



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

---

## POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Localización de Anderson en varillas elásticas  
desordenadas

### T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

Pierric Mora Nardi

DIRECTOR DE TESIS: DR. Jorge Andrés Flores Valdés

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. José Luis Mateos Trigos

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. Octavio Miramontes Vidal





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

A los miembros del grupo de Vibraciones Elásticas por su valiosa colaboración:

Dr. Jorge Andrés Flores Valdés  
Dr. Alejandro Morales Mori  
Dr. Guillermo Monsivais Galindo  
Dr. Rafael A. Méndez Sánchez  
Maestro Luis Gutiérrez  
Maestro Alfredo Díaz de Anda.

Al maestro Anselmo González por el maquinado de todas las piezas que se necesitaron para llevar a cabo el experimento.

A Robin Mora y Alberto Dzay Villanueva por su paciente ayuda en las mediciones y por haber soportado durante horas el ruido del carrito del detector.

Al Dr. Pier A. Mello por las discusiones acerca del camino libre medio y del coeficiente de reflexión y por haber sugerido el paralelo con el interferómetro de Fabry-Pérot.

A los doctores Jorge Rickards Campbell y Félix M. Izrailev por haber revisado mi trabajo de tesis y haber sido miembros del jurado.

A los doctores José Luis Mateos Trigos y Octavio Miramontes Vidal por haber sido los miembros de mi comité tutorial a lo largo de esta maestría, junto con el Dr. Jorge Andrés Flores Valdés.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Ondas de torsión en barras cilíndricas</b>	<b>9</b>
2.1. Analogía formal cuántica-clásica por medio de la ecuación de ondas . . . . .	9
2.2. Ondas de torsión en un cilindro elástico con extremos libres . . . . .	12
2.3. Ondas de torsión en una barra formada por cilindros con un eje común y de longitudes y radios variables . . . . .	14
<b>3. Localización de Anderson en una barra elástica desordenada</b>	<b>16</b>
3.1. Descripción del sistema . . . . .	16
3.2. Protocolo experimental . . . . .	17
3.3. El camino libre medio $\ell$ . . . . .	18
3.4. La longitud de localización $\xi$ . . . . .	19
3.5. El parámetro de repulsión de niveles $\alpha$ . . . . .	24
<b>4. Conclusiones</b>	<b>28</b>
<b>5. Apéndices</b>	<b>29</b>
5.1. A. Diseño de la barra . . . . .	29
5.2. B. Cálculo de los coeficientes de reflexión de los sistemas clásico y cuántico	37
5.3. C. Clases de simetría y repulsión de niveles . . . . .	45
5.4. D. Método numérico . . . . .	50
5.5. E. Protocolo experimental . . . . .	54
5.6. F. Definición de errores . . . . .	59

# Resumen

En esta tesis se estudia, numérica y experimentalmente, el fenómeno de localización de Anderson en las ondas torsionales de una barra elástica desordenada, que consiste de un cilindro con muescas espaciadas al azar. En particular se estudian la longitud de localización, el camino libre medio y el parámetro de repulsión de niveles como funciones de la frecuencia y se comparan los comportamientos con los del caso cuántico unidimensional de un potencial formado por barreras idénticas espaciadas al azar. La expresión del camino libre medio se obtiene analíticamente. Los cálculos de la longitud de localización, definida por las envolventes de las funciones de onda, y del parámetro de repulsión de niveles, definido según la fórmula de F. Izrailev, se llevan a cabo por el método del mapeo de Poincaré. Experimentalmente se miden estas dos últimas cantidades haciendo uso de Electro Magnetic Acoustic Transducers como sistema de excitación-detección. Se encuentra que, aunque se presenta el fenómeno de localización de los modos normales, conforme a la teoría de Anderson, tanto el camino libre medio como la longitud de localización decaen con la frecuencia mientras que en el caso cuántico ellos crecen con la energía. Esta diferencia cualitativa se explica por el coeficiente de reflexión de los objetos dispersores que en el caso elástico crece con la frecuencia y en el caso cuántico decrece con la energía. Sin embargo, así como sucede en el caso cuántico, se mantiene una relación de proporcionalidad entre el camino libre medio y la longitud de localización. Por otra parte, el parámetro de repulsión de niveles como función de la longitud de localización tiene un comportamiento cuadrático a valores pequeños y lineal con una ordenada en el origen a valores grandes, lo que difiere en parte del caso cuántico. Dicha diferencia podría explicarse al comparar las distribuciones teóricas clásica y cuántica de los espaciamientos entre niveles vecinos, las cuales no siempre se conocen.

# Abstract

In this work we study, both numerically and experimentally, the phenomenon of Anderson localization in the torsional waves of a disordered elastic rod, which consists of a cylinder with randomly spaced notches. In particular, we study the localization length, the elastic mean free path and the level repulsion parameter as function of the frequency and we compare their dependence with those that arise in the quantum one-dimensional case of a potential formed by identical barriers randomly spaced. We obtain an analytical expression for the elastic mean free path. We calculate the localization length, defined by the envelopes of the wave functions, and the level repulsion parameter, defined by the F. Izrailev formula, by the method of Poincaré map. Experimentally we measure these two former quantities using Electro Magnetic Acoustic Transducers to excite and detect vibrations. We find that the normal modes localize exponentially, according to Anderson theory, and that both the elastic mean free path and the localization length decay with frequency whereas they increase with energy in the quantum case. This qualitative difference is explained by the reflexion coefficient of the notches and barriers, which increase with frequency in the case of a notch and decrease with energy in the case of a barrier. However, as happens in the quantum case, the elastic mean free path and the localization length remain proportional. On the other hand, the level repulsion parameter as a function of the localization length has a quadratic behaviour at small values and a linear one, with non-zero ordinate value, at great values. This differs in part from the quantum case and could be explained comparing the theoretical classical and quantum distributions of nearest-neighbour level spacing, which remain unknown in both cases.

# 1 Introducción

Algunos de los fenómenos que ocurren en los sólidos y que se pueden explicar tratando a las partículas, digamos electrones, como ondas de materia gobernadas por las ecuaciones de la mecánica cuántica, también ocurren en la física clásica, donde valen las ecuaciones de Newton y de Maxwell. Surgen entonces los así llamados análogos clásicos de sistemas cuánticos. Es el caso de los fenómenos de interferencia que se rigen por una ecuación común a varias áreas de la física: la ecuación de ondas.

Experimentalmente se han podido observar numerosas veces los análogos clásicos con ondas tales como la luz [1, 2, 3, 4, 5, 6], las ondas elásticas [7, 8, 9, 10, 11] o las ondas en el agua [12]. En este trabajo estudiamos, tanto numérica como experimentalmente, el fenómeno de localización de Anderson en una dimensión con ondas acústicas y en particular nos enfocamos a estudiar la relación que existe entre tres cantidades: el camino libre medio, la longitud de localización y la repulsión de los niveles de energía.

La teoría de bandas y la teoría de localización de Anderson nos permiten entender por qué algunos materiales, que tienen una estructura cristalina (como los metales), conducen la electricidad y por qué otros, que tienen una estructura desordenada (como un metal con muchos defectos o impurezas), son aislantes.

En los cristales, materiales que tienen una estructura periódica, los niveles de energía permitidos forman un espectro de bandas y las funciones de onda de los electrones de la banda de conducción son extendidas. Si la banda de conducción no está vacía, los electrones que la pueblan se pueden entonces mover libremente a lo largo del material y participan en el transporte de la carga eléctrica, lo que hace del material un conductor.

Sin embargo, un cristal perfecto es una idealización. En la naturaleza siempre se encontrarán impurezas, por ejemplo, átomos ajenos a la composición química ideal, o un defecto, por ejemplo, un espaciado anormal entre dos átomos, que rompe la periodicidad. Con poco desorden, las impurezas tienen como consecuencia permitir estados de energía dentro de las bandas prohibidas. Las funciones de onda de esos nuevos estados están localizadas exponencialmente en el espacio alrededor de la impureza. A temperatura nula, cuando el acoplamiento con otros grados de libertad, sea con fonones u otros electrones, se vuelve despreciable, los electrones que ocupan esos estados localizados no pueden participar en el transporte.

## 1 Introducción

La teoría de la localización de Anderson [13, 14] estudia la forma de las funciones de onda – es decir, si son localizadas o extendidas – como resultado de interferencias consigo mismas por la dispersión de un potencial aleatorio, consecuencia del desorden. Es una teoría a temperatura nula ya que sólo considera la interacción electrón-potencial y desprecia las interacciones electrón-electrón y electrón-fonón. Una temperatura no nula permite que los electrones puedan brincar de un modo localizado a otro y participar en el transporte. En los experimentos [15, 16, 17] esas temperaturas son del orden de 0-4K.

En este contexto, el hamiltoniano  $H$  del sistema se escribe como:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \sum_n \varepsilon_n |n\rangle \langle n| + \sum_{n,m} [\nu_{nm} |n\rangle \langle m| + \nu_{mn} |m\rangle \langle n|] \quad (1.1)$$

donde la base  $|n\rangle$  de los estados no forma una base de eigenestados, sino una base intuitiva en la que el vector  $|n\rangle$  representa a un electrón que tiene probabilidad 1 de estar en el sitio  $n$  y 0 de estar en otra parte. En (1.1)  $\varepsilon_n$  es la energía del sitio  $n$ ,  $r_{nm}$  la distancia entre los sitios  $n$  y  $m$  y  $\nu_{nm} = \nu(r_{nm})$  su energía potencial de acoplamiento. Se supone que la interacción entre los sitios decae con la distancia más rápido que  $1/r_{nm}^3$ . El desorden se modela tomando  $\{\varepsilon_n\}$  como un conjunto de números al azar no correlacionados y caracterizados por una distribución de probabilidad de anchura  $W$ . En el caso de una distribución constante  $W$  es el ancho del intervalo en el que la distribución no es nula; en el caso de una distribución gaussiana  $W$  es la anchura de la campana a la mitad de su altura. Considerar correlaciones entre las energías de sitios puede dar lugar a resultados distintos, como lo indican las referencias [18, 19], pero no es el propósito del presente trabajo.

El tamaño del desorden se puede medir en unidades de  $W/\nu$ , donde  $\nu$  es el promedio de  $\nu(r)$ . Esta cantidad adimensional representa la barrera de potencial que enfrenta la función de onda en cada sitio. El caso  $W = 0$  corresponde a una estructura periódica. En este caso el teorema de Bloch vale y las eigenfunciones son extendidas. Aumentar  $W$  es distinguir más los sitios uno del otro y favorecer una localización mientras que aumentar  $\nu$  es unirlos más fuertemente y favorecer la deslocalización. El resultado de P. W. Anderson es que, en 3 dimensiones, existe un desorden crítico  $(W/\nu)_c$  en el cual se da una transición: abajo del valor crítico existen modos extendidos que permiten la conducción de una corriente y arriba del valor crítico todos los modos están localizados en el espacio de manera exponencial, es decir, que la envolvente de la función de onda es proporcional a  $\exp(-|\vec{r}_0 - \vec{r}|/\xi)$ , donde  $\vec{r}_0$  es la posición del sitio donde se localizó la función de onda y  $\xi$  es una dimensión característica que define el decaimiento de la amplitud de onda hacia el infinito; a  $\xi$  se le conoce como longitud de localización. En este régimen, el material es un aislante.

Otro resultado importante de la teoría es que la dimensionalidad del sistema juega un papel fundamental [20]. La hipótesis de la teoría de escalamiento de la localización es suponer que la cantidad  $\frac{d \ln g}{d \ln L}$ , donde  $g$  es la conductancia en unidades de  $e^2/\hbar$ , de una

## 1 Introducción

muestra de tamaño  $(L)^d$ , sólo depende de la conductancia  $g$ . Bajo esta suposición, el valor asintótico al que tiende  $\frac{d \ln g}{d \ln L}$ , de forma creciente, es  $d - 2$ . Según este resultado, si  $d = 3$  la conductancia puede ser una función creciente para un material conductor o decreciente para un material aislante en el límite  $L$  grande, dependiendo de un valor crítico  $g_c$  que corresponde al valor del desorden crítico. En cambio, si  $d = 1$  o  $2$ , la conductancia  $g$  de una muestra sólo puede ser una función decreciente del tamaño de ella. Es decir, que en el límite de una muestra grande el material es un aislante, por muy pequeño que sea el desorden. Formalmente, esto sólo se ha podido demostrar rigurosamente en una dimensión.

Otra manera de ver el problema de la influencia del desorden en un sistema cuántico es considerar el sistema como abierto, conectado a reservorios de electrones por guías de onda cuasi 1D, es decir, en las que las ondas se propagan según una sola coordenada pero pueden tener varios modos transversales; y se estudia el problema de dispersión de las ondas entrantes [21]. Visto así, el sistema es una cavidad dispersora. De manera formal se prefiere describir al sistema por medio de su matriz de dispersión  $S$  en vez de su hamiltoniano, aunque los dos están conectados. Asimismo, el desorden se introduce al considerar  $S$  como una matriz al azar. El problema de dispersión se reduce entonces a encontrar la distribución de probabilidades que sigue  $S$ . Hasta la fecha sólo se han podido resolver analíticamente dos casos de cavidades: el punto cuántico y el alambre desordenado.

En el caso del alambre desordenado, que es muy parecido al presente trabajo y que tratamos de reproducir clásicamente con ondas acústicas, la distribución de los eigenvalores de la matriz  $S$  está dada por una ecuación conocida como DMPK (Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar) (ver [21] p.757) que depende de la clase de simetría del problema. Esa ecuación lleva a la siguiente expresión para la longitud de localización  $\xi$ :

$$\xi = [(N_c - 1)\beta + 2] \ell, \quad (1.2)$$

donde  $N_c$  es el número de canales de las guías de onda (el número de modos transversales que se pueden excitar en las guías) y  $\ell$  el camino libre medio. En (1.2)  $\beta$  es el índice de simetría del problema (ver Apéndice C) y puede valer 1, 2 y 4 que son los tres casos en los que se ha podido derivar la ecuación DMPK. Cada clase de simetría corresponde a una distribución de probabilidades de  $S$  y a una distribución de los espaciamientos entre los eigenniveles vecinos del sistema. El caso  $\beta = 1$  corresponde a matrices  $S$  unitarias simétricas (COE) y a un sistema invariante frente a inversión en el tiempo; el caso  $\beta = 2$  a matrices  $S$  unitarias (CUE) y el caso  $\beta = 4$  a matrices  $S$  unitarias auto-duales (CSE). La relación (1.2) se ha podido verificar experimentalmente con experimentos de magnetoconductancia [15, 16, 17].

Nuestra analogía clásica consiste en una barra elástica con muescas espaciadas al azar,

## 1 Introducción

lo cual forma un sistema unidimensional desordenado. En este caso no conocemos la distribución de probabilidades de  $S$  ni sabemos de qué depende. En términos de simetría estamos en el caso de una invariancia frente a una reflexión temporal, es decir,  $\beta = 1$ , pero la distribución de espaciamentos entre los eigenniveles vecinos puede no ser la del caso cuántico correspondiente a  $\beta = 1$ .

Como lo sugiere la ecuación (1.2), nos proponemos estudiar el comportamiento de las tres cantidades  $\xi$ ,  $\ell$  y el parámetro de repulsión de niveles  $\alpha$  (ver Apéndice C) como funciones de la frecuencia y de ahí obtener la relación entre ellas. Cabe mencionar que nuestro sistema clásico cuenta con un solo canal, esto es,  $N_c = 1$ , ya que es unidimensional, pues la sección transversal de la guía de onda no se excita. Ello ocurre experimentalmente a bajas frecuencias.

En general, los análogos elásticos de sistemas cuánticos reproducen los fenómenos de manera cualitativa, pero suelen presentar diferencias en los detalles. Por ejemplo, una barra elástica periódica (ver la figura 5.3 y la referencia [24]) tiene sus modos normales extendidos y un espectro en bandas, pero el ancho de las bandas prohibidas aumenta con la frecuencia mientras que en mecánica cuántica este disminuye con la energía. En nuestro caso esperamos entonces reproducir cualitativamente el resultado principal de la teoría de Anderson, es decir, encontrar que todos los modos normales del sistema son localizados exponencialmente, pero el comportamiento de  $\xi$ ,  $\ell$  y  $\alpha$  con la frecuencia puede ser otro que en el caso cuántico con la energía.

## 2 Ondas de torsión en barras cilíndricas

Como se mencionó anteriormente, en ciertos casos se presentan analogías entre una situación cuántica y una clásica. En este capítulo se expone la motivación formal mostrando las similitudes en las ecuaciones. Se mencionan algunos trabajos del grupo teórico-experimental de vibraciones elásticas del Instituto de Física, UNAM, y del Instituto de Ciencias Físicas, UNAM – Campus Morelos, realizados siguiendo esta línea de pensamiento. Se obtiene y resuelve la ecuación de ondas en el caso de ondas de torsión en un cilindro y se discute su extensión a barras formadas por diferentes cilindros con un eje común.

### 2.1. Analogía formal cuántica-clásica por medio de la ecuación de ondas

**Caso cuántico:** En mecánica cuántica, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo que gobierna el comportamiento de una partícula de masa  $m$  que se encuentra en presencia de un potencial  $V$  se escribe en la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\vec{r})\psi = E\psi, \quad (2.1)$$

donde  $\psi$  es la función de onda de la partícula. Al dividir por  $-\frac{\hbar^2}{2m}$ , la ecuación (2.1) se convierte en

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(\vec{r})]\psi = 0. \quad (2.2)$$

Cabe hacer notar que la dependencia temporal de la función de onda de un modo propio del sistema de energía  $E$  es  $e^{-iEt/\hbar}$ , o bien  $e^{-i\omega t}$  con la relación habitual  $E = \hbar\omega$ . Si nos limitamos a una dimensión y a los casos de potenciales constantes por secciones  $V(x_{j-1} < x < x_j) = V_j$  entonces la ecuación (2.2) se integra, para  $E > \max(V_j)$ , de la siguiente manera:

$$\psi(x_{j-1} < x < x_j) = A_j e^{iq_j x} + B_j e^{-iq_j x}, \quad (2.3)$$

donde hemos definido  $q_j \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_j)}$ . Los coeficientes  $A_j$  y  $B_j$  se obtienen al resolver los sistemas de ecuaciones que surgen de las condiciones de continuidad de la función de onda y de su derivada:

$$\begin{cases} \psi(x_j^-) = \psi(x_j^+) \\ \psi'(x_j^-) = \psi'(x_j^+) \end{cases} \Leftrightarrow \quad (2.4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_j e^{iq_j x_j} + B_j e^{-iq_j x_j} = A_{j+1} e^{iq_{j+1} x_j} + B_{j+1} e^{-iq_{j+1} x_j} \\ iq_j (A_j e^{iq_j x_j} - B_j e^{-iq_j x_j}) = iq_{j+1} (A_{j+1} e^{iq_{j+1} x_j} - B_{j+1} e^{-iq_{j+1} x_j}) \end{cases} \quad (2.5)$$

**Caso clásico:** Por otro lado, la ecuación de ondas clásica que verifica la amplitud de onda  $\psi$  si la velocidad de propagación es  $c$  es

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.6)$$

De aquí en adelante llamaremos a  $\psi$  “función de onda”, por analogía con la mecánica cuántica.

Ya que las ondas planas forman una base de las soluciones, con una dependencia temporal en  $e^{i\omega t}$ , basta con resolver esta ecuación para cada frecuencia. Haciendo una separación de variables obtenemos

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (2.7)$$

donde  $k = \frac{\omega}{c}$ . Aquí cabe hacer una observación: si comparamos las dependencias temporales de los modos normales cuánticos y clásicos podemos considerar que la frecuencia angular  $\omega$  es el análogo clásico de la energía  $E$ . Sin embargo, si comparamos las ecuaciones espaciales (2.2) y (2.7) podemos considerar que el análogo clásico de  $E$  es  $k^2$ , que es proporcional a  $\omega^2$ . En resumen, en algunos casos pueden haber ambigüedades al querer interpretar a  $\omega$  como análogo clásico de  $E$ . En el presente trabajo consideramos a  $\omega$  o a  $\omega^2$  como análogo de  $E$  sólo cambia las escalas de las gráficas y no resulta en ningún cambio cualitativo del fenómeno, por lo que se decidió arbitrariamente considerar a  $\omega$ .

Si nos limitamos a una dimensión y consideramos un conjunto de medios de propagación acoplados, cada uno caracterizado por una velocidad de propagación  $c_j$ , entonces la ecuación (2.7) vale en cada región del espacio y se puede integrar de forma similar a (2.3):

$$\psi(x_{j-1} < x < x_j) = A_j e^{ik_j x} + B_j e^{-ik_j x}, \quad (2.8)$$

donde  $k_j = \frac{\omega}{c_j}$  es el vector de onda en la región  $j$  delimitada por  $x_{j-1}$  y  $x_j$ . De nuevo, los coeficientes  $A_j$  y  $B_j$  se obtienen al fijar la amplitud de la onda y al resolver los sistemas de ecuaciones que surgen de las condiciones físicas de continuidad. En el caso de ondas de compresión o de torsión en un sólido, estas condiciones son la continuidad del desplazamiento  $\psi$ , y de la fuerza para el caso compresional o de la torca para el caso torsional. Tanto la fuerza como la torca son proporcionales a la derivada del desplazamiento, con un coeficiente de proporcionalidad en la región  $j$  que denotaremos  $\mu_j$ , lo que nos lleva a

## 2 Ondas de torsión en barras cilíndricas

sistemas de ecuaciones muy parecidos al caso cuántico:

$$\begin{cases} \psi(x_j^-) = \psi(x_j^+) \\ \mu_j \psi'(x_j^-) = \mu_{j+1} \psi'(x_j^+) \end{cases} \Leftrightarrow \quad (2.9)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_j e^{ik_j x_j} + B_j e^{-ik_j x_j} = A_{j+1} e^{ik_{j+1} x_j} + B_{j+1} e^{-ik_{j+1} x_j} \\ ik_j \mu_j (A_j e^{ik_j x_j} - B_j e^{-ik_j x_j}) = ik_{j+1} \mu_{j+1} (A_{j+1} e^{ik_{j+1} x_j} - B_{j+1} e^{-ik_{j+1} x_j}) \end{cases} \cdot \quad (2.10)$$

Si se logra encontrar un conjunto de medios acoplados de tal manera que las condiciones de continuidad sean formalmente parecidas en el caso cuántico y en el caso clásico entonces los fenómenos cuántico y clásico son similares y el estudiar los eigenniveles y las funciones de onda clásicos es lo mismo que estudiarlos en el caso cuántico, bajo un cambio de escala apropiado.

El estudio del análogo clásico tiene algunas ventajas sobre el cuántico: experimentalmente todos los parámetros se pueden medir con mucha precisión, limitada sólo por la resolución de los aparatos. Además se puede tener acceso a los eigenmodos y a las funciones de onda, tanto en amplitud como en fase, lo cual es en general muy difícil en el caso cuántico. Por ejemplo, los dos primeros trabajos experimentales que midieron el fenómeno de localización de Anderson con sus funciones de onda fueron publicados en el 2008 [22, 23], es decir, 50 años después de la publicación original de Anderson [13].

En el laboratorio de vibraciones elásticas se realizaron varios experimentos con esta idea: por ejemplo, se diseñó una barra a la que se le maquinaron muescas equidistantes para simular un potencial periódico en el espacio [24]. La situación cuántica que corresponde es la de un cristal unidimensional. Se encontró que, en efecto, el espectro presenta una estructura de bandas permitidas y bandas prohibidas. Se estudió en otro trabajo el efecto de poner un defecto topológico en la barra periódica [25] y se comprobó que un eigenestado aparece en la banda prohibida, cuya función de onda está localizada exponencialmente alrededor del defecto. Para dar un ejemplo más, se construyeron 2 barras cuyas geometrías simulaban un potencial de un cristal unidimensional sometido a un campo eléctrico [26, 27, 28] y se encontró que, de manera análoga al caso cuántico, se presentaba el fenómeno de escaleras de Wannier-Stark que consiste en que los eigenmodos están igualmente espaciados en frecuencia y con eigenfunciones exponencialmente localizadas sucesivamente en los distintos sitios.

## 2.2. Ondas de torsión en un cilindro elástico con extremos libres

Las excitaciones elásticas que se pueden generar en sólidos unidimensionales se clasifican en tres categorías: las vibraciones compresionales, que consisten en la propagación de una compresión-extensión del material; las vibraciones torsionales, en las que se propaga una torcedura de la sección transversal del material, y las vibraciones flexionales consistentes en la propagación de un movimiento transversal de la sección transversal del material, o sea, el material se dobla. En la página [www.fis.unam.mx/famoe\\_lab\\_vibraciones.php](http://www.fis.unam.mx/famoe_lab_vibraciones.php) se encuentran dibujos animados de estos tres tipos de vibraciones.

Las ondas compresionales y torsionales son susceptibles de presentar analogías formales con la mecánica cuántica, mientras que las flexionales obedecen una ecuación diferente, por lo que las analogías formales, aunque posibles, son más difíciles de encontrar [29].

En esta sección se obtiene y resuelve la ecuación que gobierna el comportamiento de las ondas torsionales, que se usaron en este trabajo, en el caso de una barra de longitud  $L$  con sección transversal circular  $a$  de tal manera que  $a \ll L$  (ver [30], p.126). Se verá que dicha ecuación es la ecuación de onda (2.6) discutida arriba que, como se mencionó, describe fenómenos análogos a los cuánticos.

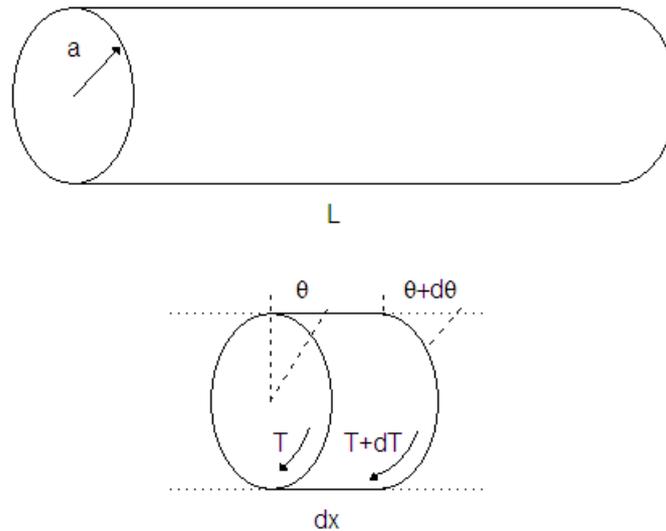


Figura 2.1: un cilindro con extremos libres y el elemento de volumen que se considera para hacer el cálculo

La conservación del momento angular en la rebanada cilíndrica nos indica que:

$$-T + \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (2.11)$$

## 2 Ondas de torsión en barras cilíndricas

donde  $\theta$  es el ángulo que se tuerce la barra,  $T$  la torca y  $J$  es el momento de inercia de la rebanada alrededor del eje central:

$$J = \oint_{(S)} \rho dx r^2 dS = \rho dx \frac{\pi a^4}{2}. \quad (2.12)$$

Llegamos entonces a

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (2.13)$$

La torca  $T$  se relaciona con el ángulo de torsión por medio del módulo de torsión  $G$ :

$$T = G \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2.14)$$

Obtenemos entonces la siguiente ecuación de ondas para el ángulo  $\theta$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

con una velocidad  $c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ .

Las condiciones a la frontera que usamos experimentalmente son que en sus extremos la barra puede oscilar libremente, puesto que solamente está sostenida por unos hilos delgados de nylon. Esto implica la nulidad de la torca en  $x = 0$  y  $x = L$ , es decir que  $\frac{\partial \theta}{\partial x}(x = 0) = 0$  y  $\frac{\partial \theta}{\partial x}(x = L) = 0$ . La solución general de la ecuación de ondas es una superposición de las soluciones de modos normales (a frecuencia bien definida, con dependencia temporal  $e^{i\omega t}$ ). Las soluciones de modos normales son ondas estacionarias de la forma  $\theta(x, t) = \Theta(x) e^{i\omega t}$  donde  $\Theta(x)$  satisface la ecuación (2.7). Esta última ecuación se puede integrar de la siguiente manera:

$$\Theta(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (2.16)$$

La condición a la frontera  $\frac{\partial \theta}{\partial x}(x = 0) = 0$  impone la relación  $A = B$ . La otra condición,  $\frac{\partial \theta}{\partial x}(x = L) = 0$ , permite calcular los valores de  $k$  permitidos, o bien de manera equivalente, las frecuencias normales. Ya que  $\frac{d\Theta}{dx} = -2kA \sin(kx)$  entonces  $k$  debe ser tal que  $\sin(kL) = 0$ , es decir  $k = j \frac{\pi}{L}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  o en términos de frecuencia:

$$f = j \frac{c_t}{2L}. \quad (2.17)$$

De esta última fórmula se puede ver que el espaciado entre 2 niveles, que es inversamente proporcional a la densidad de niveles, es proporcional a  $c_t$  e inversamente proporcional a  $L$ . Esto es de suma importancia para el diseño del experimento en el que nos interesa tener una densidad de estados alta para poder hacer una estadística con ellos. En comparación con las ondas de compresión  $c_t < c_c$ , lo cual es una de las razones de haber decidido trabajar con ondas de torsión.

### 2.3. Ondas de torsión en una barra formada por cilindros con un eje común y de longitudes y radios variables

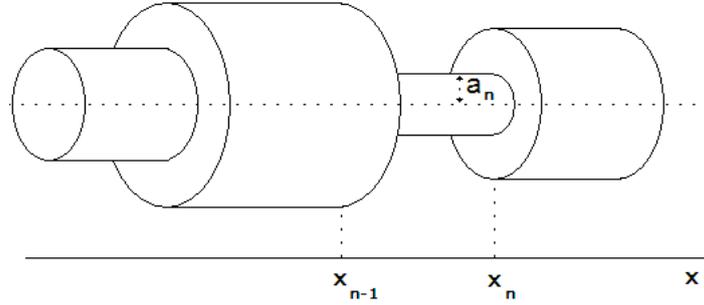


Figura 2.2: Cilindros con un eje común pegados entre sí. Cada uno tiene un radio  $a_n$  y una longitud  $d_n = x_n - x_{n-1}$

En el caso de una barra formada por cilindros del mismo eje unidos para formar una barra unidimensional con muescas, que se muestra en la figura 2.2, la ecuación de ondas anterior vale en cada cilindro. Es decir, la función de onda global de un modo normal se escribe como  $\theta(x, t) = \Theta(x) e^{i\omega t}$  donde  $\Theta(x)$  satisface la ecuación (2.7). Se puede integrar en cada cilindro:

$$\Theta(x_{n-1} < x < x_n) = \Theta_n(x) = A_n e^{ikx} + B_n e^{-ikx} \quad (2.18)$$

donde  $x_{n-1}$  y  $x_n$  son las abscisas de los extremos del cilindro  $n$ . Los  $2n$  coeficientes se relacionan debido a las condiciones a la frontera entre los cilindros ( $n-1$  lugares) y las 2 condiciones en los extremos. Estas condiciones también determinan los valores permitidos de  $k$ .

En la unión de cada dos cilindros las condiciones físicas son la continuidad de la función de onda, el desplazamiento, y de la torca. En total tenemos  $2(n-1) + 2$  condiciones y  $2n + 1$  variables de modo que sólo queda libre una: la amplitud de la onda.

$$\begin{cases} \Theta_n(x = x_n) = \Theta_{n+1}(x = x_n) & (a) \\ \frac{\pi a_n^4}{2} G_n \frac{d\Theta_n}{dx}(x = x_n) = \frac{\pi a_{n+1}^4}{2} G_{n+1} \frac{d\Theta_{n+1}}{dx}(x = x_n) & (b) \end{cases} \quad (2.19)$$

Cabe mencionar que la presente expresión matemática de las condiciones a la frontera es aproximada [24]. En efecto, al expresar la torca de esta manera se supone que las superficies de contacto de los cilindros se tuercen uniformemente, lo cual no es cierto con todo rigor. En realidad la deformación angular del cilindro ancho es mayor cerca del contacto con el cilindro delgado que en la orilla. Este efecto se puede modelar haciendo uso de un cociente de radios efectivo que depende del cociente inicial, de las longitudes de los cilindros en contacto y de un parámetro que se tiene que determinar de manera

## 2 Ondas de torsión en barras cilíndricas

experimental.

Las soluciones a estas ecuaciones se pueden calcular numéricamente haciendo, por ejemplo, uso del bien conocido método de la matriz de transferencia, o bien, como en esta tesis, del método del mapeo de Poincaré que es más apropiado a sistemas con muchas condiciones de continuidad (ver [31] y Apéndice D).

### 3 Localización de Anderson en una barra elástica desordenada

En este capítulo se presenta el estudio que se realizó sobre una barra formada por cilindros de mismo eje y cuyas ondas torsionales presentan el fenómeno de localización de Anderson. Consiste de simulaciones numéricas y de un experimento que las verifica.

#### 3.1. Descripción del sistema

El sistema de interés es una barra que presenta la siguiente estructura (Fig. 3.1, ver Apéndice A):  $N$  cuerpos cilíndricos del mismo eje, de radio  $R$  constante y de longitud variable  $d_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , unidos por cuerpitos idénticos de radio  $r < R$  y de longitud  $\varepsilon \ll \min \{d_n\}$ . Aquí  $\{d_n\}$  es un conjunto de números al azar no correlacionados con una distribución uniforme en  $[d(1 - \Delta); d(1 + \Delta)]$ . La barra se maquinó de una sola pieza de aluminio.

Cualitativamente la idea es la siguiente: si  $r/R \rightarrow 0$  se puede pensar que los cuerpos son independientes y se les puede asociar a cada uno de ellos un conjunto de frecuencias de resonancias  $f_j^{(n)} = j \frac{c_t}{2d_n}$  (ver eq. 2.17) que corresponde al que tendría una barra uniforme de longitud  $d_n$  con extremos libres. De este modelo simplificado de cuerpos independientes se puede ver que introducir un desorden en las  $\{d_n\}$  es una manera de simular el desorden diagonal de un hamiltoniano de *tight-binding* unidimensional, con los términos de acoplamiento a primeros vecinos  $r/R$  constantes. Tenemos entonces un sistema desordenado unidimensional. Por lo tanto, es candidato a presentar el fenómeno de localización de Anderson. Como se mencionó en el capítulo 2 las eigenfrecuencias juegan aquí el papel de las eigenenergías.

Se usaron los siguientes valores para los parámetros:  $N = 50$ ,  $\Delta = 0.35$ ,  $r/R = 0.65$ ,  $R = 1.28$  cm,  $d = 7.2$  cm,  $\varepsilon = 1.016$  mm.

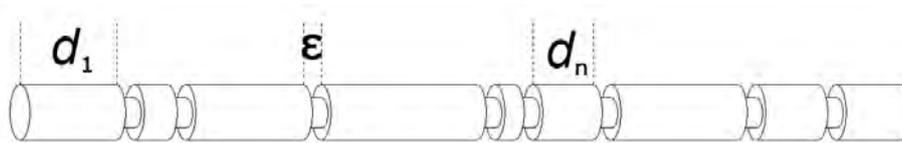


Figura 3.1: Modelo de barra usado

El trabajo se enfoca en estudiar la relación que existe entre la longitud de localización de los modos normales, el camino libre medio y la repulsión de las eigenfrecuencias del sistema, los cuales se calcularán numéricamente. Experimentalmente mediremos la longitud de localización  $\xi$  y el parámetro de repulsión de niveles  $\alpha$  como función de la frecuencia.

### 3.2. Protocolo experimental

El protocolo experimental (ver Fig. 3.2 y Apéndice E) hace uso del EMAT [33], aparato muy versátil capaz de actuar tanto de excitador como de detector de manera muy selectiva en los tipos de ondas que genera o detecta, en este caso torsionales. Este transductor tiene la gran ventaja, al sacar provecho de las corrientes de Foucault inducidas en el material, de funcionar sin ningún contacto mecánico con la barra. Asimismo, la única pequeña diferencia que se tiene entre la situación experimental y el caso ideal (considerado en las simulaciones numéricas) de condiciones a la frontera libres es mediante unos soportes formados por hilos delgados de nylon que sostienen la barra. En este trabajo se usó el rango de frecuencias de [10kHz ; 87kHz] por lo que siempre se cumplía la condición 1D:

$$R = 1.28 \text{ cm} < \lambda_{\text{mín}} = \frac{c_t}{f_{\text{máx}}} = \frac{3140}{87000} = 3.6 \text{ m.} \quad (3.1)$$

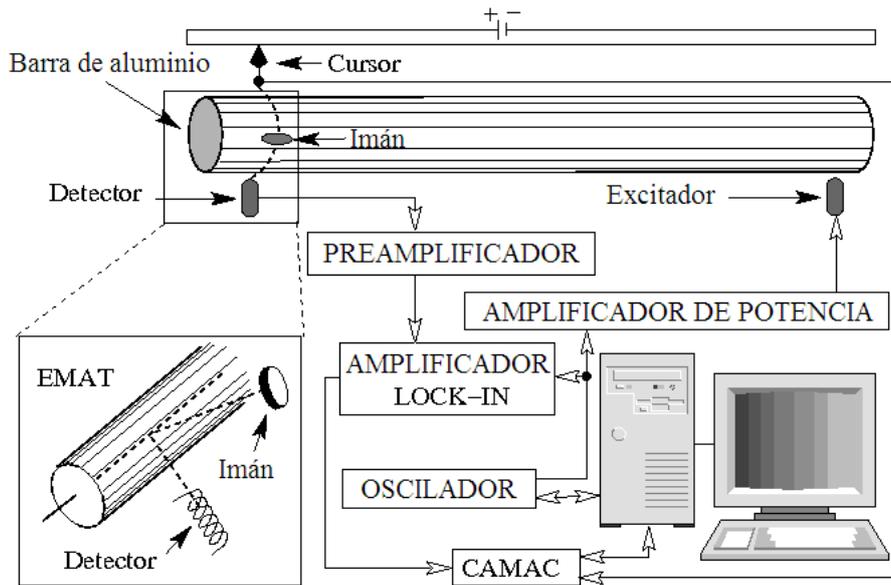


Figura 3.2: Diagrama de bloques del protocolo experimental

### 3.3. El camino libre medio $\ell$

El camino libre medio  $\ell$  se define como el inverso del coeficiente de reflexión (en energía) por unidad de longitud. En el Apéndice B detallamos el cálculo de este último. El resultado es que, en el límite de bajas frecuencias  $\frac{k\varepsilon}{\pi} \ll 1$  válido experimentalmente, la ecuación (5.16) se convierte en

$$\ell \approx \frac{1}{(k\varepsilon)^2} \frac{d}{4} \left[ \left( \frac{\eta^4 - 1}{\eta^4 + 1} \right)^2 + \left( \frac{\eta^4 + 1}{\eta^4 - 1} \right)^2 - 2 \right]. \quad (3.2)$$

De esta fórmula se deduce el siguiente comportamiento cualitativo: en el límite de bajas frecuencias  $\ell$  es una función decreciente de la frecuencia  $f$ . Este es el comportamiento opuesto al caso cuántico en el que el camino libre medio es una función creciente de la energía  $E$ .

Esta diferencia de comportamiento se explica en términos de los coeficientes de reflexión: en el caso clásico de la barra con muescas idénticas espaciadas al azar y en el caso cuántico de un potencial formado por barreras idénticas espaciadas al azar los coeficientes de reflexión en energía, respectivamente  $|r|_{clas}^2$  y  $|r|_{cuan}^2$ , se comportan de la siguiente forma:

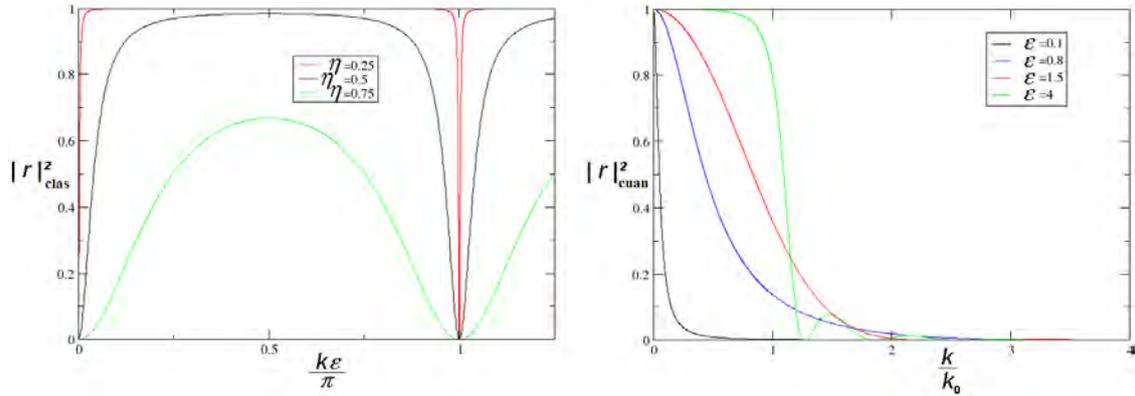


Figura 3.3: **a)**  $|r|_{clas}^2$  como función de  $k$ . La frecuencia  $f$  es proporcional a  $k$ , por lo que en el límite de bajas frecuencias  $|r|_{clas}^2$  es una función creciente de  $f$ . **b)**  $|r|_{cuan}^2$  como función de  $k$ . La energía  $E$  es proporcional a  $k^2$ , por lo que  $|r|_{cuan}^2$  es una función decreciente de  $E$ .

En el caso clásico el coeficiente de reflexión aumenta respecto a la frecuencia, mientras la frecuencia sea pequeña comparada con la frecuencia característica de las muescas. Esto es consecuencia de que las ondas ven mejor las muescas conforme baja su longitud de onda. Por otro lado, en el caso cuántico el coeficiente de reflexión disminuye con la energía, consecuencia de que las partículas más energéticas sienten menos el potencial.

Esa diferencia fundamental entre el modelo cuántico y el clásico refleja nuestra incapacidad de simular perfectamente el potencial cuántico. Esperamos entonces en nuestro caso un comportamiento de la longitud de localización con la frecuencia opuesto al comportamiento que tendría con la energía en el caso cuántico. Sin embargo, en el caso elástico también se encuentra el fenómeno de localización de Anderson.

### 3.4. La longitud de localización $\xi$

La longitud de localización  $\xi$  de un eigenmodo se puede definir de distintas maneras (ver [14] p.1496), ya sea por el coeficiente de transmisión del sistema, por el exponente de Lyapunov de la matriz de transferencia o por la envolvente de la función de onda: aquí se decidió definirla por medio de la envolvente de la eigenfunción.

Se calcularon numéricamente el espectro y todas las eigenfunciones en cada uno de los intervalos de frecuencia escogidos. Estos cálculos se hicieron por el método del mapeo de Poincaré (ver [31] y Apéndice D). Para cada una de las eigenfunciones calculadas se definió la longitud de localización de la siguiente manera:

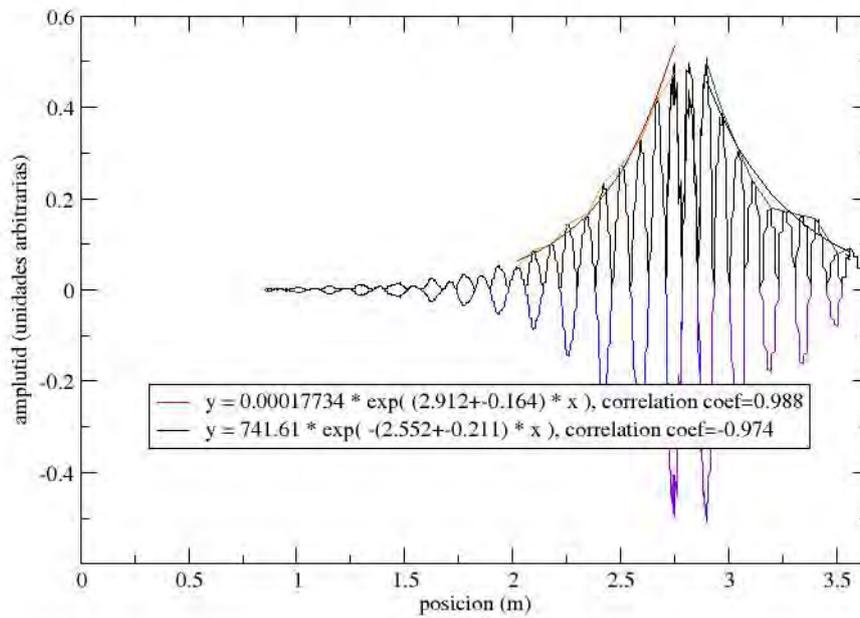
$$\xi \equiv \frac{\sum_{n=2}^N (d_n + \varepsilon)}{\sum_{n=1}^{N-1} \left| \ln \left( \frac{A_{n+1}}{A_n} \right) \right|} \quad (3.3)$$

donde  $\varphi(x) = A_n \cos(kx + \Phi_n)$  es la amplitud de onda en el cuerpo  $n$ . En el Apéndice D damos más explicaciones acerca de esta fórmula y la referencia [32] hace uso de una definición muy similar. De haberla calculado para cada uno de los modos normales se calculó la longitud de localización promedio de cada intervalo de frecuencias escogido.

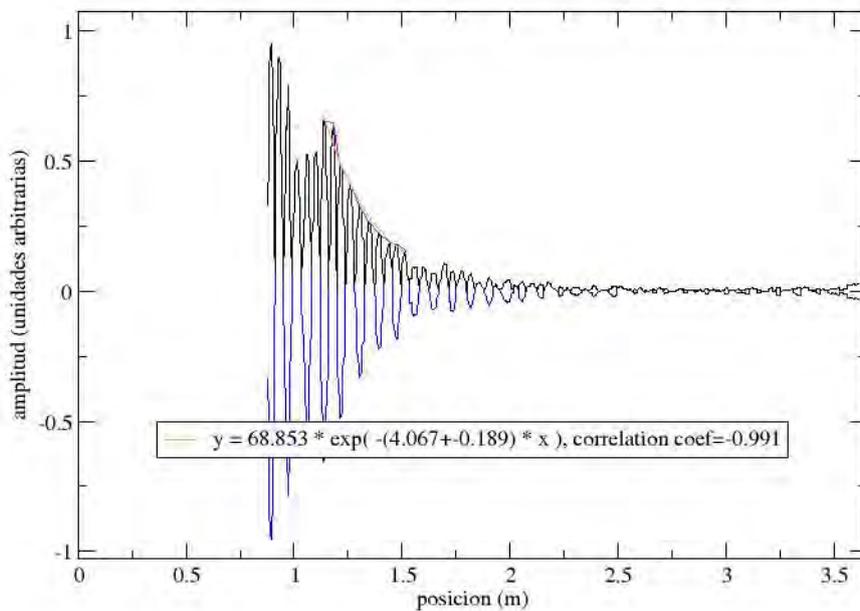
De manera experimental (ver Fig. 3.4) se mide una parte de una eigenfunción y se ajusta a sus máximos una función tipo  $\gamma \exp(-x/\xi)$ , usando mínimos cuadrados. Se miden varias eigenfunciones en cada intervalo de frecuencias y se evalúa su promedio.

### 3 Localización de Anderson en una barra elástica desordenada

Funcion de onda a la frecuencia normal  $f=18942$  Hz

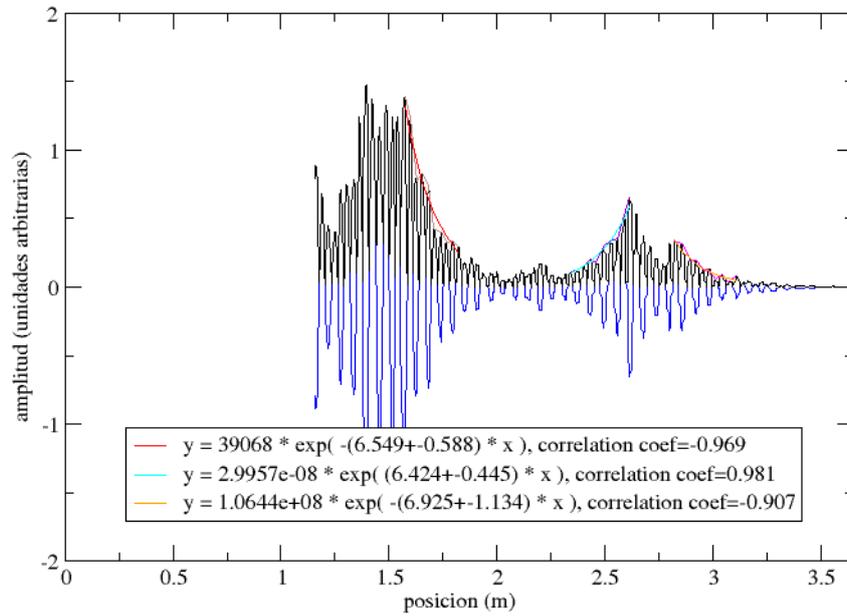


Funcion de onda a la frecuencia normal  $f=35560$  Hz



### 3 Localización de Anderson en una barra elástica desordenada

Funcion de onda a la frecuencia normal  $f=51553$  Hz



Funcion de onda a la frecuencia normal  $f=74620$  Hz

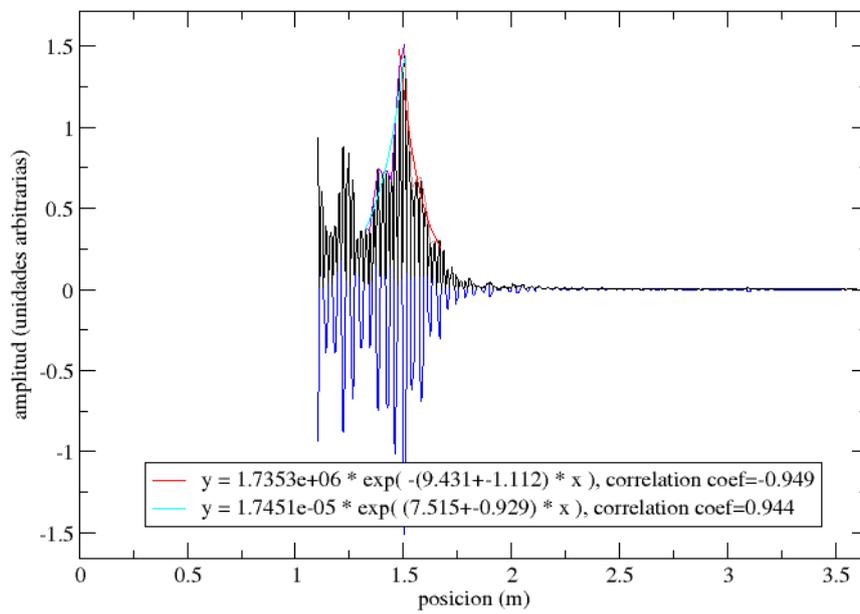


Figura 3.4: Funciones de onda medidas a distintas frecuencias con los ajustes de exponencial en su envolvente que definen  $\xi$

### 3 Localización de Anderson en una barra elástica desordenada

En general, sólo se tiene la parte derecha de la función de onda porque el excitador, colocado en la parte izquierda, impide el paso del detector. Con el fin de adoptar una regla sistemática para definir  $\xi$  y su error experimental, sólo se tomaron en cuenta los ajustes de exponenciales que decaían hacia la derecha ( $x$  crecientes). Los ajustes siempre se hicieron sobre 10 puntos. El error experimental se definió como la suma de la incertidumbre en el parámetro  $\xi$  dado por el ajuste y de la desviación estándar de las fluctuaciones en  $\xi$  observadas numéricamente (ver Apéndice F). En algunas funciones de onda se puede hacer el ajuste en varios lugares. En estos casos  $\xi$  se definió como el promedio de los parámetros de ajustes encontrados, considerando únicamente los ajustes cuyo coeficiente de correlación mayor a 0.9. El error se calculó aplicando la fórmula de propagación de errores (ver [34] p.43)

$$\sigma_x^2 = \sigma_u^2 \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \sigma_v^2 \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \dots \quad (3.4)$$

Se definió la longitud de localización promedio en cada intervalo con los puntos medidos en él.

Definir  $\xi$  para muchos modos normales nos permite tener  $\xi$  como función de la frecuencia (Fig. 3.5) y compararla con el camino libre medio  $\ell$  (5.16) calculado en el Apéndice B (Fig. 3.6). El error experimental en la frecuencia es mínimo y sólo se debe al fenómeno de dilatación térmica de la barra que puede ocurrir mientras se registran las mediciones y que cambia ligeramente las frecuencias de resonancia: la estabilidad relativa del oscilador es de una parte en  $10^6$ . Todas las mediciones se llevaron a cabo en un cuarto que se mantiene a la temperatura de  $21^\circ\text{C}$ . Se encuentra, como se previó, que  $\xi$  decae con la frecuencia. Los cálculos numéricos de  $\xi$  en la figura 3.5 y de  $\ell$  en la figura 3.6 se realizaron con el parámetro  $(r/R)_{ef}$  ajustado al resultado experimental.

### 3 Localización de Anderson en una barra elástica desordenada

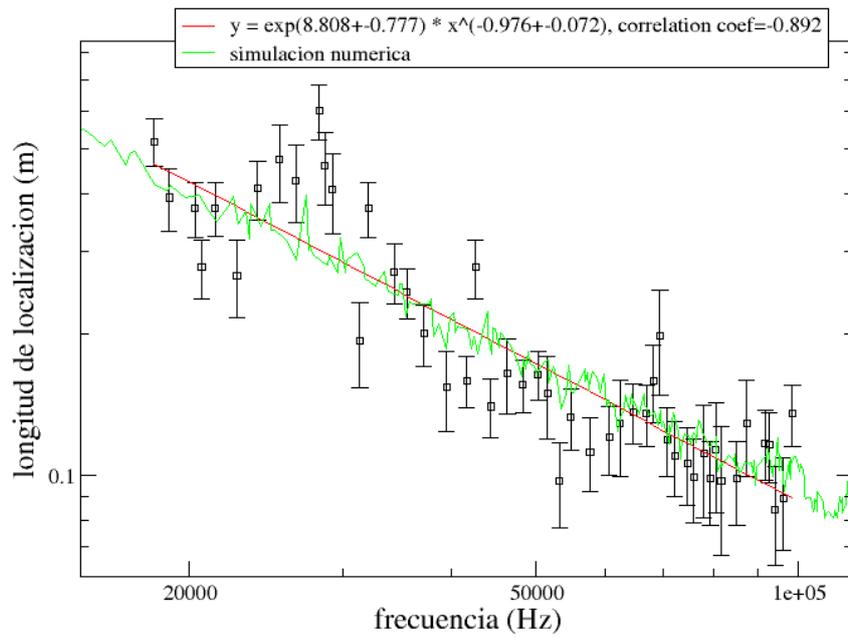


Figura 3.5: La longitud de localización  $\xi$  como función de la frecuencia comparada con los cálculos numéricos

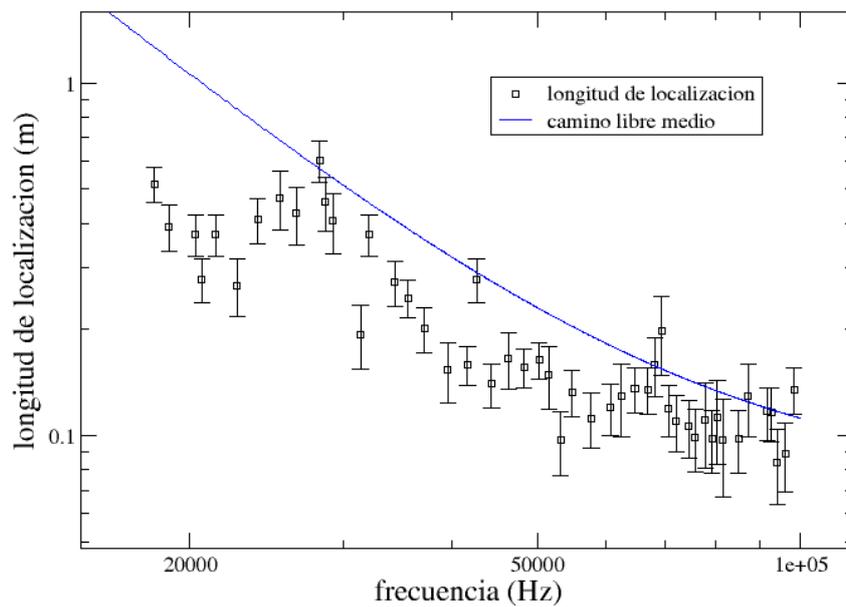


Figura 3.6: La longitud de localización  $\xi$  como función de la frecuencia comparada con el camino libre medio  $\ell$  calculado (5.16)

### 3.5. El parámetro de repulsión de niveles $\alpha$

En cada intervalo de frecuencias del espectro suficientemente poblado para poder hacer una estadística se puede definir un parámetro de repulsión de niveles  $\alpha$  ajustando a la distribución de espaciamiento de niveles vecinos una función de Izrailev (ver Apéndice C) con mínimos cuadrados:

$$P_\alpha(s) = As^\alpha (1 + B\alpha s)^{f(\alpha)} \exp \left[ -\frac{\pi^2}{16} \alpha s^2 - \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) s \right], \quad (3.5)$$

donde  $f(\alpha) = \frac{2^\alpha(1-\alpha/2)}{\alpha} - 0.16874$  y  $s = \frac{f_{j+1}-f_j}{\langle f_{j+1}-f_j \rangle}$  es la distancia normalizada entre niveles vecinos.  $A$  y  $B$  son constantes de normalización que se determinan con las relaciones usuales  $\langle P \rangle = 1$  y  $\langle s \rangle = 1$ .

Numéricamente se puede escoger un tamaño de intervalo muy pequeño y mejorar la estadística acumulando datos sobre muchas barras cuyas únicas diferencias entre sí son el conjunto de números al azar que se usa para definir  $\{d_n\}$ . Experimentalmente sólo tenemos una barra y la decisión del tamaño del intervalo es arbitraria. Decidimos hacer las estadísticas en intervalos de 20kHz, que contienen en promedio unos 50 modos, lo que resultaba ser un buen compromiso entre los valores extremos que se podían obtener y el tamaño de las barras de error resultantes. En cada intervalo de frecuencia se calculó el histograma de distancias entre niveles vecinos y se definió  $\alpha$  (ver Fig. 3.7). De ahí obtuvimos  $\alpha(f)$  (Fig. 3.8), donde  $f$  es el centro del intervalo. Al traslapar el intervalo se pudieron obtener 13 puntos en el rango de frecuencias [10kHz ; 87kHz].

### 3 Localización de Anderson en una barra elástica desordenada

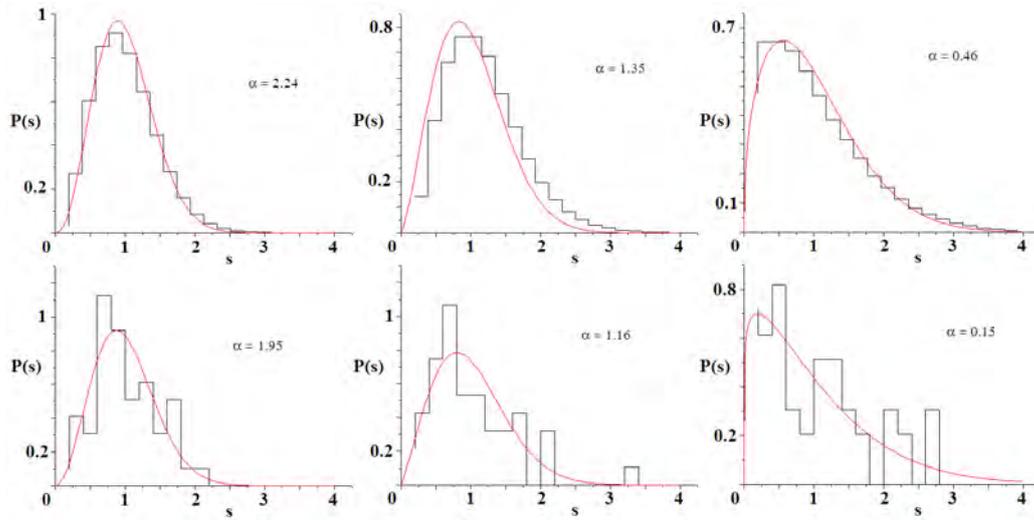


Figura 3.7: Histogramas de distribuciones de niveles vecinos y su ajuste con funciones de Izrailev usando mínimos cuadrados. Los tres primeros corresponden a histogramas numéricos con acumulación de datos sobre 3000 barras. Los tres últimos son histogramas experimentales de una sola barra.

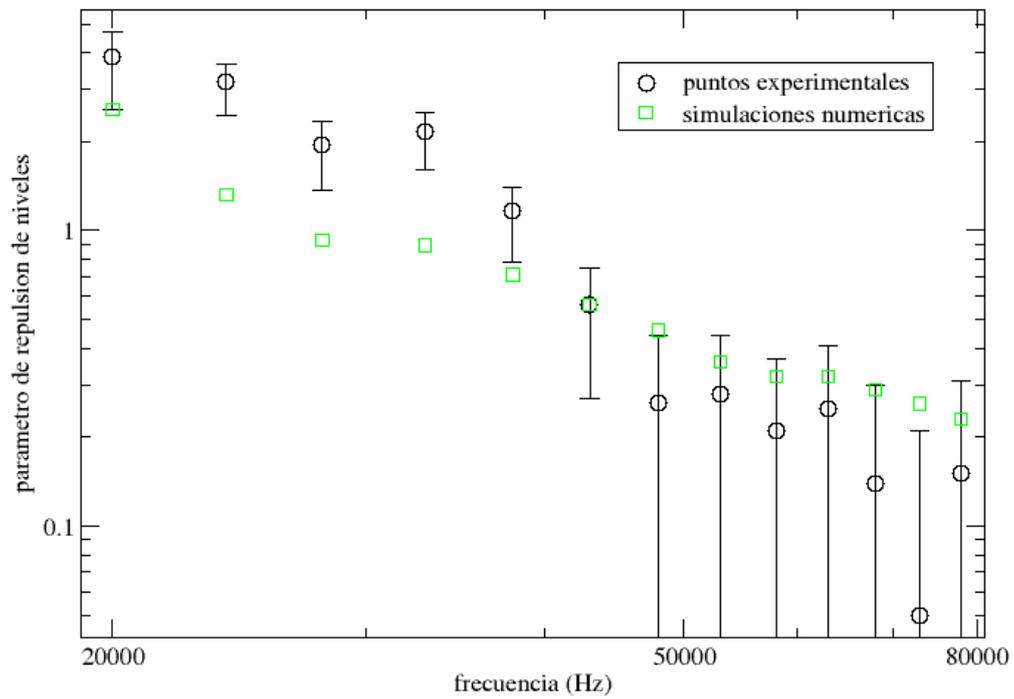


Figura 3.8: El parámetro de repulsión de niveles  $\alpha$  como función de la frecuencia

### 3 Localización de Anderson en una barra elástica desordenada

Las barras de error experimentales se calcularon de manera numérica como función de la frecuencia haciendo un cálculo de desviación estándar sobre 1000 barras en los valores que puede dar una barra a una frecuencia dada y el valor promedio a esta misma frecuencia (ver Apéndice E). El cálculo numérico mostrado en la gráfica se realizó con el mismo parámetro  $(r/R)_{ef}$  ajustado al experimento de  $\xi(f)$  y corresponde a una acumulación de datos sobre 5000 barras.

Tener  $\xi(f)$  y  $\alpha(f)$  nos permite obtener  $\xi(\alpha)$  (Fig. 3.9), donde  $\xi$  está definida como el promedio de los valores que toma en el intervalo de frecuencias donde se define  $\alpha$ .

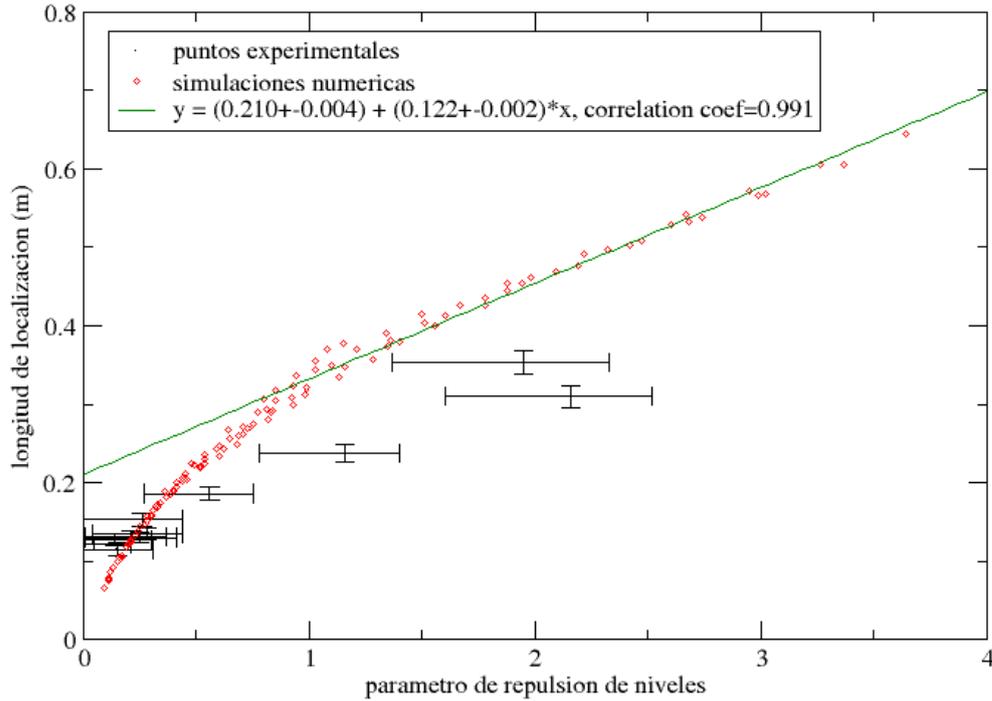


Figura 3.9: La longitud de localización  $\xi$  como función del parámetro de repulsión de niveles  $\alpha$

El cálculo numérico mostrado en la gráfica corresponde a una acumulación de datos sobre 5000 barras con el mismo tamaño del intervalo de frecuencias (20kHz). Cabe destacar que es independiente de  $(r/R)_{ef}$ , ya que  $\alpha$  y  $\xi$  tienen la misma dependencia en este parámetro. Debido a que se tiene una sola barra, la estadística para definir  $\alpha$  de manera experimental es pobre y los puntos se alejan de la gráfica numérica, con incertidumbres grandes. Sin embargo, como lo indica la figura 3.10 en la que se simuló experimentos numéricamente al hacer estadísticas sobre una barra y repetir en varias barras, los puntos experimentales se encuentran adentro de la nube de puntos numéricos y son por lo tanto perfectamente consistentes con los cálculos.

### 3 Localización de Anderson en una barra elástica desordenada

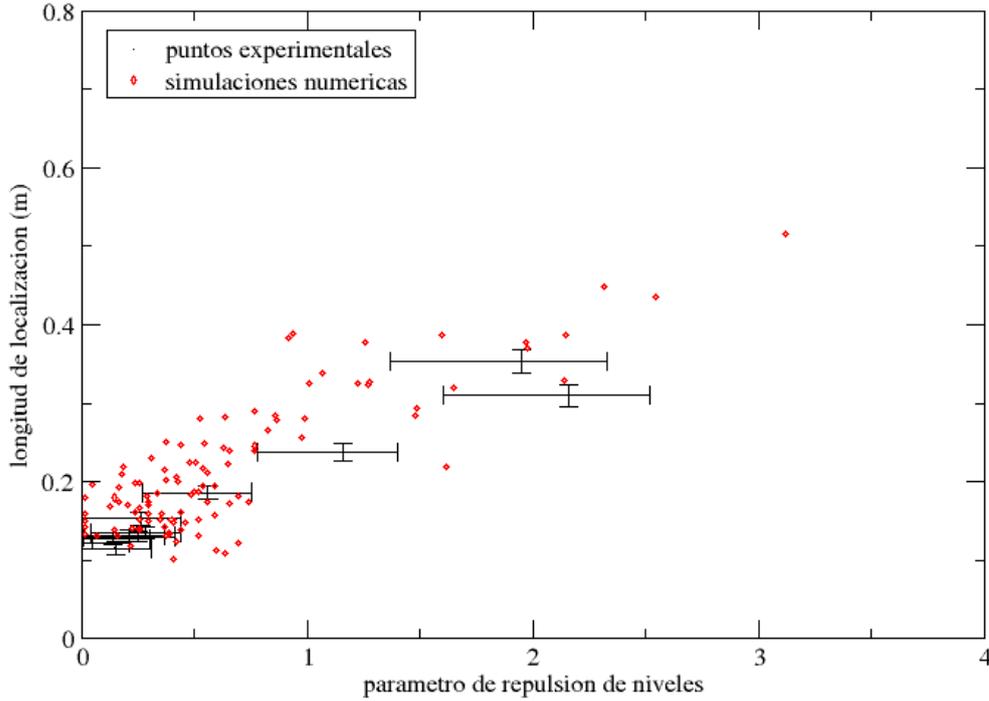


Figura 3.10:  $\xi$  como función de  $\alpha$ : comparación de los puntos experimentales con simulaciones numéricas sobre una barra. Se graficaron 9 juegos de simulaciones, correspondiendo a 9 barras distintas.

La figura 3.9 se compara con el resultado de Izrailev en el caso cuántico de un hamiltoniano de *tight binding* unidimensional (ver Apéndice C y en particular la figura 5.12). En el caso cuántico, la dependencia de un parámetro respecto al otro es lineal. En nuestro análogo elástico también se encuentra un régimen lineal para  $\alpha \geq 1$ , sin embargo, en la región  $0 \leq \alpha \leq 1$  el comportamiento parece cuadrático.

Estas dependencias se explicarían muy probablemente mediante las distribuciones cuántica y clásica de la matriz de dispersión y de sus eigenvalores. Sin embargo, por lo menos en el caso clásico, tal análisis no existe y el resultado encontrado no se puede comparar con ninguna predicción teórica.

## 4 Conclusiones

En el presente trabajo se diseñó una barra elástica con una estructura desordenada y se estudió, tanto numérica como experimentalmente, el fenómeno de localización de Anderson. Por primera vez en sistemas elásticos se midió la longitud de localización de los modos normales por medio de las funciones de onda, y no de la transmitancia del sistema, como función de la frecuencia. Se obtuvo un buen acuerdo con las simulaciones numéricas (Fig. 3.5). El comportamiento encontrado es consistente con la predicción teórica, derivada en mecánica cuántica, que la longitud de localización es proporcional al camino libre medio (Fig. 3.6).

Por otra parte, se estudió el espectro de frecuencias propias de la barra. Se midió el parámetro de repulsión de niveles, definido según la fórmula de Izrailev, como función de la frecuencia (Fig. 3.8) y de la longitud de localización (Fig. 3.9). El resultado experimental es consistente con las simulaciones numéricas, aunque, debido a que tenemos una sola barra, tiene una mala estadística. La comparación con el resultado de F. Izrailev en el caso cuántico (Fig. 5.12) enseña similitudes y diferencias, las cuales se podrían explicar mediante las distribuciones de probabilidades de las matrices de dispersión y de sus eigenvalores. Puesto que no existe tal análisis teórico en el caso clásico, esta parte del estudio es inconclusa.

Sin embargo, a pesar de todas las similitudes observadas de este análogo clásico con el modelo cuántico de Anderson, se encontró una vez más que el fenómeno clásico se comporta respecto a la frecuencia de manera muy diferente al cuántico respecto a la energía: en nuestro análogo la longitud de localización de los modos normales decrece con la frecuencia mientras que en la teoría cuántica de los sólidos ésta crece. Esta diferencia se debe a que el coeficiente de reflexión de los objetos dispersores, dispuestos de manera aleatoria, tiene un comportamiento opuesto con la frecuencia, o energía, en los dos casos. En el caso cuántico el objeto dispersor - una barrera de potencial - se vuelve despreciable cuando la energía cinética de las partículas supera mucho su altura, mientras que en el caso clásico una muesca se comporta como un interferómetro de Fabry-Pérot, es decir, su coeficiente de reflexión aumenta con la frecuencia.

La pregunta de si se puede o no diseñar un sistema elástico que reproduzca perfectamente el juego de condiciones de continuidad cuánticas, y que de esta manera simule plenamente el hamiltoniano cuántico, sigue abierta. En todo caso, en este trabajo se ha demostrado experimentalmente, por primera vez en el caso elástico, que la localización de Anderson también existe para barras elásticas desordenadas.

## 5 Apéndices

### 5.1. A. Diseño de la barra

Para simular un sistema cuántico desordenado unidimensional, cuyos modos normales son localizados, con una barra elástica (de aluminio) se usó como guía directiva un modelo cualitativo de barras independientes y para optimizar los distintos parámetros de construcción se llevaron a cabo cálculos usando el método del mapeo de Poincaré (ver Apéndice D).

El modelo de barras independientes consiste en aproximar una barra formada por cilindros del mismo radio y eje y de longitud  $d_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , unidos por cilindros pequeños de mismo eje y de radio menor, por una barra formada por los mismos cilindros grandes muy débilmente acoplados (ver Fig.5.1).

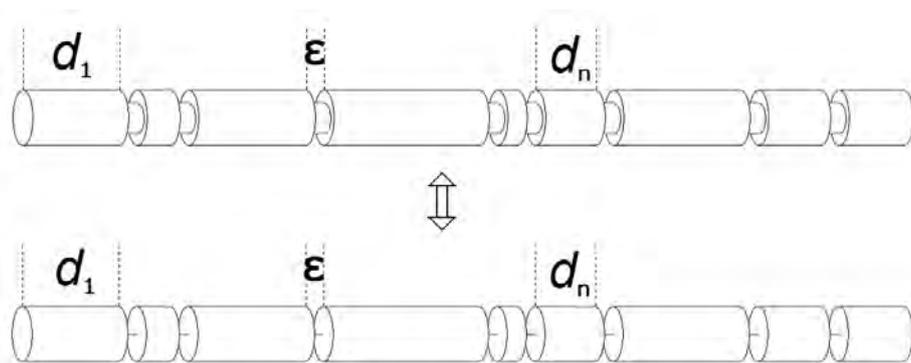


Figura 5.1: Ilustración del modelo de barras independientes

Se considera entonces que cada uno de los cilindros es independiente de los otros y tiene su propio espectro de frecuencias normales con extremos libres  $f_j^{(n)} = j \frac{c_t}{2d_n}$  (ver eq.2.17). Cada cilindro se puede ver como un sitio del hamiltoniano cuántico y las  $f_j^{(n)}$  como los términos diagonales de ese mismo hamiltoniano. Considerar un radio no nulo en los cilindros pequeños de acoplamiento puede verse como agregar al hamiltoniano un término no diagonal a primeros vecinos.

Con este modelo sencillo, se simula un hamiltoniano de *tight-binding* con desorden diagonal tomando a las longitudes  $d_n$  con desorden y a los acoplamientos entre cuerpos constantes. El conjunto  $\{d_n\}$  es un conjunto de números al azar no correlacionados con

## 5 Apéndices

una distribución uniforme en  $[d(1 - \Delta); d(1 + \Delta)]$  (ver Fig.5.2). Los cilindros pequeños son idénticos, de radio  $r < R$  y de longitud  $\varepsilon \ll \text{mín} \{d_n\}$ .

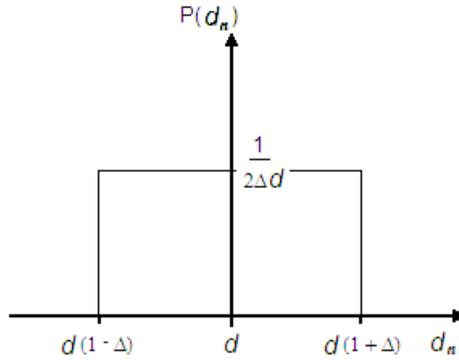


Figura 5.2: Distribución de probabilidad de  $d_n$

Los parámetros que tiene el sistema son los siguientes: el ancho de la distribución de longitudes  $\Delta$ , el cociente de radios  $r/R$ , el número de celdas  $N$ , la longitud promedio de los cuerpos  $\langle d_n \rangle = d$ , el largo de los cuerpos pequeños  $\varepsilon$ , el material y el tipo de ondas usadas.

Las restricciones experimentales implican que el sistema de excitación-detección funciona entre frecuencias de 0kHz y 150kHz y que tiene una extensión espacial de 3.7 m para medir las eigenfunciones. Nos conviene tener la barra más larga posible para obtener una densidad de estados lo más alta posible: por ello se usó una barra de 3.65m de largo. Otra restricción es que el material debe ser conductor para que se puedan generar corrientes de Foucault en él, pero no debe ser ferromagnético para que no se le adhieran los imanes de los EMAT. El aluminio es un material ideal por estas razones. Con el fin de buscar los parámetros más adecuados a la realización del experimento se calculan los efectos que tiene cada uno.

**Efecto de  $\Delta$ :** Si  $\Delta$  tiende a cero las longitudes de los cuerpos se vuelven idénticas y se simula un cristal unidimensional localmente invariante frente a translaciones. El espectro tiene una estructura de bandas, conforme a la teoría de Bloch y las eigenfunciones son extendidas. Este caso se ha estudiado en detalles en la referencia [24] y se ha encontrado que el comportamiento del fenómeno clásico respecto a la frecuencia es distinto al caso cuántico respecto a la energía: en las barras elásticas el ancho del gap entre las bandas aumenta con la frecuencia mientras que en estado sólido él disminuye con la energía hasta convertirse en un continuo de estados. En la figura 5.3 se grafica el espectro de una barra periódica, en las dos escalas  $f$  y  $f^2$  ya que ambas pueden interpretarse como análogo de la energía.

## 5 Apéndices

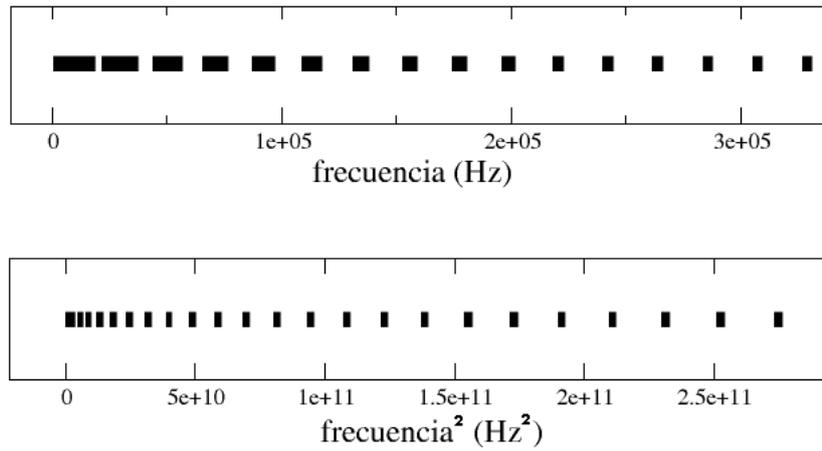


Figura 5.3: espectro de una barra periodica con  $N = 50$ ,  $d = 7.2$  cm,  $\varepsilon = 1.016$  mm y  $r/R = 0.65$

Cuando  $\Delta$  se aleja de cero se dan cruces evitados de niveles y la densidad de niveles se vuelve más constante. Las funciones de onda se localizan.

El tamaño del desorden se puede medir por el número de cruces evitados que ha sufrido un nivel. Se ve claramente en la Fig.5.4 que tal cantidad depende de la frecuencia. Cualitativamente, aumentar la frecuencia es disminuir la longitud de onda y ver mejor los defectos. La primera banda no enseña ningún cruce evitado, salvo para los modos más altos y para desórdenes muy grandes. En esa banda la longitud de onda es del tamaño del sistema total. Por lo tanto, la onda “ve muy mal” la estructura y se localizaría a distancias mucho más grandes. A la escala del sistema los modos son extendidos. Por lo tanto, las mediciones siempre se hicieron a partir de los últimos niveles de esa banda.

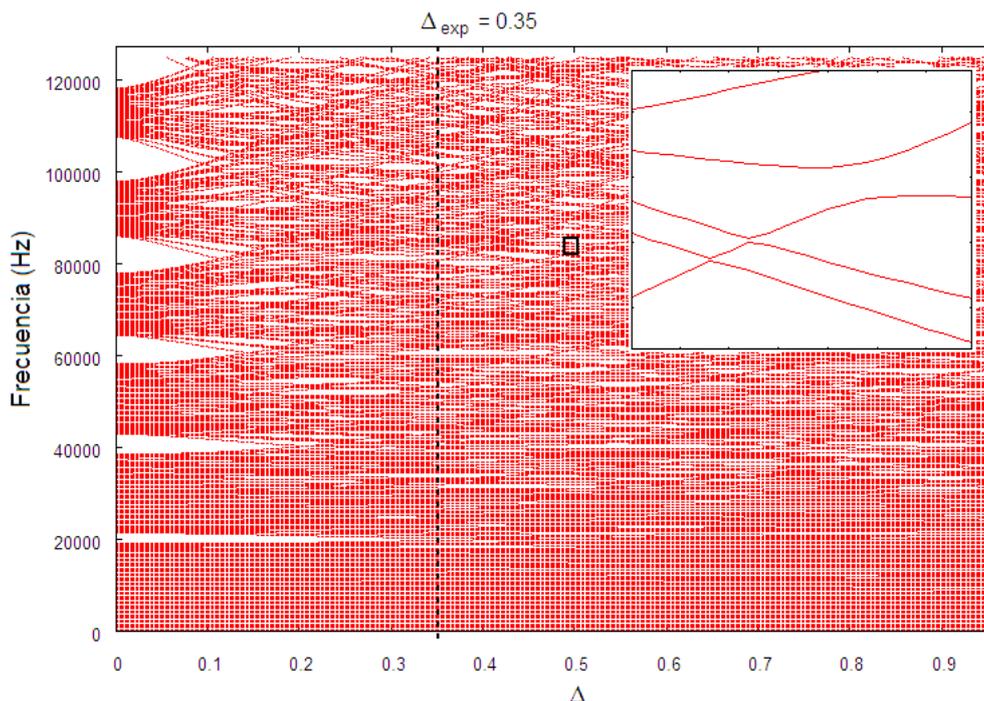


Figura 5.4: Frecuencias normales contra tamaño del desorden. La semilla del generador de números al azar es constante, se ven los cruces evitados de niveles

Con el fin de tener una densidad de niveles constante en todo el rango de frecuencias usadas, se escogió un desorden de  $\Delta = 0.35$ , que es el desorden a partir del cual desaparece el gap entre la primera banda, de estados extendidos, y los estados localizados. De esta manera se puede definir un parámetro de repulsión de niveles, que llamamos  $\alpha$ , en todas las ventanas de frecuencias del espectro.

**Efecto de  $r/R$ :** Si  $r/R$  tiende a cero, cada celda se vuelve independiente de las otras, el espectro de la barra se convierte en la suma de los espectros individuales de cuerpos independientes y cada modo se localiza exponencialmente muy fuertemente en la celda en que resuena. Si  $r/R$  aumenta, el espectro se deforma, los modos se siguen localizando exponencialmente pero con una longitud característica mayor y en celdas que ya no necesariamente son las que se esperarían según el modelo de cuerpos independientes. Otro efecto notable es que los modos empiezan a localizarse exponencialmente en varias celdas a la vez: la función de onda presenta varios máximos. Esto es consecuencia de que  $r/R$  juega el papel no sólo de acoplamiento entre primeros vecinos sino también de “factor de disipación” para cada celda (pensándola como celda acoplada a barras infinitas de cada lado, el cociente  $r/R$  tiene que ver con la rapidez con que una celda pierde su energía), lo cual ensancha las resonancias en frecuencia y hace que se puedan mezclar.

## 5 Apéndices

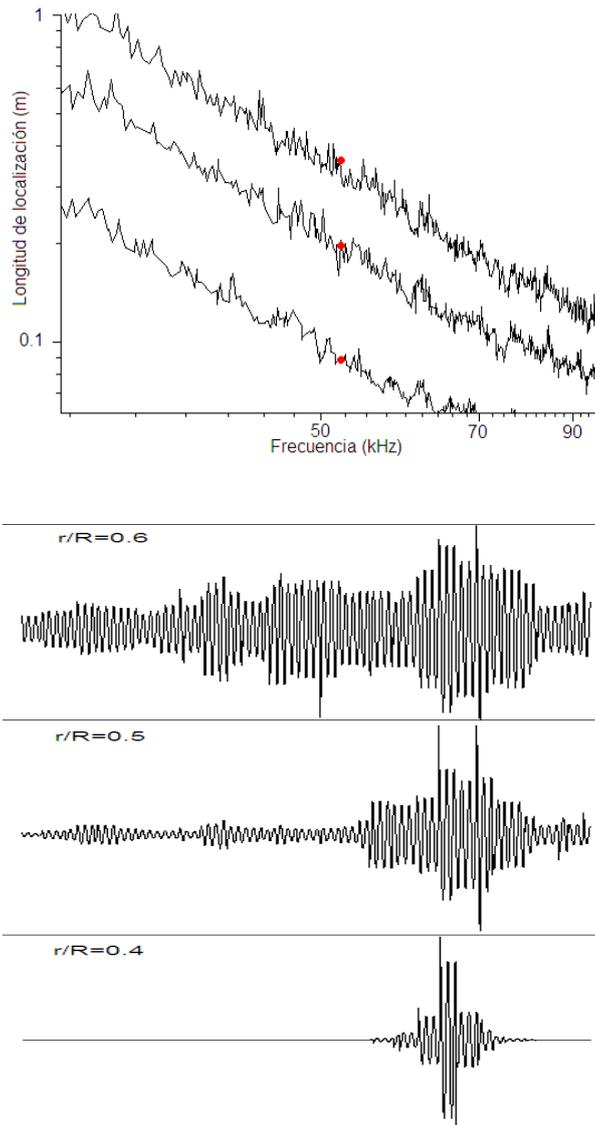


Figura 5.5: a) Longitud de localización contra frecuencia para tres valores distintos de  $r/R$  (de arriba abajo 0.6, 0.5 y 0.4) b) Funciones de onda a una misma frecuencia. El valor  $r/R = 0.4$  da un acoplamiento débil y una función de onda muy bien localizada exponencialmente. La envolvente es razonablemente simétrica. Para  $r/R = 0.5$  se tiene una función menos localizada cuya envolvente empieza a diferir de una exponencial perfecta. Se ven dos máximos locales en la parte izquierda. Con  $r/R = 0.6$  se obtiene una función muy extendida en la porción del cálculo. Presenta una tendencia a decaer exponencialmente a distancias grandes

**Efecto de  $d$ :** El valor de la longitud promedio de los cuerpos fija la escala en frecuencias. La frecuencia característica  $f_d = \frac{ct}{2d}$  corresponde al centro de la primera banda de frecuencias, cuando el desorden es nulo. Las siguientes bandas están centradas en múltiplos de  $f_d$ . En el caso de tener desorden, las bandas se han mezclado y ya no existen. Sin embargo, por debajo de  $f_d$  los modos aún no se localizan. Nos conviene entonces tener  $f_d$  baja para poder medir en un rango más amplio de frecuencias, esto es, tener  $d$  grande.

**Efecto de  $N$ :** Aumentar  $N$  vuelve más cercano al infinito el sistema y la periodicidad local se vuelve global. Disminuyen las fluctuaciones en la longitud de localización (ver Fig.5.6). Sin embargo, habiendo fijado la longitud total de la barra, aumentar  $N$  también disminuye la longitud promedio de las celdas. Se debe entonces encontrar un compromiso entre tener una  $d$  suficientemente grande y una  $N$  suficientemente alta. Decidimos usar  $N = 50$ .

**Efecto de  $\varepsilon$ :** A frecuencias bajas comparadas con  $f_\varepsilon = \frac{ct}{2\varepsilon}$  el coeficiente de reflexión de cada muesca aumenta de manera lineal con la frecuencia y con  $\varepsilon$  (ver Apéndice B). Aumentar  $\varepsilon$  disminuye entonces la longitud de localización de los modos normales. En la frecuencia característica de los cilindros pequeños  $f = f_\varepsilon$  el coeficiente de reflexión de las muescas se hace cero, es decir, las muescas se vuelven transparentes y tanto el camino libre medio como la longitud de localización divergen (ver Fig.5.6). Para poder tener una variedad amplia de camino libre medio  $\ell$  y de longitud de localización  $\xi$  nos conviene quedarnos en el régimen lineal  $f \ll f_\varepsilon$ , es decir, tener una  $\varepsilon$  pequeña. Sin embargo, como se menciona en el capítulo 2 y en la referencia [24], las condiciones a la frontera en las muescas que usamos son aproximadas y se tiene que tomar en cuenta una corrección que aumenta como  $(r/R)_{eff} = \frac{r/R}{(1+\varepsilon_t/\varepsilon)^{1/4}}$ . El parámetro empírico  $\varepsilon_t$  vale 0.88 mm en  $r/R = 0.236$  pero tiene una dependencia en  $r/R$  que no es conocida. Por lo tanto, nos conviene evitar que esa corrección tenga demasiada importancia, esto es, debemos tomar  $\varepsilon$  relativamente grande. Hay que encontrar un compromiso con una  $\varepsilon$  mediana. Decidimos usar  $\varepsilon = 1.016$  mm, lo que nos dio  $f_\varepsilon = 1.57$  MHz, es decir, 10-15 veces la frecuencia máxima que íbamos a poder alcanzar con las características del EMAT.

## 5 Apéndices

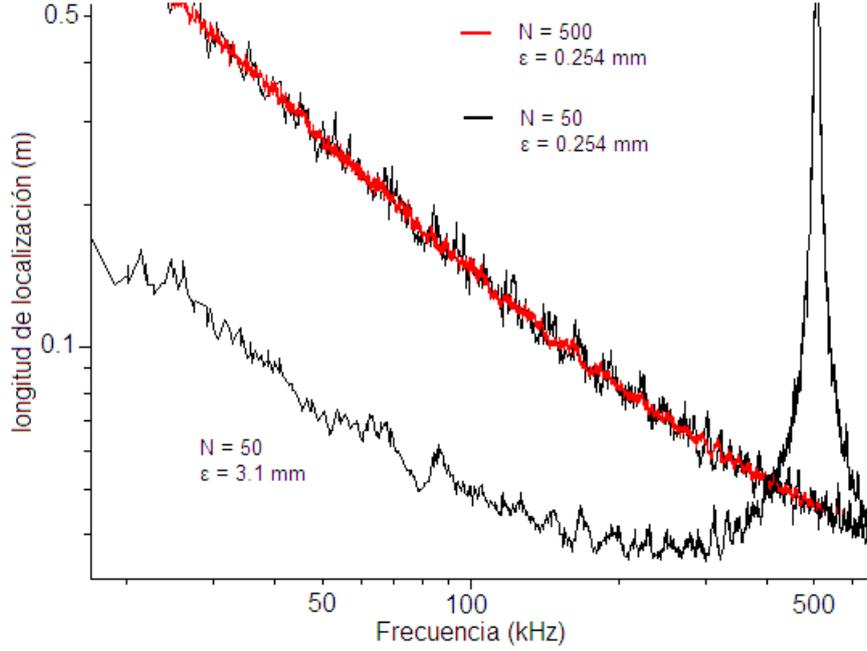


Figura 5.6: Longitud de localización contra frecuencia (escalas logarítmicas). Aumentar  $N$  (dejando fija  $d$ , es decir, aumentando la longitud total de la barra) sólo disminuye las fluctuaciones. Aumentar  $\epsilon$  disminuye la longitud de localización y corre el “pico de transparencia” de las muescas hacia frecuencias más bajas

Entre las ondas de compresión y de torsión se prefirieron usar las de torsión porque tienen una velocidad de propagación menor en el aluminio. Lo anterior es con el fin de minimizar  $f_d = \frac{c_t}{2d}$  y de maximizar la densidad de estados normales.

En resumen, se usaron los siguientes valores para los parámetros:  $N = 50$ ,  $\Delta = 0.35$ ,  $r/R = 0.65$ ,  $R = 1.28$  cm,  $d = 7.2$  cm,  $\epsilon = 1.016$  mm,  $f_d = 21.8$  kHz,  $f_\epsilon = 1.57$  MHz. La barra tiene una longitud de 3.65 m, lo que da aproximadamente un estado cada 420 Hz o bien 48 estados en un intervalo de 20 kHz. Por ser un sistema unidimensional, el número de canales (o número de excitaciones de la sección transversal) del sistema es 1. Esto sigue siendo válido mientras la longitud de onda sea grande comparada con el radio de los cilindros. En el rango de frecuencias usado, siempre se cumple esta condición 1D:

$$R = 1.28 \text{ cm} < \lambda_{\text{mín}} = \frac{c_t}{f_{\text{máx}}} = \frac{3140}{87000} = 3.6 \text{ cm}.$$

La barra se maquinó a partir de una sola pieza de aluminio: una barra cilíndrica calibrada de media pulgada de diámetro ( $R = 1.28$  cm) y de 3.66 m de largo. Las muescas se maquinaron usando un torno, para asegurar una buena simetría alrededor del eje. Se aseguró una profundidad  $r/R$  muy constante de muesca a muesca usando un tope; los valores extremos medidos son  $(r/R)_{\text{mín}} = 0.650$  y  $(r/R)_{\text{máx}} = 0.659$ . Se aseguró un ancho  $\epsilon$  muy constante usando para cortar un disco calibrado de joyero de 40 milésimas

## 5 Apéndices

de pulgadas (1.016 mm). Finalmente, se obtuvo una barra aleatoria maquinada con los siguientes valores medidos de  $d_n$  y  $r_{n+1}/R$ :

	$d_n$ (mm)	$r_{n+1}/R$
1	67.31	0.656
2	67.44	0.656
3	83.46	0.656
4	52.65	0.656
5	57.15	0.654
6	77.55	0.656
7	83.97	0.658
8	65.99	0.655
9	82.88	0.657
10	60.71	0.658
11	58.50	0.659
12	68.68	0.658
13	69.44	0.656
14	59.03	0.656
15	68.02	0.653
16	85.90	0.655
17	87.22	0.659
18	63.25	0.657
19	89.66	0.657
20	72.77	0.650
21	78.46	0.659
22	67.44	0.658
23	88.32	0.659
24	80.44	0.658
25	78.28	0.657

	$d_n$ (mm)	$r_{n+1}/R$
26	57.18	0.656
27	80.42	0.657
28	78.49	0.658
29	69.39	0.657
30	96.24	0.658
31	86.33	0.657
32	93.01	0.657
33	94.44	0.656
34	67.31	0.657
35	69.70	0.656
36	69.80	0.656
37	73.99	0.656
38	51.13	0.656
39	57.25	0.658
40	68.48	0.657
41	52.78	0.657
42	90.25	0.658
43	69.93	0.657
44	48.97	0.658
45	81.76	0.656
46	79.53	0.657
47	53.67	0.656
48	73.43	0.656
49	61.54	0.656
50	77.77	/

## 5.2. B. Cálculo de los coeficientes de reflexión de los sistemas clásico y cuántico

En este apéndice detallamos el cálculo del coeficiente de reflexión de un objeto dispersor en el caso cuántico (una barrera de potencial, ver Fig. 5.9) y clásico (una muesca, ver Fig. 5.7) y comparamos el comportamiento que tiene este coeficiente respecto a la energía (o frecuencia) en los dos casos.

**Caso clásico:** Consideremos una muesca de ancho  $\varepsilon$  en una barra infinita (Fig. 5.7). El cociente del radio de la muesca entre el radio de la barra vale  $\eta$ . En las tres regiones del espacio definidas por la muesca, la ecuación de ondas torsionales (2.15) se integra de manera trivial (2.18). El cálculo del coeficiente de reflexión consiste en encontrar la relación que existe entre las amplitudes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  por medio de las condiciones de continuidad.

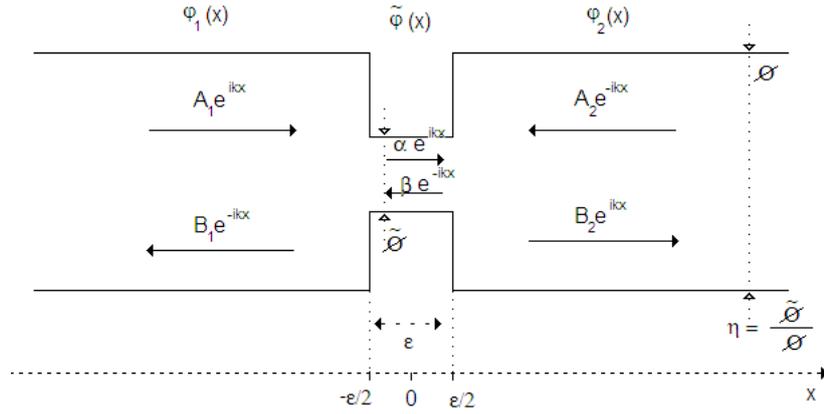


Figura 5.7: Ampliación de una muesca de ancho  $\varepsilon$  y de cociente de radios  $\eta$

Por definición de la matriz de dispersión  $S$ , las amplitudes de las ondas entrantes y salientes se relacionan de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Las condiciones de continuidad del desplazamiento y de la torca en  $-\varepsilon/2$  y  $\varepsilon/2$  se escriben, de forma simplificada (ver (2.19)):

$$\begin{cases} \varphi_1(x = -\varepsilon/2) = \tilde{\varphi}(x = -\varepsilon/2) \\ \varphi_1'(x = -\varepsilon/2) = \eta^4 \tilde{\varphi}'(x = -\varepsilon/2) \end{cases} \quad (5.2)$$

## 5 Apéndices

$$\begin{cases} \varphi_2(x = \varepsilon/2) = \tilde{\varphi}(x = \varepsilon/2) \\ \varphi_2'(x = \varepsilon/2) = \eta^4 \tilde{\varphi}'(x = \varepsilon/2) \end{cases} \quad (5.3)$$

y en términos de las amplitudes:

$$\begin{cases} A_1 e^{-ik\varepsilon/2} + B_1 e^{ik\varepsilon/2} = \alpha e^{-ik\varepsilon/2} + \beta e^{ik\varepsilon/2} \\ ikA_1 e^{-ik\varepsilon/2} - ikB_1 e^{ik\varepsilon/2} = \eta^4 ik\alpha e^{-ik\varepsilon/2} - \eta^4 ik\beta e^{ik\varepsilon/2} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} A_2 e^{-ik\varepsilon/2} + B_2 e^{ik\varepsilon/2} = \alpha e^{ik\varepsilon/2} + \beta e^{-ik\varepsilon/2} \\ -ikA_2 e^{-ik\varepsilon/2} + ikB_2 e^{ik\varepsilon/2} = \eta^4 ik\alpha e^{ik\varepsilon/2} - \eta^4 ik\beta e^{-ik\varepsilon/2} \end{cases} \quad (5.5)$$

Despejamos  $\alpha$  y  $\beta$  en los dos sistemas de ecuaciones:

$$(5.4) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} e^{ik\varepsilon/2} [A_1 (1 + \eta^{-4}) e^{-ik\varepsilon/2} + B_1 (1 - \eta^{-4}) e^{ik\varepsilon/2}] \\ \beta = \frac{1}{2} e^{-ik\varepsilon/2} [A_1 (1 - \eta^{-4}) e^{-ik\varepsilon/2} + B_1 (1 + \eta^{-4}) e^{ik\varepsilon/2}] \end{cases} \quad (5.6)$$

$$(5.5) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} e^{-ik\varepsilon/2} [A_2 (1 - \eta^{-4}) e^{-ik\varepsilon/2} + B_2 (1 + \eta^{-4}) e^{ik\varepsilon/2}] \\ \beta = \frac{1}{2} e^{ik\varepsilon/2} [A_2 (1 + \eta^{-4}) e^{-ik\varepsilon/2} + B_2 (1 - \eta^{-4}) e^{ik\varepsilon/2}] \end{cases} \quad (5.7)$$

Las dos expresiones de  $\alpha$  y  $\beta$  nos dan dos relaciones directas entre los 4 coeficientes:

$$\begin{cases} A_1 (1 + \eta^{-4}) + B_1 (1 - \eta^{-4}) e^{ik\varepsilon} = A_2 (1 - \eta^{-4}) e^{-ik\varepsilon} + B_2 (1 + \eta^{-4}) \\ A_1 (1 - \eta^{-4}) e^{-ik\varepsilon} + B_1 (1 + \eta^{-4}) = A_2 (1 + \eta^{-4}) + B_2 (1 - \eta^{-4}) e^{ik\varepsilon} \end{cases} \quad (5.8)$$

que podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} B_1 (1 - \eta^{-4}) e^{ik\varepsilon} - B_2 (1 + \eta^{-4}) = -A_1 (1 + \eta^{-4}) + A_2 (1 - \eta^{-4}) e^{-ik\varepsilon} & (a) \\ -B_1 (1 + \eta^{-4}) + B_2 (1 - \eta^{-4}) e^{ik\varepsilon} = A_1 (1 - \eta^{-4}) e^{-ik\varepsilon} - A_2 (1 + \eta^{-4}) & (b) \end{cases} \quad (5.9)$$

Multiplicando (5.9)(a) por  $\frac{1}{1+\eta^{-4}}$ , (5.9)(b) por  $\frac{1}{1-\eta^{-4}} e^{-ik\varepsilon}$  y sumándolas, obtenemos:

$$B_1 \left[ \frac{1 - \eta^{-4}}{1 + \eta^{-4}} e^{ik\varepsilon} - \frac{1 + \eta^{-4}}{1 - \eta^{-4}} e^{-ik\varepsilon} \right] = A_1 e^{-ik\varepsilon} [e^{-ik\varepsilon} - e^{ik\varepsilon}] + A_2 e^{-ik\varepsilon} \left[ \frac{1 - \eta^{-4}}{1 + \eta^{-4}} - \frac{1 + \eta^{-4}}{1 - \eta^{-4}} \right]. \quad (5.10)$$

Multiplicando (5.9)(a) por  $\frac{1}{1-\eta^{-4}} e^{-ik\varepsilon}$ , (5.9)(b) por  $\frac{1}{1+\eta^{-4}}$  y sumándolas, obtenemos:

$$B_2 \left[ \frac{1 - \eta^{-4}}{1 + \eta^{-4}} e^{ik\varepsilon} - \frac{1 + \eta^{-4}}{1 - \eta^{-4}} e^{-ik\varepsilon} \right] = A_1 e^{-ik\varepsilon} \left[ \frac{1 - \eta^{-4}}{1 + \eta^{-4}} - \frac{1 + \eta^{-4}}{1 - \eta^{-4}} \right] + A_2 e^{-ik\varepsilon} [e^{-ik\varepsilon} - e^{ik\varepsilon}]. \quad (5.11)$$

y de ahí, según (5.1), encontramos las expresiones de los coeficientes de reflexión  $r$  y de transmisión  $t$ :

$$r = -2ie^{-ik\varepsilon} \frac{\sin(k\varepsilon)}{\frac{\eta^4 - 1}{\eta^4 + 1} e^{ik\varepsilon} - \frac{\eta^4 + 1}{\eta^4 - 1} e^{-ik\varepsilon}} \quad (5.12)$$

## 5 Apéndices

$$t = e^{-ik\varepsilon} \frac{\frac{\eta^4-1}{\eta^4+1} - \frac{\eta^4+1}{\eta^4-1}}{\frac{\eta^4-1}{\eta^4+1} e^{ik\varepsilon} - \frac{\eta^4+1}{\eta^4-1} e^{-ik\varepsilon}}. \quad (5.13)$$

Estas expresiones tienen los límites de una reflexión total  $r = e^{-ik\varepsilon}$  en el caso  $\eta = 0$  y de una reflexión nula  $r = 0$  en el caso  $\eta = 1$ .

El camino libre medio  $\ell$  se define como el inverso del coeficiente de reflexión (en módulo cuadrado) por unidad de longitud:

$$\ell \equiv \frac{d}{|r|^2}. \quad (5.14)$$

A partir de (5.12) podemos calcular  $|r|^2$ :

$$|r|^2 = \frac{4 \sin^2(k\varepsilon)}{\left(\frac{\eta^4-1}{\eta^4+1} - \frac{\eta^4+1}{\eta^4-1}\right)^2 + 4 \sin^2(k\varepsilon)}, \quad (5.15)$$

que se graficó en la figura 5.8 y entonces llegamos a la siguiente expresión para el camino libre medio:

$$\ell = \frac{d}{4 \sin^2(k\varepsilon)} \left[ \left(\frac{\eta^4-1}{\eta^4+1}\right)^2 + \left(\frac{\eta^4+1}{\eta^4-1}\right)^2 - 2 \cos(2k\varepsilon) \right]. \quad (5.16)$$

Mientras  $k$  es pequeño comparado con  $1/\varepsilon$ , es decir, mientras la frecuencia es baja comparada con la frecuencia de cuerpo independiente de las muescas,  $\sin(k\varepsilon)$  se puede aproximar a primer orden por  $k\varepsilon$  y el  $\cos(2k\varepsilon)$  vale casi 1. El camino libre medio tiene entonces una dependencia en  $1/k^2$ , o sea,  $1/f^2$ .

A partir de (5.13) podemos calcular la transmitancia  $|t|^2$ :

$$|t|^2 = \frac{\left(\frac{\eta^4-1}{\eta^4+1} - \frac{\eta^4+1}{\eta^4-1}\right)^2}{\left(\frac{\eta^4-1}{\eta^4+1}\right)^2 + \left(\frac{\eta^4+1}{\eta^4-1}\right)^2 - 2 + 4 \sin^2(k\varepsilon)} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\left(\frac{\eta^4-1}{\eta^4+1} - \frac{\eta^4+1}{\eta^4-1}\right)^2} \sin^2(k\varepsilon)}. \quad (5.17)$$

Esta es la transmitancia que tendría un interferómetro de Fabry-Pérot con superficies cuyo coeficiente de reflexión es tal que  $\frac{R}{(1-R)^2} = \left(\frac{\eta^4-1}{\eta^4+1} - \frac{\eta^4+1}{\eta^4-1}\right)^{-2}$ .

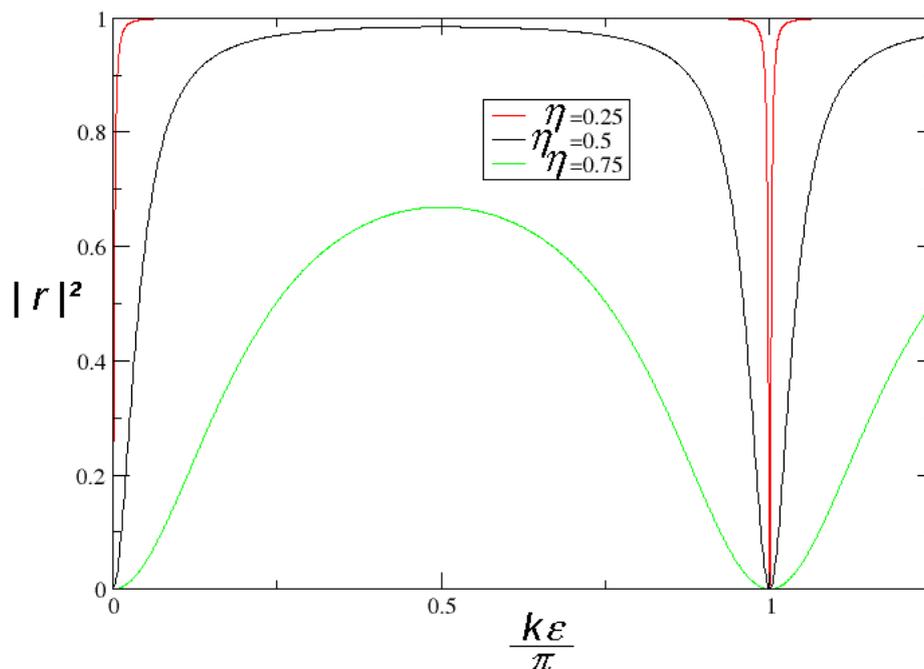


Figura 5.8: El coeficiente de reflexión  $|r|^2$  (5.15) como función del vector de onda  $k$  (proporcional a la frecuencia  $f$ ). El experimento se hizo en la parte  $\lambda \ll \varepsilon$ , es decir, en  $\frac{k\varepsilon}{\pi}$  pequeño. El camino libre medio decrece con  $f$ . La reflectancia es similar a la de un interferómetro de Fabry-Pérot.

**Caso cuántico:** Consideremos una barrera de potencial de ancho  $\varepsilon$  y de altura  $U_0$  (Fig. 5.9). El potencial es nulo en cualquier otro punto del espacio. En las tres regiones del espacio definidas por la barrera, la ecuación de Schrödinger (2.1) se integra de manera trivial (2.3). Como en el caso clásico, el cálculo del coeficiente de reflexión consiste en encontrar la relación que existe entre las amplitudes entrante y salientes por medio de las condiciones de continuidad.

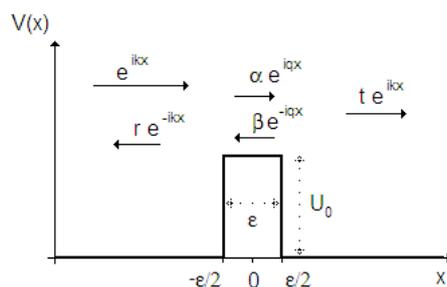


Figura 5.9: barrera de potencial de ancho  $\varepsilon$  y de altura  $U_0$

## 5 Apéndices

La ecuación de Schrödinger para  $E > U_0$  tiene como solución, en las tres regiones del espacio:

$$\begin{cases} \phi(x < -\varepsilon/2) = e^{ikx} + re^{-ikx} \\ \phi(-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2) = \alpha e^{iqx} + \beta e^{-iqx} \\ \phi(\varepsilon/2 < x) = te^{ikx} \end{cases}, \quad (5.18)$$

donde hemos definido

$$\begin{cases} k \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E} \\ q \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)} \end{cases}. \quad (5.19)$$

La condición de continuidad de la función de onda y de su derivada en  $-\varepsilon/2$  y  $\varepsilon/2$  lleva a los dos siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} e^{-ik\varepsilon/2} + re^{ik\varepsilon/2} = \alpha e^{-iq\varepsilon/2} + \beta e^{iq\varepsilon/2} \\ ike^{-ik\varepsilon/2} - ikre^{ik\varepsilon/2} = iq\alpha e^{-iq\varepsilon/2} - iq\beta e^{iq\varepsilon/2} \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\begin{cases} te^{ik\varepsilon/2} = \alpha e^{iq\varepsilon/2} + \beta e^{-iq\varepsilon/2} \\ ikte^{ik\varepsilon/2} = iq\alpha e^{iq\varepsilon/2} - iq\beta e^{-iq\varepsilon/2} \end{cases}. \quad (5.21)$$

De ahí obtenemos dos expresiones para  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\begin{cases} 2\alpha = e^{i(q-k)\varepsilon/2} (1 + k/q) + re^{i(q+k)\varepsilon/2} (1 - k/q) \\ 2\alpha = te^{-i(q-k)\varepsilon/2} (1 + k/q) \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\begin{cases} 2\beta = e^{-i(q+k)\varepsilon/2} (1 - k/q) + re^{-i(q-k)\varepsilon/2} (1 + k/q) \\ 2\beta = te^{i(q+k)\varepsilon/2} (1 - k/q) \end{cases}, \quad (5.23)$$

lo que nos permite deshacernos de ellos:

$$\begin{cases} e^{i(q-k)\varepsilon/2} (1 + k/q) + re^{i(q+k)\varepsilon/2} (1 - k/q) = te^{-i(q-k)\varepsilon/2} (1 + k/q) & (a) \\ e^{-i(q+k)\varepsilon/2} (1 - k/q) + re^{-i(q-k)\varepsilon/2} (1 + k/q) = te^{i(q+k)\varepsilon/2} (1 - k/q) & (b) \end{cases}. \quad (5.24)$$

Multiplicando (5.24)(a) por  $e^{iq\varepsilon/2} (1 - k/q)$ , (5.24)(b) por  $e^{-iq\varepsilon/2} (1 + k/q)$  y sumándolas, obtenemos:

$$re^{ik\varepsilon/2} \left[ (1 - k/q)^2 e^{iq\varepsilon} - (1 + k/q)^2 e^{-iq\varepsilon} \right] = e^{-ik\varepsilon/2} (1 - k^2/q^2) [e^{-iq\varepsilon} - e^{iq\varepsilon}] \quad (5.25)$$

y de ahí el coeficiente de reflexión:

$$r = -2ie^{-ik\varepsilon} \sin(q\varepsilon) \frac{1 - k^2/q^2}{(1 - k/q)^2 e^{iq\varepsilon} - (1 + k/q)^2 e^{-iq\varepsilon}} \quad (5.26)$$

Esta última expresión se puede escribir de forma muy parecida a la expresión clásica de la reflexión por una muesca o en su forma más conocida en términos de la energía.

## 5 Apéndices

Primero, veamos la escritura similar al caso clásico:

$$r = -2ie^{-ik\varepsilon} \frac{\sin(q\varepsilon)}{\frac{\frac{q}{k}-1}{\frac{q}{k}+1}e^{iq\varepsilon} - \frac{\frac{q}{k}+1}{\frac{q}{k}-1}e^{-iq\varepsilon}} \quad (5.27)$$

Vemos que la profundidad de la muesca, la  $\eta$  clásica, es el equivalente de la raíz cuarta de  $\frac{q}{k} = \sqrt{\frac{E-U_0}{E}}$ , que es la distancia normalizada entre la energía cinética de la onda entrante y la altura de la barrera de potencial. Una energía cinética muy alta respecto a la altura de la barrera corresponde al caso de una partícula que casi no siente el potencial: el coeficiente de reflexión tiende a 0. En la analogía clásica esto corresponde al caso en el que  $\eta$  tiende a 1. Una pequeña diferencia persiste, sin embargo, entre el coeficiente de reflexión cuántico y clásico: en el caso cuántico el vector de onda se cambia por  $q$  al propagarse la onda en la región de la barrera. Se podría simular clásicamente con un cambio en el material de propagación, pues la velocidad de onda cambiaría. Sin embargo, esta sutileza no cambia drásticamente el comportamiento del coeficiente de reflexión con la energía y no es la esencia de las diferencias entre los dos casos.

La diferencia fundamental entre el caso clásico y el cuántico es que en el primero el tamaño del acoplamiento  $\eta$  es una constante determinada por la geometría del sistema mientras que en el último esta  $\eta$  ( $q/k$ ) es una función creciente de la energía. Esta diferencia da lugar a comportamientos opuestos con la energía o con la frecuencia en el caso clásico: clásicamente aumentar la frecuencia es disminuir la longitud de onda, ver mejor la muesca y así aumentar el coeficiente de reflexión, mientras que cuánticamente aumentar la energía es, por una parte, disminuir la longitud de onda y ver mejor la barrera, como lo indica el término en  $\sin(q\varepsilon)$  que crece para  $q$  pequeñas y, por otra parte, de forma más efectiva, tener una energía que supera aun más el potencial y en este sentido ver menos la barrera, como lo indica el término en  $q/k$  que tiende a 1.

El resultado es el siguiente: en el caso clásico el coeficiente de reflexión (en módulo) es una función creciente de la frecuencia mientras que en el caso cuántico es una función decreciente de la energía. Por lo tanto la misma diferencia de comportamientos se observa en términos del camino libre medio: en el caso clásico éste disminuye con la frecuencia mientras que en el cuántico aumenta con la energía.

Ahora veamos la fórmula más conocida y más intuitiva, en términos de las energías:

$$r = ie^{-ik\varepsilon} \frac{U_0 \sin(q\varepsilon)}{i[2E - U_0] \sin(q\varepsilon) - 2\sqrt{E}\sqrt{E - U_0} \cos(q\varepsilon)} \quad (5.28)$$

que nos lleva a la siguiente expresión del coeficiente de reflexión en energía, inversa-

## 5 Apéndices

mente proporcional al camino libre medio:

$$|r|^2 = \frac{U_0^2 \sin^2(q\varepsilon)}{4E(E - U_0) + U_0^2 \sin^2(q\varepsilon)} \quad (5.29)$$

y, por fin, esta última expresión en términos de  $k$ :

$$|r|^2 = \frac{k_0^4 \sin^2\left(\sqrt{k^2 - k_0^2}\varepsilon\right)}{4k^2(k^2 - k_0^2) + k_0^4 \sin^2\left(\sqrt{k^2 - k_0^2}\varepsilon\right)}, \quad (5.30)$$

que graficamos en la figura 5.10 donde hemos definido

$$k_0 \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}U_0} \quad (5.31)$$

Todos estos cálculos se hicieron en la semirecta  $U_0 < E$ . En la otra semirecta  $E \leq U_0$  los cálculos son idénticos, salvo por la definición de  $q$ :  $q \equiv i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)}$ . Las últimas fórmulas se modifican haciendo la transformación  $\sin\left(\sqrt{k^2 - k_0^2}\varepsilon\right) \leftrightarrow \sinh\left(\sqrt{k_0^2 - k^2}\varepsilon\right)$ .

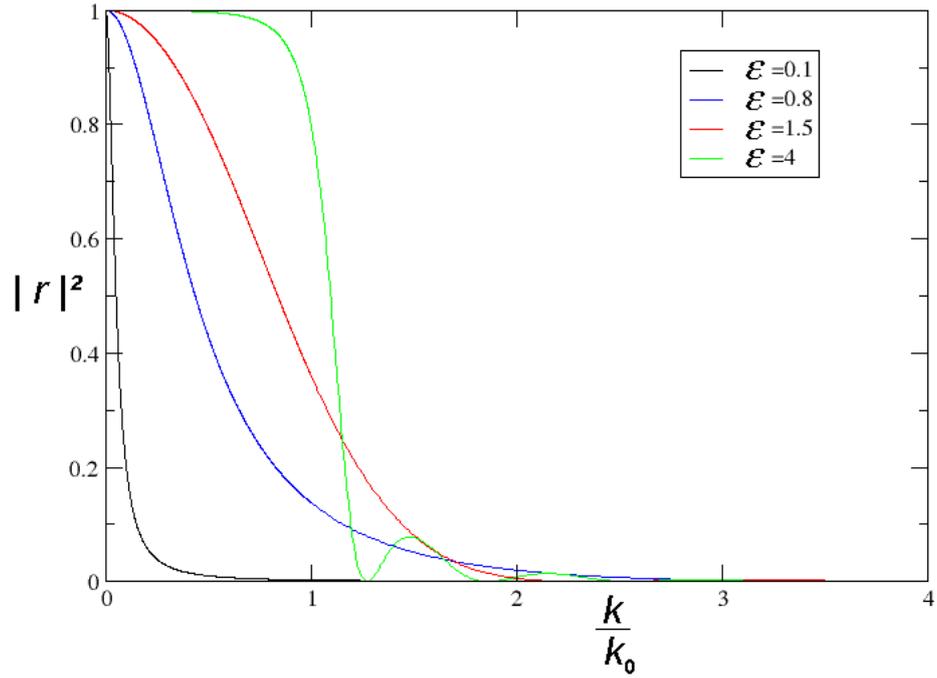


Figura 5.10: El coeficiente de reflexión  $|r|^2$  como función del vector de onda  $k$  (proporcional a la raíz cuadrada de la energía  $E$ ). Las distintas curvas corresponden a distintos valores del ancho de la barrera  $\varepsilon$ . El camino libre medio es proporcional al inverso de  $|r|^2$  y por lo tanto crece con  $E$ .

### 5.3. C. Clases de simetría y repulsión de niveles

En este Apéndice se describen con más detalles las clases de simetrías de Dyson, conocidas por el índice de simetría  $\beta = 1, 2, 4$ , y sus consecuencias en las simetrías de la matriz hamiltoniana  $H$  y de dispersión  $S$ . Se presenta la idea de definir un parámetro de repulsión de niveles continuo como variable continua para estudiar las transiciones entre las distintas clases de simetría; se dan dos definiciones de éste: la de Brody [35] y la de Izrailev [36] y se resume un trabajo anterior de Sorathia e Izrailev [37] que hace uso de su parámetro.

**Clases de simetría:** Como se mencionó en el capítulo 1, una manera de estudiar el problema del desorden en un sistema cuántico es estudiar sus modos normales, y otra manera es estudiar la dispersión de ondas que entrarían en él. En el primer caso se describe al sistema por medio de su matriz hamiltoniana  $H$  y en el segundo por su matriz de dispersión  $S$ ; que se toman al azar. El problema resulta en encontrar la distribución de probabilidades de  $H$  o  $S$ , de sus eigenvalores y de sus eigenvectores. Si el sistema presenta ciertas simetrías, éstas se deben reflejar en  $H$  y  $S$ , o de manera equivalente, en los ensembles de matrices a los que pertenecen.

En general, se supone que  $H$  pertenece a un ensemble Gaussiano. Esta restricción es muy fuerte y supone un potencial muy particular, pero las distribuciones de eigenvectores y eigenvalores resultan ser independientes del potencial, por lo que esa suposición permite describir muchos sistemas físicos y simplifica los cálculos.

Respecto a  $S$ , la restricción que siempre cumple, por conservación de la corriente, es ser unitaria. Existen tres casos de simetrías bien conocidos que Dyson [38, 21] clasificó por un índice  $\beta$  que cuenta el número de grados de libertad de los elementos de matriz, el así llamado índice de simetría de Dyson. A continuación describimos los tres casos.

Caso  $\beta = 1$ : en este caso se supone que el sistema es invariante ante reflexión en el tiempo. Se supone además que se conserva el espín. Los elementos de  $H$  y  $S$  son reales y las dos matrices son simétricas.  $H$  pertenece al GOE. La distribución de las distancias entre los eigenvalores vecinos del sistema se calculó en forma aproximada por Wigner:

$$P_{\beta=1}(s) \approx \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right). \quad (5.32)$$

Aquí  $s = \frac{E_{j+1} - E_j}{\langle E_{j+1} - E_j \rangle}$  es la distancia normalizada entre los niveles vecinos de energía. Esta fórmula (5.32) se derivó con la suposición de una repulsión de niveles proporcional a  $s$ , cuando  $s$  es pequeña.

Caso  $\beta = 2$ : en este caso se supone que la simetría ante reflexión en el tiempo es totalmente rota. Físicamente, esto puede corresponder a un sistema sometido a un campo magnético fuerte. Los elementos de  $H$  y  $S$  son números complejos.  $H$  es una matriz unitaria, que pertenece entonces al GUE. La única restricción en  $S$  es que debe ser

## 5 Apéndices

unitaria. La distribución de las distancias entre los eigenniveles vecinos del sistema es distinta al caso anterior: la repulsión es mayor y la distribución es más aguda; una aproximación bien conocida de  $P(s)$  es:

$$P_{\beta=2}(s) \approx \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right). \quad (5.33)$$

Caso  $\beta = 4$ : en este caso se supone que el sistema es invariante ante reflexión en el tiempo pero que el espín no se conserva, debido a un acoplamiento espín-órbita fuerte. Los elementos de  $H$  y  $S$  son cuaterniones.  $H$  es simpléctica y pertenece al GSE mientras que  $S$  es una matriz unitaria auto-dual. La distribución de las distancias entre los eigenniveles vecinos del sistema es aun más aguda que en el caso anterior, consecuencia de que la repulsión de niveles sea mayor; una aproximación bien conocida de  $P(s)$  es:

$$P_{\beta=4}(s) \approx \left(\frac{64}{9\pi}\right)^3 s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right). \quad (5.34)$$

Existe otro caso importante para la distribución  $P(s)$  de niveles vecinos, que no está descrito por las clases de simetría anteriores ni por los ensembles Gaussianos previamente citados para  $H$ . Es el caso de una repulsión de niveles nula, o sea, cuando no existe ninguna correlación entre un nivel de energía y el siguiente. Ahora  $P(s)$  es una distribución de Poisson:

$$P(s) = \exp(-s). \quad (5.35)$$

**Definiciones del parámetro de repulsión de niveles:** Estos casos son casos límites, de campo magnético nulo o muy fuerte y de acoplamiento espín-órbita nulo o muy fuerte, y por lo tanto son sólo tres casos discretos en un conjunto continuo de casos posibles. Por ejemplo, aplicar a un sistema un campo magnético intermedio permite tener una distribución de  $H$  y  $S$  intermedia y variar la magnitud del campo permite observar la transición  $\beta = 1 \rightarrow \beta = 2$  o  $\beta = 4 \rightarrow \beta = 2$ . Se pueden inventar muchos parámetros continuos para estudiar de manera continua esos casos intermedios. Uno intuitivo sería, por ejemplo, la magnitud del campo magnético aplicado.

Otra posibilidad, que es la que se presentará mas adelante, es definir un parámetro que mida la distribución de distancias entre los eigenniveles vecinos del sistema y que interpole entre los casos límites descritos anteriormente. A tal parámetro se le llamará “parámetro de repulsión de niveles”  $\alpha$ .

En su artículo [35], Brody propone la siguiente definición para  $\alpha$ : dado un sistema que tiene una distribución de probabilidad de distancias entre eigenniveles vecinos  $P_{\text{sistema}}(s)$ ,  $s = \frac{E_{j+1} - E_j}{\langle E_{j+1} - E_j \rangle}$ , se determina, usando mínimos cuadrados, la función  $P_{\alpha}^{(\text{Brody})}(s)$ , con parámetro  $\alpha$ , que más se acerca a  $P_{\text{sistema}}(s)$ . La función  $P_{\alpha}^{(\text{Brody})}(s)$

## 5 Apéndices

tiene la siguiente expresión:

$$P_{\alpha}^{(Brody)}(s) = (1 + \alpha) a s^{\alpha} \exp(-a s^{\alpha+1}), \quad a = \left[ \Gamma\left(\frac{2 + \alpha}{1 + \alpha}\right) \right]^{\alpha+1}, \quad (5.36)$$

e interpola entre (5.32) en  $\alpha = 1$  y (5.35) en  $\alpha = 0$ . El parámetro de la función que mejor ajustó se define como la  $\alpha$  del sistema. La fórmula (5.36) se derivó suponiendo una repulsión de niveles proporcional a  $s$ .

Como se mencionó, la expresión de Wigner es aproximada. Ello se refleja en el hecho de que, en el caso  $\beta = 1$  el parámetro de repulsión de niveles de Brody valga aproximadamente 0.95 [36], es decir, tiene una diferencia de  $\frac{1 - \alpha(\beta=1)}{1} = 5\%$  con el valor deseado. Sin embargo, esta diferencia crece muy rápido ( $\alpha_{(Brody)}(\beta = 2) \approx 1.5$  y  $\alpha_{(Brody)}(\beta = 4) \approx 2.5$ ) debido a que la fórmula (5.36) tiene un comportamiento incorrecto en  $s \rightarrow \infty$ . En consecuencia, esta definición sólo sirve para  $\alpha \leq 1$ , para observar la transición continua de  $P(s) = \exp(-s) \rightarrow P(s) \approx \frac{\pi}{2} s \exp(-\frac{\pi}{4} s^2)$ .

En base a que la definición de Brody tiene un comportamiento equivocado en  $s \rightarrow \infty$  y no interpola correctamente en los casos  $\beta = 2, 4$ , Izrailev propuso otro juego de funciones para definir  $\alpha$  [36]:

$$P_{\alpha}^{(Izrailev)} = A s^{\alpha} (1 + B \alpha s)^{f(\alpha)} \exp\left[-\frac{\pi^2}{16} \alpha s^2 - \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) s\right], \quad (5.37)$$

$$f(\alpha) = \frac{2^{\alpha} (1 - \alpha/2)}{\alpha} - 0.16874, \quad (5.38)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes de normalización que se determinan con las relaciones usuales  $\langle P \rangle = 1$  y  $\langle s \rangle = 1$ . Esta fórmula tiene el comportamiento asintótico correcto en  $s \rightarrow \infty$  y resulta de interpolar correctamente en el intervalo  $0.2 \leq \alpha \leq 4$ . Con el fin de comparar (5.36) con (5.37) se ajusta una distribución a la otra y se obtiene la siguiente relación [39]:  $\alpha_{(Izrailev)} \approx 0.654 \alpha_{(Brody)} + 0.411 \alpha_{(Brody)}^2$ .

**Trabajo de Sorathia e Izrailev:** Veamos ahora la aplicación de (5.37) a un sistema cuántico desordenado unidimensional de  $N$  sitios cuánticos [37]. La cadena es de tamaño finito. Se considera el hamiltoniano de *tight-binding* siguiente:

$$H = \sum_n \varepsilon_n |n\rangle \langle n| - \nu |n-1\rangle \langle n| - \nu |n\rangle \langle n+1|, \quad (5.39)$$

donde  $\{\varepsilon_n\}$  es un conjunto de números al azar no correlacionados con una distribución uniforme en  $[-\frac{w}{2}; +\frac{w}{2}]$ . Tomar  $\nu = 1$  fija la escala de energías. En este contexto, se sabe que las propiedades de transmisión escalan con el tamaño del sistema, en el límite de

## 5 Apéndices

bajo desorden [40]. Se estudia el comportamiento de la cantidad

$$x \equiv \frac{\xi_\infty}{N}, \quad (5.40)$$

donde  $\xi_\infty$  es la longitud de localización que tendría un sistema infinito, con respecto al parámetro de repulsión de niveles del sistema, definido según (5.37).

La longitud de localización  $\xi_\infty$  se define por medio del coeficiente de transmisión  $T$  del sistema:

$$\xi_\infty^{-1} \equiv -\frac{\langle \ln T \rangle}{2N}. \quad (5.41)$$

En el límite de bajo desorden, la fórmula de Thouless [14] para la longitud de localización vale:  $\xi_\infty = \frac{96(1-E^2/4)}{w^2}$ . Esta fórmula nos indica que variar  $\xi_\infty$  se puede lograr al variar la energía  $E$  o el desorden  $w$ . Asimismo, variar  $x$  se puede lograr al variar  $E$ ,  $w$  o  $N$ .

Por otra parte, dados los parámetros del sistema se obtienen los 64 niveles más cercanos a  $E$  y se calculan los espaciamentos entre niveles vecinos:  $\tilde{s}_i = E_{i+1} - E_i$ . Se repiten los cálculos cambiando únicamente el conjunto de números al azar; se acumulan así datos de  $\tilde{s}_i$  sobre 120 realizaciones del desorden. Una vez hecha la acumulación de datos se normalizan los  $\tilde{s}_i$  dividiéndolos por su promedio:  $s_i = \frac{\tilde{s}_i}{\langle \tilde{s}_i \rangle}$ . Al histograma de los  $s_i$  se le ajusta una función tipo (5.37) y se define un parámetro de repulsión de niveles  $\alpha$  (ver Fig.5.11).

Se construye la gráfica  $\alpha(x)$  (ver Fig.5.12). La relación encontrada es lineal.

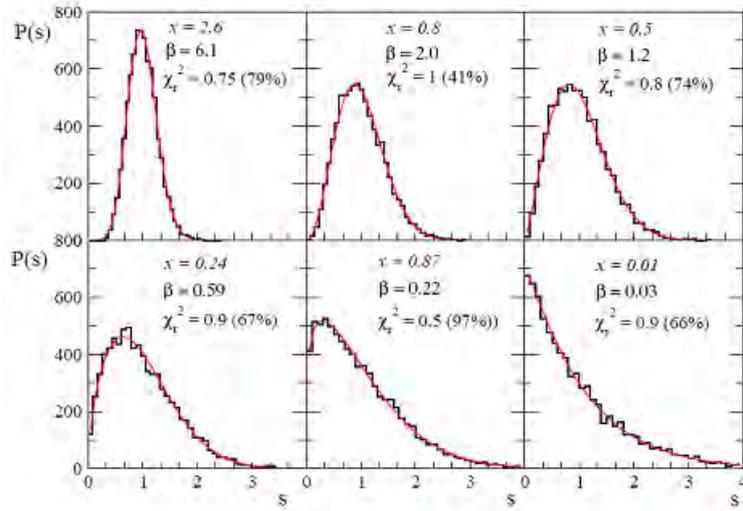


Figura 5.11: Histogramas de  $s_i$  en distintos casos y el ajuste usando la función (5.37)

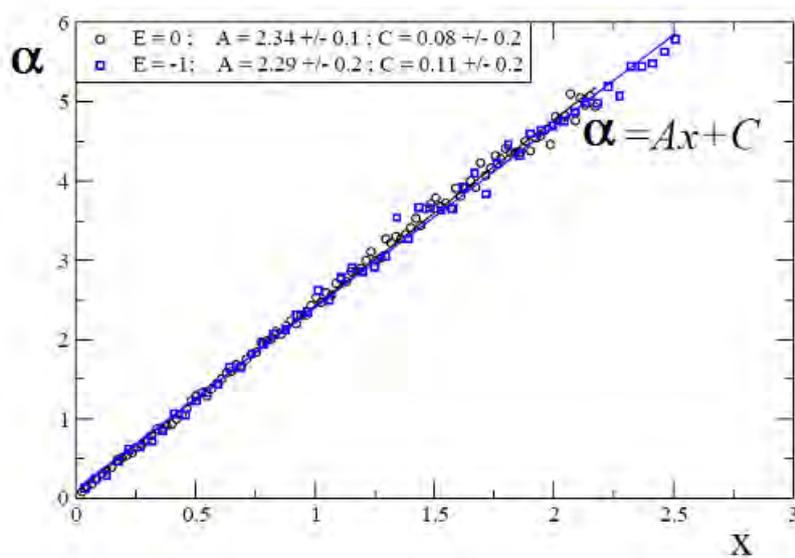


Figura 5.12:  $\alpha$  como función de  $x$  para dos valores de la energía  $E = 0$  y  $E = 1$

Cabe mencionar que otros datos de una relación entre  $\alpha$  y  $x$ , aunque limitados a  $0 < \alpha < 1$ , fueron publicados en [41], fig. 31 y en [39], fig. 1.

## 5.4. D. Método numérico

En este Apéndice se describe el método que se usó para llevar a cabo los cálculos. En una primera parte, se describe el llamado mapeo de Poincaré aplicado a ondas torsionales [31] y en una segunda parte se discute la fórmula que se empleó numéricamente para definir la longitud de localización de los modos normales.

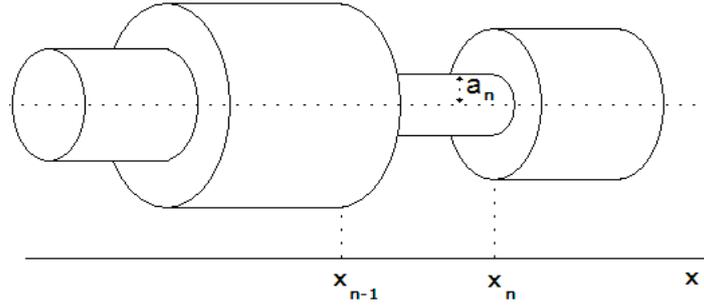


Figura 5.13: Cilindros con un eje común pegados entre sí. Cada uno tiene un radio  $a_n$  y una longitud  $d_n = x_n - x_{n-1}$

**Mapeo de Poincaré** En una barra formada por  $N$  cilindros coaxiales, las ondas de torsión estacionarias son de la siguiente forma (ver Capítulo 2):  $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{i\omega t}$  con

$$\varphi(x_{n-1} \leq x \leq x_n) = A_n e^{ikx} + B_n e^{-ikx}. \quad (5.42)$$

El mapeo de Poincaré consiste en encontrar una relación de recurrencia en las amplitudes para calcular los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$ .

Escribamos la amplitud y la torca en forma vectorial como función de los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$ :

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ C_n \varphi'(x) \end{pmatrix} = W_n(x) \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

donde hemos definido

$$W_n(x) = \begin{pmatrix} e^{ikx} & e^{-ikx} \\ iC_n e^{ikx} & -iC_n e^{-ikx} \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

y  $C_n = G_n \frac{\pi a_n^4}{2}$  es la rigidez torsional,  $G_n$  es el módulo de corte del cuerpo  $n$  y  $a_n$  su radio. Las condiciones de continuidad de la amplitud y de la torca se escriben:

$$W_n(x = x_n) \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = W_{n+1}(x = x_n) \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

## 5 Apéndices

Si multiplicamos (5.45) por  $W_{n+1}(x = x_{n+1})W_{n+1}^{-1}(x = x_n)$  obtenemos

$$\begin{pmatrix} \varphi(x = x_{n+1}) \\ C_{n+1}\varphi'(x = x_{n+1}) \end{pmatrix} = W_{n+1}(x = x_{n+1})W_{n+1}^{-1}(x = x_n) \begin{pmatrix} \varphi(x = x_n) \\ C_n\varphi'(x = x_n) \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

Para simplificar la escritura definamos  $K(n+1) \equiv W_{n+1}(x = x_{n+1})W_{n+1}^{-1}(x = x_n)$ . La matriz  $K$  se puede calcular fácilmente:

$$K(n+1) = \begin{pmatrix} \cos[k(x_{n+1} - x_n)] & \frac{\sin[k(x_{n+1} - x_n)]}{kC_{n+1}} \\ -kC_{n+1}\sin[k(x_{n+1} - x_n)] & \cos[k(x_{n+1} - x_n)] \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

Reescribamos la relación (5.46) en términos de los elementos de matriz de  $K$ :

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_{n+1}) \\ C_{n+1}\varphi'(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}(n+1) & K_{12}(n+1) \\ K_{21}(n+1) & K_{22}(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x_n) \\ C_n\varphi'(x_n) \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

y en el caso  $n$ :

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_n) \\ C_n\varphi'(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}(n) & K_{12}(n) \\ K_{21}(n) & K_{22}(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x_{n-1}) \\ C_{n-1}\varphi'(x_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

De la primera línea de (5.49) obtenemos la siguiente expresión para  $C_{n-1}\varphi'(x_{n-1})$ :

$$C_{n-1}\varphi'(x_{n-1}) = \frac{1}{K_{12}(n)}\varphi(x_n) - \frac{K_{11}(n)}{K_{12}(n)}\varphi(x_{n-1}) \quad (5.50)$$

que usamos para eliminar  $C_{n-1}\varphi'(x_{n-1})$  en la expresión de  $C_n\varphi'(x_n)$  dada por la segunda línea de (5.49):

$$C_n\varphi'(x_n) = \frac{K_{22}(n)}{K_{12}(n)}\varphi(x_n) + \frac{K_{21}(n)K_{12}(n)}{K_{12}(n)}\varphi(x_{n-1}) - \frac{K_{11}(n)K_{22}(n)}{K_{12}(n)}\varphi(x_{n-1}). \quad (5.51)$$

Volviendo a la expresión de  $K$  (5.47), es fácil ver que su determinante vale 1, lo que permite simplificar (5.51):

$$C_n\varphi'(x_n) = \frac{K_{22}(n)}{K_{12}(n)}\varphi(x_n) - \frac{1}{K_{12}(n)}\varphi(x_{n-1}). \quad (5.52)$$

Por fin, reemplazamos  $C_n\varphi'(x_n)$  en la expresión de  $\varphi(x_{n+1})$  dada por la primera línea de (5.48):

$$\varphi(x_{n+1}) = \left[ K_{11}(n+1) + \frac{K_{12}(n+1)K_{22}(n)}{K_{12}(n)} \right] \varphi(x_n) - \frac{K_{12}(n+1)}{K_{12}(n)}\varphi(x_{n-1}) \quad (5.53)$$

para  $n \geq 1$ .

En el caso  $n = 0$  tenemos  $\varphi(x_1) = K_{11}(1)\varphi(x_0) + K_{12}(1)C_0\varphi'(x_0)$  y la condición de extremos libres, torca nula en los extremos de la barra, anula el segundo término. La

## 5 Apéndices

amplitud en el extremo es arbitraria, fijarla igual a 1 nos permite calcular la amplitud de onda en los extremos de cada cilindro.

La  $\varphi(x_n)$  es una función implícita de  $k$ . Los modos normales se obtienen al escribir la condición de extremos libres en el otro extremo (en  $x = x_N$ ):

$$C_N \varphi'(x_N) = 0 \Leftrightarrow \frac{K_{22}(N) \varphi(x_N) - \varphi(x_{N-1})}{K_{12}(N)} = 0. \quad (5.54)$$

Numéricamente se calcula la cantidad  $\frac{K_{22}(N) \varphi(x_N) - \varphi(x_{N-1})}{K_{12}(N)}$  para valores discretos de  $k$ , con un cierto paso. Al detectarse un cambio de signo se llama una subrutina para buscar el cero en  $k$  con una precisión de  $10^{-15}$ . Una vez obtenido el valor de  $k$  que corresponde al modo normal, se vuelven a calcular las  $\varphi(x_n)$  y se calculan los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} A_n e^{ikx_n} + B_n e^{-ikx_n} = \varphi(x_n) \\ A_n e^{ikx_{n-1}} + B_n e^{-ikx_{n-1}} = \varphi(x_{n-1}) \end{cases} \quad (5.55)$$

o, de manera equivalente:

$$\begin{cases} A_n = \frac{\varphi(x_n) e^{-ikx_{n-1}} - \varphi(x_{n-1}) e^{-ikx_n}}{2i \sin[k(x_n - x_{n-1})]} \\ B_n = \frac{\varphi(x_{n-1}) e^{ikx_n} - \varphi(x_n) e^{ikx_{n-1}}}{2i \sin[k(x_n - x_{n-1})]} \end{cases} \quad (5.56)$$

**Definición numérica de la longitud de localización:** La longitud de localización de un modo normal se puede definir de varias maneras equivalentes (ver [14] p.1496): por el decaimiento exponencial del coeficiente de transmisión del sistema  $\frac{2}{\xi} = -\frac{\ln T}{L}$ , por el exponente de Lyapunov de la matriz de transferencia  $\frac{1}{\xi} = \gamma = \frac{1}{L} \ln \|M_{1,N}\|$  o por el decaimiento exponencial de la envolvente de la función de onda. En la literatura, usualmente se usan las dos primeras definiciones, ya sea porque el coeficiente de transmisión es la cantidad a la que tienen acceso los experimentos o porque los cálculos se realizan por el método de la matriz de transferencia. En general los trabajos no estudian las funciones de onda.

Pero en nuestro caso sí tenemos acceso a las funciones de onda, tanto numérica como experimentalmente. Definiremos entonces la longitud de localización por la envolvente de ellas [32].

En el cilindro  $n$  la amplitud de onda se escribe

$$\varphi_n(x) = A'_n \cos(kx + \Phi_n). \quad (5.57)$$

## 5 Apéndices

Aquí,  $A'_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  con  $A_n$  y  $B_n$  definidos en la sección anterior. Se esperan modos localizados exponencialmente, es decir que en promedio los coeficientes  $A'_n$  sigan un crecimiento o decrecimiento exponencial. Hagamos la hipótesis que siguen exactamente una ley exponencial, es decir, que se tiene la siguiente expresión:

$$A'_n = A' \exp\left(-\left|\frac{x_n - x^*}{\xi}\right|\right), \quad (5.58)$$

donde  $x^*$  es la posición del cuerpo donde se localizó la función,  $A'$  la amplitud máxima y  $\xi$  la longitud de localización. Calculemos el logaritmo del cociente de amplitudes vecinas  $\ln\left(\frac{A'_{n+1}}{A'_n}\right)$ : si  $n$  es tal que  $x_{n+1} \leq x^*$  entonces

$$\ln\left(\frac{A'_{n+1}}{A'_n}\right) = \ln\left(\frac{A' \exp\left(\frac{x_{n+1} - x^*}{\xi}\right)}{A' \exp\left(\frac{x_n - x^*}{\xi}\right)}\right) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\xi}. \quad (5.59)$$

Si  $n$  es tal que  $x_n \geq x^*$  entonces

$$\ln\left(\frac{A'_{n+1}}{A'_n}\right) = \ln\left(\frac{A' \exp\left(-\frac{x_{n+1} - x^*}{\xi}\right)}{A' \exp\left(-\frac{x_n - x^*}{\xi}\right)}\right) = -\frac{x_{n+1} - x_n}{\xi}. \quad (5.60)$$

En todos casos tenemos que

$$\left|\ln\left(\frac{A'_{n+1}}{A'_n}\right)\right| = \frac{x_{n+1} - x_n}{\xi}. \quad (5.61)$$

Al hacer la suma de los logaritmos (5.61), los  $x_n$  se cancelan entre sí de tal manera que queden el primero y el último:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left|\ln\left(\frac{A'_{n+1}}{A'_n}\right)\right| = \frac{x_N - x_1}{\xi} \approx \frac{L}{\xi}. \quad (5.62)$$

Esta expresión (5.62) tiene la ventaja de ser independiente del centro de la exponencial  $x^*$  y de la amplitud  $A'$ . Definimos entonces la longitud de localización de una eigenfunción por la siguiente fórmula:

$$\xi \equiv \frac{x_N - x_1}{\sum_{n=1}^{N-1} \left|\ln\left(\frac{A'_{n+1}}{A'_n}\right)\right|} = \frac{\sum_{n=2}^N (d_n + \varepsilon)}{\sum_{n=1}^{N-1} \left|\ln\left(\frac{A'_{n+1}}{A'_n}\right)\right|}. \quad (5.63)$$

## 5.5. E. Protocolo experimental

En este apéndice se describe la instalación experimental que se usó para realizar el trabajo y el procedimiento que se siguió para llevar a cabo las mediciones. La instalación se representa en el diagrama de bloques de la Fig. 5.14. Unos soportes de hilos delgados de nylon sostienen la barra, siendo el único contacto que se tiene con ella y la única imprecisión en considerar las condiciones a la frontera como libres. Otro soporte, mecánicamente independiente para evitar cualquier transferencia de vibraciones parásitas a la barra, sostiene dos rieles paralelos a lo largo de los cuales se pueden mover tanto el detector como el excitador. El funcionamiento de esos aparatos (*ElectroMagnetic Acoustic Transducer*, o EMAT) está descrito a continuación. La posición del detector y del excitador se mide con un divisor de voltaje conectado a una computadora por medio de un CAMAC que digitaliza la señal. El excitador está alimentado por un generador de funciones cuya señal se amplifica por un amplificador de potencia y se controla por la computadora. El detector (que consta de un pre-amplificador para acoplar las impedancias) está conectado a un amplificador de señales Lock-in Amplifier lo cual está a su vez conectado al CAMAC que digitaliza la señal y la envía a la computadora. Toda la instalación se encuentra en un cuarto que cuenta con aire acondicionado para mantener la temperatura a 21°C y minimizar los efectos de dilatación térmica.

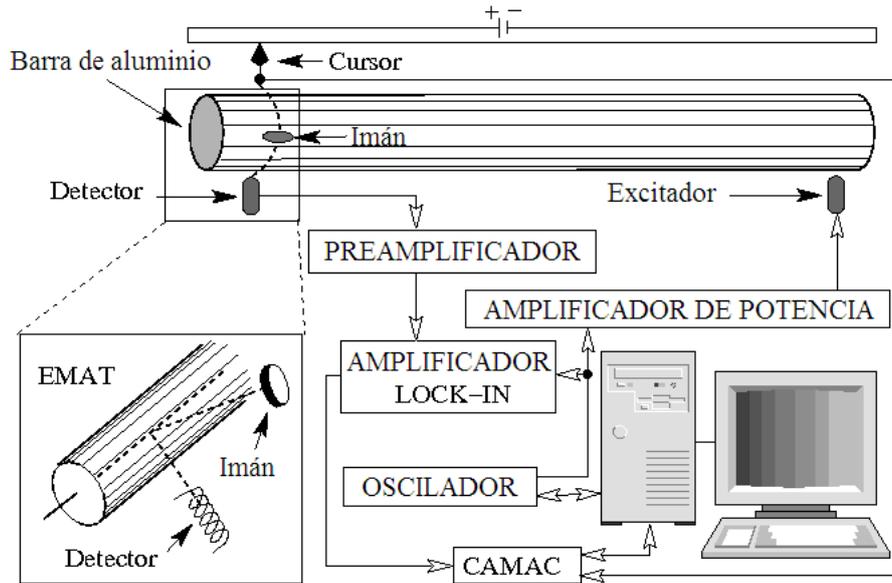


Figura 5.14: Diagrama de bloques del sistema experimental

**El EMAT:** En esta sección se describe el funcionamiento del dispositivo que se usa tanto en el excitador como en el detector [33]. El EMAT (Fig. 5.15) es un dispositivo que

consta de una bobina y un imán y saca provecho de las corrientes de Foucault tanto para generar fuerzas excitadoras como para detectar movimientos en objetos conductores. Tiene la ventaja, además de poder usarse de manera muy selectiva para estudiar ondas de compresión, de torsión o de flexión, de funcionar sin contacto mecánico con el objeto de estudio y así tener una interacción mínima, lo que le diferencia de los métodos tradicionales de excitación, por ejemplo los que emplean piezoeléctricos.

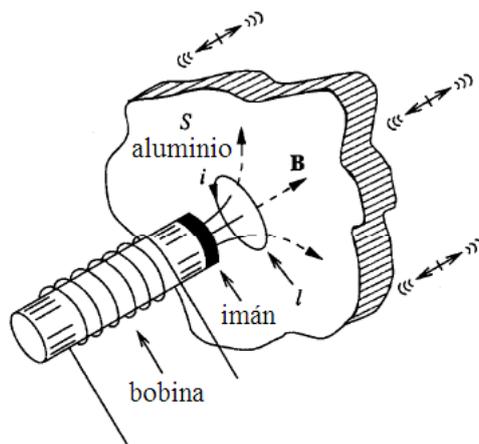


Figura 5.15: Esquema de un EMAT

**El EMAT como un detector:** Cuando la sección de aluminio  $S$  oscila en la misma dirección que el eje de la bobina, el flujo magnético a través de cualquier camino cerrado  $\Gamma$  varía en el tiempo. Según la ley de Faraday, esto induce una fuerza electromotriz que genera una corriente de Foucault en el aluminio. Las corrientes de Foucault generadas por el flujo magnético variable a su vez generan un campo magnético variable en el tiempo, que induce una corriente de Foucault en la bobina, que está conectada a un aparato de medición. La corriente en la bobina es proporcional a la derivada temporal del campo magnético inducido, que a su vez es proporcional a la velocidad de la sección de aluminio. La señal medida es entonces proporcional a la aceleración de la sección  $S$ .

Usado como detector, el EMAT tiene una señal muy débil que para poderse usar debe ser amplificada. En particular, se debe tener mucho cuidado con el ruido, por lo que no se deben usar cables que no sean coaxiales. También se recomienda blindar tanto el excitador, para minimizar la transmisión de señal directa, como el detector, para aislarlo de las señales parásitas exteriores, y tener la barra de aluminio aterrizada para minimizar el acoplamiento capacitivo con los EMAT.

**El EMAT como un excitador:** Cuando se aplica una corriente variable en la bobina, un campo magnético variable se genera y da lugar a corrientes de Foucault en el aluminio. Puesto que el aluminio se encuentra en el campo magnético producido por el imán permanente, estas corrientes generan una fuerza de Lorentz. Si el eje del imán coincide con el de la bobina (Fig. 5.16 (a) y (b)) la fuerza neta producida es paralela a los ejes y

se pueden excitar vibraciones compresionales o flexionales. Para ello el campo magnético permanente tiene que ser muy divergente. Si el eje del imán es perpendicular al de la bobina (Fig. 5.16 (c)), la fuerza neta es nula y se está aplicando una torca, que permite excitar vibraciones torsionales.

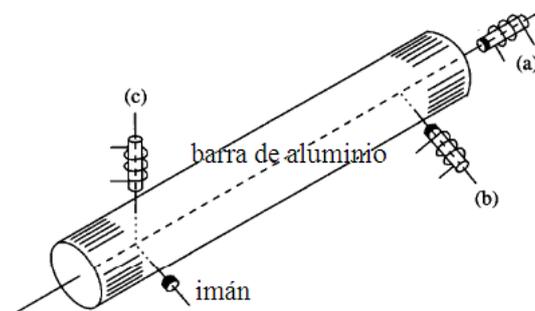


Figura 5.16: El EMAT colocado en la posición (a) excita ondas de compresión. La configuración (b) genera ondas de flexión y la (c), con el eje del imán perpendicular al eje de la bobina, crea una torca y da lugar a ondas de torsión

Para medir el espectro de eigenniveles de la barra se colocan el excitador y el detector en lugares estratégicos de la barra y se barre la frecuencia de excitación. Los picos de amplitud que se obtienen corresponden a los modos normales. En el caso de modos extendidos el detector y el excitador se pueden colocar en los extremos de la barra donde siempre se tiene un antinodo, debido a las condiciones a la frontera, y donde tanto la excitación como la detección podrán ser eficientes.

En el caso de modos localizados, los cilindros extremos pueden corresponder a cilindros en donde la amplitud de onda es exponencialmente baja comparada con el máximo y tanto la excitación como la detección se vuelven muy ineficientes. El detector y el excitador se tienen que colocar cerca uno del otro, alejados por una distancia del orden de la longitud de localización de los modos normales, para poder medir los eigenniveles que corresponden a modos localizados en esa región de la barra. El proceso se tiene que repetir en todas las regiones posibles y el espectro total de la barra es la suma de los espectros regionales. Además, es necesario evitar que el excitador o el detector se encuentren cercanos a un nodo de la función de onda, donde se vuelven poco eficientes.

Otro efecto con el que se debe tener cuidado es que, por muy selectivo que pueda ser el EMAT, una colocación imperfecta de los ejes de la bobina y del imán se traduce en la excitación parásita de otros tipos de vibraciones, sobre todo flexionales en nuestro caso. Los picos parásitos tienen como característica nunca tener una amplitud alta en ninguna de las regiones y de disminuir su amplitud al mejorar la colocación de los EMAT. Así se pueden identificar y descartar del espectro total.

Para medir una función de onda se excita la barra con una frecuencia que corresponde a

una de las eigenfrecuencias ya medidas en el espectro. Se ajusta la posición del excitador de tal manera que se encuentre en un antinodo para maximizar la excitación. Se varía la posición del detector y se registran los valores de la amplitud y de la posición en cada lectura. La amplitud así medida corresponde a la suma de dos señales: la señal que corresponde al campo magnético generado por la vibración de la barra, que es la que queremos medir, y la señal directa que proviene del campo magnético generado por la bobina del excitador, que es una señal parásita. Ese campo magnético directo es un campo dipolar y decae como  $1/r^3$ , así que sólo se vuelve importante cuando el detector se acerca mucho al excitador. Para eliminarlo, volvemos a hacer una medición de la función de onda con una frecuencia de excitación fuera de resonancia por unos 10-20 Hz. La señal que se mide ahora es dominada por la señal parásita de esa frecuencia fuera de resonancia, que suponemos igual a la señal parásita a la frecuencia de resonancia. A la medición en resonancia le restamos esta nueva medición.

En algunos casos, cuando la amplitud de la señal de vibración es relativamente pequeña, esa operación de restar la medición de campo directo no es suficiente y queda una deformación del valor promedio de la señal, que debería ser nulo y que afectaría el ajuste de la envolvente exponencial usado para definir la longitud de localización. En esos casos, después de la resta, calculamos el fondo con un promedio sobre la señal y extrapolamos para poder restar. De haber restado el fondo se puede usar la función de onda para definir  $\xi$ .

Tres factores más pueden afectar la medición:

Primero, una variación de temperatura modifica ligeramente la barra y mueve la frecuencia de resonancia. A pesar de tener la temperatura del cuarto controlada, estas variaciones se dan y aunque pequeñas tienden a que el sistema se salga de resonancia, típicamente de 5 Hz en 30 kHz, si el tiempo de medición es prolongado. La mejor manera de solucionar el problema es detener el detector y hacer un pequeño barrido en frecuencias en cada punto que se mide y registrar el máximo. Sin embargo, este proceso es muy largo y no conviene en nuestro caso, en donde queremos medir muchas funciones de onda para poder obtener  $\xi$  como función de  $f$ . Una manera menos buena pero mucho más rápida es hacer un pequeño barrido en frecuencias sin detener el detector cada vez que pasa por un antinodo, ya que sólo estos puntos se van a considerar en el ajuste exponencial para definir  $\xi$ . Éste es el método que se usó.

Segundo, la amplitud de la señal de vibración que recibe el detector depende de la distancia a la que se encuentra el detector de la barra. Esa dependencia es la de un campo dipolar, es decir, varía con la distancia como  $1/r^3$ , así que una variación de la distancia puede afectar bastante la medición. Para medir un espectro, conviene colocar el detector cerca de la barra para tener una buena amplitud, pero en el caso de medir una función de onda conviene alejarlo y aumentar la amplificación para minimizar las

## 5 Apéndices

distorsiones. Los resultados publicados en trabajos anteriores ([24, 25, 27, 26]) enseñan un excelente acuerdo entre teoría y experimento e indican que en una medición hecha con cuidado ese efecto puede despreciarse.

Tercero, se podría pensar que el pre-amplificador del detector pudiera llegar a un régimen no lineal y deformar la señal de manera artificial. Ese régimen no lineal existe para voltajes altos, cercanos al voltaje de saturación, pero los que se detectan son muy pequeños en comparación con éste. Por ello necesitamos usar un *lock-in amplifier*. De nuevo, la mejor prueba de que el procedimiento experimental es correcto está dada por los excelentes acuerdos entre teoría y experimento reportados en los artículos previamente citados.

## 5.6. F. Definición de errores

**Errores en  $\xi$ :** Definición formal de  $\xi$  para un sistema infinito en el espacio:

La envolvente de una función de onda de un modo normal decae como  $\gamma \exp\left(-\left|\frac{x_0-x}{\xi}\right|\right)$  en promedio, cuando  $|x_0 - x| \rightarrow \infty$ .

Definición experimental de  $\xi$  en un sistema limitado en el espacio:

De haber medido una porción de una eigenfunción se ajusta a la envolvente una función  $\gamma \exp\left(-\left|\frac{x_0-x}{\xi}\right|\right)$  con mínimos cuadrados y parámetros  $\gamma$  y  $\xi$ . Con el fin de tener una definición común a todos los modos sólo se consideran las envolventes que decaen hacia la derecha ( $x$  crecientes) y los ajustes se hacen en 10 puntos.

Las fuentes de error en  $\xi$  son múltiples:

1. Las mediciones siempre se hacen con un error experimental.
2. La envolvente no es una exponencial perfecta, sólo lo es en promedio a distancias muy grandes y considerar una porción de tamaño finito para hacer el ajuste da lugar a una incertidumbre en el parámetro que no se puede reducir, por muy buena que sea la medición.
3. El sistema es de tamaño finito ( $N = 50$ ) y esto induce fluctuaciones que se pueden ver numéricamente al comparar sistemas cada vez más largos (ver Fig.5.6).

El ajuste con mínimos cuadrados da una incertidumbre  $\sigma_{med}$  en  $\xi$ : ésta tiene su origen en las fuentes de error 1 y 2. Si se puede hacer el ajuste en varias porciones de la misma función de onda, cada vez con un coeficiente de correlación mayor a 0.9,  $\xi$  se define como el promedio de los valores obtenidos de los distintos ajustes y  $\sigma_{med}$  se calcula con la fórmula de propagación de error:

$$\xi \equiv \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \xi_i \quad (5.64)$$

$$\sigma_{med} \equiv \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{i=1}^p \sigma_i^2} \quad (5.65)$$

Numéricamente se calcula la desviación estándar  $\sigma_{num}$  de las fluctuaciones en  $\xi$  a frecuencia fija, considerando un gran número de barras (1000) que sólo difieren entre sí por los números al azar que se usaron en la definición de su geometría. Esta cantidad estima el error debido a la causa 3.

El error en  $\xi$  se define como la suma de la incertidumbre en el ajuste y de la desviación

## 5 Apéndices

estándar de las fluctuaciones:

$$\sigma \equiv \sigma_{med} + \sigma_{num}. \quad (5.66)$$

**Errores en  $\langle \xi \rangle$ :** Dada  $\xi$  como una función continua de  $f$ , se define su promedio  $\langle \xi \rangle_{[f_-; f_+]}$  en el intervalo  $[f_-; f_+]$  por la siguiente integral:

$$\langle \xi \rangle_{[f_-; f_+]} \equiv \frac{1}{f_+ - f_-} \int_{[f_-; f_+]} \xi(f') df' \quad (5.67)$$

En el caso experimental en el que  $\xi$  sólo se conoce para valores discretos de la frecuencia, la integral se tiene que aproximar por una suma sobre estos valores, siguiendo la idea del método de los rectángulos. La manera experimental de definir se representa en la Fig.5.17.

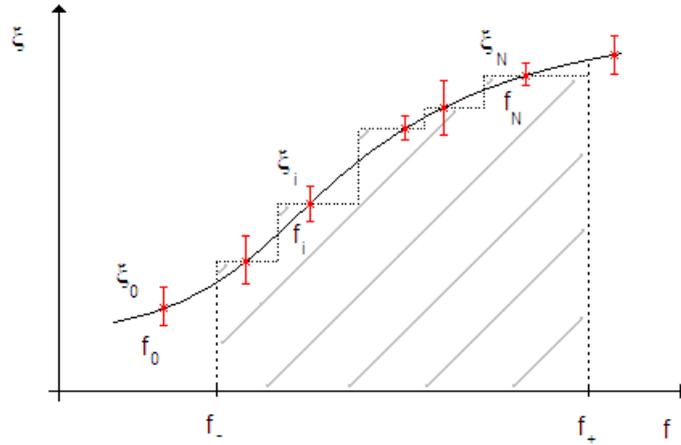


Figura 5.17: Ilustración de la definición experimental de  $\langle \xi \rangle_{[f_-; f_+]}$  en el intervalo  $[f_-; f_+]$ . La línea continua negra es la función  $\xi(f)$  continua y los puntos rojos son los que se midieron.  $\xi$  se supone constante en los intervalos  $\left[ \frac{f_{i-1}+f_i}{2}; \frac{f_i+f_{i+1}}{2} \right]$ . La integral se aproxima por el área rayada en gris.

La fórmula que se usa es la siguiente:

$$\langle \xi \rangle_{[f_-; f_+]}^{(exp)} \equiv \xi_1 \frac{\frac{f_1+f_2}{2} - f_-}{f_+ - f_-} + \left[ \sum_{f_{i-1}, f_i, f_{i+1} \in [f_-; f_+]} \xi_i \frac{\frac{1}{2}(f_{i+1} - f_{i-1})}{f_+ - f_-} \right] + \xi_N \frac{f_+ - \frac{f_{N-1}+f_N}{2}}{f_+ - f_-}. \quad (5.68)$$

## 5 Apéndices

El error en  $\langle \xi \rangle_{[f_-; f_+]}^{(exp)}$  se calcula con la fórmula de propagación de errores:

$$\sigma_{\langle \xi \rangle_{[f_-; f_+]}}^{(exp)} \equiv \sqrt{\sigma_1^2 \left( \frac{\frac{f_1+f_2}{2} - f_-}{f_+ - f_-} \right)^2 + \left[ \sum_{f_{i-1}, f_i, f_{i+1} \in [f_-; f_+]} \sigma_i^2 \left( \frac{\frac{1}{2}(f_{i+1} - f_{i-1})}{f_+ - f_-} \right)^2 \right] + \sigma_N^2 \left( \frac{f_+ - \frac{f_{N-1}+f_N}{2}}{f_+ - f_-} \right)^2}. \quad (5.69)}$$

Tomando  $[f_-; f_+] = [f - \Delta f/2; f + \Delta f/2]$ , un intervalo de tamaño  $\Delta f$  constante centrado en  $f$ , se puede definir el promedio de  $\xi$  como función de la frecuencia:

$$\langle \xi \rangle (f) \equiv \frac{1}{\Delta f} \int_{[f - \Delta f/2; f + \Delta f/2]} \xi (f') df' \quad (5.70)$$

La definición experimental del promedio y del error se hace como se describió anteriormente en (5.68) y (5.69).

**Errores en  $\alpha$ :** Definición de  $\alpha$ :

Dada una porción  $[f - \Delta f/2; f + \Delta f/2]$  del espectro de frecuencias normales de una barra en la que la densidad de niveles es constante se hace un histograma de las distancias normalizadas entre niveles vecinos  $\frac{f_{i+1} - f_i}{\langle f_{i+1} - f_i \rangle}$ . Se normaliza el histograma de tal manera que su integral valga 1 y se le ajusta, con mínimos cuadrados, una función de Izrailev (ver Apéndice D) con parámetro  $\alpha$ . La función  $\alpha (f)$ , donde  $f$  es el centro del intervalo de frecuencias, queda así definida con el parámetro de la función que más concuerda con el histograma de probabilidad de distancias entre niveles vecinos. En el caso de una densidad de niveles no constante en el intervalo se tiene que hacer un desdoblamiento, es decir, multiplicar las distancias entre niveles vecinos por la densidad local de niveles.

Experimentalmente se midió el espectro de la barra entre 10kHz y 87kHz. Se encontró, de acuerdo a los cálculos numéricos, una densidad de niveles constante (ver Fig. 5.18). Se decidió usar intervalos de 20kHz de ancho, en los que se encuentran aproximadamente 50 niveles en promedio. Los histogramas van de 0 hasta 4 en el eje horizontal, con un paso de 0.2 (ver Fig. 3.7).

## 5 Apéndices

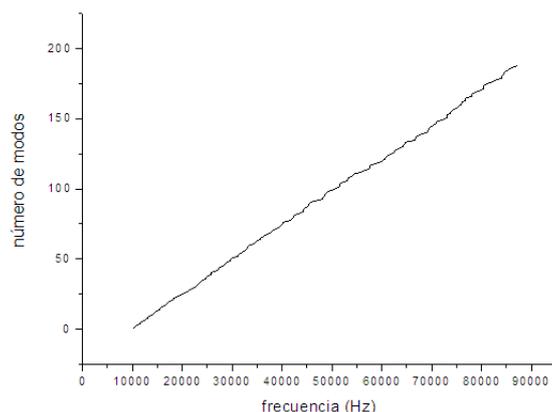


Figura 5.18: Número de modos contra frecuencia. Aquí el 0 es artificial porque no se midieron los primeros modos. La densidad de niveles es la derivada de la función que se muestra y por lo tanto es constante

Fuentes de error en  $\alpha$ :

1. Las mediciones de frecuencias normales se hacen con cierta imprecisión que depende de la resolución de los aparatos y de los posibles corrimientos en frecuencia de los niveles inducidos por un cambio de temperatura de la barra.

2. Experimentalmente se pueden perder algunos niveles. El efecto de perder uno es reemplazar dos distancias  $\frac{f_{i+1}-f_i}{\langle f_{i+1}-f_i \rangle}$  cortas por una  $\frac{f_{i+2}-f_i}{\langle f_{i+1}-f_i \rangle}$  más grande. La  $\alpha$  tiende a aumentar. También se puede dar el caso en el que un nivel de otro tipo de excitación, ya sea flexional o compresional, se detecte y se agregue incorrectamente a la lista de niveles torsionales. El efecto es en este caso reemplazar una distancia  $\frac{f_{i+1}-f_i}{\langle f_{i+1}-f_i \rangle}$  grande por dos distancias cortas. La  $\alpha$  tiende entonces a disminuir.

3. Para obtener  $\alpha$  sin ambigüedad se necesitaría tener una estadística sobre una infinidad de niveles. Numéricamente se pueden acumular datos sobre muchas barras para tener una estadística tan buena como la queramos y poder así calcular  $\alpha(f)$  con una precisión arbitraria. Sin embargo, ya que el experimento consta de una sola barra, los valores medidos tendrán una fluctuación respecto al valor real debida a la escasez estadística. Esta fluctuación no tiene su origen en el error experimental en la medida de las frecuencias, sino en que en los intervalos de frecuencia de tamaño finito en los que se calculan  $\alpha$  sólo tenemos acceso a un número finito de niveles, que son los eigen niveles de la barra, y que de este conjunto finito de datos intentamos determinar la distribución de probabilidades que caracteriza al ensamble al que pertenece la barra. Otra barra con otro juego de longitudes  $\{d_n\}$  al azar tendría otro conjunto de frecuencias normales y otra fluctuación en cada uno de los mismos intervalos de frecuencias.

El error debido a la fuente 1 es pequeño: en efecto, como se mencionó en el capítulo 3, la estabilidad del oscilador es de una parte en  $10^6$  y es despreciable respecto a los

## 5 Apéndices

corrimientos de frecuencia por dilatación térmica de la barra. Para minimizar los cambios de temperatura todas las mediciones se llevaron a cabo en un cuarto mantenido a la temperatura de 21°C. Los trabajos anteriores del grupo de vibraciones elásticas [11, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 33] comprueban que, al seguir este procedimiento experimental, el acuerdo entre teoría y experimento es excelente, por lo que se despreció esta fuente de error en este trabajo.

El error debido a la fuente 2 es difícil de estimar. Sin embargo cabe hacer notar que la probabilidad de perder un nivel o agregar uno falso es muy baja a frecuencias menores que aproximadamente 60-70 kHz, mientras las amplitudes detectadas en el espectro son muy buenas y no dejan lugar a duda. A frecuencias más altas, de 70 kHz para arriba, los EMAT funcionan con menos eficiencia y los modos se localizan más fuertemente. Las amplitudes detectadas son más débiles y posiblemente se empiezan a perder o agregar algunos modos. La frecuencia límite de 87kHz corresponde a la frecuencia a partir de la cual los modos empiezan a ser demasiado dudosos. Sin embargo, antes de ella el número de errores en los niveles medidos no debería rebasar unos 3 o 4 en total, por lo que también se despreció esta fuente de error.

La fluctuación debida a la fuente 3 se puede estimar numéricamente: en efecto, considerar un gran número de barras y calcular  $\alpha$  en cada una de ellas en un intervalo de frecuencias común a todas nos permite obtener la distribución estadística de la fluctuación que presenta cada barra individual, y por lo tanto la barra que se usó en el experimento, en ese mismo intervalo de frecuencias. Conocer esta distribución nos permitirá definir una barra de fluctuaciones asociada a esta fuente, que se dibuja como si fuera una barra de error aunque no se trata de errores experimentales sino de fluctuaciones. En la figura 5.19 se graficó la distribución de la fluctuación de  $\alpha$  en el caso de un valor  $\alpha_{real} = 0.85$ .

Se observa que la distribución es asimétrica. La barra de fluctuaciones que definiremos tendrá entonces un significado distinto al caso común en que la distribución de fluctuaciones es una gaussiana que se puede caracterizar completamente por su valor promedio y su desviación estándar. De que información queremos que contenga dependerá como la definiremos.

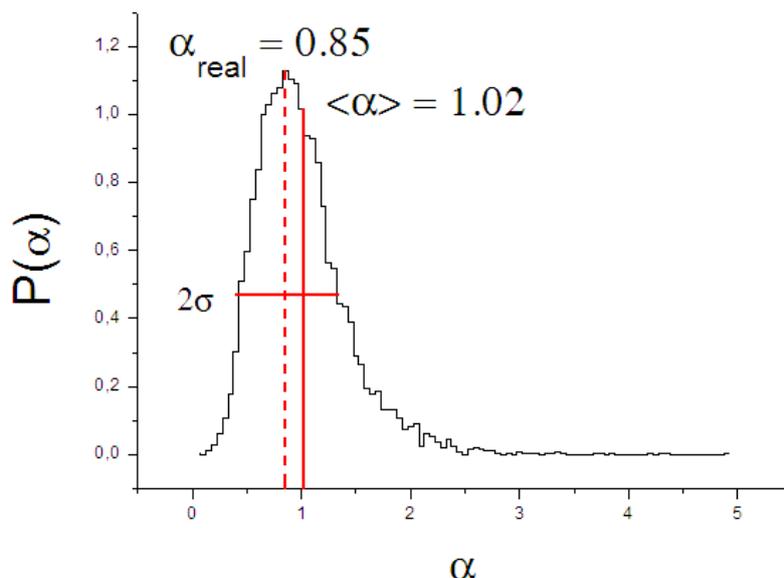


Figura 5.19: La distribución de las fluctuaciones  $P(\alpha)$  como función de  $\alpha$ . La estadística se hizo sobre 5000 barras en el intervalo de frecuencias [28kHz ; 48kHz]. El promedio  $\langle\alpha\rangle$  de las  $\alpha$  de las 5000 barras consideradas no coincide con el valor  $\alpha_{real}$  que se obtuvo al acumular los espaciamientos entre niveles vecinos en un sólo histograma y al calcularle  $\alpha \equiv \alpha_{real}$ . La distribución de las fluctuaciones no es una gaussiana.

Las dos informaciones importantes que se decidieron incluir en las barras de fluctuaciones son el tamaño de las fluctuaciones en  $\alpha$ , representado por el ancho de la barra, y la asimetría de la distribución, representada por el no centrar la barra en el punto experimental. Por analogía con el caso usual en que se tiene una distribución de fluctuaciones gaussiana, requerimos que las barras de fluctuaciones sean de tal manera que una fracción cercana al 65 % de los puntos se encuentren alejados de su valor real por una cantidad menor al ancho derecho o izquierdo de su barra de fluctuaciones, según si se resultaron menores o mayores a dicho valor. A continuación se propone un algoritmo, que es el que se siguió, para calcular las barras de fluctuaciones.

Se tienen 13 histogramas experimentales de 13 intervalos de frecuencias de 20kHz de ancho centrados en  $f_1, f_2, \dots, f_{13}$ . De estos histogramas se obtienen  $\alpha(f_1), \dots, \alpha(f_{13})$  por un ajuste usando mínimos cuadrados que se describió anteriormente. De cada histograma se podría haber obtenido una desviación estándar  $\sigma$ , sin embargo, esto no se hizo. Puesto que se pueden despreciar las fuentes de error 1 y 2 se puede simular el resultado experimental de manera numérica y por lo tanto podemos evaluar  $\sigma$  numéricamente.

Se fija un intervalo de frecuencias de 20kHz de ancho centrado en alguna de las 13 frecuencias  $f_1, f_2, \dots, f_{13}$  y se calcula  $\alpha$  en cada una de un gran número de barras - 1000 en este caso. Se calcula el promedio  $\langle\alpha\rangle$  del conjunto de datos obtenidos así como su

## 5 Apéndices

desviación estándar  $\sigma$ . Al mismo tiempo se acumulan los datos de distancias entre niveles vecinos de todas las barras en un histograma suma de todos los histogramas individuales. A este histograma suma, que tiene una estadística 1000 veces mejor, se le puede definir una  $\alpha$  que llamaremos  $\alpha_{1000b}$ . En el caso de la figura 5.19 en el que la estadística se hizo sobre 5000 barras, este valor se llamó  $\alpha_{real}$ . La figura 5.20 ilustra este procedimiento.

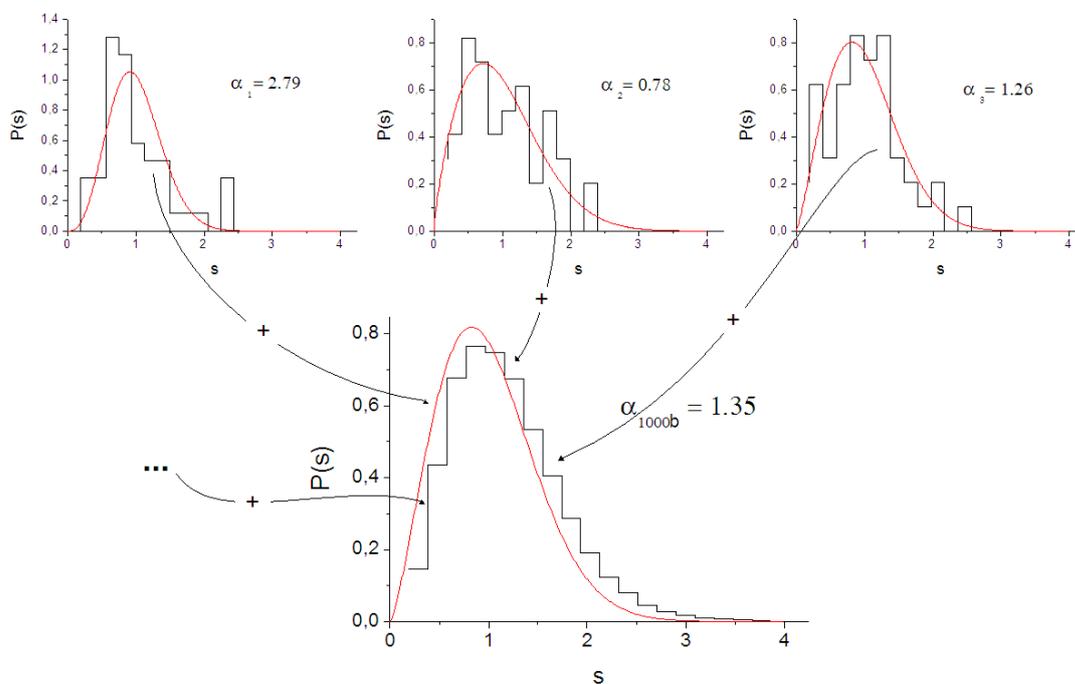


Figura 5.20: Histogramas de repulsión de niveles: los tres primeros corresponden a los de las tres primeras de las mil barras y el cuarto corresponde al histograma suma de los mil histogramas individuales.  $\langle \alpha \rangle = \frac{2.79+0.78+1.26+\dots}{1000} = 1.47$ ,  $\sigma = \sqrt{\frac{(2.79-1.47)^2+(0.78-1.47)^2+(1.26-1.47)^2+\dots}{1000}} = 0.61$ ,  $\alpha_{1000b} = 1.35$

De acuerdo con lo que se esperaba al tener una distribución asimétrica, el promedio  $\langle \alpha \rangle$  de las  $\alpha$  individuales no coincide con  $\alpha_{1000b}$ . En los valores que hemos calculado la diferencia  $\delta\alpha = \langle \alpha \rangle - \alpha_{1000b}$  entre las dos es típicamente una fracción de la desviación estándar  $\sigma$ .

Se propone entonces la siguiente definición para la barra de fluctuaciones en  $\alpha$ : ella tiene un ancho de  $2\sigma$  y es asimétrica, el valor extremo inferior siendo  $\sigma - \delta\alpha$  y el extremo superior  $\sigma + \delta\alpha$ . Esta barra representa la fluctuación estadística de  $\alpha$  y desprecia el error experimental.

Todo lo anterior se hace para cada frecuencia  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 13$ .

# Bibliografía

- [1] R. Dalichaouch, J. P. Armstrong, S. Schultz, P. M. Platzman y S. L. McCall, *Microwave localization by 2-dimensional random scattering*, Nature **354**, 53–55 (1991)
- [2] A. A. Chabanov, M. Stoytchev y A. Z. Genack, *Statistical signatures of photon localization*, Nature **404**, 850–853 (2000)
- [3] M. Störzer, P. Gross, C. M. Aegerter y G. Maret, *Observation of the critical regime near Anderson localization of light*, Phys. Rev. Lett. **96**, 063904 (2006)
- [4] C. M. Aegerter, M. Störzer y G. Maret, *Experimental determination of critical exponents in Anderson localisation of light*, Europhys. Lett. **75** 562 (2006)
- [5] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman y M. Segev, *Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices*, Nature **446**, 52–55 (2007)
- [6] Y. Lahini, A. Avidan, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, D. N. Christodoulides y Y. Silberberg, *Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices*, Phys. Rev. Lett. **100**, 013906 (2008)
- [7] S. He y J. D. Maynard, *Detailed measurements of inelastic scattering in Anderson localization*, Phys. Rev. Lett. **57**, 3171 (1986)
- [8] S. He y J. D. Maynard, *Eigenvalue spectrum, density of states, and eigenfunctions in a two-dimensional quasicrystal*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1888 (1989)
- [9] J. D. Maynard, *Colloquium: Acoustical analogs of condensed-matter problems*, Rev. Mod. Phys **73**, 401 (2001)
- [10] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov y B. A. van Tiggelen, *Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network*, Nature Physics **4**, 945 - 948 (2008)
- [11] J. Flores, G. Monsivais, P. Mora, A. Morales, R. A. Méndez-Sánchez, A. Díaz-de-Anda y L. Gutiérrez, *Building and Destroying Symmetry in 1-D Elastic Systems*, por publicar (2010)
- [12] P. E. Lindelof, J. Nørregaard y Hanberg, *New Light on the Scattering Mechanisms in Si Inversion Layers by Weak Localization Experiments*, Phys. Scr. T **14** 17 (1986)
- [13] P. W. Anderson, *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*, Phys. Rev. **109**, 1492-1505 (1958)

## Bibliografía

- [14] B. Kramer y A. MacKinnon, *Localization: theory and experiment*, Rep. Prog. Phys. **56**, 1469-1564 (1993)
- [15] JL Pichard, M. Sanquer, K. Slevin y P. Debray, *Broken Symmetries and Localization Lengths in Anderson Insulators: Theory and Experiment*, Phys. Rev. Letters **65**, 1812-1815 (1990)
- [16] A. Vaknin, A. Frydman, Z. Ovadyahu y M. Pollak, *High-field magnetoconductance in Anderson insulators*, Phys. Rev. B **54** (1996)
- [17] Yu. B. Khavin, M. E. Gershenson y A. L. Bogdanov, *Strong localization of electrons in quasi-one-dimensional conductors*, Phys. Rev. B **58**, 8009-8019 (1998)
- [18] U. Kulh, F. M. Izrailev y A. A. Krokhin, *Enhancement of Localization in One-Dimensional Random Potentials with Long-Range Correlations*, Phys. Rev. Letters **100**, 126402 (2008)
- [19] A. Esmailpour, A. Sheikhan, M. Elahi, M. R. R. Tabar y M. Sahimi, *Localization properties of acoustic waves in the random-dimer media*, Phys. Rev. B **78**, 134206 (2008)
- [20] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello y T. V. Ramakrishnan, *Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions*, Phys. Rev. Letters **42** (1979)
- [21] C. W. J. Beenakker, *Random-matrix theory of quantum transport*, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997)
- [22] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer y A. Aspect, *Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder*, Nature **453**, 891 (2008)
- [23] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno y M. Inguscio, *Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate*, Nature **453**, 895 (2008)
- [24] A. Morales, J. Flores, L. Gutiérrez y R. A. Méndez-Sánchez, *Compressional and torsional wave amplitudes in rods with periodic structures*, J. Acoust. Soc. Am. **117**, 2814-2819 (2005)
- [25] A. Morales, R. A. Méndez-Sánchez y J. Flores, *Topological defects in 1D elastic waves*, Physica E **19**, 289-291 (2003)
- [26] L. Gutiérrez, A. Díaz-de-Anda, J. Flores, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais y A. Morales, *Wannier-Stark ladders in one-dimensional elastic systems*, Phys. Rev. Letters **97**, 114301 (2006)

## Bibliografía

- [27] G. Monsivais, R. A. Méndez-Sánchez, A. Díaz-de-Anda, J. Flores, L. Gutiérrez y A. Morales, *Elastic Wannier-Stark ladders in torsional waves*, Journal of Mechanics of Materials and Structures **2**, 1629-1638 (2007)
- [28] L. Gutiérrez y A. Morales, *Escaleras de Wannier-Stark en sistemas elásticos unidimensionales*, tesis de maestría de L. Gutiérrez, Instituto de Ciencias Físicas UNAM - campus Morelos (2009)
- [29] A. Díaz-de-Anda, A. Pimentel, J. Flores, A. Morales, L. Gutiérrez y R. A. Méndez-Sánchez, *Locally periodic Timoshenko rod: experiment and theory*, J. Acoust. Soc. Am. **117**, 2814-2819 (2005)
- [30] K. F. Graff, *Wave motion in elastic solids* (Dover, New York, 1991)
- [31] M. A. Avila y R. A. Méndez-Sánchez, *The method of the Poincaré map for compressional and torsional waves in composite rods*, Physica E **30** 174-178 (2005)
- [32] F. M. Izrailev, S. Ruffo y L. Tessieri, *Classical representation of the one-dimensional Anderson model*, J. Phys. A: Math. Gen **31**, 5263 (1998)
- [33] A. Morales, L. Gutiérrez y J. Flores, *Improved eddy current driver-detector for elastic vibrations*, Am. J. Phys. **69**, 517-522 (2001)
- [34] P. R. Bevington y D. Keith Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences* (WCB McGraw-Hill 1992)
- [35] T. A. Brody, *A statistical measure for the repulsion of energy levels*, Lettere Al Nuovo Cimento (1971-1985), (1973)
- [36] G. Casati, F. M. Izrailev y L. Molinari, *Scaling properties of the eigenvalue spacing distribution for band random matrices*, J. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991) 4755-4762
- [37] S. Sorathia y F. Izrailev, *Scattering Properties of Open Systems of Interacting Quantum Particles*, tesis de doctorado de S. Sorathia, Instituto de Física de la Universidad Autónoma de Puebla (2010)
- [38] F. J. Dyson, *The Threefold Way. Algebraic Structure of Symmetry Groups and Ensembles in Quantum Mechanics*, J. Math. Phys. **3**, 1199 (1962)
- [39] G. Casati, B. V. Chirikov, I. Guarneri y F. M. Izrailev, *Band-random-matrix model for quantum localization in conservative systems*, Phys. Rev. E **48** (1993)
- [40] J.L. Pichard, *The one-dimensional Anderson model: scaling and resonances revisited*, J. Phys. C: Solid State Phys. **19** 1519-1535 (1986)
- [41] F. M. Izrailev, *Simpel models of quantum chaos: spectrum and eigenfunctions*, Physics Reports **196** 299-392 (1990)