



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

SOBRE
LA GEOMETRÍA DE LOS CUERPOS CONVEXOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

LIC. ISAAC ARELIO RÍOS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EFRÉN MORALES AMAYA

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. El Espacio Euclidiano	7
1.1. Planos, Hiperplanos y Dimensión	7
1.2. Distancia y Diámetro	9
1.3. Transformaciones	12
1.4. Simetría en el Plano	14
1.5. Simetría en el Espacio	24
2. Cuerpos Convexos	31
2.1. Definiciones y propiedades básicas	31
2.2. Resultados básicos y algunas caracterizaciones clásicas de los cuerpos convexos	34
2.3. Secciones y proyecciones de cuerpos convexos.	36
2.4. La métrica de Hausdorff	38
3. Cuerpos convexos simétricos	43
3.1. Cuerpos con planos de simetría	44
3.2. Secciones y proyecciones con línea de simetría	49

Introducción

Una de las cuestiones más importantes en el estudio de la geometría de los conjuntos convexos es determinar propiedades de estos conjuntos a partir de la información que se tenga de sus secciones y sus proyecciones, una de estas propiedades es la *simetría*. En [3] se estudió un resultado de Montejano [18] respecto al Teorema de Rogers [24]. Este resultado afirma: “Si un cuerpo estrictamente convexo K satisface que para cada dirección es posible elegir continuamente una sección de K centralmente simétrica, entonces K es centralmente simétrico”.

A raíz del análisis de este teorema se planteó un problema, consideremos dos cuerpos estrictamente convexos K_1 y K_2 , si para cada plano por el origen H es posible elegir continuamente secciones de K_1 y K_2 paralelas a H , las cuales son directamente homotéticas, entonces K_1 y K_2 son directamente homotéticos; este problema fue resuelto por Jerónimo, Montejano y Morales en [20] generalizando el Teorema de Montejano.

Este trabajo está motivado por la cuestión de cuándo y en que medida la simetría de un cuerpo está determinada por sus secciones y proyecciones. En este sentido, Jerónimo, Montejano y Morales [21] ofrecen una caracterización de la esfera en términos de la simetría de sus secciones respecto a una línea. En la segunda parte del artículo [18], Montejano aborda una conjetura de Bezdek que dice que cuando las secciones de un cuerpo convexo, en el espacio euclidiano, tienen línea de simetría entonces el cuerpo es un elipsoide o un cuerpo de revolución; sin embargo hay cuerpos convexos que satisfacen esta condición sin ser un elipsoide o un cuerpo de revolución. Montejano plantea las ideas para demostrar que con esta hipótesis el cuerpo debe tener una sección que es un disco. En el capítulo 3 revisaremos este resultado y veremos que estas ideas se pueden aplicar para el caso en que el cuerpo tenga proyecciones ortogonales con línea de simetría. Al estudiar este problema surgió otro resultado, si K es un cuerpo convexo tal que existe una colección infinita de planos de simetría de K entonces K es un cuerpo de revolución o una bola.

Para darle contexto a este estudio de los cuerpos convexos, en el primer capítulo introduciremos los conceptos básicos de geometría y de simetría respecto a un punto, una

línea y un plano. En el capítulo 2 presentaremos las definiciones y propiedades importantes, en este contexto, de los conjuntos convexos además definiremos la métrica de Hausdorff que nos permite dotar al conjunto de los cuerpos convexos de una métrica. En el capítulo 3 enunciaremos los resultados auxiliares para las demostraciones de los resultados principales.

Capítulo 1

El Espacio Euclidiano

En este capítulo introduciremos las definiciones y notación que serán necesarios a través de este texto. Trabajaremos en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^n , esto es, el espacio real afín de dimensión finita cuyo espacio lineal asociado es el espacio vectorial real de dimensión n cuyo producto interno denotaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y a la norma euclidiana la denotaremos $\| \cdot \|$. También consideraremos a \mathbb{R}^n como espacio topológico con la topología usual, denotaremos al *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de un conjunto en \mathbb{R}^n como int , cl y bd respectivamente.

1.1. Planos, Hiperplanos y Dimensión

Presentaremos subconjuntos de \mathbb{R}^n que resultan importantes en la caracterización y el estudio de los cuerpos convexos.

Definición 1.1.1. Dados a y b dos puntos distintos de \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in [0, 1]\}$$

se llama *segmento* con extremos en a y b y se denota $[a, b]$. Al conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : (1 - \lambda)a + \lambda b, 0 < \lambda < 1\}$$

le llamaremos *segmento abierto* y lo denotamos (a, b) . Análogamente definimos $[a, b)$ si $0 \leq \lambda < 1$ y $(a, b]$ si $0 < \lambda \leq 1$.

Definición 1.1.2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $y \neq 0$, al conjunto $\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0\}$ le llamaremos *rayo* emanado de x en la dirección de y , en general el conjunto $\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\}$ es la *línea* que pasa por x en la dirección de y .

Definición 1.1.3. Si $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio lineal de dimensión m , con $1 \leq m \leq n-1$, entonces para $u \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $\mathcal{H} + u$ se llama subespacio *afín de dimensión m* . Consideraremos a las líneas en \mathbb{R}^n como subespacios afines de dimensión uno mientras que a los de dimensión dos les llamaremos *planos* y a los de dimensión $n-1$ les llamaremos *hiperplanos*; en otro caso, se llaman subespacios afines de dimensión k , con $3 \leq k \leq n-2$. Dado un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, el *casco afín* de S es el subespacio afín de dimensión mínima que contiene a S y la dimensión de S es la *dimensión* de su casco afín.

Un hiperplano $H = \mathcal{H} + u$ está determinado por una ecuación lineal y un vector p distinto del origen y ortogonal a \mathcal{H} :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \langle p, u \rangle\}.$$

Diremos que H pasa por u y es ortogonal a p .

Definición 1.1.4. Diremos que dos hiperplanos en \mathbb{R}^n son *paralelos* si su intersección es el vacío.

Una forma de describir a los subespacios afines, que no depende de subespacios lineales de \mathbb{R}^n , es a través de combinaciones lineales.

Definición 1.1.5. Dada una colección a_1, \dots, a_m de vectores en \mathbb{R}^n y $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, al vector

$$b = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$$

le llamamos *combinación afín* de los vectores a_1, \dots, a_m .

Definición 1.1.6. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *afín* si dados $a, b \in A$ implica que $\lambda a + (1 - \lambda)b$ pertenece a A para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Entonces los subespacios afines de \mathbb{R}^n son precisamente los conjuntos afines de \mathbb{R}^n ([16] Teorema 2.13).

El siguiente teorema, el cual no es difícil demostrar, nos da una de las características más importantes de los subespacios afines de \mathbb{R}^n .

Teorema 1.1.1. La intersección arbitraria de subespacios afines de \mathbb{R}^n es un subespacio afín.

A un hiperplano H le asociamos dos subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^n cuya frontera es H . Si H es ortogonal a p y pasa por u , entonces, definimos los conjuntos

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \geq \langle p, u \rangle\} \text{ y } H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \leq \langle p, u \rangle\}$$

y les llamamos *semiespacios cerrados* asociados a H . Cabe mencionar que los semiespacios están determinados únicamente por hiperplanos.

Introduciremos el concepto de separación a través de un hiperplano.

Definición 1.1.7. Sean A y B conjuntos y H un hiperplano en \mathbb{R}^n . Decimos que H *separa* a A de B si $A \subseteq H_+$ y $B \subseteq H_-$ ó $A \subseteq H_-$ y $B \subseteq H_+$. Si los conjuntos están contenidos en el interior de los semiespacios determinados por H decimos que H los *separa estrictamente*.

1.2. Distancia y Diámetro

Tenemos que \mathbb{R}^n cuenta con una métrica inducida por la norma euclidiana, esto es, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $d(x, y) = \|x - y\|$; denotamos a la *bola abierta con centro en x y radio r* como $B(x, r)$, a la *bola cerrada con centro en x y radio r* la denotamos $\bar{B}(x, r)$.

Introduciremos la distancia entre un punto y un conjunto, veremos la continuidad de $d(x, y)$ como función del espacio en los reales y algunas consecuencias.

Definición 1.2.1. La *distancia* de un punto $p \in \mathbb{R}^n$ a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, distinto del vacío, es un número real al que denotaremos $d(p, A)$ y que se define como

$$d(p, A) = \inf\{d(p, x) : x \in A\}$$

En la definición anterior, \inf se refiere al ínfimo de todas las distancias entre p y los puntos de A . Tiene sentido hablar del ínfimo pues $d(p, x) \in \mathbb{R}$ y $d(p, x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.1. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado distinto del vacío y $p \in \mathbb{R}^n$ tal que p no pertenece a A , entonces $d(p, A) > 0$.

Demostración: Tenemos que A es un conjunto cerrado entonces el complemento de A , al que denotaremos A' , es un conjunto abierto. Como $p \in A'$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(p, \varepsilon_0)$ está contenida en A' , esto implica que $B(p, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$. Supongamos que $d(p, A) = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $d(p, a) < \varepsilon$, esto implica que existe $a_0 \in A$ tal que $d(p, a_0) < \varepsilon_0$, esto es, $\|p - a_0\| < \varepsilon_0$ y entonces $a_0 \in B(p, \varepsilon_0)$, esto contradice que $B(p, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$ por lo tanto $d(p, A) > 0$

□

Teorema 1.2.2. La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = d(p, x)$, para $p \in \mathbb{R}^n$ fijo, es continua.

Demostración: Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y un número real $\varepsilon > 0$, sean $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. Consideremos que

$$f(y) = d(p, y) = \|p - y\| \leq \|p - x\| + \|x - y\|,$$

como $\|p - x\| = d(p, x) = f(x)$ obtenemos

$$f(y) \leq f(x) + \|x - y\|$$

y esto implica que

$$f(y) - f(x) \leq \|x - y\| < \varepsilon.$$

De forma similar obtenemos que

$$f(x) - f(y) < \varepsilon$$

por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Entonces f es continua en x , por la arbitrariedad de x tenemos que f es continua en \mathbb{R}^n .

□

Una consecuencia importante del teorema anterior es el siguiente corolario.

Corolario 1.2.1. Sea $p \in \mathbb{R}^n$, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado no vacío existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $d(p, A) = d(p, a)$.

Demostración: Sea $p \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, consideremos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado distinto del vacío. Tenemos que si $p \in A$ entonces $a = p$, supongamos que p no está en A . Sea $q \in A$, consideremos $\delta = \|p - q\| > 0$ y definamos el conjunto $B = A \cap \overline{B}(p, \delta)$. Tenemos que $\overline{B}(p, \delta)$ es un conjunto cerrado y acotado por lo que es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , además B por definición es la intersección de dos conjuntos cerrados entonces B es cerrado, B es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto entonces B es compacto. Por el Teorema 1.2.2 sabemos que la función $f(x) = d(p, x)$ es continua en \mathbb{R}^n , en particular es continua en B por lo que f alcanza un valor mínimo en algún punto $a \in B$, esto implica que $d(p, a) \leq d(p, x)$ para todo $x \in B$. Ahora consideremos $x \in A$ tal que x no está en B esto implica $d(p, x) > \delta$, además $a \in \overline{B}(p, \delta)$, entonces $d(p, a) \leq \delta < d(p, x)$, de lo anterior se tiene que $d(p, a) < d(p, x)$ para cualquier $x \in A$ que no esté en B . Concluimos entonces que $d(p, a) \leq d(p, x)$ para todo $x \in A$.

□

El teorema siguiente nos permite definir un hiperplano a través de la función distancia en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.2.3. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ tales que $a \neq b$ entonces

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) = d(x, b)\}$$

es un hiperplano de \mathbb{R}^n y H es ortogonal a $[a, b]$.

Demostración: Vamos a demostrar que el segmento $[a, b]$ es perpendicular a H , esto es, demostraremos que para cada $x \in H$ el vector $a - b$ es ortogonal a $x - p$ donde p es el punto medio de $[a, b]$. Sea $x \in H$, tenemos

$$\langle x - p, b - a \rangle = \langle x, b \rangle - \langle x, a \rangle + \langle p, a \rangle - \langle p, b \rangle \quad (1.1)$$

Como $x \in H$ tenemos que

$$\langle x - a, x - a \rangle = \langle x - b, x - b \rangle$$

y como p es el punto medio de $[a, b]$

$$\langle p - a, p - a \rangle = \langle p - b, p - b \rangle,$$

de lo anterior obtenemos

$$\langle p, a \rangle - \langle p, b \rangle = \frac{1}{2}(\langle b, b \rangle - \langle a, a \rangle) \quad (1.2)$$

y

$$\langle x, b \rangle - \langle x, a \rangle = \frac{1}{2}(\langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle) \quad (1.3)$$

sustituyendo 1.2 y 1.3 en 1.1 tenemos que

$$\langle x - p, b - a \rangle = 0.$$

Ahora demostraremos que H es un hiperplano. Para esto, definimos $\mathcal{H} = H - p$ y demostraremos que \mathcal{H} es un subespacio lineal de dimensión $n - 1$.

Veamos que $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \frac{a-b}{2}) = d(x, \frac{b-a}{2})\}$. Sea $x \in \mathcal{H}$, podemos escribir $x = y - p$ para algún $y \in H$. Tenemos

$$\|x - \frac{a-b}{2}\| = \|y - p - \frac{a-b}{2}\| = \|y - a\|$$

y

$$\|x - \frac{b-a}{2}\| = \|y - p - \frac{b-a}{2}\| = \|y - b\|,$$

como y pertenece a H se cumple que $\|y - a\| = \|y - b\|$ y esto implica que

$$d(x, \frac{a-b}{2}) = d(x, \frac{b-a}{2}),$$

entonces $\mathcal{H} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \frac{a-b}{2}) = d(x, \frac{b-a}{2})\}$.

Ahora, sea $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \frac{a-b}{2}) = d(x, \frac{b-a}{2})\}$ y tomemos $y = x + p$. De esta manera, obtenemos

$$\|y - a\| = \|x + \frac{a+b}{2} - a\| = \|x - \frac{a-b}{2}\|$$

y

$$\|y - b\| = \|x + \frac{a+b}{2} - b\| = \|x - \frac{b-a}{2}\|,$$

además x satisface $\|x - \frac{a-b}{2}\| = \|x - \frac{b-a}{2}\|$, lo cual implica $\|y - a\| = \|y - b\|$, entonces $y \in H$, esto es equivalente a $y - p \in \mathcal{H}$, donde $y - p = x$. De lo anterior concluimos $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \frac{a-b}{2}) = d(x, \frac{b-a}{2})\} \subseteq \mathcal{H}$. Por lo tanto $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \frac{a-b}{2}) = d(x, \frac{b-a}{2})\}$. Por otro lado, no es difícil verificar que para un vector u no nulo, la igualdad

$$\langle x, u \rangle = \langle x, -u \rangle$$

es equivalente a

$$\langle x, u \rangle = 0$$

para cada $x \in \mathbb{R}^3$. Esto significa que los elementos de \mathcal{H} son precisamente los vectores ortogonales al vector $a - b$, sabemos que este conjunto de vectores forma un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$.

□

Ahora definiremos el concepto de diámetro para un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n .

Definición 1.2.2. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n el diámetro de A está definido como

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

1.3. Transformaciones

Ahora presentaremos funciones del espacio en sí mismo que son importantes en Geometría.

Definición 1.3.1. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una *similitud* si existe $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, tal que $\|f(x) - f(y)\| = k\|x - y\|$ para todo par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Cuando $k = 1$ tenemos que la función preserva la distancia, entonces le llamamos *isometría*.

Entonces una similitud σ es una función inyectiva pues dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x \neq y$ se tiene que, por las propiedades de la norma euclidiana,

$$\|x - y\| \neq 0,$$

esto implica que, para $k > 0$

$$k\|x - y\| \neq 0,$$

en particular esto se cumple para la k asociada a σ y por la definición de similitud se tiene

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \neq 0,$$

por lo tanto $\sigma(x) \neq \sigma(y)$.

Definición 1.3.2. Dos subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se llaman *semejantes* si existe una similitud σ tal que $\sigma(A) = B$. Si existe una isometría α tal que $\alpha(A) = B$ decimos que los conjuntos A y B son *congruentes*, en el caso de que $\alpha(A) = A$ diremos que α es una *simetría* de A .

El hecho de que una isometría sea una función inyectiva que preserva la distancia tiene una consecuencia importante, cada subespacio lineal de dimensión m de \mathbb{R}^n es congruente a \mathbb{R}^m ([14],pp 71-78).

Definición 1.3.3. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y un vector fijo $u \in \mathbb{R}^n$, a la similitud σ dada por $\sigma(x) = \lambda x + (1 - \lambda)u$ para $x \in \mathbb{R}^n$ le llamamos *homotecia* con *centro* en u y *coeficiente de dilatación* λ . Sean $B \subset \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, a la imagen del conjunto B bajo una homotecia con centro en v y coeficiente de dilatación λ se le llama *conjunto homotético* a B y lo denotamos $\lambda B + (1 - \lambda)v$.

Finalmente, si A y B son conjuntos homotéticos tales que el coeficiente es positivo entonces diremos que A y B son directamente homotéticos. Introduciremos una isometría que será útil en las secciones posteriores.

Definición 1.3.4. Dado un vector fijo $u \in \mathbb{R}^n$, a la isometría τ_u dada por $\tau_u(x) = x + u$ le llamamos *traslación* determinada por u . Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^n$, a la imagen del conjunto A bajo la traslación determinada por u se le llama *conjunto trasladado* de A y lo denotamos $A + u$.

De esta manera podemos decir que dos hiperplanos \mathbb{R}^n son paralelos (Definición 1.1.4) si uno es trasladado del otro. También podemos decir que un subespacio afín de \mathbb{R}^n de dimensión m (Definición 1.1.3) es un trasladado de un subespacio lineal de dimensión m de \mathbb{R}^n .

Hay conjuntos no acotados para los que existe un vector v , no nulo, tal que τ_v mantiene invariante al conjunto.

Ejemplo 1.3.1. Sea ℓ la línea que pasa por un punto $p \in \mathbb{R}^n$ en la dirección del vector $v \neq 0$ y consideremos la traslación τ_v . Sea $q \in \ell$, esto es, $q = p + \lambda v$ para alguna $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $q = p + (\lambda - 1)v + v = \tau_v(p + (\lambda - 1)v)$ y esto implica que $q \in \tau_v(\ell)$. Ahora, sea $q' \in \tau_v(\ell)$ entonces $q' = r + v$ donde $r \in \ell$ esto implica que $q' = p + (\lambda' + 1)v$ para algún $\lambda' \in \mathbb{R}$ entonces $q' \in \ell$. Por lo tanto $\tau_v(\ell) = \ell$.

Teorema 1.3.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $v \in \mathbb{R}^n$ un vector distinto de cero. Entonces $\tau_v(A) \neq A$.

Demostración: Supongamos que existe un vector $u \in \mathbb{R}^n$, distinto de cero, tal que $\tau_u(A)$ es igual a A . Sea $a \in A$ entonces $\tau_u(a) = a + u \in A$ y esto implica que $\tau_u(a + u) = a + 2u \in A$; supongamos que para $k \in \mathbb{N}$ se tiene $a + ku \in A$, entonces $\tau_u(a + ku) = a + (k + 1)u \in A$ esto demuestra que $a + nu \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto contradice que A es un conjunto acotado, la contradicción demuestra que $\tau_u(A) \neq A$.

□

1.4. Simetría en el Plano

Comenzaremos definiendo la isometría más importante del plano \mathbb{R}^2 , esto es, la reflexión respecto a una línea. Veremos los resultados que permiten caracterizar las isometrías en el plano usando sus puntos fijos, con esto demostraremos algunos resultados sobre las líneas de simetría de los conjuntos acotados del plano. Esta clasificación de isometrías en el plano está planteada en el libro de Hilbert y Cohn-Vossen [12].

Definición 1.4.1. Dada ℓ una línea en \mathbb{R}^2 , para $p \in \mathbb{R}^2$ la *reflexión de p en la línea ℓ* es el punto p' tal que ℓ es perpendicular a $[p, p']$ y $d(p, \ell) = d(p', \ell)$, si $p \in \ell$ definimos $p' = p$. Definimos entonces la función $\sigma_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de tal forma que $\sigma_\ell(x) = x'$ donde x' es la reflexión de x en ℓ , a σ_ℓ le llamamos la *reflexión en ℓ* . Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ diremos que $\sigma_\ell(A)$ es la *reflexión de A en ℓ* . Diremos que A es *simétrico respecto a ℓ* cuando $\sigma_\ell(A)$ es una traslación de A y cuando $\sigma_\ell(A) = A$ llamaremos a ℓ *eje o línea de simetría de A* .

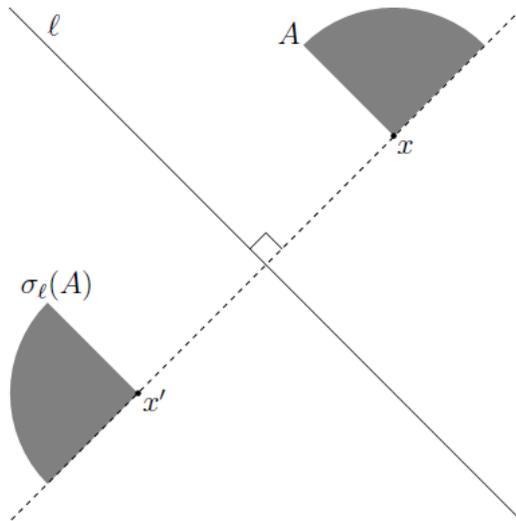


Figura 1.1: Reflexión respecto a una línea

Observación 1.4.1. La reflexión en la línea ℓ tiene como puntos fijos los puntos en ℓ . La composición $\sigma_\ell \circ \sigma_\ell$ es la función identidad. Si $x \notin \ell$ por definición el segmento $[x, \sigma_\ell(x)]$ interseca a ℓ y esto implica que x pertenece a un semiplano determinado por ℓ y $\sigma_\ell(x)$ está en el otro semiplano determinado por ℓ .

La importancia de la reflexión en una línea radica, como veremos más adelante, en que cada isometría del plano es la composición de reflexiones en líneas ([4] Teorema 12.8). Veremos algunas propiedades de las reflexiones en las líneas de \mathbb{R}^2 .

Teorema 1.4.1. Sean ℓ y ℓ' líneas en \mathbb{R}^2 paralelas. Entonces $\sigma_{\ell'} \circ \sigma_\ell$ es una traslación.

Demostración: Sea $p \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, denotemos m a la línea perpendicular a ℓ que pasa por p , consideremos $q = \sigma_\ell(p)$, $q' = \sigma_{\ell'}(q)$ y u el vector unitario paralelo a la dirección de m (Figura 1.2).

Tenemos, por la definición de reflexión, $d(p, \ell) = d(q, \ell)$ y $d(q, \ell') = d(q', \ell')$; por otro lado, $d(\ell, \ell') = d(q, \ell) + d(q, \ell')$ y $d(p, q') = 2d(p, \ell) + 2d(q, \ell') = 2d(q, \ell) + 2d(q, \ell')$. Como q' está en m tenemos que $q' = p + \lambda u$ con $\lambda = d(p, q')$ entonces

$$\lambda = 2d(q, \ell) + 2d(q, \ell') = 2d(\ell, \ell')$$

y

$$q' = \sigma_{\ell'}(\sigma_\ell(p)) = p + \lambda u,$$

por lo tanto $\sigma_{\ell'} \circ \sigma_\ell = \tau_v$ donde v es el vector en la dirección perpendicular a ℓ y $\|v\| = 2d(\ell, \ell')$.

□

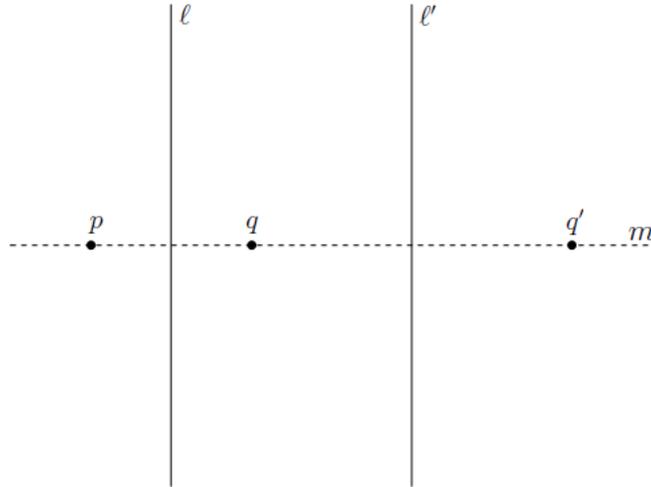


Figura 1.2

Tenemos una consecuencia importante concerniente a las líneas de simetría de un conjunto en \mathbb{R}^2 .

Corolario 1.4.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado. Si ℓ y ℓ' son líneas de simetría de A entonces ℓ y ℓ' tienen un punto en común.

Demostración: Supongamos que ℓ y ℓ' son paralelas y $\ell \neq \ell'$, como $\sigma_\ell(A) = A = \sigma_{\ell'}(A)$ se cumple que $\sigma_{\ell'} \circ \sigma_\ell(A) = A$, por el Teorema 1.4.1 esto implica que existe un vector $v \neq 0$ tal que $\tau_v(A) = A$, esto contradice el Teorema 1.3.1 que dice que si A es acotado y v es no nulo, entonces $\tau_v(A) \neq A$. Por lo tanto ℓ y ℓ' no son paralelas.

□

El corolario anterior nos dice que dos líneas de simetría de un conjunto acotado en \mathbb{R}^2 no pueden ser paralelas.

Otra isometría importante del plano es la rotación respecto a un punto.

Definición 1.4.2. Dado un ángulo θ y un punto $c \in \mathbb{R}^2$, para $x \in \mathbb{R}^2$ distinto de c la *rotación de x un ángulo θ con centro c* es el punto x' tal que $\|x - c\| = \|x' - c\|$ y el ángulo que forman los vectores $x - c$ y $x' - c$ es θ , si $x = c$ definimos $x' = c$. Definimos la función $\rho_{\theta,c}(x) = x'$ donde x' es la rotación de x respecto a c un ángulo θ . Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ diremos que la imagen de A bajo la función $\rho_{\theta,c}$ es la *rotación de A con centro c* .

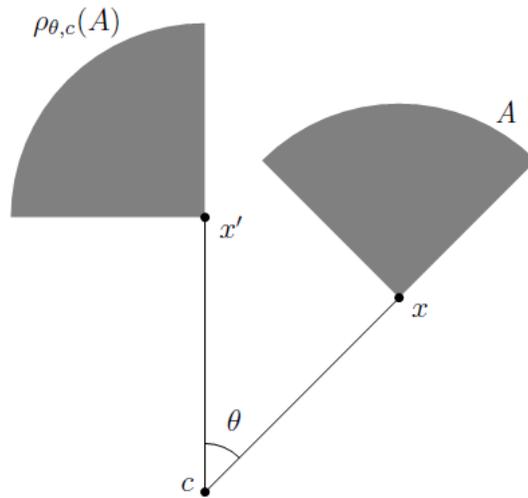


Figura 1.3: Rotación de A un ángulo θ con centro en c

Observación 1.4.2. Consideraremos las rotaciones en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj y el ángulo de rotación toma valores entre 0 y 2π . Una rotación en el plano con centro p tiene como punto fijo a p .

Ahora queremos demostrar que todas las líneas de simetría de un conjunto acotado tienen un punto en común. Para esto necesitamos algunos resultados sobre la composición de reflexiones en líneas.

Teorema 1.4.2. Sean ℓ y ℓ' líneas en \mathbb{R}^2 . Si ℓ y ℓ' no son paralelas entonces $\sigma_{\ell'} \circ \sigma_{\ell}$ es una rotación.

Demostración: Llamemos $p \in \mathbb{R}^2$ al punto de intersección de ℓ con ℓ' , u y u' a los vectores que determinan la dirección de ℓ y ℓ' respectivamente, sin pérdida de generalidad supongamos que el ángulo θ entre los vectores se mide de u a u' . Sean $x \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, $y = \sigma_{\ell}(x)$ y $y' = \sigma_{\ell'}(y)$.

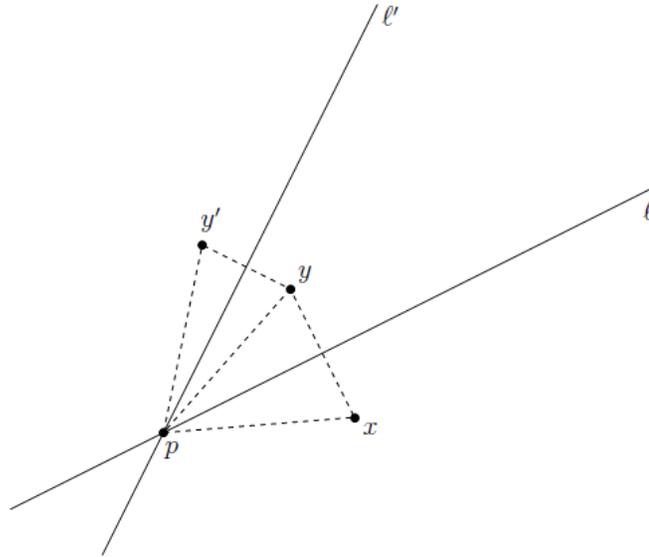


Figura 1.4.

La igualdad $d(x, \ell) = d(y, \ell)$ implica que $d(p, x) = d(p, y)$, entonces el ángulo ω que forman los vectores $x - p$ y u es igual al ángulo que forman $y - p$ y u ; de la misma manera, a partir de $d(p, y) = d(p, y')$, podemos concluir que $d(y, \ell') = d(y', \ell')$ y el ángulo ω' entre los vectores $y - p$ y u' es igual al ángulo entre $y' - p$ y u' , además si $\theta = \omega + \omega'$ entonces el ángulo entre los vectores $x - p$ y $y' - p$ es igual a 2θ , por lo tanto $\sigma_{\ell'} \circ \sigma_{\ell}(x) = y' = \rho_{p, 2\theta}(x)$. Como x es arbitrario concluimos que $\sigma_{\ell'} \circ \sigma_{\ell} = \rho_{p, 2\theta}$.

□

Teorema 1.4.3. Sean ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 líneas en \mathbb{R}^2 . Si ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 no son paralelas y no tienen un punto en común entonces $\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$ es la composición de la reflexión en una línea ℓ y una traslación en la dirección paralela a ℓ .

Demostración: Veamos el caso en el que dos líneas son paralelas. Supongamos que, sin pérdida de generalidad, ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas; llamemos p al punto de intersección de ℓ_2 con ℓ_3 y θ al ángulo de ℓ_2 a ℓ_3 .

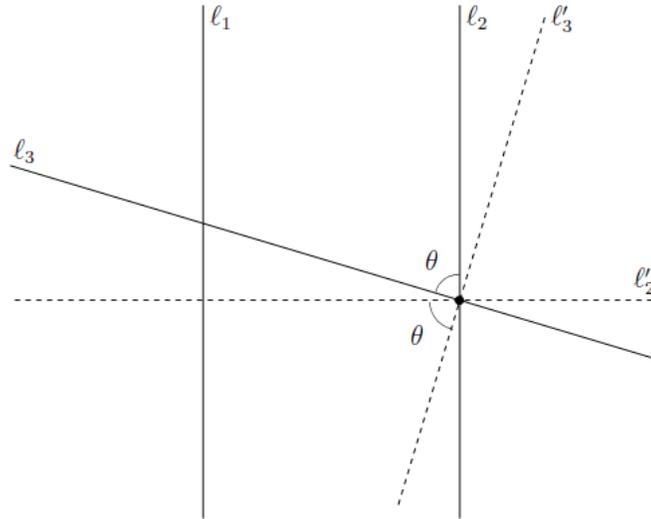


Figura 1.5.

Por el Teorema 1.4.2 tenemos que $\sigma_{l_3} \circ \sigma_{l_2} = \rho_{p,2\theta}$. Consideremos la línea l'_2 perpendicular a l_2 y la línea l'_3 tal que el ángulo de l'_2 a l'_3 es igual a θ , nuevamente por el Teorema 1.4.2 tenemos que $\sigma_{l'_3} \circ \sigma_{l'_2} = \rho_{p,2\theta}$ y entonces

$$\sigma_{l_3} \circ \sigma_{l_2} = \sigma_{l'_3} \circ \sigma_{l'_2}.$$

Ahora, sea q el punto de intersección de l_1 con l'_2 , consideremos la línea l'_1 que pasa por q y es perpendicular a l'_3 y sea l''_2 la línea que pasa por q y es paralela a l'_3 .

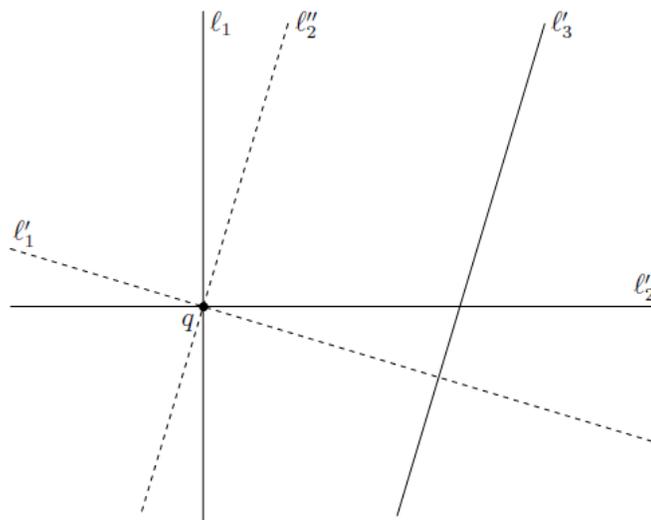


Figura 1.6

Por el Teorema 1.4.2 tenemos

$$\sigma_{\ell'_2} \circ \sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell''_2} \circ \sigma_{\ell'_1}.$$

Entonces

$$\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell'_3} \circ \sigma_{\ell'_2} \circ \sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell'_3} \circ \sigma_{\ell''_2} \circ \sigma_{\ell'_1},$$

por otro lado, el Teorema 1.4.1 implica que

$$\sigma_{\ell'_3} \circ \sigma_{\ell''_2} = \tau_v$$

donde v es un vector en la dirección perpendicular a ℓ'_3 y longitud igual a $d(\ell''_2, \ell'_3)$. Por lo tanto

$$\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1} = \tau_v \circ \sigma_{\ell_1}.$$

En el caso de que las líneas se intersequen en tres puntos distintos la demostración es similar y puede consultarse en [29] capítulo II, proposición 5.

□

Teorema 1.4.4. Sean ℓ una línea y v un vector en \mathbb{R}^2 entonces $\sigma_\ell \circ \tau_v = \tau_v \circ \sigma_\ell$

Demostración: Si $v = 0$ tenemos que τ_v es la identidad y la afirmación es cierta. Supongamos que $v \neq 0$, sean $x \in \mathbb{R}^2$, $x' = \sigma_\ell(x)$ y ℓ' la línea perpendicular a ℓ que pasa por x ; consideremos $\ell'' = \tau_v(\ell')$, como las isometrías preservan ángulos se tiene que ℓ'' es perpendicular a ℓ . Ahora, sean $y = \tau_v(x)$ y $y' = \tau_v(x')$ entonces $d(x, \ell) = d(y, \ell)$ y $d(x', \ell) = d(y', \ell)$ además tenemos que $y, y' \in \ell''$ entonces $y' = \sigma_\ell(y)$. De lo anterior obtenemos

$$\sigma_\ell \circ \tau_v(x) = \sigma_\ell(y) = y' \quad \text{y} \quad \tau_v \circ \sigma_\ell(x) = \tau_v(x') = y'$$

como x es arbitrario concluimos que $\sigma_\ell \circ \tau_v = \tau_v \circ \sigma_\ell$.

□

Corolario 1.4.2. Sen $A \subset \mathbb{R}^2$, ℓ una línea y $v \neq 0$ un vector paralelo a la dirección de ℓ . Si A es acotado entonces $\sigma_\ell \circ \tau_v(A) \neq A$

Demostración: Llamemos γ a la composición $\sigma_\ell \circ \tau_v$, tenemos que

$$\gamma \circ \gamma = (\sigma_\ell \circ \tau_v) \circ (\sigma_\ell \circ \tau_v)$$

y por el Teorema 1.4.4 tenemos

$$\gamma \circ \gamma = (\tau_v \circ \sigma_\ell) \circ (\sigma_\ell \circ \tau_v) = \tau_v \circ (\sigma_\ell \circ \sigma_\ell) \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_v$$

entonces $\gamma \circ \gamma = \tau_{2v}$. Ahora, supongamos que $\gamma(A) = A$ entonces $\gamma \circ \gamma(A) = \gamma(A) = A$, esto es, $\tau_{2v}(A) = A$, lo cual contradice el Teorema 1.3.1. Por lo tanto $\sigma_\ell \circ \tau_v(A) \neq A$.

□

Estos resultados tienen una aplicación importante, demostramos que un par de líneas de simetría de un conjunto acotado tienen un punto en común, ahora demostraremos que todas las líneas de simetría de un conjunto acotado tienen un punto en común.

Teorema 1.4.5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Si A tiene n líneas de simetría, $n \geq 2$, entonces las líneas de simetría de A tienen un punto en común.

Demostración: Sea $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ la colección de líneas de simetría de A . Sea x_0 el punto de intersección de ℓ_i y ℓ_j para $i \neq j$ y $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, sea $\ell_k \in \{\ell_1, \dots, \ell_n\} \setminus \{\ell_i, \ell_j\}$, por el corolario 1.4.1 sabemos que ℓ_k no puede ser paralela a ℓ_i y tampoco puede ser paralela a ℓ_j , supongamos que ℓ_k no pasa por el punto x_0 entonces por el Teorema 1.4.3 tenemos que $\sigma_{\ell_k} \circ \sigma_{\ell_j} \circ \sigma_{\ell_i}$ es la composición de la reflexión en una línea ℓ y la traslación a través de un vector $v \neq 0$ paralelo a ℓ . Como $\sigma_{\ell_k} \circ \sigma_{\ell_j} \circ \sigma_{\ell_i}(A) = A$ tenemos que $\tau_v \circ \sigma_{\ell}(A) = A$, sin embargo esto es una contradicción pues por el corolario 1.4.2 sabemos que $\tau_v \circ \sigma_{\ell}(A) \neq A$ por lo tanto ℓ_k debe pasar por el punto x_0 . Como k es arbitrario, tenemos que $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ pasan por x_0 .

□

Definición 1.4.3. Sea $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ una colección de líneas en \mathbb{R}^2 con un punto común p tales que $\rho_{p, \frac{\pi}{n}}(\ell_j) = \ell_{j+1}$, para $j = 1, 2, \dots, n-1$. A la colección $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ le llamamos una n -estrella de líneas con centro p .

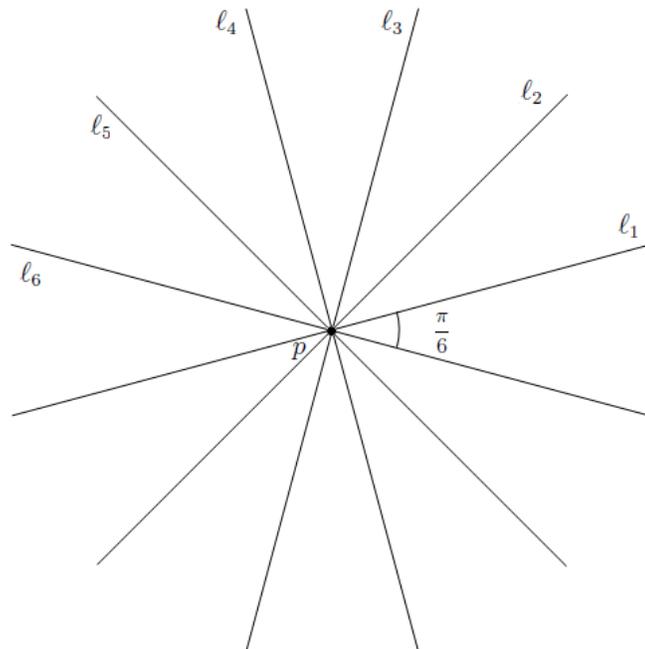


Figura 1.7: 6-estrella de líneas

Teorema 1.4.6. Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado y $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ la colección de todas las líneas de simetría de A , entonces \mathcal{L} es una n -estrella de líneas.

Demostración: Sabemos por el Teorema 1.4.5 que las líneas en \mathcal{L} tienen un punto común, denotemos a este punto p . Llamemos θ_i al ángulo del eje x positivo a ℓ_i , sin pérdida de generalidad asumamos que $\theta_j < \theta_{j+1}$, para $j = 1, \dots, n-1$, de esta forma el ángulo de ℓ_j a ℓ_{j+1} es igual a $\beta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$. Supongamos que $\beta_{j-1} < \beta_j$, consideremos $\sigma_{\ell_j}(\ell_{j-1}) = \ell'$, entonces el ángulo β' de ℓ_j a ℓ' es igual a β_{j-1} , entonces ℓ' es una línea de simetría de A tal que el ángulo θ' del eje x positivo a ℓ' cumple $\theta_j < \theta' < \theta_{j+1}$, esto implica que ℓ' no está en \mathcal{L} , esto es una contradicción. Ahora, supongamos que $\beta_j < \beta_{j-1}$ y sea $\sigma_{\ell_j}(\ell_{j+1}) = \ell'$ entonces el ángulo β' de ℓ' a ℓ_j es igual a β_j y como en el caso anterior esto implica que ℓ' es una línea de simetría de A que no está en \mathcal{L} . Por lo tanto $\beta_{j-1} = \beta_j$, para $j = 2, \dots, n-1$.

□

Definición 1.4.4. Dado $p \in \mathbb{R}^n$ a la homotecia con centro en p y coeficiente -1 le llamamos *reflexión* respecto a p . Esto es, para $x \in \mathbb{R}^n$ la reflexión respecto a p está dada por $2p - x$.

Presentaremos una serie de resultados que nos permiten caracterizar las isometrías del plano. Esto se hará usando los puntos que quedan invariantes bajo la isometría.

Teorema 1.4.7. Una isometría del plano con al menos dos puntos fijos es la identidad o es la reflexión en una línea.

Demostración: Si α es la identidad entonces cada $x \in \mathbb{R}^2$ es punto fijo de α . Supongamos que α no es la identidad. Entonces existe $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(p) \neq p$, consideremos $x \in \mathbb{R}^2$ algún punto fijo de α entonces $\|x - p\| = \|\alpha(x) - \alpha(p)\| = \|x - \alpha(p)\|$. Sea ℓ la línea que pasa por x y es perpendicular al segmento $[p, \alpha(p)]$, tenemos que la intersección de ℓ y la línea que contiene a $[p, \alpha(p)]$ es el punto medio de $[p, \alpha(p)]$. Como x es arbitrario, esto se cumple para cualquier punto fijo de α , como hay al menos dos puntos fijos tomemos $q \in \mathbb{R}^2$ punto fijo de α distinto de x . La línea ℓ pasa por x y q , consideremos ahora $y \in \mathbb{R}^2$ un punto que no está contenido en ℓ entonces y no es punto fijo de α , como se vió antes la línea ℓ' perpendicular a $[y, \alpha(y)]$ que pasa por el punto medio de $[y, \alpha(y)]$ contiene a x y a q entonces $\ell = \ell'$. Como y es arbitrario, tenemos que si x está en ℓ , x es punto fijo de α y si x no está en ℓ tenemos que $\alpha(x)$ es la reflexión en ℓ de x .

□

El siguiente resultado nos permite establecer que las isometrías del plano se pueden escribir como reflexiones en líneas.

Teorema 1.4.8. Cada isometría $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la composición de tres o menos reflexiones en líneas.

Demostración: Si la isometría α es la identidad entonces podemos escribir $\alpha = \rho_\ell \circ \rho_\ell$. Si α tiene dos o más puntos fijos, todos en una línea ℓ , por el Teorema 1.4.7 entonces $\alpha = \rho_\ell$.

Si α tiene exactamente un punto fijo, llamémoslo c . Sea $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $a \neq c$, sabemos que $\|c - a\| = \|c - \alpha(a)\|$; consideremos la línea ℓ' que pasa por c y es perpendicular al segmento $[a, \alpha(a)]$, definamos la isometría $\omega = \sigma_m \circ \alpha$, entonces ω tiene a c y a como puntos fijos, por el Teorema 1.4.7, ω es la identidad o la composición de dos reflexiones. Pero $\omega \neq Id$ pues en otro caso tendríamos $\alpha = \sigma_m$, entonces $\omega = \sigma_\ell$ donde ℓ es la línea que pasa por a y c , entonces $\sigma_\ell = \sigma_m \circ \alpha$ y esto implica que $\sigma_m \circ \sigma_\ell = \sigma_m \circ \sigma_m \circ \alpha = \alpha$. Ahora, si α no tiene puntos fijos sean $p \in \mathbb{R}^2$ y $p' = \alpha(p)$, consideremos el segmento $[p, p']$ y la línea ℓ perpendicular a $[p, p']$ y que pasa por el punto medio del segmento. Definimos la isometría $\omega = \sigma_\ell \circ \alpha$. De esta forma, $\omega(p) = \sigma_\ell \circ \alpha(p) = \sigma_\ell(p') = p$ y entonces p es punto fijo de ω . Entonces sabemos que ω es la composición de dos reflexiones, por otro lado $\omega = \sigma_\ell \circ \alpha$ implica $\sigma_\ell \circ \omega = \alpha$, entonces α es la composición de tres reflexiones.

□

Teorema 1.4.9. Sean A y B dos conjuntos en \mathbb{R}^2 y ℓ una línea. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones entonces A tiene una línea de simetría.

a) Existen un punto p y un ángulo θ tales que $\sigma_\ell(A) = B$ y $\rho_{\theta,p}(A) = (B)$.

b) Existe un vector $v \in \mathbb{R}^2$ perpendicular a ℓ tal que $\sigma_\ell(A) = B$ y $\tau_v(A) = B$.

Demostración: a) Consideremos la isometría $\alpha = \sigma_\ell \circ \rho_{\theta,p}$. Por el Teorema 1.4.2 sabemos que hay dos líneas ℓ_1 y ℓ_2 tales que $\rho_{\theta,p} = \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$. Supongamos que p no está en ℓ , entonces ℓ , ℓ_1 y ℓ_2 no son paralelas y por el Teorema 1.4.3 tenemos que $\alpha = \sigma_\ell \circ \sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2}$ es la composición de una reflexión y una traslación, esto contradice que $\alpha(A) = A$. Entonces p debe estar en ℓ , esto significa que ℓ , ℓ_1 y ℓ_2 concurren en p entonces α es la reflexión en una línea ℓ' por lo tanto A tiene a ℓ' como línea de simetría.

b) Sea $\alpha = \tau_v \circ \sigma_\ell$, sabemos que existen dos líneas ℓ_1 y ℓ_2 , paralelas entre sí y perpendiculares a la dirección de v , tales que $2d(\ell_1, \ell_2) = \|v\|$ y $\tau_v = \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$. Como ℓ , ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas entonces existe una línea ℓ' tal que $\alpha = \sigma_{\ell'}$, por lo tanto A tiene una línea de simetría.

□

1.5. Simetría en el Espacio

Ahora veremos la simetría respecto a una línea y a un plano en \mathbb{R}^3 . También definiremos las isometrías del espacio que usaremos para estudiar las simetrías de los conjuntos en el espacio.

Definición 1.5.1. Dado un plano $H \subset \mathbb{R}^3$ para un punto $p \in \mathbb{R}^3$ la *reflexión de p respecto al plano H* es el punto p' tal que H es perpendicular a $[p, p']$ y $d(p, H) = d(p', H)$, cuando $p \in H$ hacemos $p = p'$. Definimos la función $\sigma_H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como $\sigma_H(x) = x'$ donde x' es la reflexión de x respecto a H , a σ_H le llamamos la reflexión en H . Dados $A \subset \mathbb{R}^3$ y $H \subset \mathbb{R}^3$ plano decimos que A es *simétrico respecto a H* si $\sigma_H(A)$ y A son trasladados y en el caso de que $\sigma_H(A) = A$ diremos que H es *plano de simetría* de A .

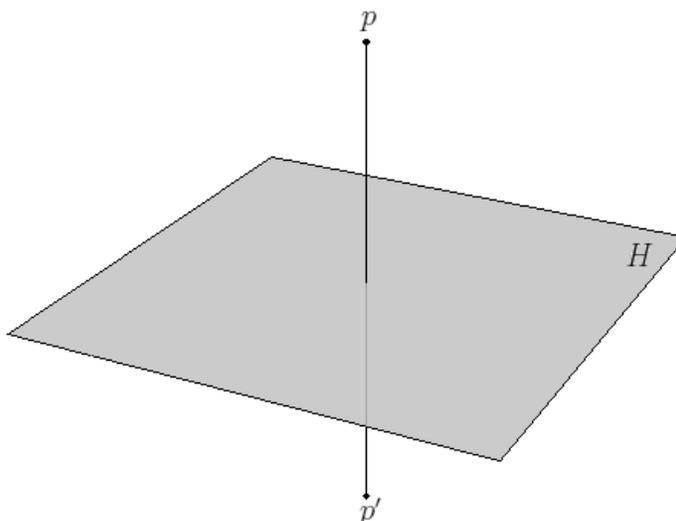


Figura 1.8.

Observación 1.5.1. Los puntos fijos de σ_H son los puntos en H . La composición $\sigma_H \circ \sigma_H$ es la función identidad.

Ahora, utilizando la rotación alrededor de un punto en el plano, definiremos la rotación respecto a una línea.

Definición 1.5.2. Sean ℓ una línea en \mathbb{R}^3 y un ángulo θ . Dado un punto $x \in \mathbb{R}^3$ consideremos el plano H perpendicular a ℓ y que contiene a x , llamemos p al punto de intersección de ℓ con H entonces al punto $x' \in H$ tal que $\rho_{\theta, p}(x) = x'$ le llamaremos *rotación de x alrededor de ℓ un ángulo θ* . Definimos la función $\rho_{\ell, \theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\rho_{\ell, \theta}(x) = x'$ donde x' es la reflexión de x alrededor de ℓ un ángulo θ , a $\rho_{\ell, \theta}$ le llamamos *rotación alrededor de ℓ* y a ℓ el *eje de rotación*. Cuando $\theta = 180^\circ$ denotaremos a la rotación alrededor de ℓ

simplemente ρ_ℓ , de esta forma, dado $A \subset \mathbb{R}^3$ si $\rho_\ell(A)$ y A son trasladados diremos que A es simétrico respecto a ℓ y en caso de que $\rho_\ell(A) = A$ diremos que ℓ es una línea de simetría de A .

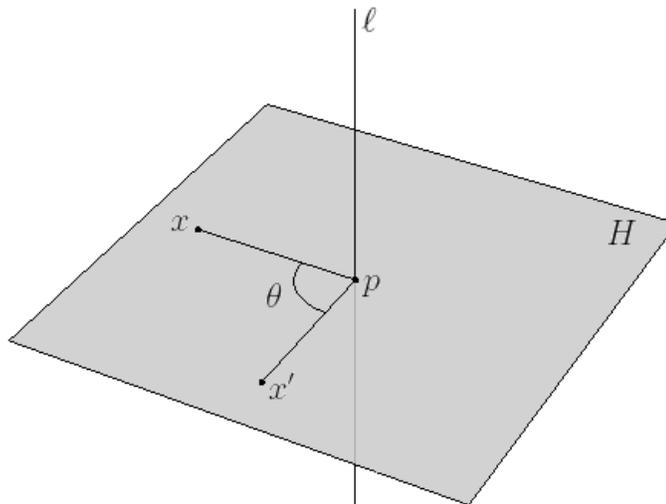


Figura 1.9

Definición 1.5.3. Sea $A \subset \mathbb{R}^3$. Decimos que A es de *revolución* si existe una línea ℓ tal que $\rho_{\ell,\theta}(A) = A$ para todo $0 < \theta \leq 2\pi$.

En general podemos definir la simetría en \mathbb{R}^n respecto a un hiperplano.

Definición 1.5.4. Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, consideremos ℓ la línea perpendicular a H y que contiene a x . Sea $x' \in \ell$ tal que $d(x, H) = d(x', H)$, si x pertenece a H hacemos $x' = x$, llamaremos a x' la *reflexión de x respecto a H* . Definimos la función $\sigma_H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma_H(x) = x'$, dado $A \subset \mathbb{R}^n$ diremos que $\sigma_H(A)$ es la *reflexión de A respecto a H* . Si $\sigma_H(A) = A$ diremos que H es *hiperplano de simetría de A* .

Notemos que dados un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \notin H$, podemos expresar x como $y + z$, donde $y \in H$ y z es perpendicular a H . Si $a \in H$ sabemos que $H - a$ es un subespacio lineal de \mathbb{R}^n , entonces existe un vector b ortogonal a $H - a$ y podemos escribir al vector $x - a$ de la forma $\lambda b + c$ con $c \in H - a$, entonces haciendo $y = a + c$ y $z = \lambda b$ obtenemos la expresión buscada.

Observación 1.5.2. Si H contiene al origen, entonces podemos escribir $\sigma_H(x) = x - \lambda u$ donde u es un vector ortogonal a H y $\lambda = 2 \langle x, u \rangle$.

Teorema 1.5.1. Sean H y H' dos planos no paralelos en \mathbb{R}^3 , sea $\ell = H \cap H'$ y θ el ángulo de H a H' . Entonces $\sigma'_H \circ \sigma_H = \rho_{\ell,2\theta}$

Demostración: Llamemos ℓ a la línea intersección de H con H' . Sea $x \in \mathbb{R}^3$, consideremos el plano H_x ortogonal a ℓ que pasa por x , denotemos p a la intersección de ℓ con H_x , ℓ_1 a la intersección de H con H_x y ℓ_2 a la intersección de H' con H_x . Tenemos que $\sigma_H(x) = \sigma_{\ell_1}(x)$, $\sigma_{H'}(x) = \sigma_{\ell_2}(x)$ y el ángulo de ℓ_1 a ℓ_2 es igual a θ . Por el Teorema 1.4.2 sabemos que $\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}(x) = \rho_{2\theta,p}(x)$, de la Definición 1.5.2 podemos concluir que $\sigma_{H'} \circ \sigma_H(x) = \rho_{\ell,2\theta}(x)$, como x es arbitrario tenemos que $\sigma'_{H'} \circ \sigma_H = \rho_{\ell,2\theta}$.

□

Definición 1.5.5. Dados $x, p \in \mathbb{R}^n$, al punto $2p - x$ le llamamos *reflexión de x respecto al punto p* . Así definimos una función ρ_p tal que a cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ le asigna su reflexión respecto a p , a esta función le llamamos *reflexión central con centro en p* . Decimos que los conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ son simétricos respecto a p si $\rho_p(A) = B$ y difieren por una traslación. En el caso de que $\rho_p(A) = A$ diremos que p es un centro de A y que el conjunto A es centralmente simétrico.

Una cuestión que surge respecto a los conjuntos centralmente simétricos es determinar cuántos centros de simetría pueden tener. Es posible encontrar conjuntos no acotados con más de un centro de simetría; sin embargo, los conjuntos acotados tienen un comportamiento diferente.

Teorema 1.5.2. Todo conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene a lo más un centro de simetría.

Demostración: Supongamos que $p, q \in \mathbb{R}^n$ son centros de simetría de A tales que $p \neq q$. Definamos para $x \in \mathbb{R}^n$ $\rho(x) = \rho_q(\rho_p(x))$, entonces tenemos que $\rho(x) = x + 2(q - p)$, esto es, ρ es una traslación respecto al vector $2(q - p)$.

Por hipótesis tenemos que $\rho_p(A) = A = \rho_q(A)$. Sea $a \in A$ entonces tenemos que $\rho_p(a) \in A$ y esto implica que $\rho_q(\rho_p(a)) = \rho(a) \in A$, es decir, $a + 2(p - q) \in A$. De la misma forma $a + 2(p - q) \in A$ implica que $\rho(a + 2(p - q)) = a + 4(p - q) \in A$. Análogamente se puede concluir que $a + 2k(p - q) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto contradice el hecho de que A es acotado. Esta contradicción demuestra que $p = q$.

□

El siguiente resultado nos dice que dado un conjunto A , si A y $-A$ son trasladados entonces A tiene un centro. Esto es, dados A y A' en \mathbb{R}^n si $\sigma_0(A) = A'$ y $\tau(A) = A'$ entonces A tiene centro.

Teorema 1.5.3. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es centralmente simétrico si y sólo si existe una traslación T tal que $T(A) = -A$.

Demostración: Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n , supongamos que A es centralmente simétrico con centro en $a \in \mathbb{R}^n$. Consideremos la traslación $T(x) = x - 2a$, de esta forma $y \in T(A)$ satisface que $y = x - 2a$ para algún $x \in A$, además por la simetría de A tenemos que $2a - x \in A$, entonces $x - 2a \in -A$ y esto implica que $y \in -A$, como y es arbitrario podemos concluir que $T(A) \subseteq -A$. Ahora, sea $y \in -A$ entonces $-y \in A$, por la simetría de A se cumple que $2a + y \in A$, esto es, existe $x \in A$ tal que $x = 2a + y$, es decir $y = x - 2a$ entonces $y \in T(A)$ y obtenemos que $-A \subseteq T(A)$. Por lo tanto $T(A) = -A$. Supongamos ahora que A y $-A$ son conjuntos trasladados, entonces existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $-A = A + u$, sea $x \in A$, tenemos que $x + u \in -A$ y esto implica que $-(x + u) \in A$, pero $-(x + u) = 2(-\frac{1}{2}u) - x$. Como x es arbitrario tenemos que A es centralmente simétrico con centro $-\frac{1}{2}u$.

□

Observación 1.5.3. En el plano se tiene que un conjunto A es centralmente simétrico si y sólo si tiene dos líneas de simetría perpendiculares.

Finalmente planteamos la siguiente cuestión, dados conjuntos acotados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ si existen α_1 y α_2 isometrías del plano tales que $\alpha_1(A) = B$ y $\alpha_2(A) = B$, bajo estas condiciones preguntamos si el conjunto A tiene algún tipo de simetría.

Teorema 1.5.4. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos acotados. Supongamos que existen dos isometrías del plano α_1 y α_2 tales que $\alpha_1(A) = \alpha_2(A) = B$ entonces existe $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(A) = A$.

Demostración: Consideremos $\alpha = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$. Tenemos que

$$\alpha(A) = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(A)) = \alpha_2^{-1}(B) = A$$

entonces α es una isometría que deja invariante A .

□

Sin embargo, el teorema anterior no nos permite dar explícitamente la simetría α , más aún, si proponemos dos isometrías α_1 y α_2 no es inmediato conocer la isometría α , por ejemplo en el Teorema 1.4.9 distintas isometrías del plano conducen a la simetría respecto a una línea.

Lema 1.5.1. Sean $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano que contiene al origen y $v \in \mathbb{R}^n$ un vector distinto de cero. Denotemos H' a $H + v$ entonces $\sigma_{H'} \circ \tau_v = \tau_v \circ \sigma_H$.

Demostración: Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y ℓ la línea ortogonal a H que pasa por x , denotemos $\ell' = \ell + v$ y $x' = \sigma_H(x)$. Tenemos que $x + v$ y $x' + v$ pertenecen a la línea ℓ' , además como ℓ es ortogonal a H tenemos que ℓ' es ortogonal a H' . La traslación es una isometría, entonces

$$d(x, H) = d(x + v, H')$$

y

$$d(x', H) = d(x' + v, H')$$

esto implica que $d(x + v, H') = d(x' + v, H')$ entonces tenemos que $\sigma_{H'}(x + v) = x' + v$, esto es, $\sigma_{H'} \circ \tau_v(x) = \tau_v \circ \sigma_H(x)$

□

Teorema 1.5.5. Sean H_1, \dots, H_n hiperplanos de \mathbb{R}^n con un punto en común p y ortogonales entre sí. Entonces la isometría $\sigma_{H_n} \circ \dots \circ \sigma_{H_1}$ es igual a ρ_p .

Demostración: Sin pérdida de generalidad supongamos que H_i es ortogonal al vector unitario canónico e_i para todo $i = 1, \dots, n$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, consideremos $v = (v_1, \dots, v_n)$, con $v = x - p$, y los hiperplanos por el origen $L_i = H_i - p$, por la observación 1.5.2 tenemos que $\sigma_{L_i}(v) = v - 2 \langle v, e_i \rangle e_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sigma_{L_1}(v) = (v_1, \dots, v_n) - 2v_1(1, 0, \dots, 0)$$

esto es

$$\sigma_{L_1}(v) = (-v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \sigma_{L_2} \circ \sigma_{L_1}(v) &= \sigma_{L_2}((-v_1, v_2, \dots, v_n)) \\ &= (-v_1, v_2, \dots, v_n) - 2v_2(0, 1, 0, \dots, 0) \\ &= (-v_1, -v_2, v_3, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Aplicando todas las reflexiones obtenemos

$$\sigma_{L_n} \circ \dots \circ \sigma_{L_1}(v) = -v$$

por el Lema 1.5.1

$$\sigma_{H_n} \circ \dots \circ \sigma_{H_1}(v + p) = -v + p$$

es decir

$$\sigma_{H_n} \circ \dots \circ \sigma_{H_1}(x) = -(x - p) + p = 2p - x$$

por lo tanto

$$\sigma_{H_n} \circ \dots \circ \sigma_{H_1}(x) = \rho_p(x)$$

□

Lema 1.5.2. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centralmente simétrico y $C \subset \mathbb{R}^n$ la circunfera de K , entonces C y K son concéntricos.

Demostración: Llamemos p al centro de K y c el centro de C y supongamos que $p \neq c$. Tenemos que $\rho_p(K) = K$ y tomemos $C' = \rho_p(C)$, tenemos que $C' \neq C$, de otra manera C tendría a p como centro y esto implicaría que C tiene dos centros. Además como σ_p es una isometría tenemos que C y C' tienen el mismo radio. Llamemos c' y r al centro y radio de C' respectivamente supongamos que existe $x \in K$ tal que la distancia $\|x - c'\| > r$, como ρ_p es una isometría

$$\|\rho_p(x) - \rho_p(c')\| = \|x - c'\|$$

y $\rho_p(c') = c$ entonces

$$\|\rho_p(x) - c\| > r$$

entonces existe un punto en K que no está en el interior de C , esto contradice que C es la circunfera de K . Entonces K está contenido en el interior C' , por lo tanto C' es la circunfera de K , esto contradice la unicidad de la circunfera. Por lo tanto $p = c$.

□

Capítulo 2

Cuerpos Convexos

En este capítulo definiremos a los cuerpos convexos y daremos algunas de sus propiedades más importantes, presentaremos algunas de sus caracterizaciones clásicas y, finalmente, definiremos también sección y proyección de un cuerpo convexo que serán importantes para los resultados que estudiaremos más adelante.

2.1. Definiciones y propiedades básicas

Aunque el concepto de convexidad se puede definir en espacios más generales, para este estudio de los cuerpos convexos trabajaremos en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^n .

Definición 2.1.1. Un subconjunto C de \mathbb{R}^n es *convexo* si para cualquier par de puntos $x, y \in C$ el segmento $[x, y]$ está contenido en C .

Entonces los conjuntos convexos de \mathbb{R}^n pueden ser acotados o no, cerrados o abiertos y no necesariamente son subespacios lineales. Notemos que el conjunto vacío es un conjunto convexo.

Ejemplo 2.1.1. a) Uno de los ejemplos básicos de un conjunto convexo es la bola cerrada en \mathbb{R}^n con centro en el origen y radio ε .

a) La bola abierta en \mathbb{R}^n con centro en el origen y radio ε también es un conjunto convexo.

c) Otro ejemplo es el cubo en \mathbb{R}^n

$$I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

Definición 2.1.2. Un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ se llama *estrictamente convexo* si su frontera no contiene segmentos de línea.

En los ejemplos anteriores tenemos que la bola abierta y la bola cerrada son conjuntos estrictamente convexo mientras que el cubo no lo es.

El siguiente resultado representa una de las propiedades básicas de los conjuntos convexos.

Teorema 2.1.1. Dada una colección de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n , C_α con α en algún conjunto de índices \mathcal{A} , tenemos que $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ es un conjunto convexo.

Demostración: Si x y y son elementos de $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$, entonces x y y pertenecen a C_α para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, por esto $[x, y] \subset C_\alpha$ para toda α , esto es $[x, y] \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ es un conjunto convexo.

□

Dado el resultado anterior a cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n se le puede asociar un conjunto convexo a través de la colección de conjuntos convexos que lo contienen.

Definición 2.1.3. Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ y F_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, conjuntos convexos tales que $M \subset F_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. El conjunto $\text{conv}(M) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ es el *casco convexo* de M .

De esta forma, $M \subset \text{conv}(M)$ y cualquier conjunto convexo que contenga a M también contiene a $\text{conv}(M)$, es decir, $\text{conv}(M)$ es el mínimo conjunto convexo que contiene a M , además si M es convexo tenemos que $\text{conv}(M) = M$.

Ahora veremos algunas propiedades del interior y la frontera de los conjuntos convexos en el espacio euclidiano.

Proposición 2.1.1. Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo con interior distinto del vacío y x_0 un punto interior de C . Entonces para cualquier x en C y $0 < \lambda < 1$ el punto $(1 - \lambda)x_0 + \lambda x$ pertenece al interior de C .

Demostración: Sean $a = \lambda x + (1 - \lambda)x_0$ para algún $0 < \lambda < 1$ y $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset C$; se satisface que $r(1 - \lambda) > 0$, entonces $b \in B(a, r(1 - \lambda))$ implica que

$$\|b - a\| < r(1 - \lambda)$$

sustituyendo a tenemos

$$\|b - \lambda x - (1 - \lambda)x_0\| < r(1 - \lambda)$$

entonces

$$\left\| \frac{b - \lambda x}{1 - \lambda} - x_0 \right\| < r$$

esto significa que

$$\frac{b - \lambda x}{1 - \lambda} \in B(x_0, r),$$

entonces

$$\frac{b - \lambda x}{1 - \lambda} \in C$$

y esto implica que

$$\left[x, \frac{b - \lambda x}{1 - \lambda} \right] \subset C.$$

Por otro lado

$$b = \lambda x + (1 - \lambda) \frac{b - \lambda x}{1 - \lambda},$$

esto es

$$b \in \left[x, \frac{b - \lambda x}{1 - \lambda} \right],$$

entonces $b \in C$ y esto implica que $B(a, r(1 - \lambda)) \subset C$, por lo tanto $a \in \text{int } C$, como a es arbitrario podemos concluir que $\lambda x + (1 - \lambda)x_0$ está en $\text{int } C$ para todo $0 < \lambda < 1$

□

Proposición 2.1.2. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, cerrado y acotado con interior distinto del vacío. Si x es un punto interior de C entonces cualquier rayo emanado de x interseca la frontera de C en un único $c \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Sea L un rayo emanado de $x \in \text{int } C$ en la dirección de $y \in \mathbb{R}^n$, supongamos que $L \cap \text{bd } C = \emptyset$ entonces $L \subset C$. Sin embargo L es un conjunto no acotado, esto contradice que C es acotado, esto implica que $L \cap C \neq \emptyset$. Ahora supongamos que $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$, pertenecen a $L \cap \text{bd } C$, sin pérdida de generalidad supongamos que $a \in (x, b)$, por la Proposición 2.1.1, tenemos que $(x, b) \subset \text{int } C$ y esto contradice que $a \in \text{bd } C$. Por lo tanto $a = b$.

□

Definición 2.1.4. Un *hiperplano soporte* de un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo distinto del vacío, es un hiperplano H tal que $H \cap C \neq \emptyset$ y C está contenido en alguno de los semiespacios cerrados definidos por H . Si $u \in H \cap C$ decimos que H es un hiperplano soporte de C a través del punto u .

El siguiente resultado sobre los cuerpos convexos fue probado por Carathéodory en 1907 y por Minkowski en 1910.

Teorema 2.1.2. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Entonces por cada punto en la frontera de C pasa al menos un hiperplano soporte.

Un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ se llama *suave* si hay un único hiperplano soporte por cada punto de su frontera. Ahora veremos como los conjuntos convexos se pueden describir como la intersección de semiespacios.

Teorema 2.1.3. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjuntos, convexos y no vacíos tales que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano en \mathbb{R}^n que separa estrictamente A de B si y sólo si $A \cap B = \emptyset$.

La demostración de este teorema se puede consultar en [16] (Teorema 4.12). Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.1. Todo conjunto C en \mathbb{R}^n cerrado y convexo es la intersección de todos los semiespacios en \mathbb{R}^n que contienen a C .

Otra propiedad interesante es que la imagen de un conjunto convexo bajo una transformación lineal es un conjunto convexo.

Proposición 2.1.3. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces $T(C) \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto convexo.

Demostración: Sean $x, y \in T(C)$ entonces $T(a) = x$ y $T(b) = y$ con $a, b \in C$. Si $z \in [x, y]$ entonces para algún $0 \leq \lambda \leq 1$

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda T(a) + (1 - \lambda)T(b) = T(\lambda a + (1 - \lambda)b)$$

pero $a, b \in C$ implica que $\lambda a + (1 - \lambda)b \in C$ entonces $z \in T(C)$, esto muestra que $[x, y] \subset T(C)$ y por lo tanto $T(C)$ es un conjunto convexo.

□

2.2. Resultados básicos y algunas caracterizaciones clásicas de los cuerpos convexos

Definición 2.2.1. Un cuerpo convexo es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n cerrado, acotado y con interior no vacío.

Los conjuntos en el Ejemplo 2.1.1 son cuerpos convexos, otro ejemplo importante de cuerpos convexos en \mathbb{R}^n son los elipsoides.

Definición 2.2.2. Dados un vector $a \in \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal invertible, siendo $B = \overline{B}(0, 1)$, el conjunto

$$E = T(B) + a$$

se llama elipsoide con centro en a .

Describiremos a un elipsoide como un subconjunto de \mathbb{R}^n . Dado el conjunto E de la definición anterior, tenemos que

$$E = \{y \in \mathbb{R}^n : y = T(x) + a, \|x\| \leq 1\},$$

como T es una transformación lineal invertible se cumple

$$T^{-1}(y) = T^{-1}(T(x) + a) = T^{-1}(T(x)) + T^{-1}(a) = x + T^{-1}(a),$$

entonces

$$x = T^{-1}(y) - T^{-1}(a) = T^{-1}(x - a).$$

Por lo tanto podemos escribir

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \|T^{-1}(x - a)\| \leq 1\}.$$

En los resultados de separación de la sección anterior, se impusieron algunas condiciones a los convexos, la de ser cerrado o la de ser compacto.

Los hiperplanos soporte permiten obtener una caracterización de los cuerpos convexos, por el Teorema 2.1.2 sabemos que por cada punto de la frontera de un conjunto convexo pasa un hiperplano soporte, el siguiente es el recíproco y una demostración se encuentra en [16] (Teorema 5.3).

Teorema 2.2.1. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto con interior no vacío con la propiedad de que por cada punto de su frontera pasa un hiperplano soporte de C , entonces C es un conjunto convexo.

El siguiente resultado sera útil en el capítulo 3 y nos permite saber cuándo dos conjuntos convexos, con interior distinto del vacío, son iguales a partir de sus conjuntos frontera.

Teorema 2.2.2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos, con interior distinto del vacío, tales que $A \subseteq B$ y $\text{bd } A \subseteq \text{bd } B$. Entonces $A = B$.

Demostración: Supongamos que $A \neq B$, entonces existe $x \in B$ tal que $x \notin A$. Sea $a \in \text{int } A$ entonces, por la Proposición 2.1.2, el rayo emanado de a en la dirección de $x - a$ interseca a $\text{bd } A$ en el punto y . Además tenemos que $y = a + (x - a)\lambda = a(1 - \lambda) + x\lambda$ para algún $\lambda > 0$; como $x \notin A$ se cumple que $\lambda < 1$, esto significa que $y \in (a, x)$ y la proposición 2.1.1 implica que $y \in \text{int } B$. Esto contradice que $\text{bd } A \subset \text{bd } B$, por lo tanto $A = B$.

□

Con las propiedades de la distancia entre un punto y un conjunto, las cuales vimos en la sección 1.2, podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.2.3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y distinto del vacío y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Al punto $y \in A$ tal que $d(x, y) = d(x, A)$ le llamamos *el pie de x en A*

Además, en la Sección 1.2 (Corolario 1.2.1 también vimos que dados un punto p y un conjunto A cerrado distinto del vacío, siempre existe un punto $a \in A$ tal que $d(p, a) = d(p, A)$, entonces siempre existe el pie de p sobre A . Ahora veremos que la unicidad de este punto es una característica de los conjuntos convexos, este resultado es conocido como el Teorema de Motzkin y se da una demostración en [13] (Teorema 2.1.30).

Teorema 2.2.3. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y distinto del vacío. Entonces C es convexo si y sólo si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe un único $y \in C$ tal que y es el pie de x sobre A .

El siguiente resultado nos da una propiedad útil del pie de un punto sobre un conjunto. En [26] se da una demostración.

Teorema 2.2.4. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y distinto del vacío. Entonces

$$d(p(x, C), p(y, C)) \leq d(x, y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2.3. Secciones y proyecciones de cuerpos convexos.

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, si para cada plano $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que $H \cap \text{int } K$ se cumple que $H \cap K$ es un círculo entonces K es una bola cerrada ([3], Teorema 3.1.1). Entonces, a partir de una propiedad de $H \cap K$ se puede describir al cuerpo K . La importancia del estudio de las secciones y las proyecciones surge cuando al usar información que proviene de estas se pueden mostrar propiedades del cuerpo convexo.

Introduciremos las definiciones básicas relacionadas con las secciones transversales y las proyecciones ortogonales de un conjunto convexo y veremos algunos ejemplos que involucren la simetría de las secciones y las proyecciones de un cuerpo convexo.

Definición 2.3.1. Dado un conjunto convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ si $H \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio afín, de dimensión $m \leq n - 1$, tal que $H \cap K \neq \emptyset$ entonces $H \cap K$ se llama *la sección de K de dimensión m determinada por H* .

En el caso de que dicho subespacio afín H sea de dimensión uno, es decir, si es una línea llamaremos a $H \cap K$ una *cuerda del cuerpo convexo*.

Está claro que todas las secciones de un conjunto convexo son conjuntos convexos. Además, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo entonces cualquier sección de K de dimensión m , con $1 < m < n$, es un cuerpo convexo de dimensión m .

Ejemplo 2.3.1. El cubo en $I = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq 1, i = 1, 2, 3\}$ es un cuerpo convexo centralmente simétrico, sin embargo no todas sus secciones son centralmente simétricas. Si consideramos el plano H que pasa por los puntos $p_1 = (1, 1, 0)$, $p_2 = (1, 0, 1)$, $p_3 = (0, 1, 1)$, $H \cap K$ es un triángulo con vértices p_1, p_2, p_3 y entonces $H \cap K$ no es centralmente simétrico.

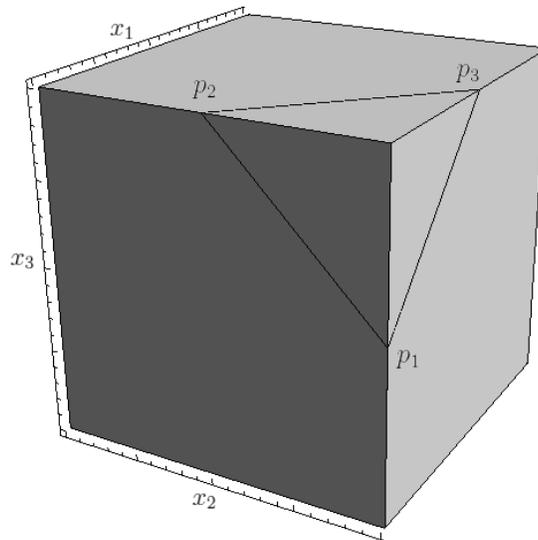


Figura 2.1

Definición 2.3.2. Sean H un subespacio lineal de \mathbb{R}^n , u un vector unitario normal a H y K un conjunto convexo, *la proyección ortogonal $\Pi_H(K)$ es el conjunto*

$$\{p \in H : p + tu \in K, t \in \mathbb{R}\}$$

La proyección ortogonal de un conjunto convexo de \mathbb{R}^n sobre un subespacio afín de \mathbb{R}^n es convexo.

A diferencia de lo que ocurre con las secciones en el Ejemplo 2.3.1, las proyecciones ortogonales de un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^3$ centralmente simétrico son centralmente simétricas.

En la Figura 2.2 podemos ver que el reflejado de un punto x respecto a c debe ser la reflexión de su proyección en el plano H respecto a la proyección de c . Entonces no es difícil ver que se cumple el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ entonces para cada plano $H \subset \mathbb{R}^3$ tenemos que $\Pi_H(K)$ es un conjunto centralmente simétrico.

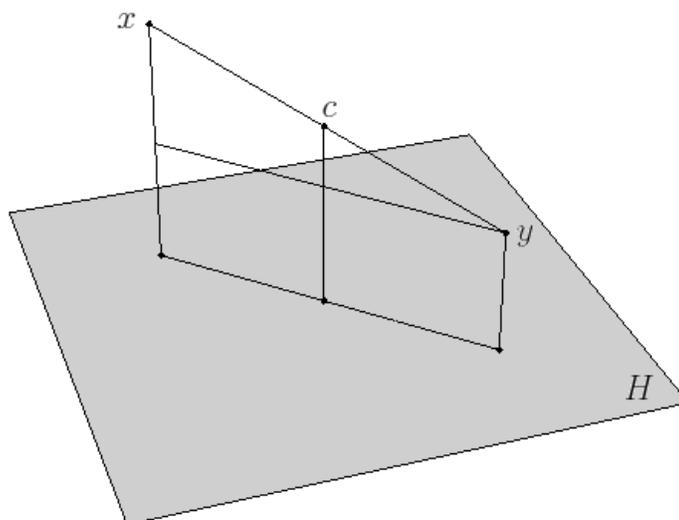


Figura 2.2.

2.4. La métrica de Hausdorff

Empezaremos definiendo la métrica de Hausdorff de manera general, sin embargo restringiremos la métrica de Hausdorff a los conjuntos convexos. Definiremos convergencia con esta métrica y veremos algunos resultados que serán usados más adelante.

Denotaremos como \mathcal{C} al conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n compactos y distintos del vacío, daremos la definición general de la distancia de Hausdorff y la usaremos para dotar a \mathcal{C} de una métrica.

Definición 2.4.1. Sean A un subconjunto de \mathbb{R}^n y para $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon \geq 0$, definamos el conjunto

$$A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ la *distancia de Hausdorff* entre A y B es el número real

$$D(A, B) = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R} : A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}.$$

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [16](Teorema 14.5) y en [9](Teorema 2.3).

Lema 2.4.1. Para $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ distintos del vacío. La distancia de Hausdorff satisface las siguientes condiciones:

- (a) $D(A, B) \geq 0$ y $A = B$ implica que $D(A, B) = 0$
- (b) $D(A, B) = D(B, A)$
- (c) $D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C)$

Lema 2.4.2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados y distintos del vacío. Si $D(A, B) = 0$ entonces $A = B$.

Demostración: Por definición $D(A, B) = 0$ implica que $A \subset B_0$ y $B \subset A_0$ entonces para todo $a \in A$ se cumple $d(a, B) = 0$ y para todo $b \in B$ se tiene que $d(b, A) = 0$. Ahora, supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que a_0 no pertenece a B , entonces por el Teorema 1.2.1 $d(a_0, B) > 0$, esto contradice que $A \subset B_0$, la contradicción demuestra que $A \subset B$. Análogamente se demuestra que $B \subset A$, por lo tanto $A = B$.

□

Observación 2.4.1. En general $D(A, B)$ puede ser infinito, sin embargo si A y B son acotados se tiene que la distancia de Hausdorff siempre es finita.

Teorema 2.4.1. Con la distancia de Hausdorff \mathcal{C} es un espacio métrico.

Demostración: Sean $A, B, C \in \mathcal{C}$. Por el Lema 2.4.1 se cumple que $D(A, B) \geq 0$, $D(A, B) = D(B, A)$ y $D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C)$. Por el Lema 2.4.1 y el Lema 2.4.2 se cumple que $D(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.

□

Ahora veremos algunas propiedades fundamentales de la métrica de Hausdorff y otros resultados que serán útiles en secciones posteriores. Centraremos nuestra atención en la colección de los conjuntos convexos de \mathcal{C} , a la *colección de los conjuntos compactos, no vacíos y convexos de \mathbb{R}^n* la denotaremos \mathcal{K} .

Observación 2.4.2. Una consecuencia importante del Teorema 2.4.1 es el hecho de \mathcal{K} junto con D es un espacio métrico.

Definición 2.4.2. Sea $\{A_i\}$ una sucesión de subconjuntos de \mathbb{R}^n cerrados y distintos del vacío decimos que *la sucesión converge en Hausdorff* a un subconjunto A si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D(A_i, A) = 0$$

Observación 2.4.3. La definición de convergencia en Hausdorff requiere que los conjuntos sean cerrados; de otra manera (Lema 2.4.2) el límite de la sucesión no está bien definido.

Definición 2.4.3. Una colección de elementos de \mathcal{K} es *acotada* si para cada miembro de la colección existe una bola que lo contiene. Decimos que la colección es *uniformemente acotada* si existe una bola en \mathbb{R}^n que contiene a todos los elementos de la colección.

Teorema 2.4.2. Sea $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en \mathcal{K} . Si $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ entonces K es convexo.

Demostración: Supongamos que K no es convexo. Sean $x, y \in K$ tales que $[x, y]$ no está contenido en K , entonces existe $z \in [x, y]$ tal que $z \notin K$, como K es cerrado tenemos que el complemento de K es abierto, entonces existe un número real $\delta \geq 0$ tal que $\bar{B}(z, \delta) \cap K = \emptyset$.

Por hipótesis tenemos que para $\frac{\delta}{2}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $D(K_i, K) < \frac{\delta}{2}$ para $i \geq m$. Por definición, la desigualdad anterior implica que podemos tomar $x', y' \in K_j$, $j \geq m$, tales que $d(x, x') < \frac{\delta}{2}$ y $d(y, y') < \frac{\delta}{2}$, de aquí que $d(z, z') < \frac{\delta}{2}$ para algún $z' \in [x', y']$. Esto implica que $d(z', K) > \frac{\delta}{2}$, entonces $z' \notin K$, esto contradice que K_j es convexo, esta contradicción demuestra que K es convexo.

□

El resultado más importante respecto al espacio \mathcal{K} es el *Teorema de selección de Blaschke* ([5] sección 9.11 y [16] sección 15). La importancia del Teorema de Blaschke radica en que demuestra para el espacio \mathcal{K} lo que el Teorema de Bolzano-Weirstrass demuestra para puntos en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.4.3. Toda sucesión acotada en \mathcal{K} tiene una subsucesión que converge a un conjunto compacto.

En el caso de que la sucesión sea uniformemente acotada se tiene que existe una subsucesión que converge en \mathcal{K} ([16], Teorema 15.2). El siguiente resultado ([26] Teorema 1.8.7) nos da un criterio para la convergencia respecto a la métrica de Hausdorff en términos de la convergencia con la métrica euclidiana.

Teorema 2.4.4. La convergencia

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$$

en \mathcal{K} con la métrica de Hausdorff es equivalente a las siguientes dos condiciones:

- (a) Todo $x \in K$ es el límite de una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i \in K_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
 (b) Para cada sucesión $\{x_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{i_j} \in K_{i_j}$ y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{i_j} = x$$

se satisface que $x \in K$.

Ahora definiremos continuidad para funciones de \mathcal{K} en los reales. Un ejemplo de estas funciones es el diámetro de un conjunto compacto y convexo de \mathbb{R}^n (Definición 1.2.2).

Definición 2.4.4. Consideremos una función $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que f es continua si para cada $K \in \mathcal{K}$ dado un real $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, donde δ depende de K y ε , tal que para cualquier $L \in \mathcal{K}$ que satisface $D(K, L) < \delta$ se cumple $|f(K) - f(L)| < \varepsilon$.

Teorema 2.4.5. Sean $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{K} tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K,$$

respecto a la métrica de Hausdorff, con $K \in \mathcal{K}$, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(K_i) = f(K).$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, la continuidad de f implica que existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $L \in \mathcal{K}$ que satisface $D(K, L) < \delta$ se cumple $|f(K) - f(L)| < \varepsilon$. Por otro lado, para δ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $D(K, K_j) < \delta$, con $j \geq N$. Ahora, $D(K, K_j) < \delta$ implica $|f(K) - f(K_j)| < \varepsilon$, esto implica que dado ε existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(K) - f(K_j)| < \varepsilon$ siempre que $j \geq N$. Por lo tanto $\lim_{i \rightarrow \infty} f(K_i) = f(K)$.

□

Una función importante es la proyección ortogonal; en la Definición 2.3.2 definimos el conjunto proyección de un cuerpo convexo sobre un hiperplano, ahora para un hiperplano H y $K \in \mathcal{K}$ le asignamos a K el conjunto proyección $\Pi_H(K)$. Dado un hiperplano H de \mathbb{R}^n denotaremos \mathcal{K}_H a la colección de los subconjuntos de H compactos, convexos y distintos del vacío.

Definición 2.4.5. Dado un conjunto $K \in \mathcal{K}$ y un hiperplano H de \mathbb{R}^n fijo, definimos la función $p : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_H$ como

$$p(K) = \Pi_H(K).$$

Finalmente, daremos la noción de convergencia para conjuntos de \mathbb{R}^3 , cerrados, convexos pero no acotados. Para esto se define la convergencia en términos de la función distancia. Esto es, dada una sucesión $\{A_i\}$ de conjuntos cerrados se dice que la sucesión converge a un conjunto A si $d(\cdot, A_i) \rightarrow d(\cdot, A)$. Sin embargo resulta más conveniente la siguiente definición ([27] Teorema 3.3).

Definición 2.4.6. Sea $\{A_i\}$ una sucesión de conjuntos cerrados y distintos del vacío en \mathbb{R}^n . Diremos que *la sucesión converge a un conjunto A* si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(x, A_i) = 0$$

para todo $x \in A$.

Capítulo 3

Cuerpos convexos simétricos

La principal motivación de este trabajo es determinar cuando un conjunto convexo cuenta con algún tipo de simetría. Sabemos que si todas las secciones de un cuerpo convexo $K \in \mathbb{R}^n$ son centralmente simétricas entonces el cuerpo tiene centro [22], más aún, si las secciones pasan por un punto en [24] se demuestra que el cuerpo K tiene centro. El problema cuando las secciones de $K \subset \mathbb{R}^3$ son simétricas respecto a una línea presenta cierta dificultad, en [18] Montejano aborda una conjetura de Bezdek que dice que si cada sección de un cuerpo convexo, en \mathbb{R}^n , tiene al menos una línea de simetría entonces el cuerpo es un elipsoide o un cuerpo de revolución; Montejano demuestra que si $K \subset \mathbb{R}^3$ satisface que todas las secciones planas por un punto, en el interior de K , tienen línea de simetría entonces K debe tener una sección que es un círculo; revisaremos esta demostración y aplicaremos las ideas de [18] para demostrar el resultado correspondiente a proyecciones ortogonales. Por otro lado, planteamos un problema, sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n y un punto p tal que todos los hiperplanos que contienen a p son hiperplanos de simetría de K entonces K es una bola con centro en ese punto. A partir de esto, nos preguntamos si podemos concluir que K es una bola usando el hecho de que K posee una colección infinita de hiperplanos de simetría, es decir, hay un conjunto infinito numerable de hiperplanos de simetría de K . Demostraremos que si K es un cuerpo convexo en \mathbb{R}^3 y hay un número infinito de planos de simetría de K entonces, K es un cuerpo de revolución o es una bola. Este trabajo está encaminado a entender un problema más general, esto es, si las secciones de un cuerpo convexo K son simétricas entonces el cuerpo es simétrico.

3.1. Cuerpos con planos de simetría

Las bolas cerradas en \mathbb{R}^n no son los únicos cuerpos convexos centralmente simétricos, sin embargo, sí son los únicos que satisfacen que cualquier hiperplano por el centro es un hiperplano de simetría. En \mathbb{R}^3 esto significa que si todos los planos por un punto son planos de simetría de un cuerpo convexo K entonces K es una bola.

Teorema 3.1.1. Sean K un cuerpo convexo y p un punto en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Si cada hiperplano por p es hiperplano de simetría de K , entonces K es una bola con centro en p .

Demostración: Recordemos que el Teorema 1.5.5 afirma que si H_1, \dots, H_n son hiperplanos en \mathbb{R}^n con un punto en común p y ortogonales entre sí, entonces la composición de funciones $\sigma_{H_n} \circ \dots \circ \sigma_{H_1}$ es igual a la reflexión respecto al punto p . Por hipótesis cada hiperplano que contiene a p es hiperplano de simetría de K , en particular podemos encontrar H_1, \dots, H_n hiperplanos de simetría de K ortogonales entre sí que contienen a p , entonces la isometría $\sigma_{H_n} \circ \dots \circ \sigma_{H_1}$ es igual a σ_p , como cada H_i es hiperplano de simetría de K , para $i = 1, \dots, n$, tenemos que $\sigma_{H_n} \circ \dots \circ \sigma_{H_1}(H) = H$, esto implica que $\sigma_p(H) = H$. Por lo tanto K tiene centro en p .

Sea $C \in \mathbb{R}^n$ la circunfera de K , el Lema 1.5.2 nos dice que un cuerpo centralmente simétrico y su circunfera son concéntricos, por lo cual tenemos que C tiene centro en p . Sabemos que $\text{bd } K \cap C \neq \emptyset$, tomemos $a \in \text{bd } K \cap C$ y sea $b \in C$ tal que $a \neq b$, vamos a demostrar que $b \in \text{bd } K$. Por el Teorema 1.2.3 sabemos que

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) = d(x, b)\}$$

es un hiperplano ortogonal a $[a, b]$, como $a, b \in C$ se tiene que $p \in H$, esto implica que K es simétrico respecto a H ; además, el punto medio de $[a, b]$ pertenece a H entonces tenemos que $b = \sigma_H(a)$ y $a \in \text{bd } K$ implica que $b \in \text{bd } K$. Por la convexidad de K concluimos que $\text{bd } K = C$ y por el Teorema 2.2.2 tenemos que K es una bola con centro en p .

□

Ahora, supondremos la existencia de una infinidad de planos de simetría y demostraremos que el cuerpo es de revolución o es una bola. Para esto, es necesario demostrar los siguientes lemas.

Lema 3.1.1. Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ convexo y acotado. Si existe una colección infinita $\{\ell_i\} \subset \mathbb{R}^2$ de líneas de simetría de K entonces K es un círculo.

Demostración: Sabemos que existe una subsucesión, la cual denotaremos $\{\ell_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, y una línea $\ell \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \ell_i = \ell \quad (3.1)$$

Por el Teorema 1.4.5 sabemos que las líneas de simetría de K concurren en un punto $p \in \mathbb{R}^2$, es fácil ver que $p \in \ell$. Consideremos un sistema de coordenadas donde p sea el origen y ℓ sea el eje x . Denotemos θ_j al ángulo de ℓ a ℓ_j , por 3.1 se tiene que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = 0 \quad (3.2)$$

Tomemos $w \in \text{bd } K$ y consideremos sus coordenadas polares (r, β) con $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, en virtud de 3.2 podemos encontrar $j \in \mathbb{N}$ tal que $\theta_j < \beta$.

Consideremos w' la reflexión de w respecto a ℓ_j , esto es $w' = \sigma_{\ell_j}(w)$, denotemos sus coordenadas polares (r', β') y notemos que $r' = r$.

Vamos a verificar que $\beta > \beta'$. Tenemos que $\theta_j < \beta$, entonces el ángulo de ℓ a $[p, w]$ es igual a $\beta - \theta_j$, como las isometría preservan ángulos, el ángulo de $[p, w']$ a ℓ es $\beta - \theta_j$ entonces $\beta' = |\theta_j - (\beta - \theta_j)|$. Ahora,

$$0 < \theta_j < \beta$$

implica que

$$-\beta < 2\theta_j - \beta < \beta,$$

esto es,

$$-\beta < \theta_j - (\beta - \theta_j) < \beta$$

entonces

$$|\theta_j - (\beta - \theta_j)| < \beta$$

En forma recursiva obtenemos una sucesión $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos en $\text{bd } K$ con coordenadas polares (r, β_i) , tenemos que $\beta_{i+1} < \beta_i$ y $0 < \beta_i < \frac{\pi}{2}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\beta_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$. Entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} w_i = (r, 0). \quad (3.3)$$

Veamos que $(r, 0) \in \text{bd } K$. Supongamos que $(r, 0)$ no está en $\text{bd } K$ entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B((r, 0), \varepsilon_0)$ está contenida en el interior de K o está contenida en el complemento de K . Por 3.3 tenemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $d(w_j, (r, 0)) < \varepsilon_0$ esto implica que w_j pertenece a $B((r, 0), \varepsilon_0)$ y entonces w_j no está en $\text{bd } K$. Esto es una contradicción, por construcción se tiene $w_i \in \text{bd } K$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Denotemos en coordenadas polares a $\ell \cap \text{bd } K$ como $(r_0, 0)$, sabemos que $(r, 0) \in \text{bd } K$ entonces la convexidad de K implica que $r = r_0$.

Concluimos que para $w \in \text{bd } K$ con coordenadas polares (r, β) si $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ entonces $r = r_0$. Es decir, estos puntos determinan un arco de circunferencia de radio r_0 con centro en p . Análogamente se puede demostrar que los puntos en $\text{bd } K$ con coordenadas polares (r, β) , donde $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, pertenecen a un arco de circunferencia de radio r_0 y centro en p .

□

Recordemos de la Definición 2.2.3 que el pie de un punto x sobre un conjunto K en \mathbb{R}^n es el punto en $p(x, K) \in K$ cuya distancia a x es mínima y sabemos por el Teorema 2.2.3 que si $K \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado, convexo y distinto del vacío el punto $p(x, K)$ es único. En adelante, el pie de un punto sobre un plano y una línea cobrarán importancia en las demostraciones.

Teorema 3.1.2. Sean $\{K_i\}$ una sucesión de subconjuntos de \mathbb{R}^n cerrados, distintos del vacío y $K \subset \mathbb{R}^n$ cerrado, distinto del vacío. Si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$$

entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ la sucesión $\{x_i\}$, donde $x_i = p(x, K_i)$, converge al punto $p(x, K)$.

El resultado anterior es consecuencia del Teorema 3.3 de [27].

Lema 3.1.2. Sean $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo y $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de planos de simetría de K . Si existe un plano $H \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H_i = H \tag{3.4}$$

entonces H es plano de simetría de K .

Demostración: Sea $x \in \text{bd } K$, llamemos x_i a la reflexión de x respecto a H_i para todo $i \in \mathbb{N}$, de esta forma obtenemos una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{bd } K$. Como K es compacto tenemos que existen una subsucesión $\{x_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ y $x' \in K$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{i_j} = x' \tag{3.5}$$

Vamos a demostrar que x' es la reflexión de x respecto a H , primero vamos a verificar que $d(x, H) = d(x', H)$.

Consideremos, para cada $i \in \mathbb{N}$, los puntos $y_i = p(x, H_i)$ entonces por la hipótesis 3.4 y el Teorema 3.1.2 tenemos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y \quad (3.6)$$

donde $y = p(x, H)$. Por la definición de x_i tenemos que

$$d(x_i, H_i) = d(x, H_i)$$

y

$$p(x_i, H_i) = p(x, H_i),$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $d(x_i, y_i) = d(x_i, y_i)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y$$

y esto implica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_{i_j} = y \quad (3.7)$$

Por 3.5 y 3.7 tenemos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{i_j}, y_{i_j}) = d(x', y)$$

y también se cumple que $d(x_{i_j}, y_{i_j}) = d(x, y_{i_j})$

Además, la función distancia al punto x , $d(x, y)$, es continua entonces 3.7 implica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(x, y_{i_j}) = d(x, y) \quad (3.8)$$

como el límite de una sucesión es único se tiene de 3.7 y 3.8 que $d(x, y) = d(x', y)$, es decir, $d(x, H) = d(x', H)$.

Para concluir que H es plano de simetría de K mostraremos que $x' \in \text{bd } K$. Supongamos que $x' \notin \text{bd } K$ entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(x', \varepsilon_0)$ está contenida en el interior de K o en el complemento K , por otro lado 3.7 implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{i_n}) < \varepsilon_0$, esto implica que $x_{i_n} \in B(x', \varepsilon_0)$ entonces $x_{i_n} \notin \text{bd } K$, esto contradice que la sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ está contenida en $\text{bd } K$. Por lo tanto $x' \in \text{bd } K$

□

Es fácil verificar que la afirmación del siguiente lema es cierta.

Lema 3.1.3. Sea $\{K_i\}$ una sucesión de figuras convexas tales que $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ la figura K_i tiene dos líneas de simetría que determinan un ángulo θ_i . Si $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = 0$ entonces K es un círculo.

Teorema 3.1.3. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ cuerpo convexo si existe $\{H_i\} \subset \mathbb{R}^2$ una colección infinita de planos de simetría de K entonces K es un cuerpo de revolución o una esfera.

Demostración: Primero supongamos que existe una línea $\ell \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\ell \subset H_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea Π un plano ortogonal a ℓ tal que $\Pi \cap K \neq \emptyset$. Veremos que $\Pi \cap K$ es un círculo con centro en $\Pi \cap \ell$. Como $\ell \subset H_i$ y ℓ es ortogonal a Π para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos que Π es ortogonal a H_i para todo $i \in \mathbb{N}$. Veamos que la sección $\Pi \cap K$ es simétrica respecto a H_j , tomemos $x \in K \cap \Pi$ y llamemos x' a la reflexión de x en el plano H_j . Como H_j es plano de simetría se tiene que $x' \in K$ y el segmento $[x, x']$ es ortogonal a H_j , entonces $[x, x'] \subset \Pi \cap K$. $\Pi \cap K$ es simétrica respecto a la línea $\Pi \cap H_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Esto significa que $\Pi \cap K$ tiene una infinidad de líneas de simetría, por el Lema 3.1.1 se tiene que $\Pi \cap K$ es un círculo. Esto se cumple para cualquier plano Π ortogonal a ℓ y $\Pi \cap K \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que no hay una línea en \mathbb{R}^3 que contenga una infinidad de planos de la colección $\{H_i\}$. A cada plano H_i le podemos asociar un punto en $\text{int } K$, como K es compacto estos puntos tienen una subsucesión convergente, entonces tenemos que existe una subsucesión de planos de simetría, la cual denotaremos $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, y un plano $H \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H_i = H. \quad (3.9)$$

El Lema 3.1.2 afirma que si una sucesión de planos de simetría de K converge en Hausdorff a un hiperplano H , entonces H es plano de simetría de K . Consideremos la colección de segmentos $l_i = H \cap H_i \cap K$, por el Teorema de selección de Blaschke sabemos que existe una subsucesión, que denotaremos $\{l_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, y un segmento $l \subset H$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} l_j = l \quad (3.10)$$

con la métrica de Hausdorff. Por el Teorema 2.4.4, el límite 3.10 implica que para cada $q \in l$ existen $\{q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $q_j \in l_j$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} q_j = q$.

Denotemos K_j a la sección de K ortogonal a l_j que contiene a q_j y K_0 a la sección ortogonal a l que pasa por q . Precisamente la convergencia de los segmentos y la convergencia de $\{q_j\}$ implica la convergencia $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K_0$.

Observemos que cada sección K_i tiene dos líneas de simetría, una determinada por $H \cap K_i$ y otra determinada por $H_i \cap K_i$, de 3.9 se sigue que el ángulo formado por estas líneas de simetría tiende a cero cuando i tiende a infinito. Como las secciones convergen a K_0 tenemos, por el Lema 3.1.3, que K_0 es un círculo. Como $q \in l$ es arbitrario, hemos demostrado que cada sección ortogonal a ℓ es un círculo y esto implica que ℓ es un eje de revolución. Ahora, tomemos H' un plano de simetría de K que no contiene a ℓ y

consideremos ℓ' la reflexión de ℓ respecto a H' , entonces ℓ' es un eje de revolución de K y sabemos que la esfera es la única superficie que puede ser generada por más de un eje de revolución ([12] p. 10).

□

3.2. Secciones y proyecciones con línea de simetría

Antes del Teorema de Montejano, veremos un resultado y notación que usaremos en la demostración. Por sí mismos los lemas que hemos presentado en el capítulo son problemas interesantes además nos permiten demostrar algunas afirmaciones hechas en [18].

Teorema 3.2.1. Sean $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios afines de \mathbb{R}^3 , de dimensión $1 \leq k \leq 2$, y $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en \mathbb{R}^3 tales que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L_i = L \quad (3.11)$$

y

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x \quad (3.12)$$

Entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p(x_i, L_i) = p(x, L)$$

Demostración: Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(p(x, L), p(x_i, L_i)) \leq d(p(x, L), p(x, L_i)) + d(p(x, L_i), p(x_i, L_i)).$$

Por el Teorema 2.2.4 sabemos que si C es un conjunto cerrado y no vacío, entonces para cualquier pareja de puntos x y y se satisface $d(p(x, C), p(y, C)) \leq d(x, y)$. Aplicando esto a la desigualdad anterior obtenemos

$$d(p(x, L), p(x_i, L_i)) \leq d(p(x, L), p(x, L_i)) + d(x, x_i). \quad (3.13)$$

La hipótesis 3.11 y el Teorema 3.1.2 implican que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(p(x, L), p(x, L_i)) = 0,$$

por otro lado la hipótesis 3.12 implica

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(x, x_i) = 0,$$

entonces de la desigualdad 3.13 podemos concluir que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(p(x_i, L_i), p(x, L)) = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p(x_i, L_i) = p(x, L).$$

□

Lema 3.2.1. Sea $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ una sucesión de conjuntos convexos compactos tales que ℓ_i es línea de simetría de K_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Si hay un conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$ y una línea $\ell \subset \mathbb{R}^2$ tales que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$$

con la métrica de Hausdorff y

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \ell_i = \ell$$

entonces ℓ es línea de simetría de K .

Demostración: Sea $x \in K$, por el Teorema 2.4.4 existe una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i \in K_i$ y

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x. \quad (3.14)$$

Ahora, definimos $y_i = \sigma_{\ell_i}(x_i)$, como ℓ_i es línea de simetría de K_i para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $y_i \in K_i$. Por el Teorema 2.4.4 existe $\{y_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_{i_j} = y \quad (3.15)$$

para algún $y \in K$. Vamos a demostrar que $y = \sigma_{\ell}(x)$, para esto consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$ el pie de x_i sobre ℓ_i , esto es, consideremos los puntos $p_i = p(x_i, \ell_i)$. El Teorema 3.2.1, la convergencia 3.14 y la convergencia de las líneas de simetría implican que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p. \quad (3.16)$$

donde $p = p(x, \ell)$.

La convergencia 3.16 implica

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_{i_j} = p(x, \ell). \quad (3.17)$$

Por la definición de y_i tenemos que $p(x_i, \ell_i) = p(y_i, \ell_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$; entonces se cumple que $p_{i_j} = p(y_{i_j}, \ell_{i_j})$; el Teorema 3.2.1, la convergencia de las líneas de simetría y la convergencia en 3.15 implican que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p_{i_j} = p(y, \ell). \quad (3.18)$$

Entonces de 3.17 y 3.18 se tiene

$$p = p(y, \ell).$$

Para concluir que $y = \sigma_\ell(x)$ basta verificar que $d(y, \ell) = d(x, \ell)$, es decir, $d(y, p) = d(x, p)$. De 3.14 y 3.18 se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{i_j}, p_{i_j}) = d(x, p) \quad (3.19)$$

y de 3.15 y 3.17 se concluye

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(y_{i_j}, p_{i_j}) = d(y, p) \quad (3.20)$$

pero $d(x_{i_j}, p_{i_j}) = d(y_{i_j}, p_{i_j})$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces de 3.19 y 3.20 se sigue que $d(x, p) = d(y, p)$.

□

Observación 3.2.1. Es necesario señalar que, en el lema anterior, si consideramos que las figuras convexas K_i están contenidas en planos en \mathbb{R}^3 entonces la demostración es similar, basta considerar que la simetría respecto a una línea ℓ en \mathbb{R}^3 es la simetría respecto a la rotación alrededor de ℓ un ángulo de 180° , la cual denotamos ρ_ℓ , vimos (Teorema 1.5.1, página 25) que si H y H' son dos planos ortogonales tales que $H \cap H' = \ell$ entonces $\rho_\ell = \sigma_{H'} \circ \sigma_H$, esto implica que para los puntos $x \in H$ se tiene $\rho_\ell(x) = \sigma_{H'}(x)$.

Definición 3.2.1. Sean $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo y $H \subset \mathbb{R}^3$ un plano tal que $H \cap \text{int } K$ es distinto del vacío. Denotaremos por $\mu(H, K)$ el número de líneas de simetría de $H \cap K$.

Lema 3.2.2. Sean $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo y $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ una colección de planos tales que $H \cap K$ es distinto del vacío para todo $i \in \mathbb{N}$. Si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H_i = H$$

y

$$\mu(H_i, K) \rightarrow \infty$$

entonces $H \cap K$ es un círculo.

Ahora, citaremos el siguiente resultado que contiene un argumento topológico basado en los resultados de Mani [25].

Teorema 3.2.2. Es imposible elegir continuamente, por cada plano H por el origen en \mathbb{R}^3 , una n -estrella de líneas, para $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2.3. (Montejano). Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo y $p \in \text{int } K$. Supongamos que para cada plano H por p la sección $H \cap K$ tiene una línea de simetría, entonces existe una sección de K por p que es un círculo.

Demostración: Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo y $p \in \text{int } K$. Supongamos que todos los planos $H \in \mathbb{R}^3$ que contienen a p determinan secciones $H \cap K$ con línea de simetría. Supongamos además que para cada plano H por p se satisface que $1 \leq \mu(H, K) \leq n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sean $m = n!$, $\ell \in H$ línea de simetría de $H \cap K$ y $\Gamma = H - p$, denotemos S_Π a la m -estrella de líneas contenida en Γ con centro en el origen tal que S_Γ contiene a la línea por el origen paralela a ℓ . Notemos que S_Γ no depende de la elección de la línea de simetría de K_H . Sea \mathcal{F} la función que asigna a cada plano por el origen Γ la m -estrella S_Γ . Veremos que \mathcal{F} es continua, sea $\{\Gamma_i\}$ una sucesión de planos por el origen tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma_i = \Gamma,$$

esto es,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H_i - p = H - p$$

Supongamos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{\Gamma_i} \neq S_\Gamma$$

esto implica que existe una subsucesión $\{S_{i_j}\}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{\Gamma_{i_j}} = \mathcal{S}$$

donde \mathcal{S} es una m -estrella de líneas contenida en Γ con centro en el origen y distinta de S_Γ . Por definición, para cada $S_{\Gamma_{i_j}}$ hay una línea por el origen S_{i_j} paralela a una línea de simetría de $H_{i_j} \cap K$ la cual denotaremos ℓ_{i_j} , entonces hay una subsucesión, que llamaremos $\{S_{i_j}\}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{i_j} = L$$

entonces $L \in \mathcal{S}$.

Como las líneas ℓ_{i_j} son líneas de simetría de las figuras planas $H_{i_j} \cap K$, por el Lema 3.2.1 y la observación 3.2.1, tenemos que $\{\ell_{i_j}\}$ converge a una línea ℓ que es línea de simetría de $H \cap K$, esto implica que la línea L es paralela a una línea de simetría de $H \cap K$ y esto implica que $L \in S_\Gamma$, lo cual contradice $L \in \mathcal{S}$. Entonces la función \mathcal{F} es continua y esto contradice el Teorema 3.2.2.

□

Ahora veremos el Teorema 3.2.3 para el caso de proyecciones ortogonales. La demostración es similar a la de 3.2.3, sin embargo, tenemos que introducir el siguiente resultado.

Lema 3.2.3. Sean $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo y $\{H_i\}$ una sucesión de planos por el origen. Si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H_i = H$$

entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Pi_{H_i}(K) = \Pi_H(K)$$

con la métrica de Hausdorff.

Demostración: Usaremos el criterio del Teorema 2.4.4 para demostrar la convergencia respecto a la métrica de Hausdorff.

Sea $p \in \Pi_H(K)$, entonces hay una línea ℓ ortogonal a H que pasa por p y $\ell \cap K \neq \emptyset$. Consideremos $q \in \ell \cap K$, tenemos que p es el pie de q sobre H , esto es, $p = p(q, H)$ y definimos $p_i = p(q, H_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$; por el Teorema 3.2.1 tenemos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p$$

entonces se satisface la condición (a) del Teorema 2.4.4.

Ahora, sea $p_i \in \Pi_{H_i}$ para $i \in \mathbb{N}$, entonces por la Definición 2.3.2 tenemos que existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $u_i \in \mathbb{R}^3$ ortogonal a H_i tal que $p_i + \lambda_i u_i \in K$. Denotamos $y_i = p_i + \lambda_i u_i$, tenemos una sucesión $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset K$ entonces existe $\{y_{i_j}\} \subset \{y_i\}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_{i_j} = y$$

para algún $y \in K$. Además tenemos que $p_{i_j} = p(y_{i_j}, H_{i_j})$ para cada $j \in \mathbb{N}$, de nuevo por el Teorema 3.2.1 se tiene

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p_{i_j} = p(y, H),$$

como $y \in K$ tenemos que se satisface la condición (b) del Teorema 2.4.4

Por lo tanto tenemos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Pi_{H_i}(K) = \Pi_H(K).$$

□

Teorema 3.2.4. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo convexo. Supongamos que para cada plano H por el origen la proyección ortogonal de K sobre H tiene una línea de simetría, entonces existe una proyección ortogonal de K que es un círculo.

La demostración es similar a la del Teorema 3.2.3, si consideramos ℓ la línea de simetría de la proyección de K sobre un plano H por el origen, ℓ no necesariamente pasa por el origen entonces tomamos la línea $L \subset H$ por el origen paralela a ℓ y llamamos S_H la n -estrella contenida en H con centro en el origen y que contiene a L . De esta manera definimos la función \mathcal{F} como en la demostración del Teorema 3.2.3, esto es, a cada plano H le asignamos la n -estrella S_H . Entonces, si suponemos que para cada plano por el origen H la proyección de K sobre H no es un círculo llegaremos a la misma contradicción que en la demostración de 3.2.3.

Bibliografía

- [1] Aarts, J.M. *Plane and Solid Geometry*, Universitext, Springer Verlag, 2008.
- [2] Aitchison, P. W., C. M. Petty and C. A. Rogers. *A convex body with a false centre is an ellipsoid*, *Mathematika* 18, 1971, pp. 50-9.
- [3] Arelio Ríos, I., *Algunos resultados sobre la geometría de los cuerpos convexos*, tesis de Licenciatura, Facultad de Matemáticas, Universidad de Guanajuato, 2008.
- [4] Benson, R. V. *Euclidean Geometry and Convexity*, Mc Graw-Hill, 1966.
- [5] Berger M. *Geometry* Vol. I, Universitext, Springer Verlag, 2009.
- [6] Bonnesen, T. y W. Fenchel, *Theorie der Konvexen Korper*, *Ergebn. d. Math. u ihrer Grenzgeb.* Bd.3, J. Springer Verlag, 1934.
- [7] Busemann, H. *The Geometry of Geodesics*, Dover Publications, 2005.
- [8] Eggleston, H. G. *Convexity*, Cambridge University Press, 1969.
- [9] Ewald, G. *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Springer Verlag, 1996.
- [10] Gardner, R. J. *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, 1995.
- [11] Hadwiger, H. *Lo antiguo y lo nuevo acerca de los conjuntos convexos*, Traducción: L. Montejano, Aportaciones Matemáticas No. 10, SMM, 1998.
- [12] Hilbert D., Cohn-Vossen V., *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company, 1990.
- [13] Hörmander L., *Notions of Convexity*, Birkhäuser, Progress in Mathematics vol. 127, 1994
- [14] Kelly, P. J. y Weiss, M. L. *Geometry and Convexity*, John Wiley and Sons, 1979.

- [15] Larman, D.G. A note on the false center problem, *Mathematika* 21, 1974, pp. 216-227.
- [16] Lay, S. R. *Convex Sets and their applications*, John Wiley and Sons, 1982.
- [17] Montejano Peimbert, L. *La Cara Oculta de las Esferas*, La ciencia desde México 75, Fondo de Cultura Económica, 1989
- [18] Montejano Peimbert, L. *Two applications of topology to convex geometry*, Proceedings of the Steklov Institut of Mathematics, vol. 247, 2004, pp. 164-167.
- [19] Montejano Peimbert, L. *Orthogonal projections of convex bodies and central symmetry*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, vol. 38, 1993, pp. 1-7.
- [20] Jéronimo Castro, J., Montejano Peimbert, L., Morales Amaya, E. *Shaken Roger's theorem for homothetic sections*, Canadian Mathematical Bulletin, vol. 52, no. 3, 2009, pp. 403-406.
- [21] Jéronimo Castro, J., Montejano Peimbert, L., Morales Amaya, E. *Only solid spheres admit a false axis of revolution*, por aparecer en Journal of Convex Analysis.
- [22] Morales Amaya, E. *Libro en preparación*
- [23] Moszyńska, Maria. *Selected Topics in Convex Geometry*, Birkhäuser, 2006.
- [24] Rogers, C. A., *Section and projections of convex bodies*, Port. Math. Vol. 24, 1965, pp. 99-103.
- [25] Mani, P., *Fields of Planar Bodies Tangent to Spheres*, Monatsh. Math. Vol. 74, 1970, pp. 145-149.
- [26] Schneider R., *Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [27] Schochetman, I. E., Smith R. L., *Convergence of Best Approximations from Unbounded Sets*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 166, 1992.
- [28] Webster, R., *Convexity*, Oxford University Press, 1994
- [29] Yaglom, I. M., *Geometric Transformations Vol. I*, The Mathematical Association of America, 1962.