UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La otra tradición de la geometría clásica: soluciones no euclidianas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

ANDREA MOLINA RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. JOSÉ RAFAEL MARTÍNEZ ENRÍQUEZ

2011

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Molina
Apellido materno	Ramírez
Nombre	Andrea
Teléfono	56 19 50 09
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	301040059
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	M en C
Nombre(s)	José Rafael
Apellido paterno	Martínez
Apellido materno	Enríquez
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Mat
Nombre(s)	Julio César
Apellido paterno	Guevara
Apellido materno	Bravo
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	L en CC
Nombre(s)	Carlos Iván
Apellido paterno	Lingan
Apellido materno	Pérez
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Mat
Nombre(s)	Concepción
Apellido paterno	Ruíz
Apellido materno	Ruíz-Funes
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Dra
Nombre(s)	Ma. de Lourdes
Apellido paterno	Esteva
Apellido materno	Peralta
7. Datos de trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	La otra tradición de la geometría clásica: soluciones no euclidianas
Número de páginas	108 p
Año	2011

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Si algún período de la geometría antigua puede ser calificado como "*la edad de oro* de la práctica geométrica centrada en los tres problemas clásicos", éste sería la última parte del siglo III a.C. Los llamados problemas clásicos constituyen el principal eje que vincula los fragmentos sobrevivientes del trabajo de un grupo de geómetras excepcionales de la época: Eratóstenes, Nicomedes, Hipias y Diocles, entre otros. Los tres problemas en cuestión suelen ser enunciados como sigue: duplicar el cubo, trisecar el ángulo y cuadrar el círculo. Gracias a Eutocio y a otros autores posteriores sabemos que Eratóstenes y Diocles presentaron soluciones a la duplicación del cubo, y que Nicomedes estudió los tres problemas y desarrolló métodos geométricos característicos de este periodo y que nos han llegado como las aplicaciones representativas en las construcciones de estos problemas. Así, un repaso del desarrollo de dichos problemas debe reconocerlos como actores en una fase significativa del proceso de constitución de la matemática griega antigua.

De los llamados *tres problemas clásicos*, que como ya se dijo, eran la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la construcción de dos medias proporcionales[1], ninguno puede ser certificado cómo más importante o interesante que los demás y, de hecho, todos ellos gozaron de mayor o menor fama según la época.

En dos famosos textos, uno de ellos *Synagoge libro VI,* Pappus clasificó a los problemas geométricos como "planos", "sólidos" y "cuasi-lineales". Los problemas planos eran aquellos cuya solución utilizaba únicamente círculos y líneas rectas, es decir, eran los problemas construibles mediante métodos euclidianos. La segunda clase de problemas, los sólidos, incluían a los que para su construcción recurrían al uso de líneas rectas, círculos y secciones cónicas; y por último, si era necesario emplear otras curvas distintas a las ya mencionadas, como lo serían la concoide, la espiral y la cisoide, entonces el problema era clasificado como cuasi-lineal[2].

[1] Así los cita Bos, Henk J. M., [2001], p. 23. Esto se explica con base en que la duplicación del cubo, el que por lo general es citado como uno de los problemas clásicos griegos, se resuelve al encontrar dos medias proporcionales de dos magnitudes dadas.
[2] Retomo la palabra utilizada por Bos para este grupo de problemas. Ver Bos, Henk J. M., [2001], p. 37.

Esta clasificación evidentemente suponía que todos los problemas podían ser construidos mediante la intersección de rectas, de curvas o de ambas, o mejor dicho, los puntos o lugares geométricos que resolvían un problema se podían establecer, generar o construir utilizando instrumentos o reglas.

La primera clase de problemas, los planos, abarca los problemas comunes construibles por métodos euclidianos. Los problemas sólidos fueron, en su mayor parte, reducidos a problemas de un nivel más elemental que ya habían sido resueltos, o que se tenían como solubles, aunque se llegaba a transformar un problema a uno aún sin resolver. El nivel más sofisticado, el de los problemas sólidos, se podía reducir a la construcción de dos medias proporcionales entre dos segmentos de recta dados. Esta construcción, o más bien, estas construcciones, como se verá, incluyen en alguna etapa del proceso uno o más pasos que no se ajustan a los procedimientos geométricos avalados por el estilo euclidiano.

El objetivo de esta tesis es presentar una parte de la abundante aportación matemática derivada del propósito de dar solución a los tres problemas clásicos. El ingenio matemático dio lugar, o fue aplicado, a diversas técnicas con el fin de resolver tales problemas, y esto nos brinda una importante variedad de resultados que dependieron de la creación de nuevas curvas, o de la invención de aparatos mecánicos, y que de una u otra manera condujeron al desarrollo de nuevas teorías y, eventualmente, constituyeron una vertiente importante del evolutivo e imparable progreso de las matemáticas, mismo que se convierte en inevitable cuando lo ya conocido parece enfrentar sus propias limitaciones.

En concreto lo que se hizo fue elegir una serie de resultados, rastrear su filiación, establecer su relevancia, analizar algunas demostraciones y las diferencias existentes entre ellas, considerando el contexto histórico en el que se dan a conocer. Un esbozo de cómo está organizada esta tesis es el siguiente:

El capítulo 1 se ocupa del problema de la trisección del ángulo. Comienza con algunas demostraciones atribuidas a Pappus, quien mediante la intersección de cónicas logra resolver el problema. Sigue a esto la creación de Hipias: la cuadratriz, que fue aplicada para trisecar el ángulo. Se presenta la definición y la construcción que Pappus hace de dicha curva con el fin de efectuar la división general del ángulo. En seguida se muestra cómo es que Aristóteles describe la trisección mediante la cuadratriz y, además, se estudian dos variantes que surgen del método de trisección utilizado por Arquímedes. Se presenta la solución al problema que los árabes ofrecen, y más adelante se muestra el método de Clavius, mismo que depende de la curva en cuestión; como veremos, Viète soluciona el problema sin recurrir a la cuadratriz y, finalmente, Descartes construye un dispositivo mecánico para lograr trisecar el ángulo.

En el capítulo 2, después de presentar el origen mítico del problema de la duplicación del cubo; y de mostrar cómo éste se puede reducir al problema de encontrar dos medias proporcionales a dos magnitudes adecuadamente elegidas, se analizarán sólo algunas de las distintas construcciones de las dos medias proporcionales, para luego continuar con la resolución del problema mediante la aplicación de éstas.

El capítulo 3 gira en torno a otro problema emblemático de la matemática griega antigua: la construcción del heptágono regular. Como se verá, su solución requiere de métodos no euclidianos para llevarla a cabo. Uno de ellos emplea una neusis, mientras que otra opción propone la intersección de cónicas.

Para finalizar, en el capítulo 4, se consideran dos curvas que destacan por la manera en que fueron generadas: la concoide y la cisoide, ambas creadas con el fin de resolver el problema de la cuadratura del círculo.

En el desarrollo de mi tesis el criterio de presentación de las demostraciones se basa en el desarrollo de las ideas y las conexiones entre diversos autores. A continuación se presenta un listado –organizado de manera cronológica- de matemáticos que permite situar el periodo histórico en el que laboraron. De esta manera las cuestiones del orden temporal no interrumpen –a menos que se considere relevante- el flujo de la presentación de ideas o de los resultados.

CRONOLOGÍA

Tales	624 a.C - 546 a.C
Anaxímenes de Mileto	585 a.C - 528 a.C
Pitágoras	582 a.C - 507 a.C
Oenópides de Quíos	490 a.C - 420 a.C
Antifonte el Sofista	480 a.C - 411 a.C
Hipócrates de Quíos	470 a.C - 410 a. C
Teodoro de Cirene	465 a.C - 398 a.C
Hipias	460 a.C - 399 a.C
Demócrito	450 a.C - 370 a.C
Arquitas	430 a.C - 360 a.C
Platón	428 a.C/427 a.C - 347 a.C
Teeteto	417 a.C - 369 a.C
Eudoxo de Cnido	410 a.C/408 a.C - 355 a.C/347 a.C
Thymaridas	400 a.C - 350 a.C
Dinóstrato	390 a.C - 320 a.C
Aristóteles	384 a.C - 322 a.C
Menecmo	380 a.C - 320 a.C
Aristeo el viejo	370 a.C - 300 a.C
Calipo	370 a.C - 300 a.C
Autólico de Pitane	360 a.C - 290 a.C
Polyaenus de Lámpsaco	340 a.C - 278 a.C
Euclides	323 a.C - 283 a.C
Arquímides	287 a.C - 212 a.C
Conon de Samos	280 a.C - 220 a.C
Nicomedes	280 a.C - 210 a.C
Eratóstenes	276 a.C - 194 a.C
Apolonio de Perga	262 a.C - 190 a.C

Diocles	240 a.C - 180 a.C
Hiparco	190 a.C - 120 a.C
Teodosio de Bitinia	160 a.C - 100 a.C
Perseo	150 a.C - ?
Gémino	1er siglo a.C
Herón de Alejandría	10 - 70
Nicómaco	60 - 120
Teón de Esmirna	70 - 135
Menelao de Alejandría	70 - 140
Diofanto	200/214 - 284/298
Sporus	240 - 300
Pappus de Alejandría	290 - 350
Teón de Alejandría	335 - 405
Hipatia de Alejandría	370 - 415
Proclo	412 - 485
Domnino de Larissa	420 - 480
Eutocio	480 - 540
Al-Kindi	801 - 873
Ahmad ibn Musa ibn Shakir	803 - 873
Thabit ibn Qurra	836 - 901
Al-Khazin	900 - 971
Al-Quhi	940 - 1000
Al-Ala ibn Sahl	940 - 1000
Al-Sijzi	945 - 1020
Alhazen o ibn al-Haytham	965 - 1040
Cristóbal Clavius	1537 - 1612
Viète	1540 - 1603
Descartes	1596 – 1650

I. LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO Y SU MAYOR CONTRIBUCIÓN: LA CUADRATRIZ

El problema de la trisección del ángulo, al igual que la construcción del heptágono regular y del pentágono con lados iguales que no es equiangular, está directamente relacionado con un entorno de investigaciones sobre la construcción de polígonos regulares. Estas investigaciones son presentadas en el cuarto libro de *Los Elementos,* donde Euclides considera polígonos con 3, 4, 5 y 6 lados. Por ese entonces era sabido que construir un eneágono regular era equivalente a trisecar el ángulo anclado en el centro que subtiende un lado de un triángulo equilátero, lo cual, por supuesto, no es posible realizar mediante construcciones aceptables, según los modelos de construcción aprobados por Euclides, esto es, aquellos que emplean únicamente regla y compás. Como sabemos, la dificultad de utilizar métodos planos en la resolución de problemas sólidos ya había sido señalada por Pappus.

LA TRISECCIÓN DE PAPPUS

Uno de los temas más importantes en *La Colección* de Pappus fue la construcción de la neusis[3] (más adelante se explicará su significado, indicando sus propiedades y uso). En el libro IV Pappus explicó cómo es que ésta, la neusis, puede realizarse mediante la intersección de cónicas (específicamente la intersección de una hipérbola y un círculo), y además mostró una importante relación con la trisección del ángulo. Veamos ambas construcciones.

Dadas dos líneas perpendiculares L y M intersecándose en A (Fig.1)*, un punto O y un segmento a, se requiere construir una línea a través de O que intersecte a L y M en E y F respectivamente, y tal que EF = a.*

[3] Bos, Henk J.M., [2001], p. 54.

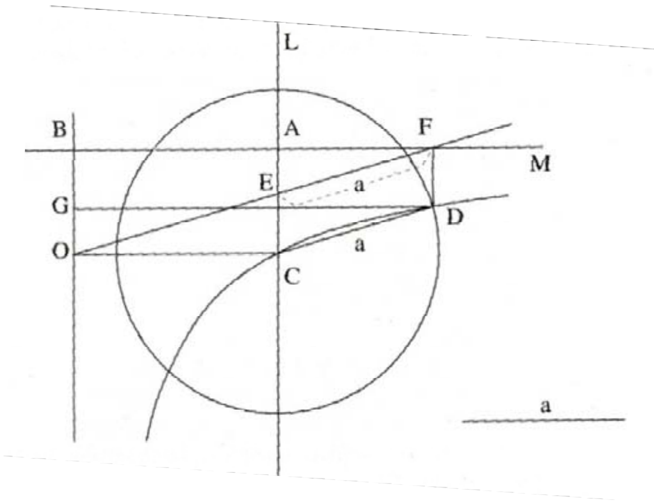


Fig. 1

i. Completamos el rectángulo ABOC; prolongamos BO.

ii. Dibujamos una hipérbola a través de C con asíntotas a lo largo de BA prolongada (=M) y de BO prolongada.

iii. Dibujamos un círculo con centro en C y radio *a*; éste interseca a la hipérbola en D.

iv. Dibujamos una línea a través de D paralela a AC; ésta interseca a BA prolongada en F; dibujamos OF. OF corta a AC en E.

v. OEF es la línea buscada y EF = *a*.

La prueba es la siguiente:

Dibujamos CD y GD paralela a AB. Entonces:

rect.(FD, DG) = rect.(CA, CO)[4] porque D y C están sobre la hipérbola;

por consiguiente

rect.(BF, FD) = rect.(BA, AC). Así, BF : BA = AC : FD ··· (1)

además, $\triangle$BFO y $\triangle$COE son semejantes; de donde

BF : BO = CO : CE, por lo que BF : CO = BO : CE, es decir

BF : BA = AC : CE ··· (2).

[4] Por rect(FD, DG) entendemos "el área del rectángulo con lados FD y DG".

Comparando las proporciones (1) y (2) se obtiene que CE = FD, por lo que CEFD es un paralelogramo. Entonces EF = CD = *a*, como se quería mostrar.

Hemos exhibido cómo es que una neusis entre líneas perpendiculares podía ser ejecutada por medios propios de los problemas sólidos. A partir de esto Pappus explica cómo trisecar un ángulo recurriendo a este tipo de neusis[5].

Dado un ángulo φ se necesita construir un ángulo igual a $\frac{1}{3}\varphi$ (Fig. 2).

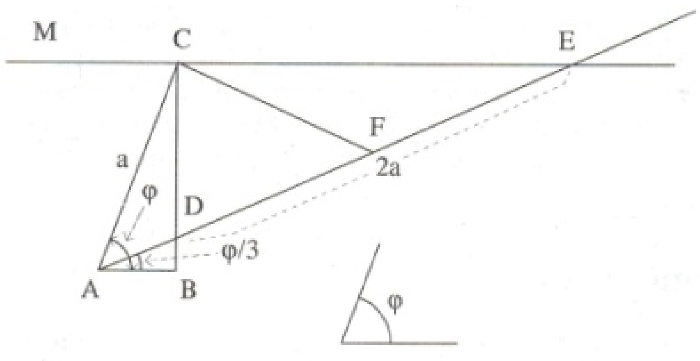


Fig. 2

- **i.** Construimos un triángulo rectángulo ABC con ∡CAB = φ; llamamos AC = *a*; dibujamos un línea M a través de C y tal que sea paralela a AB.
- **ii.** Mediante una neusis dibujamos ADE, intersecando BC en D y a M en E, de manera que DE = 2*a*
- **iii.** Entonces ∡DAB es el ángulo requerido.

La demostración es la siguiente:

Con F sobre DE y tal que DF = FE, tenemos que

DF = CF = FE = CA = *a*, debido a que son triángulos isósceles

∡CAF = ∡CFA = (∡FCE + ∡FEC) = 2∡FEC = 2∡DAB

por lo que $\measuredangle DAB = \frac{1}{3}\measuredangle CAB$

[5] *Ibid.*, p. 55.

Ambas construcciones muestran que la trisección puede ser ejecutada mediante la intersección de cónicas, por lo que éste puede ser considerado como un problema sólido. Pappus agregó dos construcciones más de la trisección, ambas utilizando la intersección de un círculo y una hipérbola y enfatizando que ninguna de ellas necesitaba una neusis como paso intermedio. Presentamos una de estas construcciones que surge de ciertas ideas que se manejaban alrededor de la época de Euclides.

Se requiere cortar el arco dado ABG (Fig. 3) *en B de manera que el arco BG sea un tercio del total* [6].

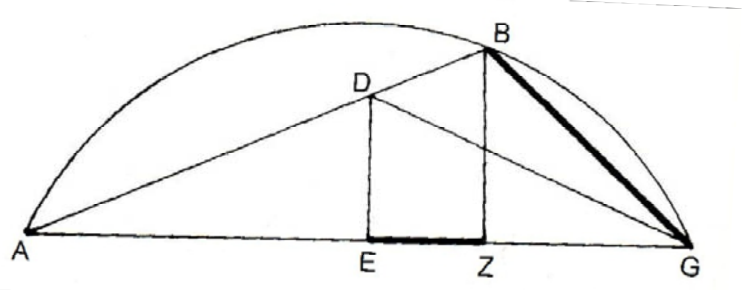


Fig. 3

Supongamos que el arco BG es un tercio del arco ABG. Entonces el ángulo BGZ es dos veces el ángulo BAZ. Dibujamos GD para bisecar al ángulo BGZ. Dicha bisectriz interseca a BA en D. Dibujamos ahora DE y BZ perpendiculares a AG.

Dado que GD es la bisectriz del ángulo BGZ resulta que ∡DGZ = ∡DAZ de manera que el triángulo ADG es isósceles, por lo tanto AD = DG.

Observamos el triángulo ADE y el triángulo EDG; sabemos que

∡DGE = ∡DAE, ∡DEG = ∡DEA

entonces

∡ADE = ∡GDE   y

AD = DG y comparten el lado DE, por lo que AE = EG.

[6] Knorr, Wilbur, R., [1989], p. 128.

Así, AD = DG y AE = EG.

Ya que el ángulo BGA es bisectado, AG : BG = AD : DB (*Elementos* VI, 3)[7] pero

AD : DB = AE : EZ ya que los triángulos ABZ y ADE son semejantes

por lo tanto $AG\!:\!BG = AE\!:\!EZ$,

entonces $AG \cdot \frac{1}{BG} = AE \cdot \frac{1}{EZ}$

y se sigue que $\frac{AG}{AE} = \frac{\frac{1}{EZ}}{\frac{1}{BG}}$

y de esto obtenemos que $\frac{AG}{AE} = \frac{BG}{EZ}$.

Ya que $AE = EG$, entonces $AG\!:\!AE = 2\!:\!1$

así que $AG\!:\!AE = BG\!:\!EZ = 2\!:\!1$

De manera que B está en el lugar tal que BG = 2 EZ para puntos dados G, E; esto es, el lugar en el que $BZ^2 + ZG^2 : EZ^2 = 4 : 1$. Esto corresponde a una hipérbola, dada en posición, por lo que su intersección con el arco ABG dado resuelve el problema.

Observamos que la trisección del ángulo ha sido reducida a la especificación de una hipérbola a través del foco y de la directriz, esto es, el lugar de los puntos cuyas distancias a un punto dado y a una recta dada están en proporción dada mayor que 1 : 1.

Si damos un brinco en la historia veremos que otras construcciones geométricas cuyo origen las sitúa en el camino para resolver otros problemas, también resultaron útiles para trisecar un ángulo dado. Tal es el caso de la espiral y de la cuadratriz, curvas que caen en la clasificación de los problemas cuasi-lineales. Ambas curvas fueron definidas mediante un procedimiento específico para generarlas.

---

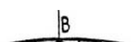
[7] Elementos VI, proposición 3: Si se divide en dos partes iguales el ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también a la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los lados del triángulo que queden; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los lados que quedan del triángulo, la recta dibujada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales al ángulo del triángulo.
Heath, Thomas, L., [1956], pp. 195-196.

LA CUADRATRIZ DE HIPIAS

El sofista Hipias de Elis, contemporáneo de Hipócrates de Quíos, Sócrates y Protágoras, inventó la cuadratriz con el propósito de cuadrar el círculo. Un siglo después la solución de Hipias fue restaurada y amplificada por Dinóstrato, un miembro de la Academia de Platón y hermano de Menecmo. Actualmente no existen registros escritos de la solución original o de la amplificada. Pappus y otros comentadores han dado una buena descripción de la curva, pero su explicación sobre cómo la cuadratriz fue aplicada por Hipias y Dinóstrato al problema de la cuadratura está lejos de ser satisfactoria.

Algunos historiadores, engañados por el término “mecánico”, usado por los primeros geómetras para describir la cuadratriz, insinúan que Hipias dependió de algún tipo de mecanismo para generar la curva, olvidando que los matemáticos griegos estaban acostumbrados a calificar como mecánica toda construcción que implicaba más elementos que sólo líneas y círculos. Otros historiadores, mientras reconocen el carácter geométrico del enfoque, malinterpretan la motivación, dejando al lector bajo la impresión de que Hipias y Dinóstrato simplemente plantearon el problema.

El problema se puede reducir a construir un triángulo de área igual a la de un sector circular dado, específicamente, un cuadrante de un círculo. En la figura 4 el sector es BOM = $\frac{1}{2}$ *Rs*, donde *R* es el radio y *s* la longitud del arco. Asumimos OP igual a *s* y entonces el triángulo BOP tiene la misma área que el sector. Ahora supongamos que la perpendicular a OP interseca al radio OM extendido hasta Q. Entonces, como M barre la circunferencia, el punto Q genera la cuadratriz hipiana.



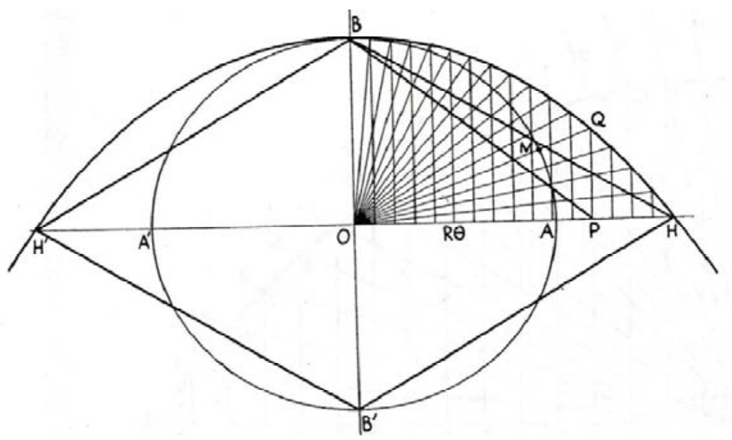


Fig. 4

En particular, el triángulo HOB sería igual en área al cuadrante OAMB, y el rombo HBH´B´ igual en área al círculo, y ya que la conversión de un rombo en un cuadrado de igual área es una operación que se realiza con regla y compás, la cuadratura del círculo podría ser efectivamente lograda[8].

Si el análisis hipiano terminara aquí, el sofista podría ser justamente acusado de establecer únicamente el problema. Pero, a menos que el supiera cómo modificar un arco circular, es decir, establecer un segmento lineal de igual longitud, él no podría generar la cuadratriz; y si sabía cómo modificar un arco circular, entonces no hubiera necesitado de la cuadratriz en primer lugar. Sin embargo, ésta sólo es una conjetura lejana más que razonable. Podríamos pensar que llegado a este punto, Hipias invirtió el problema, es decir, en vez de buscar un segmento rectilíneo de longitud igual al cuadrante de la circunferencia dada, él trató de determinar una porción de círculo, es decir, un cuadrante que fuera igual al segmento rectilíneo dado. Este procedimiento para construir una cuadratriz de base dada es una tarea que podría ser efectuada sin salirse del dominio tradicional.

[8] Dantzing, Tobias, [2006], pp. 138-144.

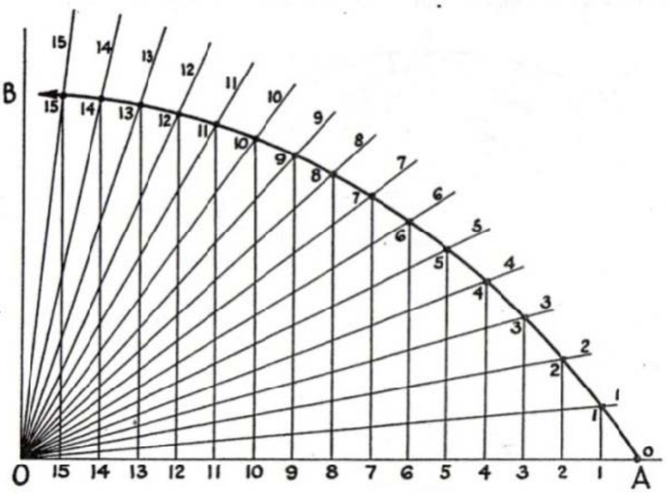


Fig. 5

El procedimiento es mostrado en la figura 5. Un conjunto de rayos igualmente espaciados divide el ángulo recto XOY en n ángulos iguales; el segmento dado OH es dividido en el mismo número, n, de partes iguales. Las perpendiculares a OX en los puntos de división intersecan los rayos correspondientes en puntos que están sobre la cuadratriz buscada. Como el vértice B de la cuadratriz, la meta del problema hipiano, no puede ser obtenido directamente por la operación a mano, éste podría ser visto como el límite de una dicotomía infinita.

De acuerdo con esta interpretación, la cuadratura de Hipias fue un intento para definir la proporción de una circunferencia de un círculo con su diámetro, lo que resulta ser el límite de un proceso infinito. La equivalencia analítica con este procedimiento gráfico es la fórmula:

$$\lim_{n\to\infty} n \tan\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

Esto, por cierto, fue una de las fórmulas que Arquímedes, dos siglos después, usó para determinar la aproximación racional a π. En la aproximación arquimediana el círculo fue visto como un límite común de dos series de polígonos regulares de los cuales unos estaban inscritos y otros estaban circunscritos al círculo, y el número de lados crecía indefinidamente. Cuando Arquímedes aplicó esta idea para el cuadrante del círculo, esta aproximación le llevó a la desigualdad,

$$n \sin\frac{\pi}{2n} < \frac{\pi}{2} < n \tan\frac{\pi}{2n}$$

Para valorar las ideas de Hipias se debe recordar que su cuadratura fue la primera aventura documentada dentro del campo de los procesos infinitos. Esta aventura tuvo lugar alrededor de la segunda mitad del siglo V a.C. Por otra parte, la cuadratriz de Hipias fue la primera curva (otra además del circulo, por supuesto) de la cual tenemos algún registro histórico, y esto ocurrió por lo menos un siglo antes del descubrimiento de las secciones cónicas. En su tratado donde se ocupa de la curva que lleva su nombre Hipias empleó dispositivos que dos mil años después serían retomados por Fermat y Descartes dentro de las prácticas de la geometría analítica.

En los próximos párrafos se retomará un tema que ya fue mencionado en la introducción, pero que por su importancia merece unas líneas más, y con esto me refiero a la clasificación de curvas planas. Los esfuerzos griegos en esta dirección, basados sobre consideraciones estrictamente geométricas, fueron bastante arduos, pero pronto se estancaron. Con la llegada de la geometría analítica, la pregunta entró en una nueva fase.

Descartes fue el primero en proponer que las curvas fueran clasificadas de acuerdo con el carácter de sus ecuaciones, es decir, de las relaciones funcionales que a su vez se traducían en una representación de un sistema de coordenadas rectilíneas. El autor de *La Geometría* estaba particularmente interesado en el lugar geométrico asociado con las ecuaciones, misma que se expresaban bajo la forma de un polinomio en dos variables. Hoy llamamos a tales lugares algebraicos, y definimos como orden de la curva el grado n del polinomio representativo. Descartes, sin embargo, tenía diferentes ideas sobre este tema: él definió el orden mediante los enteros de la forma $\frac{1}{2}n$ o $\frac{1}{2}(n+1)$, dependiendo de si *n* fuera par o impar. Así, lo que designamos hoy como cúbicas y cuárticas fueron las curvas de Descartes de segundo orden, mientras que líneas rectas y cónicas fueron definidas como lugar de primer orden.

Newton identificó el orden de un lugar con el grado de su ecuación. Su renuencia a clasificar líneas rectas entre las curvas lo llevaron a definir el entero $n-1$ como el género del lugar. Así la línea recta fue catalogada como lugar de orden 1 y género 0. A pesar del prestigio de Newton, la idea no echó raíz, y hoy el término género es usado en un sentido completamente diferente.

En cuanto a curvas como la cicloide, la espiral y la sinusoide –que calificaríamos como no algebráicas- las cuales catalogamos hoy como trascendentales, no hay registro de que Newton les asignara un nombre colectivo para ellas. Él planteó, sin embargo, que el orden de cada lugar debería ser visto como infinito, si consideramos que una línea recta puede intersecar tales curvas en un número infinito de puntos.

El término trascendentales, utilizado para caracterizar a estas curvas, fue difundido por Leibniz. Este filósofo y matemático parecía dotado de una extraordinaria intuición y previsión. La división de números y funciones en algebraicas ó como Leibniz los llamó, analíticas y trascendentales, es un buen ejemplo. Leibniz plantea que a todo número algebraico podría asignársele una y sólo una ecuación algebraica con coeficientes racionales. Al grado de esta ecuación él lo llamaba "orden del número algebraico". Reconociendo, sin embargo, que existían magnitudes a las que no podían asignárseles polinomios, Leibniz propuso llamarlas trascendentales, porque ellas trascienden el análisis algebraico.

De manera similar, existen funciones que no pueden ser transformadas en relaciones polinomiales, sin importar cuantas manipulaciones racionales puedan ser admitidas para este fin. Leibniz definió estas funciones como trascendentales. Estaba confundido por el hecho de que una ecuación trascendental pudiera admitir una solución racional, como, por ejemplo, la ecuación $x^2 + x = 30$, la cual es satisfecha por el entero $x = 5$. Sin embargo, consideró tal "fenómeno" como algo excepcional, manteniendo que, "en general", las ecuaciones trascendentales son satisfechas solamente por números trascendentales.

El curso subsecuente de eventos ha justificado el desconcierto de Leibniz, y ha fortalecido, al mismo tiempo, la veracidad de su conjetura. La relación entre números trascendentales, por una parte, y funciones trascendentales por la otra, persiste como un problema no resuelto hasta el día de hoy. Las historias de la trascendencia de los números e y π, y las preguntas pendientes de aritmética trascendental revelan que el problema de Leibniz continuará en la agenda matemática por algún tiempo.

Retomando la cuadratriz de Hipias, elegimos la base de la curva y su eje de simetría para el eje de coordenadas, y el radio del círculo generador con una longitud de una unidad (ver Fig. 4). Entonces, por definición, arc BM = OP = x; nuevamente, si acordamos medir ángulos en radianes, el ángulo BOQ es igual a x, y el triángulo rectángulo POQ origina la relación:

$$y = x \cot x$$

Ésta es la ecuación de la curva en coordenadas rectangulares, y en la medida en que $\cot x$ no pueda ser representada como un polinomio en x, la cuadratriz es una curva trascendental.

Así, después de la línea recta y el círculo, el primer lugar de puntos estudiado por los matemáticos fue una curva trascendental, mientras que simples curvas algebraicas, como las secciones cónicas no aparecieron en la escena matemática sino hasta un siglo y medio más tarde, en el siglo IV a.C.

LA CUADRATRIZ DE PAPPUS

Entre las construcciones clásicas de la cuadratriz destaca la descrita por Pappus, quien en la *Colección,* libro IV, 25-26, define y construye la curva de la siguiente manera:

Dado un cuadrado OBCA y un cuadrante OBA (Fig. 6), la curva hoy llamada cuadratriz se traza de la siguiente manera[9]*:*

i. Sea un segmento de recta que gira uniformemente alrededor de O, de la posición OB a la posición de OA (el extremo A describe el arco BA); durante el mismo intervalo de tiempo otro segmento de recta se mueve uniformemente de la posición BC a la posición OA, manteniéndose paralelo a OA ambos movimientos son uniformes e inician y terminan simultáneamente.

ii. Durante el movimiento el punto de intersección E de los dos segmentos de recta traza la cuadratriz BEE´D.

[9] Bos, Henk J.M., [2001], p. 42.

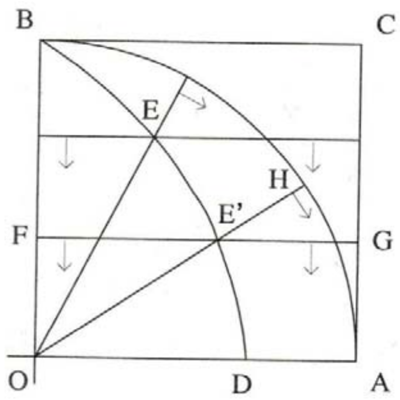


Fig. 6

Una consecuencia inmediata de la definición, que Pappus notó, es que para todo punto E sobre la cuadratriz, con las correspondientes posiciones FG del movimiento horizontal del segmento de recta FG, y OH para el movimiento del radio, tenemos la siguiente proporción:

$$\text{arc } BH : \text{arc } BA = BF : BO$$

Por otra parte, Pappus probó que[10]

$$OD : OA = OA : \text{arc } BA$$

Si la cuadratriz fue dada, las longitudes OD y OA fueron dadas también, y esta última proporción implica que arc BA podría ser determinado.

En la construcción de la cuadratriz se asumió que los dos movimientos uniformes podían ser regulados de tal manera que la recta que gira a través del cuadrante se mueve exactamente al mismo ritmo que la recta que se mueve verticalmente en el cuadrado. De esta manera ambos movimientos inician y terminan simultáneamente.

Pappus calificó esta construcción de la cuadratriz como “más que mecánica”, pero agregó que la curva podría ser generada con un método más geométrico, por lo que describe dos procedimientos en los cuáles la cuadratriz podía ser considerada como resultado de la intersección de superficies.

Un buen ejemplo del uso de la cuadratriz en la construcción de soluciones para problemas cuasi-lineales, y para justificar la inclusión en esta sección del uso de la

[10] Ibid., p. 42.

cuadratriz es la propuesta de Pappus para dar cuenta del problema de dividir un ángulo dado en una proporción elegida. Esta construcción podía ser usada para cualquier problema de división angular[11]. Para la trisección, por ejemplo, la proporción debe ser 1:2, como veremos a continuación.

CONSTRUCCIÓN DE LA DIVISIÓN GENERAL DEL ÁNGULO:

Dado un ángulo agudo φ y una proporción ρ (Fig. 7), *se busca dividir a φ en dos ángulos φ_1 y φ_2 tales que $\varphi_1 : \varphi_2 = \rho$*

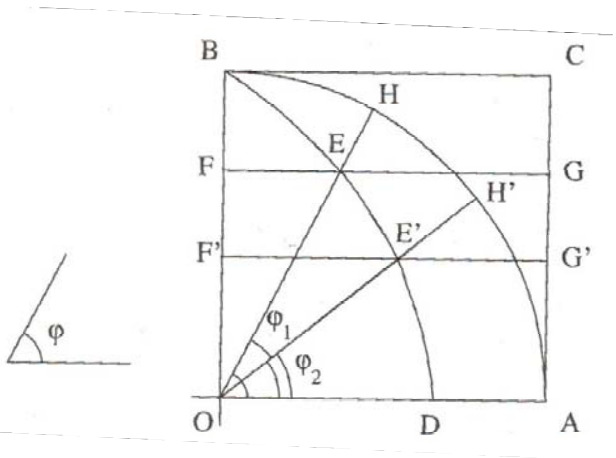


Fig. 7

- **i.** Dibujamos una cuadratriz BA en el cuadrado respectivo OBCA.
- **ii.** Dibujamos OH (con H sobre el arco BA) tal que ∡HOA es igual al ángulo dado φ.
- **iii.** Marcamos la intersección E de OH y la cuadratriz.
- **iv.** Dibujamos FEG ∥ OA con F y G sobre BO y CA, respectivamente.
- **v.** Dividimos FO en F´ tal que FF´: F´O = ρ.
- **vi.** Dibujamos F´G´∥ OA (con G´ sobre CA) y marcamos como E´ esta intersección con la cuadratriz.
- **vii.** Dibujamos OE´H´ (con H´ sobre el arco BA); llamamos ∡HOH´ = φ_1 y ∡H´OA = φ_2
- **viii.** OH´ divide ∡HOA en la manera que queríamos, ie, $\varphi_1 : \varphi_2 = \rho$.

[11] Bos, Henk J.M., [2001], p. 43.

Para probarlo basta con fijarnos en la propiedad de la cuadratriz representada en la ecuación arc BH : arc BA = BF : BO. Esta igualdad nos lleva a

$$\varphi_1 : \varphi_2 = \text{arc } HH' : \text{arc } H'A = FF' : F'O = \rho.$$

En realidad, aunque el nombre de la cuadratriz se refiere a su uso en la cuadratura del círculo, pareciera que la curva fue concebida precisamente para resolver problemas de división de ángulos. En dicha curva los dos movimientos son combinados de tal manera que la división del ángulo está relacionada con la división de una recta, y ésta pareciera ser la única razón que justifica la combinación de movimientos.

La construcción de la división general de ángulos con la cuadratriz ilustra, a reserva de que se acepte como legítima –era un hecho que en la práctica resolvía el problema- que la cuadratriz fue un poderoso medio de construcción. Bisecar, trisecar o dividir de cualquier manera al ángulo fue posible e igualmente simple, porque usando la cuadratriz cualquier división del ángulo quedó reducida a dividir un segmento de recta en una razón dada. Similarmente, la construcción de polígonos regulares y la cuadratura del círculo se convirtieron en problemas sencillos una vez que la cuadratriz fue dada. Cabe hacer notar que Pappus no concluyó si en casos especiales (como la bisección o trisección) uno debería preferir construcciones planas o sólidas por encima del uso de la cuadratriz.

LA CRÍTICA DE ARISTÓTELES A UN PROCEDIMIENTO INTUITIVO PARA LA TRISECCIÓN MEDIANTE LA CUADRATRIZ

No es difícil imaginar cómo es que la cuadratriz podía ser presentada con el propósito de llevar a cabo la división del ángulo. Una sugerencia (Fig. 8) para intentarlo es un procedimiento extremadamente simple.[12]

[12] Knorr, Wilbur, R., [1989], p. 85.

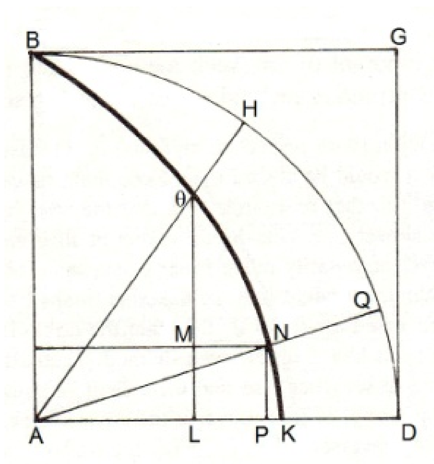


Fig. 8

Imaginemos el ángulo dado HAD en un círculo, y con una cuerda o regla flexible delineamos el arco HD; ahora enderezamos la regla y dividimos el segmento HD en la proporción deseada, es decir, por ejemplo QD : DH = 1 : 3; ahora regresamos la regla al círculo para encontrar el arco QD, de donde el ángulo QAD será la tercera parte del ángulo HAD. Así, en este esquema la división del ángulo presenta una asociación natural de líneas curvas y magnitudes rectilíneas. Esta asociación se extendía de manera similar a tratar de relacionar (o bien conectar) movimientos circulares y lineales, uno atravesando el arco BD uniformemente al mismo tiempo que otro atraviesa la línea recta igual al arco BD, y con ello reemplazar el último con un movimiento precisamente similar a la línea recta BA. Aunque esto fuera apenas un paso trivial para conseguir de esta manera una curva sujeta a estos movimientos, y resultar que su aplicación es útil para la división del ángulo, el método se enfrentaba a un cuestionamiento por parte de quienes, al igual que Aristóteles, se negaban a aceptar que ambos tipos de movimiento, el lineal y el circular, fueran compatibles, ya que si lo fueran, también lo serían la línea recta y el círculo. Pero "ambos son incompatibles, y, por lo tanto, tampoco los movimientos (son compatibles)"[13]. Sin embargo esta manera de razonar se vio fortalecida más adelante y adquirió aceptabilidad a través de las construcciones cinéticas de curvas por parte de Arquitas de Tarento y de Eudocio**.**

[13] Aristóteles, *Física,* Libro VII. Ver también Heath [1949], p. 142.

LA RECUPERACIÓN ARÁBIGA DE LOS PROBLEMAS GRIEGOS

Cambiando de tiempo y de horizontes encontramos que también las fuentes arábigas conservan para nosotros dos problemas insertos en la tradición arquimediana que dependen de la neusis para su solución, y para los cuales los procedimientos alternativos hacen uso de cónicas y fueron elaborados por geómetras posteriores. Uno de estos se ocupa de la trisección del ángulo implícita en una proposición que aparece en el *Libro de los lemas*[14]. El segundo es la inscripción de un heptágono regular en un círculo dado, que más adelante trataremos. Pero volviendo a la cuestión de la trisección del ángulo, lo que se atribuye a Arquímedes se puede interpretar de la siguiente manera[15]:

Sea dado el arco AE (Fig. 9) en un círculo con centro en O.

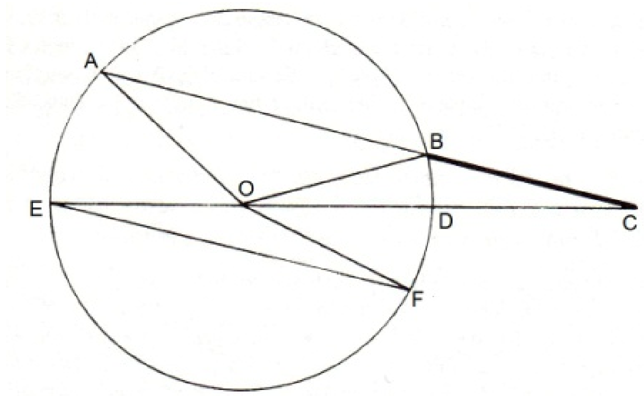


Fig. 9

La cuerda AB ha sido dibujada y extendida hasta intersecar el diámetro EOD prolongado hasta C de manera que BC sea igual al radio del círculo. Se requiere que el arco BD sea un tercio del arco AE. Dibujamos la cuerda EF paralela a AB y unimos OA, OB, OF. Los ángulos en E y F son iguales, así que el ángulo DOF es el doble que el ángulo en E. Por ser OF y OE radios, los ángulos en E y C son iguales; así, el ángulo DOF es el doble que el ángulo en C. Como CB = BO por construcción, el ángulo BOD es igual al ángulo en C, así que el ángulo DOF es el doble del ángulo DOB, o el arco DF es

[14] Durante algún tiempo se le consideró una obra de Arquímedes, pero ahora sólo se le concede estar enraizado en algún texto original de Arquímedes. (Ver R. Netz [2004], p. 12)
[15] *Ibid.,* p. 185.

dos veces el arco BD. Ya que AB y EF son paralelas, los arcos AE y BF son iguales. Así que el arco AE es tres veces el arco BD.

De esta manera la solución de la trisección del ángulo se reduce a la inserción de la longitud dada, el radio del círculo, y a la prolongación de una recta dado el diámetro ED.

Es posible llevar a cabo tal construcción omitiendo la cuerda paralela EF. Veamos cómo se hace[16]:

En la figura anterior, CB = BO. El ángulo en C es igual al ángulo BOC. Como ABO es igual a su suma, éste es el doble del ángulo en C. Ya que OB = OA, los ángulos OBA y BAO son iguales. El ángulo EOA es igual a la suma de OAB y el ángulo en C, esto es, tres veces el ángulo en C; por consiguiente es tres veces el ángulo BOD. Así, el arco AE es tres veces el arco BD.

Sea dado el arco BF. Deseamos dividirlo en D de tal manera que el arco BD sea un tercio de BF. Supongamos que la división ha sido hecha. Unimos el diámetro DOE y los radios OB, OF. Si dibujamos la cuerda EF, los ángulos en E y F serán iguales, y el ángulo DOF será el doble del ángulo en E. Dibujamos a través de B la cuerda AB paralela a EF y la extendemos hasta intersecar a ED extendida en C. Entonces los ángulos en C y E son iguales. Además, como el ángulo DOF es el doble del ángulo BOD y del ángulo en E, el ángulo BOD será igual al ángulo en E, y por lo tanto al ángulo en C. Esto hace que el triángulo BOC sea isósceles, es decir, CB = BO. Ya que la cuerdas AB, EF son paralelas, los arcos BF y AE son iguales. Así, para trisecar al arco dado BF, lo colocamos en la posición de AE, efectuamos la neusis de BC, una longitud dada (el radio), entre el círculo y la línea dada EOD prolongadas, de manera que pasa a través del punto dado A. Esto produce el arco BD como un tercio del arco BF, que es igual al arco AE.

Ciertas modificaciones de la figura para la trisección arquimediana llevan a importantes construcciones alternativas en escritos geométricos posteriores. Si se dibuja la recta OH, perpendicular a EOD, intersecando a AB en G, entonces B biseca a GC.

[16] *Ibid.,* p. 186.

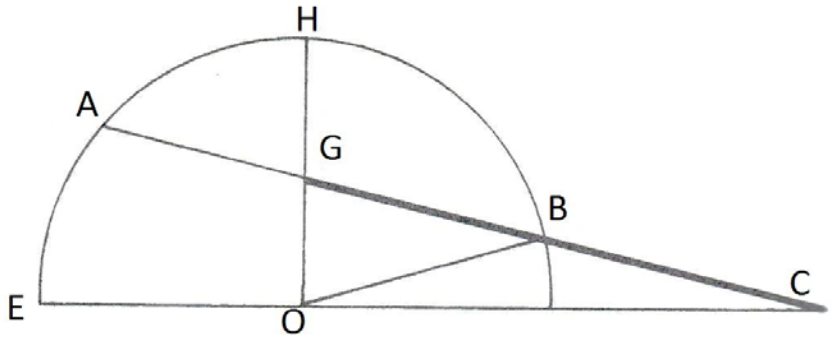


Fig. 10

Consideramos el círculo que circunscribe al triángulo rectángulo GOC (Fig. 10). En este caso GC es un diámetro (*Elementos III, 20 y 31)* mientras que su centro estará sobre la perpendicular bisectriz de OC *(IV, 5)*. Como BO = BC, el punto B está tanto sobre la bisectriz como sobre el diámetro, por lo que B es el centro, de donde GB = BC. De este resultado podemos inferir dos variaciones del método arquimediano de la trisección:

(a) usar una neusis en la cual la longitud dada (el radio) es insertada en BG entre el círculo y una línea dada OH (perpendicular a la línea dada EO) y que pasa a través del punto dado A.

(b) una neusis donde la longitud dada (el diámetro del círculo, o el doble de OA) es insertada en GC entre dos líneas dadas, llamadas OH y EO prolongada.

La variante (a) aparece en el texto *Sobre las medidas de figuras planas y esféricas* de la autoría de los tres Banu Musa, en el siglo IX A.D[17]. En dicho texto la neusis se lleva a cabo por medio de un dispositivo físico en el que una regla deslizante está hecha para asumir la posición GB. Aunque los autores declaran este método como su propio descubrimiento, su cercana conexión con el método que aparece en los *Lemas* es clara; y como el traductor de los *Lemas,* Thabit ibn Qurra, fue su compañero en Bagdad, podemos suponer sin duda que ellos estaban familiarizados con la propuesta arquimediana. De hecho, el resto del material en este libro está basado estrechamente en los bien conocidos resultados clásicos, tales como los contenidos en los tratados de Arquímedes

[17] Los tres hermanos Muhammad, Ahmad y al-Hasan, hijos de Musa ibn Shäkir, frecuentemente son citados como Banu Musa, “los hijos de Möise”. Funcionaban como una especie de equipo de trabajo, si bien cada uno tenía su especialidad: astronomía y matemáticas para Muhammad, mecánica para Ahmad y geometría para al-Hasan. Su método para llevar a cabo la trisección del ángulo se puede consultar en Rashed [1996], pp. 54-58 y 128-132. Esto último como parte del texto *Livre deu Banu Musa, Muhammad, al-Hasan et Ahmad. Pour conaître l´aire deu figures planes et sphériques.*

sobre la medida del círculo y la esfera, la duplicación del cubo de Arquitas, etcétera. Por lo tanto, uno puede admitir su contribución para esta particular variante de la construcción, pero aún insistiendo sobre la evidente influencia del método arquimediano.

La variante (b) es uno de los tres métodos, no atribuidos a nadie, de la trisección presentados por Pappus en la *Colección IV.* Ésta aparece ahí acompañada de dos lemas, uno de los cuales muestra cómo efectuar la neusis a través de la intersección de un círculo dado y una hipérbola dada (construcción que ya hemos considerado), y la otra muestra cómo construir la hipérbola cuando sus asíntotas están dadas. Como hemos visto, Arquímedes no había sentido la necesidad de eliminar la neusis en tal contexto, y los términos del texto de Pappus revelan la influencia de la terminología de Apolonio. Además, aunque Pappus utilizó desarrollos tanto del análisis como de la síntesis para ambos de los lemas auxiliares, la solución de la trisección por medio de la neusis está presentada sólo como una síntesis. Esto nuevamente sugiere un origen cercano al tiempo de Apolonio, alrededor del siglo III a. C., cuando los lemas podrían aún ser vistos como algo novedoso, aunque la solución a la trisección ya fuera familiar como una variante del método de Arquímedes. De hecho esta variante es la base implícita para una construcción alternativa usando curvas concoides, la cual uno puede asignar a Nicomedes y señalar que se diseñó alrededor del mismo tiempo.[18]

El impacto de las construcciones de Arquímedes es ampliamente percibido en la diversidad de las distintas neusis utilizadas por geómetras posteriores, tanto en la antigüedad como en la Edad Media. El repetido uso de la neusis dio lugar a otro tipo de investigación: la búsqueda de construcciones a través de cónicas u otras curvas que podrían eliminar tan complicado método. Pareciera que Arquímedes se distinguió por la facilidad con la que propició que estos métodos participaran en sus construcciones.

LA TRISECCIÓN ÁRABE

En lo que sigue me baso en lo que refiere Rashed en *Geometry and Dioptrics in Classical Islam.*

[18] *Ibid.,* p. 187.

Fue hasta el siglo XIX que se demostró que el problema era esencialmente imposible de resolver en términos exclusivamente euclidianos. En ese momento la historia del problema cambió de dirección, debido al papel que la teoría de cónicas había jugado en las matemáticas árabes y la influencia de éstas en Occidente a partir del Renacimiento. Eventualmente, el uso de curvas trascendentales en tales construcciones fue prohibida, e incluso las construcciones de la neusis debían ser justificadas mediante secciones cónicas. Esta restricción, adoptada ocasionalmente – y, podría decirse involuntariamente - por Pappus, fue mantenida por la gran mayoría de los matemáticos desde Thabit ibn Qurra en adelante, y particularmente por al-Khazin y al-Quhi. De acuerdo con los antiguos comentaristas árabes, la primera investigación sobre la trisección de un ángulo, está asociada con la búsqueda o determinación de dos medias proporcionales. En *al-Fihrist,* al-Nadim nos informa que al-Kindi, quien había escrito acerca de las dos medias proporcionales, escribió también sobre la trisección del ángulo. La pérdida del tratado de Kindi ciertamente nos priva de valiosa información sobre el estado de investigación en esta área durante la primera mitad del siglo IX.

Retomamos las variantes antes mencionadas para profundizar en ciertos aspectos históricos y hacer notar sutiles diferencias matemáticas.

Hacemos mención a los tres hermanos Banu Musa, quienes son contemporáneos de al-Kindi, y que escribieron acerca de la trisección en su famoso trabajo *Sobre las medidas de figuras planas y esféricas,* cuyo impacto en el mundo árabe y posteriormente en el latino fue enorme. Ellos lograron esta trisección gracias a la intersección de una línea recta con una curva que Roberval tiempo después llamó “caracol de Pascal”. Ésta curva cuártica es una concoide derivada de un círculo. Para dibujarla, los Banu Musa diseñaron un aparato mecánico. Así, a diferencia de ciertos matemáticos griegos, ellos no se sintieron obligados a restringirse al uso de secciones cónicas cuando construyeron la solución para un problema sólido.

Finalmente, existe un texto sobre la trisección lograda usando un circulo y una hipérbola. Es un texto atribuido a Ahmad ibn Shakir, probablemente Ahmad ibn Musa ibn Shakir, el segundo de los tres hermanos.

Una corta versión del texto original está compuesto de dos lemas, una proposición y un corolario que a continuación describimos:

Lema I: Sea D un punto dentro del ángulo ABC; dibujamos una hipérbola tal que sus asíntotas sean las rectas que determinan al ángulo.

El autor simplemente ha asumido la prueba de Apolonio[19], y por ello se toma la libertad de no transcribirla y pasar directamente al segundo lema.

Lema II: Sea el rectángulo ABCD (Fig. 11) y una línea recta M dada. Se requiere dibujar desde A una línea recta que intersecte a BC prolongada en G, y a CD en E, de tal manera que GE sea igual a M.

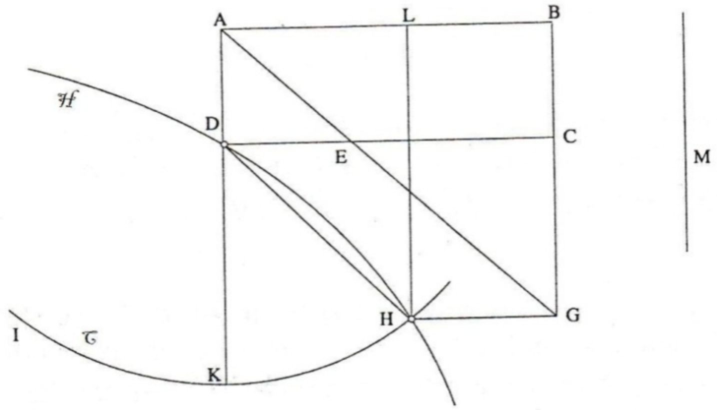


Fig. 11

Comenzamos extendiendo AD hasta un punto K tal que DK=M. Dibujamos a través de D la hipérbola $\mathcal{H}$con asíntotas AB y BC, y el círculo $\mathcal{C}$con centro en D y radio DK; $\mathcal{H}$ y $\mathcal{C}$ se intersecan en H. Dibujamos HG perpendicular a BC y dibujamos la línea GA, así EG = M. De hecho, si dibujamos la línea DH y dibujamos HL||KA obtenemos:

$GH \cdot HL = BG \cdot GH = CD \cdot DA = CD \cdot BC$ debido a una propiedad de la hipérbola

por lo tanto

$$\frac{BG}{DA} = \frac{BG}{BC} = \frac{CD}{GH}$$

más aún

[19] Cónicas II, proposición 4: Dadas dos líneas que forman un ángulo y un punto interior del ángulo, a través del punto se describe la sección de un cono llamada hipérbola tal que las líneas rectas dadas son sus asíntotas, pp. 685-686 en Great Books of the Western World Encyclopædia Britannica Inc. Vol II. *R. Maynard H.* editor, University of Chicago Press, 1952.

$$\frac{BG}{BC} = \frac{AG}{AE} = \frac{CD}{ED}$$

de donde GH = ED, y deducimos que DHGE es un paralelogramo; entonces

$$EG = DH = DK = M$$

así, hemos construido una línea recta que pasa a través de A, la cual corta a CD en E y a BC en G, y tal que el segmento EG es igual al segmento dado M.

Una vez que este lema es probado, podemos comenzar con la trisección.

Proposición: Dividir el ángulo agudo ABC en tres partes iguales.

Supongamos que AC es perpendicular a BC (Fig. 12), completamos el paralelogramo ACBG. Extendemos GA hasta E y dibujamos la línea BE la cual corta a AC en D, tal que ED = 2AB.

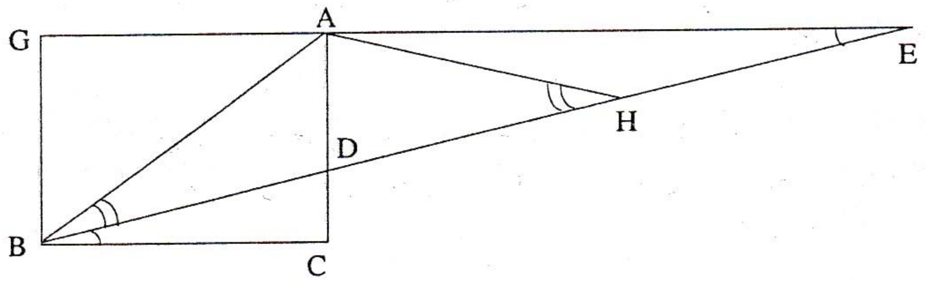


Fig. 12

Sea H el punto medio de DE; entonces DH = AH = HE (una propiedad del triángulo rectángulo); y tenemos ED = 2AH, por lo tanto AB = AH. Entonces ∡ABH = ∡AHD.

Observamos que

$$\measuredangle AHB = 2\measuredangle E \quad \text{y} \quad \measuredangle E = \measuredangle DBC$$

así que

$$\measuredangle ABD = 2\measuredangle DBC \quad \text{y} \quad \measuredangle EBC = \frac{1}{3}\,\measuredangle ABC$$

notamos que el punto E puede ser construido usando el lema anterior. De hecho, el círculo con centro C y radio M = 2AB corta la hipérbola que pasa a través de C y tiene asíntotas GA y GB en un punto I. Con base en el lema, el punto I es proyectado en E sobre AG, tal que ED = CI = 2AB.

Finalmente el texto atribuido a Ahmad ibn Shakir, de acuerdo con Rashed, termina con el siguiente corolario:

Si ∡ABC es un ángulo recto, la trisección es inmediata, pero si es obtuso, dibujamos BD perpendicular a BC; hacemos ∡DBG = $\frac{1}{3}$ del ángulo recto, y construimos ∡EBD = $\frac{1}{3}$ del ángulo agudo; de aquí se sigue que ∡EBG es un tercio del ángulo obtuso.

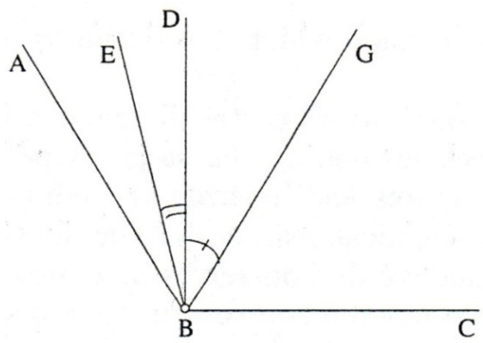


Fig. 13

Otro corolario para trisecar un ángulo obtuso es transcrito en el margen del texto del manuscrito conocido. Éste propone dividir el ángulo en dos mitades y luego dividir una de esas mitades (la cual necesariamente corresponde a un ángulo agudo) en tres partes iguales, dos de las cuales corresponderán a una tercera parte del ángulo obtuso.

C. Schoy[20] había expuesto que el método aplicado aquí no era otro que el de Pappus. Y en el libro IV de la *Colección,* Pappus dedica las proposiciones 31, 32 y 33 a la trisección del ángulo, adoptando esencialmente este mismo método. Pero una comparación de los dos textos, el de Pappus y el que llegó a nosotros en árabe, revela diferencias que hacen imposible reducir este último completamente al antiguo.

Las diferencias entre los dos textos son de distinto orden. Primero, desde un punto de vista estructural: mientras el lema I se presenta al inicio del texto árabe, Pappus lo sitúa al final, como la proposición 33. Más aún, el lema II, el cual corresponde a la

[20] Roshdi, Rashed, [2005], p. 359.

proposición 31 de Pappus, es probada por éste usando análisis y síntesis, en tanto que sólo una síntesis aparece en el texto árabe. Por último, al final de la proposición 32, Pappus prueba ambos corolarios para ángulos rectos y para un ángulo obtuso. En el texto árabe la trisección de un ángulo recto es omitida, puesto que resulta un procedimiento relativamente sencillo.

Además observamos diferencias de otro orden y que están relacionadas con sus demostraciones. De acuerdo con el escritor del texto árabe, para demostrar el lema I el autor original simplemente repitió la prueba de Apolonio, esto es, la proposición II.4 de *Cónicas.* El lema I es de hecho tal proposición. Pappus por su parte, da una prueba de ésta que es menos simple que la de Apolonio. Más aún, en el curso de su prueba del lema II, el autor del texto árabe explícitamente hace referencia a la proposición II.12 de las *Cónicas* usando una propiedad de la hipérbola, mientras Pappus no da justificación de esto. Es decir, el texto árabe recurre a las *Cónicas* más evidente, deliberada y sistemáticamente que Pappus. Finalmente, en el curso de la prueba del método de trisección, en el texto de Pappus se enuncia: "Cortamos la línea recta ED en dos partes iguales en el punto H y dibujamos la línea recta AH. Por lo que las tres líneas rectas DH, HA, HE son iguales". Pero esto es verdad sólo porque el ángulo EAD es recto, una justificación a la que se hace referencia en el texto árabe y no aparece en el de Pappus.

Estas diferencias son suficientes para mostrar la desigualdad entre el texto árabe y el de Pappus. Pero existen ciertas similitudes que unen los textos: tienen caracteres y figuras en común, comparten el mismo método y ciertas frases son idénticas. El relato menos imaginativo supondría que una traducción de un texto griego, una versión de Pappus –no necesariamente la que tenemos- estaba en circulación en el grupo de los Banu Musa, y que uno de los miembros de este grupo, al pasar del tiempo, hizo una adaptación al árabe de la versión en griego, tal vez reescribiéndolo con la ayuda de las *Cónicas* de Apolonio. Entre candidatos pertenecientes a este grupo, el que por dos razones destaca es Thabit ibn Qurra. De hecho es él, y no Ahmad, quien sabía griego e hizo traducciones de este idioma. Más aún, él escribió un tratado sobre la trisección de un ángulo y sobre las dos medias proporcionales en el que adopta el mismo método, pero con notación diferente, y proporciona un análisis muy completo sobre estos problemas. Esta conjetura no es sólo la más probable, sino además tiene la ventaja de evitar recurrir a argumentos acerca de un "tercer hombre"; esto es, otro desconocido autor griego de quien no hay evidencia.

Ahora pasemos al tratado de Thabit ibn Qurra titulado *Problema de la Construcción de Dos Medias Proporcionales y la División de un Ángulo conocido en Tres Partes Iguales.* Según afirma Rashed en *Geometry and Dioptrics in Classical Islam,* se tiene suficiente evidencia como para asegurar la autenticidad del trabajo de Thabit ibn Qurra sobre la trisección del ángulo. Su sucesor al-Khazin observa que Thabit es la primer persona que ha trisectado un ángulo mediante secciones cónicas. Más tarde, otro matemático, al-Sijzi, resume la proposición de Thabit en sus propias palabras y notación. Este texto, sin embargo, llega a nosotros en dos copias, que muestran que hay diferencias perceptibles, principalmente en el estilo de escribir. La primera versión, llamada A, está en Paris, identificada como *BnF* 2457; se ha creído, erróneamente, que fue transcrita por al-Sijzi en el 970 AD. En realidad, estas pocas páginas contienen el tratado de Ibn Qurra que fue transcrito en diferente manera después de 972 y antes de 1259. El tratado presenta dos partes, la primera dedicada a la trisección de un ángulo y la segunda a las dos medias proporcionales. Esta última ha sido atribuida a Abu Bakr al-Harawi. Ahora, hemos mostrado que de acuerdo con el testimonio de al-Khazin, al-Harawi no hizo más que retomar el trabajo de Thabit. La segunda versión viene de un manuscrito de Mashhad, en Irán, llamado B. Éste fue transcrito en 1273-74 y además está dividido en las mismas dos partes, pero sin ninguna mención del nombre de al-Harawi. Si hacemos la debida consideración para el estilo y notación de al-Sijzi, su recreación de la proposición de Thabit sobre la trisección de un ángulo corresponde con lo que encontramos en los dos manuscritos que han llegado a nosotros.

Una de las características distintivas del tratado de Thabit es –una característica que muy probablemente se inspiró en los Banu Musa- su combinación de la trisección de un ángulo y las dos medias proporcionales en un sólo trabajo, mientras sus predecesores griegos habían considerado los dos problemas por separado. En tanto que sus maestros habían empleado otras curvas además de las secciones cónicas, Thabit deseaba limitarse a ellas solamente. Algunos de sus sucesores, tales como al-Khazin, al-Quhi y al-Sijzi, siguieron su ejemplo y combinaron los dos problemas sólidos.

En ambas versiones, el texto de Thabit sobre la trisección, así como el atribuido a Ahmad ibn Shakir, está conformado de dos lemas y una proposición, descritos a continuación[21]:

[21] Roshdi, Rashed, [2005], pp. 361-366.

Lema I: Sean AB y AC líneas rectas dadas formando un ángulo BAC (Fig. 14) y sea D un punto dentro del ángulo. Construimos una hipérbola la cual pasa a través de D y tiene a AB y a AC como asíntotas.

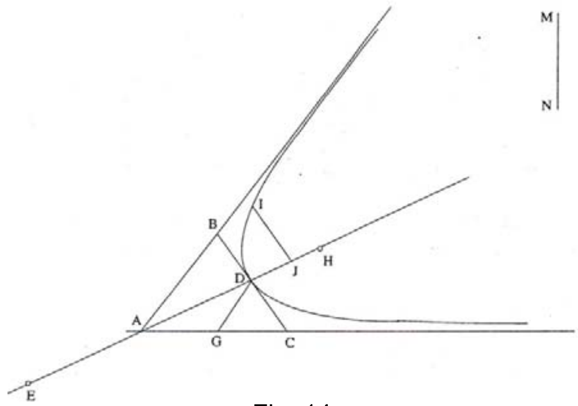


Fig. 14

Demostración: Dibujamos la línea AD y la extendemos hasta el punto E de manera que AD = AE. Sea DG||AB, C es un punto sobre AG tal que GC = GA.

Dibujamos la línea CD que corta a AB en B. Mientras que H permanece sobre la extensión de la recta AD tal que:

$$CB^2 = DE \cdot HD$$

Construimos una hipérbola $\mathscr{H}$ que pasa a través del punto D tal que si I ∈ $\mathscr{H}$ y IJ||CD, con J sobre HD, tenemos:

$$JI^2 = HD \cdot JD + JD \cdot M$$

siendo MN un segmento que satisface

$$\frac{JD}{DE} = \frac{MN}{HD}$$

entonces $\mathscr{H}$ tiene a AC y AB como asíntotas. Ya que, DG||AB y CG=GA se tiene que

$$CD = DB \quad \text{(por triángulos semejantes)}$$

así que

$$CB^2 = 4\,CD^2$$

pero

$$CB^2 = DE \cdot DH$$

por lo tanto

$$CD^2 = DB^2 = \frac{1}{4} DE \cdot DH$$

Así AB y AC son las asíntotas de la hipérbola, de acuerdo con la proposición II.3 de *Cónicas.*

Lema II: Sea ABCD un paralelogramo, con BC = *a,* AB = *b.* Sea λ un segmento dado. Construimos E sobre BC de tal manera que si EA interseca a CD en H, se tiene que

$$EH = \lambda$$

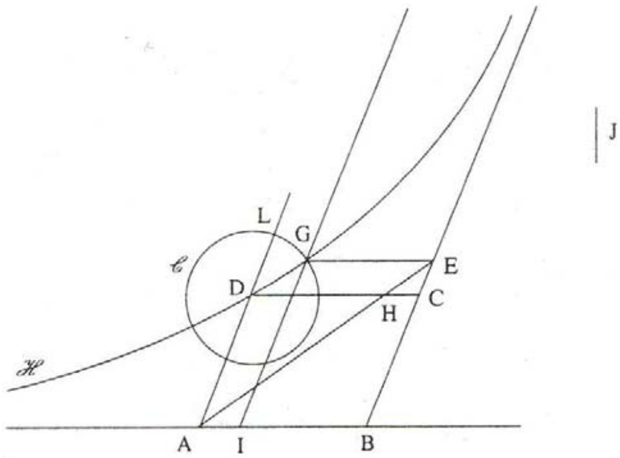


Fig. 15

Demostración: Sea DG una hipérbola que pasa a través de D y tiene a AB y a BC como sus asíntotas (aplicando el lema anterior). Sea L sobre AD construido (del mismo lado que D) de manera que

$$DL = \lambda$$

sea LG un círculo con centro en D y radio DL, siendo G el punto de intersección del círculo y la hipérbola. Sea EG||AB (E sobre BC) y GI||BC (I sobre AB). El segmento AE corta a CD en H. Entonces HE es el segmento que buscábamos:

$$HE = \lambda$$

de acuerdo con la proposición II.12 de Apolonio, si M y N son cualesquiera dos puntos sobre una hipérbola $\mathcal{H}$, y P y Q son cualesquiera dos puntos sobre cada asíntota, entonces P´y Q´ son tales que

NP´||MP y NQ´||MQ

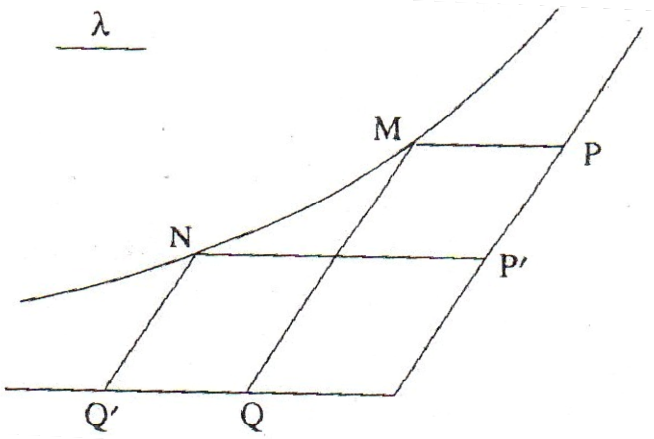


Fig. 16

entonces

$$NP' \cdot NQ' = MP \cdot MQ$$

tenemos entonces que

$$AD \cdot DC = IG \cdot GE \quad \text{(una propiedad de la hipérbola)}$$

de donde

$$\frac{IG}{AD} = \frac{DC}{GE}$$

pero

$$IG = EB \quad \text{y} \quad AD = BC$$

por lo tanto

$$\frac{EB}{BC} = \frac{DC}{GE}$$

más aún, los dos triángulos ECH y EBA son semejantes, de manera que se cumple:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{EA}{EH} = \frac{BA}{CH} = \frac{CD}{CH}$$

$$\frac{EB}{EB - BC} = \frac{EA}{EA - AH} = \frac{BA}{BA - HD}$$

$$\frac{EB}{BC} = \frac{EA}{AH} = \frac{BA}{HD} = \frac{CD}{HD}$$

$$\frac{DC}{GE} = \frac{CD}{HD}$$

$$GE = HD$$

lo cual prueba la segunda parte de la igualdad.

Ahora, la igualdad en el texto

$$\frac{EB}{BC} = \frac{CD}{CH}$$

tiene sentido sólo si GE = CH, una condición que se encuentra en la figura que aparece en el manuscrito, aunque no se muestra el caso general. Pero EG||DH, así que DG = EH y DG||EH y DG = λ, porque DG es un radio del círculo; entonces EH = λ.

Una nota en el margen del manuscrito señala que esta prueba está basada en la proposición II.12 de Apolonio, la cuál es dada por Pappus en la *Colección,* pero él ofrece una demostración diferente.

Thabit, como Pappus, no prueba que las dos curvas se intersecan. Para entender este punto (que resulta importante para la historia de las cónicas y sus aplicaciones) presentamos la discusión de Thabit de manera diferente.

Sea

$$(BA, BC) = (0x, 0y)$$

$$\mathcal{H} = \{(x, y); xy = ab\}$$

del lema I, D ∈ $\mathcal{H}$.

Sea

$$\mathcal{C} = \{(x, y);\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\measuredangle ABC = \lambda^2\}$$

Sea G(x_0, y_0) ∈ $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$. Dibujamos GE paralela a AB (E sobre BC); entonces EA corta a CD en H, tal que EH = λ.

De hecho G ∈ $\mathcal{H}$, por lo que $x_0y_0 = ab$. Entonces $\frac{x_0}{a} = \frac{b}{y_0}$

las coordenadas de E son (0, y_0), de manera que la línea recta EA tiene por ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{y_0} = 1$$

y ésta corta a DC, cuya ecuación es $y = b$ en el punto

$$H = \left(a - \frac{ab}{y_0}, b\right) = (a - x_0, b)$$

observamos que $AI = a - x_0 = HC$; así que $DH = IB = GE$ y DHEG es un paralelogramo, lo que significa que EA es paralela a DG.

Más aún

$$\overrightarrow{EH} = (a - x_0, b - y_0) = \overrightarrow{GD}$$

y tenemos que $EH = GD = \lambda$.

La construcción se reduce al problema de encontrar un punto G (x_0, y_0) tal que:

$$x_0y_0 = ab \quad \text{y} \quad (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 + 2(x_0 - a)(y_0 - b)\cos\measuredangle ABC = \lambda^2$$

por lo tanto G ∈ $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$.

El punto D de la hipérbola es el centro del círculo $\mathcal{C}$; por tanto éste permanece dentro del círculo, y es claro que existen puntos de la hipérbola que permanecen fuera de $\mathcal{C}$, ya que la hipérbola se extiende hasta infinito.

Proposición I: Sea ABC un ángulo dado, AC perpendicular a BC, AD||BC y BD un segmento de recta que corta a AC en un punto E tal que ED = 2BA. Sea G el punto medio de ED, dibujamos la línea AG. Observamos que AG = GE (pues el triángulo EAD es un triángulo rectángulo y G es el punto medio de su hipotenusa), entonces

$$AG = AB$$

por lo que

$$\measuredangle AGB = \measuredangle ABG$$

pero

$$\measuredangle D = \measuredangle DBC$$

ya que AD||BC, entonces

$$\measuredangle ABD = 2\measuredangle DBC$$

$$\measuredangle ABD = \measuredangle AGB = 2\measuredangle D$$

así, con esto, el ángulo ABC ha sido trisectado.

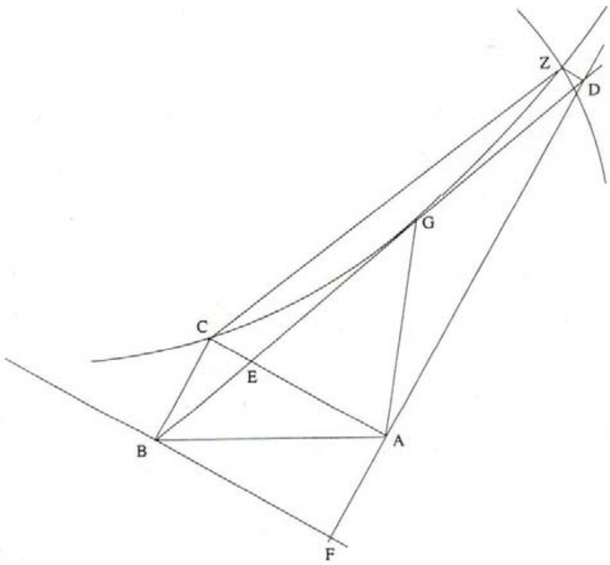


Fig. 17

La dificultad en esta presentación aparece en la construcción del punto E de manera que, ED = 2BA. Esta construcción es realizada mediante la intersección de una hipérbola y un círculo, que es exactamente lo que Thabit ibn Qurra hizo en el lema II.

Explícitamente, debe hacerse J = 2BA. Así que, se construye ED tal que ED = J. completamos el rectángulo BCAF, dibujamos el círculo $\mathcal{C}$ con centro C y radio J, dibujamos la hipérbola $\mathcal{H}$ que pasa a través de C y tiene asíntotas FA y FB.

Sea $Z \in \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$, $Z \neq C$. Dibujamos las líneas CZ y BD paralelas a CZ. La línea recta BD corta a AC en E, la cual confirma que, por el lema II,

$$ED = J = 2BA$$

LA CUADRATRIZ DE CLAVIUS

Cristóbal Clavius fue uno de los matemáticos más influyentes en la segunda mitad del siglo XVI, dándose a conocer por sus comentarios sobre obras clásicas de la matemática y la creación de libros de texto. Los libros de textos que nos legó no eran innovadores, pero sí cubrían un material muy amplio y eran muy claros en cuanto a su presentación. Sus trabajos fueron extensamente usados durante todo el siglo XVII; Descartes por ejemplo, aprendió de los escritos de Clavius. En sus libros, con frecuencia, Clavius trató con construcciones geométricas y comentó sobre los criterios para aceptarlas como procedimientos geométricos legítimos.

En lo que sigue me baso en lo que dice Bos en *Redefining Geometrical Exactness: Descartes´ Transformation of the Early Modern Concept of Construction,* pp. 160-161.

El texto más revelador del trabajo de Clavius con respecto a la construcción de curvas fue un pequeño tratado sobre la cuadratriz, realizado en el periodo 1588-1589. Su texto sobre geometría práctica de 1604 contenía además relevantes observaciones sobre la exactitud de construcciones geométricas.

Previo a lo anterior, en 1574, Clavius publicó una edición de *Los Elementos de Euclides* en la que agregó algunos comentarios. Éste resultó ser un trabajo que alcanzó una cierta fama, y una segunda edición, aún más extensa, apareció en 1589. Un año antes había leído los textos sobre la cuadratriz en el libro IV de la *Colección* de Pappus, y su contenido lo inspiró para componer un pequeño tratado referente a esta curva, mismo que insertó después del libro VI de *Los Elementos.* Este tratado también fue incorporado a su *Geometría Práctica* de 1604. Ambos, la edición de Euclides y la *Geometría Práctica,* fueron reimpresos en *Los trabajos matemáticos* de Clavius en 1611-1612, por lo que el tratado se presenta dos veces en esta publicación. El título elegido para su tratado fue:

Sobre la sorprendente naturaleza de una cierta línea curva, con ayuda de la cual una figura de un número arbitrario de lados iguales puede ser inscrita en un círculo, y el círculo puede cuadrarse, y muchas otras cosas que pueden ser efectuadas, y muy agradables de conocer.

Como el título lo indicaba, Clavius afirmaba no menos que haber encontrado la construcción geométrica genuina de todos los polígonos regulares y, además, la cuadratura del círculo. En dicho escrito ofrece una construcción de la división angular general, y por ende de la trisección del ángulo. Como ya se dijo, su punto de partida fue el tratado de Pappus de la cuadratriz en el libro IV de *La Colección* y las construcciones que incluyó fueron básicamente las mismas que las de Pappus; lo que agregó fue un argumento del porqué estas construcciones deberían ser consideradas como geométricamente genuinas. En vista de que las construcciones de Pappus asumían que la cuadratriz sería dada, él tuvo que explicar cómo podía ser trazada esta curva cuando no había sido dada de antemano y utilizando un método geométricamente aceptable. Pappus había definido la curva a través de un procedimiento para trazarla mediante un movimiento, pero sus comentarios acerca de este procedimiento sugieren que su situación geométrica le parecía dudosa.

Veamos la construcción de la cuadratriz que Clavius proporcionó[22]. Nótese que aunque el diagrama es semejante al que páginas atrás presenté para la construcción de Pappus, la de Clavius es ligeramente diferente en cierto sentido, aunque en su esencia es la misma.

Dado un cuadrado OACB (Fig. 15) *se requiere construir la cuadratriz en el interior del cuadrado.*

[22] Bos, Henk J.M., [2001], p. 161.

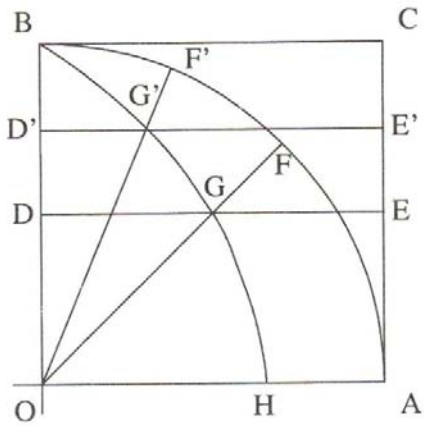


Fig. 18

i. Dibujamos el arco BA.
ii. Bisecamos BO y CA en D y E respectivamente y dibujar DE; bisecamos el arco BA en F, dibujar OF; OF interseca a DE en G; G, se dice, está sobre la cuadratriz.
iii. Bisecamos BD y CE en D´ y E´, respectivamente; dibujar D´E´; bisecamos el arco BF en F´; dibujar OF´; OF´ interseca D´E´ en G´; G´ está sobre la cuadratriz.
iv. Repetimos este procedimiento con otros segmentos y arcos correspondientes hasta obtener los suficientes puntos que determinen, es decir, que permitan un trazo razonable, de la cuadratriz.
v. La cuadratriz debería ser dibujada a través de estos puntos de una manera apropiada; es decir no debía estar retorcida, pero debería prolongarse suavemente sin curvas o torceduras ni ángulos en ninguna parte.
vi. Para construir el punto H, la intersección de la cuadratriz con el eje OA (el cual no puede estar entre los puntos G a los que se refiere el inciso v), marcamos puntos debajo de OA colocándolos simétricamente con los puntos sobre la cuadratriz por encima del eje cerca de H. Dibujamos un línea curva a través de estos puntos en ambos lados; su intersección con OA da H.

Para ese entonces la construcción que en 1589 parecía tan convincentemente geométrica, motivó a su autor para declarar haber resuelto los problemas clásicos de la cuadratura del círculo, la división del ángulo y la construcción de polígonos regulares. Tal afirmación fue de gran alcance pues implicó una extensión del arsenal de legítimos medios geométricos de construcción y así establecer una nueva interpretación de la exactitud geométrica.

El principal argumento de Clavius fue que su construcción era más exacta que el procedimiento de trazo de curvas mediante movimiento presentado por Pappus. Sin embargo, los términos que él uso en la descripción del procedimiento para que la curva fuera dibujada, revelan la carencia de precisión en su propia construcción.

La trisección de Viète

Previo a esto Viète ya había presentado una construcción para trisecar el ángulo, pero ésta dependía de una neusis. La manera cómo procedió fue la siguiente[23]:

Dado un ángulo Ψ (Fig. 16) *se requiere encontrar un ángulo φ igual a un tercio de Ψ.*

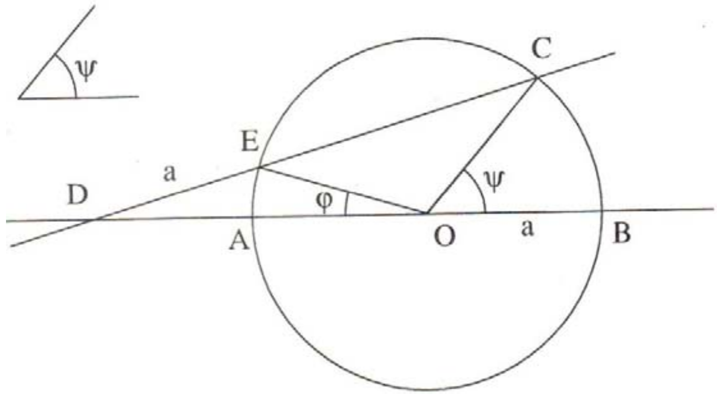


Fig. 19

- **i.** Dibujamos un círculo con centro O y radio *a*. Marcamos el diámetro AOB; prolongamos AB a la izquierda; tomamos C sobre el círculo tal que ∡COB sea igual al ángulo Ψ dado.
- **ii.** Mediante una neusis dibujamos DEC a través de C intersecando AB prolongado y al círculo en D y E, respectivamente, y tal que DE = *a*.
- **iii.** Dibujamos EO.
- **iv.** Entonces φ = ∡EOA será el ángulo requerido; esto es, ∡EOA = $\frac{1}{3}$ ∡COB

[23] *Ibid.,* p. 172.

Prueba: Ya que DE = EO = OC, resulta que los triángulos DEO y EOC son isósceles; $\measuredangle OEC = 2\varphi$, así que $\measuredangle EOC = \pi - 4\varphi$ y entonces $\measuredangle COB = \pi-(\varphi + (\pi - 4\varphi)) = 3\varphi$.

Viète mostró que todos los problemas sólidos pueden reducirse a la construcción de dos medias proporcionales o a la trisección del ángulo.[24] Con este resultado la trisección adquirió un mayor prestigio entre los problemas sólidos y la equiparó al de la determinación de dos medias proporcionales.

La trisección de Descartes

Hasta aquí lo presentado se ocupa de curvas bien definidas, pero con excepción del círculo, no se hace mención explícita a un instrumento que permita trazar la curva en cuestión. Por ello es relevante el proyecto de Descartes sobre este punto en particular.

En 1618 Descartes conoce a Isaac Beeckman en Breda, Holanda. De esta relación valiosos documentos han sobrevivido, en particular cinco cartas que Descartes escribió a Beeckman a principios de 1619. En la segunda carta, con fecha del 26 de marzo de dicho año, Descartes elabora un proyecto para su futura investigación, presentando su búsqueda científica con claridad y determinación[25]. En esta carta Descartes hace referencia puntual a curvas trazadas por un cierto tipo de instrumentos que él llamó "nuevos compases". Otro documento cartesiano conocido como *"Reflexiones Privadas",* y que data del mismo periodo, difunde más información sobre estos "nuevos compases", algunos de los cuales servían para dividir al ángulo, otros para construir medias proporcionales y la solución de ciertos tipos de ecuaciones cúbicas.

Descartes ilustró el caso de la trisección, pero aclaró que bajo obvias adaptaciones del instrumento podría utilizarse para dividir ángulos en 4, 5, 6, etcétera, partes iguales.

El trisector[26] consta de cuatro reglas OA, OB, OC y OD, conectadas en el punto O de manera que cada una de ellas puede girar (ver Fig. 20). Cuatro barras iguales EI, FJ, GI, HJ, con longitud *a*, pueden girar alrededor de los puntos E, F, G, H, los cuales están

[24] Mostró que todo problema algebraicamente equivalente a una ecuación de tercer o cuarto grado podía ser reducido a una construcción de dos medias proporcionales o a la trisección. Bos, Henk J.M., [2001], p. 67.
[25] *Ibid.,* p. 231.
[26] *Ibid.,* p. 237.

sobre los cuatro brazos a distancia *a* de O. Estas barras están unidas con bisagras en I y en J y pueden moverse libremente a lo largo de OB y OC. De esta manera los dos brazos OA y OD pueden formar cualquier ángulo dentro de un amplio rango y los tres ángulos internos AOB, BOC y COD siempre serán iguales, de manera que el instrumento puede utilizarse para trisecar cualquier ángulo. Es más o menos evidente que variantes del instrumento con más brazos y barras intermedias pueden ser usados para dividir ángulos en 4, 5, 6, etcétera, partes iguales.

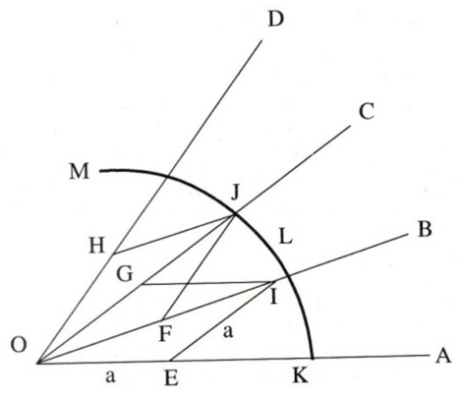


Fig. 20

La justificación de la trisección dada por Descartes consiste básicamente en lo siguiente[27]:

Dado un ángulo D´OA´ (Fig. 18), *se requiere trisecarlo.*

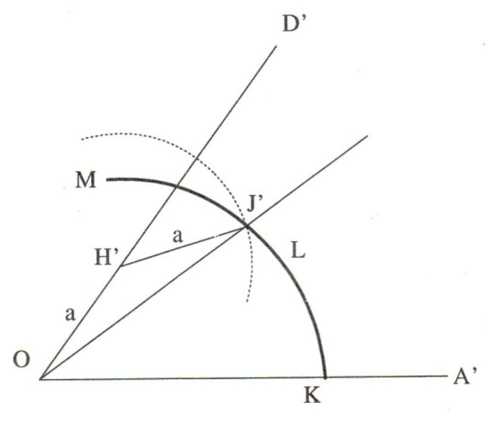


Fig. 21

[27] *Ibid.,* p. 239.

i. Aplicamos el instrumento[28] con el brazo OA a lo largo del eje OA´, movemos el brazo OD desde la posición OA hacia afuera; estando fijo en J se traza la curva KLM.

ii. Marcamos OH´= *a* sobre OD´; dibujamos un círculo alrededor de H´ con radio *a*; éste interseca la curva KLM en J´.

iii. Dibujamos OJ´; entonces ∡D´OJ´= $\frac{1}{3}$ ∡D´OA´. Así que el ángulo es trisectado.

La prueba es inmediata a partir de la construcción que se lleva a cabo con el instrumento.

A principios del periodo moderno la trisección atrajo mucho menos atención que el problema de las dos medias proporcionales. Una razón fue que no existía un tratado de la trisección comparable con el escrito de Eutocio donde aparece la lista con las 12 construcciones de las medias proporcionales. Además, parece que los geómetras modernos tenían más conocimiento de los problemas sólidos que se reducían a calcular dos medias proporcionales que de los problemas que se reducían a la trisección.

[28] El trisector debe colocarse sobre el eje OA´.

II. DOS MEDIAS PROPORCIONALES Y SU USO EN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

Veamos ahora cuál es la relación entre el problema de construir dos medias proporcionales y el problema de la duplicación del cubo. Esta surge, míticamente, de un relato que aparece tanto en Eutocio como en Teón de Esmirna. Eratóstenes cuenta, en una carta que envió al rey Ptolomeo III, que un antiguo poeta trágico[29] puso sobre el escenario a un rey Minos que exigía una tumba para su hijo Glaucón. Al contemplar el resultado y sentir que era, por su tamaño, de poca monta para honrar a su hijo fallecido, pidió que se construyera otra tumba, más grande, del doble para ser más exactos, pero que conservara la forma cúbica. Algo que, como supo la posteridad, fue uno de los desafíos más grandes que los matemáticos han enfrentado a lo largo de la historia.

Este relato aparece en el comentario de Eutocio a los textos de Arquímedes sobre la esfera y el cilindro; afirmando que "durante mucho tiempo los geómetras se sentían avergonzados (por no haber sido capaces de resolver el problema) hasta que Hipócrates de Quíos se dio cuenta por primera vez, de que en cuanto se resolviera el problema de encontrar dos medias proporcionales entre dos segmentos de recta, una de las cuales fuera del doble de longitud que la otra, sería posible duplicar el cubo"[30]. Esta historia parece poco creíble y posiblemente sólo buscaba hacer parecer que el problema de las dos medias proporcionales precedió al de la duplicación del cubo.

Tanto Eutocio como más tarde Teón de Esmirna[31] ponen en boca de Eratóstenes otro posible origen del problema de duplicar el cubo: "En tiempos de Platón, nos cuenta la historia, los delios se acercaron a Platón al verse acosados por la plaga y haber sido conminados por un oráculo a duplicar un altar (cúbico) para apaciguar a los dioses. Platón les respondió que el dios había emitido esta recomendación no porque tuviera necesidad de un altar más grande sino porque era una manera de reprocharle a los griegos el haber descuidado el estudio de la matemática y asignado poca valía a la geometría". Cabe

[29] Tal vez se refería a Eurípides y a una obra perdida para la posteridad, lo cual significaría, entre otras cosas, que los problemas de la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo eran algo relativamente conocido para el público que acudía al teatro en esa época.
[30] Arquímedes [1970], Vol. 4, p. 64.
[31] Teón de Esmirna, en Rashed [2005], p. 338, nota 40, y en Theon [1995], pp. 2-3.

suponer que este problema era de suma importancia para los arquitectos, y que más adelante llamó la atención de seguidores del credo pitagórico que vieron en él un sujeto por demás interesante en términos teóricos.

Se cree que éste problema lo resolvió Hipócrates, aunque sólo de manera parcial pues desplazó su solución a otro plano, reduciéndolo a resolver otro problema que resultó en cierto sentido más general, pero que a fin de cuentas era igualmente irresoluble en términos estrictamente euclidianos[32].

Encontró que si entre dos rectas, una en longitud el doble de la otra, se insertan dos medias proporcionales, se habrá encontrado la medida del lado del nuevo cubo que duplica en volumen al original, por lo que convirtió una dificultad en otra no menor. Hipócrates no parece haber ido más allá, ni buscado alguna solución al problema plano. Presentamos ahora algunas construcciones en las que a través de la presentación de dos medias proporcionales se llega a la resolución del problema de la duplicación del cubo.

Pero primero veamos cuál fue la aportación de Menecmo. Su acierto consistió en atacar el problema considerando las relaciones

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

mismas que le llevaron a las siguientes condiciones

$$x^2 = ay$$

$$y^2 = 2ax$$

$$xy = 2a^2$$

En éstas, como sabemos, las dos primeras corresponden a ecuaciones de parábolas, mientras que la última ecuación es una hipérbola. Y de la primera y la última identidad se sigue que $x^3 = 2a^3$, con lo que se tiene que un cubo de lado x duplica el volumen del cubo de lado a. Por ello el encontrar el valor de x, una de las dos medias proporcionales entre a y $2a$, resolvió el problema de la duplicación del cubo.

En la proposición I de *La Esfera y el Cilindro,* Arquímedes construye una esfera igual a un cono o cilindro dado. En dicha construcción asume que es posible encontrar

[32] Johnston Allman, G. [1889], pp. 41 y 58.

dos medias proporcionales entre dos segmentos de recta dados. Sin embargo no explica cómo hacerlo.

Si recordamos, el problema consiste en lo siguiente:

Dados dos segmentos de recta a y b, encontrar sus dos medias proporcionales, esto es, dos segmentos de recta x, y tales que:

$$a : x = x : y = y : b$$

Como es bien sabido éste fue uno de los problemas más conocidos de la geometría griega clásica, y mucho de su fama de debió a los infructuosos intentos por encontrar una solución que sólo utilizara regla y compás. Ahora sabemos que no existe solución posible, bajo el supuesto anterior, para este problema. Así lo demostró Ferdinand von Lindemann en 1882 para el caso de la cuadratura, Pierre Wantzel en 1837 para la duplicación del cubo, y este mismo autor, un año antes, lo hizo para la trisección del ángulo y que lo mismo ocurre con la construcción de dos medias proporcionales. Toda solución que en el pasado se ofreció a este problema involucra un paso ajeno a los procedimientos euclidianos. Así, en ocasiones, el paso involucra un procedimiento de prueba y error, en otras se emplean instrumentos especiales o curvas trazadas mediante tales instrumentos, o bien, se recurre a intersecciones de cónicas.

A pesar de la insistencia sobre la naturaleza no geométrica de los medios mecánicos, y de los procedimientos de prueba y error que fueron puestos en uso en las construcciones de dos medias proporcionales, los matemáticos aparentemente mostraban cierto recelo en aceptarlos y presentarlos. De hecho, el problema de las dos medias proporcionales generó menos controversias que el de la cuadratura del círculo. Y como sí fue el caso para este último, el problema de las dos medias proporcionales no indujo a los matemáticos a formular criterios positivos acerca de procedimientos geométricos "válidos".

Además de la legitimidad de varias construcciones existía, por supuesto, la pregunta de si realmente era imposible cuadrar al círculo o si se podían determinar dos medias proporcionales usando exclusivamente círculos y líneas rectas. Pero no está claro si al referirse a "construcciones" se referían a construcciones con líneas rectas y círculos, o también a otros medios que eran considerados geométricos. No había conciencia de la posibilidad o imposibilidad de que pudieran ser probados con una demostración formal.

Tampoco parecía haber acuerdos bien fundamentados entre la comunidad matemática que llevaran a métodos aceptables para una construcción de dos medias proporcionales según rigurosos requisitos geométricos, cualesquiera que éstos fueran.

EL LEGADO DE EUTOCIO

Con mucho, el compendio más importante de la antigüedad que se ocupó del problema de la determinación de dos medias proporcionales, fue el elaborado por Eutocio y que usualmente aparece acompañando a las publicaciones de los textos de Arquímedes o de Apolonio. En lo que sigue mostraremos algunas de las 12 construcciones comprendidas en la lista elaborada por Eutocio[33].

CONSTRUCCIÓN DE HERÓN DE ALEJANDRÍA

Esta construcción es atribuida a Herón[34], y fue la más popular en el periodo anterior a 1590.

Dados dos segmentos de líneas rectas a y b, encontrar sus dos medias proporcionales x, y.

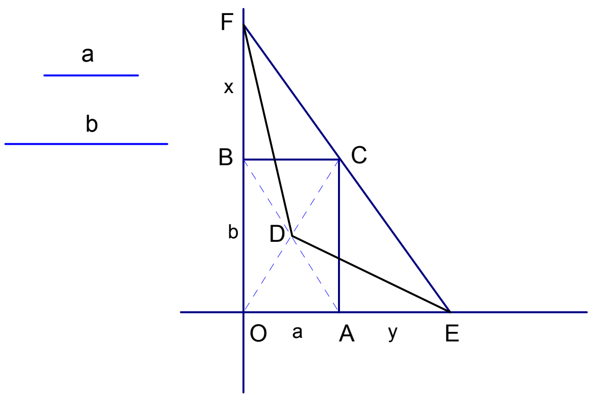


Fig. 22

[33] Dichas construcciones se encuentran en: Bos, Henk J.M., [2001], Knorr, Wilbur, R., [1989], Netz, Reviel, [2004].
[34] Bos, Henk J.M., [2001], p. 28.

i. Construimos un rectángulo OACB con lados OA = *a* y OB = *b*; prolongamos los lados OA y OB, y marcamos la mitad D del rectángulo.
ii. Colocamos la regla sobre el punto C. Sus puntos de intersección con OA y OB son E y F, respectivamente; giramos la regla sobre C hasta que DE = DF
iii. Nos fijamos en ∆FBC y ∆CAE. Sabemos que ∡FBC = ∡CAE = 90°

vemos también que ∡AEC = ∡GCE, por ser alternos internos

pero ∡GCE = ∡BCF por ser opuestos por el vértice,

entonces ∡AEC = ∡BCF, por lo que ∡CFB = ∡ECA

∴ ∆FBC ~ ∆CAE

así tenemos que $\frac{BC}{FB} = \frac{AE}{CA}$ pero $BC = a, FB = x, AE = y, CA = b$ entonces $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$

vemos también que ∆FBC ~ ∆FOE, ya que ambos tienen un ángulo recto y comparten un ángulo.

Análogamente ∆FOE ~ ∆CAE, así que

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b} = \frac{a+y}{b+x} \dots (1)$$

por construcción $DE = DF$, entonces $DE^2 = DF^2$ por lo que

$$\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = DE^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = DF^2$$

$$\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$y^2 + ay + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$y^2 + ay = x^2 + bx$$

$$y(a + y) = x(b + x)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a+y}{b+x}$$

pero de (1) se sigue que $\frac{a}{x} = \frac{y}{b} = \frac{x}{y}$ entonces $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$

$\therefore\ x = BF,\ y = AE$ son las dos medias proporcionales buscadas.

Construcción de Diocles

Un ejemplo de una construcción cuasi-lineal en la que se recurre a una de las curvas mencionadas por Pappus fue la construcción de dos medias proporcionales mediante la cisoide, curva atribuida a Diocles. La construcción está basada en una propiedad de la configuración de rectas (Fig. 20) en un semicírculo que a continuación se describe[35]:

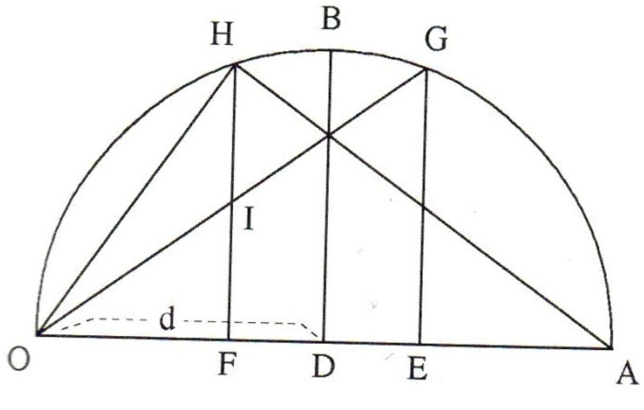


Fig. 23

Sea OAB un semicírculo con radio OD = d; sean E y F puntos sobre el diámetro, equidistantes de D, y sean EG y FH las ordenadas correspondientes, con H y G sobre el semicírculo. Trácese la línea recta OG, la cual interseca a HF en I. Entonces se cumple que:

$$FI:FO = FO:FH = FH:FA$$

[35] *Ibid.,* pp. 44,45.

En otras palabras, FO y FH son las dos medias proporcionales entre FI y FA. Esto se justifica en vista de que FD = DE y que los triángulos FIO, FOH y FHA son semejantes, por lo que la validez de la proporción es evidente.

Para observar cómo se puede utilizar dicha propiedad en la construcción de la cisoide, recurrimos a su definición[36]:

Dado un semicírculo OAB (Fig. 21) *con radio OD = DA = d, se traza la perpendicular desde D y al punto de intersección con el semicírculo se le llama B. La cisoide es construida de la siguiente manera:*

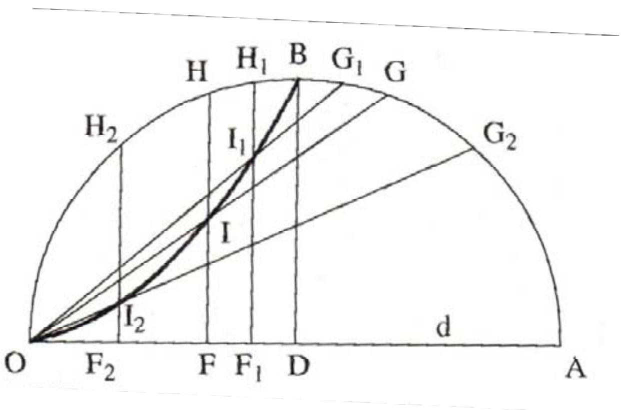


Fig. 24

- **i.** Elegimos arbitrariamente un punto H sobre el arco OB; dibujamos una línea a través de H perpendicular a OA que interseca a la base en F.
- **ii.** Tomamos un punto G sobre el arco BA tal que HB = BG; dibujamos GO y al punto en que esta recta interseca a FH lo llamamos I.
- **iii.** Procedemos como en i y ii comenzando con distintos puntos H_1, H_2,… sobre el arco OB.
- **iv.** Al unir suficientes puntos I, I_1, I_2,… estos puntos definen una curva que va de O a B, y a la que se le conoce como cisoide.

Una vez que se ha definido la cisoide podemos continuar con la construcción de dos medias proporcionales empleando tal curva[37], como se verá a continuación:

[36] *Ibid.,* p. 45.
[37] *Ibid.,* p. 46.

Dados dos segmentos de líneas rectas a y b (Fig. 22) *encontrar sus dos medias proporcionales x, y.*

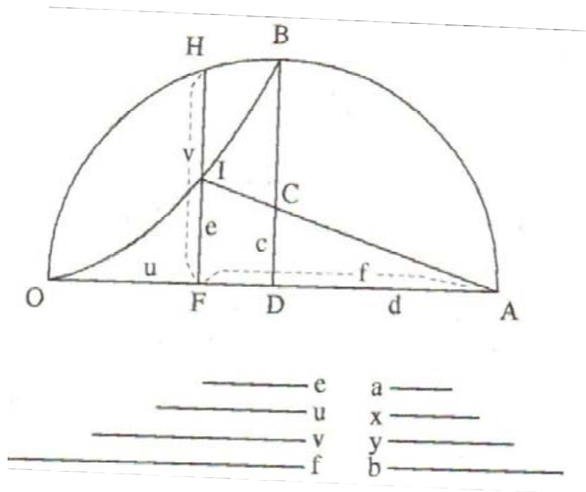


Fig. 25

- **i.** Dibujamos una cisoide OB dentro de un semicírculo OAB con radio OD = DA = *d*
- **ii.** Determinamos un segmento de recta c tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; tomamos C sobre DB con DC = *c*
- **iii.** Dibujamos y prolongamos AC hasta que interseca a la cisoide en un punto al que llamamos I. Dibujamos FH a través de I, perpendicular a OA, con F sobre la base OA y H sobre el semicírculo.

Viene ahora una estrategia muy elaborada para llegar al resultado, misma que gracias a la notación algebraica a nuestra disposición resulta más fácil de entender. Podemos entonces identificar cuatro segmentos de recta *e, u, v, f* tales que

$$e = FI, u = FO, v = FH \text{ y } f = FA$$

que por la observación anterior están en la siguiente proporción:

$$FI{:}FO = FO{:}FH = FH{:}FA$$

así, hemos encontrado dos medias proporcionales *u* y *v* entre dos segmentos de recta *e* y *f,* los cuales tienen la misma proporción que *a* y *b.*

Más aún, dado que son triángulos semejantes resulta que $\frac{e}{f} = \frac{c}{d}$.

Recordando que en el paso (ii) construimos un segmento de recta c tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{e}{f} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

Y queda así establecida la construcción e identificación de las dos medias proporcionales[38].

Construcción de Nicomedes

La construcción de dos medias proporcionales atribuida a Nicomedes, según Eutocio, emplea el procedimiento llamado neusis, y que en este caso, para llevarlo a cabo, recurre a una curva llamada concoide. El instrumento[39] que Nicomedes había diseñado para trazar esta curva constaba de dos reglas AB, CD conectadas perpendicularmente (Fig. 26), y una tercera EG movible.

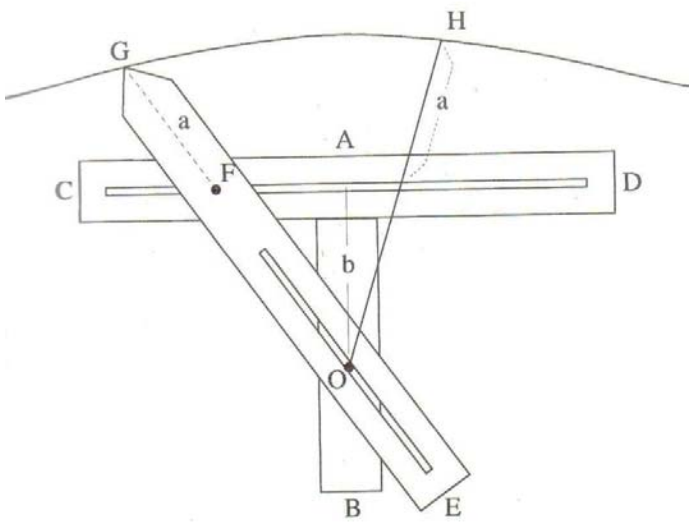


Fig. 26

Las reglas CD y EG tenían ranuras en la parte central: en O, sobre AB, y en F sobre EG, eran puestos los “pernos”. Las distancias FG = *a* y AO = *b* eran constantes (Nicomedes probablemente acondicionó un instrumento en el cual estas distancias

[38] Así es como aparece en Eutocio, probablemente lo hizo de esta manera porque para un matemático griego lo que faltaba era más o menos evidente. Ver Bos, Henk J. M., [2001], p. 47.
[39] *Ibid.,* p. 30.

pudieran ajustarse). Al mover la regla EG, el punto G describía la concoide. Los pernos y las ranuras aseguraban que en cualquier posición EG pasaría a través del punto fijo O -el "polo"- mientras F permanecería sobre la regla CD. Así, cualquier punto H sobre la concoide tenía la propiedad de que su distancia a la regla base CD era igual a *a.*

Literalmente "neusis" significa "rodear": el segmento dado es colocado entre las dos líneas tal que éste rodea o señala hacia el polo. En general, una neusis no puede ser construida usando únicamente líneas rectas y círculos; tal problema representó un papel importante en las construcciones clásicas griegas; sin embargo, la importancia de éste fue evidente para los primeros matemáticos modernos sólo después de la publicación de la *Colección* de Pappus en 1588. El hecho de que la construcción de la curva se hiciera mediante un instrumento –un mecanismo- llevó a que la concoide fuera considerada como una curva mecánica.

Volviendo a Eutocio, éste nos muestra cómo es que por medio de la concoide de Nicomedes podía ser resuelto el problema de la construcción de una neusis[40]:

Dadas dos líneas rectas L y M, un punto O (considerado como el polo de la neusis) y un segmento a (Fig. 27)*, se requiere encontrar una línea a través de O, que intersecte a L y M en A y B, respectivamente, y tal que AB = a.*

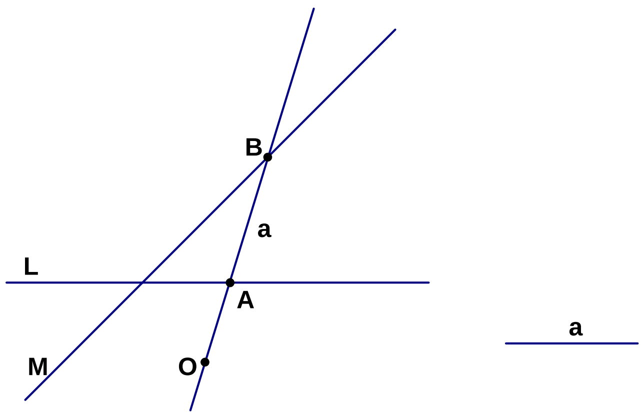


Fig. 27

i. Dibujamos una concoide con eje en L y polo en O (Fig. 25) (esto podría ser hecho con ayuda del instrumento descrito anteriormente, ajustando los pernos

[40] *Ibid.,* p. 31.

O y F de manera que *b* sea igual a la distancia de O a L y que *a* sea igual al segmento dado). En este caso la concoide interseca a M en B.

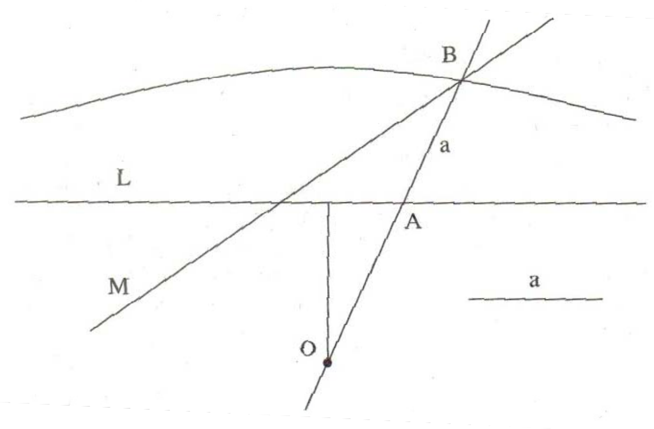


Fig. 28

ii. Dibujamos OB; ésta interseca a L en A.

iii. OAB es la recta buscada.

La prueba resulta inmediata a partir de la definición de la concoide.

Podemos ahora ver cómo es que Nicomedes reduce la construcción de dos medias proporcionales, como lo menciona Eutocio, al problema de la neusis[41]:

Dados dos segmentos de recta a y b, a < b (Fig. 29)*, se requiere encontrar sus medias proporcionales x, y.*

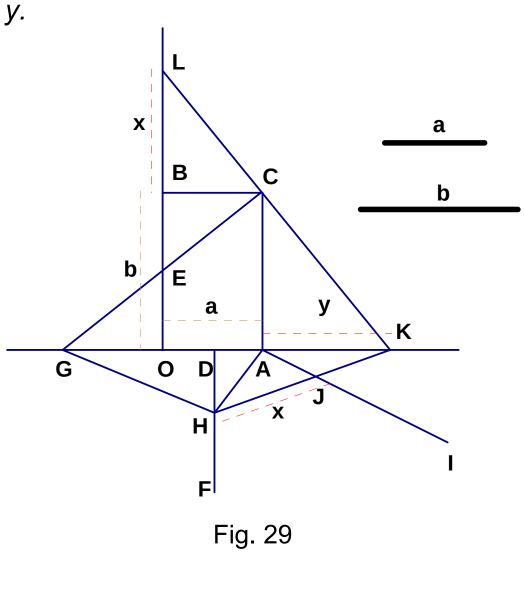


Fig. 29

[41] *Ibid.,* p. 33.

i. Construimos un rectángulo OACB con lados OA = *a* y OB = *b;* prolongamos OA hacia ambos lados y OB hacia arriba; bisecamos OA y OB en D y E respectivamente. Dibujamos DF perpendicular a OA, CE intersecando a AO prolongado en G, resulta que GO = OA = *a*.

ii. Tomamos H sobre DF tal que AH = OE = $\frac{1}{2}$ *b*; dibujamos GH; trazamos AI paralela a GH.

iii. Mediante la neusis establecemos una recta HJK a través H, intersecando AI y OA prolongadas en J y K, respectivamente, y tales que JK = OE = $\mathbf{\frac{1}{2}}$ *b.*

iv. Dibujamos y prolongamos KC, hasta que interseca a OB prolongado en L.

v. *x* = HJ, *y* = AK son las medias proporcionales requeridas.

vi. Más aún, LB = x, de manera que la construcción de Nicomedes produce la misma configuración de Herón, la primera que mostramos en este capítulo.

Para demostrarlo nos fijamos en los triángulos rectángulos DHA y DHK y vemos que

$$DH^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2} + y\right)^2$$

de donde $ay + y^2 = bx + x^2$

o bien $(a + y):(b + x) = x:y$ ... (1)

vemos también que ΔAJK ~ ΔGHK, así $JK:AK = HJ:GA$

de donde $\left(\frac{b}{2}\right):y = x:2a$ y $a:x = y:b$ ... (2)

de esta proporción se sigue que $a:y = x:b$

así, $(a + y):y = (x + b):b$ y $(a + y):(x + b) = y:b$ ... (3)

De (1) y (3) se sigue que $x:y = y:b$, y junto con (2) esto nos dice que $a:x = x:y = y:b$, estableciendo así que *x* y *y* son las medias proporcionales de *a* y *b.*

Finalmente, por el paso (iv) de la construcción de Nicomedes, $a:BL = y:b$, de donde se sigue que $BL = x$.

Hay que resaltar que el paso (iii) de la construcción no puede ser ejecutado si se limita uno a operar exclusivamente con líneas rectas y círculos.

CONSTRUCCIÓN DE MENECMO

Veamos ahora en qué consiste la construcción atribuida a Menecmo[42], una construcción con importancia más bien teórica dado que en la Grecia clásica no se contaba con métodos geométricos para trazar las cónicas.

Dados dos segmentos a y b (Fig. 30)*, se requiere encontrar sus dos medias proporcionales.*

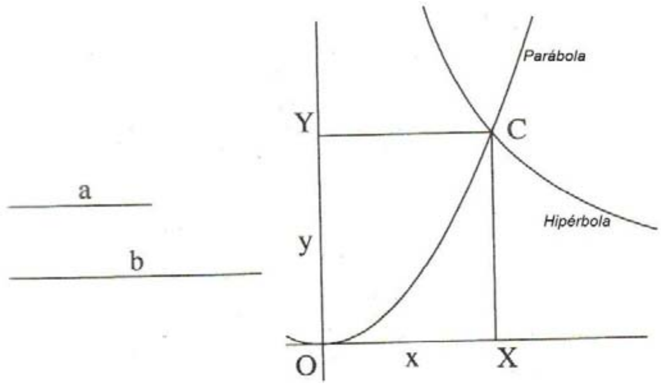


Fig. 30

- **i.** Marcamos un cuadrante por una vertical y una horizontal a través de O. Dibujamos una parábola con ejes verticales, vértice O y lado recto *a*.
- **ii.** Dibujamos en el cuadrante sólo una rama de una hipérbola, la cual tiene los dos ejes como asíntotas y cuya abscisa y ordenada forman el rectángulo que se denota por rect(a,b).
- **iii.** Las dos curvas se intersecan en C; dibujamos ahora las perpendiculares CX y CY, con X y Y sobre el eje vertical y el horizontal respectivamente.
- **iv.** Ahora, x = OX, y = OY son las dos medias proporcionales buscadas.

[42] *Ibid.,* p. 39.

La prueba consiste en ver que C está sobre la parábola con lado recto *a*. Tenemos que $ay = x^2$, y como C está sobre la hipérbola resulta que $xy = ab$. Así, $a{:}x = x{:}y = y{:}b$, con lo cual queda establecido que estas *x* y *y* son medias proporcionales de *a* y *b.*

En el terreno de los problemas sólidos, el ejemplo mejor conocido de solución de un problema sólido recurría a la intersección de cónicas. Fue ésta la construcción de dos medias proporcionales que Eutocio atribuye a Menecmo.

CONSTRUCCIÓN DE ARQUITAS

La construcción de Arquitas es una muestra de un ingenio sensacional. La idea esencial, es encontrar dos medias proporcionales AI, AK (Fig. 31) entre dos segmentos dados AM y AD a través de un acomodo de triángulos rectángulos[43] semejantes como los que muestra la figura siguiente:

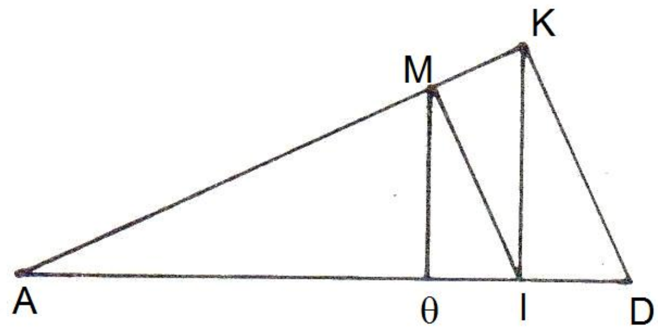


Fig. 31

Arquitas determina el punto K como la intersección de tres sólidos. Comenzando con un semicírculo cuyo diámetro es AD´, igual a la más grande de las longitudes dadas, y en el cual la cuerda AB es igual a la longitud dada más pequeña. Considera un semicírculo igual levantado en el plano perpendicular al semicírculo dado (Fig. 32); como el diámetro AD´ gira sobre A, este círculo generará la superficie de un semi toro.

[43] Knorr, Wilbur, R., [1989], pp. 50-52.

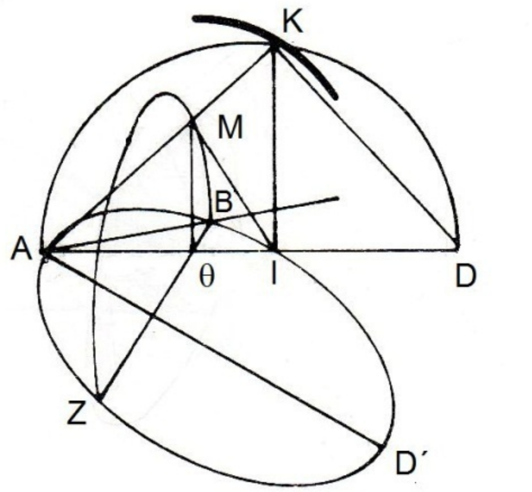


Fig. 32

Si un semicilindro es levantado sobre el semicírculo ABD´ como su base, entonces el toro lo intersecará a lo largo de una curva. Al mismo tiempo, Arquitas considera que el semicírculo dado gira alrededor de su diámetro AD´ como un eje por lo que la cuerda extendida AB genera la superficie de un cono, siendo K el punto de intersección del cono y el semicilindro. Arquitas muestra los resultados de esta construcción: si uno dibuja el triángulo AKD, la línea KI perpendicular a AD, la línea AM igual a AB, y la línea M perpendicular a AD, Arquitas probó que el ángulo AMI es un ángulo recto. Así, los tres triángulos AMI, AIK, AKD son semejantes. De esta manera las cuatro rectas AM, AI, AK, AD están en proporción.

El modo sintético de exposición que adopta Eutocio inevitablemente oscurece el profundo método de pensamiento que está detrás de la construcción de Arquitas. Pero un análisis a lo largo de las siguientes líneas puede mostrar ser más accesible y parecido a lo hecho por el hombre de Tarento. Como el objetivo es encontrar un arreglo del triángulo AKD tal que AM tenga la longitud dada, se toma la cuerda AK considerada para girar sobre A, y para cada posición de K (Fig. 33) dibujamos KI perpendicular a AD e IM perpendicular a AK.

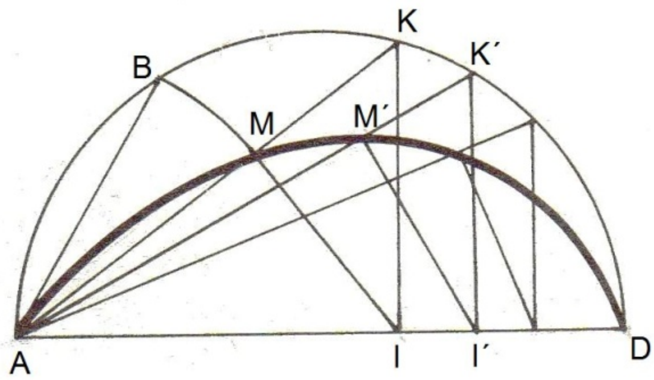


Fig. 33

Entonces M trazará una curva tal que el segmento de recta AM decrece continuamente desde su valor inicial AD, asumiendo arbitrariamente pequeños valores alrededor de A. En alguna posición, entonces, AM será igual a la línea dada AB, y de esto se sigue la solución del problema. En vez de efectuar esta construcción, punto por punto, del lugar de M, uno puede tratar de encontrar la intersección común de los lugares asociados con los puntos K, I y M (Fig 34). El lugar de K, como el vértice del triángulo rectángulo de la hipotenusa AD, se determina manteniéndolo sobre la circunferencia del círculo AKD.

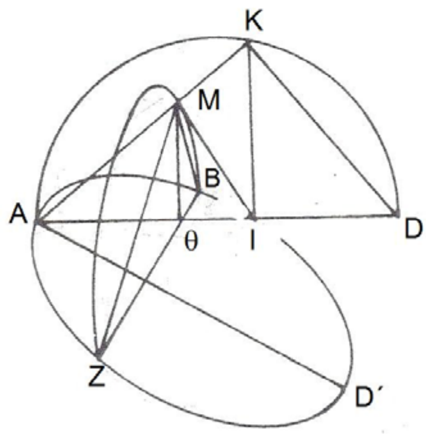


Fig. 34

La longitud AM puede mantenerse igual a AB situando M como el trazo de B cuando su semicírculo rota sobre su eje AD. En cuanto al lugar de I, puede resolverse como sigue: en la posición final deseada, requerimos que IM sea perpendicular a AK, donde I es mostrado como el pie de la perpendicular desde K a AD. Ahora, M permanece sobre el círculo ZMB de diámetro ZB; situando □ como la intersección de ZB con AI, M□ es entonces perpendicular a ambas rectas (pues permanece sobre la intersección de dos semicírculos AKD, ZMB, cada uno perpendicular al plano base que contiene las rectas AD, ZB). Ya que el ángulo ZMB está inscrito en un semicírculo, M□^{2} = Z□ · □B, pues por hipótesis el ángulo AMI es un ángulo recto y M□^{2} = A□ · □I. Así, A□ · □I = Z□ · □B, por lo que Z□B y A□I estarán intersecando cuerdas en el mismo círculo (*Elementos III, 35);* esto es, I se halla sobre el círculo ZABD´. Gracias a esto uno puede tomar el semicírculo ABD´ como el lugar de I, de manera que la vertical KI se encontrará en el semicilindro levantado sobre ABD´ como su base.

Se observa que la configuración deseada de triángulos rectos semejantes puede ser arreglada a través de la determinación de K como la intersección del toro, el semicilindro y el cono.

CONSTRUCCIÓN DE ERATÓSTENES

Eratóstenes de Cirene destacó por el alcance de sus logros, tanto literarios como filosóficos y científicos, a lo largo de una carrera que se extendió más allá del fin del siglo II a.C. Su mayor trabajo como científico ocurrió en las áreas de astronomía y geografía. Su narración de la historia del problema de la duplicación del cubo presenta una solución mecánica de su propia invención. Además de esto, Pappus cita su tratado, de corte analítico, sobre ciertos problemas de lugar (*locus).* Estos esfuerzos otorgan a Eratóstenes un papel destacado en la solución de problemas geométricos, el cual es nuestro principal asunto en esta sección.

Eratóstenes propone resolver la duplicación del cubo mediante el uso de un instrumento al que llamó *mesolabio.* El problema consiste en encontrar dos medias proporcionales[44], líneas BZ, GH entre dos líneas dadas AE, D□.

[44] *Ibid.,* pp. 211, 212.

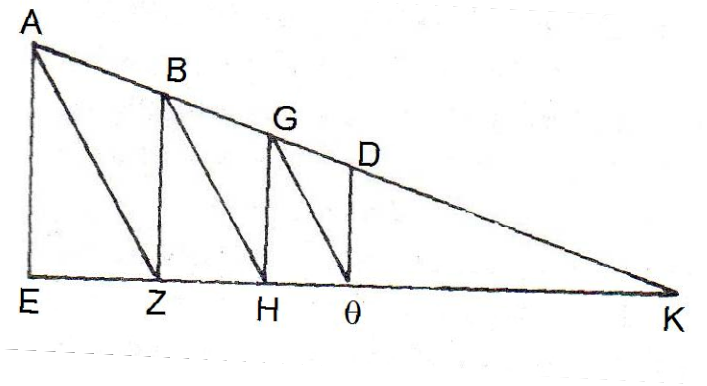


Fig. 35

Suponemos que las líneas son construidas y colocadas como paralelas sucesivamente entre dos líneas AD, E□, inclinadas una hacia la otra e intersectándose (Fig. 32) , cuando las extendemos, en K. Ahora se trazan las diagonales AZ, BH, G□; se sigue que ellas son paralelas entre sí. Ya que AE : BZ = BZ : GH y que AK : BK = ZK : HK; entonces los triángulos AZK y BHK son semejantes y por lo tanto AZ y BH son paralelas. Análogamente, BH y G□ son paralelas. Esto apunta hacia una construcción de las medias de la siguiente manera: tomamos tres placas rectangulares, cada una con la diagonal idéntica AZ, y sea el lado AE del primer rectángulo una de las líneas dadas y la longitud D□, inmersa en el lado opuesto del rectángulo, siendo la otra línea dada.

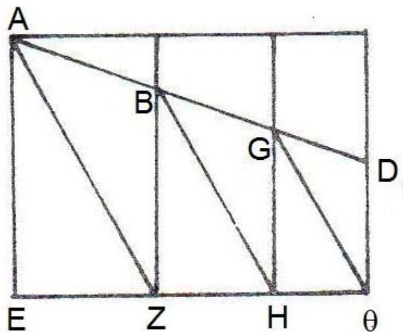


Fig. 36

Estas placas se colocan de manera que se puedan deslizar una detrás de la otra (Fig. 36), la tercera –contada de izquierda a derecha- detrás de la segunda y la segunda detrás de la primera, hasta los puntos B y G, donde la segunda y tercera diagonal –de izquierda a derecha- encuentran el borde de la primera y segunda placa, respectivamente, formando una línea con puntos extremos A y D. Cuando esto es realizado, las líneas BZ y GH serán las medias proporcionales deseadas entre AE y D□.

En la versión presentada por Eutocio se proporcionan algunos detalles sobre la forma y materiales adecuados para la elaboración de las placas, las ranuras mediante las cuales se controla su movimiento, etcétera.

Uno supone una barra guía que de algún modo gira sobre A de manera que conecta o define a D, por la que la colinearidad de A, B, G y D puede ser lograda. En la práctica, una justa cantidad de intentos de prueba y error pudiera ser necesaria para obtener las posiciones finales deseadas. Eratóstenes hace notar que la utilidad de su mecanismo no se limita a la búsqueda de dos medias proporcionales; con la introducción de placas adicionales, uno puede encontrar un número arbitrario de medias entre dos segmentos dados.

De la historia del estudio de este problema, sabemos que Eratóstenes estaba familiarizado con las soluciones al problema debidas a Arquitas, Eudocio y Menecmo, y lo más probable es que también con la construcción pseudo-Platónica, misma que se verá más adelante. De éstos, el método de Arquitas sugiere un precedente natural para aproximarse al adoptado por Eratóstenes, en el que ambos dependen del arreglo de una secuencia de triángulos semejantes que relaciona a las líneas dadas. En la figura de Arquitas las líneas AK y AI son determinadas como medias proporcionales entre las líneas dadas AD y AM.

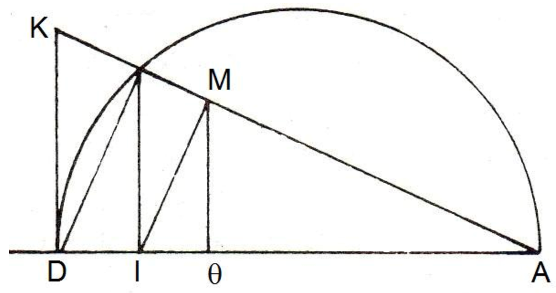


Fig. 37

Pero el carácter recursivo de la figura es evidente, y si uno dirige su atención a las verticales M□, IK (Fig. 37) la noción de una figura alternativa rápidamente se presenta por sí sola, en la que la única diferencia con la figura usada por Eratóstenes es la orientación inversa de las diagonales (Fig. 38).

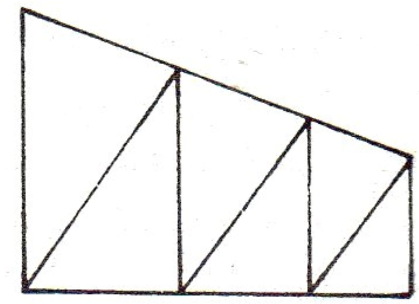


Fig. 38

Geométricamente insignificante, esta diferencia parece no proporcionar ninguna ventaja mecánica, así que la razón de Eratóstenes para alterar la figura derivada pudiera permanecer desconocida para siempre. Esto sugiere que el diseño de Eratóstenes no surgió simplemente como una variante de la figura de Arquitas.

Construcción de Descartes

Dieciséis siglos después de Menecmo, en su texto titulado *Geometría,* Descartes describe detalladamente un instrumento para determinar medias proporcionales conocido como "el mesolabio"[45]. Como ya se vio en la sección anterior, esta palabra ya había sido utilizada en el siglo III a. C. por Eratóstenes para designar un dispositivo mecánico que producía una configuración que permitía encontrar las magnitudes de dos medias proporcionales a dos magnitudes dadas.

La presentación de Descartes del *mesolabum* aparece en la primera página del libro II de *La Geometrie*[46]*,* aunque ahí no aparece el nombre *mesolabum.* Esta manera de identificar al instrumento que se muestra en la Fig. 39 parece ser utilizada por primera ocasión en las *Cogitationes Privatae,* refiriéndose a un instrumento para resolver ecuaciones cúbicas, y lo hace usando las palabras *linea circoni mesolabi* (curva del

[45] Bos, Henk J.M., [2001], pp. 240, 241.
[46] Descartes, *La Geometrie,* pp. 317-319, en Oeuvres, Vol. VI, [1996].

compás mesolabio). Sin embargo el uso real que se le dio a este instrumento fue para calcular medias proporcionales.[47]

Consta de dos reglas movibles YZ y YX alrededor de Y (Fig. 39). En B, sobre YX, se fija una regla BC perpendicular a YX. Un número de reglas CD, EF, GH son ajustadas a lo largo de YZ; la primera, CD, se coloca donde BC toca a YZ, como se muestra en la figura. Luego DE, perpendicular a YX, se coloca donde CD toca a YX, y así sucesivamente. Todas ellas pueden deslizarse a lo largo de la regla YZ mientras permanecen perpendiculares a YZ, ya que así están ajustadas. Reglas similares DE y FG se mueven a lo largo de YX al ser empujadas por las reglas verticales CD y EF respectivamente.

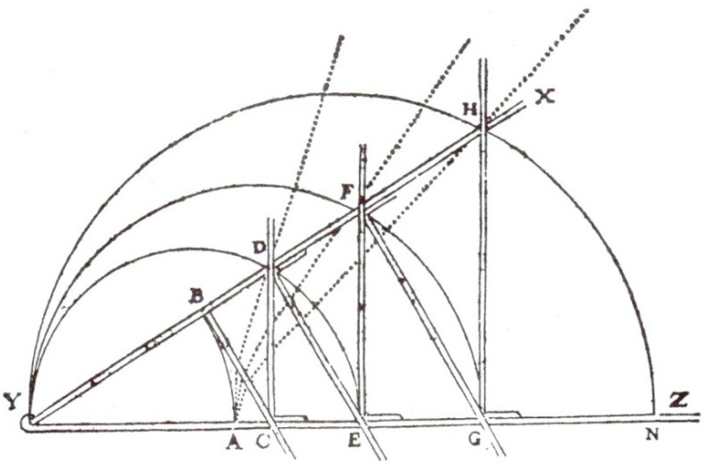


Fig. 39

Una vez que se fija YZ y YX gira de manera tal que el ángulo XYZ se incrementa, BC empuja a CD a lo largo de YZ; CD en cambio empuja a DE a lo largo de YX, DE empuja a EF, etcétera Durante el movimiento las líneas BC, CD, DE, EF, FG, GH serán conectadas, y los movimientos de todas ellas están enlazados, así marcarán una serie de segmentos YB, YC, YD, YE, YF, YG, YH, que serán proporcionales a la longitud de los brazos YZ y YX.

Ahora veamos cómo se empleó el mesolabio para construir dos medias proporcionales[48]:

[47] Bos [2002], nota 22 en p. 239.
[48] *Ibid.,* pp. 241, 242.

Dados dos segmentos e y a (Fig. 40)*, con e igual a YB en el mesolabio, se requiere construir dos medias proporcionales x, y entre e y a.*

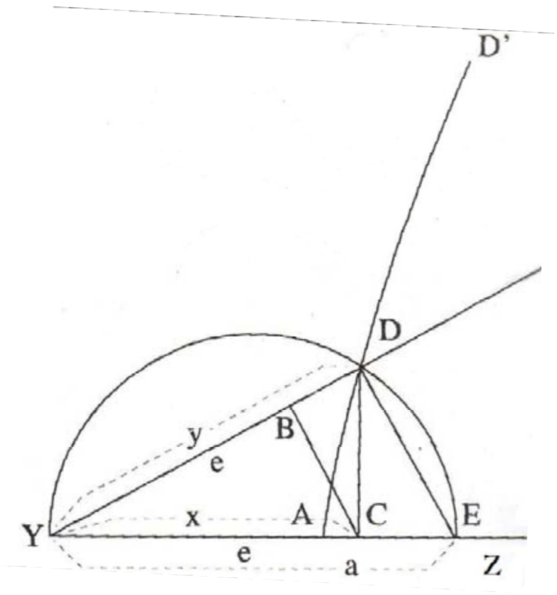


Fig. 40

- **i.** Usamos el mesolabio para trazar la curva ADD´ descrita por el punto D.
- **ii.** Marcamos a = YE a lo largo de YZ; dibujamos un semicírculo con diámetro YE; éste interseca la curva ADD´ en D.
- **iii.** Dibujamos YD; marcamos YB = e a lo largo de éste; dibujamos BC perpendicular a YB.
- **iv.** Los segmentos x = YC, y = YD son las dos medias proporcionales requeridas, es decir, e : x = x : y = y : a.

Para probarlo dibujamos CD y DE. D es perpendicular a YD porque D está sobre el semicírculo; DC es perpendicular a YZ por la manera como se genera la curva ADD´. El resultado se justifica a partir de la similitud de los triángulos.

Otra de las construcciones que incluye Eutocio en su tratado se atribuye a Platón y dado sus características ha levantado cierta controversia. Veremos porqué.

CONSTRUCCIÓN PSEUDO-PLATÓNICA

La construcción atribuida a Platón es la primera del texto de Eutocio[49] sobre la duplicación del cubo. El procedimiento platónico emplea un dispositivo mecánico para generar una configuración que consta de tres triángulos rectángulos semejantes consecutivos GBD (Fig. 41), DBE y EBA, donde los lados AB y BG están dados.

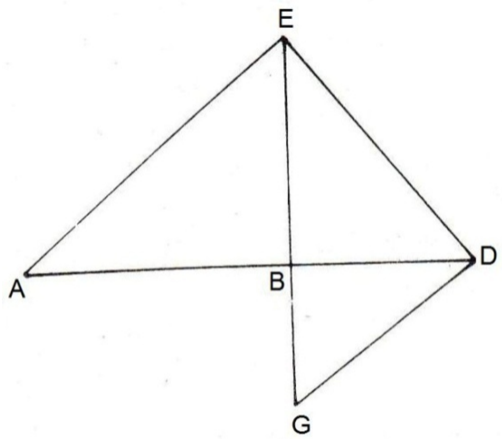


Fig. 41

Su base es el segmento H□ (Fig. 42) desplazándose sobre el punto dado G de manera que su punto final H siempre permanece a lo largo de la línea AB.

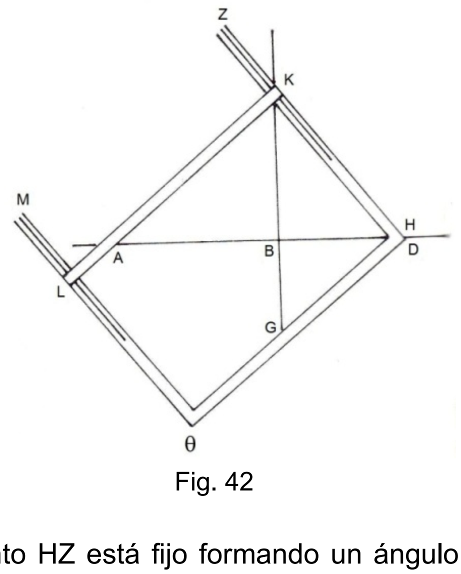


Fig. 42

Un segundo segmento HZ está fijo formando un ángulo recto con el primero. Un tercer segmento KL es libre para deslizarse a lo largo de HZ, pero es siempre

[49] Knorr, Wilbur, R., [1989], pp. 57-61.

perpendicular a éste. Si K es colocado a lo largo de la recta GB, entonces KL se intersecará con BA (o su extensión) en A´, y cuando este punto coincida con A la construcción buscada se habrá logrado. Así, DB y BE serán las dos medias proporcionales entre las longitudes dadas GB, BA (Fig. 43).

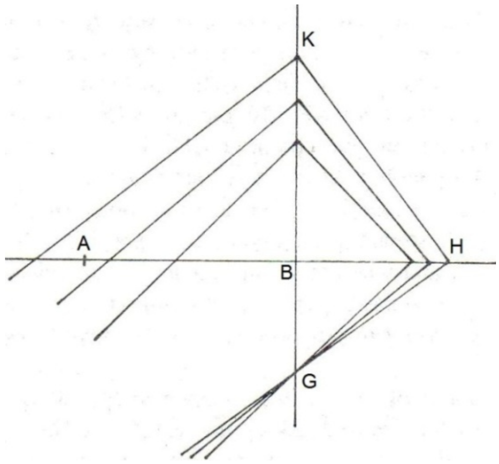


Fig. 43

El origen platónico de este método está abierto a una seria discusión. Primero, Eratóstenes no hizo referencia a éste entre sus comentarios sobre los primeros esfuerzos de la duplicación del cubo. Esto es algo destacable pues su interés en la filosofía platónica es evidente a través de su escrito de los *Platónicos* y su elaboración de la historia de la relación de Platón con el planteamiento del problema según la leyenda ya mencionada. Desde luego Eratóstenes había estado particularmente interesado en presentar una solución efectiva de Platón para el problema Delio. Además, este método depende del uso de un artefacto mecánico. De hecho el texto de Eutocio se concentra en detallar (considerablemente) la creación de ranuras y de ejes asegurando que los segmentos mantengan posiciones perpendiculares durante todo su movimiento.

Uno puede sorprenderse con la flexibilidad de las tradiciones que por una parte atribuyen tal mecanismo a Platón, y por la otra lo describen como el defensor de la geometría pura y la figura más crítica de sus colegas cuando éstos empleaban procedimientos mecánicos en estudios de geometría. Es posible encontrar expresiones muy precisas sobre el carácter abstracto de los métodos geométricos en los escritos platónicos.

Pero si aceptamos, como muchos estudiosos lo hacen ahora, que este método no puede ser atribuido a Platón, entonces nos enfrentamos a la pregunta de quién fue su creador. Al no aparecer su nombre en el reporte de Eratóstenes podría indicar que se trata de una construcción posterior; y si se busca un autor plausible, tal personaje pareciera estar implícito en el fondo del método de Diocles que fue presentado sólo un poco después del de Eratóstenes.

Esto nos lleva a suponer que Eratóstenes podría haber inventado tanto este método como además otro procedimiento mecánico difundido bajo su nombre, apuntando a que pudiera haber introducido esto con el fin de llevar a cabo una discusión sobre la naturaleza de la geometría entre Platón y uno de sus colegas, tomando como ejemplo paradigmático la duplicación del cubo. Entonces, ¿cuál colega? Sólo Arquitas, Menecmo y Eudocio son nombrados en esta relación, y de éstos los primeros dos usaron métodos que no traerían a la mente el dispositivo que se atribuye a Platón. Claro está, pudieron haber sido métodos completamente ajenos uno del otro y, sin embargo, concebidos por la misma mente.

Pero volvamos al artefacto pseudo platónico, por calificarlo de alguna manera. Su uso, a la manera descrita por Eutocio, no produce ninguna curva. Pero en vez de ajustar el segmento móvil KL (Fig. 44), sujetándolo para que K permanezca en la recta GB (o su extensión), nos permite colocar KL de tal forma que siempre pase a través de A.

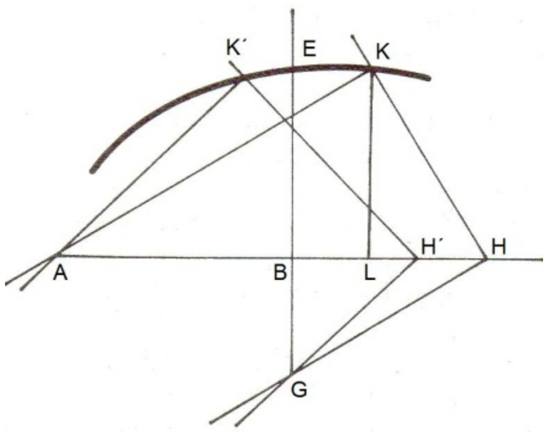


Fig. 44

Entonces K describe una curva, y donde ésta intersecte a GB (en el punto E) se produce la configuración que resuelve el problema. Para ver cómo es que esto se genera de manera un poco más abstracta[50], consideramos dos rectas paralelas AK, GH girando sobre los puntos dados A y G. Para establecer la intersección de H con GH y AB

[50] *Ibid.,* pp. 59, 60.

(extendida) dibujamos la perpendicular a AB que interseca AK en K; entonces K describe nuestra curva. O bien tenemos la siguiente alternativa: dibujamos, a partir de la intersección de K con AK y GB (extendida) la perpendicular a GH en H, y H entonces describirá una curva del mismo tipo, pero orientada de diferente manera (Fig. 45).

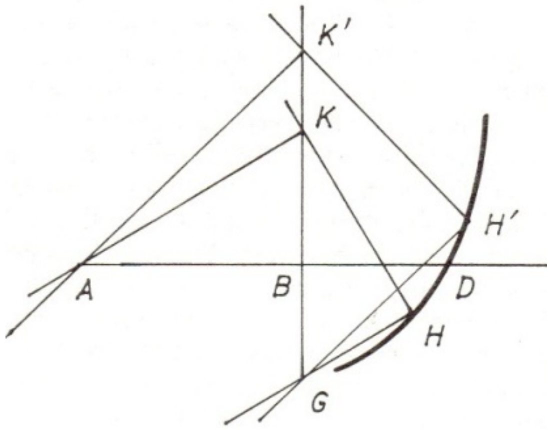


Fig. 45

En el lenguaje moderno esta curva es llamada *ophiurides*[51], una familia de curvas de tercer orden, y la curva empleada por Diocles para resolver la duplicación del cubo surge en el caso límite cuando B coincide con A o con G. Uno puede notar que un procedimiento equivalente al método pseudo platónico tiene lugar en una versión árabe basada, parecería, en un relato de principios del siglo II a.D adjudicado al geómetra Menelao. Aquí, una descripción claramente mecánica al estilo de Eutocio, saturada con descripciones de ranuras, segmentos y ejes, acompaña a una descripción en paralelo estructurada a la manera geométrica más abstracta posible. De hecho no genera una curva, aunque el método para hacerlo es evidente. La omisión podría deberse a Menelao, pues sucede lo mismo en su tratado sobre el método de Arquitas. Así resulta que tenemos una posible explicación de cómo un texto que se ocupa de la solución de Eudoxo "por medio de líneas curvas", pudo llegar a manos de Eutocio, pero privado de toda mención a curvas. Más aún, si el texto fue del todo confuso en lo que se refiere a las posiciones de K a lo largo de la recta GB, uno no vería cómo la proporción discreta GB : BH = HL : LK llega a ser la proporción continua GB : BD = BD : BK. Se podría decir que estas dos fallas estropearon la fuente de información de Eutocio sobre el método de Eudoxo y el método pseudo platónico.

[51] Ver Knorr, Wilbur, R., [1989], p. 59.

Bajo esta visión que asume la identidad de los dos métodos, tendríamos que asignar a Eudoxo un tratado con un alto grado de abstracción, para así justificar la crítica de Eratóstenes a Eudocio y no menos a Arquitas y a Menecmo por haber abordado el problema de una manera estrictamente teórica sin pensar en la ejecución práctica. Como se indicó anteriormente, Eratóstenes aparece como el candidato más viable para haber moldeado este método en la forma actual, presentándolo como un proceso basado en un dispositivo mecánico. En su escrito los *Platónicos* ofrecería un contexto natural para la presentación de este problema y ello provocaría que los escritores posteriores equivocadamente atribuyeran el método a Platón. Uno puede detectar en la versión de Eutocio del método pseudo platónico ciertas coincidencias de expresión, mismas que relacionan a éste con otros textos que él presenta. Tales intervenciones editoriales por parte suya serán necesarias en el caso de que su fuente de información surja en última instancia en el contexto relativamente informal de una discusión de la filosofía platónica presentada por Eratóstenes.

En vista de las importantes contribuciones de Arquímedes a la solución de problemas como la trisección del ángulo, es sorprendente que la tradición antigua no le asignara algún papel en el estudio de la duplicación del cubo también. De hecho, bastaría con tomar como punto de referencia la primera proposición de la *Esfera y el Cilindro*, la cual proporciona a Eutocio el contexto para presentar su serie de textos sobre la duplicación que requiere de la construcción de dos medias proporcionales. De las once o doce que presenta ninguna es tomada del trabajo de Arquímedes, pero varías de ellas dependen de la construcción de una neusis, método que como ya hemos visto fue ampliamente explotado por Arquímedes.

III. LA CONSTRUCCIÓN DEL HEPTÁGONO REGULAR

Para seguir con nuestro análisis de métodos geométricos –no necesariamente aceptables por el canon euclidiano- generados por lo matemáticos clásicos nos enfocaremos en algunas soluciones presentadas para resolver el problema de la construcción de un heptágono regular.

Con el fin de contrastar el estilo euclidiano y el de Arquímedes se presenta el procedimiento seguido por Euclides para inscribir un pentágono regular en un círculo dado.

Proposición 11, Libro IV, *Elementos*.

En un círculo dado inscribir un pentágono equilátero y equiangular (Fig. 43).

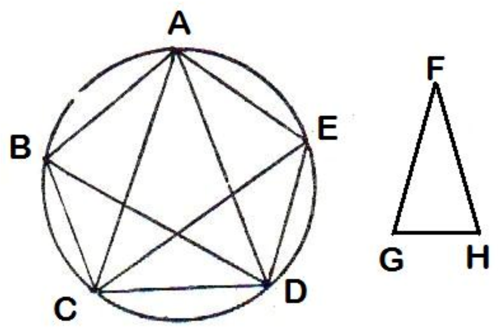


Fig. 46

Sea *ABCDE* el círculo dado; se requiere inscribir en el círculo *ABCDE* un pentágono equilátero y equiangular. Sea el triángulo FGH isósceles tal que los ángulos en G y H son el doble del ángulo en F [IV. 10]. Sea inscrito en el círculo ABCDE el triángulo ACD equiangular con el triángulo FGH, de manera que el ángulo CAD sea igual al ángulo en F y los ángulos en G y H sean iguales a los ángulos ACD, CDA respectivamente [IV. 2]. Así cada uno de los ángulos ACD, CDA es el doble del ángulo CAD. Ahora, sean bisectados los ángulos ACD, CDA respectivamente por las líneas rectas CE, DB [I. 9] y únanse AB, BC, DE, EA. Entonces, dado que cada uno de los ángulos ACD, CDA es el doble del ángulo CAD y han sido bisectados por las líneas rectas CE, DB, por lo tanto los cinco ángulos DAC, ACE, ECD, CDB, BDA son iguales entre sí. Pero los ángulos iguales subtienden arcos iguales [III. 26], por lo que los cinco arcos son iguales unos con otros. Pero los cinco arcos de circunferencia están subtendidos por líneas rectas iguales [III. 29] de manera que las cinco líneas rectas AB, BC, CD, DE, EA son iguales entre sí; por lo tanto el pentágono es equilátero.

Mencionamos anteriormente que se distinguían dos problemas dentro de la tradición arquimediana que dependían de la neusis para su solución: el primero de ellos fue la trisección (analizado anteriormente), y el segundo problema al que nos referimos es la inscripción de un heptágono regular en un círculo dado. En ambos casos nosotros estamos en deuda con Thabit ibn Qurra por las traducciones al árabe que han conservado el conocimiento de estos resultados y porque además da cuenta de otros esfuerzos realizados por los geómetras árabes.

LA CONSTRUCCIÓN DEL HEPTÁGONO REGULAR ATRIBUIDA A ARQUÍMEDES

El texto *Sobre la Inscripción del Heptágono Regular* [52] consiste de 18 proposiciones, la mayoría dedicadas a propiedades de triángulos no relacionadas con el problema del título. Las proposiciones 1 a la 14 establecen propiedades de triángulos rectos, mientras que las proposiciones 15 y 16 prueban un teorema tocante a la cuerda de un arco β en un círculo de radio *r*. Únicamente las proposiciones 17 y 18 se ocupan de la división del círculo en siete partes iguales. En estas dos últimas proposiciones se encuentra un primer lema mediante el que se establecen ciertas propiedades de una figura construida por medio de una *neusis* y luego se presenta la aplicación de esta figura para resolver el problema de inscribir el heptágono. Dado nuestro interés por la construcción del heptágono regular mostraremos detalladamente las proposiciones 17 y 18:

PROPOSICIÓN 17:

La proposición[53] consta de varias partes y sus afirmaciones giran en torno de la Fig. 47.

[52] Hogendijk, J. P., [1982].
[53] *Ibid.,* pp. 205-206.

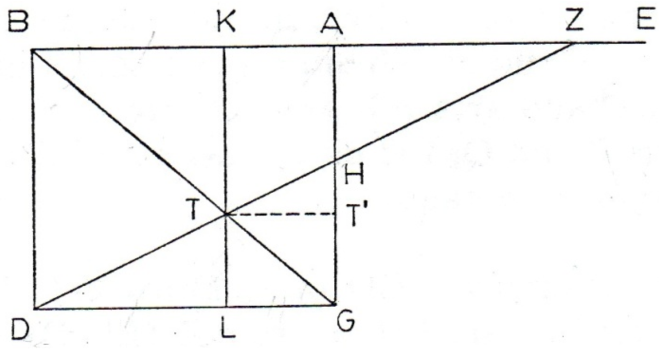


Fig. 47

i. Sea el cuadrado A, B, G, D. Extendemos el lado AB hasta E y dibujamos la diagonal BG.
ii. Colocamos un extremo de la regla sobre el vértice D y el otro extremo sobre el segmento de recta EA tal que éste interseca a EA en el punto Z, de manera que el triángulo ZAH sea igual en área al triángulo GTD.
iii. Dibujamos sobre el punto T una línea KL paralela a AG.
iv. Lo que debemos demostrar es que:
    a) El rectángulo determinado por AB y KB es igual al cuadrado de lado ZA
    b) El rectángulo determinado por ZK y AK es igual al cuadrado de lado KB
    c) Cada una de las líneas BK y ZA es más grande que la línea AK.
v. Demostraremos que el rectángulo determinado por AB y KB es igual al cuadrado de lado ZA.

Como ΔZAH = ΔGTD entonces $TL \cdot GD = AH \cdot ZA$, así que

$$\frac{GD}{ZA} = \frac{AH}{TL}$$

como $GD = AB$ por ser lados del cuadrado, vemos que

$$\frac{GD}{ZA} = \frac{AB}{ZA} = \frac{AH}{TL} \dots (1)$$

vi. Resulta que ΔZAH ~ ΔZKT por el teorema de Tales, y a su vez ΔZKT ~ ΔTLD, ya que ∡KTZ = ∡DTL por ser opuestos por el vértice, y como ∡ZKT = ∡DLT pues ambos son ángulos rectos, se sigue que ∡KZT = ∡TDL.

Se propone que ΔZAH ~ ΔTLD. Veamos por qué:

∡ZAH = ∡TLD pues son ángulos rectos

∡AZH = ∡TDL por ser ángulos alternos internos.

Así que ∡DTL = ∡AHZ.

∴ ΔZAH ~ ΔZKT, ΔZKT ~ ΔTLD, ΔZAH ~ ΔTLD

de manera que

$$\frac{AH}{TL} = \frac{ZA}{LD} \dots (2) \qquad \text{donde } LD = KB$$

vii. Sustituimos (2) en (1) y obtenemos:

$$\frac{AB}{ZA} = \frac{ZA}{LD}, \quad \text{pero como } LD = KB \text{ entonces } \frac{AB}{ZA} = \frac{ZA}{KB}$$

$$\therefore AB \cdot KB = ZA^2$$

viii. Sabemos que BG es una de las diagonales del cuadrado, mientras que KL es una paralela al lado AG.

Queremos demostrar que AK = TL.

Para ello observamos que AK = LG.

Por el teorema de Tales resulta que ΔGTL ~ ΔGBD pues al ser KL paralela a AG también lo es a BD, por ser AG y BD lados del cuadrado. BG es diagonal del cuadrado, así que ∡GBD = 45° = ∡DGB. Entonces ∡GTL = 45° = ∡LGT y por lo tanto ΔGTL es isósceles, por lo que TL = LG, y dado que AK = LG finalmente obtenemos que AK = TL. Análogamente podemos demostrar que KB = KT. Así,

$$\frac{AK}{KB} = \frac{TL}{KT} \dots (3)$$

de (vi) sabemos que ΔZKT ~ ΔTLD, entonces

$$\frac{TL}{KT} = \frac{LD}{ZK}, \text{ pero como } LD = KB \text{ se tiene que}$$

$$\frac{TL}{KT} = \frac{KB}{ZK} \dots (4)$$

de (3) y (4) tenemos que

$$\frac{AK}{KB}=\frac{KB}{ZK} \text{ y de aquí se sigue que } AK\cdot ZK=KB^2$$

ix. Para ver que KB > AK recurrimos a *Elementos*, Libro V, proposición 14:

$$\text{Si } \frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ y } A>C \Rightarrow B>D$$

Dem: $A>C$ y $\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Rightarrow \frac{C}{D}>\frac{C}{B} \Rightarrow D<B \Rightarrow B>D$

sabemos que $ZK=ZA+AK$ y por lo tanto resulta que $ZK>AK$.

De $ZK\cdot AK=KB^2$ se sigue que

$$\frac{ZK}{KB}=\frac{KB}{AK}$$

por la proposición 14 antes mencionada obtenemos que $KB>AK$.

Ahora veamos que $ZA>AK$. Primero demostraremos que $ZA>KB$.

Sabemos que $KB=DL$. Veamos que $ZA>DL$.

En virtud de los triángulos y de sus áreas resulta que $ZA\cdot AH>DL\cdot TL$ pues ΔAZH > ΔDLT. Tenemos que:

$$\frac{AH}{ZA}=\frac{TL}{DL} \text{ por semejanza de triángulos, y entonces}$$

$$\frac{ZA}{DL}>\frac{TL}{AH}=\frac{DL}{ZA}, \text{ lo cual implica que } \frac{ZA}{DL}>\frac{DL}{ZA}$$

así, $ZA^2>DL^2$, de lo que se sigue que $ZA>DL$. Pero como $DL=KB$, por lo tanto $ZA>KB$. Como $KB>AK$ se sigue que $ZA>AK$.

x. Así, resulta que el rectángulo determinado por AB y KB es igual al cuadrado de lado ZA, el rectángulo determinado por ZK y AK es igual al cuadrado de lado KB, y cada una de las líneas ZA y KB es más grande que la línea AK.

Pasamos ahora a la Proposición 18[54]:

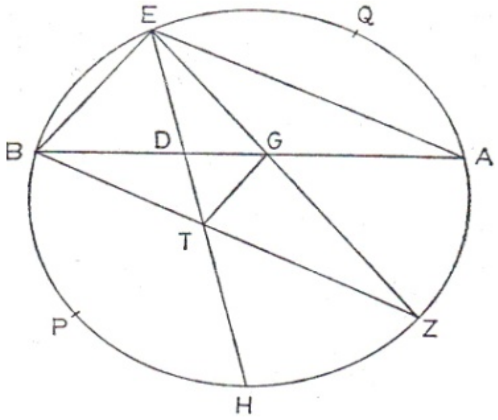


Fig. 48

i. Deseamos construir un círculo dividido en siete partes iguales.
ii. Dibujamos AB con los extremos conocidos. Marcamos sobre este segmento dos puntos G y D tales que el rectángulo determinado por AD y GD sea igual al cuadrado de lado DB, y el rectángulo determinado por GB y DB sea igual al cuadrado de lado AG, y que cada una de las líneas AG y DB sea más grande que GD por la construcción anterior.
iii. Construimos el triángulo GED tal que el lado GE sea igual a la línea AG y el lado DE sea igual a la línea DB.
iv. Dibujamos AE y EB y trazamos la circunferencia circunscrita con respecto al triángulo AEB.
v. Extendemos las líneas EG y ED hasta intersecar a la circunferencia en los puntos Z y H respectivamente.
vi. Unimos BZ y trazamos desde G una línea que intersecte a BZ en el punto T.
vii. Dado que los lados AG y GE del triángulo AGE son iguales, el ángulo EAG es igual al ángulo AEG, y así el arco AZ es igual al arco EB.
viii. Sabemos que $AD \cdot GD = DB^2$, pero como $DB = DE$, entonces $AD \cdot GD = DE^2$. Así que

$$\frac{AD}{DE} = \frac{DE}{GD}$$

[54] *Ibid.*, pp. 206-207.

y como ∡ADE es un ángulo común para los triángulos ADE y EDG, aplicando el criterio lado-ángulo-lado de semejanza de triángulos, tenemos que

$$\Delta ADE \sim \Delta EDG$$

por lo que ∡DAE = ∡GED. De aquí se sigue que arc EB = arc ZH.

ix. De (vii) tenemos que arc AZ = arc EB. De (viii) se sigue que arc EB = arc ZH

$$\therefore \quad \text{arc AZ = arc EB = arc ZH}$$

x. ZB es paralela a AE, ya que por (vii) arc AZ = arc EB.
Como arc AZ = arc ZH entonces ∡GED = ∡DBT

xi. Recurrimos a los *Elementos*, Libro III, proposición 21, para establecer lo siguiente:

> Si hubiera dos triángulos con la misma base sobre el mismo lado (Fig. 49), y el ángulo opuesto a la base es igual en ambos triángulos, el círculo que pasa por los extremos de la base y el vértice de un triángulo pasará también por los vértices del otro triángulo.

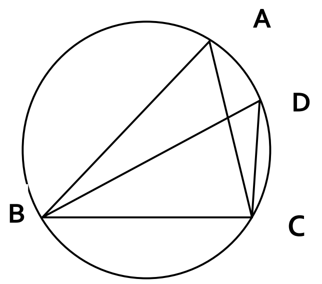


Fig. 49

Por (x) sabemos que ∡DBT = ∡GED; observamos también el ΔGBT y el ΔGET, y como ambos tienen por base al segmento GT entonces ∡GBT = ∡GET. Por el inverso de la proposición 21 tenemos que el círculo que pasa por los puntos G, B y T pasa también por los puntos G, E y T, de manera que los puntos B, E, G y T son concíclicos[55].

xii. $GB \cdot DB = AG^2$. Por (iii) resulta que $AG = GE, DB = DE$. Ahora, sabemos por (x) que ∡GED = ∡DBT y que ∡GDE = ∡TDB por ser opuestos por el vértice, y por construcción se sigue que $ED = DB$. Aplicando un criterio de semejanza de

[55] Por definición, los puntos B, E, G y T son concíclicos si pertenecen a una misma circunferencia, tales puntos forman un cuadrilátero cíclico caracterizado por la siguiente propiedad: un cuadrilátero es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.

triángulos obtenemos que ΔGDE ~ ΔTDB y entonces $GD = DT$ y $GE = TB$. Ahora tomamos:

$$GB = DB + GD = DE + DT = TE, \text{ entonces } GB = TE.$$

Retomando $AG = GE$ y $DB = DE$, como $GB \cdot DB = AG^2 = TE \cdot DE = GE^2$, de manera que

$$\frac{TE}{GE} = \frac{GE}{DE}$$

además, ∡GED es común para los triángulos TEG y GED, por lo que

$$\Delta TEG \sim \Delta GED$$
$$\therefore \quad ∡DGE = ∡ETG$$

xiii. ∡DGE = ∡GAE + ∡GEA = 2 ∡GAE y ∡GTD = ∡DBE

xiv. Lo anterior se sigue del inverso de la proposición 21, *Elementos*, Libro III, pues B, E, G, T son concíclicos; así,

∡DBE = ∡GTD = ∡GTE = ∡DGE = 2 ∡GAE, entonces

arc AE = 2 arc EB

xv. Como DB = DE, entonces ∡DBE = ∡DEB. Así que arc HB = arc AE = 2 arc EB

xvi. De esto se deduce que cada uno de los arcos AE y BH puede dividirse en dos mitades y por ello la circunferencia del círculo es 7 veces el arco EB.

xvii. Así, el círculo AEBHZ ha sido dividido en siete partes iguales.

CONSTRUCCIÓN DEL HEPTÁGONO REGULAR A TRAVÉS DE UNA NEUSIS

Ahora presentamos un procedimiento también basado en la neusis que genera las condiciones necesarias para la construcción del heptágono regular[56].

Asumimos que el heptágono ha sido inscrito en un círculo (Fig. 50) por lo que el lado BH es la cuerda de un arco que es la séptima parte del círculo, la diagonal AH es la cuerda del doble arco[57] HLA, y las diagonales AB, BZ, HE son cuerdas de arcos del triple

[56] Knorr, Wilbur, R., [1989], pp. 179-185.

[57] Por doble arco entendemos que HLA denota al arco HL y al arco LA.

de BH. Sea AB, HZ tales que se intersecan en C y HE, ZB que se intersecan en T, unimos CT.

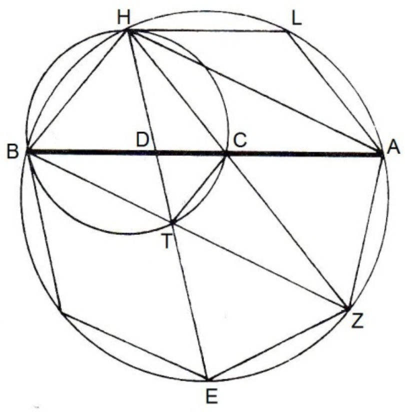


Fig. 50

En el triángulo DHB, los ángulos en H y B son iguales, ya que subtienden arcos iguales BE, HA; así las líneas HD y DB son iguales. En los triángulos HDC, BDT los ángulos en D son iguales (por ser opuestos por el vértice), mientras los ángulos en H y B son iguales, de manera que sus arcos asociados EZ, ZA son iguales, por lo que dichos triángulos son semejantes y por ello HD = DB, y son además congruentes. Por consiguiente, HC = TB y por lo tanto el cuadrilátero HBTC tiene sus lados iguales HC, TB, y también ángulos iguales en H y en B; éste puede ser entonces inscrito en un círculo. De esta manera se ve que los ángulos CTH, CBH son iguales (pues subtienden la misma cuerda CH). Ahora, el ángulo CBH es el doble del ángulo CAH, mientras que DCH es igual a la suma de CHA y CAH, que es dos veces CAH. Así, el ángulo CBH es igual a cada uno de los ángulos DCH y CTH. Esto hace que los triángulos CTH y DCH sean semejantes, por lo que $TH \cdot HD = HC^2$.

Dado que TH = CB, HD = DB y HC = CA, se tiene que (a) $CB \cdot BD = AC^2$, una relación que satisfacen los segmentos de recta de AB. Además, ya que ∡CHD y ∡DAH son ángulos iguales, los triángulos CHD y DAH son semejantes, así que $AD \cdot DC = DH^2$. Como HD = DB, de esto se sigue que (b) $AD \cdot DC = DB^2$, que es una segunda relación entre los segmentos de AB. Así, el problema de inscribir el heptágono se ha reducido a encontrar dos puntos C y D que dividan a la recta AB según las relaciones (a) y (b).

Este problema aparece resuelto en un lema anterior de Arquímedes. En dicho lema se muestra que si una recta CB es dada (Fig. 51), dibujando el cuadrado CBFG con diagonal BG, y la neusis de la línea AF es ejecutada de tal manera que los triángulos

KFG, LCA sean iguales en área, entonces los segmentos de BA satisfacerán las relaciones (a) y (b).

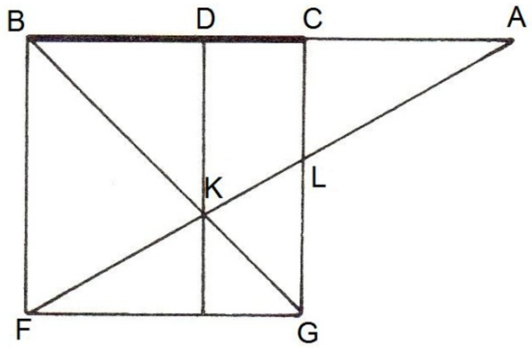


Fig. 51

Es posible describir el análisis que conducirá de estas relaciones a la condición de la neusis de manera razonablemente sencilla. Supongamos que la recta AB ha sido dividida en C y D (Fig. 52) para satisfacer (a) y (b). De acuerdo con (b), el cuadrado sobre DB será igual al rectángulo sobre AD, donde CD = DP.

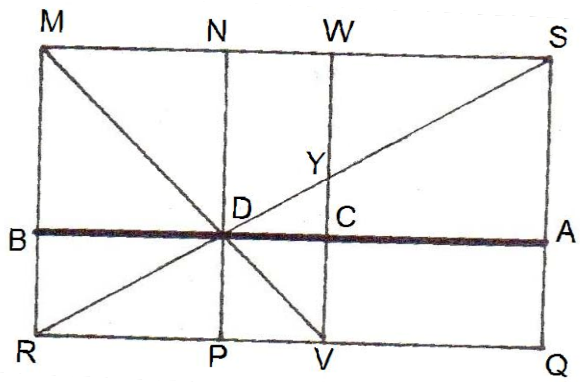


Fig. 52

Completamos el rectángulo MRQS cuya diagonal RS pasa a través de D (*Elementos* I, 43, inverso); extendiendo la diagonal del cuadrado MD para intersecarse con RQ en V, unimos VC (= CD) y extendemos ésta hasta intersecar a RS en Y y a MS en W. Dado que los triángulos YWS, DPR son semejantes, tenemos que:

YW : WS = DP : PR.

De (a) AC : CB = DB : AC, esto es, con referencia a los triángulos YWS y DVR obtenemos

WS : VR = PR : WS

así, componiendo[58] las proporciones, tenemos que

YW : VR = DP : WS.

Esto se sigue de que YW · WS = RV · DP, y por lo tanto los triángulos YWS y DRV son iguales. Si entonces tomamos RV como la línea dada, formamos su cuadrado, y maniobramos RS para cortar su diagonal en D, su lado VW en Y, y extendemos su lado MW hasta S, resulta que los triángulos YWS y DRV son iguales, y entonces se seguirá que los segmentos de AB satisfacerán (a) y (b). De esta manera se muestra que esta neusis lleva a la división de AB requerida para la inscripción del heptágono.

Consideremos ahora un heptágono regular inscrito en un círculo (Fig. 53).

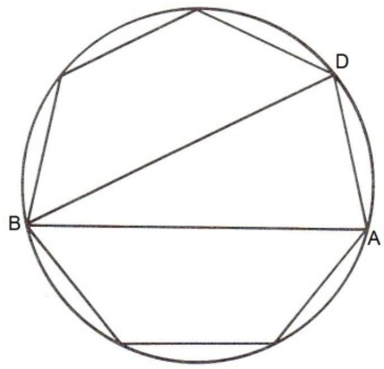


Fig. 53

Dibujamos las dos diagonales BD y BA, obtenemos el triángulo isósceles BAD en el que cada uno de los ángulos de la base es tres veces el ángulo del vértice. Como se puede apreciar ahora la construcción del heptágono se reduce a encontrar un triángulo de ángulos *a, 3a, 3a.* Entonces la construcción del heptágono regular está ligada con la trisección del ángulo, pues dado un ángulo α, si se logra su trisección se puede entonces generar el triángulo isósceles con ángulos α, α y $\frac{\alpha}{3}$ y obtener el triángulo ABD

[58] *Elementos V*, Proposición 17: Sean AB, BE, CD, DF magnitudes proporcionales a las que se les aplica la operación *componer,* esto es: AB : BE = CD : DF

de la Fig. 53, trazar la circunferencia que toca los tres vértices y repetir, sobre la circunferencia, los arcos de longitud AD. Con ello se genera el heptágono buscado.

En los trabajos de Arquímedes la construcción del heptágono se ha reducido a dividir una recta de acuerdo con dos condiciones. Como hemos visto, Arquímedes efectuó esta división a través de una neusis mediante la cual dos áreas triangulares deben ser iguales. Pero los geómetras árabes se negaron a admitir esta técnica[59], y por ello intentaron encontrar una alternativa aceptable, o recurrir a métodos euclidianos (de compás y regla) de ser posible, o bien a través de secciones cónicas. Abu´l-Jud pensó haber encontrado una solución del primer tipo, pero su "error" fue exponerlo a al-Sijzi. Este personaje, al-Sijzi, planteó el problema de la división de Abu´l-Jud a un colega, al-Ala ibn Sahl, quien elaboró un exitoso análisis de este planteamiento sirviéndose de cónicas. Una síntesis de esta misma solución existe en el texto de al-Sijzi sobre el heptágono[60]. Al mismo tiempo que presentó este problema a Ibn-Sahl, al-Sijzi planteó otro problema, que consistía en una forma más general de la neusis arquimediana para el heptágono. Pareciera que Ibn-Sahl había resuelto el problema de la división del ángulo, sin embargo insistía en realizar una construcción válida de la neusis que, ahora sabemos, era imposible de lograr. Siguiendo el modelo propuesto por al-Sijzi para resolver el problema de la división, podemos reconstruir el análisis de Ibn-Sahl de la siguiente manera, y en la que hay que resaltar el uso de la parábola y de la hipérbola[61]:

Sea dada la recta AB dividida en G (Fig. 54) de tal modo que para la línea de magnitud X, donde

$$\text{(i) } AB : X = X : BG \qquad \text{resulte que} \qquad \text{(ii) } X : AG = AB : AB + AG.$$

[59] Knorr, Wilbur, R., [1989], p. 182.
[60] Hogendijk, *op. cit.,* pp. 130-158: texto árabe con traducciones y notas.
[61] Knorr, Wilbur, R., [1989], p. 183.

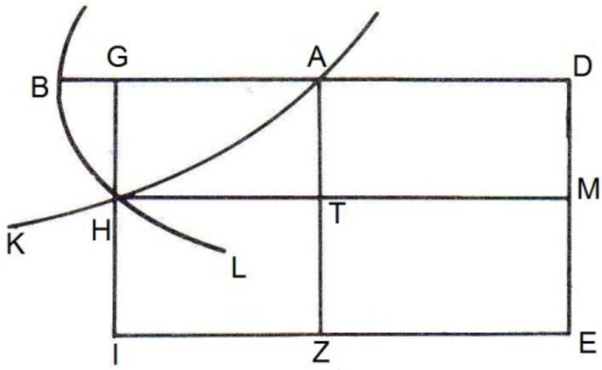


Fig. 54

Si colocamos GH = X, perpendicular a BA, entonces $GH^2 = AB \cdot BG$, donde H permanecerá sobre la parábola de eje BA, vértice B y parámetro AB. Si extendemos BA a D de manera que DA = AB y dibujamos la perpendicular a BA, la línea AZ = AB, y completamos el rectángulo GAZI, se sigue de (ii) que GAZI es igual al rectángulo DGHM.

Los rectángulos AM, HZ son iguales, de donde resulta que después de agregar MZ a cada uno, los rectángulos ADEZ, HMEI también son iguales. El punto H permanecerá sobre la hipérbola que pasa a través de A, teniendo a DE y a EZ prolongadas como asíntotas. De esta manera el punto H queda establecido como la intersección de una parábola dada y una hipérbola también dada, con lo que el análisis del problema ha sido llevado a cabo.

Una condición de la forma (i) supone la presentación de una parábola, mientras que la otra forma (ii) recurre a una hipérbola. Los geómetras árabes continuaron buscando nuevas soluciones para el problema de la construcción de un heptágono regular, aún después del exitoso esfuerzo de Ibn-Sahl y de al-Sijzi. En cada caso la división de la recta (por ejemplo AB en la figura 55) es efectuada mediante la intersección de secciones cónicas.

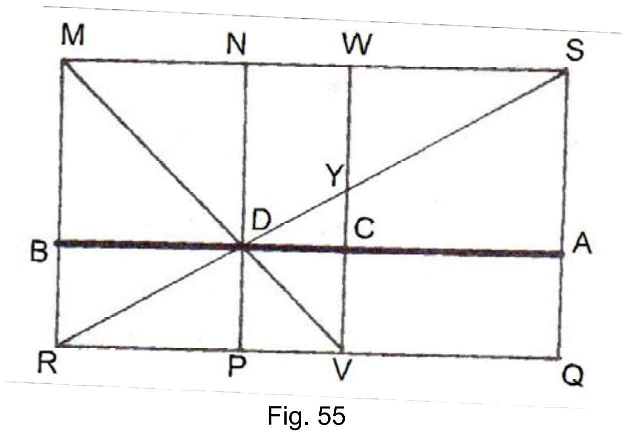


Fig. 55

Consideremos ahora la construcción dada por Alhazen (ibn al-Haytham) y en la que también recurre a una parábola y a una hipérbola[62]:

Dividimos la recta AB en C y D tal que (a) $CB \cdot BD = AC^2$ y (b) $AD \cdot DC = DB^2$. Suponemos que las líneas han sido divididas de esta manera, y consideramos el segmento BD como dado (Fig. 56).

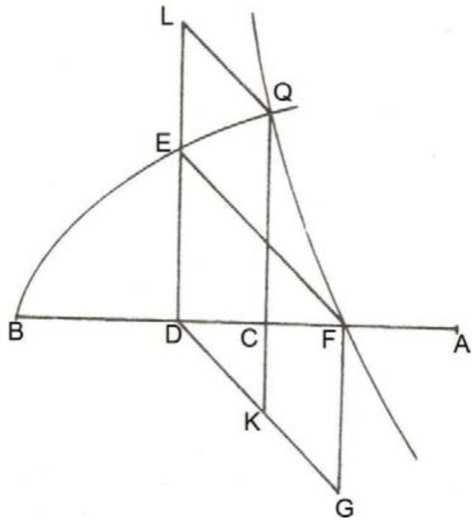


Fig. 56

Si trazamos QC = AC perpendicular a AB en C, entonces (a) determina Q permaneciendo sobre la parábola con vértice B, eje BA y lado recto BD. En D la ordenada ED es igual a BD. Hacemos DF = DE y completamos el paralelogramo DEFG. Extendemos QC para intersecar DG en K y completar el paralelogramo QKDL. Así, DF = FG, DC = CK; además AC = CQ, y tenemos que AD = QK.

[62] *Ibid.*, p.184.

De (b) se sigue que QK · DC = ED · DF, esto es, los paralelogramos DEFG y QKDL son iguales. Así, Q está sobre la hipérbola que pasa a través de F y que tiene a DG y a DL prolongadas como sus asíntotas. Bajo la suposición de que BD está dada, entonces ambas, la parábola y la hipérbola, están dadas, de donde Q queda determinado como su intersección. Para realizar la síntesis donde BA es la línea dada, digamos □, uno simplemente divide □ en segmentos similares a los encontrados en el caso en el que BD está dada.

Para el caso del heptágono la neusis es utilizada para producir una división de la recta en respuesta a (a) y a (b). La alternativa de construcción a través de las cónicas recurre precisamente a lo mismo. No es la neusis por sí misma lo que uno requiere, sino la división de la recta. De hecho, el procedimiento que apela a las cónicas volvería a la neusis completamente innecesaria para encontrar la solución. Arquímedes eligió la neusis como su camino para resolver este problema, pero indudablemente hubiera podido producir un método a través de cónicas. Sin embargo su preferencia por la neusis revela que este camino fue para él un medio de construcción totalmente aceptable y correcto.

EL TRABAJO CONJUNTO DE AL-SHANNI E IBN SAHL

Ahora recurrimos a la síntesis realizada por al-Shanni sobre las bases del análisis de Ibn Sahl[63].

Sea ABCD un paralelogramo con diagonal BC; dibujamos una línea recta pasando a través de D y cortando a BC en G, AC en E, y AB en L, tal que:

$$\frac{Area\ \Delta CGE}{Area\ \Delta EAL} = k$$

los ángulos $GCE = Z$ y $EAL = O'$ son conocidos, mostramos que las proporciones

$$\frac{Area\ \Delta CGE}{CG \cdot CE} \quad \text{y} \quad \frac{Area\ \Delta AEL}{AE \cdot AL}$$

[63] Rashed, [2005], pp. 324-327.

son conocidas[64], y consecutivamente que la proporción $\frac{CG \cdot CE}{AE \cdot AL} \dots (1)$ es también conocida.

Escribiremos esta proporción como $\frac{R}{X}$. El problema es encontrar la línea recta DGEL tal que (1) sea igual a $\frac{R}{X}$, donde R y X son segmentos dados.

Primer Caso: $\measuredangle$ABC $\geq \frac{\pi}{2}$

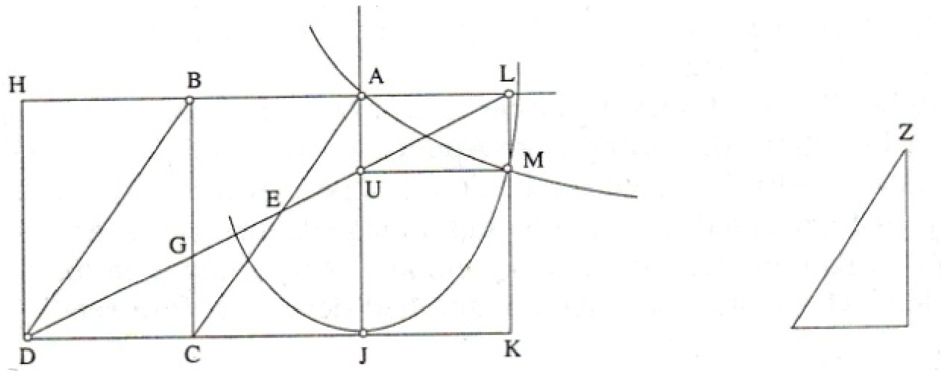


Fig. 57

Sean J y H sobre DC y AB, respectivamente, y hágase además que AJ||BC||DH. Por lo tanto tenemos

$$CJ = AB = CD = BH$$

consideramos la parábola $\mathscr{P}$, la cual pasa a través de J, con lado recto Q tal que $\frac{Q}{CD} = \frac{X}{W}$, con $W = 2R$, tangente en J a DC, y con diámetro AJ. (Si $\measuredangle$ABC = $\frac{\pi}{2}$, J es su vértice y AJ es el eje principal). Además consideramos la hipérbola $\mathscr{H}$ pasando a través de A siendo DJ y DH asíntotas. Esas cónicas necesariamente se intersecan en dos puntos, uno de los cuales, al que llamamos M, que la vertical que pasa por él corta a AB en L y a CD en K. La línea recta DL es la línea recta que buscábamos.

Sean G, E y U puntos donde DL interseca a BC, CA y JA; tenemos:

$$MK \cdot KD = AJ \cdot JD = KL \cdot JD \quad \text{con M} \in \mathscr{H}$$

[64] Ver Rashed, [2005], p. 454, lema 9.

de donde

$$\frac{MK}{KL} = \frac{DJ}{DK}$$

ya que KL||JU entonces $\frac{DJ}{DK} = \frac{JU}{KL}$. De aquí deducimos que y, consecuentemente, que MU||AL y $MU = AL$.

Más aún, para M ∈ $\mathscr{P}$ sucede que

$$MU^2 = Q \cdot JU$$

así, obtenemos que

$$\frac{Q}{CD} = \frac{Q \cdot JU}{CD \cdot JU} = \frac{MU^2}{CD \cdot JU} = \frac{AL^2}{CD \cdot JU} = \frac{X}{W}$$

pero

$$\frac{JU}{CG} = \frac{JD}{CD} = 2 = \frac{W}{R}$$

por lo que

$$JU = CG \cdot \frac{W}{R}$$

y consecuentemente

$$\frac{CD \cdot CG}{AL^2} = \frac{R}{X} \; \ldots (1)$$

ahora

$$\frac{CD}{AL} = \frac{CE}{EA}$$

así que la igualdad (1) puede reescribirse como

$$\frac{CE \cdot CG}{EA \cdot AL} = \frac{R}{X}$$

y la línea recta DL satisface el problema.

Segundo caso: ∡ABC $< \frac{\pi}{2}$

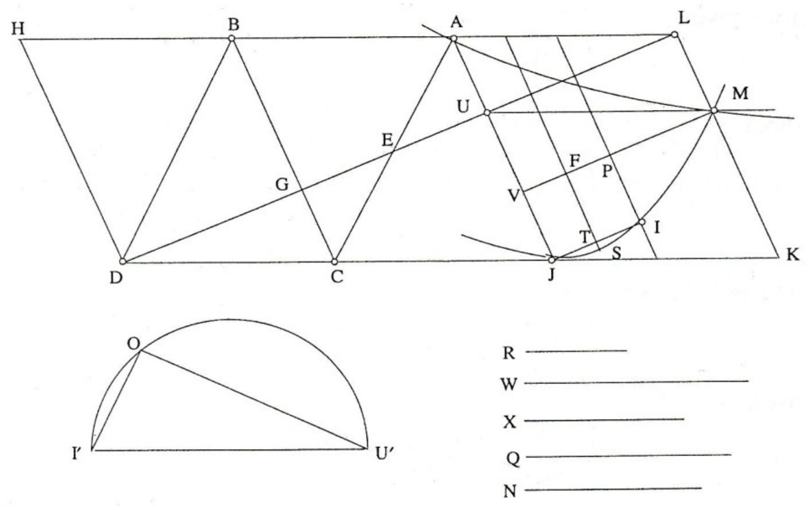


Fig. 58

Sea Q definido como en el caso anterior, sea un semicírculo de diámetro I´U´ y la cuerda I´O tal que ∡U´I´O = ∡ABC. Un segmento N y un segmento JI, perpendicular a JA, son definidos respectivamente por

$$\frac{Q}{N} = \frac{U'I'^2}{U'O^2} \quad \text{y} \quad \frac{JI}{N} = \frac{I'O}{U'O}$$

sea T el punto medio de JI, y S un punto definido por TS||AJ y $\frac{JT}{TS} = \frac{N}{JT}$

consideramos la parábola $\mathscr{P}_1$ con vértice S, eje TS, y lado recto N; éste pasa a través de I y J, por lo que

$$JT^2 = TI^2 = N \cdot TS$$

la hipérbola $\mathscr{H}$ que pasa a través de A y tiene a las líneas rectas DJ y DH como asíntotas necesariamente corta a $\mathscr{P}_1$ en dos puntos, uno de los cuales está sobre el ángulo AJK; llamemos a este punto M. La paralela a BC, la cual pasa a través de M, corta a AB en L y a CD en K. La línea recta DL, la cual corta a BC en G, a AC en E y a AJ en U, es la línea recta que estábamos buscando.

Como en el caso antes mencionado, mostramos que $ML = AU$ y MU||AL. Desde M, dibujamos la perpendicular MF a ST; MF corta a AJ en V. Sea P tal que F es el punto medio de VP. Así resulta que

$$N \cdot SF = MF^2 \qquad \text{para } M \in \mathscr{P}_1$$

además,

$$MF = MP + PF$$

por lo tanto

$$MF^2 = MP^2 + PF^2 + 2MP \cdot PF$$

pero

$$PF^2 = TI^2 = N \cdot TS$$

así tenemos que

$$N \cdot TF = N \cdot JV = 2MP \cdot PF + MP^2 = MP \cdot MV \quad (1)$$

recordemos que $\frac{JI}{N} = \frac{I'O}{U'O}$, pero $JI = PV$ y $\frac{I'O}{U'O} = \frac{UV}{MV}$; por triángulos semejantes, obtenemos que

$$\frac{PV}{N} = \frac{UV}{MV}$$

por consiguiente

$$N \cdot UV = PV \cdot MV \quad (2)$$

de (1) y (2) obtenemos

$$N \cdot JU = MV^2 \quad (3)$$

además, debido a los triángulos semejantes que corresponden a los puntos en cuestión resulta que

$$\frac{Q}{N} = \frac{U'I'^2}{U'O^2} \text{ y } \frac{U'I'}{U'O} = \frac{UM}{MV}$$

por lo tanto

$$\frac{Q \cdot JU}{N \cdot JU} = \frac{UM^2}{MV^2} \quad (4)$$

de (3) y (4) deducimos que

$$Q \cdot JU = UM^2$$

tal relación nos lleva al caso anterior, y el razonamiento concluye de la misma manera.

IV. CURVAS TRASCENDENTALES Y CONSTRUCCIONES NO EUCLIDIANAS

LA CONCOIDE

Nicomedes, un matemático de renombre en la antigüedad hizo, importantes contribuciones a la solución de los tres problemas clásicos. Conocemos parte de sus aportaciones porque Pappus y Eutocio reprodujeron fragmentos ampliados del libro *Sobre las líneas concoides,* atribuido a Nicomedes, donde varias formas de la curva concoide son generadas y después aplicadas a la duplicación del cubo. Es de suponer que el mismo trabajo mostraba cómo esta solución podía ser usada para también obtener la trisección del ángulo. Por Pappus sabemos que Nicomedes introdujo la cuadratriz para los propósitos de la cuadratura del círculo; de hecho, algunas fuentes [65] afirman que Nicomedes fue el responsable de dar el nombre a dicha curva, basado en su aplicación.

Los fragmentos que Pappus y Eutocio presentaron del libro de Nicomedes muestran en primera instancia un interés por la aplicación de la concoide en la duplicación del cubo. Aunque la curva (en su "primera" forma) se describe primero con referencia al instrumento mediante el cual es trazada, la exposición a partir de entonces se desarrolla de manera completamente geométrica, bajo el formalismo habitual.

En su forma básica la concoide se construye como el lugar de puntos que dista una distancia fija de una línea dada, ajustada en la dirección de un punto fijo. El instrumento para trazarla consiste de una barra de longitud fija EK (la "distancia") (Fig. 59) que es movida de manera tal que un perno fijo en E puede deslizarse a lo largo de una ranura en una regleta dada AB, mientras que la extensión de EK queda libre para deslizarse sobre un eje fijo colocado en el punto D (el "polo").

---

[65] Iamblico, citado por Simplicio, *In Aristotelis Physica,* ed. Diels, I, p. 60, Pappus, *Colección (IV), I*, p. 252, Proclo, *In Euclidem,* p. 272.

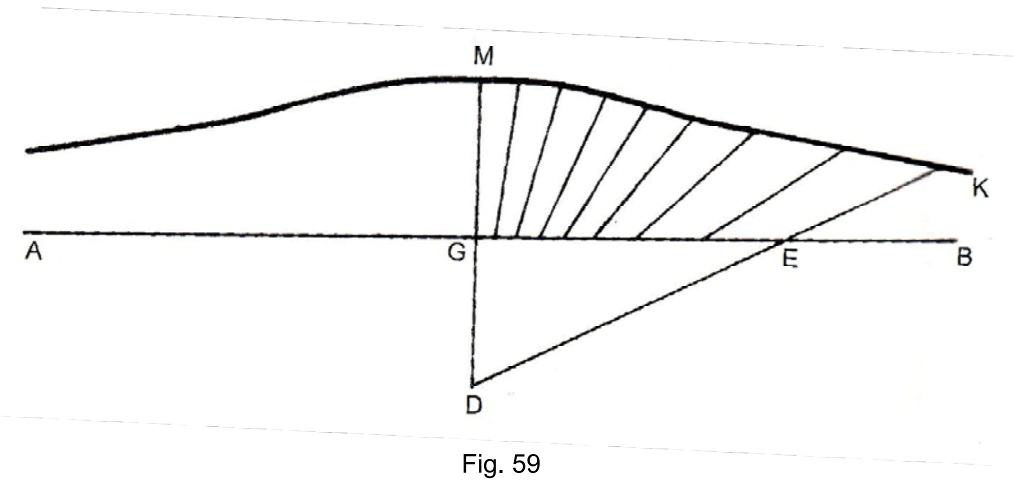


Fig. 59

Así, K se mueve a lo largo de una curva tal que KE, su distancia a la línea dada AB, es constante, mientras que KE siempre está apuntando hacia D. Esta curva es conocida como “*la primera concoide”.* Pappus planteaba que se podían construir otras tres formas de concoide, y uno puede rápidamente inferir cuáles debieron ser éstas. “*La primera concoide”* ya ha sido obtenida marcando la “distancia” fija sobre el lado de la regla que se aleja desde el “polo”. Pero si nosotros marcamos esto en dirección opuesta, es decir, hacia el “*polo”*, obtendremos tres diferentes formas de curva, de acuerdo a si la “*distancia”* es menor, igual o mayor que la distancia del “*polo*” a la “*regla*”. (Fig. 60).

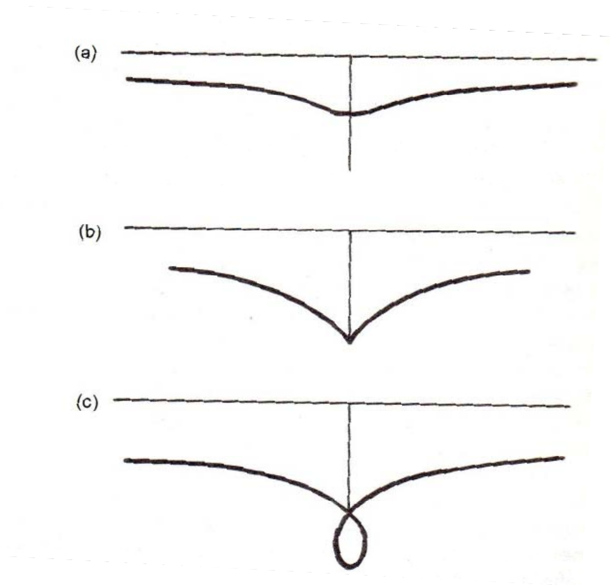


Fig. 60

La primera de éstas (a) se parece a la primera concoide en que la curva crece suavemente en dirección del *“polo”,* sin alcanzarlo, y entonces se mueve de regreso asintóticamente hacia la "*regla*". La segunda forma (b) tiene una cúspide en el *"polo",* mientras que la tercera (c) forma un rizo que pasa por el "*polo"*. Al igual que las otras formas de la concoide, ésta tiende asintóticamente hacia la *"regla".* Ya que Pappus no aclara cuál forma es la "segunda", ni la "tercera" o la "cuarta" concoide, hemos designado los casos anteriores como "concoides secundarias de la forma (a), (b) o (c)"[66].

Es evidente que las concoides son simplemente una elaboración del procedimiento de la neusis, así que algún problema resuelto por medio de la intersección de una longitud dada entre una línea dada y una segunda curva dada, de manera que pasa a través de un punto dado, puede resolverse alternativamente por medio de la concoide apropiada. Pappus y Proclo afirmaron que Nicomedes resolvió la trisección del ángulo recurriendo a la concoide, por lo que podemos concluir que la forma descrita por Pappus, y sin duda también las formas alternativas (ahora sólo existentes en la versión en árabe) del texto de Pappus, fueron obtenidas en el transcurso del estudio de Nicomedes de esta curva.

Desde los trabajos de Nicomedes con las concoides se hace patente el conocimiento de que a través de construcciones basadas en la neusis de Arquímedes se puede trisecar el ángulo. Podemos además suponer que Nicomedes aprendió del método heroniano de la duplicación del cubo gracias a fuentes arquimedianas. Así, podemos considerar esto como un apoyo importante a los argumentos previos que asignan un origen arquimediano a este método.

La influencia de Arquímedes sobre el trabajo de Nicomedes se percibe, además, en el uso que éste hace de la cuadratriz para efectuar la cuadratura del círculo; esta curva, al igual que la espiral arquimediana, es generada a través de la composición de dos movimientos, uno lineal y el otro circular.

LA CISOIDE

De un trabajo de Diocles *Sobre Espejos Ardientes,* Eutocio extrajo dos largos fragmentos, ninguno ocupándose de los espejos ardientes, uno centrado en el método de la duplicación del cubo, mientras que el otro atendía a una solución alternativa al problema de Arquímedes de la división de la esfera. El trabajo completo no llegó a

[66] Knorr, Wilbur, R., [1989], pp. 219-221.

nuestros días en griego, y sólo se conoce gracias a una traducción al árabe. Esta versión podría representar el trabajo tal y como lo conoció Eutocio.

En la proposición 10 de este texto, Diocles se enfoca en la duplicación del cubo, mostrando cómo puede ser resuelto este problema por medio de la intersección de dos parábolas. Dado que éste es precisamente el mismo método de dos parábolas que Eutocio presenta como una construcción alternativa siguiendo el método de la parábola-hipérbola asignado a Menecmo, no podemos inferir que la introducción de Diocles de las dos parábolas debe negar su origen en los trabajos de Menecmo. Sólo como una ocurrencia tardía, al final de la construcción, se hace el comentario de que estas curvas son en realidad parábolas. Así, parecería que el intento de Diocles no está ofreciendo una nueva solución al problema, y sólo provee otro ejemplo de su método para trazar parábolas.

De cualquier manera, parece haber una cierta originalidad en la construcción[67] de Diocles, y esto se hace evidente no sólo en esta primera forma de la duplicación del cubo, modelada sobre la de Menecmo, sino además en el caso de la segunda, desarrollada en sus proposiciones 11-16 [68]; aunque la última proposición es aparentemente una contribución original, esto también puede ser visto como una variación de un método anterior, a saber, el que Eutocio atribuye a Platón. Consideremos la figura 61, utilizada en la versión más moderna, misma que se refiere a tres triángulos rectángulos semejantes tales que los lados □H y HG son líneas dadas.

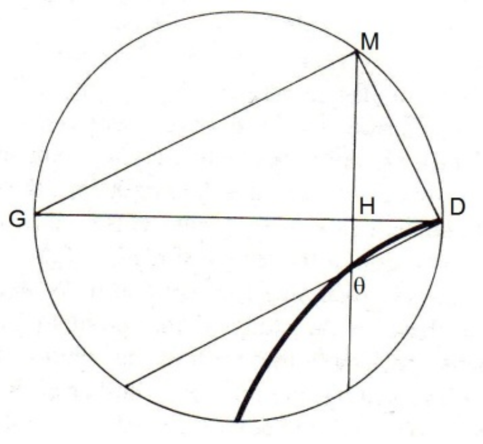


Fig. 61

[67] Ibid., pp. 223-245.
[68] Esta enumeración corresponde a la presentada por Toomer [1976].

Un instrumento es manipulado teniendo a □ y a G como puntos fijos, D se mantiene sobre la línea GH extendida, y los ángulos en D y en M son ángulos rectos; cuando M corta la línea □H extendida, la construcción será obtenida. Ahora las condiciones sobre los dos ángulos rectos pueden ser garantizadas alternativamente manteniendo D y M sobre la circunferencia del círculo de diámetro GD, donde GD es tomado como una línea fija. Entonces □ será la intersección de dos líneas, la perpendicular a MD en D y la perpendicular a GD que pasa por M. Como M varía, □ trazará una curva, y la proporción □H : HG decrecerá continuamente, tomando cada valor desde 1 : 1 hasta valores arbitrariamente pequeños, pues M pasa de la posición donde bisecta al arco GD a lo largo del arco hacia D. En toda posición, DH y HM serán las dos medias proporcionales entre □H, HG. En función de esto, para encontrar las medias X, Y entre las líneas dadas S, T, sólo necesitamos encontrar el punto □ sobre esta curva tal que □H : HG = S : T (considerando que T es la línea más grande), y entonces se construyen dos líneas X, Y a través de las proporciones X : DH = Y : HM = T : HG (Fig. 62).

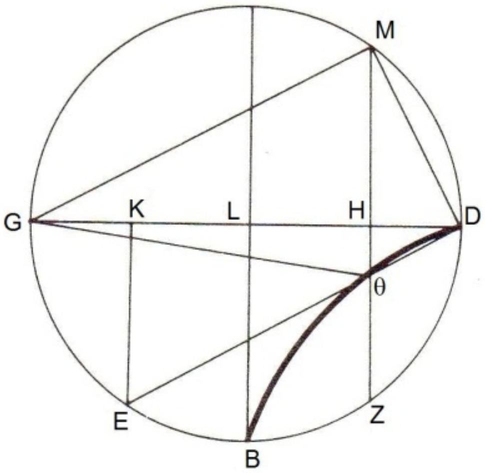


Fig. 62

La curva usada aquí es idéntica a la introducida por Diocles. Él la construye dividiendo el círculo dado ADBG en cuadrantes, marcando pares de arcos iguales, tales como DZ, GE, en el semicírculo inferior.

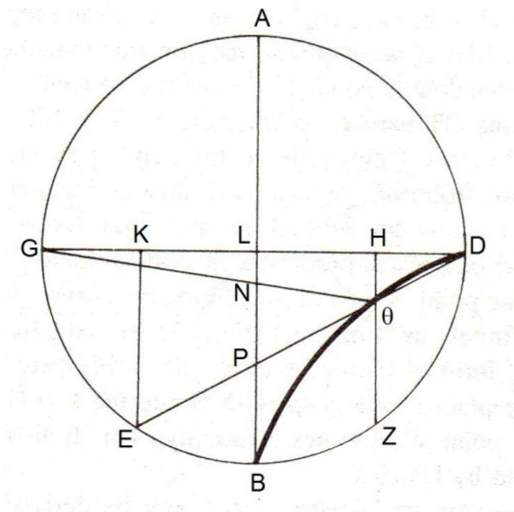


Fig. 63

Sucede entonces que la intersección □ de la vertical ZH con la cuerda DE define un punto sobre la curva. Diocles establece que, para tales puntos, las líneas DH y HZ son las dos medias proporcionales entre □H y HG. Entonces, de las líneas dadas S, T, se tiene que NL : LG = S : T, y acto seguido extendemos GN hasta intersecar la curva en □. Las dos medias proporcionales pueden entonces ser encontradas a través de la proporcionalidad continua de □H, HD, ZH, HG, tal y como se hizo previamente.

Algunas variantes de la construcción de Diocles aparecen en los comentarios de Sporus y de Pappus. Ambas siguen el procedimiento a través de una neusis. Para hacerlo toman una cuerda desde D que corta a la línea dada GN extendida en □ y tal que interseca a □E y es bisectada por LB.

Una relación interesante entre las curvas producidas a través del método pseudo-platónico y del de Diocles sugiere una ruta alternativa por la que Diocles pudiera haber generado su propuesta. Pero regresemos al método pseudo-platónico y consideremos los puntos D y R como fijos (Fig. 64) y a la línea DR como la hipotenusa del triángulo rectángulo DSR.

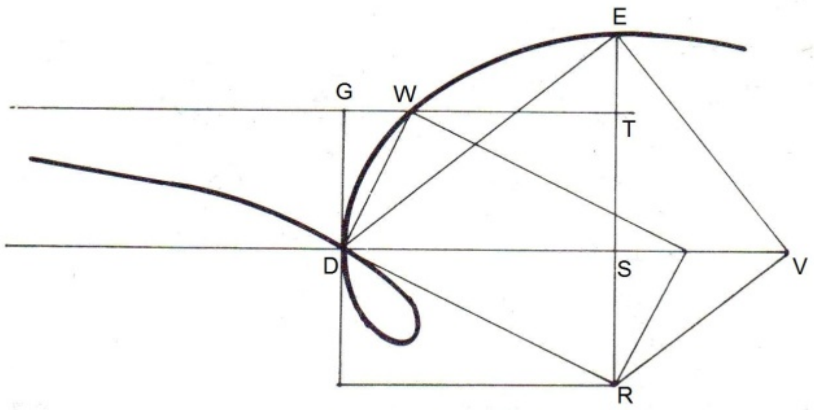


Fig. 64

Si introducimos una línea arbitraria a través de R que intersecte a DS prolongada en V, dibujamos por D la línea paralela a RV, y marcamos como E el punto donde esta línea interseca a la línea perpendicular a RV en V, entonces E traza una curva ya que el rayo inicial está hecho para rotar sobre R. El nombre "ophiuride" fue utilizado para estas curvas en el siglo XIX[69].

En el texto *The Ancient Tradition of Geometric Problems* Knorr analiza estas curvas y propone la aseveración de que la concoide fue generada por Eudoxo para resolver la duplicación del cubo, ya que su intersección con RS prolongada produce las dos longitudes VS y SE como medias proporcionales entre las líneas dadas RS y SD. Si continuamos la generación de la curva ésta formará un lazo por el punto doble en D, ascendiente, para luego tender asintóticamente hacia abajo y en dirección de la línea GT paralela a DS, donde TS = SR. Sobre el otro lado de D, la curva intersecará a GT a lo largo del rayo que pasa por D, perpendicular a DR, e incrementará su separación desde GT, alcanzando un máximo, y luego tiende asintóticamente regresando hacia éste. Si consideramos a TR como una longitud fija, pero permitiendo que SD disminuya, cada valor de DS producirá una curva cualitativamente similar a la que se describió, donde el punto W de intersección de la curva y la línea GT tenderá hacia afuera indefinidamente tanto como S se aproxime a D (Fig. 65 y 66).

[69] Knorr defiende que esta curva ya había sido usada por Eudoxo para duplicar el cubo. La palabra ophiuride se compone de tres raíces griegas: *ophis, oura* y *eidos,* que juntas significarían "como cola de serpiente". Ver Knorr [1986], p. 286 nota 107.

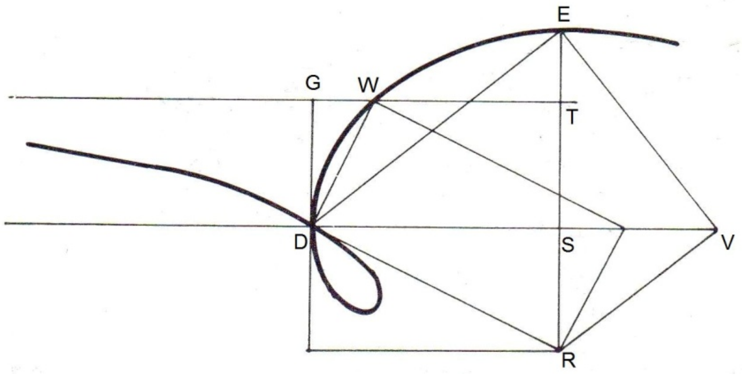


Fig. 65

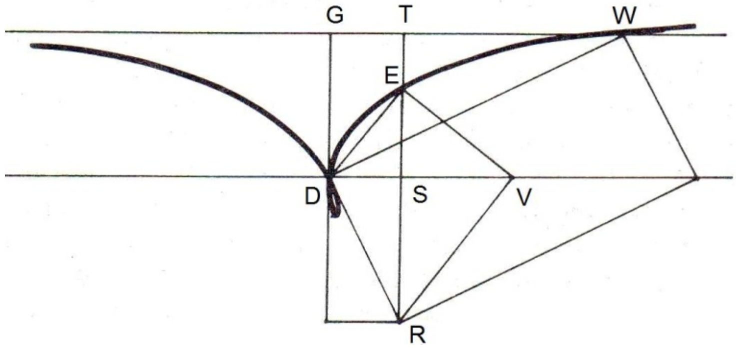


Fig. 66

En el caso límite, sin embargo, la forma de la curva se altera drásticamente (Fig. 67).

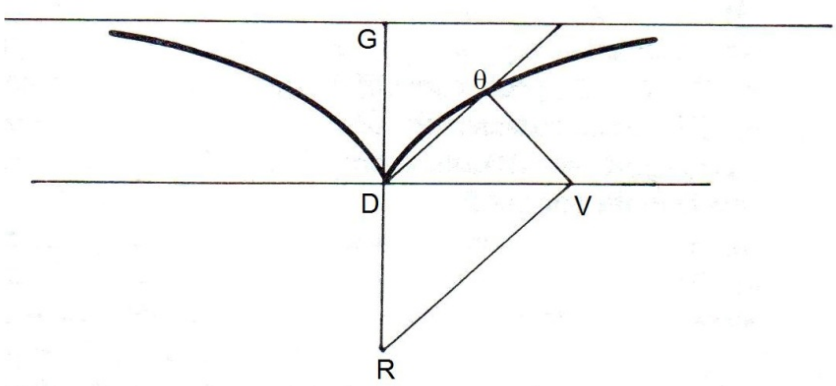


Fig. 67

El lazo desaparece, siendo reemplazado por un vértice en D, y mientras la línea GT llega a ser una verdadera asíntota, el punto W ahora está en el infinito. Esta curva es en realidad la misma curva usada por Diocles.

La propiedad que define a la curva de Diocles puede ser deducida de la siguiente manera: (Fig. 68 y 69)

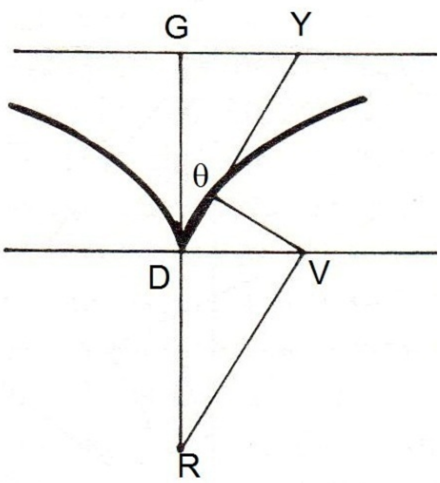


Fig. 68

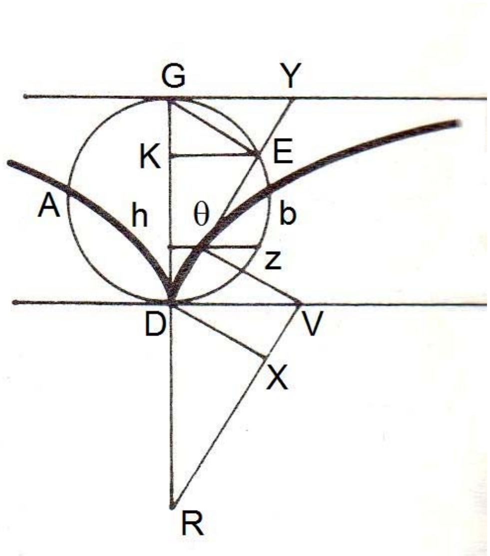


Fig. 69

algún punto □ sobre ésta es encontrado como la intersección de D□ y de □V, donde D□ es paralela al rayo arbitrario RV, V permanece sobre la línea que pasa por D, perpendicular a DR, y □V es perpendicular a RV en V. Extendemos RD a G de tal manera que RD = DG. Dibujamos el círculo de diámetro GD, extendemos D□ hasta intersecar el círculo en E, dibujamos las líneas EK y □H perpendiculares a GD, extendemos H□ hasta intersecar el círculo en Z, y unimos GE. Ya que el ángulo GED es recto, GE es paralela a □V. Dibujamos la línea perpendicular a DG en G y extendemos DE hasta intersecarla en Y. Acto seguido dibujamos DX paralela a □V. Como los triángulos GYD y DVR son congruentes, DY = RV; como también los triángulos GED y DXR son congruentes, DE = RX. Así, XV = YE. Además, XV = D□ y tenemos que YE = □D. Se sigue además que GK = HD, así que los arcos GE y ZD son iguales. Así, □ es encontrada como la intersección de DE y HZ asociada con los arcos iguales GE, ZD, como Diocles lo requirió para la construcción de esta curva. Una revisión de los triángulos semejantes establece que DH (=GK) y HZ (=KE) son las dos medias proporcionales entre □H y HG (=KD). Ésta pudo haber sido la forma en que Diocles presentó una estrategia para llevar a cabo la duplicación del cubo.

La construcción alternativa hace evidente una propiedad interesante de la curva de Diocles: que ésta es la curva que hace las veces de apoyo de la parábola con referencia a su vértice. Específicamente, si uno considera la parábola de vértice D, eje DR y lado recto igual a 2GR = 4RD, entonces el punto □, el cual es el pie de la perpendicular desde D a la tangente PT (Fig. 70), estará sobre la curva auxiliar[70].

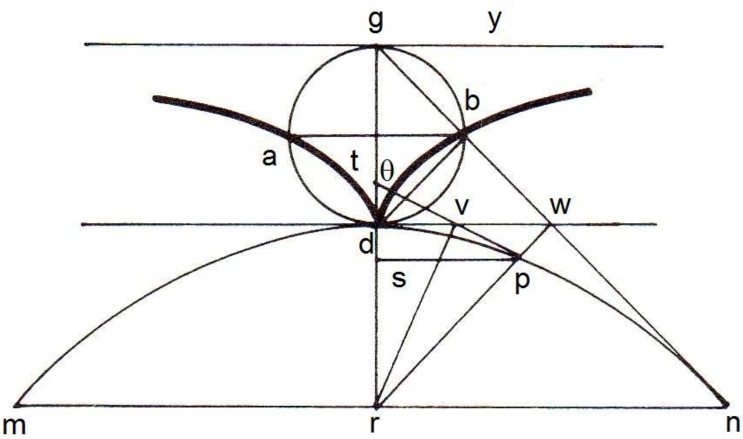


Fig. 70

Para ver que ésta corresponde a la curva de Diocles, uno introduce las perpendiculares a los ejes en D y G y dibuja el círculo de diámetro DG. Ya que PT es tangente, la abscisa SD es igual a la subtangente DT, así que PV = VT. De esto se sigue que RV es perpendicular a PT. Así, □ es la intersección de las líneas perpendiculares D□ y □V, donde V permanece sobre la línea dada y D□ y RV son paralelas proviniendo de los puntos dados D, R; esto es, □ permanece sobre la curva de Diocles, tal como se construyó en la manera alternativa.

Aunque nuestras fuentes no indican hasta qué punto Diocles examinó las propiedades de su curva más allá del papel que desempeñaron para la duplicación del cubo, el precedente del estudio de Nicomedes de las concoides, y el estudio de Arquímedes de las espirales, sugieren que continuó esta línea de investigación. Por supuesto, no podemos conocer, a partir de la evidencia existente, qué otras propiedades fueron descubiertas o establecidas por Diocles, pero una característica importante de la curva podría haber sido soslayada: que su extensión más allá del cuadrante DB continua indefinidamente hacia la línea GY como asíntota. Uno sólo necesita continuar la secuencia de cuerdas y verticales en la manera obvia, para que los puntos □´ sean encontrados a través de la intersección de las prolongaciones de KE y DZ (Fig. 71).

[70]También conocida como curva pedal, pues es la curva que trazará el centro de la circunferencia al desplazarse horizontalmente.

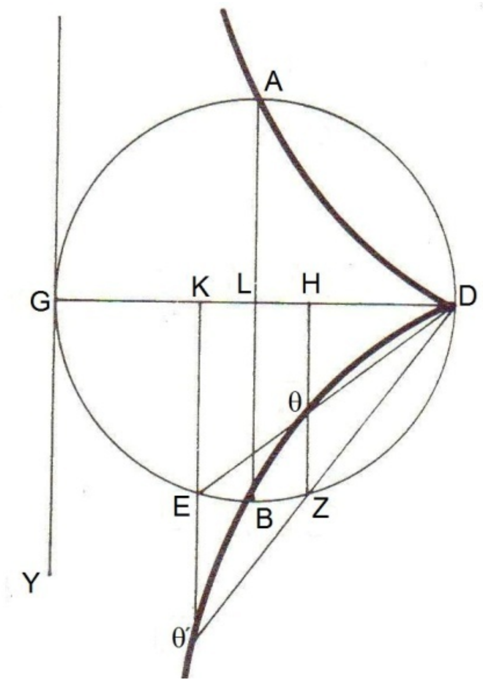


Fig. 71

En la teoría moderna de curvas algebraicas, uno define la curva de Diocles a través de la condición D□ = EY(como en la figura 69), una propiedad que surge durante el análisis basado en la construcción pseudo-platónica. La forma moderna es fácilmente extendida a una familia de curvas donde cada una es especificada por la condición de que el radio vector dibujado desde un punto fijo dado (polo) a cualquier punto sobre la curva es igual en longitud a la longitud a lo largo del radio vector extendido intersectado entre dos curvas dadas. Para la curva de Diocles, el polo está en D y las curvas son el círculo y la tangente en G. Pero otras elecciones de líneas o círculos producirán nuevas curvas, gracias a las cuales, por ejemplo, construcciones alternativas de la neusis arquimediana podrían ser dadas. Ambas, la curva de Diocles y la familia definida por su construcción, son ahora llamadas “cisoides”.

CONCLUSIONES

La fuente principal y original de las construcciones presentadas en esta tesis son las compilaciones que sobre la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y otros problemas afines a los anteriores realizaron Eutocio y Pappus. Podemos además detectar serios esfuerzos encaminados hacia la aplicación de la geometría en campos como la astronomía, la geografía, la óptica y la mecánica, y un interés notable por explorar el uso de métodos mecánicos en la geometría. Asumiendo esto, podemos admitir que, con el paso del tiempo, y dada la incapacidad que parecían exhibir los matemáticos que hasta el siglo XIX intentaban resolver estos problemas bajo las restricciones impuestas por la geometría euclidiana, los tres problemas clásicos constituyen el sello de este periodo.

Y tan fue así que todavía a fines del siglo XV la cuadratura del círculo obsesionaba a gente como Leonardo, y que para fines del XVI era la búsqueda de dos medias proporcionales la que despertaba mayor interés. Había dos razones que justificaban esta preferencia. La primera fue que el texto con las 12 diferentes construcciones de dos medias proporcionales que Eutocio había incluido en su comentario a *La Esfera y el Cilindro* de Arquímedes estaba ya impreso y disponible en esa época. La segunda fue que los matemáticos del XVI aprendieron y redescubrieron que muchos problemas que aún no tenían solución mediante líneas rectas y círculos podían reducirse al problema de encontrar dos medias proporcionales, y aunado a ello ahora tenían a su disposición nueva herramienta matemática, como el aún en construcción método algebraico de Cardano, Viète y sus sucesores.

Uno de los elementos clave de lo que ocurrió en el siglo XVI fue la traducción de Commandino al latín de *La Colección* de Pappus, la cual llegó a estar disponible, en su versión impresa, en 1588. El texto de Pappus proporcionó guías y opiniones bien definidas acerca del objetivo y las reglas de solución de problemas geométricos, además de proporcionar muchos ejemplos de construcciones e información interesante acerca de métodos analíticos para encontrar la solución de problemas.

Después de 1590, en gran parte bajo la influencia del texto de Pappus, las soluciones de los problemas geométricos llegan a ser reconocibles como un subcampo de la geometría bien definido, aunque con una compartida incomprensión de sus primeros objetivos y métodos principales. Y aunque al principio no había una opinión común sobre la legitimidad de los medios de construcción, más allá de los que recurrían exclusivamente a líneas rectas y círculos, la discusión sobre este tema fue más clara y objetiva que las que se habían presentado antes. Tres temas fueron de particular importancia en este proceso de esclarecimiento: la clasificación que hace Pappus de los problemas, el uso de curvas en las construcciones y la aplicación de la neusis.

De la *Colección* de Pappus los matemáticos aprendieron que la trisección del ángulo podía ser efectuada mediante la neusis, y la construcción de Nicomedes de dos medias proporcionales mostró que este problema podía también reducirse a una neusis. Al igual que en el caso de los problemas sólidos, en la manera de generar la neusis se incurre en un proceso que no está avalado por la geometría contenida en los *Elementos*.

Un elemento que resulta importante destacar es la profunda influencia de Arquímedes. La adopción por parte de Nicomedes y de Diocles de los medios mecánicos en geometría -por ejemplo, el uso de curvas generadas por movimiento, tales como la cuadratriz, la concoide o la aplicación de la neusis- es notoria en el trabajo de estos geómetras. Su interés por las aplicaciones de la geometría para obtener conocimiento acerca de la naturaleza puede ser considerado como una extensión de las fructíferas investigaciones de Arquímedes en torno de los mecanismos geométricos. Más aún, las soluciones de Arquímedes a problemas específicos constituyen los antecedentes de los esfuerzos de estos geómetras en su investigación dirigida a encontrar soluciones alternativas, que fueran, bajo su perspectiva, más satisfactorias.

Sólo Eratóstenes puede ser visto como alguien que trabajó bajo la influencia más o menos directa de Arquímedes, más como discípulo que como colega. De los otros sólo de Diocles se sabe con certeza que estuvo activo en el siglo III a.C. Por la naturaleza de su trabajo es evidente que Nicomedes trabajó después de Arquímedes, pero se desconocen las rutas de la influencia que recibió de parte del sabio de Siracusa.

Esta asombrosa adopción, con tintes particulares, del trabajo de Arquímedes, es la justificación más fuerte para considerar a estos geómetras como sus sucesores. Sin embargo no se puede decir que siguieron en todo al “maestro” pues, como es bien sabido, su participación en uno de los campos de principal interés para Arquímedes, a saber, la aplicación de los métodos limitantes de Eudoxo, fue escasa casi al punto de ser tenida como nula. Pero durante la gestación de muchos de los esfuerzos para resolver problemas, dichos autores prepararon el campo para la síntesis efectuada por Apolonio sólo unas pocas décadas más adelante.

Tras enfrentarse a menudo con construcciones irresolubles algunos matemáticos árabes extendieron la noción de existencia geométrica o algebraica mediante la utilización de secciones cónicas. Realizaron estudios sobre las propiedades de tales curvas y sobre los mejores medios para generarlas, lo cual permitió "resolver", de nuevas y diversas maneras, los problemas clásicos de la tradición griega, incluso la inscripción de polígonos regulares en el círculo.

Una lectura crítica de los *Elementos* de Euclides realizada por los matemáticos árabes, les permitió reflexionar sobre los fundamentos de la Geometría. En paralelo aportaron considerables observaciones concernientes a los problemas de construcción y razonamiento geométrico, mismos que luego se extendieron a todos los instrumentos de demostración (análisis y síntesis, reducción al absurdo, inducción). Como resultado de ello lograron soluciones satisfactorias mediante el empleo del método de análisis y síntesis, que consiste en suponer, en primera instancia, que el problema está resuelto y razonar a través de reducciones sucesivas hasta llegar a resultados plenamente establecidos por otra vía. Acto seguido, para la síntesis, se procede en sentido inverso.

BIBLIOGRAFÍA

APOLONIO, *Conics.* Great Books of the Western World Encyclopædia Britannica Inc., Vol II. *R. Maynard H.* editor. The Chicago: University of Chicago Press, 1952.

ARCHIMEDE, *Commentaires d´Eutocius. Fragments.* Ed. y trad. al francés por Ch. Mugler, Paris: Collection des Universités de France, 1972.

BOS, HENK. J.M, *Redefining Geometrical Exactness: Descartes´ Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer Verlag, 2001.

DANTZING, TOBIAS, *Mathematics in Ancient Greece.* New York: Dover Publications, Inc., 2006.

DESCARTES, RENÉ. *La Géométrie* [1637], en Oeuvres, Vol VI, *Discours de la Méthode &Essais,* publiés par Charles Adam & Paul Tannery. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1996.

DIOCLES. *Livre de Diocles sur les miroirs ardents,* en Rashed, [2002]. *Les Catoptriciens Grecs…*

EUCLIDES (1956), *The Thirteen Books of Euclid´s Elements Vol.II* (Libros IV y V). New York: Dover.

HEATH, T. L., *The Works of Archimedes,* New York: Dover, 2002.

HEATH, T. L. [1949], *Mathematics in Aristotle.* Bristol: Thoemmes Press, 1998.

HOGENDIJK, JAN P., *Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon.* Communicated by B. L. van der Waerden, 1977.

JOHNSTON ALLMAN, GEORGE, *Greek Geometry from Thales to Euclid.* Dublin & London: Dublin University Press, [1889], 2010.

KNORR, WILBUR RICHARD, *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* New York: Dover Publications, 1993.

NETZ, REVIEL, *The Works of Archimedes.* Trad. al inglés, junto con los comentarios de Eutocio. Vol I. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

RASHED, ROSHDI, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam.* Herent (Bélgica): Al-Furqan Islamic Heritage Foundation, 2005.

RASHED, ROSHDI. *Les Catoptriciens Grecs. Les Miroirs Ardents.* Paris: Les Beller Lettres, 2002.

RASHED, ROSHDI. *Les matématiques infinitésimales du IX^{e} su XI^{e} siécle.* Vol. I. Fondateurs et commentateurs. London: al-Furqan Islamic Heritage Foundation, 1996.

TEÓN DE ESMIRNA, *Exposition of the Mathematical Knowledge Useful for Reading Plato.* Traducción de R & D Lawlor. Wizard Bookshef, 1978.

TOOMER, G. J. ed., *Diocles: On Burning Mirrors.* Berlin/ Heilderberg/ NY: Springer-Verlag, 1976.