** es una buena herramienta para estimar intervalos de máxima consonancia y construir escalas musicales a partir de ellos. La parametrización obtenida en la sección 4.1 es un refinamiento de la teoría de Plomp-Levelt en el sentido en que refleja con mayor exactitud el comportamiento de las curvas de disonancia a lo largo del rango de tonos audibles.

Como se expuso en el capítulo dedicado a psicoacústica, existen más fenómenos auditivos que deben ser integrados a una teoría de la disonancia sensorial. Por ejemplo, el fenómeno de enmascaramiento no se considera al sumar las disonancias de cada componente espectral de los timbres; un modelo de disonancia que integre el enmascaramiento deberá ponderar con mayor peso a las componentes que tengan una frecuencia más grave. La incorporación del enmascaramiento en el modelo de Plomp-Levelt se presenta como una posible extensión al modelo expuesto en esta tesis.

La teoría de disonancia sensorial desarrollada en esta tesis se sitúa en un vértice en donde convergen campos de estudio tan diversos como la música, la psicoacústica y las matemáticas. Las implicaciones reales que este modelo puede tener sobre la creación musical no son muy

claras, las observaciones de Vassilakis [19] sobre el uso de aspereza sensorial en instrumentos musicales alrededor del mundo comprueban que una teoría de la consonancia musical siempre estará incompleta en la misma medida en la que asuma que existen elementos musicales disonantes que deben ser evitados para generar composiciones estéticamente agradables.

Bibliografía

- [1] Benade, A. H. (1960). Horns, strings, and harmony . New York: Anchor Books.
- [2] Benade, A. H. (1976). Fundamentals of musical acoustics . New York: Oxford University Press.
- [3] Benson, D. (2007). Music: a mathematical offering. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] Brinker, A. (1998). The auditory critical bands interpreted as a local Kautz transformation. *Proc. ProRisc 8th anual workshop on Circuits, Systems and Signal Processing*, 83-88.
- [5] Carlos, W. (1987). Tuning: At the Crossroads, *Computer Music Journal*, 11 (1), 29-43.
- [6] Fauvel, J. (2004). Music and mathematics from Pythagoras to fractals. Oxford : Oxford Univ. Press.
- [7] Haluska, J., (2003). The Mathematical Theory of Tone Systems. Eslovaquia: Ister Science
- [8] Helmholtz, H. v., & Ellis, A. J. (1954). On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music. New York: Dover Publications.
- [9] Howard, D., & Angus, J. (2006). Acoustics and Psychoacoustics (3rd ed.). Burlington: Elsevier.
- [10] Kuttruff, H. (2007). Acoustics an introduction. London: Taylor & Francis .
- [11] Loy, D. G. (2007). Musimathics . Cambridge (Mass.): MIT Press.

- [12] Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- [13] M.V. Mathews, L.A. Roberts, and J.R. Pierce. (1984). Four new scales based on nonsuccessive-integer-ratio chords. *Journal of the Acoustic Society of America*, 75.
- [14] Plomp, R. y Levelt, W. (1965). Tonal Consonance and Critical Bandwidth. *Journal of the Acoustical Society of America*, 38, 548-568.
- [15] Puckette, M. (2007). *The theory and technique of electronic music*. Hackensack, N.J: World Scientific Publishing Co.
- [16] Rossing, T., Moore, R. y Wheeler, P. (2002). *The science of sound*. San Francisco: Addison-Wesley.
- [17] Sethares, W. A. (1993). Local Consonance and the Relationship between Timbre and Scale. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94 (3), 1218–1228.
- [18] Sethares, W. A. (2005). *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale* (Second ed.). London: Springer-Verlag London Limited.
- [19] Vassilakis, P. (2005). Auditory Roughness as a Mean of Musical Expression. *Perspectives in systematic Musicology*, 12, 119-144.
- [20] Young, L. (1992). *The Well-Tuned Piano* 81 X 25, 6:17:50 - 11:18:59 PM NYC [Disco compacto]. Gramavision.