



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de ondas elásticas longitudinales  
en una superred semi-infinita

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
SEBASTIÁN ALEJANDRO TEJADA GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. GERARDO JORGE VÁZQUEZ FONSECA



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

<p>1. Datos del alumno Tejada Gutiérrez Sebastián Alejandro 54244128 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 088253347</p>
<p>2. Datos del tutor Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Dr. Jacques Soullard Saintrais</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Dr. Juán Carlos Alonso Huitrón</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 M. en C. Mirna Villavicencio Torres</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Dr. Antonio Peimbert Torres</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito Estudio de ondas elásticas longitudinales en una superred semi-infinita Sin subtítulo 47p. 2010</p>

*A mi tía Graciela...*

# Agradecimientos

Primeramente, a Dios, por haberme dado la vida.

A mi tía Graciela, que me dió tan generosamente la oportunidad de salir adelante.

Al Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca, por su valiosa dirección en la realización de esta tesis y por su compañerismo a lo largo de mis estudios superiores.

Al Dr. Antonio Peimbert Torres, por el gran estímulo que me ha dado el reconocimiento que hace a mis logros académicos, lo que me ha ayudado a finalizar esta carrera.

A mis sinodales: Dr. Jacques Soullard Saintrais, Dr. Juan Carlos Alonso Huitrón, M. en C. Mirna Villavicencio Torres y Dr. Antonio Peimbert Torres, por sus valiosos comentarios acerca del contenido de esta tesis.

A mis padres, a mi hermana Adriana, a mi familia y a mi amigo Eulises, por su invaluable apoyo.

Al Instituto de Física y, a la Universidad Nacional Autónoma de México.

Sebastián Tejada

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teoría</b>	<b>3</b>
2.1. Modelo de Kronig-Penney . . . . .	3
2.2. Teoría de la elasticidad . . . . .	7
2.3. Ecuación de onda elástica . . . . .	8
2.4. Modos de vibración acústica en superredes . . . . .	11
2.5. Condiciones en la frontera . . . . .	15
2.6. Ondas de superficie . . . . .	17
<b>3. Resultados</b>	<b>19</b>
3.1. Sistema multicapa Al/W . . . . .	20
3.2. Propagación longitudinal . . . . .	22
3.3. Estados de superficie . . . . .	26
3.4. Superred semiperiódica . . . . .	32
<b>Conclusiones</b>	<b>36</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>

## Resumen

En esta tesis se estudia la propagación de las vibraciones mecánicas en los sólidos conocidos como cristales acústicos.

La analogía física que existe entre un sistema cuántico semi-infinito de pozos y barreras de potencial con los resultados obtenidos servirán para obtener estos estados.

Con la ayuda de esta analogía, se calcularán los estados superficiales longitudinales para una heteroestructura semi-infinita de multicapas aprovechando los resultados previos obtenidos para un sistema cuántico semi-infinito de pozos y barreras.

El correspondiente procedimiento matemático será análogo al utilizado por Bloss[1] para explicar la dinámica del electrón en sistemas de pozos y barreras semi-infinitos.

# Capítulo 1

## Introducción

El uso de analogías entre diferentes campos de investigación es una importante herramienta para el desarrollo de la física. Estas analogías han sido utilizadas para obtener una amplia variedad de resultados importantes en el área del estado sólido, lo que fué utilizado por Vetter[2]. Una de estas importantes analogías es la que se establece entre el comportamiento ondulatorio cuántico y el comportamiento ondulatorio acústico.

Los modos de propagación en un cristal acústico se agrupan en bandas. Las bandas de volumen son las curvas de dispersión  $\omega(k)$  que definen a los modos oscilantes en el cristal.

La superred o multicapa es una estructura de periodicidad unidimensional formada por láminas de dos materiales diferentes que están colocadas de manera alternada. Cuando la periodicidad de un sistema infinito se rompe, aparecen estados superficiales localizados en la superficie de separación.



Los estados superficiales han sido observados experimentalmente en superredes finitas por Ohno[3]. Su existencia fue predicha por vez primera en la mecánica cuántica por Tamm[4]. Bloss obtuvo una ecuación analítica para estos estados en un sistema de pozos y barreras semi-infinito.

Un modelo sencillo que permite explicar la existencia de las bandas de energía permitidas y prohibidas es el modelo de Kronig-Penney[5]. El modelo de Kronig-Penney ayuda a entender las propiedades físicas de los sólidos cristalinos que servirá para estudiar la propagación de ondas acústicas en superredes.

Este modelo considera a un sólido cristalino en el que los iones están en los puntos de la red y los electrones se mueven por todo el sólido. Los electrones están inmersos en un potencial aproximadamente periódico que es consecuencia de la distribución de carga asociada a los iones de la red.

Esta aproximación toma en cuenta la interacción promedio de un sólo electrón con todos los demás que aportan un potencial. A este potencial periódico se le puede modelar en términos de pozos y barreras. Esta interacción trae como resultado la aparición de bandas conocidas como bandas permitidas y bandas prohibidas.

Las ecuaciones de movimiento de estos modelos presentan expresiones sencillas. Las soluciones a la ecuación de movimiento de las ondas elásticas longitudinales en sistemas multicapas presentan una gran similitud en el tratamiento matemático con el modelo de Kronig-Penney.

En este estudio que es una analogía con el caso cuántico, se empleará la mecánica del medio continuo que es el estudio de vibraciones mecánicas en medios sólidos o fluidos.

# Capítulo 2

## Teoría

### 2.1. Modelo de Kronig-Penney

En el modelo de Kronig-Penney los electrones están en una red cristalina periódica y por la interacción electrón-ión aparecen una serie de propiedades importantes. El modelo de Kronig-Penney es un modelo simple para entender algunas propiedades físicas de los electrones en un sólido cristalino que ayuda a estudiar la propagación de ondas acústicas en superredes.

En este modelo se considera un sólido cristalino unidimensional en el que los iones se encuentran en los puntos de la red y los electrones se mueven por todo el sólido. A este potencial periódico se le puede modelar en términos de pozos y barreras, como se muestra en la figura 1.

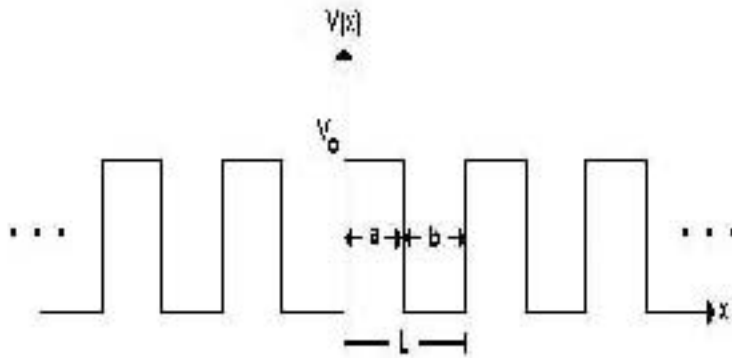


figura 1. Superred cuántica con pozos de ancho  $b$ , barreras de ancho  $a$ , periodo  $L = a + b$  que están a un potencial  $V_0$ .

Para un electrón de masa  $m$  en una celda del potencial periódico unidimensional de la forma:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x < a \\ 0 & a < x < b \end{cases}$$

la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, se escribe:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \Psi(x) = 0; \quad (2.1)$$

para la cual se propone que la solución sea de la forma:

$$\Psi(x) = \begin{cases} J_{n+}e^{Kx} + L_{n-}e^{-Kx} & 0 < x < a \\ M_{n+}e^{ikx} + N_{n-}e^{-ikx} & a < x < b \end{cases}$$

donde:

$J_{n+}$ ,  $L_{n-}$ ,  $M_{n+}$  y  $N_{n-}$  son las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y transmitida

y

$$K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V_0(x) - E]}; \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}.$$

Debido a la periodicidad del sistema las funciones propias se pueden escribir en términos de funciones de Bloch:

$$\Psi(x) = e^{i\vec{k}x} u_k(x), \quad (2.2)$$

donde  $\vec{k}$  es el vector unidimensional de Bloch y  $u_k(x)$  es una función que contiene la periodicidad de la red cristalina. Sustituyendo y usando la continuidad de  $\Psi(x)$  y  $\Psi'(x)$  en la frontera y la función de Bloch se encuentra la ecuación:

$$\cos(\vec{k}L) = \cos(ka) \cosh(Kb) + \frac{1}{2} \left( \frac{K}{k} - \frac{k}{K} \right) \operatorname{sen}(ka) \operatorname{senh}(Kb), \quad (2.3)$$

donde  $L = a + b$ , es el periodo. Esta ecuación, es una ecuación trascendente que se

resuelve por métodos numéricos y de la cual se obtienen las bandas permitidas y prohibidas para un cristal, tal como lo muestra la figura 2.

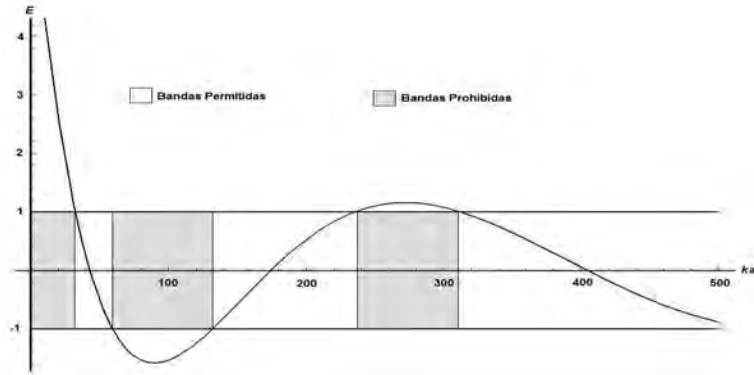


figura 2. Bandas prohibidas y permitidas de acuerdo al Modelo de Kronig-Penney.

El  $\cos(\vec{k}L)$  está definido entre 1 y -1, valores que corresponden a que  $|\vec{k}L| = 2\pi$ , la cual es la condición de máxima difracción de Bragg. La condición de máxima difracción establece que el producto escalar de un vector de la red recíproca o espacio de Fourier y un vector de la red directa es igual a  $2\pi$ .

Los vectores base  $b_i$  de la red recíproca están definidos en términos de los vectores  $a_j$  de la base primitiva de la red directa por las ecuaciones

$$b_1 = 2\pi \frac{a_2 \times a_3}{a_1 \cdot a_2 \times a_3}, \quad b_2 = 2\pi \frac{a_3 \times a_1}{a_1 \cdot a_2 \times a_3}, \quad b_3 = 2\pi \frac{a_1 \times a_2}{a_1 \cdot a_2 \times a_3}, \quad (2.4)$$

entonces:

$$b_i \cdot a_j = 2\pi\delta_{ij} \quad \begin{cases} i = j, & \delta_{ij} = 1 \\ i \neq j, & \delta_{ij} = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

El correspondiente valor del vector de la red recíproca es  $|\vec{k}| = 2\pi/L$  y los límites de la primera zona de Brillouin son  $\vec{k} = \pi/L$ .

## 2.2. Teoría de la elasticidad

La teoría de la elasticidad estudia la mecánica de los cuerpos sólidos, considerados como medios continuos. Al estudiar la dinámica de un objeto masivo sabemos que su movimiento general consiste en traslaciones, rotaciones y deformaciones. Cuando un sistema se deforma la distancia entre pares de puntos adyacentes cambia.

Sean  $\vec{dx}$  y  $\vec{dx}'$  los vectores que corresponden a estas distancias antes y después de una deformación, y  $\vec{du} = \vec{dx}' - \vec{dx}$  el vector de desplazamiento. Estas variables satisfacen la relación:

$$dx'^2 = dx^2 + 2u_{ij}dx_idx_j, \quad (2.6)$$

donde  $u_{ij}$  es el tensor de deformación, el cual se define en términos de las derivadas del vector de desplazamiento como:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.7)$$

En la teoría de la elasticidad se supone que los desplazamientos son pequeños, por lo que se consideran pequeñas oscilaciones u ondas elásticas.

### 2.3. Ecuación de onda elástica

Una onda elástica consiste, en dos ondas que se propagan independientemente. En una ( $u_x$ ) el desplazamiento es en la dirección de propagación; en la otra onda ( $u_y, u_z$ ) el desplazamiento es en un plano perpendicular a la dirección de propagación.

La ecuación de onda elástica para estructuras periódicas se obtiene a partir de la ecuación básica de la elasticidad de medios continuos. Para obtener las ecuaciones de movimiento, se debe igualar la fuerza provocada por las tensiones internas al producto de la aceleración  $\ddot{u}_i$  y la masa por unidad de volumen o densidad ( $\rho$ ):

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (2.8)$$

Esta es la ecuación general del movimiento para un medio elástico, la cual está escrita en términos del tensor de tensiones ( $\sigma_{ik}$ ) [6]. En medios isotrópicos la ley generalizada de Hooke establece que

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2)u_{ik}\delta_{ik}, \quad (2.9)$$

donde  $c_t$  y  $c_l$  son las velocidades para la onda transversal y longitudinal en el medio homogéneo. Sustituyendo (2.5) y (2.7) en (2.6) es posible obtener la siguiente ecuación de onda

$$\ddot{u}_i = \vec{\nabla} \cdot (c_t^2 \vec{\nabla} u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} [(c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla} \cdot \vec{u}]. \quad (2.10)$$

La ecuación de onda (2.8) para el caso de un medio isótropo puede escribirse en la forma vectorial:

$$\ddot{u}_i = -c_t^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) + c_l^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}); \quad (2.11)$$

esta expresión tiene dos soluciones independientes. La primera tiene como resultado ondas longitudinales de velocidad de propagación  $c_l$  y requiere que  $\nabla \times \vec{u} = 0$ . La segunda corresponde a ondas transversales de velocidad  $c_t$ , para las cuales se exige que  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ .

En ambos casos la ecuación se simplifica a la forma:

$$\frac{1}{c_\mu^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{u}, \quad \mu = l, t \quad (2.12)$$

cuya solución es

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{A} \exp[i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)]. \quad (2.13)$$

Suponiendo que  $xz$  es el plano de propagación se cumple la siguiente relación entre frecuencia y vector de onda:

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_\mu^2}, \quad (2.14)$$



con  $\mu = l, t$  para ondas longitudinales y transversales, respectivamente. Despejando la parte en  $z$  del vector de onda se tiene:

$$k_x = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_\mu^2}}. \quad (2.15)$$

Considerando la reflexión y refracción de una onda elástica plana y monocromática en la superficie de separación entre dos medios elásticos diferentes, se debe tener presente que, en general, durante la reflexión o refracción se altera la naturaleza de la onda.

Como consecuencia de las condiciones en la frontera, en el problema de la reflexión y transmisión de las ondas elásticas que atraviesan una película ocurre el fenómeno de conversión de modos.

Esto significa que una onda longitudinal incidente sobre una superficie que separa dos medios materiales puede generar ondas reflejadas y transmitidas que contengan una componente de polarización transversal. Similarmente, una onda incidente de tipo transversal (con amplitud paralela al plano de propagación) puede dar lugar a ondas reflejadas y transmitidas longitudinales.

La razón de esto es que las condiciones de frontera mezclan componentes de ambas polarizaciones. La naturaleza de la onda permanece inalterada solo cuando incide de manera normal a la superficie de separación o cuando una onda transversal con vibraciones paralelas a ésta incide en ella, no importando el ángulo.

## 2.4. Modos de vibración acústica en superredes

Existen diferentes métodos para resolver la ecuación de la elasticidad en sistemas periódicos. Casi todos ellos han sido traídos de las teorías desarrolladas para obtener los estados electrónicos en los cristales naturales o bien los estados electromagnéticos en cristales fotónicos. Uno de esos métodos es el de la matriz de transferencia, que se utiliza en este estudio.

Se considera un sistema periódico de capas alternadas de anchos  $d_1$  y  $d_2$  que tienen densidades  $\rho$  y  $\rho'$ , en los que una onda los atraviesa con velocidades  $c_l$  y  $c'_l$  [7]. La superred se muestra en la figura 3.

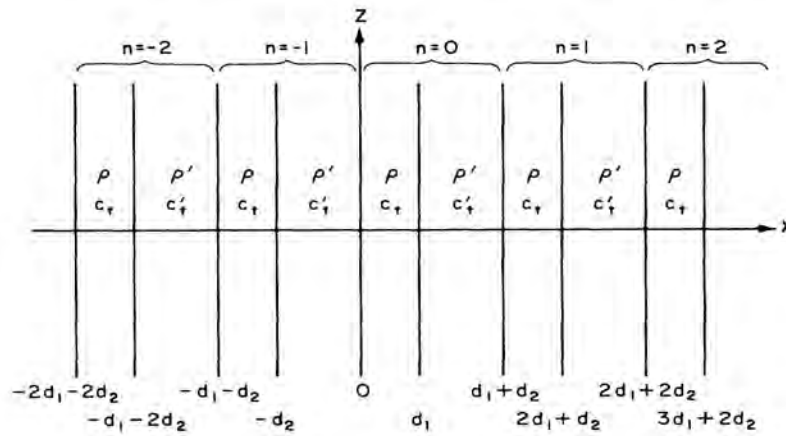


figura 3. Estructura periódica infinita en la que las ondas se propagan en el plano  $xy$ , su desplazamiento es en la dirección  $x$ .

Entonces la ecuación de onda para el desplazamiento longitudinal en  $x$  es:

$$\ddot{u}_l = c_l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_l, \quad (2.16)$$

donde  $c_l$  y  $c'_l$  son las velocidades del sonido en cada uno de los medios. Se propone que la solución a la ecuación para el desplazamiento sea de la forma:

$$u_l(x, t) = e^{i(k_x x - \omega t)} u_l(x), \quad (2.17)$$

en esta expresión  $k_x$  es la componente en  $x$  del vector de onda y  $\omega$  es la frecuencia angular del desplazamiento. Derivando y sustituyendo:

$$(c_l^2 k_x^2 - \omega^2) u(x) = c_l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x), \quad (2.18)$$

la solución general es la combinación lineal:

$$u(x) = A_+ e^{k_x x} + A_- e^{-k_x x}, \quad (2.19)$$

con  $k_x = \alpha_n$ , y  $n$  indica la capa en que se desplaza la onda en la dirección  $x$ . Si la onda se desplaza en la primer capa,  $k = \alpha_1$  y entonces la ecuación se transforma en:

$$u(x) = A_+ e^{\alpha_1 x} + A_- e^{-\alpha_1 x}, \quad (2.20)$$

donde:

$$\alpha_1 = \sqrt{k_z^2 - \left(\frac{\omega^2}{c_l^2}\right)}. \quad (2.21)$$

La superred tiene una forma periódica, o sea que la solución cumple con la condición

de Bloch:

$$u(x) = u(q, x)e^{iqx}. \quad (2.22)$$

y por la periodicidad en  $x$ :

$$u(q, x) = u(q, x + L), \quad (2.23)$$

donde  $L$  es el periodo,  $L = d_1 + d_2$ . Desarrollando

$$u(q, x) = e^{-iq(x-nL)}(A_+e^{\alpha_1(x-nL)} + A_-e^{-\alpha_1(x-nL)}), \quad (2.24)$$

para

$$nL < x < nL + d_1,$$

entonces,

$$u(x) = e^{iqnL}(A_+e^{\alpha_1(x-nL)} + A_-e^{-\alpha_1(x-nL)}), \quad (2.25)$$

$$nL < x < nL + d_1.$$

De la misma manera, se puede obtener una expresión para el desplazamiento en la siguiente región, en ésta  $k_x = \alpha_2$ :

$$u(x) = e^{iqnL}(B_+e^{\alpha_2(x-nL-d_1)} + B_-e^{-\alpha_2(x-nL-d_1)}), \quad (2.26)$$

para

$$nL + d_1 < x < (n + 1)L,$$

donde:

$$\alpha_2 = \sqrt{k_x^2 - \left(\frac{\omega^2}{c_l^2}\right)}. \quad (2.27)$$

Para que se cumplan las condiciones en la frontera, debe de existir continuidad en el desplazamiento y en la tensión de la superficie de separación. La continuidad en el desplazamiento en  $x = nL + d_1$  impone la condición:

$$A_+e^{\alpha_1 d_1} + A_-e^{-\alpha_1 d_1} = B_+ + B_-, \quad (2.28)$$

y continuidad en la tensión la condición:

$$\alpha_1 \rho c_l^2 (A_+e^{\alpha_1 d_1} + A_-e^{-\alpha_1 d_1}) = \alpha_2 \rho' c_l'^2 (B_+ + B_-), \quad (2.29)$$

Para que haya continuidad en el desplazamiento en  $x = nL$  se tiene:

$$A_+ + A_- = e^{-iqL}(B_+e^{\alpha_2 d_2} + B_-e^{-\alpha_2 d_2}), \quad (2.30)$$

y la continuidad en la tensión lleva a que:

$$\alpha_1 \rho c_l^2 (A_+ + A_-) = e^{-iqL} [\alpha_2 \rho' c_l'^2 (B_+ e^{\alpha_2 d_2} + B_- e^{-\alpha_2 d_2})]. \quad (2.31)$$

Resolviendo para las incógnitas  $A_+$ ,  $A_-$ ,  $B_+$ ,  $B_-$ , se obtienen las siguientes relaciones de dispersión implícitas para la frecuencia  $\omega$  en función de los números de onda  $q$ ,  $k_x$ :

$$\cos(qL) = \cosh(\alpha_1 d_1) \cosh(\alpha_2 d_2) + \frac{1}{2} \left( F + \frac{1}{F} \right) \sinh(\alpha_1 d_1) \sinh(\alpha_2 d_2), \quad (2.32)$$

en donde  $F$ :

$$F = \frac{\alpha_1 \rho c_l^2}{\alpha_2 \rho' c_l'^2}. \quad (2.33)$$

## 2.5. Condiciones en la frontera

Una onda elástica que se transmite a través de una película que separa dos medios debe cumplir con las condiciones de conservación de momento y de energía. Si esta película es paralela al plano  $yz$  ( $\hat{n} = x$ ), para que haya conservación de momento lineal debe existir continuidad de cada una de las componentes  $\sigma_{ix}$  ( $i = x, y, z$ ) del tensor de tensiones que la atraviesa.

Para estudiar la conservación de la energía hacemos uso del vector de Poynting elástico  $\vec{P}$ , el cual se relaciona con la energía que atraviesa una superficie. Entonces  $P_i$  indica el flujo de energía por unidad de tiempo por unidad de área que viaja en

la dirección  $i$ [8]. Este vector se escribe en términos del tensor de tensiones como

$$P_i = -\sigma_{ik}u_k \quad (2.34)$$

Considerando nuevamente la película cuyo vector perpendicular es  $\hat{x}$ , la conservación del flujo de energía exige que

$$P_x = -\sigma_{xx}u_x \quad (2.35)$$

sea continua. Esta ecuación en conjunto con la condición de conservación de momento nos lleva a la continuidad de las componentes  $u_x$  a través de la superficie de separación. Entonces las componentes del desplazamiento  $u_x$  deben ser continuas.

En la siguiente tabla se enlistan las condiciones de frontera particularizadas para el caso de una separación sólido-sólido cuando es paralela al plano  $yz$ .

Condiciones de frontera elásticas para una superficie de separación sólido-sólido.

	Separación Sólido-Sólido
Desplazamiento Normal	$(\vec{u}_{sólido1})_x = (\vec{u}_{sólido2})_x$
Desplazamiento Tangencial	$(\vec{u}_{sólido1})_z = (\vec{u}_{sólido2})_z$
Tensión Normal	$(\sigma_{sólido1})_{xx} = (\sigma_{sólido2})_{xx}$
Tensión Tangencial	$(\sigma_{sólido1})_{zx} = (\sigma_{sólido2})_{zx}$

## 2.6. Ondas de superficie

Los modos de superficie surgen cuando se interrumpe la periodicidad de una superred infinita y aparecen modos de oscilación adicionales a los modos normales. Conocida la estructura de bandas de las ondas de volumen se determinan los rangos de frecuencias accesibles para los estados de superficie.

Los modos de superficie tienen frecuencias que corresponden a bandas prohibidas en el volumen. En éstos la vibración se confina en el borde cristalino. Se propagan por la frontera disminuyendo su amplitud exponencialmente hacia el interior de la estructura.

Se considera una superred semi-infinita, que no tiene una periodicidad perfecta en la dirección  $x$ . Para romper la periodicidad se usa una superficie de separación hecha de otro material. Se buscan soluciones a la ecuación de onda cercanas a la superficie de la estructura semi-infinita.

El desplazamiento de la onda en la primer región se describe con la siguiente ecuación:

$$u(x) = e^{-\beta nL} (A_+ e^{\alpha_1(x-nL)} + A_- e^{-\alpha_1(x-nL)}), \quad (2.36)$$

para

$$nL < x < nL + d_1,$$

y en la segunda región esta es la ecuación que lo describe:



$$u(x) = e^{-\beta nL} (B_+ e^{\alpha_2(x-nL-d_1)} + B_- e^{-\alpha_2(x-nL-d_1)}), \quad (2.37)$$

$$nL + d_1 < x < (n+1)L,$$

$\beta$  es el parámetro que indica el decaimiento de la función en los estados superficiales, al ingresar en el material. Para obtener las relaciones de dispersión de los estados superficiales, se necesita tomar en cuenta las condiciones de frontera en tres superficies de separación,  $x = nL$ ,  $x = nL + d_1$ ,  $x = 0$ .

Si se toman en cuenta las dos primeras condiciones se obtiene un conjunto de cuatro ecuaciones para las incógnitas  $A_+$ ,  $A_-$ ,  $B_+$ ,  $B_-$ . El determinante del sistema que se forma con estas ecuaciones debe anularse para que exista solución, es decir:

$$\begin{bmatrix} (1+F)(e^{\alpha_1 d_1} - e^{-\beta L} e^{\alpha_2 d_2}) & (1-F)(e^{-\alpha_1 d_1} - e^{-\beta L} e^{-\alpha_2 d_2}) \\ (1-F)(e^{\alpha_1 d_1} - e^{-\beta L} e^{\alpha_2 d_2}) & (1+F)(e^{\alpha_1 d_1} - e^{-\beta L} e^{-\alpha_2 d_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_+ \\ A_- \end{bmatrix} = 0,$$

donde:

$$F = \frac{\alpha_1 \rho c_l^2}{\alpha_2 \rho' c_l'^2}. \quad (2.38)$$

Esta ecuación permite obtener los valores de la energía de los estados superficiales:

$$\frac{\alpha_2 \rho' c_l'^2 [\alpha_1^2 \rho^2 c_l^4 + \alpha_3^2 \rho''^2 c_l''^4] - \alpha_3 \rho'' c_l''^2 [\alpha_2^2 \rho'^2 c_l'^4 + \alpha_1^2 \rho^2 c_l^4] \tanh(\alpha_2 d_2)}{[\alpha_2^2 \rho'^2 c_l'^4 - \alpha_3^2 \rho''^2 c_l''^4] \tanh(\alpha_2 d_2)} = \alpha_1 \rho c_l^2 \cot(\alpha_1 d_1). \quad (2.39)$$

# Capítulo 3

## Resultados

Se ha hecho una breve revisión del modelo de Kronig-Penney para un potencial periódico y de las ecuaciones de la elasticidad. Las principales ideas de estos modelos se utilizarán en este capítulo para obtener el comportamiento de ondas longitudinales en cristales acústicos semiperiódicos.

Se estudiará un sistema de multicapas modelado como pozos y barreras desde el punto de vista elástico para la propagación logitudinal. Se considera un sistema de capas alternadas de Al(Aluminio) con densidad  $\rho=2.73 \text{ g/cm}^2$  y W(Volframio) con densidad  $\rho=19.32 \text{ g/cm}^2$ . Se hace la elección de estos materiales debido a la isotropía que se ha supuesto para el cálculo teórico [9].

Esto se modela, como un sistema de pozos y barreras en su densidad y se usan las condiciones a la frontera para determinar que el desplazamiento de la onda sea continuo. Se usa el metodo de la matriz de transferencia para encontrar la relación de dispersión para los modos de vibración longitudinales de la superred periódica. La relación que se encuentra es similar a la del modelo de Kronig-Penney.

### 3.1. Sistema multicapa Al/W

Se considera un sistema periódico de capas alternadas de diferentes materiales apilados a lo largo del eje  $x$ . Como parámetros en cada capa se consideran a la densidad ( $\rho$ ) y a la velocidad de propagación del sonido en el medio que viaja la onda ( $c^i$ ).

Para romper la periodicidad se usa una superficie de separación en  $x = 0$ , como se muestra en la figura 4.

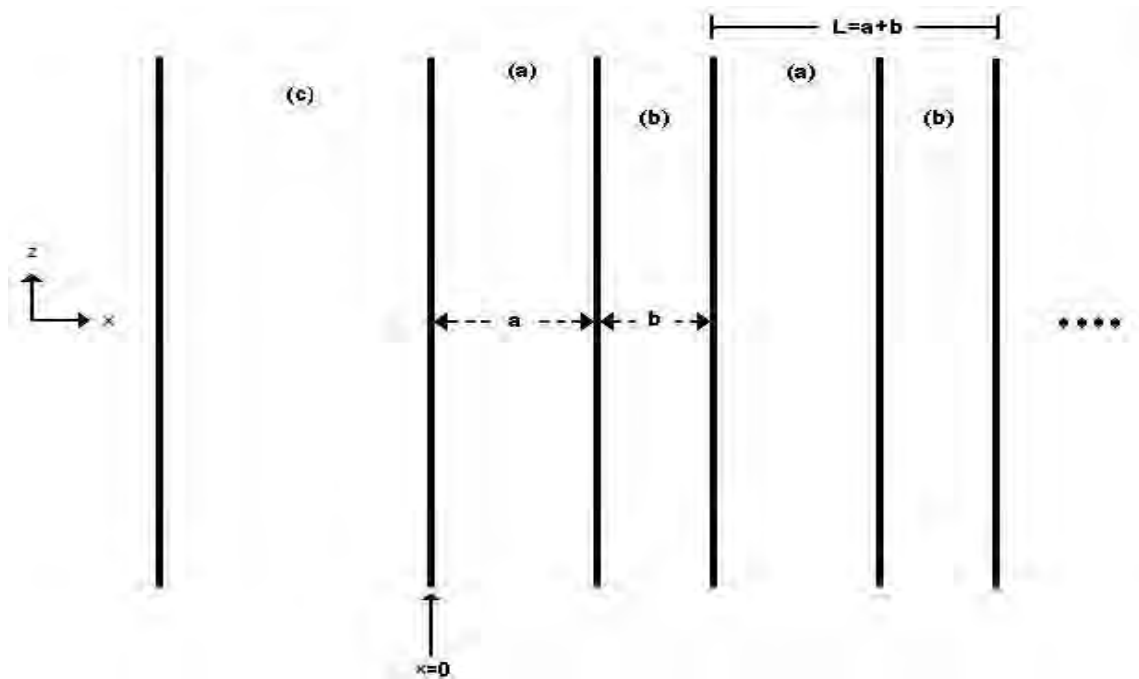


figura 4. Superred semi-infinita de capas alternadas hechas de Al(a) y W(b) y la superficie de separación está en  $x = 0$ .

Como la onda se desplaza en  $x$ , el vector de onda  $\alpha_n$  es:

$$\alpha_n = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}, \quad (3.1)$$

$c_l$  indica la velocidad de la onda ( $c, c'$ ) en la capa  $n$ -ésima. Si la onda incide en la superficie de separación de una manera normal a esta, no se separa en sus componentes transversal y longitudinal. En este caso la dirección del desplazamiento es paralela a la de la propagación y  $k_z = k_x$ :

$$\alpha_n = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}. \quad (3.2)$$

Entonces  $\alpha_n$  y  $c_l^2$  caracterizan a cada uno de los medios en los que el desplazamiento de la onda es longitudinal. Para que  $\alpha_n$  sea real  $k_x^2 \geq \frac{\omega_0^2}{c_l^2}$ , sustituyendo en (3.2):

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{1}{c_l^2} [\omega_0^2 - \omega^2]}, \quad (3.3)$$

donde  $\omega_0^2$  es la frecuencia que es función del medio, asociada a la propagación de la onda en la dirección  $x$ . Esta ecuación para el vector de onda es similar al vector de onda que se usa en mecánica cuántica para el caso del pozo y la barrera de potencial:

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V_0 - E]} \quad (3.4)$$

La similitud matemática entre éste y el vector de onda elástico permite modelar el sistema de capas alternadas como un sistema de pozos y barreras con diferentes frecuencias, esto se muestra en la figura 6.

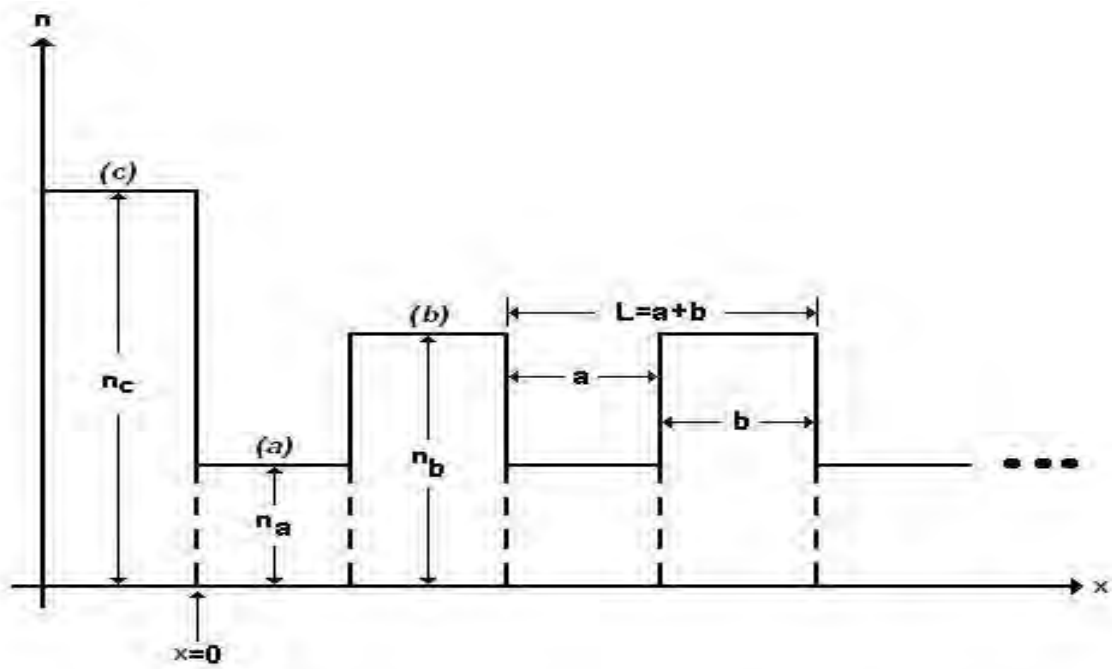


figura 6. Superred semi-infinita con ancho de pozo  $a$  y ancho de barrera  $b$  con alturas  $n_a$  y  $n_b$  respectivamente y periodicidad  $L$ . La superficie de separación en  $x = 0$  tiene una altura  $n_c$ ,  $n$  es la densidad.

### 3.2. Propagación longitudinal

Considerando primeramente el sistema periódico para obtener una ecuación similar a la del modelo de Kronig-Penney, se propone que la ecuación para el desplazamiento sea de la forma:

$$u(x, t) = u(x)e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.5)$$

y la tensión, que cumple con la condición de continuidad, tenga la forma:

$$T(x) = \rho c_l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (3.6)$$

Se toma  $u(x)$  de la siguiente manera:

$$u(x) = \begin{cases} A_{n+}e^{\alpha_1 d_1} + A_{n-}e^{-\alpha_1 d_1} & 0 < x < d_1 = a \\ B_{n+} + B_{n-} & d_1 = a < x < L, \end{cases}$$

y para la tensión  $T(x)$  se tiene:

$$T(x) = \begin{cases} \alpha_1 \rho c_l^2 (A_{n+}e^{\alpha_1 d_1} - A_{n-}e^{-\alpha_1 d_1}) & 0 < x < d_1 = a \\ \alpha_2 \rho' c_l'^2 (B_{n+} - B_{n-}) & d_1 = a < x < L, \end{cases}$$

donde

$$\alpha_1 = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c_l'^2}};$$

Entonces se aplican las condiciones de frontera, continuas en  $x = L + d_1 = L + a$ :

$$A_{n+}e^{\alpha_1 d_1} + A_{n-}e^{-\alpha_1 d_1} = B_{n+} + B_{n-}, \quad (3.7)$$

$$\alpha_1 \rho c_l^2 A_{n+} e^{\alpha_1 d_1} - \alpha_1 \rho c_l^2 A_{n-} e^{-\alpha_1 d_1} = \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{n+} - \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{n-}, \quad (3.8)$$

en  $x = L$ :

$$A_{n+} + A_{n-} = B_{(n-1)+} e^{\alpha_2 d_2} + B_{(n-1)-} e^{\alpha_2 d_2}, \quad (3.9)$$

$$\alpha_1 \rho c_l^2 A_{n+} - \alpha_1 \rho c_l^2 A_{n-} = \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{(n-1)+} e^{\alpha_2 d_2} - \alpha_1 \rho' c_l'^2 B_{(n-1)-} e^{-\alpha_2 d_2}. \quad (3.10)$$

Aplicando la condición de Bloch  $\Psi_n(x) = e^{in\kappa L} \Psi_0(x)$ :

$$A_{n+} = e^{in\kappa L} A_{0+}, \quad A_{n-} = e^{in\kappa L} A_{0-}, \quad (3.11)$$

$$B_{n+} = e^{in\kappa L} B_{0+}, \quad B_{n-} = e^{in\kappa L} B_{0-}, \quad (3.12)$$

$$B_{(n-1)+} = e^{i(n-1)\kappa L} B_{0+}, \quad B_{(n-1)-} = e^{i(n-1)\kappa L} B_{0-}. \quad (3.13)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.7), (3.8), (3.9) y (3.10) se tiene:

$$e^{in\kappa L} A_{0+} e^{\alpha_1 d_1} + e^{in\kappa L} A_{0-} e^{-\alpha_1 d_1} = e^{in\kappa L} B_{0+} + e^{in\kappa L} B_{0-}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} e^{in\kappa L} \alpha_1 \rho c_l^2 A_{0+} e^{\alpha_1 d_1} - e^{in\kappa L} \alpha_1 \rho c_l^2 A_{0-} e^{-\alpha_1 d_1} \\ = e^{in\kappa L} \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{0+} - e^{in\kappa L} \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{0-}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$e^{in\kappa L} A_{0+} + e^{in\kappa L} A_{0-} = e^{i(n-1)\kappa L} B_{0+} e^{\alpha_2 d_2} + e^{i(n-1)\kappa L} B_{0-} e^{-\alpha_2 d_2}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} e^{in\kappa L} \alpha_1 \rho c_l^2 A_{0+} - e^{in\kappa L} \alpha_1 \rho c_l^2 A_{0-} \\ = e^{i(n-1)\kappa L} \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{0+} e^{\alpha_2 d_2} - e^{i(n-1)\kappa L} \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{0-} e^{-\alpha_2 d_2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, se llega finalmente a una ecuación para la propagación longitudinal análoga a la de Kronig-Penney:

$$\cos(\kappa L) = \cosh(\alpha_1 d_1) \cosh(\alpha_2 d_2) + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2 \rho' c_l'^2}{\alpha_1 \rho c_l^2} + \frac{\alpha_1 \rho c_l^2}{\alpha_2 \rho' c_l'^2} \right) \sinh(\alpha_1 d_1) \sinh(\alpha_2 d_2). \quad (3.18)$$



### 3.3. Estados de superficie

Para poder obtener los estados de superficie es necesario romper la periodicidad de la superred infinita introduciendo una superficie de separación de otro material. Se propone la forma de  $u(x)$  como:

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_{n+}e^{\alpha_1 x} + A_{n-}e^{-\alpha_1 x} & 0 < x < d_1 \\ B_{n+}e^{\alpha_2 x} + B_{n-}e^{-\alpha_2 x} & d_1 < x < L \\ Ce^{\alpha_3 x} & x < 0, \end{cases}$$

y  $T(x)$  de la misma manera:

$$T(x) = \begin{cases} \alpha_1 \rho c_l^2 (A_{n+}e^{\alpha_1 x} - A_{n-}e^{-\alpha_1 x}) & 0 < x < d_1 \\ \alpha_2 \rho' c_l'^2 (B_{n+}e^{\alpha_2 x} - B_{n-}e^{-\alpha_2 x}) & d_1 < x < L \\ \alpha_3 \rho'' c_l''^2 C e^{\alpha_3 x} & x < 0 \end{cases}$$

donde:

$$\alpha_1 = \sqrt{k_x^2 - (\omega^2/c_l^2)}, \quad \alpha_2 = \sqrt{k_x^2 - (\omega^2/c_l'^2)}, \\ \alpha_3 = \sqrt{k_x^2 - (\omega^2/c_l''^2)},$$

$\rho$  y  $c_l^2$ ,  $\rho'$  y  $c_l'^2$  y  $\rho''$  y  $c_l''^2$  caracterizan a cada uno de los medios. Cuando las condiciones de frontera se aplican en  $x = 0$ :

$$A_{0+} + A_{0-} = C, \quad (3.19)$$

$$\alpha_1 \rho c_l^2 (A_{0+} - A_{0-}) = \alpha_3 \rho'' c_l''^2 C, \quad (3.20)$$

considerando  $A_{0-} = bA_{0+}$ :

$$\alpha_3 = \frac{\rho c_l^2}{\rho'' c_l''^2} \alpha_1 \frac{1-b}{1+b}, \quad (3.21)$$

se ponen condiciones de frontera en  $x = L$ :

$$A_{n+} + A_{n-} = B_{(n-1)+} e^{\alpha_2 L} + B_{(n-1)-} e^{-\alpha_2 L}, \quad (3.22)$$

$$\alpha_1 \rho c_l^2 A_{n+} - \alpha_1 \rho c_l^2 A_{n-} = \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{(n-1)+} e^{\alpha_2 L} - \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{(n-1)-} e^{-\alpha_2 L}, \quad (3.23)$$

y si se aplican las condiciones en  $x = d_1$ :

$$A_{n+} e^{\alpha_1 d_1} + A_{n-} e^{-\alpha_1 d_1} = B_{n+} e^{\alpha_2 d_1} + B_{n-} e^{-\alpha_2 d_1}, \quad (3.24)$$

$$\alpha_1 \rho c_l^2 A_{n+} e^{\alpha_1 d_1} - \alpha_1 \rho c_l^2 A_{n-} e^{-\alpha_1 d_1} = \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{n+} e^{\alpha_2 d_1} - \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{n-} e^{-\alpha_2 d_1}, \quad (3.25)$$

usando la condición de Bloch  $\Psi_n(x) = e^{-\beta n L} \Psi_0(x)$  para una onda que se amortigua, con factor de decaimiento  $\beta$ :

$$A_{n+} = e^{-\beta n L} A_{0+}, \quad A_{n-} = e^{-\beta n L} A_{0-}, \quad (3.26)$$

$$B_{n+} = e^{-\beta n L} B_{0+}, \quad B_{n-} = e^{-\beta n L} B_{0-}, \quad (3.27)$$

$$B_{(n-1)+} = e^{-\beta(n-1)L} B_{0+}, \quad B_{(n-1)-} = e^{-\beta(n-1)L} B_{0-}, \quad (3.28)$$

sustituyendo en las ecuaciones para las condiciones de frontera:

$$e^{-\beta n L} A_{0+} e^{\alpha_1 d_1} + e^{-\beta n L} A_{0-} e^{-\alpha_1 d_1} = e^{-\beta n L} B_{0+} e^{\alpha_2 d_1} + e^{-\beta n L} B_{0-} e^{-\alpha_2 d_1}, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} e^{-\beta n L} \alpha_1 \rho c_l^2 A_{0+} e^{\alpha_1 d_1} - e^{-\beta n L} \alpha_1 \rho c_l^2 A_{0-} e^{-\alpha_1 d_1} \\ = e^{-\beta n L} \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{0+} e^{\alpha_2 d_1} - e^{-\beta n L} \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{0-} e^{-\alpha_2 d_1}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$e^{-\beta n L} A_{0+} + e^{-\beta n L} A_{0-} = e^{-\beta(n-1)L} B_{0+} e^{\alpha_2 L} + e^{-\beta(n-1)L} B_{0-} e^{-\alpha_2 L}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} e^{-\beta n L} \alpha_1 \rho c_l^2 A_{0+} - e^{-\beta n L} \alpha_1 \rho c_l^2 A_{0-} \\ = e^{-\beta(n-1)L} \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{0+} e^{\alpha_2 L} - e^{-\beta(n-1)L} \alpha_2 \rho' c_l'^2 B_{0-} e^{-\alpha_2 L}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

se resuelve el sistema de ecuaciones tomando  $A_{0-} = b A_{0+}$  por lo que el valor de  $b$  es:

$$b = \frac{(\alpha_2 \rho' c_l'^2 + \alpha_1 \rho c_l^2) x e^{2\alpha_1 d_1} - 2\alpha_2 \rho' c_l'^2 e^{\alpha_1 d_1} e^{-\alpha_2 d_2}}{2\alpha_2 \rho' c_l'^2 e^{\alpha_1 d_1} e^{-\alpha_2 d_2} - (\alpha_2 \rho' c_l'^2 - \alpha_1 \rho c_l^2) x} + \frac{(\alpha_2 \rho' c_l'^2 - \alpha_1 \rho c_l^2) x e^{2\alpha_1 d_1} e^{-2\alpha_2 d_2}}{-(\alpha_2 \rho' c_l'^2 + \alpha_1 \rho c_l^2) x e^{-2\alpha_2 d_2}}, \quad (3.33)$$

que si se sustituye en la ecuación (3.21) y se resuelve para  $x = e^{\beta L}$  se obtiene:

$$x = \frac{1}{\cos(\alpha_2 d_2) \cos(\alpha_1 d_1) + \frac{\alpha_3 \rho'' c_l''^2}{\alpha_1 \rho c_l^2} \cos(\alpha_2 d_2) \sin(\alpha_1 d_1)} \frac{1}{-\frac{\alpha_1 \rho c_l^2}{\alpha_2 \rho' c_l'^2} \sin(\alpha_2 d_2) \sin(\alpha_1 d_1) + \frac{\alpha_3 \rho'' c_l''^2}{\alpha_2 \rho' c_l'^2} \sin(\alpha_2 d_2) \cos(\alpha_1 d_1)}, \quad (3.34)$$

que es la ecuación para el parámetro de decaimiento  $\beta$ . En la ecuación (3.18) se sustituye  $\kappa$  por  $i\beta$ :

$$\cosh(\beta L) = \cosh(\alpha_1 d_1) \cosh(\alpha_2 d_2) + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1 \rho c_l^2}{\alpha_2 \rho' c_l'^2} + \frac{\alpha_2 \rho' c_l'^2}{\alpha_1 \rho c_l^2} \right) \sinh(\alpha_1 d_1) \sinh(\alpha_2 d_2), \quad (3.35)$$

esto se puede reescribir usando  $x = e^{\beta L}$ :

$$\begin{aligned} \cosh(\beta L) &= \frac{e^{\beta L} + e^{-\beta L}}{2} = \cosh(\alpha_1 d_1) \cosh(\alpha_2 d_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1 \rho c_l^2}{\alpha_2 \rho' c_l'^2} + \frac{\alpha_2 \rho' c_l'^2}{\alpha_1 \rho c_l^2} \right) \sinh(\alpha_1 d_1) \sinh(\alpha_2 d_2), \end{aligned} \quad (3.36)$$

desarrollando la ecuación anterior, se obtiene la ecuación para los estados de superficie para la propagación longitudinal acústica

$$\frac{\alpha_2 \rho' c_l'^2 [\alpha_1^2 \rho^2 c_l^4 + \alpha_3^2 \rho''^2 c_l''^4] - \alpha_3 \rho'' c_l''^2 [\alpha_2^2 \rho'^2 c_l'^4 + \alpha_1^2 \rho^2 c_l^4] \tanh(\alpha_2 d_2)}{[\alpha_2^2 \rho'^2 c_l'^4 - \alpha_3^2 \rho''^2 c_l''^4] \tanh(\alpha_2 d_2)} = \alpha_1 \rho c_l^2 \cot(\alpha_1 d_1). \quad (3.37)$$

Se resuelve la ecuación (3.37) para el caso general del modelo de Kronig-Penney arbitrario por métodos numéricos, de la cual se obtienen las frecuencias para los estados superficiales.

Estas frecuencias se sustituyen en la ecuación (3.34) de la cual se obtiene su validez física. Expandiendo la ecuación (3.37) en el parámetro  $y = e^{-2\alpha_2 d_2}$  en el límite en el que  $\alpha_2 d_2 \gg 1$  se llega a la siguiente ecuación para la frecuencia  $\omega$  de los estados superficiales:

$$f(\omega) = 2g(\omega)y = 0, \quad (3.38)$$

donde:

$$2g(\omega) = -\frac{\alpha_2\rho' [\alpha_1^2\rho^2 + \alpha_3^2\rho''^2] \sin(\alpha_1 d_1) + \alpha_3\rho'' [\alpha_2^2\rho'^2 + \alpha_1^2\rho^2] \sin(\alpha_1 d_1)}{[\alpha_2\rho' - \alpha_3\rho'']} + \frac{\alpha_1\rho [\alpha_2^2\rho'^2 + \alpha_3^2\rho''^2] \cos(\alpha_1 d_1)}{[\alpha_2\rho' - \alpha_3\rho'']}, \quad (3.39)$$

y

$$f(\omega) = [\alpha_1^2\rho^2 - \alpha_3\rho''\alpha_2\rho'] \sin(\alpha_1 d_1) - \alpha_1\rho [\alpha_2\rho' + \alpha_3\rho''] \cos(\alpha_1 d_1). \quad (3.40)$$

Si la ecuación (3.40) se iguala a cero se encuentran las frecuencias para los estados superficiales en el límite mencionado para en un sistema asimétrico de pozos y barreras (figuras 8 y 9). Si se considera  $\alpha_3 = \alpha_2$  en la ecuación (3.40) se define:

$$h(\omega) = [\alpha_1^2\rho^2 - \alpha_2^2\rho'^2] \sin(\alpha_1 d_1) - 2\alpha_1\rho\alpha_2\rho' \cos(\alpha_1 d_1) \quad (3.41)$$

que al igualarla a cero se obtienen las frecuencias  $\omega$  para las bandas permitidas en el mismo límite para un sistema simétrico de pozos y barreras (figura 10).

### 3.4. Superred semiperiódica

Se aplican los resultados teóricos a un sistema de capas alternadas de Aluminio/Wolframio y se consideran dos superredes. Si se hace

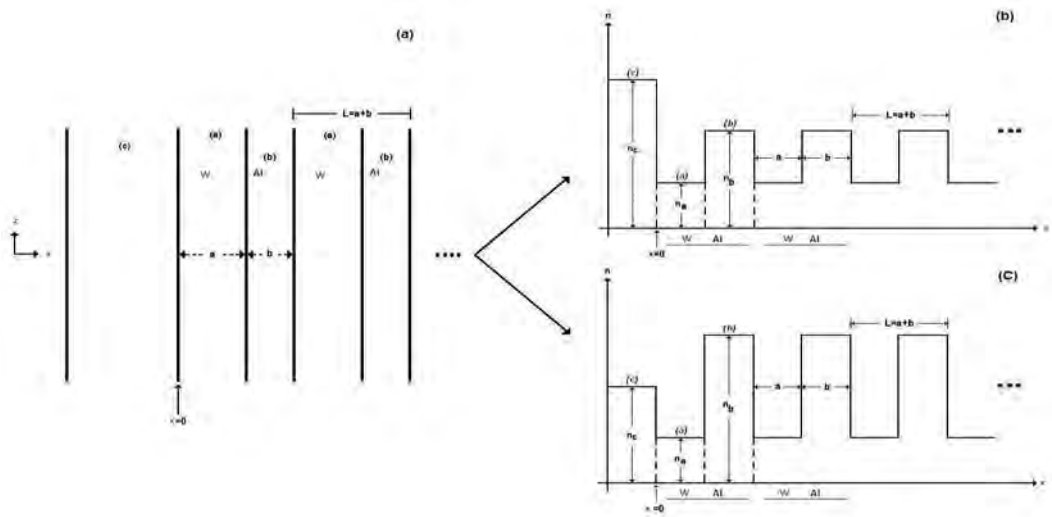


figura 7a. Superred hecha de Al/W, figuras 7b. y 7c. Superred modelada como pozos y barreras en función de la densidad  $n(a) = \rho'(Al)$  y  $n(b) = \rho(W)$ .

Se consideran dos superredes con las siguientes densidades  $\rho' = 7\rho, \rho'' = 14\rho$  (figura 7b) y  $\rho' = 7\rho, \rho'' = 3,5\rho$  (figura 7c) de anchos  $d_1 = 30a_0, d_1 = 50a_0, d_1 = 100a_0$ , respectivamente, (el radio de Böhrr es  $a_0 = 0,529 \times 10^{-8}cm$ )[10].

Para cada una de las superredes sólo se presentan el primer estado superficial y la primera banda permitida. A partir de la solución exacta, ecuación (3.37) se grafica el estado superficial y de la ecuación (3.18) la banda permitida para cada una de las superredes (figuras 10-15) en función del ancho de la barrera  $d_2/a_0$ .

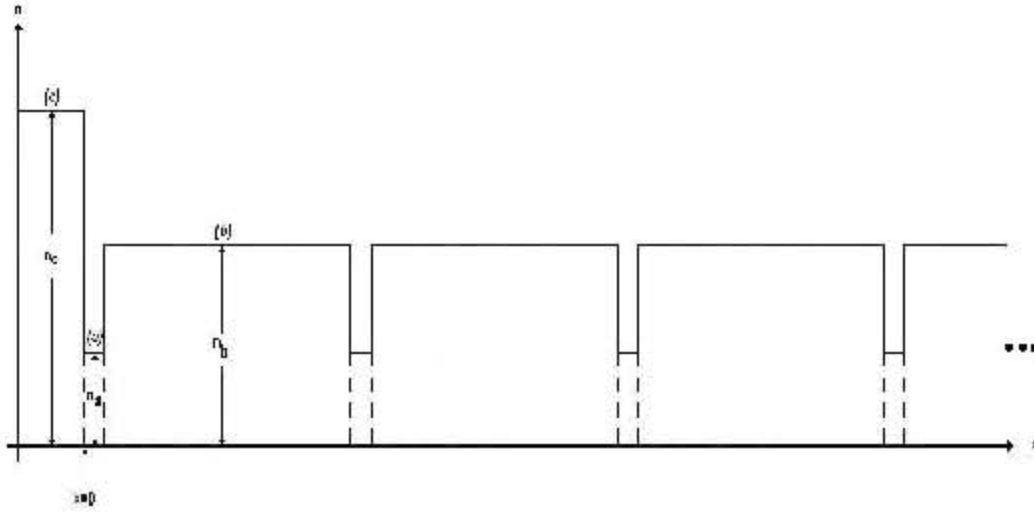


figura 8. Sistema de pozos y barreras en el límite  $\alpha_2 d_2 \gg 1$  donde la densidad  $\rho''$  de la superficie de separación es mayor que las de la superred.

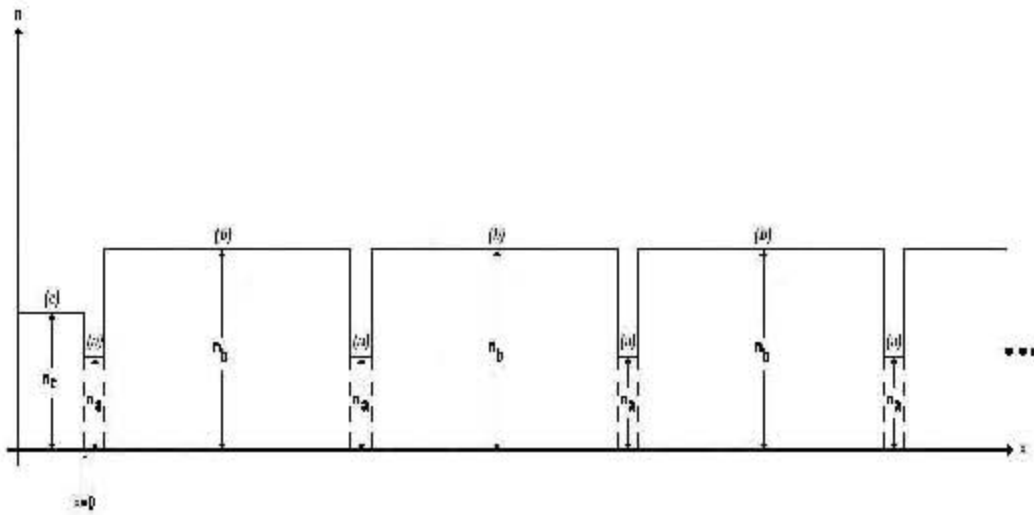


figura 8. Sistema de pozos y barreras en el límite  $\alpha_2 d_2 \gg 1$  donde la densidad  $\rho''$  de la superficie de separación es menor que las de la superred.



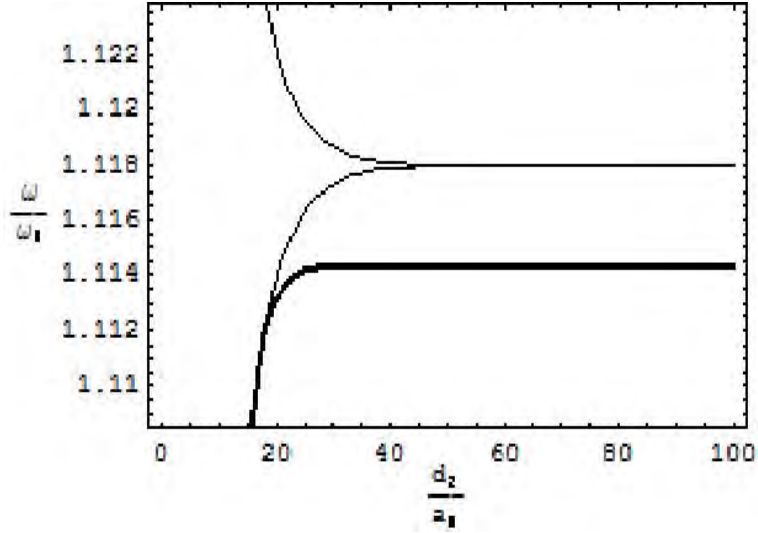


figura 10. Gráfica del estado superficial (línea gruesa) y la banda permitida de una superred semiperiódica  $Al/W$  con densidad  $\rho' = 7\rho, \rho'' = 14\rho$  y ancho  $d_1 = 30a_0$ .

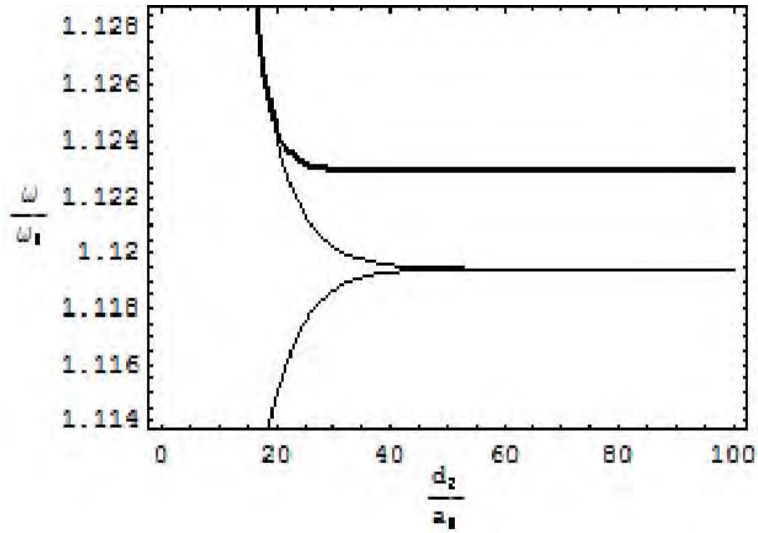


figura 11. Gráfica del estado superficial (línea gruesa) y la banda permitida de una superred semiperiódica  $Al/W$  con densidad  $\rho' = 7\rho, \rho'' = 3,5\rho$  y ancho  $d_1 = 30a_0$ .

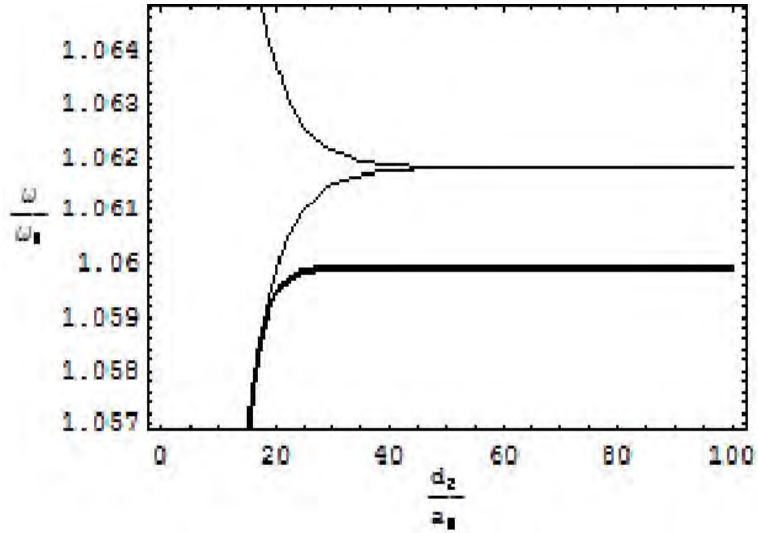


figura 12. Gráfica del estado superficial (línea gruesa) y la banda permitida de una superred semiperiódica  $Al/W$  con densidad  $\rho' = 7\rho, \rho'' = 14\rho$  y ancho  $d_1 = 50a_0$ .

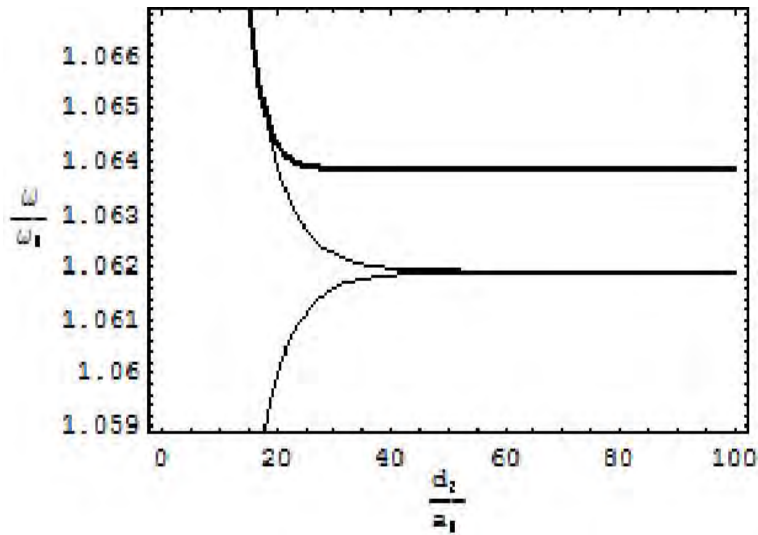


figura 13. Gráfica del estado superficial (línea gruesa) y la banda permitida de una superred semiperiódica  $Al/W$  con densidad  $\rho' = 7\rho, \rho'' = 3,5\rho$  y ancho  $d_1 = 50a_0$ .

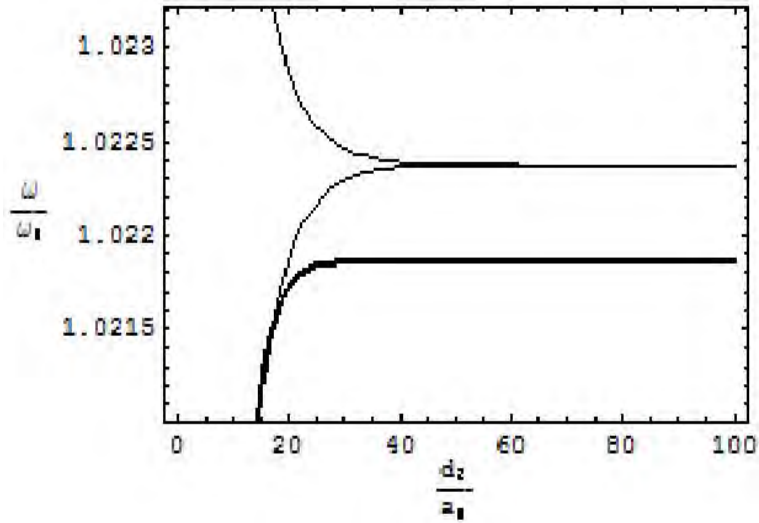


figura 12. Gráfica del estado superficial (línea gruesa) y la banda permitida de una superred semiperiódica  $Al/W$  con densidad  $\rho' = 7\rho, \rho'' = 14\rho$  y ancho  $d_1 = 100a_0$ .

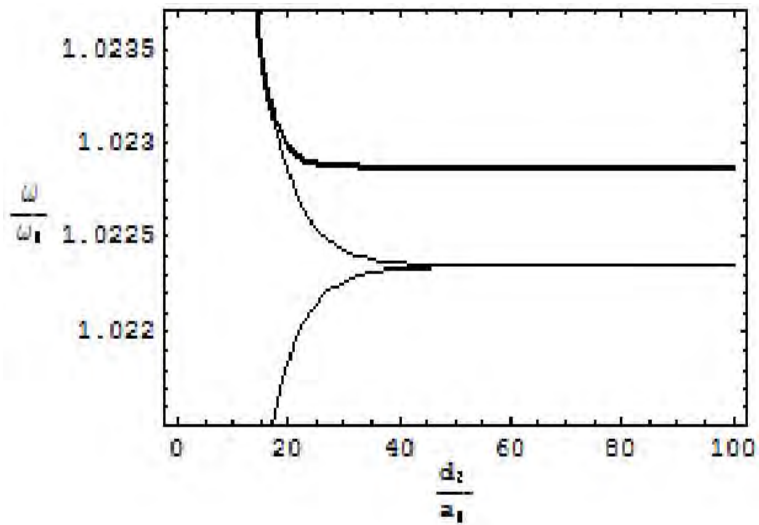


figura 13. Gráfica del estado superficial (línea gruesa) y la banda permitida de una superred semiperiódica  $Al/W$  con densidad  $\rho' = 7\rho, \rho'' = 3,5\rho$  y ancho  $d_1 = 100a_0$ .

# Conclusiones

Se han estudiado las ondas elásticas longitudinales en cristales acústicos binarios de periodicidad uni-dimensional. La investigación de problemas con periodicidad uni-dimensional abarca también los modos de superficie (oscilaciones que soporta la frontera de un sistema semi-infinito).

Como principal objetivo en este trabajo se estableció una analogía entre la teoría desarrollada para superredes semi-infinitas periódicas cuánticas de pozos y barreras con las de capas alternadas. Estas superredes se lograron modelar como pozos y barreras.

En el marco de la teoría elástica se obtuvieron ecuaciones explícitas generales que describen los estados de superficie y las bandas permitidas en la propagación longitudinal para sistemas de capas alternadas. Se demostró que para el caso longitudinal estas ecuaciones generales son análogas a las ecuaciones que se encuentran en la mecánica cuántica para sistemas de pozos y barreras.

A continuación se enumeran los resultados obtenidos en el marco de la teoría elástica para un sistema semiperiódico de capas alternadas de diferentes materiales, resultados análogos a los que se conocen en la mecánica cuántica para un sistema de pozos y barreras.

1. Se demuestra que las soluciones a la ecuación de movimiento en sistemas multicapas presentan una gran similitud en el tratamiento matemático con el modelo de Kronig-Penney.
2. Se obtuvo el espectro de energías, el cual también presenta bandas permitidas y prohibidas.
3. Se demuestra que el vector de onda acústico para el caso longitudinal es análogo al vector de onda que se usa en la mecánica cuántica.
4. Las ecuaciones que describen las bandas permitidas en la propagación acústica son análogas a las obtenidas con el modelo de Kronig-Penney.
6. En la propagación perpendicular a la superficie de separación, no hay acoplamiento longitudinal-transversal, siendo ambas similares al modelo de Kronig-Penney para la propagación cuántica.
5. El parámetro de decaimiento  $\beta$  para un sistema de capas alternadas semiperiódicas infinito en la propagación acústica es análogo al que se encuentra en la mecánica cuántica.
6. Las ecuaciones que describen los estados superficiales acústicos son análogas a aquellas para los estados de superficie cuánticos.
7. Las gráficas permiten determinar las frecuencias a las que se hacen presentes los estados superficiales.

Es muy sorprendente el hecho de que un fenómeno a nivel macroscópico, como la propagación de ondas en los cristales acústicos, pueda tener un paralelismo con el sistema de pozos y barreras de potencial cuántico. Este paralelismo permite hacer su caracterización con el modelo que se utiliza para el caso cuántico (modelo de

Kronig-Penney).

Una posibilidad a futuro sería tratar de generalizar este método para sistemas de 3 o más capas alternadas con una superficie de separación. Otra posibilidad sería fabricar estas películas para probar la veracidad de los resultados teóricos obtenidos en este trabajo. Existen una gran cantidad de problemas que es posible resolver como continuación a esta investigación.

Una de sus aplicaciones sería el diseñar y realizar un espejo omnidireccional elástico consistente de una multicapa Pb/Epoxi. Este sistema presenta reflexión total de ondas, para todo ángulo de incidencia en cierto rango de frecuencias.

# Bibliografía

- [1] W. E. Bloss. Surface states of a semi-infinite superlattice. *Physical Review B*, 44(15):8035–8042, 1991.
- [2] R. M. Vetter. Negative phase time for scattering at quantum wells: A microwave analogy experiment. *Physical Review E*, 63(046701), 2001.
- [3] H. Ohno. Observation of Tamm states in superlattices. *Physical Review Letters*, 64(21):2555–2558, 1990.
- [4] I. Tamm. *Phys. Z, Soviet Union*, 1(733), 1932.
- [5] C. Kittel. *Introduction to solid state physics*. John Wiley & Sons, 1996.
- [6] L. D. Landau. *Theory of elasticity*. Addison-Wesley, 2002.
- [7] R. E. Camley. Transverse elastic waves in periodically layered infinite and semi-infinite media. *Physical Review B*, 27(12):7318–7329, 1983.
- [8] M.B. Manzanares. *Tesis de doctorado 'Ondas elásticas en medios periódicos'*. Universidad de Sonora, 2004.
- [9] B. Djafari-Rouhani. Sagittal elastic waves in infinite and semi-infinite super-

lattices. *Physical Review B*, 28(4):1711–1720, 1983.

- [10] V. M. Ortega. *Tesis de maestría 'Estados superficiales de ondas electromagnéticas longitudinales en superredes'*. Instituto de Física-UNAM, 2008.