



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ESQUEMAS CONTEXTUALES SUBÓPTIMOS DE
SEGMENTACIÓN**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

P R E S E N T A :

ING. MARLENE RODRÍGUEZ CRUZ

T U T O R :

DR. MIGUEL MOCTEZUMA FLORES

ENERO DEL 2011.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. García Ugalde Francisco

Secretario: Dr. Lira Chávez Jorge

Vocal: Dr. Moctezuma Flores Miguel

1^{er} Suplente: Dra. Medina Gómez Lucía

2^{do.} Suplente: Dr. García Garduño Víctor

Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Miguel Moctezuma Flores.

FIRMA



Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme regresar a sus instalaciones para estudiar una maestría.

A mis padres: María Luisa y Antonio, por apoyarme en esta y todas las etapas de mi vida. Mamá: ¡¡Ya hicimos la maestría!! Papá: gracias por todo tu apoyo y comprensión.

A mi director de tesis: el Dr. Miguel Moctezuma Flores por toda la paciencia y dedicación que me brindó para el desarrollo de esta tesis.

A CONACYT por el apoyo económico que me brindó durante la maestría y por la estancia de investigación que realicé en el Instituto de Ciencias Atmosféricas y Clima del Consejo de Investigación Nacional Italiano (ISAC_CNR) en Bologna, Italia.

A todos los profesores de la maestría en Procesamiento Digital de Señales por la dedicación, apoyo y paciencia, que tuvieron al compartir sus conocimientos conmigo.

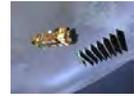
A mi amiga Ana Laura Aca Linares, por recordarme todos los días mientras yo trabajaba en Telcel que me faltaba por cumplir este sueño.

A Francisco Javier Ayala Sánchez, por ser un gran amigo y un gran compañero de equipo.

A mis amigos de maestría: Roy Balderas Jiménez, Antonio García Domínguez, Rosa Patricia Ramírez Juárez, Jorge Antonio García Galicia y Benjamín Gutiérrez Becker por su amistad, y apoyo durante esta importante etapa de mi vida.

Al M.I. Ludwin Ventura López López por compartir sus conocimientos conmigo.

Marlene Rodríguez Cruz.

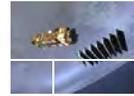


ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Introducción.....	2
1.2 Objetivo.....	2
1.3 Definición del problema.....	2
1.4 Alcance.....	3
1.5 Metodología empleada.....	5
1.6 Aportaciones.....	7
CAPÍTULO 2. PROBABILIDAD Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS.....	8
2.1 Axiomas de probabilidad.....	9
2.2 Variables aleatorias.....	10
2.2.1 Distribución de probabilidad con variable aleatoria discreta.....	10
2.2.2 Distribución de probabilidad con variable aleatoria continua.....	11
2.2.3 Valor esperado de una variable aleatoria.....	13
2.2.4 Momentos de una variable aleatoria.....	14
2.3 Teorema de Bayes.....	17
2.4 Función Normal ó Gaussiana.....	18
2.5 Ley de los grandes números.....	21
2.5.1 Teorema del límite central.....	22
2.6 Procesos estocásticos: Conceptos.....	23
2.6.1 Estacionalidad.....	25
2.6.2 Ergodicidad.....	27
2.6.3 Ejemplos de procesos estocásticos.....	27
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS TEXTURAL.....	30
3.1 Introducción.....	31
3.2 Alternativas en análisis de texturas.....	31
3.2.1 Técnicas espectrales.....	31
3.2.2 Técnicas estructurales.....	31
3.2.3 Técnicas basadas en modelos.....	32
3.2.3.1 Modelo fractal.....	32
3.2.3.2 Modelo de los campos aleatorios de Markov (MRF).....	33
3.2.4 Técnicas estadísticas.....	33
3.2.4.1 Matriz de co-ocurrencia ó grey level co-occurrence matrix (GLCM).....	34
3.2.4.2 Construcción de la matriz de co-ocurrencia.....	35
3.3 Matriz de co-ocurrencia con ventana deslizante.....	41
3.4 Descriptores de textura.....	46
CAPÍTULO 4. CAMPOS ALEATORIOS DE MARKOV.....	52
4.1 Generalidades.....	53
4.2 Topologías.....	55
4.2.1 Vecindades y cliques.....	55



4.2.2 Propiedades de Markov.....	57
4.3 Modelos de Markov.....	60
4.3.1 Modelos de Ising.....	60
4.3.2 Modelos de Potts.....	61
4.4 Optimización.....	62
4.4.1 Muestreador de Gibbs.....	63
4.4.2 Muestreador de Metrópolis.....	64
4.4.3 Esquema de recocido simulado.....	66
4.4.4 Esquemas de decremento de temperatura.....	69
CAPÍTULO 5. MODELO DE FUSIÓN.....	71
5.1 Descripción general.....	72
5.2 Aproximación por Bayes.....	73
5.3 Funciones de energía.....	75
5.3.1 Función de energía a priori.....	75
5.3.2 Función de energía condicional.....	75
5.4 Optimización de la función de energía a posteriori.....	77
5.5 Ejemplo de aplicar el método de recocido simulado a una imagen.....	80
5.6 Esquema de fusión propuesto.....	82
CAPÍTULO 6. RESULTADOS.....	84
6.1 Introducción.....	85
6.2 Resultados para la imagen sintética con cuatro clases	87
6.2.1 Los descriptores de textura utilizando la GLCM.....	87
6.2.2 Selección de las ventanas para cada clase.....	88
6.2.3 Aplicando el recocido simulado a la imagen original.....	89
6.2.4 Aplicando el recocido simulado a la imagen de textura de cluster prominence.....	91
6.2.5 Fusión y segmentación de 3 y 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF.....	93
6.2.6 Comparación entre las segmentaciones realizadas por recocido simulado y por el método de fusión propuesto.....	97
6.3 Resultados para la primera imagen aérea.....	99
6.3.1 Descriptores de textura obtenidos utilizando la GLCM.....	99
6.3.2 Selección de las ventanas para cada clase.....	100
6.3.3 Aplicando el recocido simulado a la imagen original.....	100
6.3.4 Aplicando el recocido simulado a la imagen de textura de autocorrelación.....	102
6.3.5 Fusión y segmentación de 3 y 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF.....	104
6.3.6 Comparación entre las segmentaciones realizadas por recocido simulado y por el método de fusión propuesto.....	108
6.4 Resultados para la segunda imagen aérea.....	112
6.4.1 Descriptores de textura obtenidos utilizando la GLCM.....	112
6.4.2 Selección de las ventanas para cada clase.....	113
6.4.3 Aplicando el recocido simulado a la imagen original.....	114
6.4.4 Aplicando el recocido simulado a la imagen de textura de autocorrelación.....	116
6.4.5 Fusión y segmentación de 3 y 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF.....	118

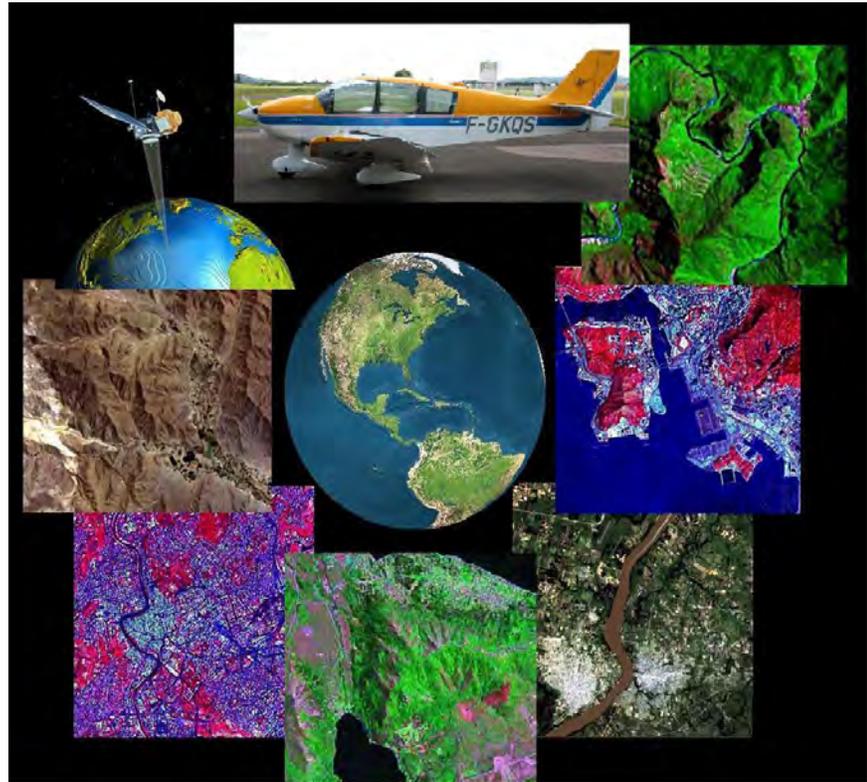


6.4.6 Comparación entre las segmentaciones realizadas por recocido simulado y por el método de fusión propuesto.....	123
6.5 Comparación entre diferentes métodos de segmentación.....	125
6.5.1 Resultados para la imagen sintética.....	125
6.5.1.1 Comparación entre el método Bayesiano de segmentación y clasificación y el método de recocido simulado.....	126
6.5.1.2 Comparación entre la fusión multiclases basada en el método de Shan Yu y el método de fusión propuesto basado en el algoritmo de recocido simulado.....	127
6.5.2 Resultados para la primera imagen aérea.....	130
6.5.2.1 Comparación entre el método Bayesiano de segmentación y clasificación y el método de recocido simulado.....	129
6.5.2.2 Comparación entre la fusión multiclases basada en el método de Shan Yu y el método de fusión propuesto basado en el algoritmo de recocido simulado.....	130
6.5.2.3 Comparando ventanas de los diferentes métodos de segmentación presentados.....	131
6.5.3 Resultados para la segunda imagen aérea.....	133
6.5.3.1 Comparación entre el método Bayesiano de segmentación y clasificación y el método de recocido simulado.....	133
6.5.3.2 Comparación entre la fusión multiclases basada en el método de Shan Yu y el método de fusión propuesto basado en el algoritmo de recocido simulado.....	134
6.5.3.3 Comparando ventanas de los diferentes métodos de segmentación presentados.....	136
CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES.....	138
ANEXO.....	142
Método bayesiano de clasificación.....	143
Método de fusión multiclases basada en el método de fusión binaria propuesto por Shan Yu.....	144
GLOSARIO.....	150
BIBLIOGRAFÍA.....	156

1

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO



Percepción remota^[2.14].



1.1 INTRODUCCIÓN

Desde la época prehistórica, el hombre ha demostrado un profundo interés por el mundo que lo rodea. Este interés lo llevó a explorar la naturaleza por medio de sus sentidos. Con el paso del tiempo y debido a que no toda la información que requería estaba a su alcance, empezó a desarrollar métodos y dispositivos de captura de información a distancia para ampliar sus parámetros de percepción e interpretación del mundo físico.

Actualmente, la ciencia que estudia una escena sin entrar en contacto directo con los elementos que la componen, es la Percepción Remota. La Percepción remota puede ser aérea o satelital. Por medio de ambas, se puede obtener información de la Tierra mediante fotografías usando diferentes tipos de sensores. Esta información se analiza en diferentes técnicas de Procesamiento Digital de Imágenes.

El Procesamiento Digital de Imágenes es la única ciencia práctica para realizar procesos como: segmentar, clasificar, fusionar, extraer características y reconocer patrones de una imagen.

Entre los principales métodos con las que cuenta el Procesamiento Digital de Imágenes están: el filtrado lineal, Wavelets, Redes Neuronales, análisis en componentes principales y los Campos Aleatorios de Markov (MRF).

1.2 OBJETIVO

Definir un esquema estocástico sub-óptimo para la segmentación y fusión de imágenes de percepción remota, basándose en la teoría de Bayes y en los Campos Aleatorios de Markov.

1.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Las tecnologías contemporáneas de Procesamiento digital de imágenes y de Percepción remota se sitúan como fuentes de datos útiles a los sistemas de información ambiental. La fotografía aérea de alta resolución permite realizar análisis detallados de estructuras urbanas y de elementos temáticos. En desventaja, el empleo de técnicas tradicionales de análisis a nivel puntual (pixel por pixel) resuelve solo parcialmente el problema de la información proporcionada por datos pancromáticos, ya que la mezcla de los modos de probabilidad puede conducir a detecciones erróneas. Un análisis conjunto por grupos de píxeles, bajo una definición de vecindad local, puede proporcionar mejores resultados.

Es en este contexto que en el presente tema de tesis, se propone el estudio de técnicas bayesianas y estocásticas para la segmentación y fusión de imágenes de percepción remota. La teoría de los Campos Aleatorios de Markov



permite modelar las interacciones locales vía representaciones contextuales, proporcionando detecciones sin degradación en los contornos. En desventaja, se requiere de modelos precisos en sus funciones de energía y el método de optimización es computacionalmente lento.

El objetivo del presente tema busca definir un esquema estocástico de segmentación, basado en los campos de Markov, que proporcione la fusión de más de 2 imágenes de texturas. Se analizará el caso de las matrices de concurrencia en la obtención de operadores texturales, los cuales considerarán reducción en los niveles de gris, variaciones en los tamaños de ventanas de análisis y de distancia entre pares de píxeles. Otro problema a resolver consiste en la propuesta de un esquema de segmentación. Los operadores de textura proporcionan información parcial de los elementos de la escena, por lo que en este trabajo se integrará un esquema de fusión de datos a efectos de tomar en cuenta la parcialidad en las fuentes de datos. En ambos casos, el fundamento teórico reside en la teoría de Bayes y en la maximización de probabilidades a posteriori.

1.4 ALCANCE

En esta tesis, se pretende realizar el análisis de imágenes de fotografía aérea de alta resolución de diversas escenas urbanas del Distrito Federal. Para lograrlo, a lo largo del presente trabajo se presenta una parte teórica y una parte práctica del análisis de 2 imágenes aéreas a trabajar y de una imagen sintética. A continuación se presenta una descripción general del contenido de cada capítulo de esta tesis.

CAPÍTULO 1

En este capítulo se realiza una introducción sobre el tema de tesis, con el propósito de ofrecer un panorama general de la misma.

CAPÍTULO II

En este capítulo se estudian temas de probabilidad fundamentales para el desarrollo práctico de la tesis, estos temas son: Probabilidad y procesos estocásticos, axiomas de probabilidad, variables aleatorias (continua y discreta), Teorema de Bayes, función gaussiana, ley de los grandes números, teorema del límite central, procesos estocásticos, estacionalidad y ergodicidad.

CAPÍTULO III

En este capítulo, se define el concepto de textura y se presentan algunas alternativas para el análisis textural como: las técnicas espectrales que incluyen la Transformada de Fourier, y las Wavelets, las técnicas estructurales



y las técnicas basadas en modelos. Entre estos últimos se encuentra el modelo fractal, y la técnica basada en los Campos Aleatorios de Markov (MRF).

También se habla de las técnicas estadísticas, dentro de las cuales se encuentra la GLCM (Grey Level Co-ocurrence Matrix). Se explica la forma en que se construye esta matriz, se presentan unos ejemplos y se propone un método para disminuir el tiempo de cómputo al utilizar la GLCM. Este método es conocido como GLCM con ventana deslizante.

Por último se presentan los descriptores de textura, y se describe cada uno de ellos.

CAPÍTULO IV

En el capítulo 4, se define un Campo Aleatorio de Markov (MRF), y los conceptos de malla, site, espacio de estados, configuración, vecindades y cliques. Después, se describen las propiedades de los Campos Aleatorios de Markov, y se menciona el teorema de **Hammersley-Clifford**, para entender la equivalencia entre un Campo Aleatorio de Markov y un Campo aleatorio de Gibbs.

Se investigan algunos modelos de Markov, como son el modelo de Ising y el modelo de Potts, modelo generalizado de Ising. También se mencionan dos tipos de muestreadores: el muestreador de Gibbs y el muestreador de Metrópolis.

Para finalizar el capítulo se presentan algunos esquemas de decremento de temperatura.

CAPÍTULO V

En este capítulo se describe el teorema de Bayes para características múltiples, considerando a estas características como independientes dada la clase.

Después, se describe la aproximación de Bayes y se obtiene la expresión que maximiza la distribución a posteriori del campo de etiquetas. Con base al teorema de Hammersley-Clifford, se establece que encontrar la distribución máximo a posteriori del campo de etiquetas equivale a minimizar una función de energía correspondiente a este mismo campo. Esta función de energía se compone de la adición de la función energía a priori y de la función de energía condicional.

En seguida, se describe el algoritmo de recocido simulado a utilizar en esta tesis, el cual utiliza el modelo de Potts para calcular la función de energía



a priori y funciones trapezoidales para obtener la función de energía condicional.

Con base en el algoritmo de recocido simulado y en el teorema de Bayes para características múltiples, se propone un esquema de fusión de datos, el cual considera tomar más de una imagen de textura como imagen original.

CAPÍTULO 6

En el capítulo 6 se dan los resultados obtenidos después de segmentar, clasificar una imagen de textura por el método de recocido simulado y por el método de segmentación y clasificación Bayesiana y también se presentan los resultados obtenidos de fusionar, segmentar y clasificar 3 y 5 imágenes de textura por el método para fusión y segmentación propuesto en esta tesis y comparar estos resultados con otros obtenidos de realizar una segmentación clasificación y fusión de las mismas imágenes de textura por el método de fusión multiclases basada en el algoritmo de Shan Yu^[6.1] para fusión binaria.

CAPÍTULO 7

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones generales sobre esta tesis y sobre los resultados obtenidos de ella.

1.5 METODOLOGÍA EMPLEADA

El proceso para realizar la segmentación y fusión de imágenes incluyó las siguientes etapas:

- ❖ Disminución de los niveles de gris de la imagen original para agilizar el proceso del cálculo de la matriz de co-ocurrencia.

- ❖ Obtención de la matriz de co-ocurrencia y de imágenes de textura a partir de los descriptores de textura de Haralick sobre las imágenes originales de prueba, utilizando un método rápido para calcular la GLCM a través de una ventana deslizante.

- ❖ Análisis de un esquema bayesiano a fin de integrar las diversas matrices de textura, considerando independencia en las probabilidades condicionales. Estas probabilidades condicionales deben seguir un comportamiento gaussiano.

- ❖ A partir de la ecuación de Bayes y utilizando el teorema de Hammersley-Clifford, se encuentra la función de energía a posteriori con la que se va a trabajar. Minimizar está en función de energía equivale a obtener el estimador máximo a posteriori de la ecuación de Bayes. Esta función de energía queda



compuesta por la adición de una función de energía a priori y una función de energía condicional.

❖ Con base en un esquema máximo a posteriori se modifica el algoritmo de recocido simulado para definir una etapa estocástica de segmentación y fusión de datos. Este esquema utiliza más de una imagen de textura y una imagen solución cuyos pixeles pertenecen a clases determinadas aleatoriamente dentro del rango de número de clases. El algoritmo de recocido simulado incluye el cálculo de la energía a priori, analizando sistemas de vecindad en 8-conexidad, y el cálculo de la energía condicional, a partir de funciones trapezoidales.

El fundamento teórico reside en la teoría de Bayes y en la maximización de probabilidades a posteriori. Dado que no se seguirán los fundamentos teóricos de Metrópolis, por ejemplo no se realizará un gran número (tendiente a infinito) de iteraciones y el decremento de temperatura no será logarítmico, se pretende definir un esquema sub-óptimo de convergencia. Los resultados de la fusión de datos se compararán con el método de Bayes para segmentación y clasificación de imágenes y el método de fusión multiclasas propuesto por Shan Yu. Como aplicación se pretende la segmentación de regiones urbanas del Distrito Federal.

El proceso descrito anteriormente se muestra en la siguiente figura:

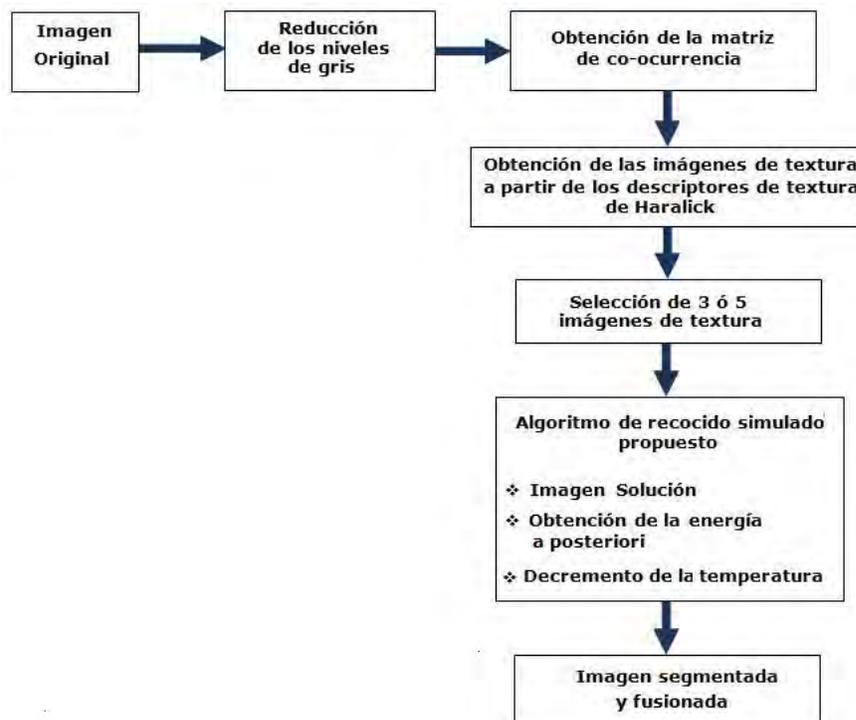


Fig. 1.1 Esquema de segmentación y fusión propuesto



Una vez definido el proceso, se programó el algoritmo en Matlab, y se realizaron pruebas con 2 imágenes de diferentes zonas del sur de la Ciudad de México. Los resultados fueron validados con una imagen sintética.

También se compararon estos resultados con resultados de otros algoritmos de segmentación, entre ellos el método de segmentación y clasificación bayesiana para una sola imagen, y el método de fusión multiclases propuesto en un trabajo anterior y basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

1.6 APORTACIONES

Las aportaciones de la presente Tesis son:

1. Análisis de un esquema bayesiano para características múltiples a fin de integrar las diversas imágenes de textura, considerando independencia en las probabilidades condicionales.
2. Estudio sobre la segmentación por Campos Aleatorios de Markov, utilizando el algoritmo de Recocido simulado.
3. Modificación del algoritmo de recocido simulado con el fin de implementar la segmentación y fusión de varias imágenes de textura.
4. Aplicación del método propuesto a imágenes del sur de la Ciudad de México y validación del método a través de una imagen de sintética.
5. Comparación entre los resultados obtenidos por el método de fusión y segmentación propuesto en la presente tesis y el método de fusión multiclases, basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

2

PROBABILIDAD Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

CAPÍTULO



Andrey Kolmogorov^[2.13]



2. PROBABILIDAD Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Las aplicaciones más antiguas de la teoría de la probabilidad se remontan al siglo XVII. En 1654 un jugador compulsivo llamado Antoine Gombaud (caballero de Méré), intento describir matemáticamente la proporción relativa de tiempo en que se podían ganar ciertas apuestas, sin embargo no tuvo éxito, por lo cual pidió ayuda a dos de los mejores matemáticos de la época que conocía: Pascal y Fermat. Los matemáticos intercambiaron correspondencias con el fin de calcular las frecuencias relativas de ocurrencias en juegos sencillos de apuestas. Lo anterior, dio origen a la teoría de la probabilidad.

Durante mucho tiempo, todo lo que se conocía sobre la probabilidad era una definición sencilla de la frecuencia relativa, la cual dice que si se realiza un experimento al azar, entonces pueden ocurrir varios resultados. La probabilidad de que ocurra un evento X con m resultados, es el cociente m/n , donde n es el número de resultados totales posibles.

Sin embargo, los avances matemáticos en la teoría de la probabilidad no pudieron establecerse firmemente debido a que estaban relativamente limitados. No fue sino hasta que en 1933 el matemático ruso A.N. Kolmogorov enunció un conjunto de tres axiomas o reglas a las que la probabilidad debe ajustarse. Una vez que esta base axiomática se estableció firmemente, se realizaron avances significativos en la teoría de la probabilidad. Estos axiomas se describen a continuación.

2.1 AXIOMAS DE PROBABILIDAD

Sea S un espacio de muestras y A un evento de éste. Se llama función de probabilidad sobre el espacio muestral S a $P(A)$ si satisface los siguientes axiomas:

- 1) La probabilidad de todo evento A debe de ser igual o mayor a cero $P(A) \geq 0$.
- 2) Si la ocurrencia de un evento A es segura, entonces la probabilidad de ese evento es $P(S) = 1$.

Para formular el tercer axioma, primero se tomará en cuenta que si dos eventos son disjuntos, entonces la suma de sus probabilidades individuales es la probabilidad de que uno u otro ocurran. La propiedad aditiva de la probabilidad es válida para cualquier número finito ó infinito de sucesos disjuntos. Por lo tanto, el axioma 3 es:

3. Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i \cap A_j = 0$ para toda $i \neq j$ entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$



Lo que se puede escribir como:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \dots\dots\dots(2.1)$$

Por lo tanto, la definición matemática de la probabilidad es [2.7]:

Una distribución de probabilidad ó la probabilidad sobre un espacio muestral S es una especificación de números $P(A)$ que satisfacen los axiomas 1,2 y 3.

2.2 VARIABLES ALEATORIAS

En muchos experimentos aleatorios es necesario asignar un número real a cada uno de los resultados posibles del experimento. De esta forma, se establece una relación funcional entre los elementos del espacio muestral asociado al experimento y los números reales. Esta relación funcional puede ser uno a uno o uno a muchos.

Formalmente se dice que una variable aleatoria (v.a.) X es una función de valor real definida sobre el espacio muestral S , que asocia un número real a cada elemento de S . Las variables aleatorias se clasifican en:

Variable aleatoria discreta: "Se dice que una variable aleatoria X es discreta si el número de valores que puede tomar es numerable (ya sea finito o infinito), y si éstos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con los enteros positivos"[2.1].

Variable aleatoria continua: "Se dice que una variable aleatoria X es continua si sus valores consisten en uno o más intervalos de los reales"[2.1].

2.2.1 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CON VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Una variable aleatoria discreta X asume cada uno de sus valores con una cierta probabilidad. Para especificar la probabilidad de que una variable aleatoria discreta X tome un valor x se usa la siguiente expresión: $f(x) = P(X = x)$. Al conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ se le llama función masa de probabilidad ó distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X si para cada resultado posible de x se cumple que:

- 1) $f(x) \geq 0$
- 2) $\sum_x f(x) = 1$



Así pues, la forma en que varían los resultados de un experimento aleatorio queda descrita teóricamente por la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.

La distribución de probabilidad de X está ligada directamente con la función de distribución acumulativa de X . Ésta función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X , es la probabilidad de que X sea menor o igual a un valor específico de x , es decir:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \dots\dots\dots(2.2)$$

Para una variable aleatoria discreta, la función de distribución acumulativa $F(x)$ es una función no decreciente de los valores de X , tal que:

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$, para cualquier x
- 2) $F(x_i) \geq F(x_j)$ si $x_i \geq x_j$
- 3) $P(X > x) = 1 - F(x)$

Para variables aleatorias con valor entero, se tiene:

- 4) $P(X = x) = F(x) - F(x - 1)$
- 5) $P(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$

2.2.2 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CON VARIABLE ALEATORIA CONTINÚA

En el caso discreto, a todos los valores de una variable aleatoria, se le asignan probabilidades positivas, y a pesar de que todo el conjunto de estos valores sea infinito numerable, la suma de las probabilidades asignadas es uno. Lo dicho anteriormente no sucede para el caso continuo. Por lo cual, la probabilidad de que una variable aleatoria continua X tome un valor específico x es cero.

La función $f(x)$, llamada función de densidad de probabilidad, caracteriza la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X y también proporciona un medio para determinar la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en un intervalo donde $a \leq X \leq b$.

La definición formal ^[2.1] de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X define como:



Si existe una función $f(x)$ tal que:

1) $f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)$

para cualquier a y b , entonces $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X .

Como el área total bajo $f(x)$ es uno, la probabilidad del intervalo $a \leq X \leq b$ es el área acotada por las rectas $X = a$ y $X = b$ y la función de densidad como se muestra a continuación:

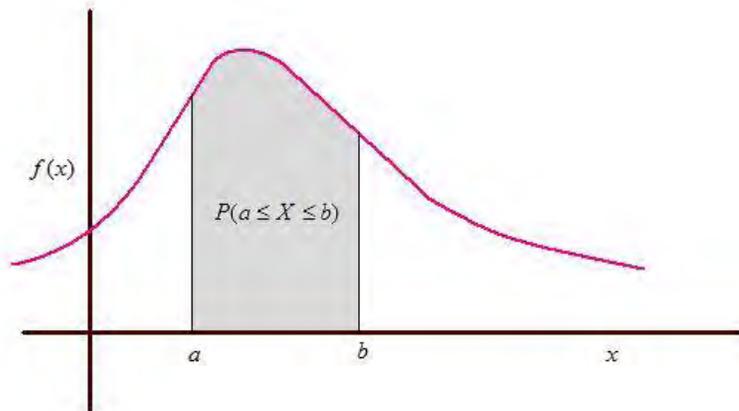


Figura 2.1 Probabilidad ilustrada como el área bajo la curva de la función de densidad [2.1].

La función de distribución acumulativa $F(x)$ se define como:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(\tau)dt \dots\dots\dots(2.3)$$

En donde τ , es una variable artificial de integración.

La función $F(x)$ es el área acotada por la función de densidad que se encuentra a la izquierda de la recta $X = x$, lo anterior se muestra en la figura 2.2.

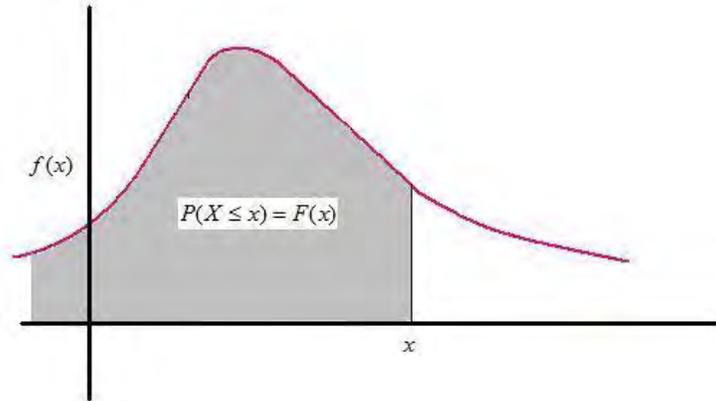


Figura 2.2 La distribución acumulativa ilustrada como un área bajo la función de densidad [2.1].

Se puede observar en la gráfica 2.2 que la función de distribución acumulativa $F(x)$ de una variable aleatoria continua X es la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a x .

Dado que para cualquier variable aleatoria continua X ,

$$P(X = x) = \int_x^x f(\tau)d\tau = 0, \dots\dots\dots(2.4)$$

Entonces:

$$P(X \leq x) = P(X < x) = F(x), \dots\dots\dots(2.5)$$

La distribución acumulativa $F(x)$, es una función lisa no decreciente de los valores de la variable aleatoria con las siguientes propiedades [2.1]:

- 1) $F(-\infty) = 0$
- 2) $F(\infty) = 1$
- 3) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
- 4) $dF(x)/dx = f(x)$

2.2.3 VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA

El valor esperado o esperanza de una variable aleatoria X es el promedio ó valor medio de una variable aleatoria X después de un número grande de experimentos y está dado por:

$$E(X) = \sum_x xp(x) \text{ Si } x \text{ es discreta ó:}$$

$$E(X) = \int_{-x}^x xf(x) \text{ Si } X \text{ es continua.}$$



En donde:

- $p(x)$ Es la función de probabilidad.
- $f(x)$ Es la densidad de probabilidad.

Para una función $g(x)$, el valor esperado de de la variable aleatoria X , está dado por:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x) \text{ Si } x \text{ es discreta ó:}$$

$$E[g(X)] = \int_{-x}^x g(x)f(x) \text{ Si } X \text{ es continua}$$

Las propiedades de la esperanza de una variable aleatoria que se presentan a continuación son válidas tanto en el caso continuo como en el caso discreto. Para enunciarlas se toma el caso continuo.

1. Si c es una constante, su valor esperado, será el valor que tenga la constante.

$$E(c) = \int_{-x}^x cf(x)dx = c \int_{-x}^x f(x)dx = c \dots\dots\dots(2.6)$$

2. Sean a y b son constantes, el valor esperado de $aX + b$, es el producto de a por el valor esperado de x más b .

$$E(aX + b) = aE(X) + b \dots\dots\dots(2.7)$$

3. El valor esperado de la suma de dos funciones $g(X)$ y $h(X)$ de X es la suma del valor esperado de $g(X)$ más el valor esperado de $h(X)$.

$$E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)] \dots\dots\dots(2.8)$$

2.2.4 MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Los valores esperados de ciertas funciones de X , son los momentos de una variable aleatoria X . Estos valores se emplean para caracterizar la distribución de probabilidad de X y para especificarla cuando se conocen todos los momentos de X . Los momentos de X generalmente se definen alrededor del valor esperado de X ó del cero a pesar de que se pueden definir alrededor de cualquier punto de referencia.



Sea X una variable aleatoria. El n -ésimo momento de X alrededor del cero se define por:

$$\mu'_n = E(X^n) = \sum_x x^n p(x) \quad \text{Si } X \text{ es discreta ó:}$$

$$\mu'_n = E(X^n) = \int_{-x}^x x^n f(x) \quad \text{Si } X \text{ es continua}$$

La media μ o valor esperado de la variable aleatoria es el primer momento alrededor del cero; es decir: $\mu'_1 = \mu = E(X)$. La media de una variable aleatoria es una medida de tendencia central, debido a que es una cantidad numérica alrededor de la cual los valores de la v. a., tienden a agruparse.

El n -ésimo momento alrededor de la media de una variable aleatoria X es:

$$\mu_n = E(X - \mu)^n = \int_{-x}^x (x - \mu)^n f(x) dx \quad \text{Si } X \text{ es continua.}$$

$$\mu_n = E(X - \mu)^n = \sum_x (x - \mu)^n p(x) \quad \text{Si } X \text{ es discreta.}$$

Para cualquier variable aleatoria X , su momento central cero es uno:

$$\mu_0 = E(X - \mu)^0 = E(1) = 1 \dots\dots\dots(2.9)$$

Para cualquier variable aleatoria X , el primer momento central es cero:

$$\mu_1 = E(X - \mu) = E(x) - \mu = 0 \dots\dots\dots(2.10)$$

El segundo momento central está dado por la ec. (2.11) y recibe el nombre de varianza de la variable aleatoria:

$$\mu_2 = E(X - \mu)^2 \dots\dots\dots(2.11)$$

Lo anterior también se puede expresar como:

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu^2 \dots\dots\dots(2.12)$$

Debido a que:

$$\mu_2 = \text{Var}(X) = E(X - \mu)^2$$

$$\mu_2 = E(X^2 - 2X\mu - \mu^2)$$

$$\mu_2 = E(X^2) - 2\mu^2 - \mu^2$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu^2$$



Para una variable aleatoria X , su varianza es el segundo momento alrededor del origen menos el cuadrado de la media (μ^2).

Para una variable aleatoria, la varianza es una medida de dispersión de su distribución de probabilidad. La desviación estándar es la raíz cuadrada positiva de la varianza. A la varianza se le denota por σ^2 y a la desviación estándar por σ .

Para una variable aleatoria X , la varianza es invariable, es decir $Var(X + b) = Var(X)$ para cualquier constante b , y $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ para dos constantes a y b cualesquiera.

Los momentos centrales tercero y cuarto proporcionan información sobre la forma de la distribución de probabilidad X . El tercer momento central se refiere a la asimetría de la distribución de probabilidad X . Este momento es:

$$\mu_3 = E(X - \mu)^3 \dots\dots\dots(2.13)$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3 \dots\dots\dots(2.14)$$

Cuando las distribuciones de probabilidad tienen un sólo pico, para:

- 1) $\mu_3 = 0$ la distribución es simétrica
- 2) $\mu_3 < 0$ se dice que la distribución es asimétrica negativamente
- 3) $\mu_3 > 0$ la distribución es asimétrica positivamente.

Cuando se tienen distribuciones con más de un pico, el valor de μ_3 no basta para conocer la forma de la distribución. Debido a esto se utiliza el tercer momento estandarizado ó coeficiente de asimetría que está dado por:

$$\alpha_3^* = \mu_3 / (\mu_2)^{3/2} \dots\dots\dots(2.15)$$

El coeficiente α_3 es la medida de la asimetría de una distribución de probabilidad con respecto a su dispersión. Una distribución de probabilidad es asimétrica positiva si $\alpha_3 > 0$, negativa si $\alpha_3 < 0$ o simétrica si $\alpha_3 = 0$.

Cuando la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X , es simétrica, cada valor positivo de $(X - \mu)^r$ se cancela por un valor negativo de la misma magnitud y de igual probabilidad, dando como resultado que todos los momentos centrales de X de orden impar sean cero.



El cuarto momento central, recibe el nombre de **curtosis**. Este momento es una medida de que tan puntiaguda es la distribución de probabilidad. Se define como:

$$\mu_4 = E(X - \mu)^4 \dots\dots\dots(2.16)$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4 \dots\dots\dots(2.17)$$

Sin embargo, se prefiere usar el cuarto momento estandarizado, como medida relativa de la curtosis:

$$\alpha_4 = \mu_4 / \mu_2^2 \dots\dots\dots(2.18)$$

- Si $\alpha_4 = 3$, la distribución no presenta un pico muy alto ni muy bajo y recibe el nombre de mesocúrtica.
- Si $\alpha_4 > 3$, la distribución de probabilidad presenta un pico alto y recibe el nombre de leptocúrtica.
- Si $\alpha_4 < 3$, la distribución es relativamente plana y recibe el nombre de platicúrtica.

Se toma como referencia el 3 debido a que la curtosis estandarizada de una distribución de probabilidad se compara con la distribución normal, cuyo valor es 3.

2.3 TEOREMA DE BAYES

Sea δ un espacio muestral que está formado por los eventos $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ mutuamente excluyentes, entonces,

$$\delta = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \dots\dots\dots \cup \omega_n$$

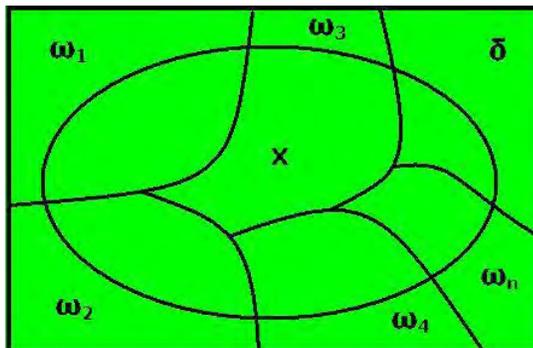


Figura 2.3 Teorema de Bayes.



Si ocurre un evento x definido en δ , observamos que:

$$x = \delta \cap x = (\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \dots \cup \omega_n) \cap x = (\omega_1 \cap x) \cup (\omega_2 \cap x) \cup (\omega_3 \cap x) \cup \dots \cup (\omega_n \cap x)$$

Como los eventos $\omega_i \cap x$ son mutuamente excluyentes, entonces:

$$p(x) = p(\omega_1 \cap x) + p(\omega_2 \cap x) + p(\omega_3 \cap x) + \dots + p(\omega_n \cap x) \dots\dots\dots(2.19)$$

y como $p(\omega_i \cap x) = p(\omega_i)p(x|\omega_i)$, es decir, la probabilidad de que ocurra el evento ω_i y el evento x es igual al teorema de la multiplicación para probabilidad condicional, entonces:

$$p(x) = p(\omega_1)p(x|\omega_1) + p(\omega_2)p(x|\omega_2) + p(\omega_3)p(x|\omega_3) + \dots + p(\omega_n)p(x|\omega_n) \dots\dots\dots(2.20)$$

Si deseamos calcular la probabilidad de que ocurra un evento ω_i dado que x ya ocurrió, entonces:

$$p(\omega_i|x) = \frac{p(\omega_i \cap x)}{p(x)} = \frac{p(\omega_i)p(x|\omega_i)}{p(\omega_1)p(x|\omega_1) + p(\omega_2)p(x|\omega_2) + \dots + p(\omega_n)p(x|\omega_n)}$$

Simplificando:

$$p(\omega_i|x) = \frac{p(x|\omega_i)p(\omega_i)}{p(x)} \dots\dots\dots(2.21)$$

$$p(\omega_k|x) = p(\omega_k)p(x|\omega_k) \dots\dots\dots(2.22)$$

A la ecuación 2.21 se le conoce como el **Teorema de Bayes**. En esta expresión, $i = 1, 2, \dots, M$ es la probabilidad de que x ocurra sin considerar a la categoría a la cual pertenece, $p(\omega_i)$ es la probabilidad a priori de la clase ω_i y $p(x|\omega_i)$ es la probabilidad de que ocurra ω_i con respecto a x . A $p(x|\omega_i)$ se le llama función de probabilidad de la clase ω_i , o función de probabilidad de densidad de x .

2.4 FUNCIÓN NORMAL O GAUSSIANA

La Distribución Gaussiana ó Distribución Normal, es una distribución que toma una gran mayoría de variables aleatorias continuas de la naturaleza. Se dice que una variable aleatoria x sigue una distribución normal de parámetros



μ y σ^2 , lo cual se representa como: si $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ su función de densidad está dada por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \dots\dots\dots(2.23)$$

Estos dos parámetros μ y σ^2 coinciden con la media (esperanza) y la varianza respectivamente de la distribución.

$$E[x] = \mu$$

$$Var[x] = \sigma^2$$

Para cualquier par de valores de la forma de la función de densidad es la llamada **campana de Gauss**. El área contenida entre la gráfica y el eje de abscisas vale 1.

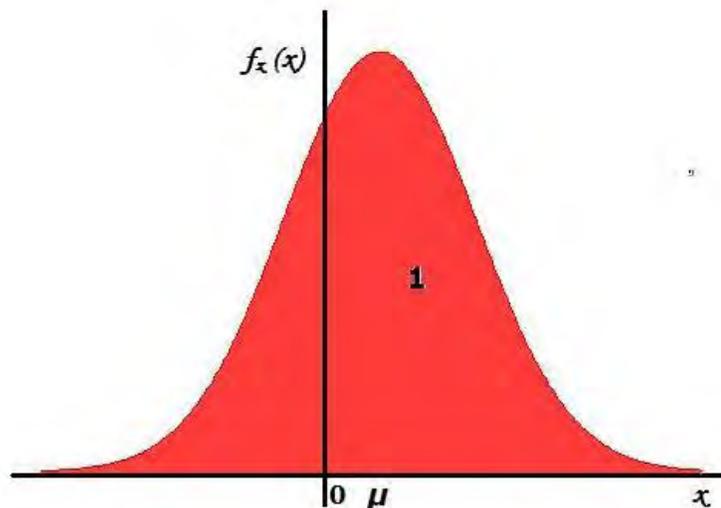


Figura 2.4 Campana de Gauss.

La campana de Gauss alcanza un único máximo en μ , y que es simétrica respecto a ella. La forma de esta campana depende de μ y σ^2 donde:

- μ indica la posición de la campana (**parámetro de centralización**).
- σ^2 es el parámetro de dispersión. Si σ^2 es pequeño, la masa de probabilidad se concentra alrededor de la media.

En la figura 2.5 se muestra a la Distribución Gaussiana con diferentes valores de μ manteniendo σ^2 fijo. En la figura 2.6 se muestra a esta misma distribución pero variando ahora los valores de σ^2 y manteniendo fija a la μ .

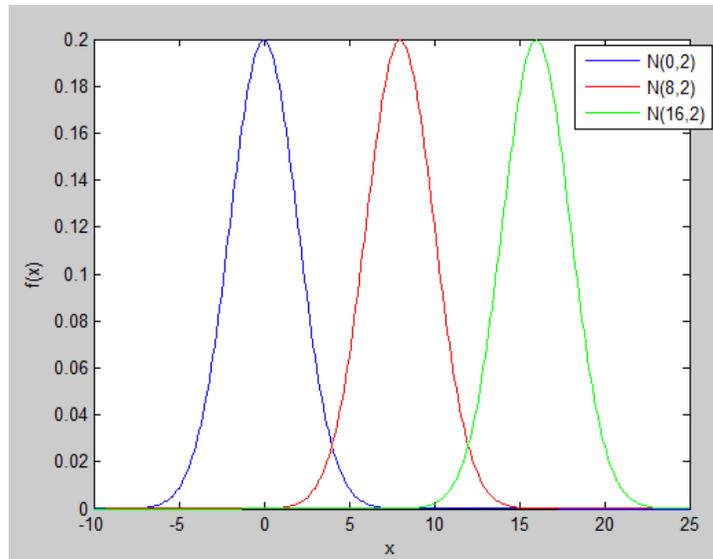


Figura 2.5 Función Gaussiana con diferentes valores de μ .

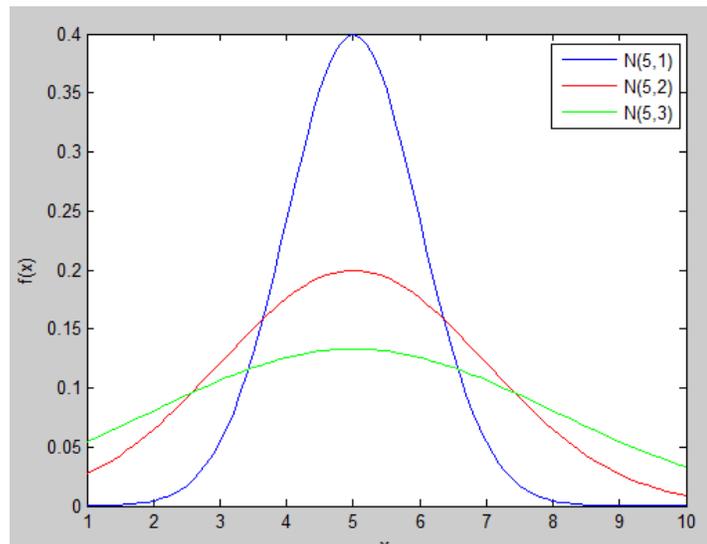


Figura 2.6 Función Gaussiana con diferentes valores de σ^2 .

La función de distribución de la función Gaussiana es:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy \stackrel{\Delta}{=} G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \dots\dots\dots(2.24)$$

Donde la función

$$G(x) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \dots\dots\dots(2.25)$$



Está disponible en forma tabulada. Como $f_x(x)$ depende de dos parámetros μ y σ^2 , la notación $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ se usa para representar la función de densidad de probabilidad en la ec. (2.23).

La constante de normalización $\sqrt{2\pi\sigma^2}$ en la ec. (2.23) es la que mantiene el área bajo $f_x(x)$ igual a 1.

2.5 LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La Ley de los Grandes Números es un teorema de probabilidad, que afirma que el promedio de una sucesión grande de variables aleatorias converge al promedio de las esperanzas de las variables aleatorias involucradas. En particular, si todas las variables son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d), el promedio tiende al valor de la esperanza individual. Esta ley indica si se toma una muestra al azar de una población de gran tamaño, el promedio será cercano a la media de la población completa.

Ley débil de los grandes números

La ley débil de los grandes números establece si X_1, X_2, X_3, \dots es una secuencia infinita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d), cada una de ellas con el mismo valor esperado μ y varianza finita, entonces el promedio de una muestra:

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} \dots\dots\dots(2.26)$$

converge en probabilidad a μ . Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

Ley fuerte de los grandes números

Sea X_1, X_2, X_3, \dots una secuencia infinita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), cada una de ellas con una media finita μ , entonces

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1 \dots\dots\dots(2.27)$$

es decir, las medias convergen con una probabilidad 1 a una media común μ .



2.5.1 TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

El teorema del límite central indica que la suma de un gran número de variables aleatorias i.i.d., adecuadamente normalizadas, tiende a una distribución normal, (también llamada *distribución gaussiana* o *curva de Gauss* o *campana de Gauss*).

Si se tiene una secuencia de n variables aleatorias i.i.d. X_1, X_2, X_3, \dots , cada una de ellas con media μ y varianza σ^2 finitas y se considera que $S_n = X_1 + \dots + X_n$ es la suma muestral y $\bar{X}_n = S_n/n$ la media muestral, entonces, la versión estandarizada de la media Z_n , a la que hace referencia el Teorema del Límite Central es:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \dots\dots\dots(2.28)$$

Donde:

$$E\{Z_n\} = 0 \text{ y } \text{var}\{Z_n\} = 1 \text{ puesto que } \sigma = \sqrt{\sigma^2}, E\{\bar{X}_n\} = \mu \text{ y } \text{var}\{\bar{X}_n\} = \sigma^2/n$$

La distribución de Z_n tiene dos características en común con la distribución $N(0,1)$: ambas poseen media nula y varianza 1. A continuación se enuncia dicho teorema:

Teorema del Límite Central [2.6]

Sea X_1, X_2, X_3, \dots una secuencia de variables aleatorias i.i.d., con media μ y varianza σ^2 finitas. Sea $Z \sim N(0,1)$. Cuando $n \rightarrow \infty$, la secuencia $\{Z_n\}$ converge en una distribución a Z , es decir $Z_n \xrightarrow{D} Z$.

El teorema del límite central garantiza una distribución normal cuando n es suficientemente grande.

La razón por la cual este teorema recibe el nombre de "teorema del límite central", es porque la aproximación entre dos distribuciones es mayor en el centro que en sus extremos, por lo tanto, la palabra "central" califica al límite, más que al teorema.



2.6 PROCESOS ESTOCÁSTICOS: CONCEPTOS

Un proceso estocástico se refiere al comportamiento de una variable a lo largo del tiempo. Los procesos estocásticos son útiles cuando se requiere ajustar un modelo teórico que permita hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de un proceso.

Un proceso aleatorio ó estocástico se define como una familia $\{X(t), t \in T\}$ de variables aleatorias, clasificadas mediante un parámetro t que varía en un conjunto T [2.9].

Es decir, un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $X(t)$ cuya distribución varía de acuerdo al tiempo t . La variable tiempo t toma valores en un subconjunto de números reales no negativos ó de enteros (T).

Las variables aleatorias $X(t)$ toman valores en un conjunto que se denomina espacio de estados. El espacio de estados S de un proceso estocástico es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar dicho proceso.

Si la variable aleatoria se define sólo para valores discretos de t , el proceso se define serie aleatoria o proceso aleatorio de parámetro discreto. Cuando t toma valores continuos, el proceso estocástico es de parámetro continuo. Si el resultado es independiente del tiempo, el proceso estocástico es estacionario. Si el estado en que se encuentra un proceso estocástico depende solo del estado anterior pero no de los anteriores a éste, el proceso es de Markov.

Definiciones

- ❖ Para que dos procesos estocásticos sean iguales, sus funciones respectivas deben ser iguales para todas y cada una de las variables aleatorias.
- ❖ Cualquier operación que implique uno o más procesos (como el producto $f(t)g(t)$ ó la suma $f(t) + g(t)$), se obtiene efectuando operaciones en cada una de las funciones de los procesos.
- ❖ La función de distribución de la variable aleatoria $X(t)$ para cada tiempo t , es la función de distribución de primer orden del proceso estocástico $X(t)$:

$$F(x,t) = p\{X(t) \leq x\} \dots\dots\dots(2.29)$$



❖ Si $X(t)$ es continuo en el espacio de estados, la función de densidad de la variable que define el proceso estocástico en cada tiempo t , es la función de densidad de primer orden del proceso estocástico $X(t)$:

$$f(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \dots\dots\dots(2.30)$$

❖ La función de distribución conjunta del proceso en dos tiempos, t_1 y t_2 , es la función de distribución de segundo orden del proceso estocástico $X(t)$:

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = p\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \dots\dots\dots(2.31)$$

❖ Si $X(t)$ es continuo en el espacio de estados, la función de densidad conjunta del proceso en dos tiempos t_1 y t_2 , es la función de densidad de segundo orden del proceso estocástico $X(t)$:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \dots\dots\dots(2.32)$$

Las funciones de distribución y de densidad de orden n-ésimo se definen análogamente:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \dots\dots\dots(2.33)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \dots\dots\dots(2.34)$$

❖ Si la distribución de orden n-ésimo de un proceso estocástico

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Prob\{f(t_1) \leq x_1, f(t_2) \leq x_2, \dots, f(t_n) \leq x_n\} \dots\dots\dots(2.35)$$

para cualquier n y t_1, t_2, \dots, t_n es conocida, el proceso estocástico real está estadísticamente determinado.

La distribución de un orden dado puede determinarse mediante una de orden superior.



2.6.1 ESTACIONALIDAD

Cuando la función densidad de probabilidad de un proceso estocástico de primer orden es independiente del tiempo:

$$f(x,t) = f(x + \Delta t) = f(x) \dots\dots\dots(2.36)$$

El proceso estocástico es estacionario de primer orden.

Cuando la función de densidad de probabilidad de un proceso estocástico es de segundo orden:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) \dots\dots\dots(2.37)$$

El proceso estocástico es estacionario de segundo orden.

Existen muchas definiciones de procesos estocásticos estacionarios, a continuación se enuncian algunas.

Definición en sentido estricto

En sentido estricto, un proceso estocástico es estacionario si al cambiar el origen del tiempo, sus funciones de densidad de probabilidad no varían. Es decir, para cualquier ε arbitrario, los dos procesos $f(t)$ y $f(t + \varepsilon)$ tienen las mismas funciones de densidad de probabilidad. Por lo tanto, la densidad de orden n-ésimo es:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon, \dots, t_n + \varepsilon) \dots\dots\dots(2.38)$$

El valor esperado $E[f(t)]$ de $f(t)$ es una constante, esto se debe a que a que $p(x;t) = p(x;t + \varepsilon)$, por lo tanto, la densidad de primer orden $p(x,t)$ de un proceso estacionario es independiente de t .

La distribución conjunta de las variables aleatorias $f(t)$ y $f(t + t_2 - t_1)$ es la función densidad de segundo orden, esto se debe a que:

$$P(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(x_1, x_2; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon) \dots\dots\dots(2.39)$$

Entonces:

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1, x_2; t_2 - t_1) \dots\dots\dots(2.40)$$



Cuando los estadísticos conjuntos de $f(t)$ y $g(t)$ son los mismos de $f(t+\varepsilon)$, $g(t+\varepsilon)$, entonces se dice que los dos procesos $f(t)$ y $g(t)$ son conjuntamente estacionarios.

Si $f(t)$ y $g(t)$ son conjuntamente estacionarios, entonces el proceso complejo $z(t) = f(t) + jg(t)$ es estacionario.

El proceso $f(t)$ puede ser individual y no conjuntamente estacionario.

Definición de estacionario en sentido amplio

Para que un proceso aleatorio estocástico sea estacionario en sentido amplio ó débilmente estacionario se debe de cumplir que:

- Su media y sus funciones de densidad de probabilidad de primer y segundo orden no dependan del tiempo.
- Su función de autocorrelación depende del desplazamiento τ . En este caso, las propiedades con las que cumple la función de autocorrelación son:

- 1) $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$. Está acotada y es máxima en el origen.
- 2) $R_{xx}(0) = E\{X^2(t)\}$
- 3) $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$
- 4) $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = \mu^2$ Si el proceso no tiene componentes periódicas.

Un proceso estocástico es estacionario en sentido amplio si es estacionario de orden dos, pero el caso contrario no aplica.

Definición de proceso estocástico estacionario de orden finito

Si la ec.(2.38) se cumple para $n \leq k$, entonces, el proceso estocástico es estacionario de orden k .

Definición de proceso estocástico periódicamente estacionario

En el sentido estricto, un proceso $f(t)$ es periódicamente estacionario con periodo T , si para $\varepsilon = nT$, se cumple la ec.(2.38).

Definición de estacionario en un intervalo

Si la ec.(2.38) se satisface para todo t en el intervalo $g(a,b)$, entonces se dice que el proceso $f(t)$ es estacionario en el intervalo $g(a,b)$.



Definición de incrementos estacionarios

Si para todo par de instantes $t_1 < t_2$, la distribución de $X(t_2) - X(t_1)$, es independiente de t_1 y t_2 entonces el proceso estocástico es de incrementos estacionarios.

Definición de estacionario asintóticamente

Si:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon, \dots, t_n + \varepsilon) \dots \dots \dots (2.41)$$

existe y es independiente de ε , entonces el proceso $f(t)$ es estacionario asintóticamente.

2.6.2 ERGODICIDAD

Antes de definir el concepto de proceso ergódico, se definirá el concepto de medias temporales de un proceso. La media temporal $\langle Y(t) \rangle$ de un proceso estocástico $Y(t)$, se define como:

$$\langle Y(t) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y(t) dt \dots \dots \dots (2.42)$$

Con base a lo anterior, $X(t)$ es un proceso ergódico, si sus momentos estadísticos son iguales a sus momentos temporales. Es decir, todo el proceso se puede representar por una realización temporal.

No todo proceso estacionario es ergódico pero si se cumple lo contrario.

2.6.3 EJEMPLOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Entre los procesos estocásticos, se encuentra el **proceso de Poisson** y las **cadena de Markov en tiempo discreto**.

➤ **Proceso de Poisson**

Durante la última década de su vida, Simeón Dennis Poisson (1781-1840), formuló la Distribución de Poisson.

Un proceso de Poisson, es una serie de variables aleatorias que cumple con tres condiciones. Antes de enunciarlas, se tomará en cuenta lo siguiente:



Sea $P_n(t)$ la probabilidad de que ocurran n acontecimientos en el periodo de $(0,t)$. Si en el intervalo 0 y $t + \Delta t$ ocurre el acontecimiento n . Entonces los acontecimientos que ocurrirán entre $(0,t)$ serán $n-1$. Y para el intervalo de t y $t+1$, solo ocurrirá un suceso. Con base en lo anterior, las condiciones que se deben de cumplir para que el proceso anterior sea un Proceso de Poisson son las siguientes:

- 1) $\lambda \Delta t$ es la probabilidad de que exista un acontecimiento entre t y $t + \Delta t$, donde λ es una constante, llamada intensidad del proceso.
- 2) La probabilidad de que existan uno o más acontecimientos en el intervalo t y $t + \Delta t$, es tan despreciable que se toma como cero.
- 3) En dos intervalos de tiempo disjuntos puede ocurrir un cierto número de acontecimientos, dichos acontecimientos son variables aleatorias independientes.

Si se cumplen las propiedades anteriores, entonces la probabilidad de tener n acontecimientos en el intervalo de longitud t es:

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \dots\dots\dots(2.43)$$

El número esperado de acontecimientos en el tiempo t es λt , donde λ es el número de acontecimientos esperados por unidad de tiempo.

En la actualidad, la distribución de Poisson se emplea para describir procesos como: las llegadas de llamadas telefónicas a una central, las llegadas de los camiones y automóviles a la caseta de cobro las fallas de maquinaria en procesos industriales y el número de accidentes en un cruce.

➤ **Cadenas de Markov en Tiempo discreto**

Una **cadena de Markov**, es una serie de estados, donde la probabilidad de que ocurra un estado depende del estado inmediato anterior. Es decir, las cadenas de Markov son procesos de corta memoria ya que sólo recuerdan el último estado para decidir cuál será el próximo.

Se dice que, una cadena de Markov es un proceso aleatorio en tiempo discreto si:

- 1) T es un conjunto indexado, numerable infinitamente, que toma los valores enteros: $0,1,\dots$



2) Para toda $t \in T$, existe un conjunto numerable χ tal que: $P(X_t \in \chi) = 1$

3) Para todo x_0, \dots, x_1 y para toda $t > 0$ en χ , se cumple la probabilidad condicional:

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t) \dots\dots\dots(2.44)$$

Donde $X_1, X_2, X_3, \dots, X_t$ es la secuencia de variables aleatorias.

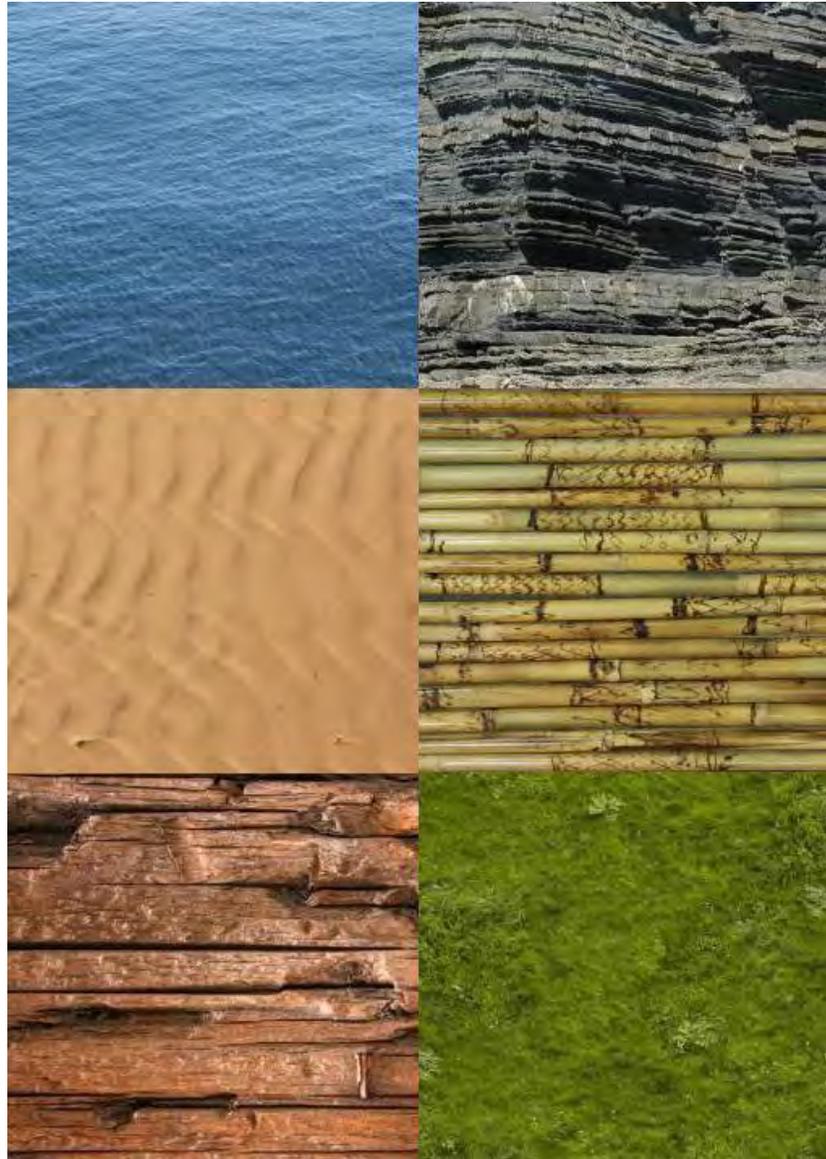
La ecuación (2.44) se le llama "primer paso de transición de probabilidad", y se basa en la propiedad Markoviana siguiente:

Dado el conocimiento del estado presente X_t , el estado futuro X_{t+1} en el $t+1$ es independiente del estado pasado X_{t-1}, \dots, X_0 .

A la función $P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t)$ se le llama "primer paso de la probabilidad de transición".

3 CAPÍTULO

ANÁLISIS TEXTURAL





3.1 INTRODUCCIÓN

La textura es una de las características más importantes para clasificar y reconocer escenas u objetos. La textura es un arreglo espacial de valores de píxeles, depende de la escala de observación y varía de un lugar a otro en la imagen.

Las texturas se caracterizan por su uniformidad, densidad, grosor, rugosidad, intensidad y regularidad de medidas discretas del tono y de sus relaciones espaciales.

3.2 ALTERNATIVAS EN EL ANÁLISIS DE TEXTURAS

Para estimar una textura contenida en una imagen existen técnicas espectrales, estructurales, estadísticas y técnicas basadas en modelos. A continuación se describen los más comunes.

3.2.1 TÉCNICAS ESPECTRALES

Las técnicas espectrales incluyen el uso de la transformada de Fourier y de la transformada wavelet en sus diversas modalidades.

La Transformada de Fourier, se utiliza principalmente para detectar la periodicidad global de una imagen mediante la detección de picos estrechos de alta energía del espectro. Aunque en algunas aplicaciones ha funcionado satisfactoriamente, su implementación se ve usualmente restringida por la poca información que se puede extraer cuando las texturas son heterogéneas o de carácter aleatorio, es decir, cuando las imágenes son no estacionarias y transitorias.

La transformada Wavelet apareció a finales de 1950, se basa en **pequeñas ondas llamadas "ondeletas" de frecuencia variable y duración finita**. Dentro de los usos de la transformada Wavelet se encuentran: el análisis local de señales no estacionarias, el análisis de señales electrocardiográficas, sísmicas, de sonido, de radar, así como también es utilizada para la compresión y procesamiento de imágenes y reconocimiento de patrones.

3.2.2 TÉCNICAS ESTRUCTURALES

El desarrollo de las técnicas estructurales se basa en obtener patrones primitivos de la textura (también llamados Textel) para describir la forma en que se agrupan y forman la textura en sí. Un Textel (texture element) es la mínima unidad de textura aplicada a una superficie. De la misma forma que una imagen digital se representa mediante una matriz de píxeles, una textura se puede representar mediante una matriz de texels. Cuando se aplica una textura a una superficie 3D, en el mapeado de texturas, se asignan texels a los píxeles correspondientes que aparecerán en la imagen final. Un texel puede



corresponder a varios píxeles, o bien ser de tamaño inferior a uno, en cuyo caso podría no ser visible.

Un Texel tiene propiedades invariantes como: forma, tamaño, nivel de gris o color.

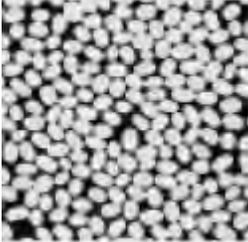
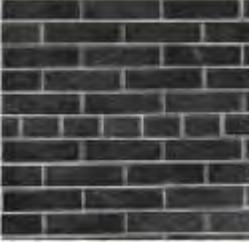
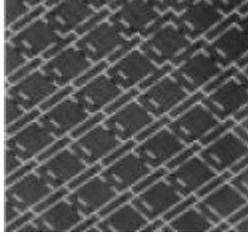
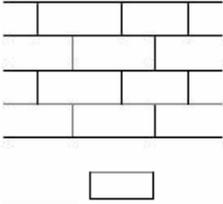
		
Textura a	Textura b	Textura c
		
Textel de la Textura a	Textel de la Textura b	Textel de la Textura c

Figura 3.1 Ejemplos de texturas y sus correspondientes texels^[3.9].

Después de identificar los textels, la textura puede analizarse por medio de las propiedades estadísticas de los elementos extraídos o extrayendo la regla de colocación que describa la textura. El inconveniente de este método es que no todas las texturas tienen un elemento que se repite.

3.2.3 TÉCNICAS BASADAS EN MODELOS

Esta técnica se basa en construir un modelo de la imagen. Se consideran como tales los modelos fractales y los campos aleatorios de Markov (MRF).

3.2.3.1 MODELO FRACTAL

Esta técnica fue introducida por Pentland, en ella se muestra la correlación que existe entre la rugosidad de una textura y su dimensión fractal. Es por ello, que la determinación de la dimensión fractal, es la base para la descripción fractal de texturas.

El principio básico para estimar la dimensión fractal se basa en el concepto de Autosimilitud. Según B. Mandelbrot, un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden estar deformadas ligeramente y pueden presentarse a diferente escala.



Un conjunto acotado A , en un espacio euclidiano de n dimensiones, es auto-similar, si está constituido por la unión de N copias no solapadas y distintas de sí mismo, cada una de ellas escaladas con un factor r . La dimensión fractal correspondiente a dicha región viene dada por:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(Nr)}{\log(1/r)} \dots\dots\dots(3.1)$$

La dimensión (D), se refiere a la **rugosidad** de una superficie. Entre más grande sea el valor de D , más rugosa será la superficie.

3.2.3.2 MODELO DE LOS CAMPOS ALEATORIOS DE MARKOV (MRF)

Los campos aleatorios de Markov se utilizan para el modelado, la segmentación y clasificación de texturas.

Un campo aleatorio de Markov es un proceso estocástico discreto cuyas propiedades globales están controladas por la media de las propiedades locales.

Un modelo de textura de MRF puede ser especificado por medio de una probabilidad conjunta $P(f)$, la cual determina como ocurre un patrón de textura f . Para modelar texturas, se utilizan varios modelos de MRF, como los auto-modelos entre los cuales se encuentra el modelo de Ising y el modelo logístico multiniveles ó modelo de Potts. Estos modelos se describirán con detalle en el capítulo 4.

3.2.4 TÉCNICAS ESTADÍSTICAS

Las técnicas estadísticas emplean medidas obtenidas a partir del histograma para proporcionar características de textura tales como suavidad, granulosidad y rugosidad. Estas técnicas pueden ser de primer, segundo o de tercer orden:

Primer orden. No se considera la relación entre píxeles. Las medidas texturales se calculan a partir de los valores de gris originales de la imagen y su frecuencia, como la media, varianza, desviación estándar.

Segundo Orden. Se considera la relación de co-ocurrencia entre grupos de dos píxeles de la imagen original a una distancia dada.

Tercer y más Orden. Se consideran las relaciones entre 3 o más píxeles. Teóricamente, se puede realizar su cálculo, pero su implementación requiere de mucho tiempo.



El histograma es una función de densidad de primer orden y proporciona información sobre los niveles de grises de una región, pero no indica cómo se distribuyen en el espacio. Para ello, se emplea la **matriz de co-ocurrencia**, la cual es una función de densidad conjunta que mide la cantidad de píxeles que se encuentran a una determinada distancia y que tienen el mismo nivel de gris.

3.2.4.1 MATRIZ DE CO-OCURRENCIA Ó GREY LEVEL CO-OCURRENCE MATRIX (GLCM)

La matriz de co-ocurrencia es una función de segundo orden y cuenta con una amplia gama de descriptores para la caracterización de texturas, con la ventaja adicional de que puede ser aplicada a texturas de origen aleatorio o que no respondan a un patrón o serie de patrones determinados.

La técnica estadística cuenta con los siguientes momentos centrales de primer a cuarto orden:

- ❖ Media (primera orden).
- ❖ Nivel medio de intensidad de la región.
- ❖ Varianza (segundo orden).
- ❖ Dispersión de los niveles de intensidad.
- ❖ Sesgo (tercer orden).
- ❖ Medida de la simetría del histograma.
- ❖ Curtosis (cuarto orden).
- ❖ Medida de la caída del histograma (granularidad de región).

En esta matriz, cada elemento representa la probabilidad de ocurrencia de dos valores de la escala de gris separados por un operador vectorial de posición d determinado por su magnitud $|d|$ y su dirección θ . Donde θ puede tomar cualquiera de las 8 direcciones del código de Freeman(CF).

Las direcciones 0,1,2,3 del código de Freeman son simétricas a las direcciones 4,5,6 y 7, por lo que la matriz de co-ocurrencia se calcula solo para 0,1,2 y 3.

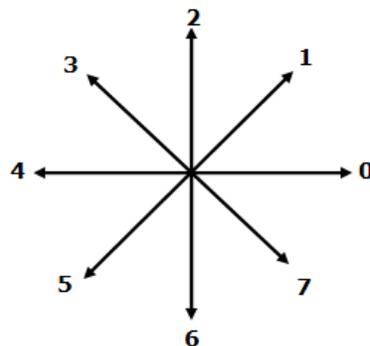


Fig. 3.2 Código de Freeman



A partir de la GLCM se pueden calcular ciertos descriptores como son la entropía, energía, contraste, homogeneidad, etc.

3.2.4.2 CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE CO-OCURRENCIA

Los elementos necesarios para construir la GLCM, dependen de la disposición de los píxeles en la imagen, es decir, de su ubicación espacial, de su valor de intensidad y de las relaciones con su vecino, con base en esto, los elementos necesarios para construir la matriz de co-ocurrencia son:

❖ **Condición.** Es la regla que debe cumplir un píxel para ser cuantificado con relación a un vecino, generalmente esta condición es la ubicación del píxel de determinada intensidad que se encuentra en la dirección del vecino.

❖ **Dirección.** Es la orientación espacial en la cual se evalúa la condición, estas direcciones toman sus valores del código de Freeman y son 0,1,2, y 3.

❖ **Distancia.** Es el número de píxeles a los cuales se encuentra el par de píxeles evaluados en la condición, las distancias que se utilizan para las direcciones pares en el código de Freeman es $|d|=1$ y para las direcciones impares en el código de Freeman $|d|=\sqrt{2}$.

El siguiente ejemplo muestra la forma en que se construye la matriz de co-ocurrencia:

Ejemplo 1

Si tenemos una imagen 4x4 con 4 niveles de grises:

0	0	1	1
0	0	1	1
0	2	2	2
2	2	3	3

Para formar la matriz de co-ocurrencia para $|d|=1$ y $\theta=0$, primero obtenemos los pares de niveles de grises mediante una matriz auxiliar. El primer par de niveles de grises de esta matriz estará formado por el elemento del renglón 1 columna 1 de la imagen, en este caso, el primer elemento es el cero. Es segundo elemento será el que está a una $|d|=1$ en dirección horizontal ya que $\theta=0$. Siguiendo la dirección de la flecha verde, este elemento también es cero, de esta manera el primer par (i,j) es (0,0), después se toma como referencia a este segundo elemento y se busca al elemento que cumpla con esta condición para que se forme el segundo par que en este caso es (0,1), y así sucesivamente.



0	→ 0	→ 1	→ 1
0	→ 0	→ 1	→ 1
0	2	2	2
2	2	3	3

Una vez que se han obtenido todos los elementos del primer renglón se obtienen los elementos del segundo renglón de la misma manera, hasta obtener todos los pares (i,j), construyendo así la siguiente matriz auxiliar:

i	J
→	
0	0
0	1
1	1
0	0
0	1
1	1
0	2
2	2
2	2
2	2
2	3
3	3

Una vez que se ha llenado esta tabla se procede a llenar la matriz de co-ocurrencia, en la cual se indica la frecuencia con que ocurren los pares de niveles de grises. Por ejemplo, el par (0,0) se repite 2 veces en la tabla anterior, por lo cual en (i=0, j=0) de la matriz, se coloca el número 2, y así sucesivamente. Con base en lo anterior, la matriz de co-ocurrencia será:

i/j	0	1	2	3
0	2	2	1	0
1	0	2	0	0
2	0	0	3	1
3	0	0	0	1

Para normalizar la matriz de co-ocurrencia, se divide a cada uno de sus elementos entre el número de combinaciones resultantes de la matriz original, en este caso 12. Por lo tanto, la matriz resultante será:

i/j	0	1	2	3
0	0.1666	0.1666	0.0833	0
1	0	0.1666	0	0
2	0	0	0.25	0.0833
3	0	0	0	0.0833



Para obtener una matriz de co-ocurrencia simétrica, se obtienen los pares de niveles de grises para $|d|=1, \theta=0$ y $|d|=1, \theta=4$, lo que equivale a tomar las probabilidades anteriores más las probabilidades de ocurrencia de las parejas en la dirección de la flecha roja o a tomar los pares de niveles de grises como (j,i) en lugar de tomarlos como (i,j) .

0	0	1	1
0	0	1	1
0	2	2	2
2	2	3	3

Por lo tanto, la matriz auxiliar completa es:

i	J	j	I
0	0	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1
0	0	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1
0	2	2	0
2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2
2	3	3	2
3	3	3	3

De acuerdo a la frecuencia con la que se repiten los pares de niveles de grises en la tabla anterior, la matriz de co-ocurrencia es la siguiente:

i/j	0	1	2	3
0	4	2	1	0
1	2	4	0	0
2	1	0	6	1
3	0	0	1	2

Para normalizar, se divide cada elemento de la matriz entre 24 que es el número de combinaciones resultantes de la matriz original:



i/j	0	1	2	3
0	0.1666	0.0833	0.0416	0
1	0.0833	0.1666	0	0
2	0.0416	0	0.25	0.0416
3	0	0	0.0416	0.0833

Ejemplo 2

La matriz de co-ocurrencia para la imagen anterior para $|d|=1, \theta=2$ y $\theta=6$, la obtenemos de la siguiente forma:

↑ 0 ↓	↑ 0 ↓	↑ 1 ↓	↑ 1 ↓
↑ 0 ↓	↑ 0 ↓	↑ 1 ↓	↑ 1 ↓
↑ 0 ↓	↑ 2 ↓	↑ 2 ↓	↑ 2 ↓
↑ 2 ↓	↑ 2 ↓	↑ 3 ↓	↑ 3 ↓

Siguiendo la dirección de las flechas verdes se obtienen los pares (i,j) y en sentido contrario las parejas (j,i), de esta manera la matriz auxiliar es:

i	j	J	I
	↑		↓
0	0	0	0
0	0	0	0
0	2	2	0
0	0	0	0
0	2	2	0
2	2	2	2
1	1	1	1
1	2	2	1
2	3	3	2
1	1	1	1
1	2	2	1
2	3	3	2

Por lo tanto la matriz de co-ocurrencia es:

i/j	0	1	2	3
0	6	0	2	0
1	0	4	2	0
2	2	2	2	2
3	0	0	2	0



Y por último obtenemos la matriz normalizada:

i/j	0	1	2	3
0	0.25	0	0.0833	0
1	0	0.1666	0.0833	0
2	0.0833	0.0833	0.0833	0.0833
3	0	0	0.0833	0

Ejemplo 3

La matriz de co-ocurrencia para la imagen del ejemplo 1 para $|d| = \sqrt{2}$, $\theta = 1$ y $\theta = 5$, se obtiene, de la misma forma que las matrices anteriores solo se tiene que seguir el sentido de las flechas.

0	0	1	1
0	0	1	1
0	2	2	2
2	2	3	3

Matriz auxiliar:

i	j	J	I
0	0	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1
0	0	0	0
2	1	1	2
2	1	1	2
2	2	2	2
2	2	2	2
3	2	2	3

Matriz de co-ocurrencia sin normalizar:

i/j	0	1	2	3
0	4	1	0	0
1	1	2	2	0
2	0	2	4	1
3	0	0	1	0

Para normalizar la matriz de co-ocurrencia, dividimos a cada uno de sus elementos entre 18 que es el número de combinaciones resultantes de la matriz original. La matriz normalizada resultante es:

i/j	0	1	2	3
-----	---	---	---	---



0	0.2222	0.0555	0	0
1	0.0555	0.1111	0.1111	0
2	0	0.1111	0.2222	0.0555
3	0	0	0.0555	0

Ejemplo 4

Considerando la siguiente imagen de 5x5, con 4 niveles de grises.

2	2	2	3	3
3	2	2	3	3
2	1	2	2	2
3	0	0	2	2
0	0	0	0	2

Para obtener la matriz de co-ocurrencia para $|d|=2$, $\theta=2$ y $\theta=6$, se realiza el mismo procedimiento que en el ejemplo 2, sólo que ahora los elementos que formarán los pares de niveles de grises estarán separados por una $|d|=2$. Se empezará el renglón 3, columna 1.

↑ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
3	2	2	3	3
2 ↓	1 ↓	2 ↓	2 ↓	2 ↓
3	0	0	2	2
↓ 0	↓ 0	↓ 0	↓ 0	↓ 2

Siguiendo la dirección de las flechas verdes se obtienen los pares (i,j) y en sentido contrario las parejas (j,i), de esta manera la matriz auxiliar es:

	I	J	J	I
	↑ ↓			↑ ↓
2		2	2	2
2		0	0	2
1		2	2	1
1		0	0	1
2		2	2	2
2		0	0	2
2		3	3	2
2		0	0	2
2		3	3	2
2		2	2	2

La matriz de co-ocurrencia obtenida es:



i/j	0	1	2	3
0	0	1	3	0
1	1	0	1	0
2	3	1	6	2
3	0	0	2	0

La matriz normalizada es:

i/j	0	1	2	3
0	0	0.05	0.15	0
1	0.05	0	0.05	0
2	0.15	0.05	0.3	0.1

3.3 MATRIZ DE CO-OCURRENCIA CON VENTANA DESLIZANTE

Debido a que el tiempo de espera para obtener la matriz de co-ocurrencia por el método anterior es elevado, se crearon métodos más rápidos para realizar estos cálculos.

En esta tesis, para obtener la GLCM se utiliza un método basado en el artículo de **Clausi (2001)** intitulado **"Rapid Determination of Co-occurrence Textura Features"**^[3.7]. Este método emplea una ventana deslizando para obtener la GLCM, el algoritmo comienza con la ventana en la esquina izquierda superior de la imagen. Las probabilidades de co-ocurrencia se determinan para esta ventana y se calculan los descriptores de esta matriz. Después la ventana se desliza una columna hacia la derecha, donde, la mayoría de las probabilidades que co-ocurren siguen siendo iguales, excepto por las probabilidades que se forman con la nueva columna que ha sido incluida a la ventana y por la columna que ha salido de ella.

Por lo tanto, a la matriz de co-ocurrencia original, se le suman las probabilidades que se forman con la columna que ha sido incluida y se le restan las probabilidades que se formaban con la columna que ha salido de la ventana.

Cuando se llega al extremo derecho de la matriz la ventana se baja una sola fila. Para las filas pares, la ventana se mueve de izquierda a derecha y para las filas impares la ventana se mueve de derecha a izquierda. La ventana se mueve en este patrón del zig-zag hasta que se cubre la imagen entera.

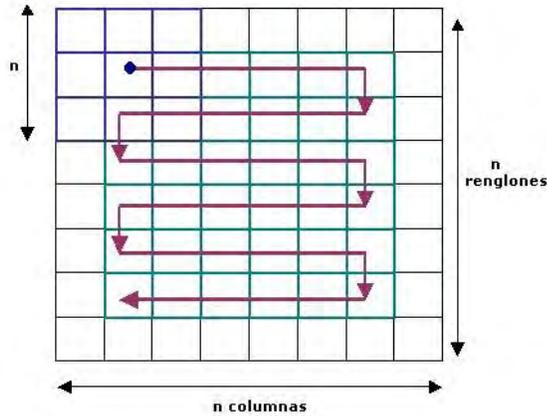


Figura 3.3 Patrón de zig-zag para determinar las características de textura de la imagen [3.7].

Para entender mejor como funciona este método, supongamos que tenemos la siguiente imagen:

0	0	0	1	1	3	2	2
0	0	1	2	2	2	1	3
0	1	2	2	1	1	2	1
3	2	1	2	2	3	3	2
2	3	1	3	1	1	1	3
2	2	3	1	1	2	2	1
0	2	2	2	2	2	3	2

La matriz auxiliar de co-ocurrencia para $|d|=1$, $\theta=0$ y $\theta=4$ es:

I	j	J	I
0	0	0	0
0	0	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1
0	0	0	0
0	1	1	0
1	2	2	1
2	2	2	2
0	1	1	0
1	2	2	1
2	2	2	2
2	1	1	2
3	2	2	3
2	1	1	2
1	2	2	1
2	2	2	2
2	3	3	2



3	1	1	3
1	3	3	1
3	1	1	3

La matriz de co-ocurrencia sin normalizar sería:

i/j	0	1	2	3
0	6	3	0	0
1	3	2	5	3
2	0	5	6	2
3	0	3	2	0

Ahora deslizamos la ventana una columna hacia la derecha:

0	0	0	1	1	3	2	2
0	0	1	2	2	2	1	3
0	1	2	2	1	1	2	1
3	2	1	2	2	3	3	2
2	3	1	3	1	1	1	3
2	2	3	1	1	2	2	1
0	2	2	2	2	2	3	2

Para no realizar el cálculo de la matriz de co-ocurrencia que se forma con esta ventana, simplemente tomamos la matriz de co-ocurrencia anterior y le restamos las probabilidades que se forman con las columnas 1 y 2 y le sumamos las probabilidades que se forman con las columnas 5 y 6.

Probabilidades de las columnas 1 y 2:

i	j	J	I
0	0	0	0
0	0	0	0
0	1	1	0
3	2	2	3
2	3	3	2

Como se puede observar, para el par de píxeles (0,0) existen 4 probabilidades de ocurrencia, para el par (0,1) y por lo tanto para el par (1,0) existe 1 probabilidad respectivamente, para el par (2,3) y (3,2) existen dos probabilidades de ocurrencia respectivamente. Por lo tanto se restan estas probabilidades a la matriz de ocurrencia ya calculada:



i/j	0	1	2	3
0	2	2	0	0
1	2	2	5	3
2	0	5	6	0
3	0	3	0	0

Probabilidades de las columnas 5 y 6.

l	j	J	l
1	3	3	1
2	2	2	2
1	1	1	1
2	3	3	2
1	1	1	1

Para el par (1,3) y para el par (3,1) existe 1 probabilidad de co-ocurrencia respectivamente. Para el par (1,1) existen 4, para y para los pares (2,3) y (3,2) también existe una probabilidad de co-ocurrencia para cada uno. Por lo tanto sumamos estas nuevas probabilidades a la matriz anterior y de esta manera obtenemos una nueva matriz de co-ocurrencia:

i/j	0	1	2	3
0	2	2	0	0
1	2	6	5	4
2	0	5	8	1
3	0	4	1	0

Este procedimiento se sigue hasta llegar al extremo derecho de la tabla, cuando se llega a este punto, la ventana se desliza una fila hacia abajo y las probabilidades de co-ocurrencia se calculan de forma similar.

0	0	0	1	1	3	2	2
0	0	1	2	2	2	1	3
0	1	2	2	1	1	2	1
3	2	1	2	2	3	3	2
2	3	1	3	1	1	1	3
2	2	3	1	1	2	2	1
0	2	2	2	2	2	3	2

0	0	0	1	1	3	2	2
0	0	1	2	2	2	1	3
0	1	2	2	1	1	2	1
3	2	1	2	2	3	3	2
2	3	1	3	1	1	1	3
2	2	3	1	1	2	2	1
0	2	2	2	2	2	3	2



En el ejemplo, la matriz de co-ocurrencia que se obtiene al llegar al extremo derecho de la imagen es:

i/j	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	8	4	4
2	0	4	8	3
3	0	4	3	2

Como la ventana se deslizó un renglón abajo, los términos que se restan a la matriz de co-ocurrencia son las probabilidades de las parejas que se forman el renglón que fue excluido de la tabla. En este caso el renglón es:

1	1	3	2	2
---	---	---	---	---

Las parejas son:

l	j	J	l
1	1	1	1
1	3	3	1
3	2	2	3
2	2	2	2

Por lo tanto, la matriz anterior menos las probabilidades anteriores es:

i/j	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	6	4	3
2	0	4	6	2
3	0	3	2	2

Por otro lado también se suman nuevas probabilidades, que se obtienen del renglón que se ha incluido en la ventana que se desliza, en este caso el renglón es:

1	1	2	2	1
---	---	---	---	---

Los pares de niveles de grises son:

l	j	J	l
1	1	1	1
1	2	2	1
2	2	2	2
2	1	1	2

Y por lo tanto la matriz de co-ocurrencia resultante es:



i/j	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	8	6	3
2	0	6	8	2
3	0	3	2	2

El proceso del cálculo de la matriz de co-ocurrencia sigue este mismo camino, siguiendo la trayectoria en zig-zag hasta completar la matriz de co-ocurrencia.

A pesar de que el método empleado reduce el tiempo requerido para obtener la matriz de co-ocurrencia, para imágenes de 512*512 píxeles, el tiempo requerido para el cálculo de esta matriz es muy alto, por lo tanto antes de calcular GLCM, primero se reduce el número de píxeles de la imagen a 32, 64, 128, etc.

3.4 DESCRIPTORES DE TEXTURA

Haralick (1973) sugirió 14 descriptores de textura para caracterizar a la matriz de co-ocurrencia. Estos descriptores tienen la finalidad de capturar algunos de los rasgos de la textura de una imagen como la homogeneidad y el contraste.

Los 14 descriptores de Haralick se clasifican en 4 grupos:

- ❖ **GRUPO 1.** Manifiestan los rasgos visuales de las texturas, entre estos descriptores se encuentran: Homogeneidad, Contraste y Correlación.
- ❖ **GRUPO 2.** Se basan en estadísticas: Varianza, Diferencia Inversa, Suma de Promedios, Suma de Varianzas y Diferencia de Varianzas.
- ❖ **GRUPO 3.** Se basan en la teoría de la información: Entropía, Suma de entropías y Diferencias de Entropías.
- ❖ **GRUPO 4.** Se basan en las medidas de la información de correlación: Coeficiente de Correlación Máxima.

A continuación se describen algunos de estos descriptores.

Contraste

El contraste proporciona información sobre de las variaciones bruscas de color en la imagen. Este descriptor se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |i - j|^2 C_{ij} \dots\dots\dots(3.2)$$



donde N representa los niveles de grises cuantizados.

El valor del contraste aumenta cuando existen más elementos de la matriz de co-ocurrencia alejados de la diagonal principal. En una textura rugosa o irregular el contraste será alto, por lo tanto, los niveles de grises serán claros. En una textura suave y uniforme el contraste será bajo, por lo cual los niveles de grises de la imagen de textura serán oscuros.

Correlación.

La correlación es una medida de la probabilidad que mide la relación entre las diferentes intensidades de los colores. Para dos dimensiones, la correlación se define como:

$$C_{rr} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (i - \mu_x)(j - \mu_y) C_{ij} \right| \dots\dots\dots(3.3)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N i C_{ij} & \text{y} & & \mu_y &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N j C_{ij} \\ \sigma_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (i - \mu_i)^2 C_{ij} & \text{y} & & \sigma_j &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (j - \mu_j)^2 C_{ij} \end{aligned}$$

El valor de la correlación está ligado al valor de sus medidas estadísticas, debido al carácter estadístico que posee este descriptor (media y varianza).

La correlación aumenta cuando la distancia de los elementos a la media es grande y cuando la varianza es baja, es decir cuando los elementos de la matriz no se encuentran muy alejados de la diagonal principal.

Directividad

El descriptor de directividad también conocido como descriptor de probabilidad de diferencia de niveles de grises, proporciona información sobre patrones de dirección en la textura. Se define matemáticamente como:

$$Dir = \sum_{i=1}^N C_{ij} \dots\dots\dots(3.4)$$

Este descriptor únicamente analiza la diagonal principal de la matriz de co-ocurrencia. Como los elementos de colores iguales descansan sobre la diagonal principal, el descriptor da información de los patrones que se dirigen a lo largo de una dirección, ya sea horizontal, vertical o diagonal.



El valor de directividad aumentará si en la matriz de co-ocurrencia se notan picos de intensidad del patrón de esta.

Entropía

Para medir la aleatoriedad contenida en la matriz de co-ocurrencia, se utiliza el descriptor de entropía, el cual se calcula como:

$$\varepsilon = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} \log C_{ij} \dots\dots\dots(3.5)$$

Donde: C_{ij} es cada elemento de la matriz, y n es el número de niveles de grises.

Cada uno de los números dentro de la matriz de co-ocurrencia se trata como una probabilidad. La entropía aumenta a medida que todos los elementos de la matriz de co-ocurrencia son parecidos. De esta manera, cuando todos los elementos de la matriz son iguales, la entropía tiene su valor máximo.

El descriptor de entropía sirve para clasificar a las texturas en suaves o rugosas, cuando el valor de la entropía es cero se tiene una textura suave, esto se refleja en la imagen de textura como una zona oscura. La rugosidad de la imagen va aumentando al incrementar el valor de la entropía, al mismo tiempo, el tono del nivel de gris se va aclarando. De esta manera las zonas con los niveles de grises más claros, representan zonas de mayor rugosidad.

Homogeneidad Local

El descriptor que indica la regularidad local de una textura, es la homogeneidad. La ecuación matemática de este descriptor es:

$$HL = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{1+(i-j)^2} \dots\dots\dots(3.6)$$

El descriptor de homogeneidad local, aumentará cuando la distancia $i-j$ sea mínima, es decir que mientras los elementos de la matriz de co-ocurrencia estén más próximos a la diagonal principal mayor será el valor de la homogeneidad local.

Máxima Probabilidad

Este descriptor proporciona información sobre la respuesta más fuerte de un par de píxeles en la matriz de co-ocurrencia. Su expresión matemática es:



$$mp = \max_{ij} (C_{ij}) \dots\dots\dots(3.7)$$

Cuando exista un pico de intensidad en la matriz de co-ocurrencia, el valor de este descriptor será mayor. Este descriptor es útil para percibir la mayor ocurrencia o la predominación de un color en la textura.

Momento de Diferencia de Orden k

El momento de diferencia de orden k es un descriptor que provee información dependiendo del parámetro k. Su expresión matemática es:

$$Dif = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |i - j|^k C_{ij} \dots\dots\dots(3.8)$$

El descriptor de diferencia de orden k, aumenta de valor cuando los elementos de la matriz de co-ocurrencia se encuentran alejados de la diagonal principal, cuando el parámetro k es igual a 2 este descriptor se convierte en el contraste. El momento de diferencia de primer orden provee información sobre la dispersión de la textura.

Momento Inverso de Diferencia de Orden k

Este momento refleja la agrupación y definición de los elementos de la matriz de co-ocurrencia.

Se obtiene mediante la expresión matemática:

$$Inv = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{|i - j|^k}, i \neq j \dots\dots\dots(3.9)$$

En este descriptor la influencia de la diagonal principal es despreciada. Cuando la distancia de los elementos de la matriz a la diagonal principal es baja, el valor del momento inverso aumenta. Este descriptor, indica que tan compacta está la distribución de la matriz de co-ocurrencia, dando la idea de que la textura posee una variación suave de colores.

Cluster Shade

La matriz de co-ocurrencia de este descriptor, está dado por:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (i + j - \mu_x - \mu_y)^3 C_{ij} \dots\dots\dots(3.10)$$



A medida que la media de los valores está más cercana al valor mínimo, el descriptor Cluster Shade aumenta su valor. Esta característica tiene la tendencia a oscilar entre valores positivos y negativos, puesto que la influencia de la media no siempre se compara con el valor de los elementos alejados de esta.

Cluster Prominence

La ecuación que describe a este descriptor es:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (i + j - \mu_x - \mu_y)^4 C_{ij} \dots\dots\dots(3.11)$$

Cluster shade y cluster prominence son medidas de la falta de simetría de la matriz. Cuando el valor de cluster shade y cluster prominenece es grande, la imagen no es simétrica. Cuando el valor de cluster prominence es pequeño, existe un pico alrededor de los valores de la media en la matriz de co-ocurrencia. Para la imagen esto significa que existe una pequeña variación en la escala de grises.

Uniformidad.

El descriptor de uniformidad está dado por la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^2 \dots\dots\dots(3.12)$$

Cuando todos los valores de C_{ij} son semejantes, el valor de la uniformidad es pequeño, pero cuando en la diagonal principal se dan picos grandes de intensidad el descriptor es grande.

La uniformidad indica la suavidad de la textura, y esto se refleja en la ubicación de sus probabilidades en la matriz de co-ocurrencia. De tal forma que, si muchos píxeles de colores iguales cumplen con la condición de ocurrencia, en la diagonal principal de la matriz, existirá un pico de intensidad.

Varianza

La varianza se define como:

$$V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (i - \mu)^2 C_{ij} \dots\dots\dots(3.13)$$



La dispersión que tiene un conjunto de muestras con respecto a un valor medio, se mide por medio de la varianza. La varianza aumenta al aumentar la distancia de las muestras del conjunto con respecto a su media. En la matriz de co-ocurrencia, la media se ubica en algún punto de la diagonal principal y la varianza es la dispersión de las muestras con respecto a esta media. De esta forma, la varianza tendrá un valor mayor para las texturas donde la matriz de co-ocurrencia sea de forma alargada o dispersa con respecto del máximo pico en la diagonal principal.

4

**CAMPOS ALEATORIOS DE
MARKOV**

CAPÍTULO



Andrei Andreevitch Markov (1856-1922) [4.14].



CAMPOS ALEATORIOS DE MARKOV (MRF)

4.1 GENERALIDADES

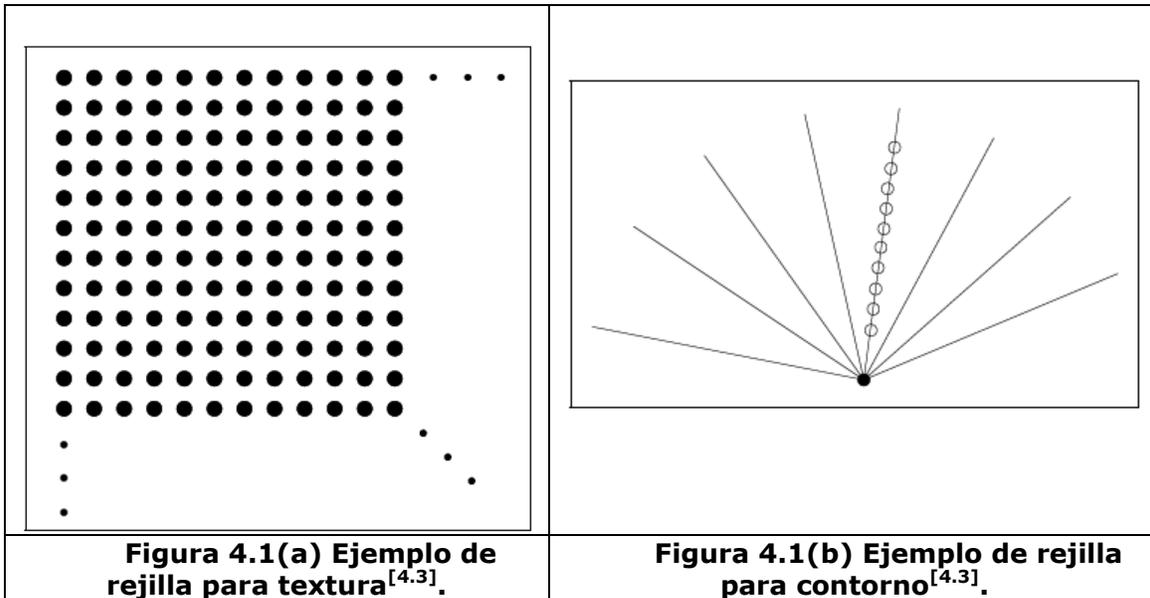
La teoría de los campos aleatorios de Markov es una rama de la teoría de la Probabilidad para analizar las dependencias espaciales o contextuales de un fenómeno físico.

En el procesamiento digital de imágenes los campos aleatorios de Markov se utilizan para la segmentación, la cual es considerada como un problema de etiquetado. En una imagen segmentada dicho problema se resuelve asignando una etiqueta a cada pixel de la imagen y se le denomina site.

Al conjunto de posiciones de una imagen de pixeles de tamaño $n \times n$ donde se define el campo se denomina malla, rejilla o lattice (fig. 4.1a) y se denota por S . De esta forma, S es un conjunto discreto de m sites, es decir:

$$S = \{(i, j) | 1 \leq i, j \leq n\} \dots\dots\dots(4.1)$$

En el contorno el conjunto S representa cada uno de los radios trazados desde el centro en una estructura lineal (1D), como puede verse en la figura 4.1 (b).



Para cada site $s \in S$ se define un espacio de estados Λ_s . Para cada pixel de la imagen, el espacio de estados Λ_s corresponde a los niveles de gris. Para cada radio del contorno (s), el espacio de estados corresponde a cada uno de los puntos del radio por donde puede pasar el contorno. En la figura 4.1 (b), estos corresponden a los círculos blancos a lo largo del radio.



Al conjunto de etiquetas que puede tomar cada site se le denota con L . Este conjunto puede ser discreto o continuo. Para una imagen dividida en un número específico de clases (M) es discreto.

$$L = \{I_1, \dots, I_M\} = \{1, \dots, M\} \dots\dots\dots(4.2)$$

Y es continuo, por ejemplo, para calcular la profundidad en un par de imágenes estereoscópicas, puesto que cada pixel puede tomar un valor continuo de profundidad. En el caso continuo, este conjunto de posibles etiquetas puede ser el conjunto de los números reales \mathfrak{R} ó aun intervalo de éste.

$$L_c = [x_l, x_h] \subset \mathfrak{R} \dots\dots\dots(4.3)$$

Donde $[x_l, x_h]$ es el valor mínimo y máximo de profundidad del campo de vista presente en el par estereoscópico.

A cada site de S se le asigna solo una de las etiquetas de L con la función de mapeo f :

$$f : S \rightarrow L$$

Un conjunto específico de etiquetas recibe el nombre de configuración. Cuando todos los sites tienen el mismo conjunto de etiquetas de L , al conjunto de todas las configuraciones se le llama espacio de configuraciones Ω . Así por ejemplo, si se denota un valor de gris del pixel o una posición para el radio correspondiente como: $x_s \in \Lambda_s$. Entonces $\Omega = (\Lambda_s)_{s \in S}$ es el espacio de todas las configuraciones. Por lo tanto, va a ser el conjunto de todas las texturas o contornos posibles que se pueden definir en S . Por otro lado, suponiendo que todos los espacios y configuraciones son finitos y denotando con $x = (x_s)_{s \in S}$ a una textura o un contorno, si todos los pixeles tienen el mismo rango de niveles de gris para el caso de la textura y el mismo rango de posiciones para todos los radios en el caso del contorno, se dice que el espacio Ω es homogéneo.

Para una imagen de m sites y E -número de etiquetas, el tamaño de este espacio de configuraciones, está dado por:

$$\Omega = ExExEx \dots xE = E^m \dots\dots\dots(4.4)$$

Existen E^m configuraciones posibles para el etiquetado discreto con m sites y E etiquetas. Para un problema de etiquetado continuo, el número de configuraciones posibles es infinito.



4.2 TOPOLOGIAS

Las topologías en los Campos Aleatorios de Markov describen las relaciones contextuales entre sites.

4.2.1 VECINDADES Y CLIQUES

Los sites de S en están relacionados unos a otros mediante un sistema de vecindades N , el cual se define como:

$$N = \{N_i \mid \forall i \in S\} \dots\dots\dots(4.5)$$

Donde N_i es el conjunto de sites vecinos a i . Para los cuales se cumplen las siguientes condiciones:

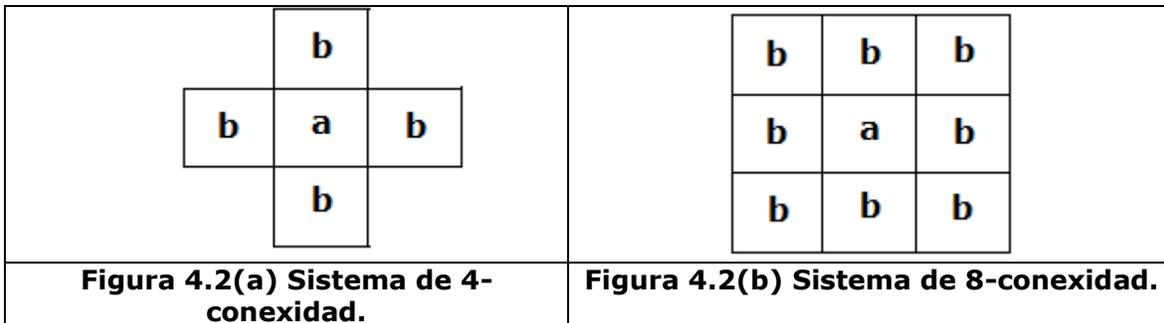
- ❖ Un sitio no es vecino a sí mismo: $i \notin N_i$
- ❖ La relación de vecindades mutua entre el site i' e i :
 $i \in N_{i'} \Leftrightarrow i' \in N_i$

Para un lattice regular, el conjunto de vecinos del site i está definido como el conjunto de sites cercanos dentro de un radio r .

$$N_i = \{i' \in S \mid dist(i', i)^2 \leq r, i' \neq i\} \dots\dots\dots(4.6)$$

Donde r es un número entero y $dist(m, s)$ es la distancia de Euclides entre el site m y el site s . Los sitios que están en las fronteras tienen menos vecinos.

La relación espacial entre un site y sus próximos vecinos, queda descrita por la conexidad. En un sistema de vecindad de primer orden, también llamado sistema de 4-conexidad, cada site tiene cuatro vecinos, fig. 4.2 (a), donde a es el site en cuestión y b 's son sus vecinos. En el segundo orden de un sistema de vecindad u 8-conexidad, existen 8 vecinos para cada sitio, fig. 4.2(b).





El conjunto de sites de un lattice regular que contengan al conjunto $S = \{(i, j) | 1 \leq i, j \leq n\}$ corresponde a los pixeles de una imagen de dos dimensiones de tamaño $n \times n$. Cada site interior (i, j) bajo el sistema de 4-conexidad, tiene 4 vecinos:

$$N_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\} \dots \dots \dots (4.7)$$

Un site en las fronteras tiene 3 vecinos y un site en las esquinas tiene 2.

Para 8-conexidad se tiene:

$$N_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1), (i+1, j+1), (i-1, j-1), (i+1, j-1), (i-1, j+1)\} \dots \dots \dots (4.8)$$

CLIQUES

El par (S, N) constituye un grafo, donde S contiene los sites y N determina los enlaces entre ellos de acuerdo a una relación de vecindad. Un clique c de (S, N) está definido como un subconjunto de sites en S . Un clique puede construirse con un solo site $c = \{i\}$, con un par de sites cercanos $c = \{i, i'\}$ o por 3 sites vecinos $c = \{i, i', i''\}$, etc.

La colección de un site, 2 sites o 3 sites se denotan como C_1, C_2, C_3 respectivamente, donde:

$$C_1 = \{i | i \in S\}$$

$$C_2 = \{(i, i') | i' \in N_i, i \in S\}$$

$$C_3 = \{(i, i', i'') | i, i', i'' \in S\}$$

La colección de todos los cliques para (S, N) es:

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \dots \dots \dots (4.9)$$

El tipo de clique para (S, N) de un lattice regular está determinado por su tamaño, forma y orientación. En la figura 4.3 se muestran los tipos de cliques para los sistemas de vecindad de primer y segundo orden para un lattice. Un solo site (fig. 4.3a), y los pares de sites horizontal y vertical (fig. 4.3b) corresponden a un sistema de vecindad de primer orden. Un sistema de vecindad de segundo orden incluye los sites (4.3d) y (4.3e) y además a los cliques formados por pares de sites diagonales y a los cliques triples y cuádruples.

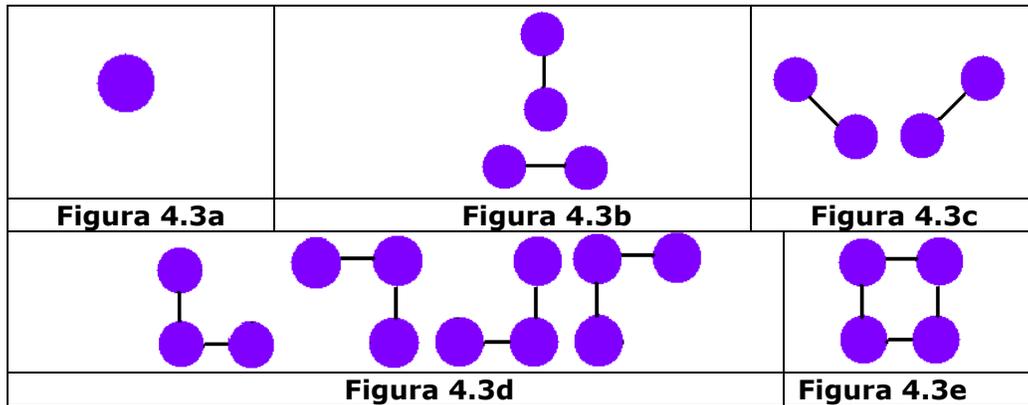


Figura 4.3 Tipos de cliques para los sistemas de vecindad de primer y segundo orden para un lattice.

4.2.2 PROPIEDADES DE MARKOV

Una familia de variables aleatorias $F = \{F_1, \dots, F_m\}$ definida en \mathcal{S} , donde cada variable aleatoria F_i toma un valor f_i en L , es considerada un Campo Aleatorio de Markov (MRF) sobre \mathcal{S} con respecto al sistema de vecindad N , si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

1) Positividad

$$P(f) > 0 \quad \forall f \in \mathfrak{F}$$

Cuando la propiedad de positividad se cumple, la probabilidad conjunta de $P(f)$ de cualquier campo aleatorio está únicamente determinada por su probabilidad condicional local.

2) Markovianidad

$$P(f_i | f_{s-\{i\}}) = P(f_i | f_{N_i})$$

Donde $f_{s-\{i\}}$ es el conjunto de todas las etiquetas menos $\{i\}$ y $f_{N_i} = \{f_{i'} | i' \in N_i\}$ es el conjunto de etiquetas que pertenecen a los sites de la vecindad de i .

La propiedad de Markovianidad, indica que la probabilidad de que el pixel i tome el nivel de gris f_i , dado todos los niveles de gris $f_{s-\{i\}}$ de todos los pixeles restantes de la imagen, es igual a la probabilidad de que el pixel i tome el nivel de gris f_i , dados los valores de los niveles de gris f_{N_i} de su vecindad de pixeles N_i ^[4.2].



La Markovianidad representa las características locales de F .

Otras propiedades de un MRF son la homogeneidad y la isotropía. Un MRF es homogéneo si $P(f_i | f_{N_i})$ no toma en cuenta la posición relativa del site i en S . La propiedad de isotropía se muestra con los cliques potenciales y para entenderla hay que entender lo que es una distribución de Gibbs.

Una distribución de Gibbs toma la forma:

$$P(f) = \frac{1}{z} e^{-\frac{1}{T}u(f)} \dots\dots\dots(4.10)$$

Donde:

$$z = \sum_{f \in \mathcal{S}} e^{-\frac{1}{T}u(f)} \dots\dots\dots(4.11)$$

z . Es una constante normalizada llamada la función de partición.
 T . Es una constante llamada temperatura cuyo valor debe asumirse como 1 en cualquier otro caso.

$$U(f) = \sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(f)$$

$U(f)$ es la función de energía y está compuesta por la suma de las funciones cliques potenciales $V_c(f)$, para todos los cliques posibles de \mathcal{C} . El valor de $V_c(f)$ depende de la configuración local del clique c .

Si $V_c(f)$ es independiente de la posición relativa del clique c en S , entonces se dice que un GRF es homogéneo. Si $V_c(f)$ es independiente de la orientación de c , entonces, se dice que un GRF es isotrópico.

Bajo estas dos propiedades se puede especificar más fácilmente un GRF. Para un MRF, la propiedad de homogeneidad se asume generalmente por conveniencia matemática y computacional.

La probabilidad de ocurrencia de una configuración en particular o patrón f se mide con $P(f)$. Las configuraciones más probables son aquellas con baja energía. La temperatura controla la forma de la distribución, así, cuando la temperatura es cercana a cero, la distribución se concentra alrededor de la energía mínima global y cuando la temperatura es alta, las configuraciones están igualmente distribuidas.



La energía de la distribución de Gibbs se expresa como la suma de varios cliques de diferente tamaño:

$$U(f) = \sum_{\{i\} \in C_1} V_1(f_i) + \sum_{\{i,i'\} \in C_2} V_2(f_i, f_{i'}) + \sum_{\{i,i',i''\} \in C_3} V_3(f_i, f_{i'}, f_{i''}) + \dots \dots \dots (4.12)$$

La ecuación anterior implica una distribución de Gibbs homogénea porque V_1, V_2 y V_3 son independientes de i, i' e i'' .

Un caso especial es cuando se consideran cliques distintos de tamaño 2. En este caso la ecuación de energía se escribe como:

$$U(f) = \sum_{i \in S} V_1(f_i) + \sum_{i \in S} \sum_{i' \in N_i} V_2(f_i, f_{i'}) \dots \dots \dots (4.13)$$

La probabilidad condicional, se escribe como:

$$P(f_i | f_{N_i}) = \frac{\exp \left[- \left(V_1(f_i) + \sum_{i' \in N_i} V_2(f_i, f_{i'}) \right) \right]}{\sum_{f_i \in L} \exp \left[- \left(V_1(f_i) + \sum_{i' \in N_i} V_2(f_i, f_{i'}) \right) \right]} \dots \dots \dots (4.14)$$

Existe una equivalencia entre un Campo Aleatorio de Markov y un Campo aleatorio de Gibbs, dicha equivalencia se encuentra establecida en el teorema de **Hammersley-Clifford**, que dice:

F es un MRF sobre S con respecto a un sistema de vecindad N , si y solo si F es un GRF sobre S con respecto a N .

Gracias a esta equivalencia, se puede especificar un campo aleatorio de Markov de forma más simple, ya que en vez de trabajar con características locales, se trabaja con cliques potenciales.

Este teorema también provee una forma simple de especificar la probabilidad condicional. Así, se puede especificar la probabilidad condicional $P(F = f)$ especificando la función de potencial de clique $V_c(f)$ y escogiendo una función de potencial apropiada para el comportamiento deseado de un sistema. De esta forma se codifica el conocimiento a priori o se da preferencia a las interacciones entre etiquetas.



4.3 MODELOS DE MARKOV

Los modelos de Markov permiten modelar las propiedades de la imagen tales como textura y regiones.

4.3.1 MODELOS DE ISING

El modelo de Ising es el modelo más importante y más simple en los campos aleatorios de Markov; surgió cuando el Físico Ernest Ising trato de modelar los materiales ferromagnéticos. En este modelo los dipolos de los materiales ferromagnéticos pueden orientarse únicamente a lo largo de dos direcciones: hacia arriba (+1) o hacia abajo (-1). El estado de cada dipolo se ve influenciado por los dipolos cercanos.

Si consideramos a los dipolos como miembros de un campo aleatorio $F = \{F_1, \dots, F_m\}$ definida en S , donde cada variable aleatoria F_i (o dipolo) toma un valor f_i en $L = \{+1, -1\}$ ó $L = \{0, 1\}$, entonces la energía de Gibbs tomando dos cliques de potencia está dada por:

$$U(f) = \sum_{\{i\} \in C_1} \alpha f_i + \sum_{\{i, i'\} \in C_2} \beta_{i, i'} f_i f_{i'} \dots\dots\dots(4.15)$$

A la ecuación anterior se le conoce como auto-modelo logístico. En ella, α_i y β_i son los coeficientes de interacción.

Cuando se tienen 4 vecinos en un lattice de dos dimensiones, o dos vecinos en un lattice de 1 dimensión, entonces el modelo auto-logístico recibe el nombre de modelo de Ising.

La probabilidad condicional para un modelo auto-logístico es:

$$P(f_i | f_{N_i}) = \frac{e^{\alpha_i f_i + \sum_{i' \in N_i} \beta_{i, i'} f_i f_{i'}}}{1 + e^{\alpha_i + \sum_{i' \in N_i} \beta_{i, i'} f_{i'}} \dots\dots\dots(4.16)$$

Cuando la distribución es homogénea, se tiene $\alpha_i = \alpha$ y $\beta_{i, i'} = \beta$



4.3.2 MODELO DE POTTS

El modelo de Potts también es conocido como modelo generalizado de Ising o Modelo multi-nivel logístico (MLL). En este modelo, hay $M > 2$ etiquetas discretas en el conjunto $L = \{1, \dots, M\}$. Un clique de potencia depende de su tamaño, forma, posible orientación y de su localización. Para los cliques que están formados por más de un site, los cliques potenciales en el modelo de Potts son de la siguiente forma:

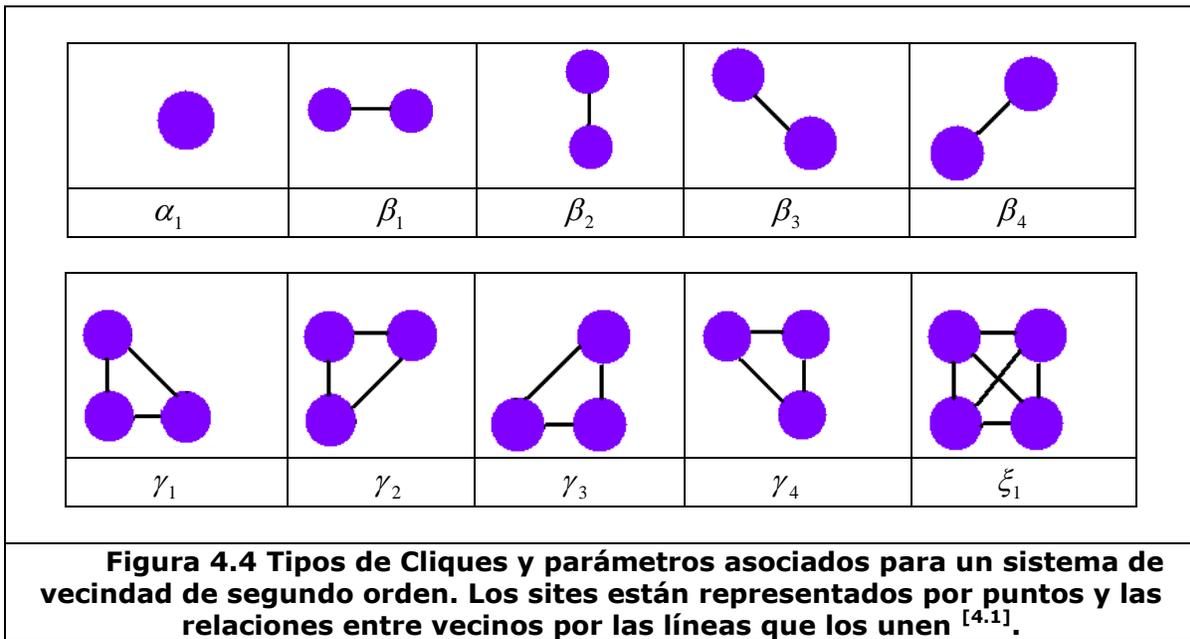
$$V_c(f) = \begin{cases} \xi_c & \text{Si todos los sites de } c \text{ tienen la misma etiqueta} \\ -\xi_c & \text{En otro caso} \end{cases}$$

donde ξ_c es el potencial para los cliques tipo c ; para los cliques de un solo site los cliques dependen de la etiqueta asignada a cada site.

$$V_c(f) = V_c(f_i) = \alpha_l \text{ Si } f_i = l \in L_d \dots\dots\dots(4.17)$$

Donde α_l es el potencial para la etiqueta l .

A continuación se muestran los cliques y los parámetros asociados para un sistema de vecindad de segundo orden (de 8 vecinos).





Se asume que el modelo de Potts es de segundo orden por lo cual α (para cliques de un solo site) y β (para cliques de un par de sites) son parámetros diferentes de cero.

La función de potencia para un par de cliques se escribe como:

$$V_2(f_i, f_{i'}) = \begin{cases} \beta_c & \text{Si los sites de un clique } \{i, i'\} = c \in C_2 \text{ tienen la misma etiqueta} \\ -\beta_c & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Donde β_c es el parámetro β para cliques tipo c y C_2 es el conjunto de cliques de dos sites.

Para un sistema de vecindad 4, hay 4 pares de cliques y cuatro diferentes β_c 's. Cuando el modelo es isotrópico, los cuatro toman el mismo valor y la probabilidad condicional se expresa como:

$$P(f_i = I | f_{N_i}) = \frac{e^{-\alpha_I - \beta n_i(I)}}{\sum_{I=1}^M e^{-\alpha_I - \beta n_i(I)}} \dots\dots\dots(4.18)$$

Donde $n_i(I)$ es el número de sites en N_i que tienen la etiqueta I . El modelo de Ising es aquel donde las etiquetas son $\{0,1\}$.

4.4 OPTIMIZACIÓN

El muestreador de Gibbs y el muestreador de Metrópolis son las técnicas más usuales de métodos que se basan en la simulación de cadenas de Markov. Ambos métodos suelen denominarse por las siglas MCMC (Markov Chain Monte Caro).

Los muestreadores de Gibbs y de Metrópolis se basan en la simulación de una cadena de Markov cuya distribución en equilibrio corresponde a la distribución de la cual se quieren obtener muestras.



4.4.1 MUESTREADOR DE GIBBS

El muestreador de Gibbs fue propuesto originalmente por Geman y Geman (1984) en el contexto de la restauración de imágenes sometidas a ruido y distorsión no lineal. Con el muestreador de Gibbs es posible simular una cadena de Markov, con la distribución de equilibrio $p(\theta | x)$, donde cada nuevo valor de la cadena se obtiene a través de un proceso iterativo que requiere generar muestras de distribuciones cuya dimensión es menor que d .

Sea $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, donde:

θ_i es una partición de θ , $\theta_i \in \mathbb{R}^{d_i}$

$$\sum_{i=1}^q d_i = d$$

Si el estado actual de θ es $\theta^{(t)} = (\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_k^{(t)})$, $\theta^{(t+1)}$ se obtiene a partir de $\theta^{(t)}$ por medio del siguiente algoritmo:

1. Comenzar con valores iniciales arbitrarios $\theta^{(0)}$
2. Generar $\theta_1^{(t+1)}$ de $p(\theta_1 | x, \theta_2^{(t)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_k^{(t)})$
3. Generar $\theta_2^{(t+1)}$ de $p(\theta_2 | x, \theta_1^{(t+1)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_k^{(t)})$
4. \vdots
5. Generar $\theta_k^{(t+1)}$ de $p(\theta_k | x, \theta_1^{(t+1)}, \theta_2^{(t+1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(t+1)})$

La sucesión así obtenida $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots$ es una realización de una cadena de Markov cuya distribución de transición está dada por:

$$p(\theta^{(t+1)} | \theta^{(t)}) = \prod_{i=1}^k p(\theta_i^{(t+1)} | x, \theta_1^{(t+1)}, \dots, \theta_{i-1}^{(t+1)}, \theta_{i+1}^{(t)}, \dots, \theta_k^{(t)}) \dots \dots \dots (4.19)$$

Una vez que se ha alcanzado la convergencia se toman las muestras $\theta^{(t+1)}$, las cuales corresponden a la distribución deseada.

Las densidades:

$$\begin{aligned}
 & p(\theta_1 | x, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q) \\
 & \vdots \\
 & p(\theta_i | x, \theta_1, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_q) \quad i = 2, \dots, q-1 \\
 & \vdots \\
 & p(\theta_q | x, \theta_1, \dots, \theta_{q-1})
 \end{aligned}$$



Se conocen como densidades condicionales completas y pueden identificarse al inspeccionar la forma de la distribución final $p(\theta|x)$. De hecho, para cada $i = 1, \dots, q$

$$p(\theta_i | x, \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_q) \approx p(\theta_i | x)$$

Donde $p(\theta | x) = p(\theta_1, \dots, \theta_q | x)$ es vista solo como función de θ_i .

En ocasiones la distribución final ec. (4.19) implica cierta estructura de independencia condicional entre algunos de los elementos del vector θ . En estos casos muchas de las densidades condicionales completas se simplifican.

4.4.2 MUESTREADOR DE METROPOLIS

Con este algoritmo se obtiene una cadena de Markov en el tiempo $t+1$, θ_{t+1} mediante el muestreo de un punto candidato θ^* de una distribución propuesta $Q(\cdot|\theta)$ la cual solo depende del estado θ .

Generalmente Q es tomada como una normal con media θ y desviación estándar fija, es decir, Q es $Normal(\theta, \sigma)$. Otra elección posible es una uniforme $U(X_{t-a}, X_{t+a})$, donde a es un valor a ser escogido.

El punto θ^* es aceptado como el valor θ_{t+1} con probabilidad de transición definida de la siguiente manera:

Sea $Q(\theta^*|\theta)$ una distribución de transición (arbitraria) y definamos

$$\alpha(\theta^*|\theta) = \min \left\{ \frac{p(\theta^*|x)Q(\theta|\theta^*)}{p(\theta|x)Q(\theta^*|\theta)}, 1 \right\} \dots\dots\dots(4.20)$$

Si el punto θ^* no es aceptado entonces la cadena no se mueve y $\theta_{t+1} = \theta_t$

Algoritmo del muestreador de metrópolis

1. Inicializar la cadena de Markov con $\theta^{(0)}$.
2. Generar una observación θ^* de $Q(\theta^*|\theta^{(t)})$;
2. Generar una variable $u \sim U(0,1)$;
3. si $u \leq \alpha(\theta^*, \theta^{(t)})$, hacer $\theta^{(t+1)} = \theta^*$; en caso contrario, hacer $\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)}$.

Este procedimiento genera una cadena de Markov con distribución de transición:



$$P(\theta^{(t+1)} | \theta^{(t)}) = \alpha(\theta^{(t+1)}, \theta^{(t)})Q(\theta^{(t+1)} | \theta^{(t)})$$

La probabilidad de aceptación $\alpha(\theta^*, \theta)$, solo depende de $p(\theta | x)$ a través de un cociente, por lo que la constante de normalización no es necesaria.

Muestreador de metrópolis

Es la versión original propuesta por Metrópolis (1953). En la cual es necesario que la distribución propuesta Q sea simétrica. Es decir, $Q(\theta^* | \theta) = Q(\theta | \theta^*)$, en cuyo caso

$$\alpha(\theta^*, \theta) = \min \left\{ \frac{p(\theta^* | x)}{p(\theta | x)}, 1 \right\} \dots\dots\dots(4.21)$$

Existen dos casos particulares del muestreador de Metrópolis que se utilizan en la práctica son:

Caminata aleatoria

En este caso es necesario que $Q(\theta^* | \theta) = Q_1(\theta^* - \theta)$, donde $Q_1(\bullet)$ es una densidad de probabilidad simétrica centrada en el origen. Por lo tanto, el punto candidato θ^* se toma como $\theta^* = \theta^{(t)} + \xi$ donde ξ es una variable aleatoria de incremento de la distribución propuesta Q . Con base a lo anterior:

$$\alpha(\theta^*, \theta) = \min \left\{ \frac{p(\theta^* | x)}{p(\theta | x)}, 1 \right\}$$

Independencia

Este muestreador fue propuesto por Tierney (1994), en este caso, la distribución propuesta Q es de la forma $Q(\theta^* | \theta) = Q_0(\theta^*)$, donde $Q_0(\bullet)$ es una densidad de probabilidad sobre θ . Entonces

$$\alpha(\theta^*, \theta) = \min \left\{ \frac{\omega(\theta^*)}{\omega(\theta)}, 1 \right\} \quad \text{con } \omega(\theta) = p(\theta | x) / Q_0(\theta) \dots\dots\dots(4.22)$$

En la práctica es común utilizar distribuciones de transiciones normales ó t de Student ligeramente sobredispersas.



4.4.3 ESQUEMA DEL RECOCIDO SIMULADO

El algoritmo de recocido simulado (Simulated Annealing Algorithm - SAA) pertenece una clase de Algoritmos de búsqueda local (Local Search Algorithms - LSA) llamada Algoritmos de Umbral (Threshold Algorithm - TA). Este método se utiliza para la solución de problemas de optimización. Su fundamentación se basa en el trabajo de Metropolis et al. (1953) en el campo de la termodinámica estadística.

El recocido simulado se llama así por su analogía con el recocido de sólidos, el cual consiste en calentar un sólido a una temperatura en la que sus cristales deformados cristalicen para producir nuevos. Seguida de la etapa de calentamiento viene una etapa de enfriamiento en donde la temperatura se baja lentamente, lo cual ayuda a que los cristales dentro del sólido se reorganicen y encuentren un estado de equilibrio de energía mínima.

La siguiente ecuación muestra el comportamiento arriba mencionado:

$$e^{-\Delta D / \zeta T} > R(0,1) \dots\dots\dots(4.23)$$

Donde:

- ΔD es la variación de la organización de las partículas
- ζ es la constante de Boltzmann
- T es la temperatura física en grados Kelvin
- $R(0, 1)$ es un numero aleatorio entre 0 y 1.

Al reducir la temperatura se reduce el rango en el cual las partículas se pueden mover, lo cual provoca que se vayan organizando gradualmente.

El Recocido simulado, se utiliza para solucionar problemas de optimación combinatorial adaptando la ecuación para el recocido a la programación. De esta manera, este algoritmo recorre rápidamente el espacio de soluciones de un problema y mientras se reduce la temperatura sintética se reduce la velocidad con que se recorre el espacio y por lo tanto se acerca más a la solución, la cual generalmente no es un óptimo global sino uno muy cercano a este.

La analogía entre el SAA y el problema de optimización combinatorial está basado en las siguientes equivalencias:

- Las soluciones al problema de optimización combinatorial son equivalentes a los estados de un sistema físico.
- El costo de una solución es equivalente a la energía de un estado.
- Un parámetro de control juega el rol de temperatura.



La ventaja de utilizar el recocido simulado para encontrar el mínimo óptimo de un problema es que si el espacio de soluciones es demasiado grande este algoritmo lo recorre rápidamente.

El algoritmo de recocido simulado consiste en lo siguiente:

Sea (S, f) donde el espacio solución S denota el conjunto finito de todas las posibles soluciones y f denota la función de costo:

$$f: S \rightarrow \mathfrak{R}$$

Se requiere encontrar una solución $i_{opt} \in S$ que minimize f , tal que $f(i_{opt}) \leq f(i)$ para toda $i \in S$.

Para ello necesitamos una vecindad S' de S y una sucesión t_k .

Algoritmo.

1. Definir un conjunto solución S
2. Tomar un valor de temperatura $T > 0$
3. Mientras el sólido no esté congelado
4. Loop de L veces
5. Toma un vecino aleatorio s' de s
6. Calcula $\Delta = f(s') - f(s)$
7. Si $\Delta \leq 0$
8. Entonces $s = s'$
9. Sino
10. Coloca $s = s'$ con una probabilidad $\exp\left(\frac{f(i) - f(j)}{c_\zeta}\right)$
11. $T = rT$ (disminuye temperatura)
12. Regresa a 2

Con el algoritmo del recocido simulado se determina un cronograma de enfriamiento, cuando se inicia se tiene una temperatura muy alta y aunque toma muy pocas iteraciones recorrer el espacio de soluciones y se puede encontrar un mínimo global, las probabilidades de permanecer en ese estado son bajas debido al amplio rango de movimiento, entonces, es necesario reducir la temperatura. Al reducir la temperatura el sistema recorre el espacio con más iteraciones, pero como se reduce el rango de movimiento se tienen más posibilidades de permanecer cerca del mínimo global.



El algoritmo de recocido simulado se utiliza para segmentar imágenes bajo el esquema de MRF debido a que se necesita minimizar la función de energía a posteriori. En una imagen, el objetivo del problema de optimización consiste en encontrar dentro de un conjunto de etiquetas Ω una clase ω que minimice la función de energía.

Considerando que U_{\max} es la energía máxima en todas las configuraciones y U_{\min} es la energía mínima, entonces la diferencia entre ambas es:

$$\Delta U = U_{\max} - U_{\min}$$

El algoritmo del recocido simulado aplicado a los MRF es:

1. Inicio

Determinación aleatoria de $Y^{(0)}$ (la clase de cada pixel debe determinarse mediante un generador de números aleatorios, con distribución uniforme, en el rango del número de clases).

Asignar una temperatura inicial $T^{(0)}$ muy alta.

2. Desde $N=1$ a $N=n$
 Barrido secuencial de la Imagen

En cada etapa(n)

Escoger un site s , $r = s^{(n)}$ su valor es $Y_r^{(n)}$ y su configuración de vecindad es $V_r^{(n)}$.

Efectuar el sorteo de una variable aleatoria (clase "elección") con distribución uniforme: $\xi \in \Omega$

3. Criterio de metrópolis.

4. Calcular variación de la energía local asociada al site r :

$$\Delta U = U(\xi | V_r^{(n)}, X) - U(Y_r^{(n)} | V_r^{(n)}, X)$$

Si $\Delta U \leq 0 \Rightarrow Y_r^{(n+1)} = \xi$

Si $\Delta U > 0 \Rightarrow Y_r^{(n+1)} = \xi$ con probabilidad: $\xi = e^{-\frac{\Delta U}{T}}$

5. Regresar a 2.

6. Las temperaturas decrecen hasta aproximarse a 0 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0$.



En el algoritmo anterior, la expresión $\Delta U = U(\xi | V_r^{(n)}, X) - U(Y_r^{(n)} | V_r^{(n)}, X)$ representa la variación local y global de energía asociada a la transición $y_r^{(n+1)} = \xi$. De forma práctica, se simula la probabilidad dada por $p = e^{-\frac{\Delta U^{(n)}}{T^{(n)}}}$ efectuando el sorteo aleatorio de una variable distribuida uniformemente $\eta \in [0,1]$:

$$Y_r^{(n+1)} = \begin{cases} \xi & \text{si } 0 \leq \eta \leq p \\ Y_r^{(n)} & \text{otro caso} \end{cases}$$

4.4.4 ESQUEMAS DE DECREMENTO DE TEMPERATURA

Para minimizar la función de energía a posteriori es necesario decrementar la temperatura. La forma más simple de hacerlo es mediante la siguiente regla:

$$T_{q+1} = \alpha T_q \dots\dots\dots(4.24)$$

Donde α es una constante y toma los valores del siguiente intervalo $0 < \alpha < 1$. El esquema anterior es llamado esquema de enfriamiento exponencial (exponential cooling scheme- ECS) y fue propuesto por Kirkpatrick et. al., en 1982 con $\alpha = 0.95$.

Randelman y Grest compararon este esquema con el esquema de enfriamiento lineal (*linear cooling scheme* (LCS)), en el cual la temperatura T se reduce cada L intentos.

$$T_{q+1} = T_q - \Delta T \dots\dots\dots(4.25)$$

Randelman y Grest encontraron que las reducciones alcanzadas pueden ser comparadas y que el valor final de f puede ser mejorado con índices de enfriamiento lentos, a expensas de una mayor demanda computacional. Por último, observaron que el funcionamiento del algoritmo dependió más de la relación de enfriamiento $\Delta T / L$ que de los valores individuales de ΔT y L .

Un esquema más de enfriamiento es el de la forma $T^{(n)} = \frac{c}{\log(n+1)}$, donde n es el número de iteraciones.



Cabe mencionar que para asegurar la convergencia a un mínimo local, el esquema de temperatura debe cumplir con dos condiciones:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} T^{(n)} = 0$
- 2) $T^{(n)} \geq \frac{m\alpha\Delta}{\ln(1+n)} \dots\dots\dots(4.26)$

Donde m es el número de sites y $\Delta = E(f)_{\max} - E(f)_{\min}$.

La desventaja de la ec. (4.26) es su lentitud.

5

MODELO DE FUSIÓN

CAPÍTULO



Thomas Bayes (1702-1761)^{5.71}.



5. MODELO DE FUSIÓN

Como las imágenes obtenidas remotamente no se pueden analizar utilizando un solo algoritmo, se considera el problema de fusionar los resultados de diferentes algoritmos que realizan la misma tarea sobre la misma imagen satelital ó aérea con el fin de mejorar la calidad del resultado.

5.1 DESCRIPCIÓN GENERAL

Cuando en una imagen se tienen k clases y r descriptores (rugosidad, uniformidad, etc.), cada descriptor puede tener v valores, entonces hay v^r posibles eventos conjuntos (vectores característicos) para cada clase k , por lo tanto hay kv^r combinaciones posibles para las cuales los datos deben ser acumulados.

Una forma de reducir el número de combinaciones es asumir que los descriptores son independientes dada la clase. Entonces las probabilidades de los vectores característicos pueden estimarse utilizando la regla de la multiplicación. Esto es, la probabilidad de que un vector característico tome el valor de (X_1, X_2, \dots, X_r) , dada la clase A , puede estimarse como:

$$P(X_1, X_2, \dots, X_r | A) = P(X_1 | A)P(X_2 | A) \dots P(X_r | A) \dots \dots \dots (5.1)$$

No se debe suponer que los descriptores son independientes para toda la población, y reemplazar a $P(X_1, X_2, \dots, X_r)$ por $P(X_1)P(X_2), \dots, P(X_r)$, sería probable que la suma calculada de todas las probabilidades posteriores de clases asociada no fueran iguales a 1.

De acuerdo a lo anterior, si existen k clases y r descriptores, no hay necesidad de suponer que los descriptores son independientes dentro de la población para calcular $P(X_1, X_2, \dots, X_r)$, cuando se asume que los descriptores son independientes en cada clase. De esta manera, la expresión:

$$P(X_1, X_2, \dots, X_r) = \sum_{j=1}^k P(\omega_j)P(X_1, \dots, X_r | \omega_j) \dots \dots \dots (5.2)$$

Puede ser computada asumiendo solo que dentro de cada clase:

$$P(X_1, X_2, \dots, X_r | \omega_j) = P(X_1 | \omega_j) \dots P(X_r | \omega_j) \dots \dots \dots (5.3)$$

Por otro lado, el teorema de Bayes para características múltiples es:



$$P(\omega_i | X) = \frac{P(\omega_i)P(X | \omega_i)}{\sum_{j=1}^k P(\omega_j)P(X | \omega_j)} \dots\dots\dots(5.4)$$

Suponiendo que las características con los descriptores y relacionando a las ecuaciones 5.2 y 5.3 con la ecuación 5.4, se tiene:

$$P(\omega_i | X_1, \dots, X_r) = \frac{P(\omega_i)P(X_1 | \omega_i) \dots P(X_r | \omega_i)}{\sum_{j=1}^k P(\omega_j)P(X_1 | \omega_j) \dots P(X_r | \omega_j)} \dots\dots\dots(5.5)$$

Asumiendo que los descriptores son independientes dada la clase, se reduce el número de combinaciones posibles para las cuales los datos deben ser acumulados de $k \nu^r$ a $k \nu$. La desventaja de esta aproximación es que los resultados pueden ser parciales si los descriptores no son realmente condicionalmente independientes dadas las clases.

5.2 APROXIMACIÓN POR BAYES

Una imagen etiquetada es un estructura general para resolver tareas de bajo nivel de visión, tales como clasificación de imágenes, detección de bordes. A cada pixel de la imagen se le asigna una etiqueta, esta etiqueta, puede ser la clase a la que pertenece el pixel ó puede significar la presencia ó detección de un borde, todo depende de la tarea que se quiera resolver.

Dado un conjunto de pixeles (una imagen) $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ con un sistema de vecindad: $V' = \{V'_s : s \in S\}$ y $X = \{X_s : s \in S\}$ un conjunto de datos de la imagen. Cada pixel puede tomar una etiqueta de $i = \{1, \dots, L\}$, siendo L el número total de etiquetas. Cada una estas etiquetas corresponde a las clases en las que se desea asignar a los sites.

Una etiqueta global discreta ω asigna una etiqueta o clase ω_i a cada site s en S .

Para encontrar el etiquetado óptimo, es decir a la etiqueta que maximixe la distribución a posteriori $P(\omega_i | X)$ del campo de etiquetas, se utiliza el Teorema de Bayes:

$$P(\omega_i | X) = \frac{P(X | \omega_i)P(\omega_i)}{P(X)} \dots\dots\dots(5.6)$$

Si X es la imagen original y ω_i las clases, con $i = 1, 2, \dots, L$ entonces:



$P(\omega_i | X)$ representa la probabilidad a posteriori

$P(\omega_i)$ es la probabilidad a priori de la clase ω_i

$P(X | \omega_i)$ es la probabilidad condicional de X dado ω_i

$P(X)$ es la probabilidad total de X

Como $P(X)$ es constante, se puede eliminar, de esta manera tendríamos la siguiente aproximación a la regla de Bayes:

$$P(\omega_i | X) \approx P(X | \omega_i)P(\omega_i) \dots\dots\dots(5.7)$$

Donde:

$P(\omega_i)$ es un campo de Markov con respecto a la vecindad V' . Usando el teorema de Hammersley-Clifford, $P(\omega_i)$ sigue una distribución de Gibbs:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{-U_2(\omega_i)}{T}\right) \dots\dots\dots(5.8)$$

con una función de energía a priori:

$$U(\omega_i) = \sum_{c \in C} V_c(\omega_c) \dots\dots\dots(5.9)$$

donde c denota un clique de V' y C denota el conjunto de todos los cliques. La restricción de ω para los sitios de clique dado se denota por ω_c . La función de potencia $V_c(\omega_c)$ se define para cada ω en Ω , donde $\Omega = \Lambda^N$ es el conjunto de todas las posibles L^N etiquetas discretas. Esto expresa la interacción local entre las etiquetas del clique.

Las ecuaciones anteriores son la representación de Gibbs a través de cliques de potencia, los cuales son más convenientes que trabajar con probabilidades directamente. Este tipo de convención es ampliamente usado por su simple y bajo costo computacional.

El estimador máximo a posteriori (MAP) del campo de etiquetas está dado por:

$$\varpi = \arg \max_{\omega \in \Omega} P(\omega_i | X) = \arg \min_{\omega \in \Omega} U(\omega_i | X)^{[5.3]} \dots\dots\dots(5.10)$$



5.3 FUNCIONES DE ENERGÍA

La función de energía asociada con la distribución a posteriori del campo de etiquetas ec. (5.6) es:

$$U(\omega_i | X) \approx U(X | \omega_i) + U(\omega_i) \dots\dots\dots(5.11)$$

Donde:

$U(\omega_i)$ Es la energía priori

$U(X | \omega_i)$ Es la energía condicional

5.3.1 FUNCIÓN DE ENERGÍA A PRIORI

La función de energía a priori $U(\omega)$ es:

$$U(\omega) = - \sum_{cl=\{g,h\}} \beta \delta(y_g, y_h) \dots\dots\dots(5.12)$$

Donde:

$\delta(y_g, y_h)$ es el número de sites y_h vecinos al site y_g que tienen la misma etiqueta ó clase que este.

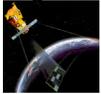
β es una constante de segmentación. Para β cercanas a 1, la imagen tiende a sobresegmentarse y el algoritmo converge rápidamente.

En esta tesis se considerarán los cliques de segundo orden (dos sites vecinos entre sí) y por lo tanto, la energía a priori se obtendrá realizando un análisis de 8-conexidad.

5.3.2 FUNCIÓN DE ENERGÍA CONDICIONAL

Para calcular la función de energía condicional $U(X | \omega_i)$, se utilizan aproximaciones basadas en funciones gaussianas, como son las funciones trapezoidales, las cuales se utilizarán en esta tesis.

Al utilizar las funciones trapezoidales, es necesario calcular la media para cada una de las clases que se requieran en la imagen. Así, en la figura 5.2 se puede observar que la clase ω_0 tiene un valor promedio m_0 , la segunda clase ω_1 el valor promedio es m_1 y la tercera clase ω_2 el valor promedio es m_2 . La diferencia entre las medias de las clases ω_0 y ω_1 , está definida por $s_1 = \mu_1 - \mu_0$,



de igual forma, la diferencia entre las medias de las clases ω_1 y ω_2 está definida por: $s_2 = \mu_2 - \mu_1$. Después de obtener las medias, y las diferencias entre ellas, se construyen las funciones trapezoidales. A continuación, se proyecta cada uno de los valores de los pixeles de la imagen en dichas funciones, y de esta manera se obtiene el valor de su energía condicional.

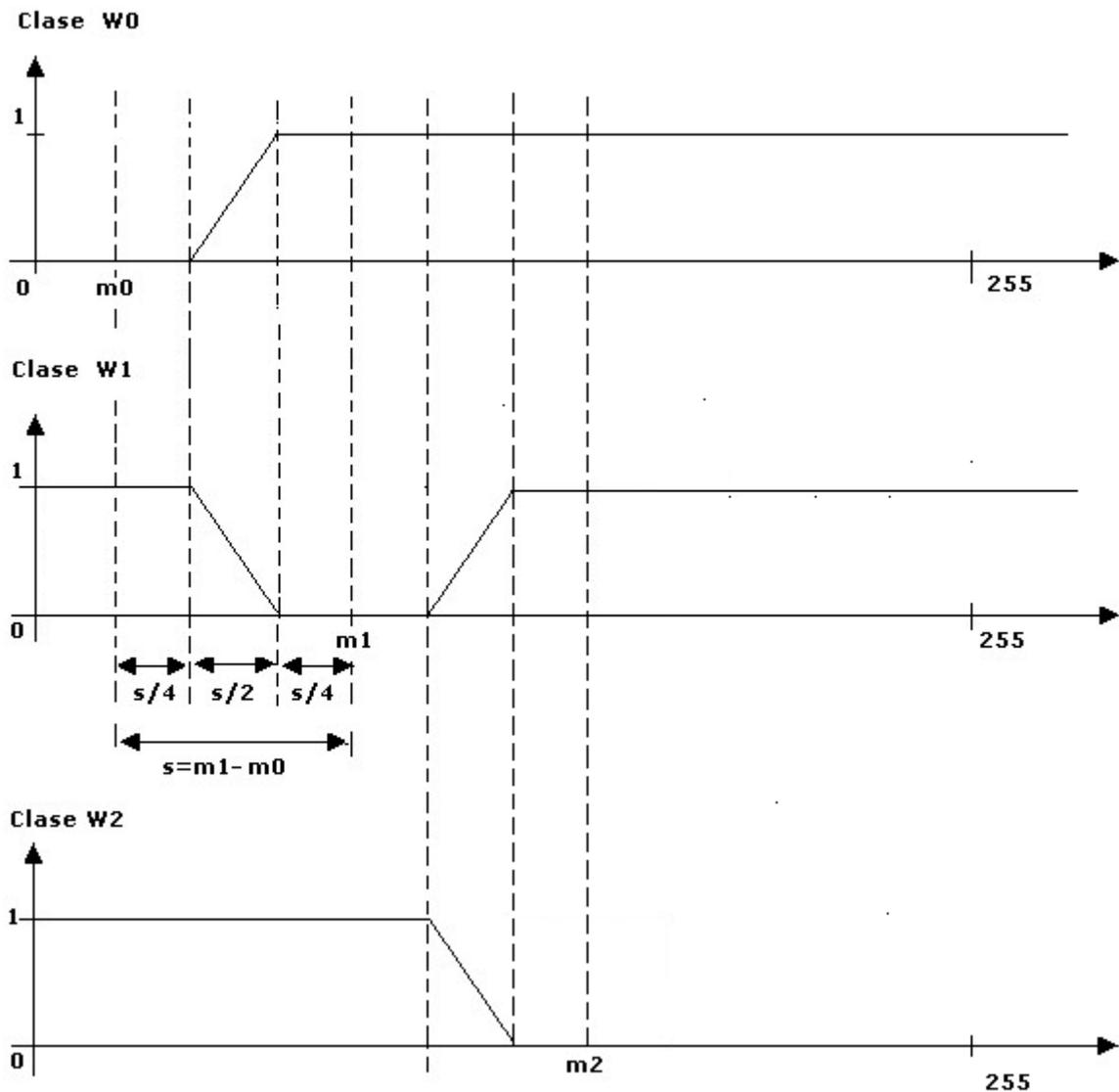


Figura 5.1 Términos de energía $U(X | \omega_i)$.



5.4 OPTIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ENERGÍA A POSTERIORI

El método del recocido simulado es un método que optimiza la energía a posteriori buscando la convergencia hacia un mínimo local.

Para implementar este algoritmo, se considera que X es la imagen original (en niveles de gris) e Y la imagen segmentada (por ejemplo en k clases), la simulación toma como datos iniciales a X y a la imagen de clases originada en la inicialización $Y^{(1)}$. La figura 5.2 muestra la esquematización del algoritmo de simulación, para el caso de n iteraciones.

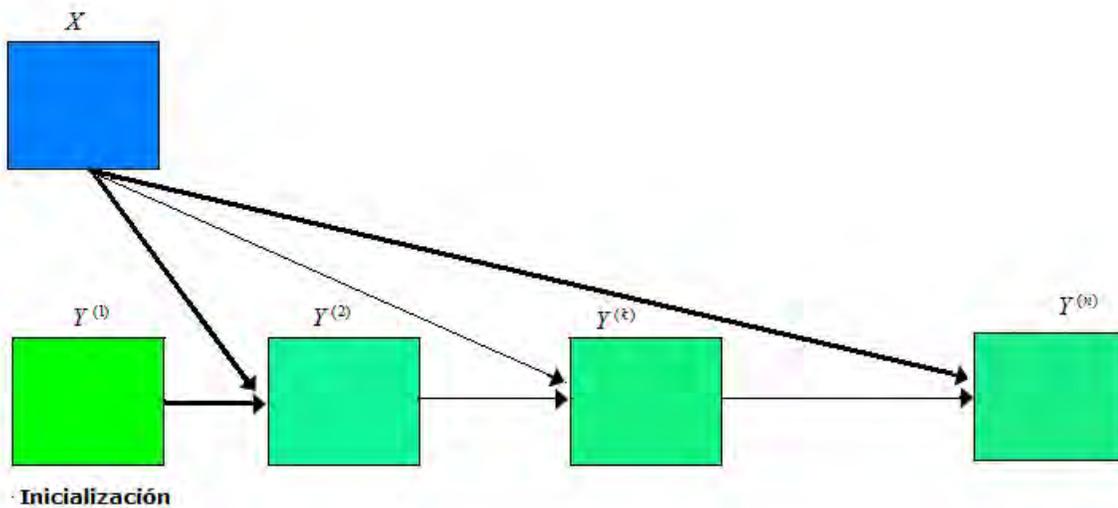


Figura 5.2 Esquema iterativo. Para la energía $U(x)$ se considera el modelo de Potts, el cual se aplica en vecindades de 8-conexidad. La energía $U(X | \omega_i)$ se evalúa sobre la imagen original X .

ALGORITMO

1. Inicialización

- ❖ Determinación aleatoria de la solución $Y^{(1)}$ (la clase de cada pixel debe determinarse mediante un generador de números aleatorios, con distribución uniforme, en el rango de número de clases).
- ❖ Escoger una temperatura inicial $T^{(1)}$ suficientemente elevada.

2. Hacer desde $N_{iter}=1$ hasta $N_{iter}=n$.

2.1 Barrer secuencialmente la imagen.



En cada etapa n :

➤ Escoger un pixel g de coordenadas $[i][j]$, su valor es $Y_g^{(n)}$ y su configuración de vecindad es $V_g^{(n)}$

➤ Efectuar el sorteo de una variable aleatoria (clase "elección") con distribución uniforme: $\xi \in \Omega = [1, k], k = \text{número de clases}$.

2.2 Criterio de Metrópolis y Modelo de Potts

Con base a la imagen:

❖ Se realiza el análisis en 8 conexidad (modelo de Potts) para el píxel $g[i][j]$ en la imagen Y^k .

❖ Se realiza una comparación entre la clase del píxel $g[i][j]$ y la clase x de cada uno de sus vecinos, si la clase es igual, se suma el número de ocurrencias (E_actual) y se multiplica este por $-\beta$, esto es:

$$E_actual = -\beta(E_actual)$$

❖ Al píxel $g[i][j]$ se sobrepone un píxel con la clase elección, después se realiza nuevamente la comparación entre este nuevo píxel de clase elección y su vecindad y se multiplica el número de ocurrencias por $-\beta$

$$E_elección = -\beta(E_elección)$$

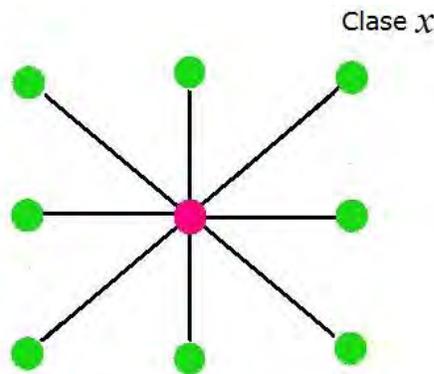


Figura 5.3 Vecindad $V_g^{(k)}$ asociada al píxel g (Al centro de la ventana en 8-conexidad).



En el píxel g :

Clases	Energía(inicialización)
"Actual"	$E_actual=0$
"Elección"	$E_elección=0$

$$U(Y) = - \sum_{cl=\{g,h\}} \beta \delta(y_g, y_h)$$

2.3 Calcular la variación de la energía local asociada al píxel g

En la imagen X , en las coordenadas $[i][j]$ se toma el nivel de gris del pixel analizado g y se proyecta en las funciones trapezoidales (fig. 5.2), en las clases "actual" y "elección".

Esta contribución, se suma a la contribución de Potts.

- a) $E_actual = E_actual + potencial[actual][i][j]$
- b) $E_elección = E_elección + potencial[elección][i][j]$

Donde potencial $[[[]]]$ representa la energía condicional $U(X | Y)$ e $[i][j]$ son las coordenadas del pixel analizado.

- c) Si $E_elección \leq E_actual$: $Y[i][j] = "elección"$

En caso contrario:

- d) Si $p = e^{-\frac{E_elección - E_actual}{T^{(n)}}}$

Sorteo de una variable aleatoria ξ_2 uniformemente distribuida en el rango $[0,1]$

- f) Si $\xi_2 < p$, entonces $Y[i][j] = "elección"$

3. Regresar al punto 2.1 hasta terminar un barrido.

4. Decrementar la temperatura:

$$T(n) = T(n-1) * 0.95$$

5. Regresar al punto 2 hasta terminar el número de iteraciones fijadas.



5.5 EJEMPLO DE APLICAR EL MÉTODO DE RECOCIDO SIMULADO A UNA IMAGEN

Dada la imagen original:



Figura 5.4 Imagen original.

Al clasificarla en 3 clases, utilizando como medias $m_1 = 72$, $m_2 = 169$ y $m_3 = 247$, se obtienen las siguientes funciones de energía condicional.

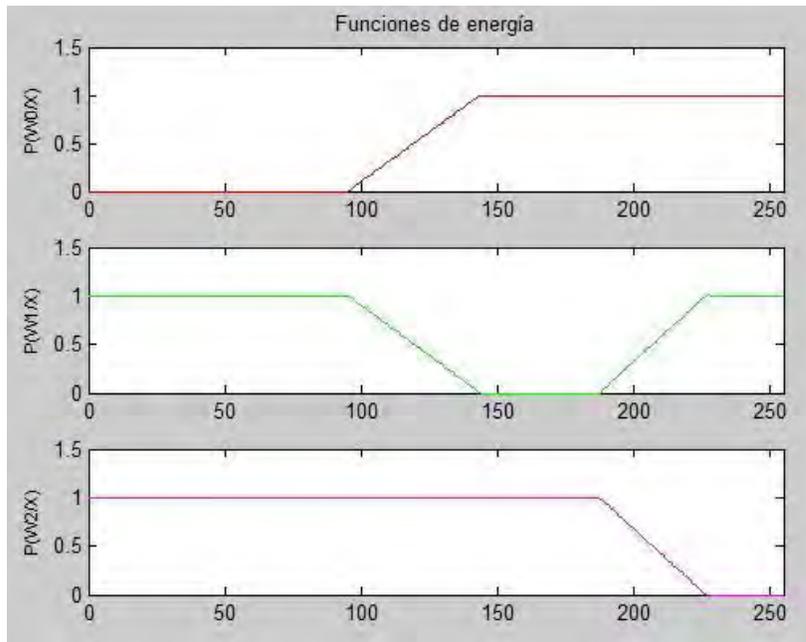


Figura 5.5 Funciones de energía condicional.

La imagen obtenida después de aplicar el método del recocido simulado, utilizando una $T = 2.5$, una $\beta = 0.35$ Y 80 iteraciones es:



Figura 5.6 Imagen obtenida después de aplicar el algoritmo de Recocido Simulado.



5.6 ESQUEMA DE FUSIÓN PROPUESTO

El esquema de fusión propuesto en este trabajo considera tomar más de una imagen de textura como imagen original, y fusionarlas utilizando el algoritmo del Recocido Simulado. Lo anterior se muestra en la siguiente figura.

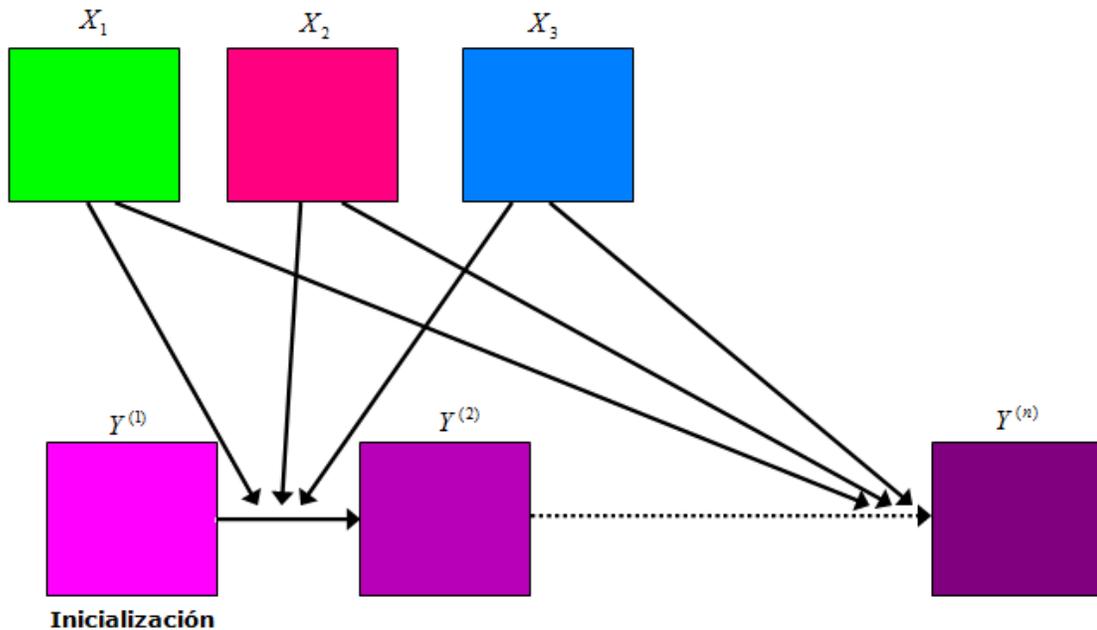


Figura 5.7 Esquema de fusión propuesto.

Este esquema de fusión toma en cuenta lo siguiente:

Sean ω_i donde $i=1,2,3$ el número de clases y sean X_1, X_2, X_3 , tres imágenes a fusionar, de acuerdo a la ecuación 5.4:

Tenemos para la clase 1:

$$P(\omega_1 | X_1, X_2, X_3) = \frac{P(\omega_1)P(X_1 | \omega_1)P(X_2 | \omega_1)P(X_3 | \omega_1)}{P(\omega_1)P(X_1 | \omega_1)P(X_2 | \omega_1)P(X_3 | \omega_1) + P(\omega_2)P(X_1 | \omega_2)P(X_2 | \omega_2)P(X_3 | \omega_2) + P(\omega_3)P(X_1 | \omega_3)P(X_2 | \omega_3)P(X_3 | \omega_3)} \dots\dots\dots(5.13)$$

Tenemos para la clase 2:



$$P(\omega_2 | X_1, X_2, X_3) = \frac{P(\omega_2)P(X_1 | \omega_2)P(X_2 | \omega_2)P(X_3 | \omega_2)}{P(\omega_1)P(X_1 | \omega_1)P(X_2 | \omega_1)P(X_3 | \omega_1) + P(\omega_2)P(X_1 | \omega_2)P(X_2 | \omega_2)P(X_3 | \omega_2) + P(\omega_3)P(X_1 | \omega_3)P(X_2 | \omega_3)P(X_3 | \omega_3)} \dots\dots\dots(5.14)$$

Tenemos para la clase 3:

$$P(\omega_3 | X_1, X_2, X_3) = \frac{P(\omega_3)P(X_1 | \omega_3)P(X_2 | \omega_3)P(X_3 | \omega_3)}{P(\omega_1)P(X_1 | \omega_1)P(X_2 | \omega_1)P(X_3 | \omega_1) + P(\omega_2)P(X_1 | \omega_2)P(X_2 | \omega_2)P(X_3 | \omega_2) + P(\omega_3)P(X_1 | \omega_3)P(X_2 | \omega_3)P(X_3 | \omega_3)} \dots\dots\dots(5.15)$$

Como observamos el numerador es un constante para todas las clases por lo cual se puede eliminar, por tanto:

$$P(\omega_1 | X_1, X_2, X_3) \approx P(\omega_1)P(X_1 | \omega_1)P(X_2 | \omega_1)P(X_3 | \omega_1) \dots\dots\dots(5.16)$$

$$P(\omega_2 | X_1, X_2, X_3) \approx P(\omega_2)P(X_1 | \omega_2)P(X_2 | \omega_2)P(X_3 | \omega_2) \dots\dots\dots(5.17)$$

$$P(\omega_3 | X_1, X_2, X_3) \approx P(\omega_3)P(X_1 | \omega_3)P(X_2 | \omega_3)P(X_3 | \omega_3) \dots\dots\dots(5.18)$$

Como se explicó anteriormente, la función de energía asociada con la distribución a posteriori $P(\omega_i | X) \approx P(X | \omega_i)P(\omega_i)$ del campo de etiquetas es:

$$U(\omega_i | X) \approx U(X | \omega_i) + U(\omega_i) \dots\dots\dots(5.10)$$

Haciendo una analogía entre la ecuación anterior y las ecuaciones 5.16, 5.17 y 5.18, tenemos:

$$U(\omega_1 | X_1, X_2, X_3) \approx U(\omega_1) + U(X_1 | \omega_1) + U(X_2 | \omega_1) + U(X_3 | \omega_1) \dots\dots\dots(5.19)$$

$$U(\omega_2 | X_1, X_2, X_3) \approx U(\omega_2) + U(X_1 | \omega_2) + U(X_2 | \omega_2) + U(X_3 | \omega_2) \dots\dots\dots(5.20)$$

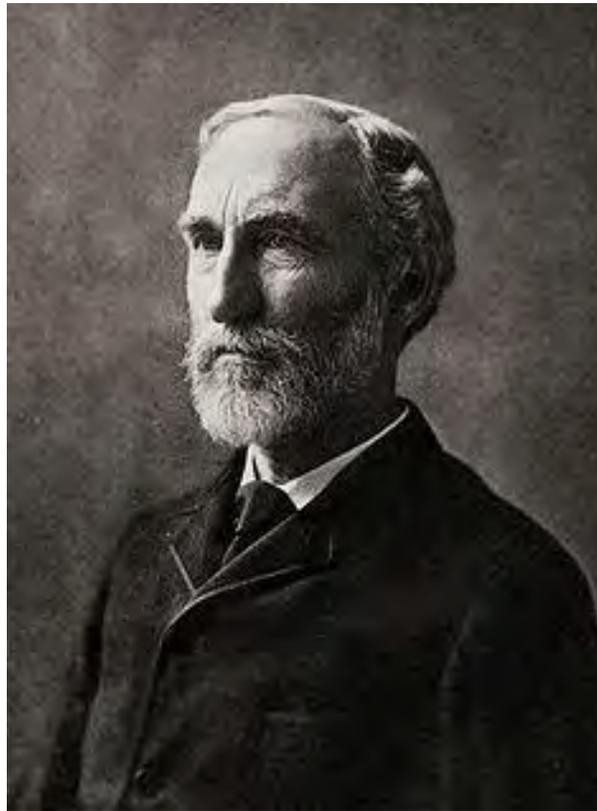
$$U(\omega_3 | X_1, X_2, X_3) \approx U(\omega_3) + U(X_1 | \omega_3) + U(X_2 | \omega_3) + U(X_3 | \omega_3) \dots\dots\dots(5.21)$$

Para realizar la fusión de datos utilizando MRF, se debe obtener la energía a posteriori del pixel actual y de elección para después compararlas utilizando el método visto en la sección anterior. La energía a posteriori de que un pixel pertenezca a cierta clase, se obtiene según las ecuaciones 5.19, 5.20 y 5.21, sumando la energía a priori y la energía condicional de cada imagen.

6

RESULTADOS

CAPÍTULO



Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903)^[6.3].



6.1 INTRODUCCIÓN

Para probar los métodos de GLCM, algoritmo simulado y fusión de datos, propuestos en esta tesis, primero se realizaron pruebas con una imagen sintética de 467 x 395 píxeles compuesta por 4 imágenes correspondientes a madera (235x197 píxeles), arena (232x197 píxeles), pasto cortado (235x198 píxeles) y ladrillos (232x198 píxeles). Después se realizaron pruebas utilizando 2 imágenes aéreas del sur de la Ciudad de México de 512x512 píxeles, con 256 niveles de gris y una resolución de 50 cm por píxel.

Siguiendo el método propuesto en la introducción de esta tesis, primero, para disminuir el tiempo de procesamiento se hizo una reducción de los niveles de grises de cada imagen de 256 a 32. En seguida, se obtuvo la Matriz de Co-ocurrencia utilizando un método rápido propuesto por David A. Clausi^[3.13], descrito en la sección 3.3 del capítulo 3 de esta tesis. Después se obtuvieron los descriptores de textura de Haralick^[3.16], descritos en la sección 3.4, del capítulo 3 del presente trabajo. En esta etapa, se buscó obtener descriptores de textura con regiones homogéneas para elegir las clases en las cuales se segmentaría la imagen mediante el método de fusión propuesto de MRF. Después de realizar varias pruebas variando el tamaño de ventana, la distancia y ángulo, se observó que cada una de las imágenes de textura necesitaba de diferentes parámetros de distancia y tamaño de ventana para presentar regiones homogéneas, no así de ángulo. Por lo cual utilizó un ángulo de 0 para las 3 imágenes originales. En seguida se muestra una tabla que contiene los parámetros de distancia, ángulo y tamaño de ventana utilizados para obtener regiones homogéneas en 5 descriptores de textura de la imagen sintética:

Nombre de la imagen de Textura	Nivel de gris	Distancia d	Tamaño de ventana (TV)
Autocorrelación	32	1	3x3
Cluster Prominence.	32	3	7x7
Cluster Shade	32	3	7x7
Máxima Probabilidad	32	3	7x7
Varianza	32	3	7x7

Tabla 6.1 Parámetros de desplazamiento y tamaño de ventana utilizados en la imagen sintética.

Para las 2 imágenes aéreas de la Ciudad de México.

Nombre de la imagen de Textura	Nivel de gris	Distancia d	Tamaño de ventana (TV)
Autocorrelación	32	1	3x3
Cluster Prominence.	32	3	7x7
Cluster Shade	32	3	7x7
Correlación	32	2	5x5
Varianza	32	3	7x7

Tabla 6.2 Parámetros de desplazamiento y tamaño de ventana utilizados en las imágenes aéreas.



Para realizar las pruebas anteriores, se utilizó una computadora con procesador Intel Core 2 Duo T8100, con 3Gb de Memoria Ram y Matlab 7.6.0. El tiempo de procesamiento para obtener los descriptores de textura varió entre 15 y 20 minutos dependiendo del tamaño de la imagen y de los parámetros de distancia horizontal y tamaño de ventana utilizados.

Después de obtener las imágenes de textura, se aplicó el recocido simulado a la imagen original y a una imagen de textura. También se realizaron dos fusiones de datos de acuerdo al modelo propuesto, la primera fusión se realizó tomando en cuenta a 3 imágenes de textura y la segunda fusión se realizó con 5 imágenes de textura. Lo anterior se realizó para todas las imágenes.

En la imagen de textura para obtener la imagen segmentada de la imagen original y de la imagen de textura, se obtuvieron 4 medias de las 4 regiones que componen esta imagen utilizando ventanas de prueba. Para realizar la fusión de datos, estas 4 medias de las diferentes regiones se obtuvieron para en cada imagen de textura.

En las imágenes aéreas, para obtener la imagen segmentada de la imagen original y de la imagen de textura, se obtuvieron las 3 medias de 3 regiones con diferente nivel de gris de la imagen utilizando ventanas de prueba.

Para realizar la fusión de datos, en cada imagen de textura se obtuvieron 3 medias de 3 regiones con diferente nivel de gris, estas regiones fueron las mismas en cada una de las imágenes de textura.

De esta manera, para las imágenes aéreas segmentadas por el método de recocido simulado, y para las imágenes obtenidas por el método propuesto de fusión de datos utilizando el recocido simulado, se obtuvieron 3 clases:

- ❖ La clase no urbana (zonas oscuras).
- ❖ La clase urbana que señala las partes más opacas (zonas grises).
- ❖ La clase urbana que señala las partes con tonos de gris muy blancos de la escena.

Los resultados de todo este proceso, se muestran a continuación.



6.2 RESULTADOS PARA LA IMAGEN SINTÉTICA CON CUATRO CLASES

Se realizaron pruebas con una imagen sintética para probar la eficiencia del algoritmo propuesto. La imagen sintética original (fig. 6.1) está compuesta por una textura de madera en la parte superior izquierda, pasto cortado en la parte inferior izquierda, arena de playa en la parte superior derecha y una pared en la parte inferior derecha.



Fig. 6.1 Imagen original a color.

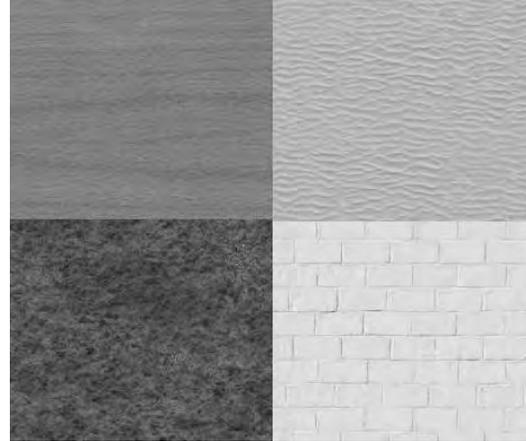


Fig. 6.2 Imagen Original en niveles de grises.

6.2.1 LOS DESCRIPTORES DE TEXTURA UTILIZANDO LA GLCM

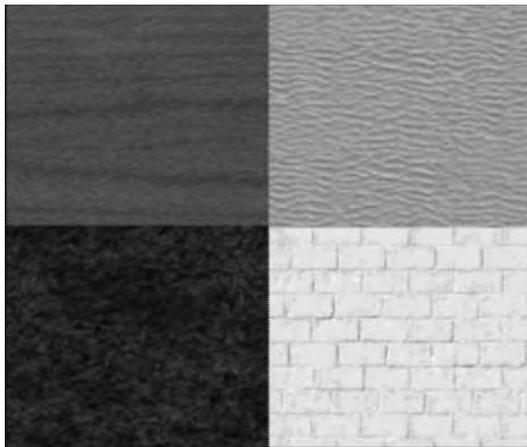


Fig. 6.3 Descriptor de autocorrelación $|D|=1$, TV 3x3.

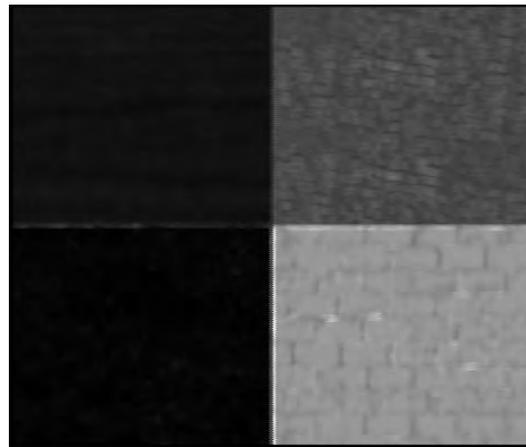


Fig. 6.4 Cluster Prominence $|D|=3$, TV 7x7.

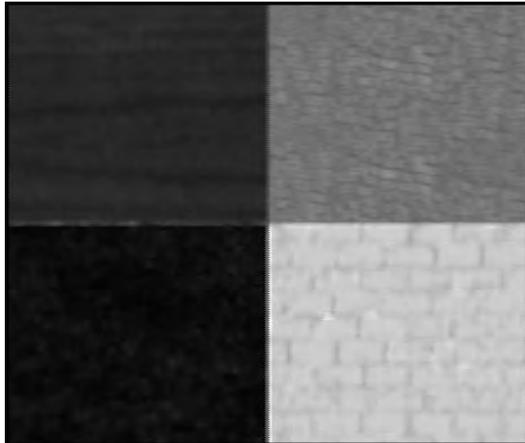


Fig. 6.5 Cluster shade
 $|D|=3$, TV 7x7.

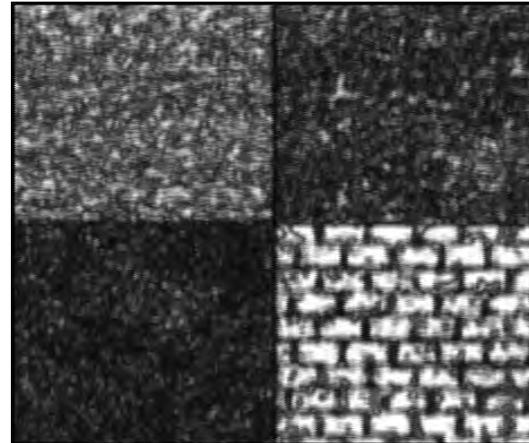


Fig. 6.6 Máxima probabilidad
 $|D|=3$, TV 7x7.

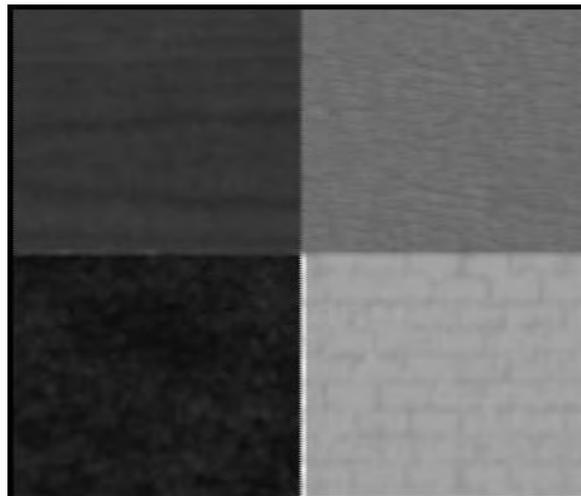


Fig. 6.7 Varianza
 $|D|=3$, TV 7x7.

6.2.2 SELECCIÓN DE LAS VENTANAS PARA CADA CLASE

En el método de recocido simulado y en el método de fusión propuesto, las medias para cada clase, se obtuvieron de las mismas regiones de la imagen original, variando solo la imagen de textura con la que se estaba trabajando. Estas regiones se ilustran en la siguiente figura:

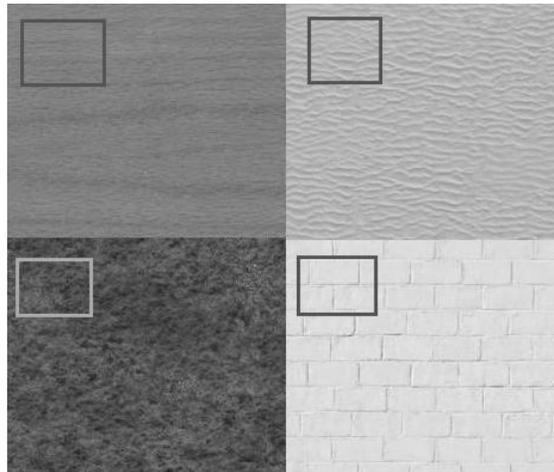


Fig. 6.8 Imagen original. Posición de las ventanas utilizadas para obtener las medias de cada clase en cada una de las imágenes de textura.

6.2.3 APLICANDO EL RECOCIDO SIMULADO A LA IMAGEN ORIGINAL

Aplicando el método de recocido simulado a la imagen original en niveles de gris (fig. 6.2) con los siguientes parámetros:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Media: [81 129 181 218]

Se tiene:

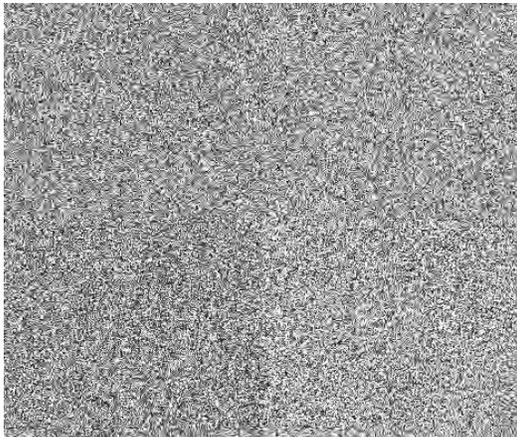


Fig. 6.9 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 1.

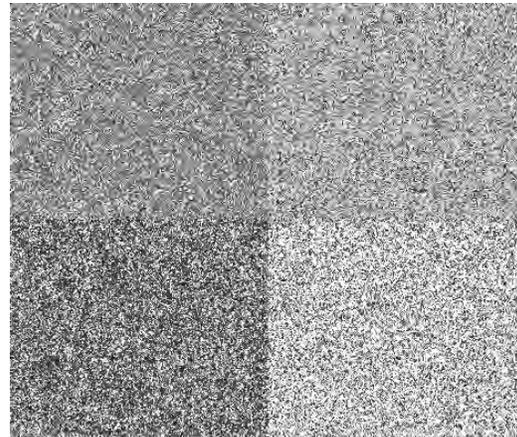


Fig. 6.10 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 10.

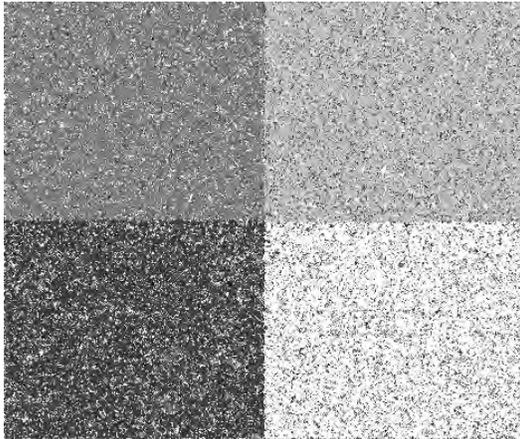


Fig. 6.11 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 20.

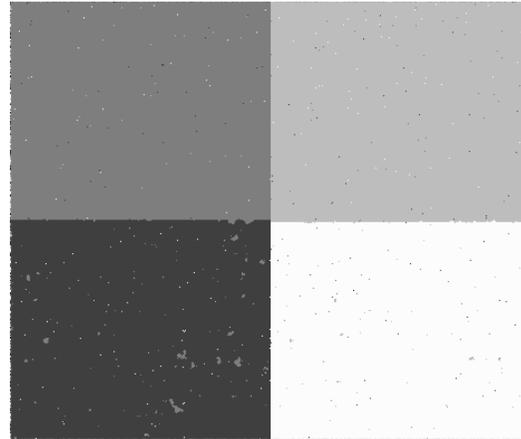


Fig. 6.12 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 40.

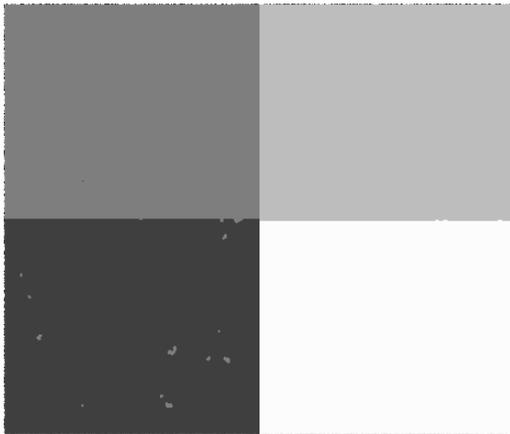


Fig. 6.13 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 80.

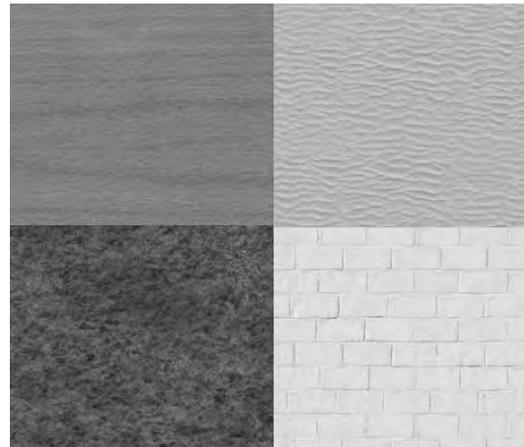


Fig. 6.2 Imagen Original.

Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de recocido simulado (fig. 6.13) a la imagen original (fig. 6.2), se tiene:

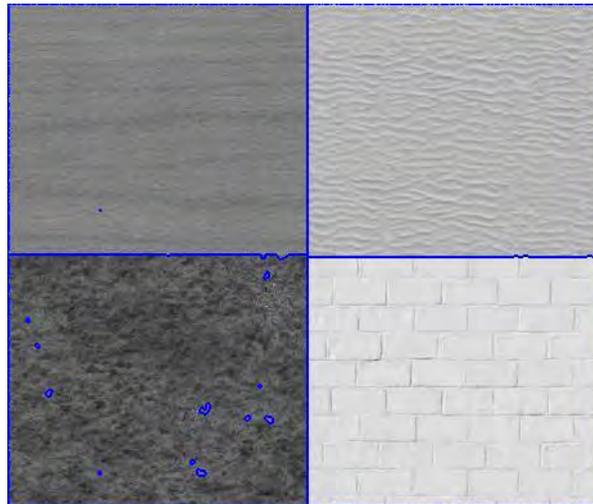


Fig. 6.14 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen original segmentada obtenida por el método de recocido simulado.

6.2.4 APLICANDO EL RECOCIDO SIMULADO A LA IMAGEN DE TEXTURA DE CLUSTER PROMINENCE

Aplicando el método de recocido simulado a la imagen de textura de cluster prominence (fig. 6.4) con los siguientes parámetros:

- ✓ Temperatura: 2.5
 - ✓ Beta 0.35
 - ✓ Clases: 3
 - ✓ Media [4 19 75 149]
- Se tiene:

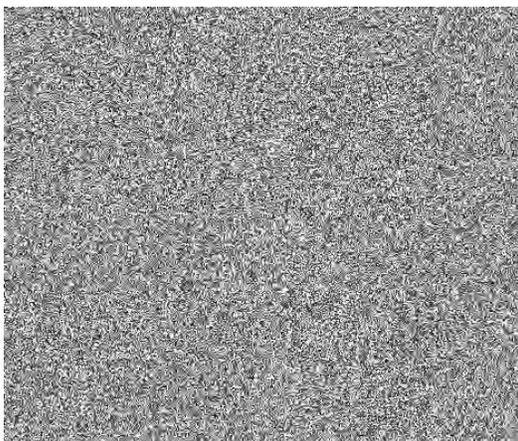


Fig. 6.15 Segmentación de la imagen de textura de cluster prominence por MRF. Iteración 1.

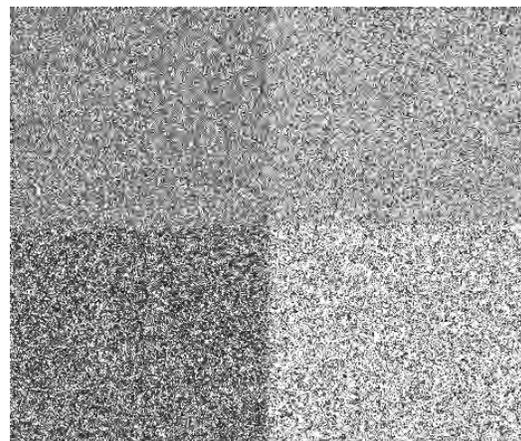


Fig. 6.16 Segmentación de la imagen de textura de cluster prominence por MRF. Iteración 10.

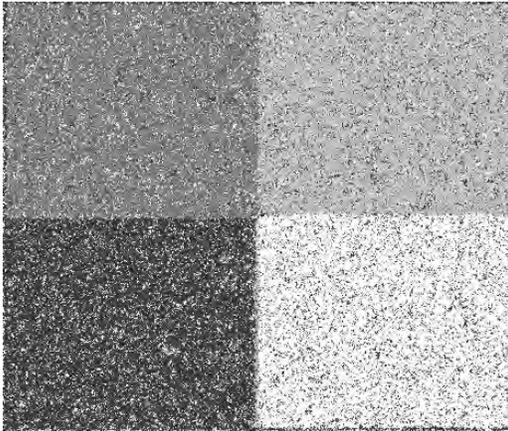


Fig. 6.17 Segmentación de la imagen de textura de cluster prominente por MRF. Iteración 20.

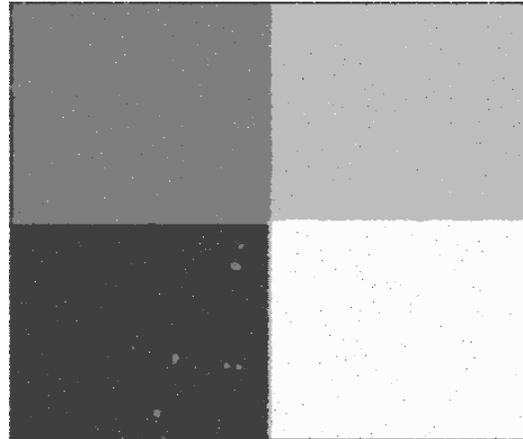


Fig. 6.18 Segmentación de la imagen de textura de cluster prominente por MRF. Iteración 40.

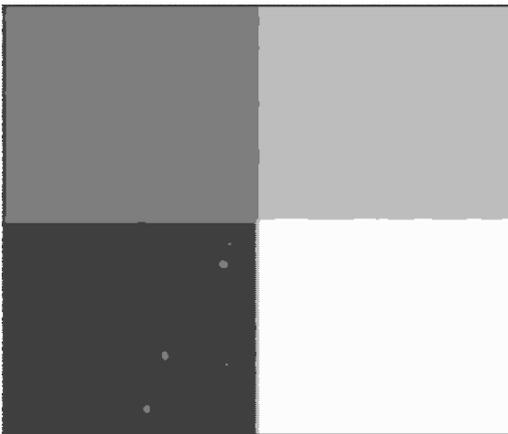


Fig. 6.19 Segmentación de la imagen de textura de cluster prominente por MRF iteración 80.

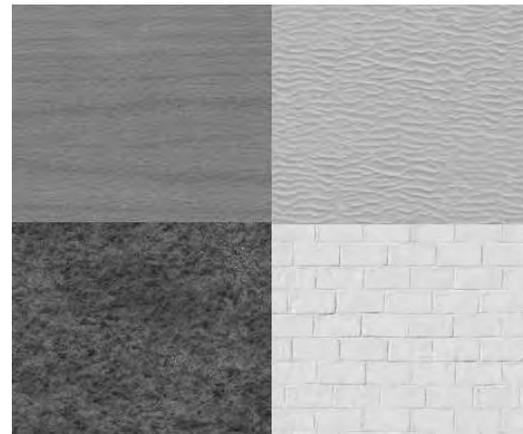


Fig. 6.2 Imagen Original.

Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de recocido simulado (fig. 6.19) a la imagen original (fig. 6.2), se tiene:

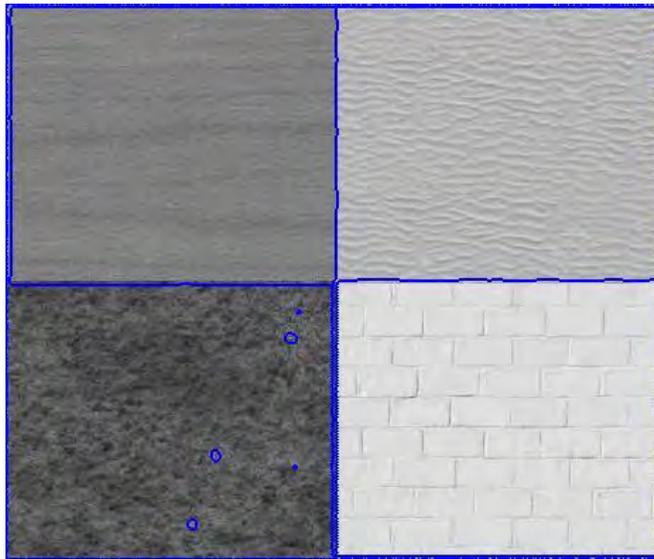


Fig. 6.20 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen de textura de cluster prominente obtenida por el método de recocido simulado.

6.2.5 FUSIÓN Y SEGMENTACIÓN DE 3 Y 5 IMÁGENES DE TEXTURA UTILIZANDO EL MÉTODO PROPUESTO BASADO EN MRF

Fusionando los descriptores de textura de Autocorrelación, cluster prominente y cluster shade (figuras 6.3, 6.4 y 6.5) mediante el método propuesto y utilizando los siguientes parámetros:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias:

Autocorrelación	[31	77	151	220]
Cluster prominente	[4	19	75	149]
Cluster Shade	[13	42	117	199]

se tiene:

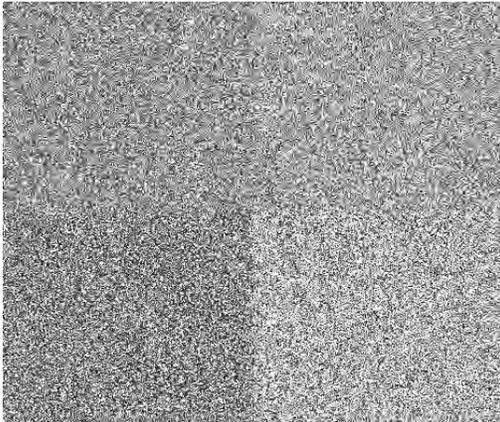


Fig. 6.21 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 1.

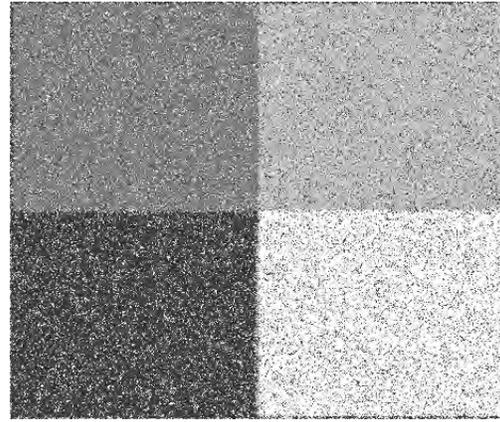


Fig. 6.22 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 10.

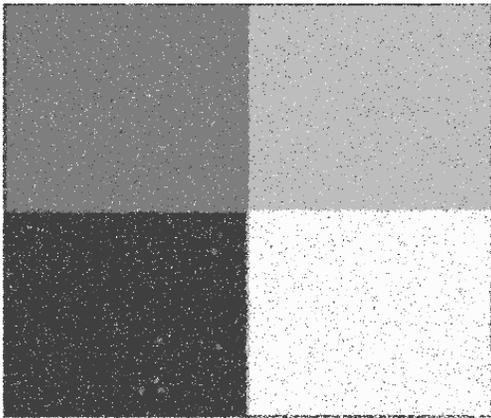


Fig. 6.23 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 20.

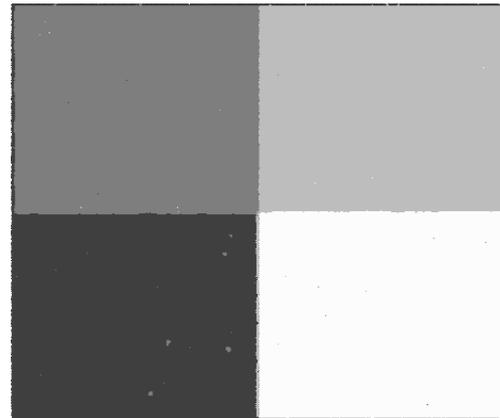


Fig. 6.24 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 40.

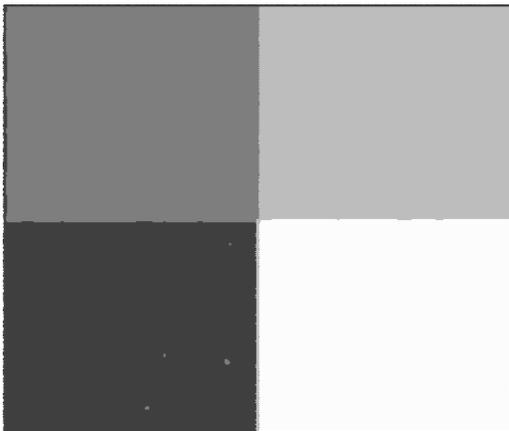


Fig. 6.25 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.

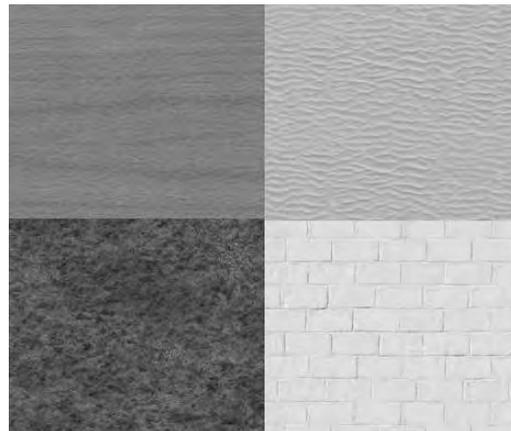


Fig. 6.2 Imagen Original.



Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de recocido simulado (fig. 6.25) a la imagen original (fig. 2), se tiene:

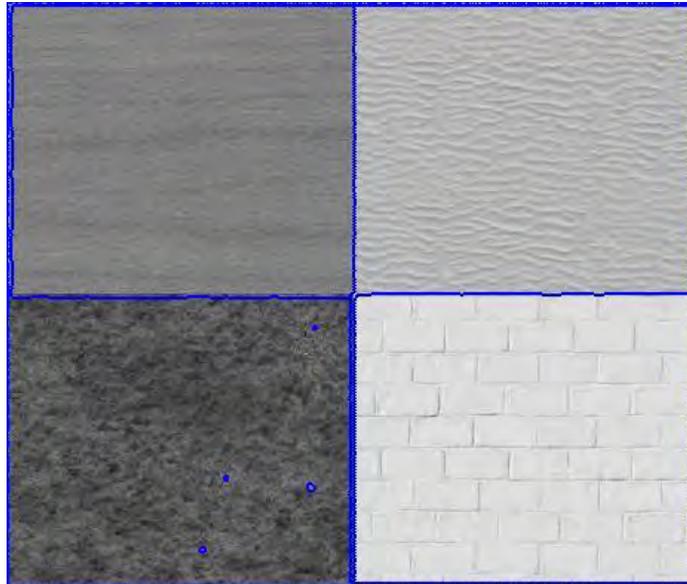


Fig. 6.26 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen obtenida de la fusión y segmentación de 3 imágenes de textura por el método de recocido simulado propuesto.

Ahora bien, si fusionamos los 5 descriptores de textura de las figuras 6.3, 6.4, 6.5 6.6 y 6.7 mediante el método propuesto, utilizando las mismas regiones que en la fig. 6.8 para obtener las medias de cada clase, y considerando lo siguiente:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias: Autocorrelación [31 77 151 220]
- Cluster prominence [4 19 75 149]
- Cluster Shade [13 42 117 199]
- Máxima Probabilidad [36 44 100 149]
- Varianza [26 56 110 199]

se tiene:

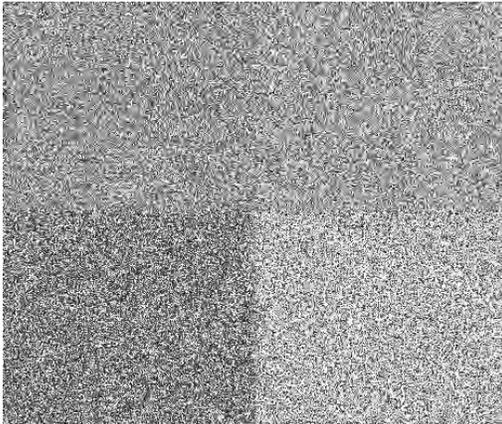


Fig. 6.27 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 1.

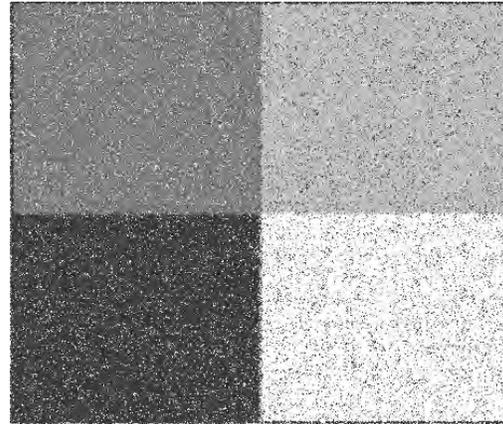


Fig. 6.28 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 10.

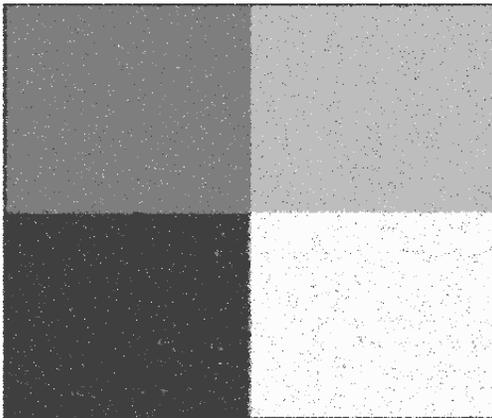


Fig. 6.29 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 20.

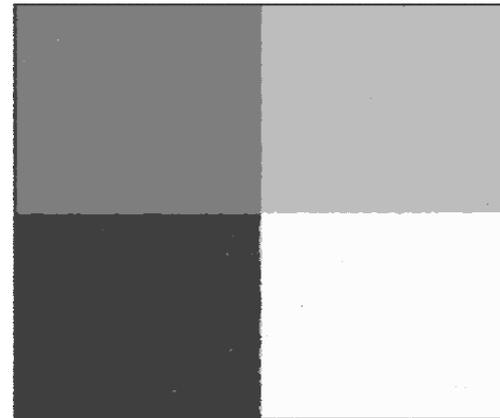


Fig. 6.30 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 40.



Fig. 6.31 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.

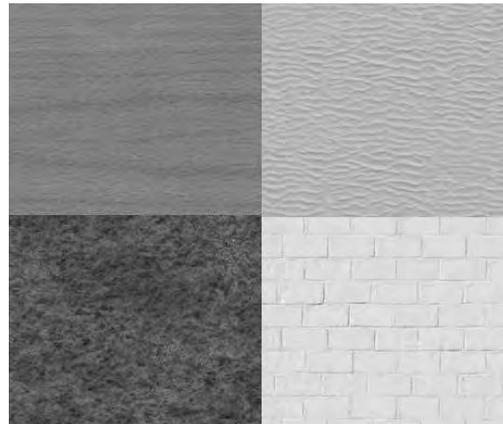


Fig. 6.2 Imagen Original.



Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de recocido simulado propuesto (fig. 6.31) a la imagen original, se tiene:

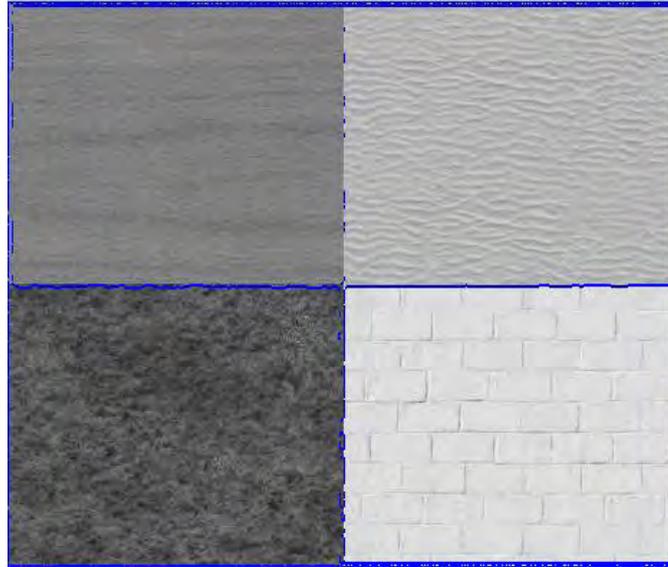


Fig. 6.32 Comparación imagen Original Vs. contorno de la imagen obtenida de la fusión y segmentación de 5 imágenes de textura por el método de recocido simulado propuesto.

6.2.6 COMPARACIÓN ENTRE LAS SEGMENTACIONES REALIZADAS POR RECOCIDO SIMULADO Y POR EL MÉTODO DE FUSIÓN PROPUESTO

Comparando la imagen original (fig. 6.2), la imagen obtenida de aplicar el método de recocido simulado a la misma (fig.6.13), la imagen obtenida de aplicar el recocido simulado a la imagen de textura (fig. 6.19), la imagen obtenida de la fusión de las 3 imágenes (6.25) de textura, la imagen obtenida de la fusión de las 5 imágenes (6.31) de textura tenemos:

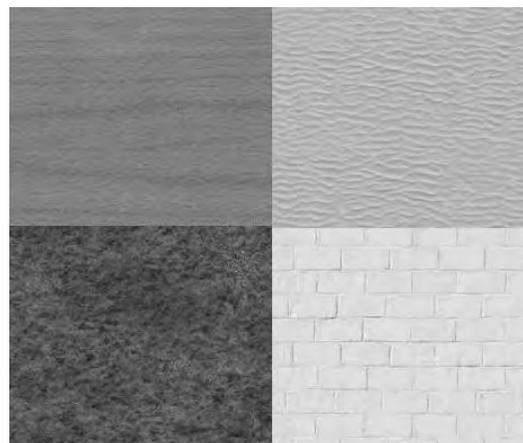


Fig. 6.2 Imagen Original

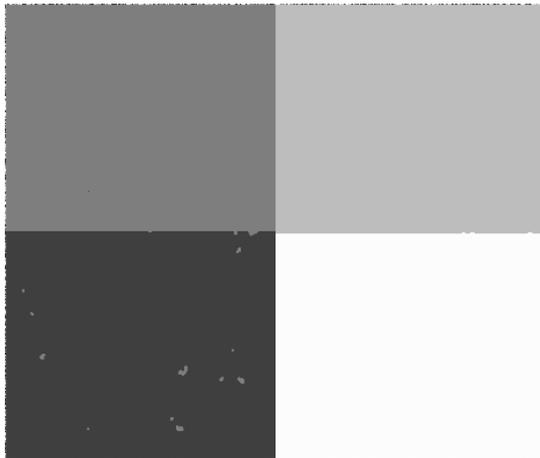


Fig. 6.13 Segmentación de datos de la imagen original utilizando MRF. Iteración 80.

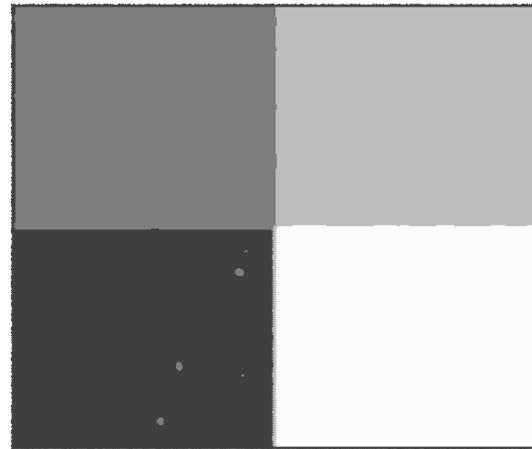


Fig. 6.19 Segmentación de la imagen de textura de cluster prominente utilizando MRF. Iteración 80.

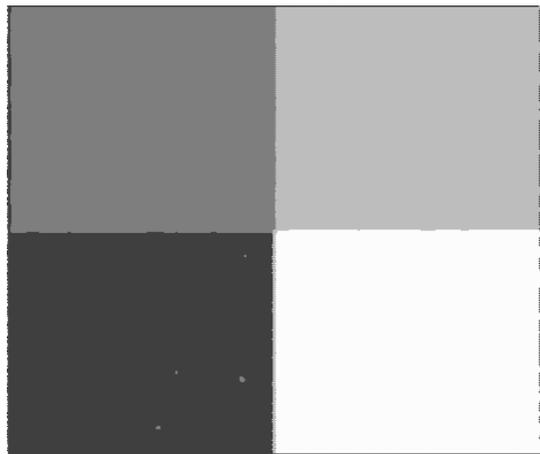


Fig. 6.25 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura (fig. 6.3, 6.4 y 6.5) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.



Fig. 6.31 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura (fig. 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.

De los resultados obtenidos de la imagen sintética, se puede observar que el algoritmo de recocido simulado propuesto realiza una buena discriminación entre diferentes texturas y que a mayor número de imágenes fusionadas el resultado es mejor.



6.3 RESULTADOS PARA LA PRIMERA IMAGEN AÉREA



Fig. 6.33 Imagen Original.

6.3.1 DESCRIPTORES DE TEXTURA OBTENIDOS MEDIANTE LA GLCM



Fig. 6.34 Descriptor de autocorrelación
 $|d|=1$, TV 3x3.

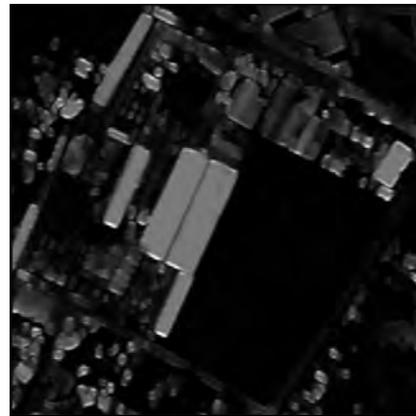


Fig. 6.35 Cluster Prominence
 $|d|=3$, TV 7x7.

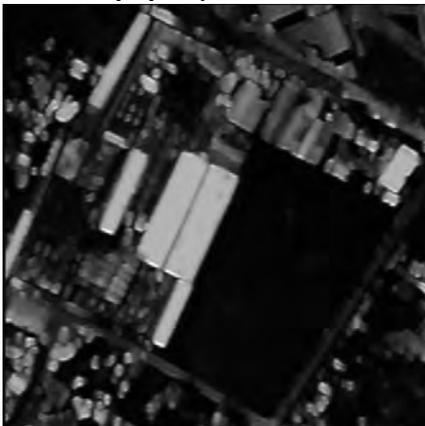


Fig. 6.36 Cluster Shade
 $|d|=3$, TV 7x7.

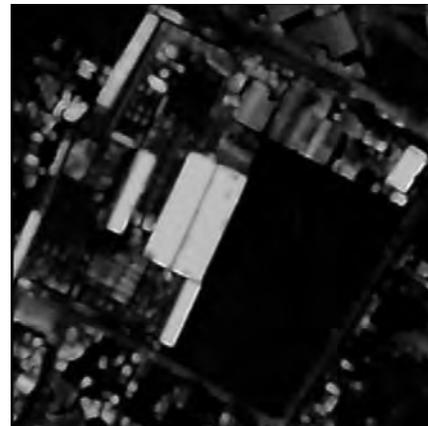


Fig. 6.37 Correlación
 $|d|=2$, TV 5x5.

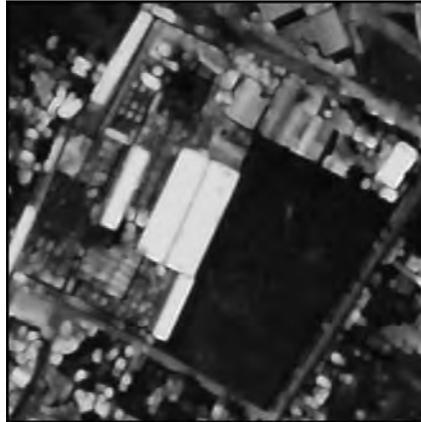


Fig. 6.38 Varianza
 $|d|=3$, TV 7×7 .

6.3.2 SELECCIÓN DE LAS VENTANAS PARA CADA CLASE

En el método de recocido simulado y en el método de fusión propuesto, las medias para cada clase, se obtuvieron de las mismas regiones de la imagen original, variando solo la imagen de textura con la que se estaba trabajando. Estas regiones se ilustran en la siguiente figura:

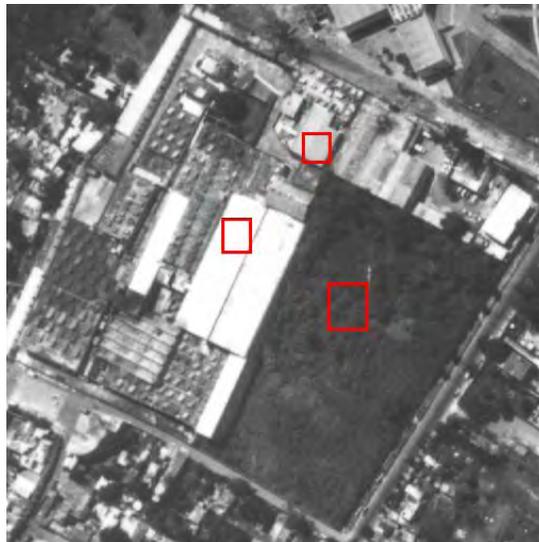


Fig. 6.39 Imagen original. Posición de las ventanas utilizadas para obtener las medias de cada clase en cada una de las imágenes de textura.

6.3.3 APLICANDO EL RECOCIDO SIMULADO A LA IMAGEN ORIGINAL

Aplicando el método de recocido simulado a la imagen original (fig. 6.33) con los siguientes parámetros:



- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias [75 211 254]

Se tiene:

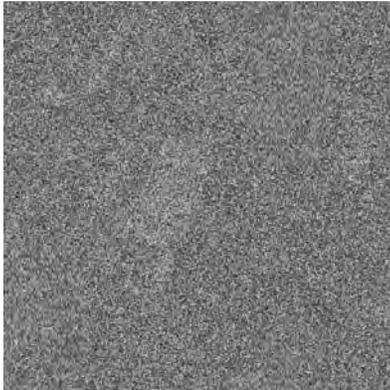


Fig. 6.40 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 1.

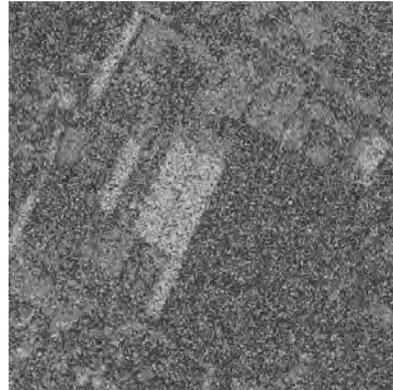


Fig. 6.41 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 10.



Fig. 6.42 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 20.

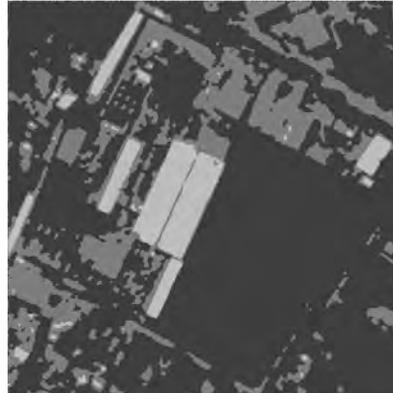


Fig. 6.43 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 40.

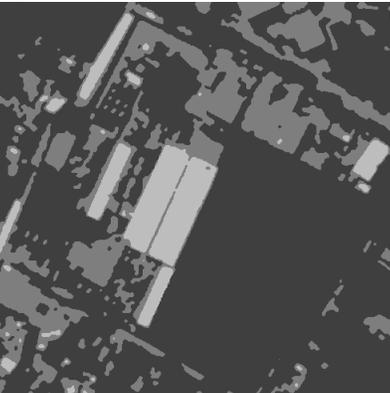


Fig. 6.44 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 80.



Fig. 6.33 Imagen Original.



Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de recocido simulado (fig. 6.44) a la imagen original, se tiene:

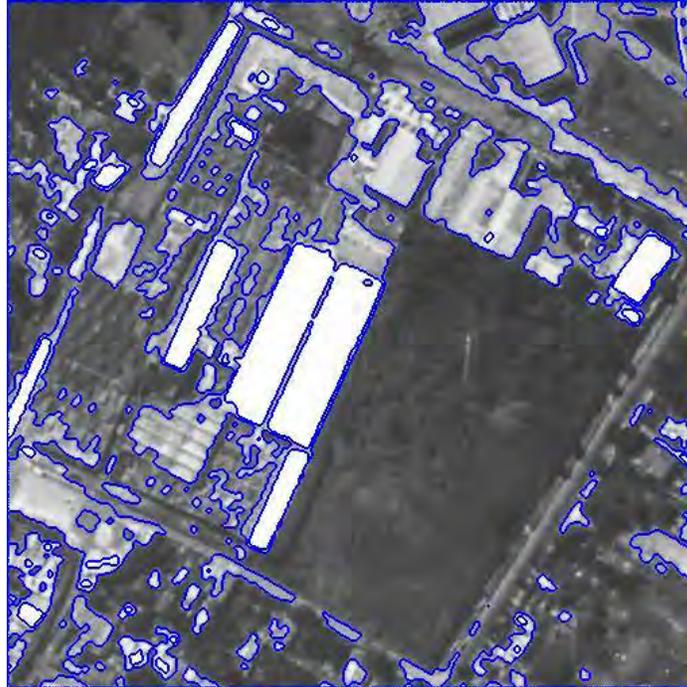


Fig. 6.45 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen original segmentada obtenida por el método de recocido simulado.

6.3.4 APLICANDO EL RECOCIDO SIMULADO A LA IMAGEN DE TEXTURA DE AUTOCORRELACIÓN

Aplicando el método de recocido simulado a la imagen de textura de autocorrelación (fig. 6.34) con los siguientes parámetros:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias: [22 174 255]

Se tiene:

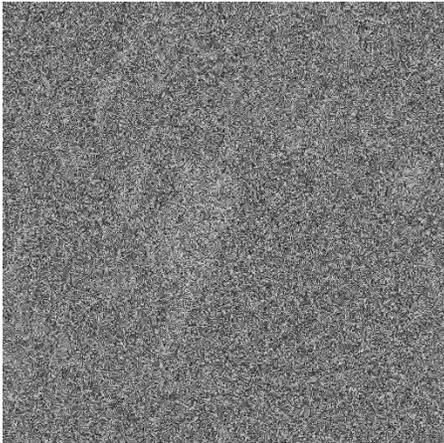


Fig. 6.46 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 1.

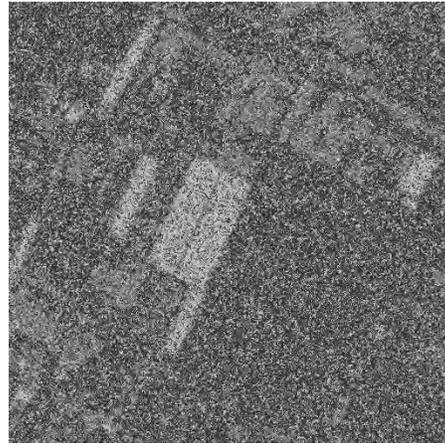


Fig. 6.47 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 10.



Fig. 6.48 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 20.

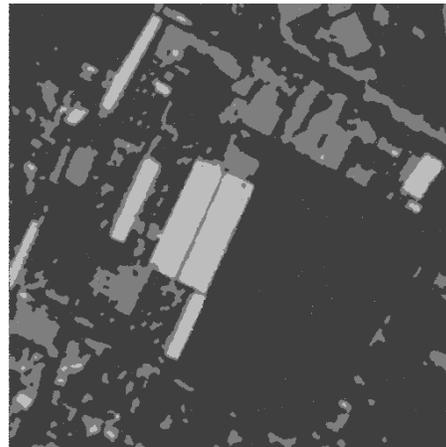


Fig. 6.49 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 40.

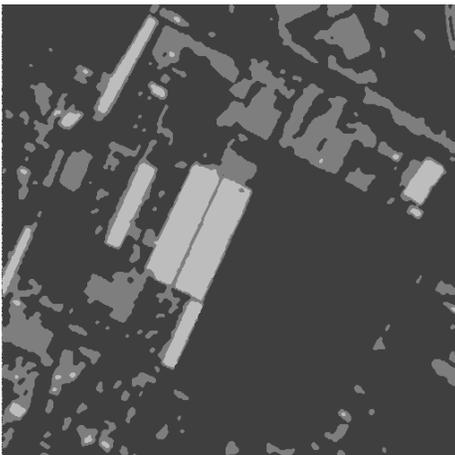


Fig. 6.50 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 80.



Fig. 6.33 Imagen Original.



Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de recocido simulado (fig. 6.50) a la imagen original, se tiene:



Fig. 6.51 Comparación imagen original Vs. Contorno de la imagen de autocorrelación segmentada obtenida por el método de recocido simulado.

6.3.5 FUSIÓN Y SEGMENTACIÓN DE 3 y 5 IMÁGENES DE TEXTURA UTILIZANDO EL MÉTODO PROPUESTO BASADO EN MRF

Fusionando los descriptores de textura de autocorrelación, cluster shade y varianza (figuras 6.34, 6.36 y 6.38) mediante el método propuesto y utilizando los siguientes parámetros:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias:

Autocorrelación	[22	174	255]
Cluster Shade	[5	103	180]
Varianza	[20	152	220]

Se tiene:

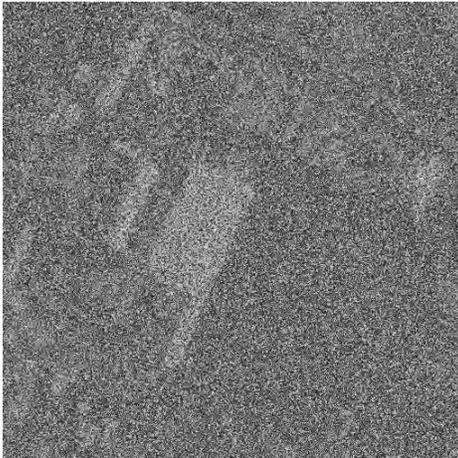


Fig. 6.52 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 1.

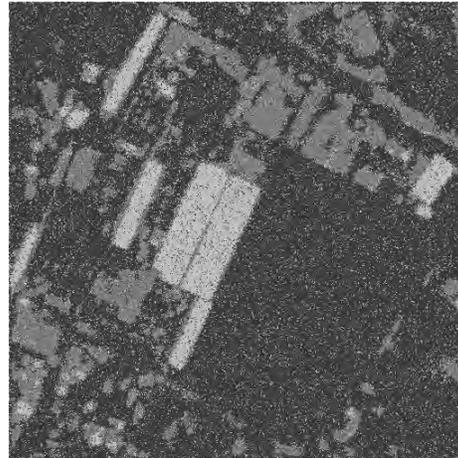


Fig. 6.53 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 10.

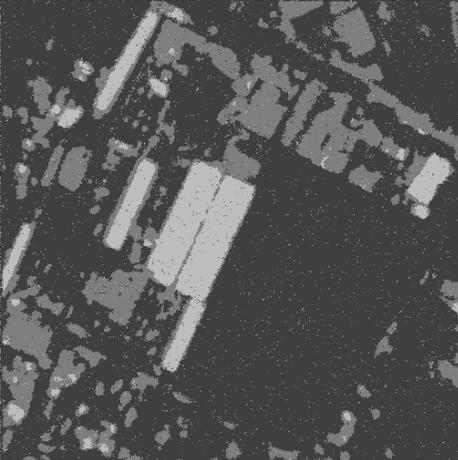


Fig. 6.54 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 20.

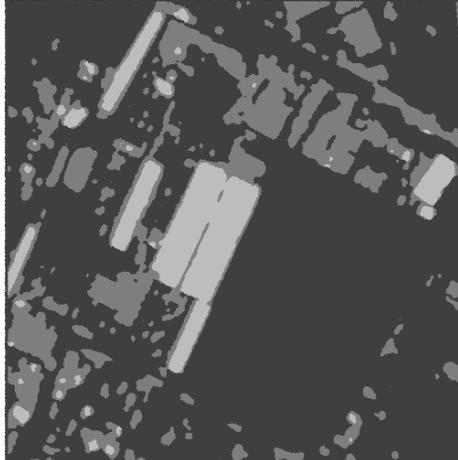


Fig. 6.55 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 40.

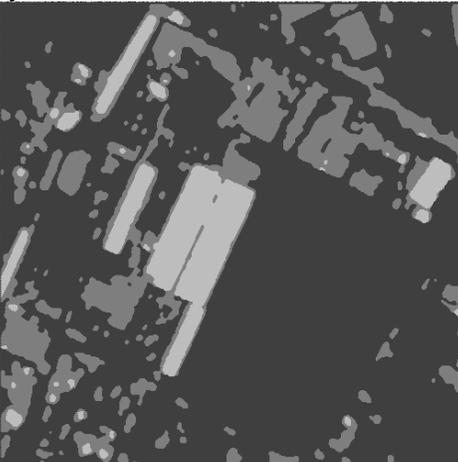


Fig. 6.56 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.



Fig. 6.33 Imagen Original.



Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de fusión propuesto (fig. 6.56) a la imagen original, se tiene:

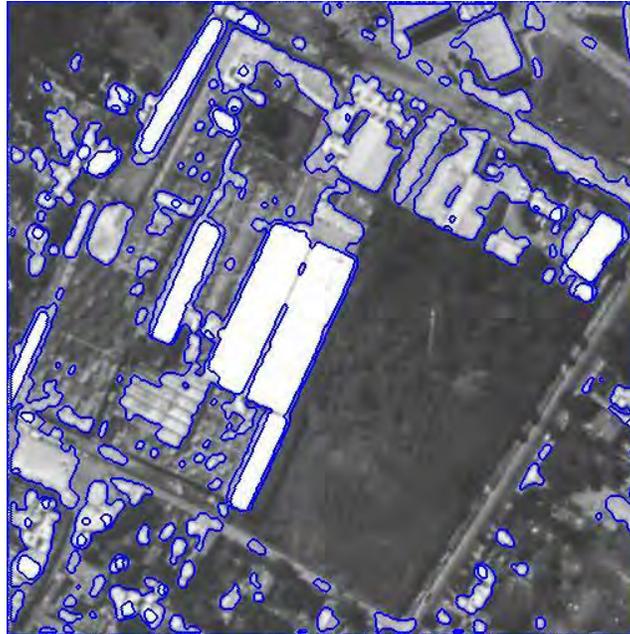


Fig. 6.57 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen fusionada y segmentada con 3 imágenes de textura obtenida por el método de recocido simulado propuesto.

Ahora bien, al fusionar los 5 descriptores de textura de las figuras 6.34, 6.35, 6.36, 6.37 y 6.38 mediante el método propuesto, utilizando las mismas regiones que en la fig. 6.39 para obtener las medias de cada clase, y considerando lo siguiente:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias:

Autocorrelación	[22	174	255]
Cluster Prominence	[1	59	122]
Cluster Shade	[5	103	180]
Correlación	[12	18	131]
Varianza	[20	152	220]

se tiene:

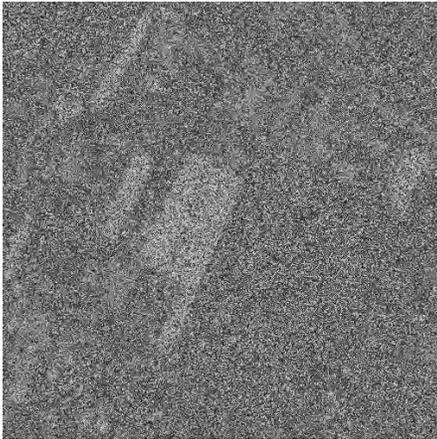


Fig. 6.58 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 1.

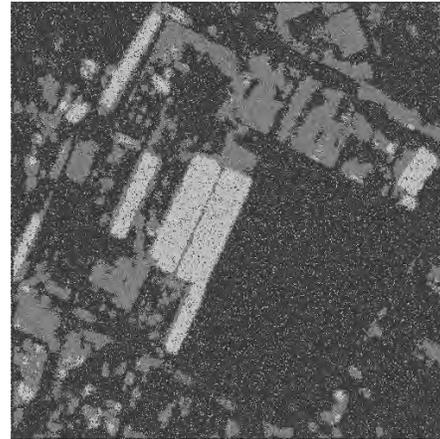


Fig. 6.59 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado MRF. Iteración 10.

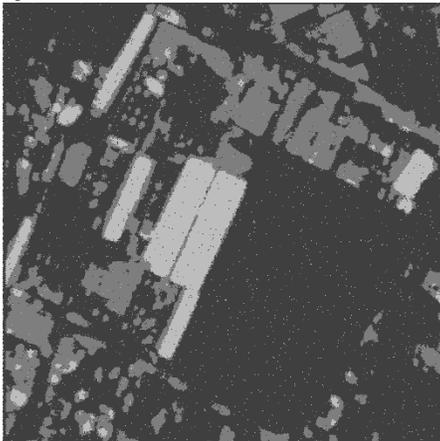


Fig. 6.60 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 20.

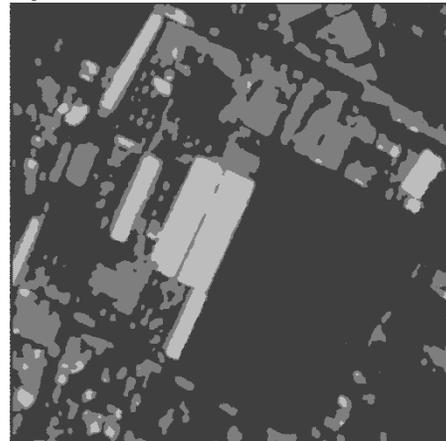


Fig. 6.61 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 40.

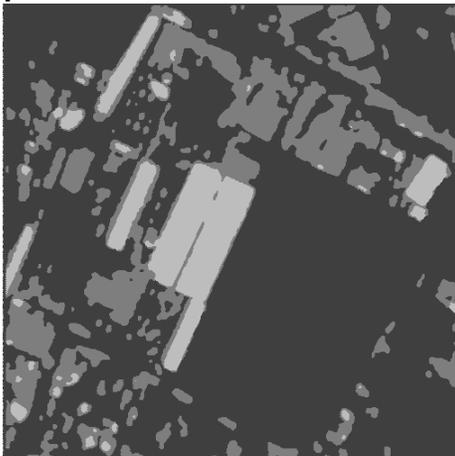


Fig. 6.62 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80



Fig. 6.33 Imagen Original



Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de fusión propuesto (fig. 6.62) a la imagen original, se obtiene:

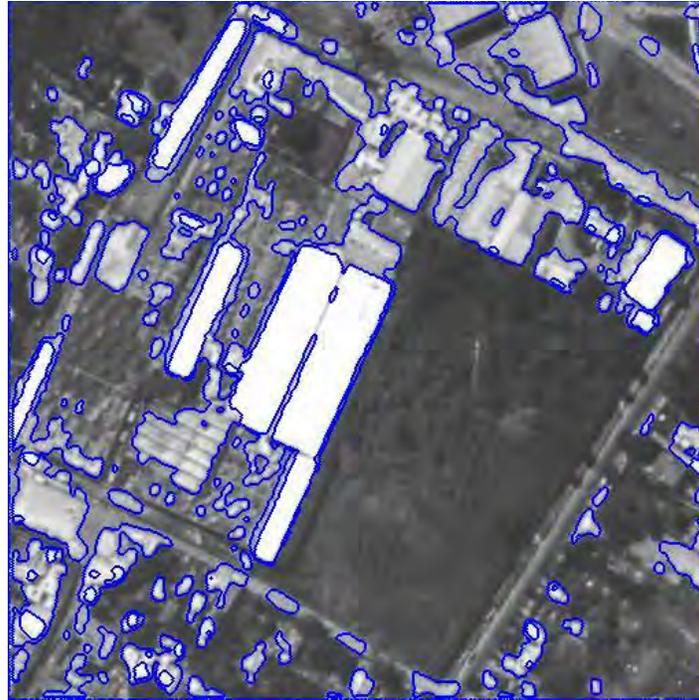


Fig. 6.63 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen fusionada y segmentada con 5 imágenes de textura obtenida por el método de recocido simulado propuesto.

6.3.6 COMPARACIÓN ENTRE LAS SEGMENTACIONES REALIZADAS POR RECOCIDO SIMULADO Y POR EL MÉTODO DE FUSIÓN PROPUESTO

Comparando entre sí a: la imagen original (fig. 6.33), las imágenes obtenidas de aplicar el recocido simulado a la imagen original (fig. 6.44) y a la imagen de textura de autocorrelación (fig. 6.50), las imágenes obtenidas de la fusión de datos de 3 y 5 imágenes de textura (figuras 6.56 y 6.62 respectivamente), se tiene:



Fig. 6.33 Imagen Original.

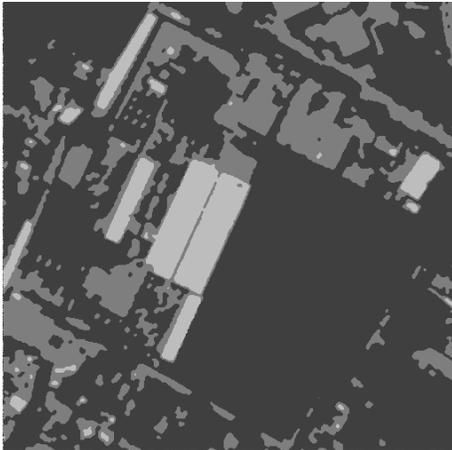


Fig. 6.44 Segmentación de la imagen original utilizando MRF. Iteración 80.

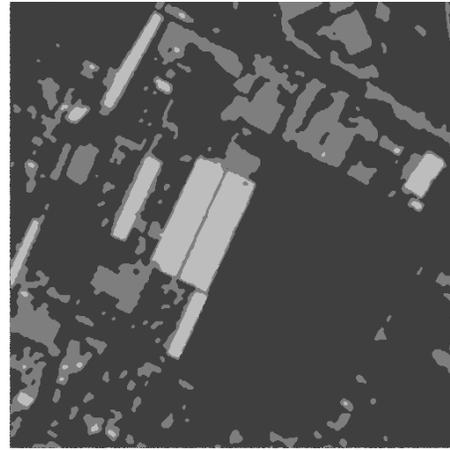


Fig. 6.50 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación utilizando MRF. Iteración 80.

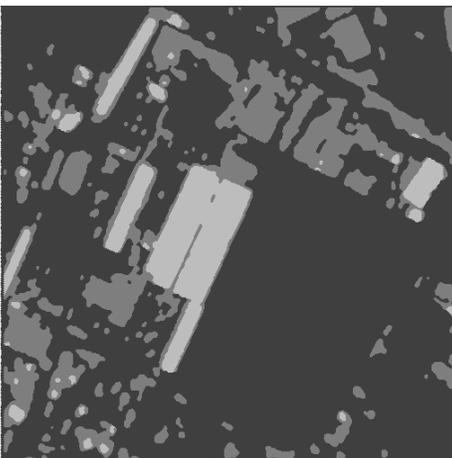


Fig. 6.56 Imagen segmentada de la fusión y segmentación de 3 imágenes de textura (fig. 6.34, 6.36 y 6.38) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.

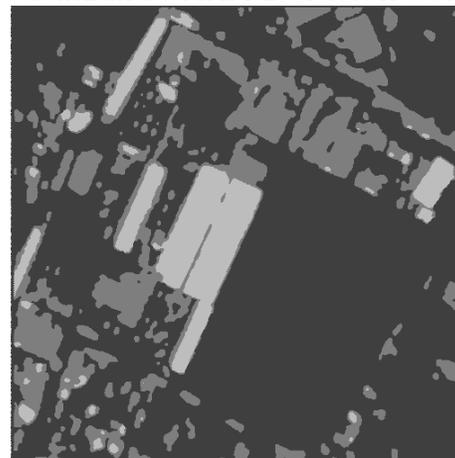


Fig. 6.62 Imagen segmentada de la fusión de 5 imágenes de textura (fig. 6.34, 6.35, 6.36, 6.37 y 6.38) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.



Comparando ventanas de las imágenes segmentadas tomadas de las regiones que se señala en la siguiente imagen:



Fig. 6.64 Imagen Original. Ventanas seleccionadas de las imágenes segmentadas a comparar.

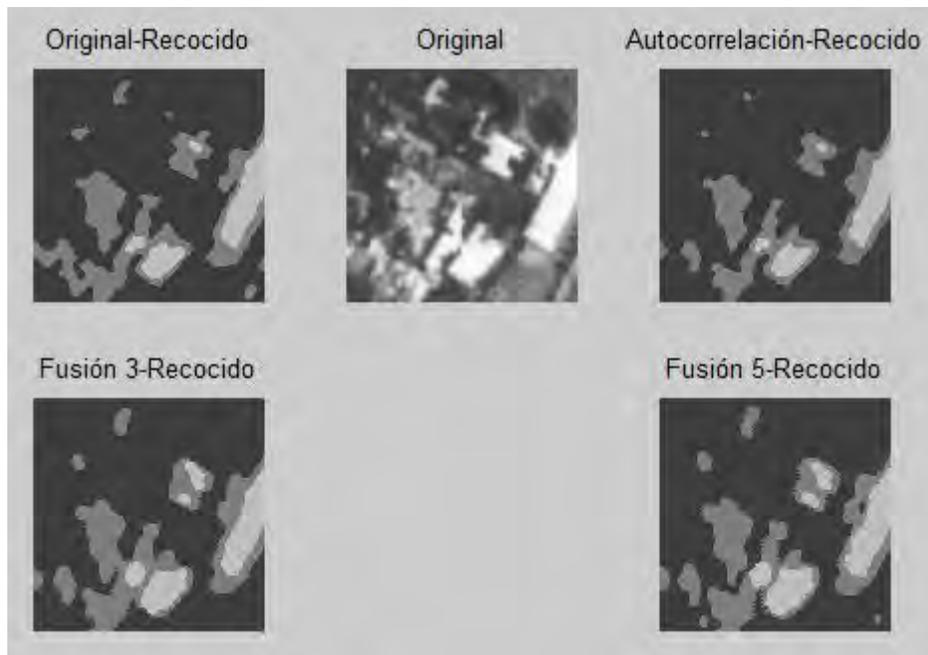


Fig. 6.65 Comparación de ventanas de las imágenes segmentadas obtenidas por el método de recocido simulado y el método de recocido simulado propuesto.

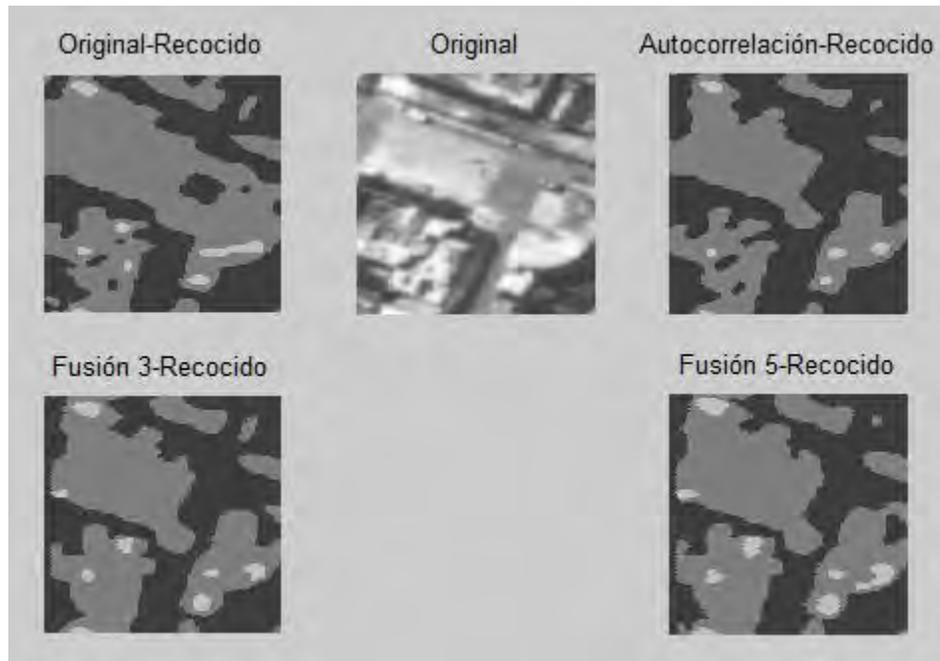


Fig. 6.66 Comparación de ventanas de las imágenes segmentadas obtenidas por el método de recocido simulado y el método de recocido simulado propuesto.

De los resultados de segmentación mostrados se puede observar que los resultados obtenidos mediante la fusión de imágenes por el método propuesto presentan regiones mejor segmentadas que la imagen obtenida aplicando solamente el recocido simulado a la imagen original (fig. 6.44). Esto se observa con más detalle en las imágenes 6.65 y 6.66 donde se realiza la comparación de ventanas de diferentes imágenes.

En lo que respecta a la imagen obtenida de aplicar el recocido simulado a la imagen de textura de autocorrelación (fig. 6.50), las segmentaciones son muy parecidas a los resultados presentados mediante la fusión de imágenes (figuras 6.56 y 6.62), sin embargo, este resultado (fig. 6.50), omite información correspondiente a las regiones blancas que si se detectan mediante el método de fusión de datos propuesto. De hecho, las regiones más blancas de la imagen original se detectan mejor en la imagen obtenida de fusionar 5 imágenes de textura que en las imágenes restantes (figuras 6.44, 6.50 y 6.56).



6.4 RESULTADOS PARA LA SEGUNDA IMAGEN AÉREA



Fig. 6.67 Imagen Original

6.4.1 DESCRIPTORES DE TEXTURA OBTENIDOS UTILIZANDO LA GLCM



Fig. 6.68 Descriptor de autocorrelación
 $|D|=1$, TV 3x3.



Fig. 6.69 Cluster Prominence
 $|D|=3$, TV 7x7.



Fig. 6.70 Cluster Shade
 $|D|=3$, TV 7x7.



Fig. 6.71 Correlación
 $|D|=2$, TV 5x5.



Fig. 6.72 Varianza
 $|D|=3$, TV 7×7 .

6.4.2 SELECCIÓN DE LAS VENTANAS PARA CADA CLASE

En el método de recocido simulado y en el método de fusión propuesto, las medias para cada clase, se obtuvieron de las mismas regiones de la imagen original, variando solo la imagen de textura con la que se estaba trabajando. Estas regiones se ilustran en la siguiente figura:

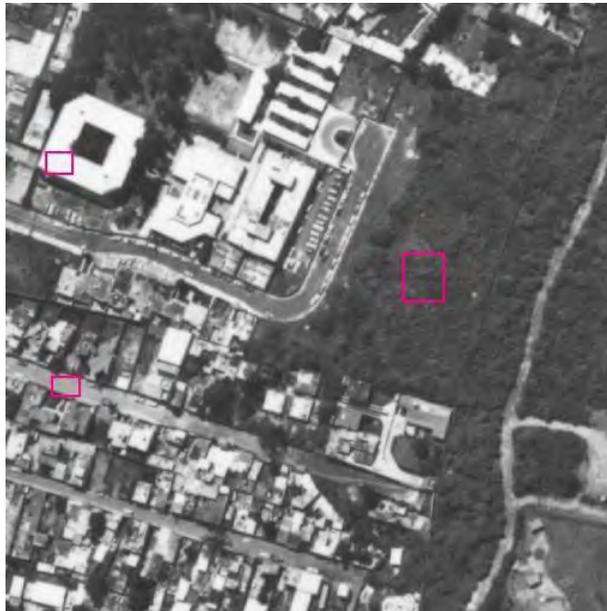


Fig. 6.73 Imagen original. Posición de las ventanas utilizadas para obtener las medias de cada clase en cada una de las imágenes de textura.



6.4.3 APLICANDO EL RECOCIDO SIMULADO A LA IMAGEN ORIGINAL

Aplicando el método de recocido simulado a la imagen original con los siguientes parámetros:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias: [72 169 247]

Se tiene:

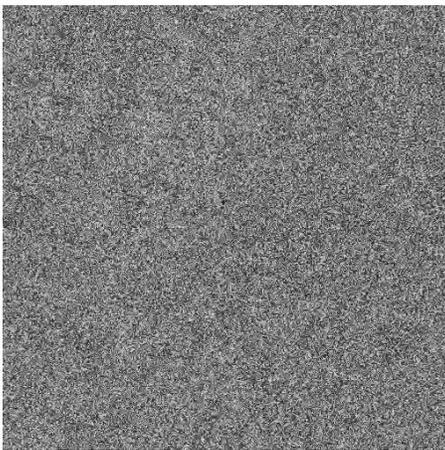


Fig. 6.74 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 1.

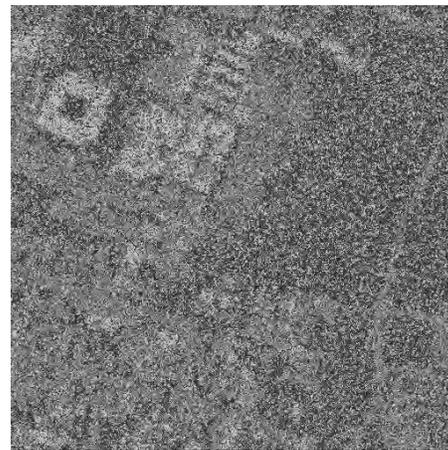


Fig. 6.75 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 10.



Fig. 6.76 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 20.



Fig. 6.77 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 40.



Fig. 6.78 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 80.



Fig. 6.67 Imagen Original.

Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de recocido simulado (fig. 6.78) a la imagen original, se tiene:

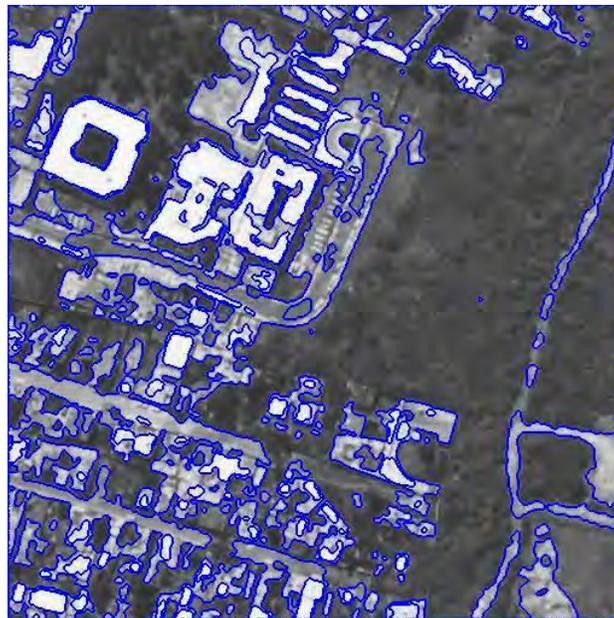


Fig. 6.79 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen original segmentada obtenida por el método de recocido simulado.



6.4.4 APLICANDO EL RECOCIDO SIMULADO A LA IMAGEN DE TEXTURA DE AUTOCORRELACION

Aplicando el método de recocido simulado clásico a la imagen de textura de autocorrelación (fig. 6.68) con los siguientes parámetros:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias [22 116 249]

Se tiene:

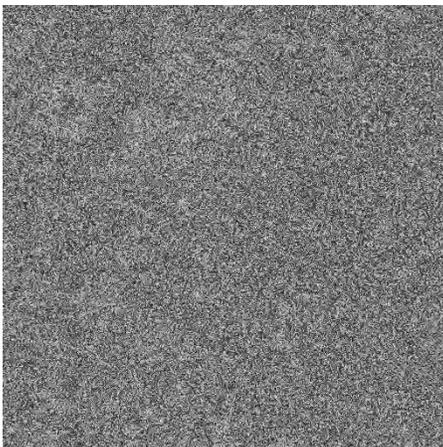


Fig. 6.80 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 1.

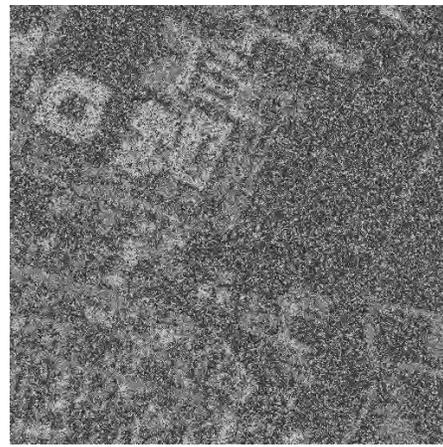


Fig. 6.81 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 10.



Fig. 6.82 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 20.



Fig. 6.83 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 40.

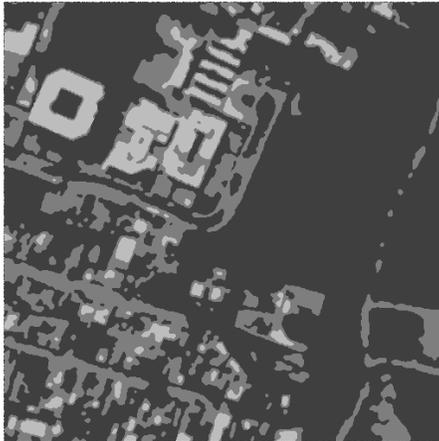


Fig. 6.84 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 80.



Fig. 6.67 Imagen Original.

Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de recocido simulado (fig. 6.84) a la imagen original, se tiene:



Fig. 6.85 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen de textura de autocorrelación segmentada obtenida por el método de recocido simulado.



6.4.5 FUSIÓN DE 3 Y 5 IMÁGENES DE TEXTURA MEDIANTE EL MÉTODO PROPUESTO BASADO EN MRF

Fusionando los descriptores de textura de Autocorrelación, Cluster prominencia y varianza (figuras 6.68, 6.69 y 6.72) mediante el método propuesto y utilizando los siguientes parámetros:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias: Autocorrelación [22 116 249]
- Cluster Prominencia [4 52 158]
- Varianza [19 100 208]

se tiene:

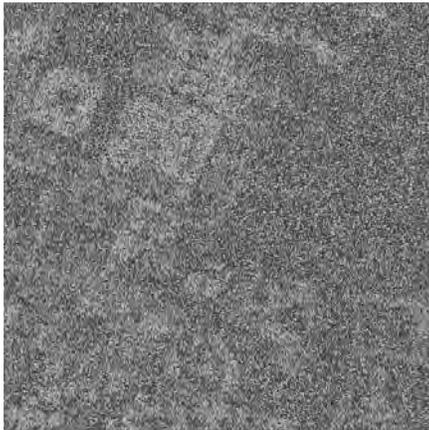


Fig. 6.86 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 1.



Fig. 6.87 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 10.



Fig. 6.88 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 20.



Fig. 6.89 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 40.

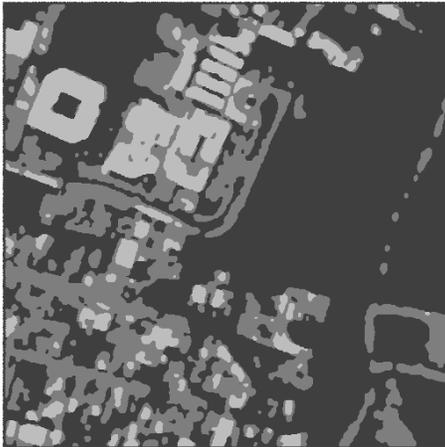


Fig. 6.90 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.



Fig. 6.67 Imagen Original.

Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de fusión propuesto (fig. 6.90) a la imagen original, obtenemos:

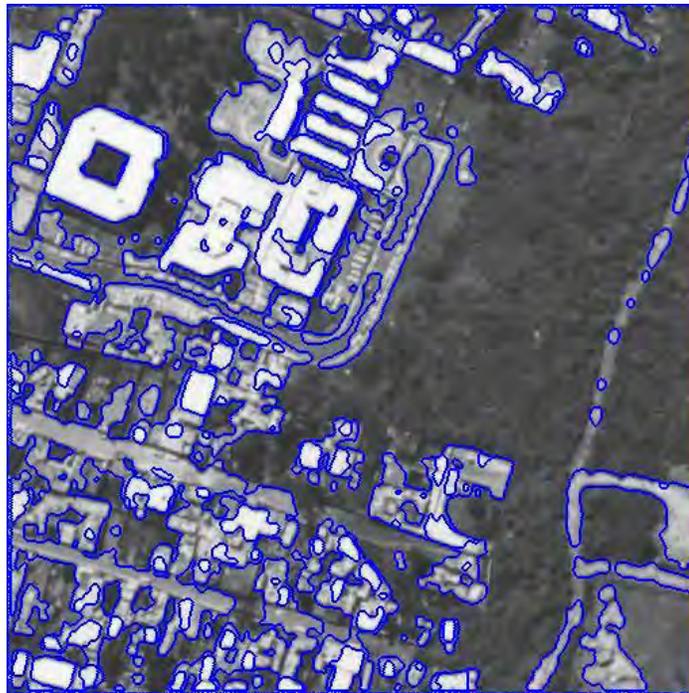


Fig. 6.91 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen fusionada y segmentada con 3 imágenes de textura obtenida por el método de recocido simulado propuesto.



Ahora bien, si fusionamos los 5 descriptores de textura de las figuras 6.68, 6.69, 6.70, 6.71 y 6.72 mediante el método propuesto, utilizando las mismas regiones que en la fig. 6.73 para obtener las medias de cada clase, y considerando lo siguiente:

- ✓ Temperatura: 2.5
- ✓ Beta 0.35
- ✓ Clases: 3
- ✓ Medias:

Autocorrelación	[22	116	249]
Cluster Prominence	[1	25	100]
Cluster Shade	[4	52	158]
Correlación	[11	22	110]
Varianza	[19	100	208]

se tiene:

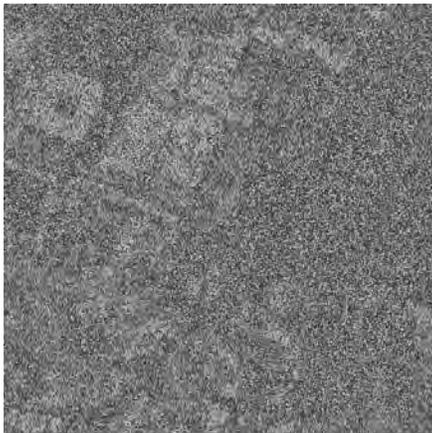


Fig. 6.92 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 1.



Fig. 6.93 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 10.



Fig. 6.94 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 20.

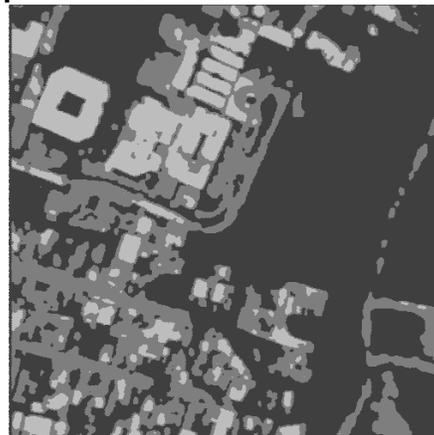


Fig. 6.95 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 40.

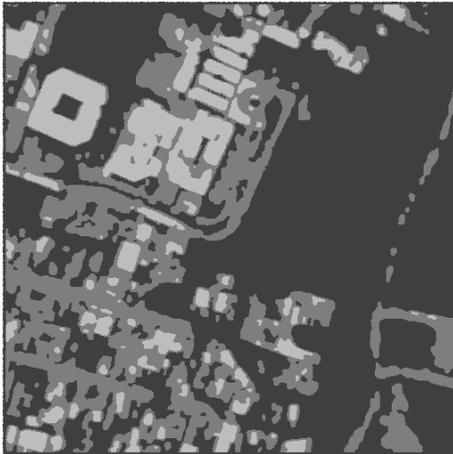


Fig. 6.96 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.



Fig. 6.67 Imagen Original.

Sobreponiendo el contorno de la imagen obtenida por el método de fusión propuesto (fig. 6.96) a la imagen original, obtenemos:

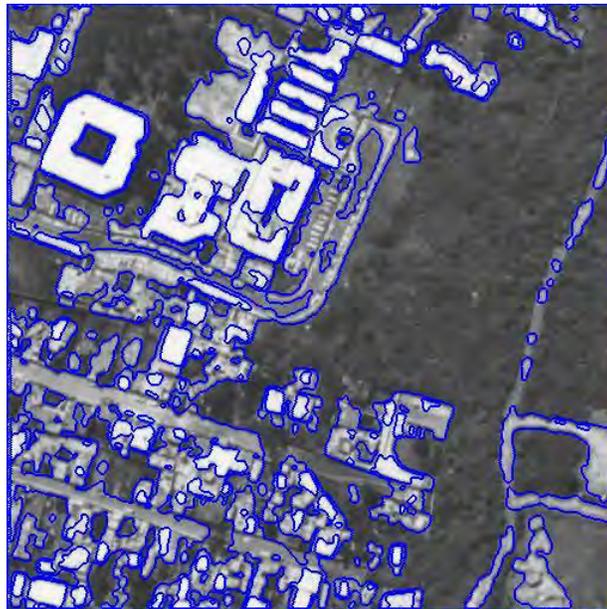


Fig. 6.97 Comparación imagen Original Vs. Contorno de la imagen fusionada y segmentada con 5 imágenes de textura obtenida por el método de recocido simulado propuesto.

Comparando la imagen original (fig. 6.67), la imagen obtenida de aplicar el método de recocido simulado a la misma (fig. 6.78), la imagen obtenida de aplicar el recocido simulado a la imagen de textura (fig. 6.84), la imagen obtenida de la fusión de las 3 imágenes de textura (fig. 6.90) y la imagen obtenida de la fusión de las 5 imágenes (6.96) de textura se tiene:



Fig. 6.67 Imagen Original.



Fig. 6.78 Segmentación de la imagen original utilizando MRF. Iteración 80.

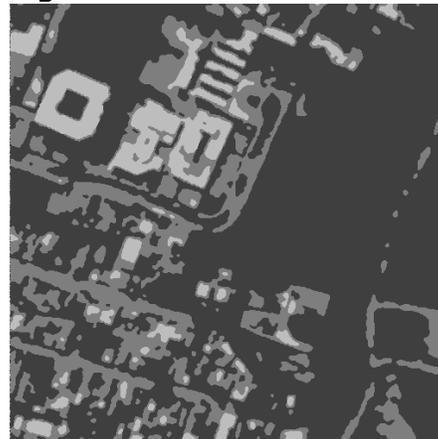


Fig. 6.84 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación utilizando MRF. Iteración 80 .

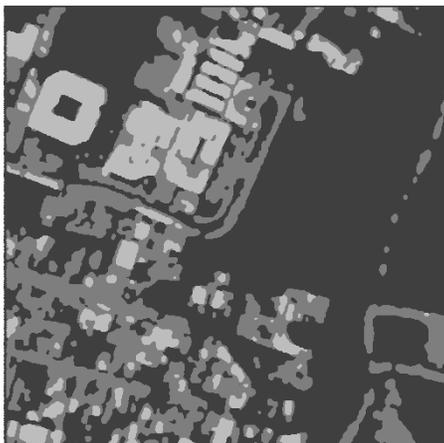


Fig. 6.90 Imagen segmentada de la fusión de 3 imágenes de textura (fig. 6.68, 6.69 y 6.72) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.

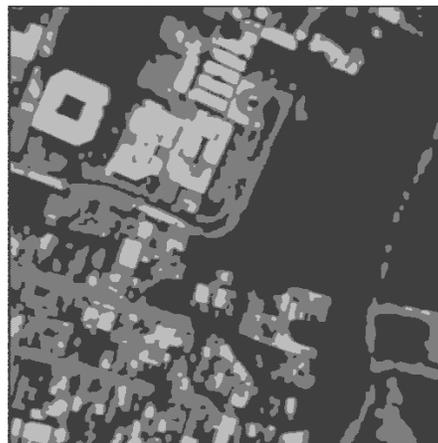


Fig. 6.96 Imagen segmentada de la fusión de 5 imágenes de textura (fig. 6.68, 6.69 6.70 ,6.71 y 6.72) textura utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.



6.4.6 COMPARACIÓN ENTRE LAS SEGMENTACIONES REALIZADAS POR RECOCIDO SIMULADO Y POR EL MÉTODO DE FUSIÓN PROPUESTO

Comparando ventanas tomadas de las regiones que se señala en la siguiente imagen:

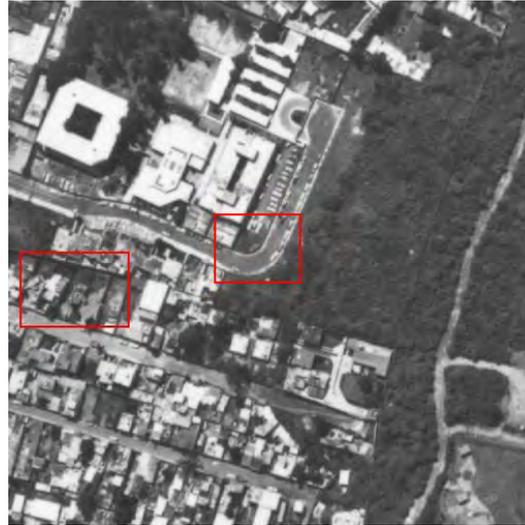


Fig. 6.98 Imagen Original. Ventanas seleccionadas de las imágenes segmentadas a comparar.

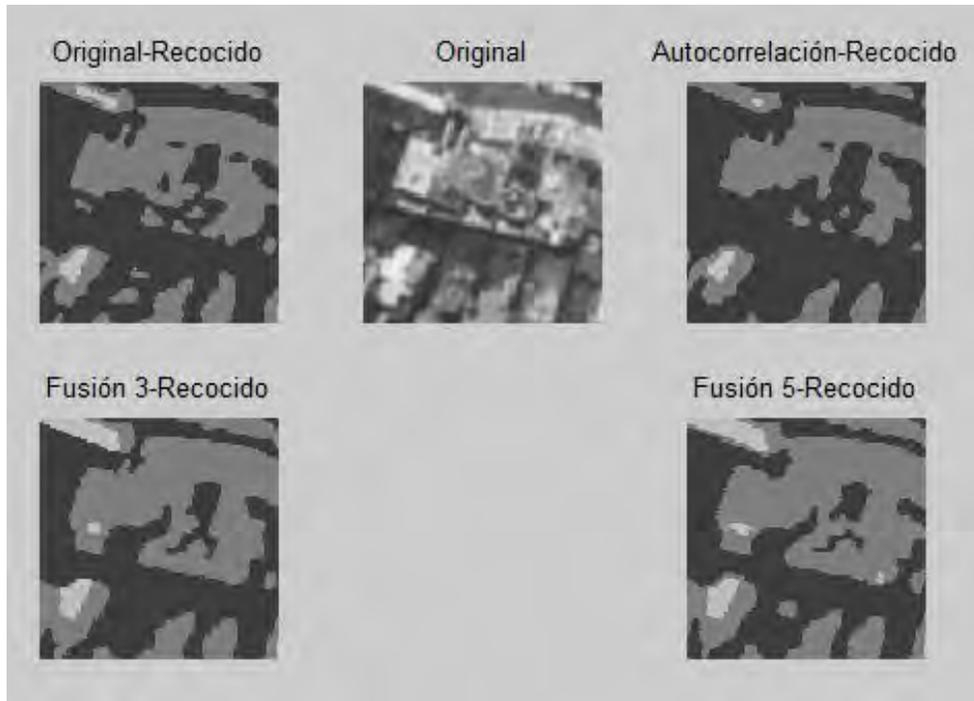


Fig. 6.99 Comparación de ventanas de las imágenes segmentadas obtenidas por el método de recocido simulado y el método de recocido simulado propuesto.

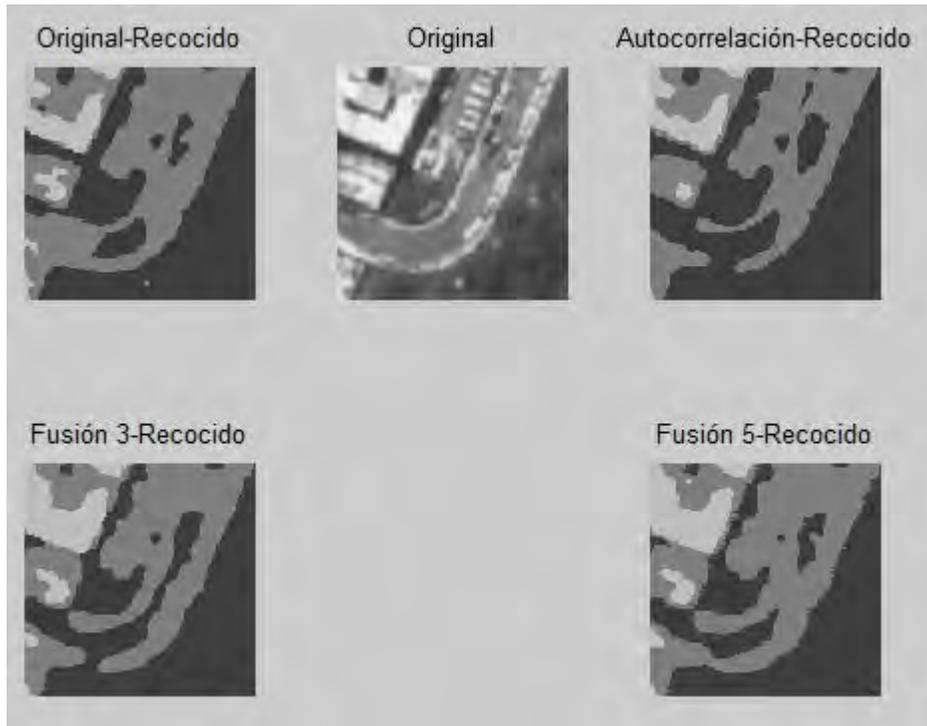


Fig. 6.100 Comparación de ventanas de las imágenes segmentadas obtenidas por el método de recocido simulado y el método de recocido simulado propuesto.

Al realizar la comparación entre los resultados obtenidos, se observa que, al igual que para los resultados obtenidos de la primera imagen aérea presentada (fig. 6.33), las regiones blancas de la imagen original, son mejor detectadas en el resultado obtenido por la fusión de 5 imágenes (fig. 6.96) con el método de fusión de imágenes utilizando el método de recocido simulado, que utilizando menos imágenes en dicha fusión (fig. 6.90), ó aplicando solo el recocido simulado a una sola imagen (figuras 6.78 y 6.84).

En la fusión de imágenes las regiones segmentadas están más definidas que en los resultados donde sólo se aplicó el recocido simulado a una sola imagen, ya que estos últimos resultados presentan más grupos de píxeles aislados. Un ejemplo de esta situación, se presenta en la fig. 6.99.

La fusión de 5 imágenes de textura (fig. 6.96) contiene información más completa de la imagen original (fig. 6.67) que la fusión de 3 imágenes de textura (fig. 6.90), esto se puede observar en la fig. 6.100 donde la fusión de solo 3 imágenes de textura no describe un cambio en la tonalidad de los niveles de grises que la imagen de textura de 5 imágenes de textura detecta.



6.5 COMPARACIÓN ENTRE DIFERENTES MÉTODOS DE SEGMENTACIÓN

Para comparar la efectividad del método propuesto, se comparan los resultados obtenidos a través del algoritmo de recocido y los resultados obtenidos utilizando el algoritmo de clasificación bayesiana ^[6.2]. Así mismo se muestra una comparación entre resultados de aplicar la fusión multiclases basado en el método de Shan Yu^[6.2] a las 3 y 5 imágenes de textura utilizadas para cada imagen original y los resultados obtenidos anteriormente de aplicar el método de fusión propuesto basado en el método de recocido simulado.

En las imágenes fusionadas por el método de Shan Yu^[6.1], se utilizan los mismos descriptores de textura que para el algoritmo propuesto en este trabajo y se utiliza además un mapa burdo. Las imágenes de textura son preclasificadas y clasificadas por el método bayesiano, después son homogeneizadas y finalmente fusionadas utilizando el mapa burdo y el método de fusión multiclases^[6.2]. Una explicación más amplia sobre el método de segmentación y clasificación Bayesiano, así como del método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu se encuentra en el anexo de esta tesis ó se puede consultar el trabajo citado en la bibliografía en el punto 6.2.

Cabe aclarar que para que la comparación fuera mejor se escalaron los niveles de grises de las imágenes de fusión por el método propuesto a los mismos niveles de grises utilizados en el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

6.5.1 RESULTADOS PARA LA IMAGEN SINTÉTICA

Antes de presentar las comparaciones entre imágenes, se muestra una tabla donde se registraron las medias de cada imagen de textura que se utilizaron en el método de recocido simulado y en el método de fusión de datos propuesto en esta tesis. Estas mismas medias se utilizaron en el método de clasificación bayesiana y de fusión de datos por medio del método de Shan Yu.

Comparación entre medias:

Imagen	Medias utilizadas en MRF	Medias para la imagen preclasificada usando Bayes	Medias para la imagen clasificada usando Bayes
Original	81 129 181 218	81 129 181 218	81 129 181 218
Autocorrelación	31 77 151 220	31 77 151 220	31 77 151 220
Cluster Prominence	4 19 75 149	4 19 75 149	4 19 75 149
Cluster Shade	13 42 117 199	13 42 117 199	13 42 117 199
Máxima Probabilidad	36 44 100 149	36 44 100 149	36 44 100 149
Varianza	3 12 47 199	3 12 47 199	3 12 47 199

Tabla 6.3 Medias utilizadas para la segmentación de imágenes.



6.5.1.1 COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO BAYESIANO DE SEGMENTACIÓN Y CLASIFICACIÓN Y EL MÉTODO DE RECOCIDO SIMULADO

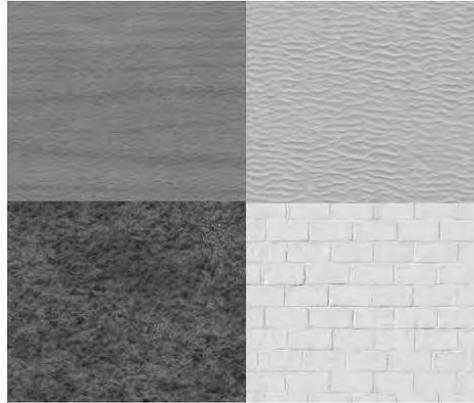


Fig. 6.2 Imagen Original.

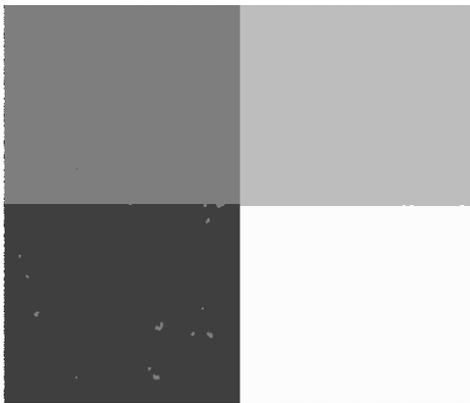


Fig. 6.13 Segmentación de datos de la imagen original utilizando MRF. Iteración 80.

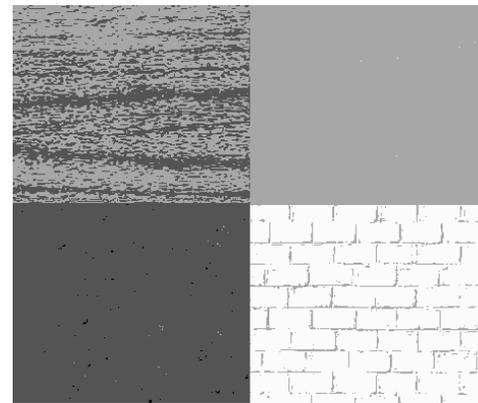


Fig. 6.101 Imagen obtenida de aplicar el método Bayesiano a la imagen original.

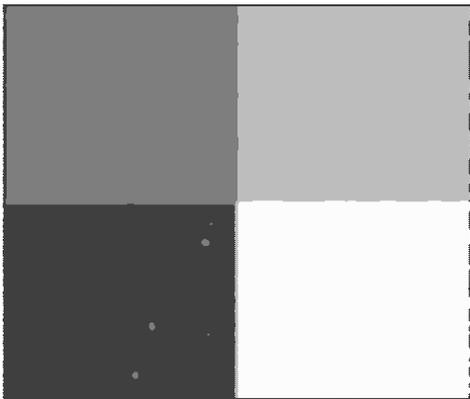


Fig. 6.19 Imagen segmentada obtenida de aplicar MRF a la imagen de textura de Cluster Prominence. Iteración 80.



Fig. 6.102 Imagen segmentada obtenida de aplicar Bayes a la imagen de textura de Cluster Prominence.



6.5.1.2 COMPARACIÓN ENTRE LA FUSIÓN MULTICLASES BASADA EN EL MÉTODO DE SHAN YU Y EL MÉTODO DE FUSIÓN PROPUESTO BASADO EN EL ALGORITMO DE RECOCIDO SIMULADO

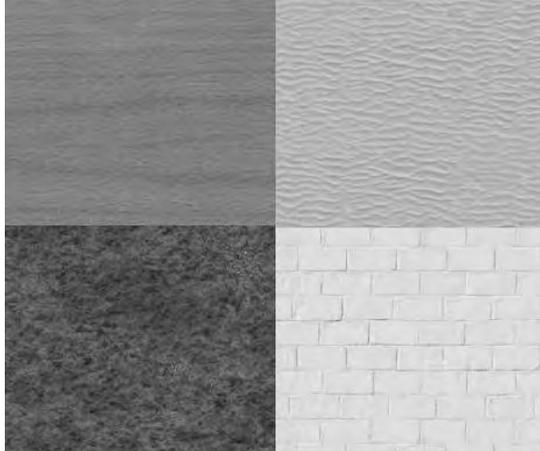


Fig. 6.2 Imagen Original.

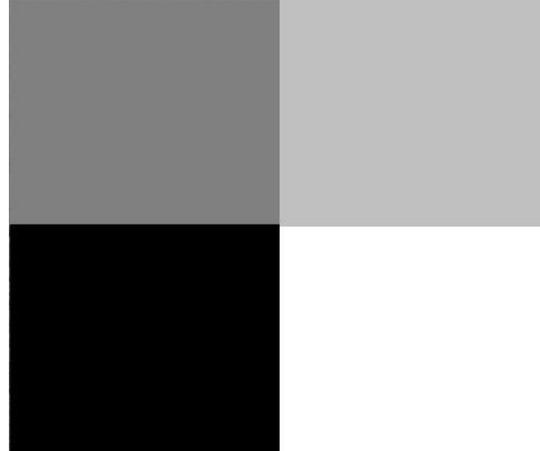


Fig. 6.103 Mapa burdo.

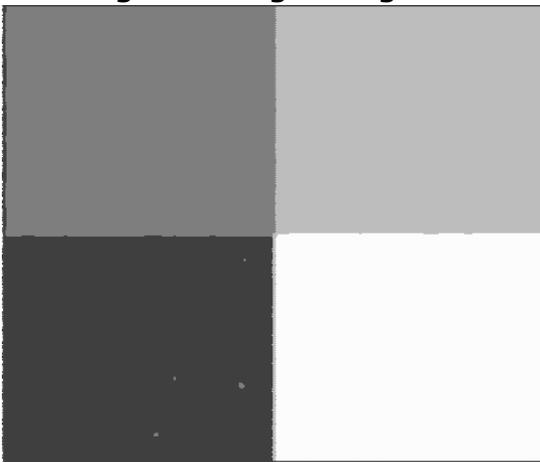


Fig. 6.25 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura (fig. 6.3, 6.4 y 6.5) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.

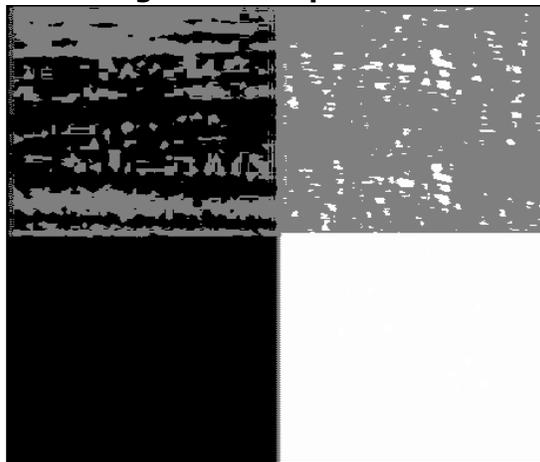


Fig. 6.104 Segmentación y fusión de 3 imágenes de textura (fig. 6.3, 6.4 y 6.5) por el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

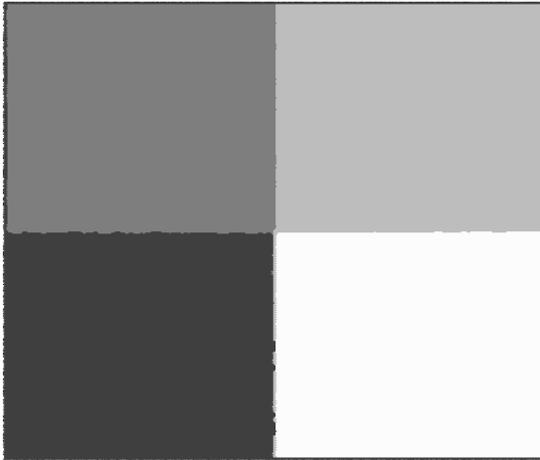
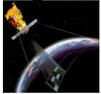


Fig. 6.31 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura (fig. 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80 $\beta = 0.35$.

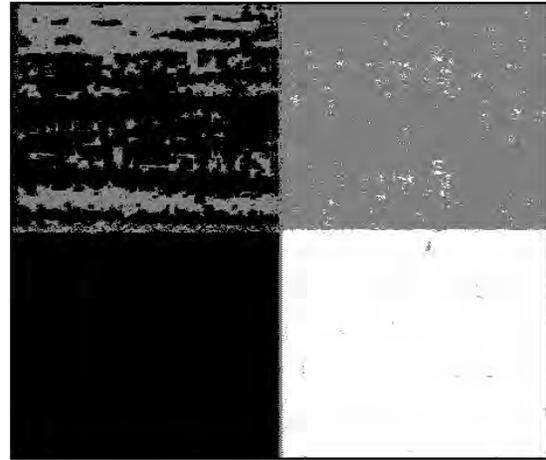


Fig. 6.105 Fusión de 5 imágenes de textura (fig. 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7) por el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

En este ejemplo no se presentan comparaciones entre ventanas puesto que las diferencias entre las imágenes se distinguen fácilmente. Como se puede observar el método de fusión de imágenes basado en el método de recocido simulado muestra una mejor discriminación entre clases que los otros métodos de segmentación.

6.5.2 RESULTADOS PARA LA PRIMERA IMAGEN AÉREA.

En la siguiente tabla se muestran las medias de cada imagen de textura que se utilizaron en el método de recocido simulado y en el método de fusión propuesto en esta tesis. Estas mismas medias se utilizaron en el método de clasificación bayesiana y de fusión multiclases basada en el método de Shan Yu para fusión binaria.

Imagen	Medias utilizadas en MRF			Medias para la imagen preclasificada usando Bayes			Medias para la imagen clasificada usando Bayes		
Original	75	211	254	75	211	254	75	211	254
Autocorrelación	22	174	255	22	174	255	22	174	255
Cluster Prominence	1	59	122	1	59	122	1	59	122
Cluster Shade	5	103	180	5	103	180	5	103	180
Correlación	12	18	131	12	18	131	12	18	131
Varianza	20	152	220	20	152	220	20	152	220

Tabla 6.4 Medias utilizadas para la segmentación de imágenes.



6.5.2.1 COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO BAYESIANO DE SEGMENTACIÓN Y CLASIFICACIÓN Y EL MÉTODO DE RECOCIDO SIMULADO

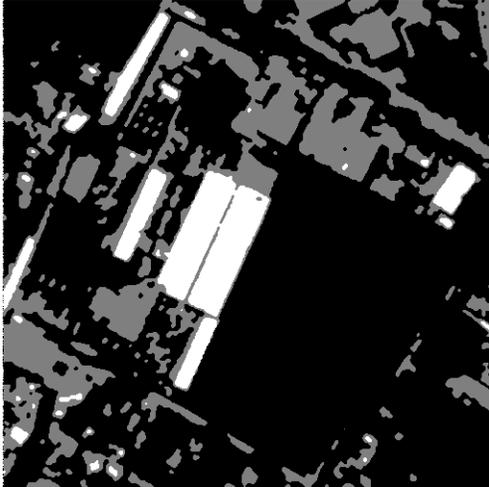


Fig. 6.44 Segmentación de la imagen original por MRF. Iteración 80.

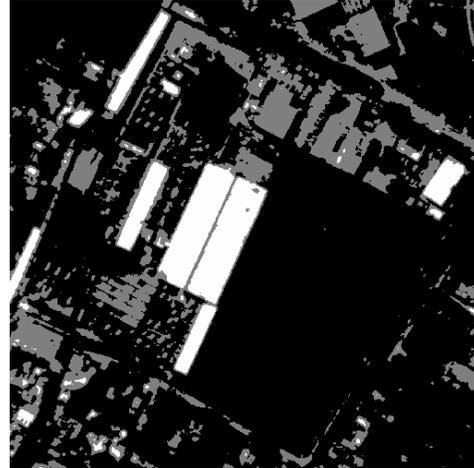


Fig. 6.106 Segmentación obtenida de aplicar el método Bayesiano a la imagen original.

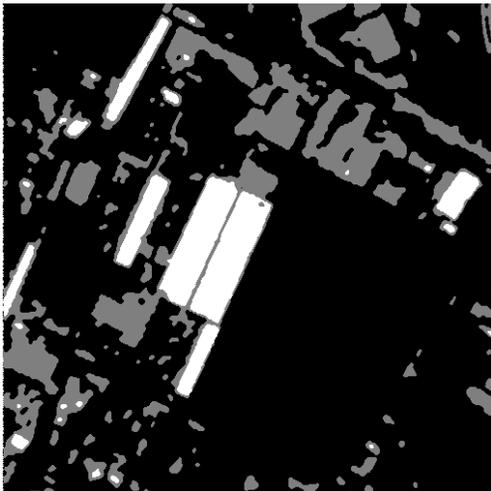


Fig. 6.50 Segmentación de la imagen de textura de autocorrelación por MRF. Iteración 80.

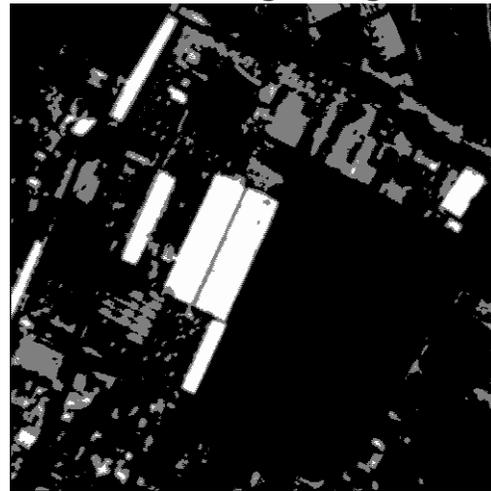


Fig. 6.107 Imagen obtenida de aplicar el método Bayesiano a la imagen de textura de autocorrelación.



6.5.2.2 COMPARACIÓN ENTRE LA FUSIÓN MULTICLASES BASADA EN EL MÉTODO DE SHAN YU Y EL MÉTODO DE FUSIÓN PROPUESTO BASADO EN EL ALGORITMO DE RECOCIDO SIMULADO

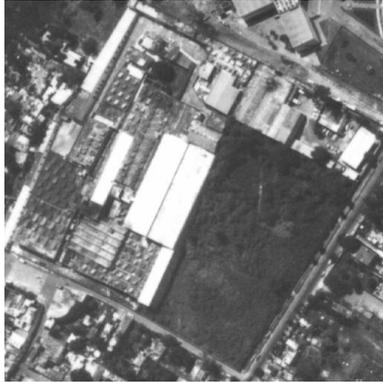


Fig. 6.33 Imagen Original.



Fig. 6.108 Mapa burdo.

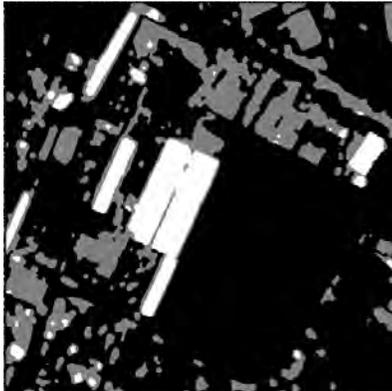


Fig. 6.56 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura (fig. 6.34, 6.36 y 6.38) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80 $\beta = 0.35$.

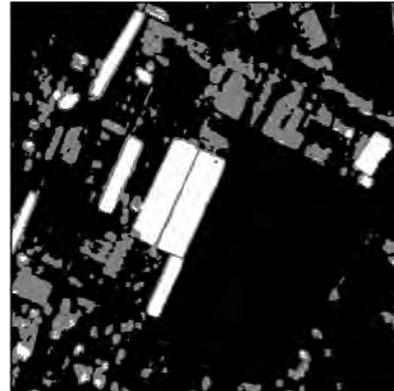


Fig. 6.109 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura (fig. 6.34, 6.36 y 6.38) por el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

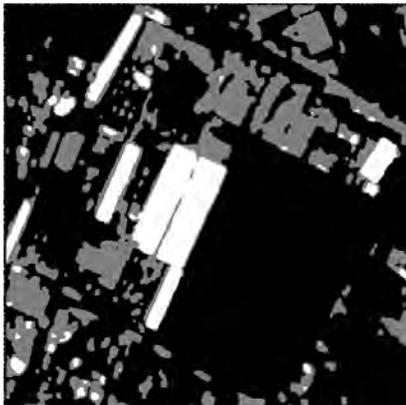


Fig. 6.62 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura (fig. 6.34, 6.35, 6.36, 6.37 y 6.38) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80

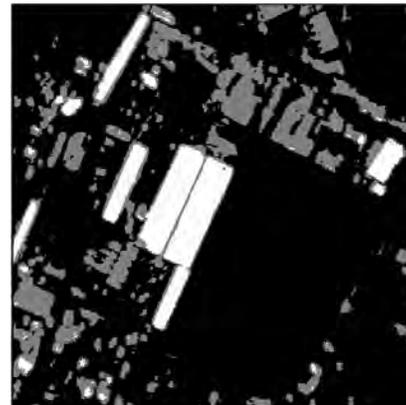


Fig. 6.110 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura (fig. 6.34, 6.35, 6.36, 6.37 y 6.38) por el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.



6.5.2.3 COMPARANDO VENTANAS DE LOS DIFERENTES MÉTODOS DE SEGMENTACIÓN PRESENTADOS

Comparando algunas zonas de la imagen tenemos:



Fig. 6.111 Regiones a comparar entre las diferentes segmentaciones obtenidas.

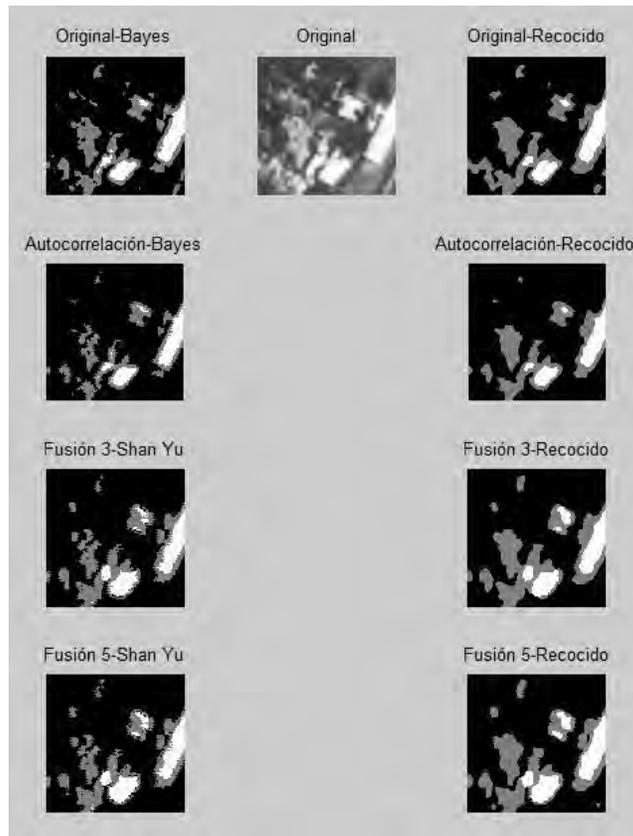


Imagen 6.112 Comparación de ventanas de las imágenes segmentadas obtenidas por el método de recocido simulado, el método de recocido simulado propuesto, el método de clasificación bayesiana y el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

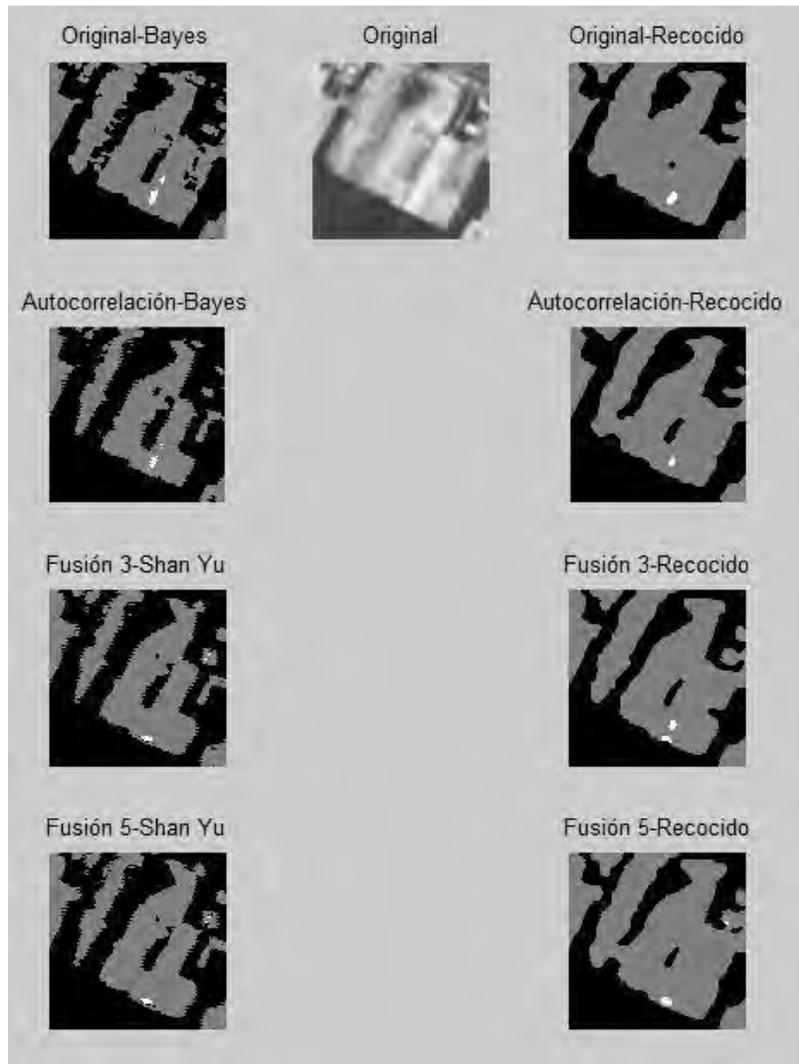


Imagen 6.113 Comparación de ventanas de las imágenes segmentadas obtenidas por el método de recocido simulado, el método de recocido simulado propuesto, el método de clasificación bayesiana y el método de fusión multiclasas basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

De los resultados anteriores, se observa que las imágenes clasificadas por el método Bayesiano, presentan muchos píxeles y regiones aisladas en comparación al método de recocido simulado, donde las regiones segmentadas están más definidas.

Con respecto a las fusiones de datos, la situación es similar, para los resultados obtenidos por el método de Shan Yu, las regiones grises oscuras son segmentadas como si pertenecieran a la región de vegetación de la imagen, lo que hace que algunos elementos de la escena desaparezcan. Esto no sucede con el método de recocido simulado propuesto.



6.5.3 RESULTADOS PARA LA SEGUNDA IMAGEN AÉREA

Al igual que para la primera imagen, en la siguiente tabla se muestra las medias de cada imagen de textura que se utilizaron en el método de recocido simulado y el método de fusión propuesto basado en el recocido simulado. Estas mismas medias se utilizaron en el método de clasificación bayesiana y de fusión de datos por medio del método de Shan Yu.

Comparación entre medias:

Imagen	Medias utilizadas en MRF			Medias para la imagen preclasificada usando Bayes			Medias para la imagen clasificada usando Bayes		
Original	72	169	247	72	169	247	72	169	247
Autocorrelación	22	116	249	22	116	249	22	116	249
Cluster Prominence	1	25	100	1	25	100	1	25	100
Cluster Shade	4	52	158	4	52	158	4	52	158
Correlación	11	22	110	11	22	110	11	22	110
Varianza	19	100	208	19	100	208	19	100	208

Tabla 6.5 Medias utilizadas para la segmentación de imágenes.

6.5.3.1 COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO BAYESIANO DE SEGMENTACIÓN Y CLASIFICACIÓN Y EL MÉTODO DE RECOCIDO SIMULADO

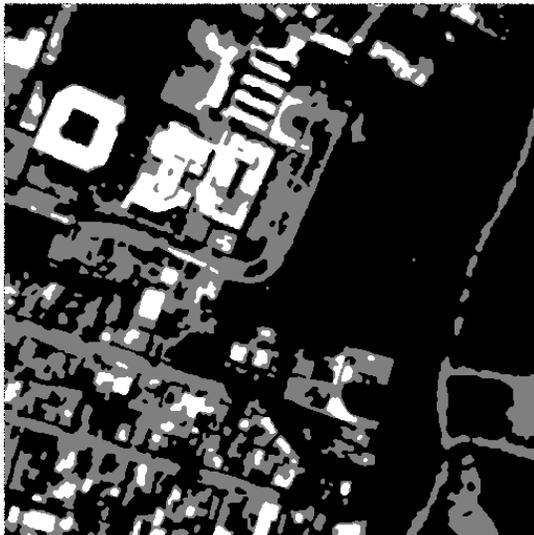


Fig. 6.78 Imagen obtenida de aplicar el método de recocido simulado a la imagen original.



Fig. 6.114 Imagen obtenida de aplicar el método Bayesiano a la imagen original.

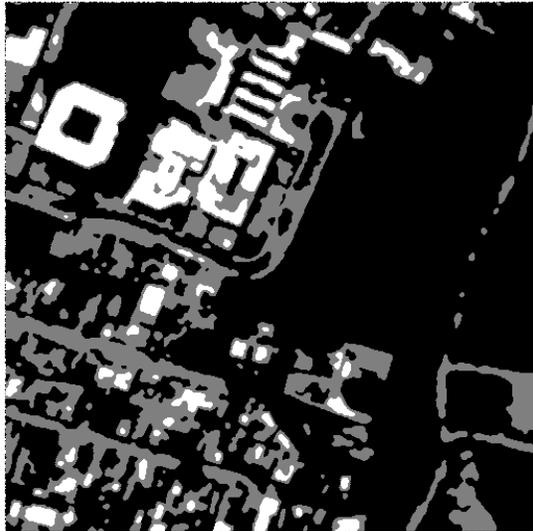


Fig. 6.84 Imagen obtenida de aplicar el método de recocido simulado a la imagen de textura de autocorrelación. Iteración 80.

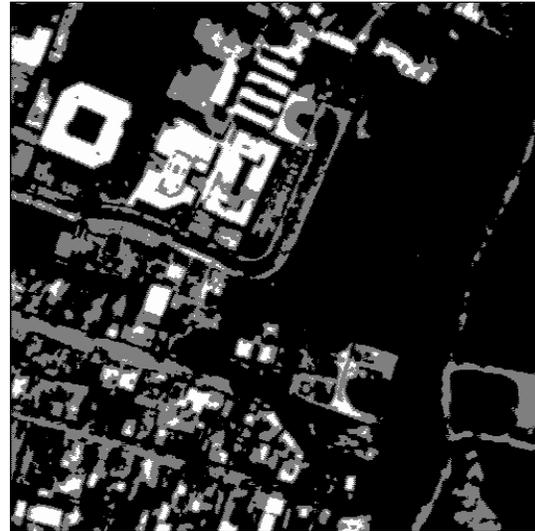


Fig. 6.115 Imagen obtenida de aplicar el método Bayesiano a la imagen de textura de autocorrelación.

6.5.3.2 COMPARACIÓN ENTRE LA FUSIÓN MULTICLASES BASADA EN EL MÉTODO DE SHAN YU Y EL MÉTODO DE FUSIÓN PROPUESTO BASADO EN EL ALGORITMO DE RECOCIDO SIMULADO



Fig. 6.67 Imagen Original.



6.116 Mapa burdo.

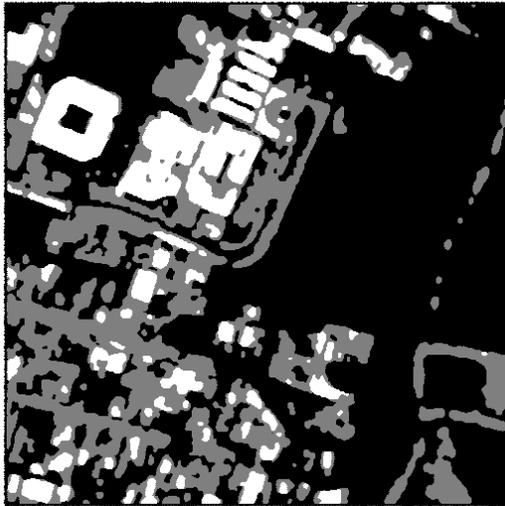


Fig. 6.90 Fusión y segmentación de 3 imágenes de textura (fig. 6.68, 6.69 y 6.72) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.

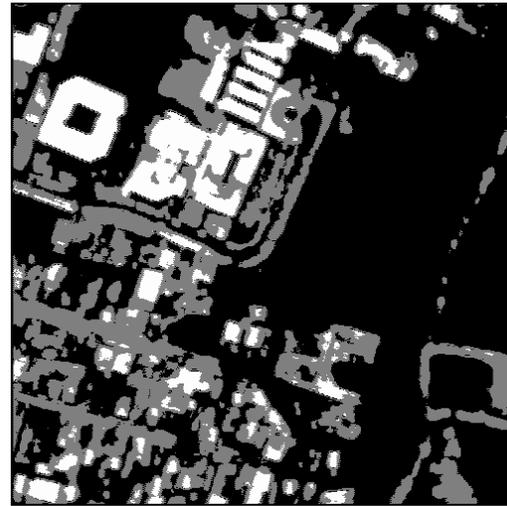


Fig. 6.117 Segmentación y fusión de 3 imágenes de textura (fig. 6.68, 6.69 y 6.72) por el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

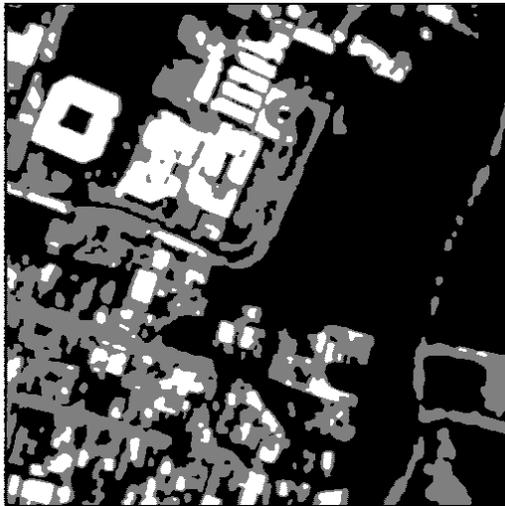


Fig. 6.96 Fusión y segmentación de 5 imágenes de textura (fig. 6.68, 6.69, 6.70, 6.71 y 6.72) utilizando el método propuesto basado en MRF. Iteración 80.

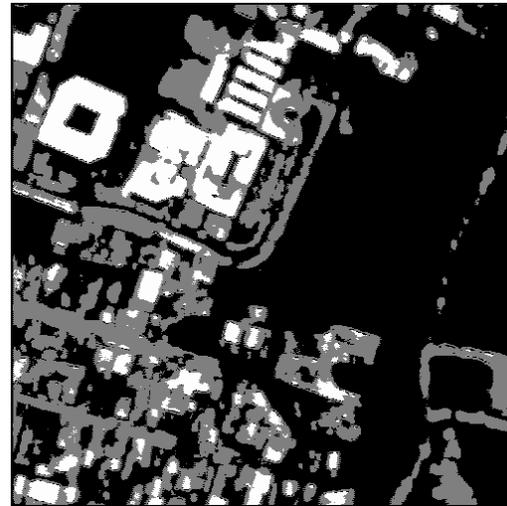


Fig.118 Segmentación y fusión de 5 imágenes de textura (fig. 6.68, 6.69, 6.70, 6.71 y 6.72) por el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.



6.5.3.3 COMPARANDO VENTANAS DE LOS DIFERENTES MÉTODOS DE SEGMENTACIÓN PRESENTADOS:



Fig. 6.119 Regiones a comparar entre las diferentes imágenes obtenidas.

A continuación se muestra una comparación de una sola ventana en la misma posición para todas las imágenes.

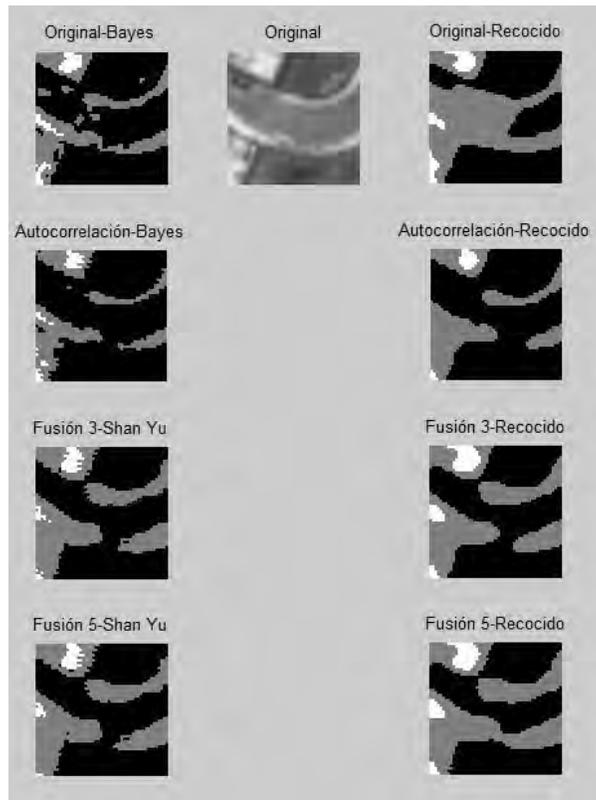


Fig. 6.120 Comparación de ventanas de las imágenes segmentadas obtenidas por el método de recocido simulado, el método de recocido simulado propuesto, el método de clasificación bayesiana y el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

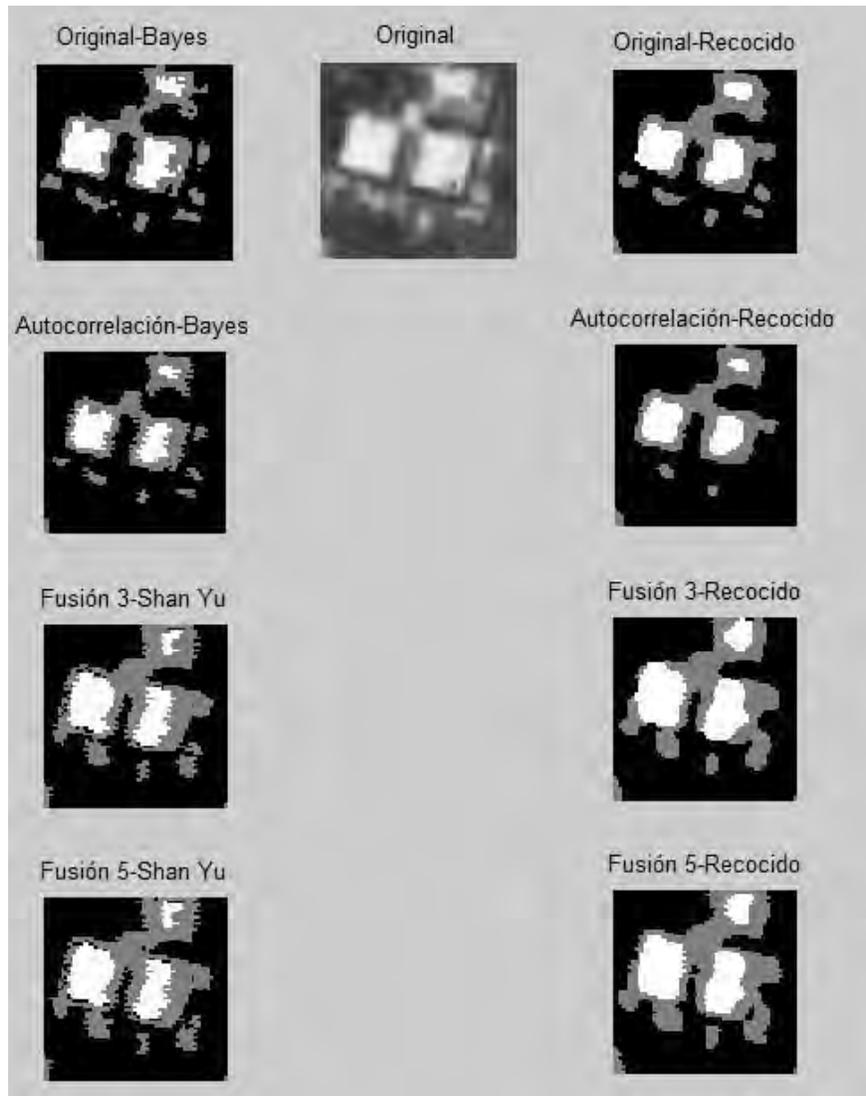


Fig. 6.121 Comparación de ventanas de las imágenes segmentadas obtenidas por el método de recocido simulado, el método de recocido simulado propuesto, el método de clasificación bayesiana y el método de fusión multiclases basado en el método de fusión binaria de Shan Yu.

Las observaciones para esta imagen son similares a las anteriores, los resultados de aplicar el método bayesiano y la fusión de datos basado en el método de Shan Yu, muestran que las áreas blancas no están bien detectadas y que hay un mayor número de píxeles aislados a la imagen original.

En la figura 6.120 se puede observar que la imagen de la fusión de 5 imágenes basada en el recocido simulado, detecta como continuo un camino que solamente dos imágenes más lo detectan: la figura 6.78 y la figura 6.114. Sin embargo la figura 6.78 no detecta bien el cambio de textura dentro del camino y la figura 6.114 presenta píxeles aislados.

7

CONCLUSIONES

CAPÍTULO





7. CONCLUSIONES

La Percepción remota es una tecnología contemporánea mediante la cual es posible obtener información de un objeto mediante un dispositivo que no esté en contacto físico con él. La forma de obtener esta información es a través de fotografías aéreas y satelitales. Estas fotografías son analizadas por medio de técnicas de Procesamiento Digital de Señales para su uso en sistemas de información ambiental.

El objetivo de esta tesis es definir un esquema estocástico sub-óptimo para la segmentación y fusión de imágenes de percepción remota, basándose en la teoría de Bayes y en los Campos Aleatorios de Markov.

Para cumplir con este objetivo, primero se redujo el número de niveles de gris de la imagen original (de 256 a 32) para disminuir el tiempo de procesamiento de las siguientes etapas. En seguida, se obtuvieron los descriptores de textura de las imágenes originales utilizando la matriz de co-ocurrencia con ventana deslizante.

Después de obtener los descriptores de textura, variando parámetros de desplazamiento horizontal y tamaño de ventana, se seleccionaron algunos de ellos y se realizó una fusión y segmentación de imágenes basándose en los Campos Aleatorios de Markov (MRF).

Bajo los MRF una imagen es segmentada asignando una etiqueta a cada pixel de ella, en este trabajo la etiqueta corresponde a la clase a la que el pixel pertenece. El etiquetado óptimo, es decir la etiqueta que maximice la distribución a posteriori $P(\omega_i | X)$ del campo de etiquetas, se puede encontrar utilizando el teorema de Bayes. Sin embargo, debido a la equivalencia entre los campos Aleatorios de Markov y los Campos Aleatorios de Gibbs, establecida en el teorema de Hammersley-Clifford, encontrar la distribución máximo a posteriori del campo de etiquetas equivale a minimizar la función de energía correspondiente a este mismo campo de etiquetas.

La función de energía queda compuesta por la suma una función de energía a priori y de la función de energía condicional. En esta tesis, la función de energía a priori se obtiene mediante el modelo de Potts y la función de energía condicional se obtiene por medio de funciones trapezoidales. Lo anterior se realiza dentro de un proceso llamado recocido simulado.

El método de recocido simulado, se utiliza para la solución de problemas de optimización y se fundamenta en el esquema de metrópolis.



La aportación más importante de este trabajo es un esquema de fusión y segmentación, el cual considera tomar más de una imagen de textura como imagen original, fusionarlas y segmentarlas utilizando el algoritmo del Recocido Simulado.

La fusión propuesta se basa en el teorema de Bayes para características múltiples, y se considera que las características son independientes dada la clase. De esta forma, la expresión que resulta de combinar estos conceptos, es una distribución a posteriori la cual al maximizarse es similar a minimizar la función de energía correspondiente a esta expresión. Para cada clase, esta función de energía está compuesta por la suma de la función de energía a priori y de las funciones de energía condicional de cada una de las imágenes de textura dada la clase que se esté analizando. Al igual que para una sola imagen, la función de energía a priori, se obtiene por medio del método de Potts y las funciones de energía condicional se obtienen por medio de las funciones trapezoidales descritas en el capítulo 5.

Después de diseñar y programar el algoritmo de fusión y segmentación propuesto en esta tesis, se realizaron diversas pruebas de segmentación de imágenes. Una de ellas fue aplicar el algoritmo de recocido simulado a cada una de las imágenes originales con las que se trabajaron. Después, se aplicó el método de recocido simulado a la imagen de textura de autocorrelación de cada una de las imágenes aéreas. Para la imagen sintética, la imagen de textura seleccionada fue la imagen de cluster prominente. Después se aplicó el método de fusión y segmentación propuesto en este trabajo a 3 y 5 imágenes de textura.

Los resultados así obtenidos muestran que al aplicar el algoritmo de recocido simulado a la imagen original, se pierden regiones blancas y algunas regiones no son segmentadas correctamente, ya que el algoritmo no identifica bien algunos cambios entre tonos de píxeles. Por otro lado, las segmentaciones obtenidas al aplicar el recocido simulado a la imagen de autocorrelación, muestran resultados más favorables, en ellos, las segmentaciones son mejores pero algunas regiones blancas no son detectadas. A diferencia de estos resultados, los resultados obtenidos de aplicar el método propuesto de fusión y segmentación basado en los MRF a 3 y 5 imágenes de textura, muestran una mejor segmentación y una mejor detección de regiones blancas. Se observa también, que al aumentar el número de imágenes fusionadas, la detección de regiones blancas es mejor.

En cuanto a la imagen sintética, se observa que la fusión y segmentación de 5 imágenes de textura, discrimina mejor las clases que las demás segmentaciones.



También se compararon estos resultados con segmentaciones obtenidas por el método de Bayes, y por un método de fusión multiclases, basado en el método de fusión binaria de Shan Yu, propuesto en un trabajo anterior. Los resultados obtenidos muestran que al aplicar el método bayesiano de segmentación y clasificación a una sola imagen, los resultados son buenos, sin embargo existen algunos píxeles ó grupos de píxeles aislados que no aparecen al aplicar el método de recocido simulado. Por otro lado, las regiones blancas son mejor detectadas por los resultados obtenidos por medio del recocido simulado.

Al realizar la fusión de datos basada en la fusión binaria de Shan Yu y comparar los resultados con las imágenes obtenidas de aplicar el método de recocido simulado propuesto en esta tesis, las observaciones anteriores fueron similares. Por medio de la fusión de datos basada en la fusión binaria de Shan Yu, se obtienen buenas segmentaciones, pero hay muchos píxeles aislados y las regiones parecieran no estar bien definidas, además las regiones blancas se detectan mejor por medio del método de fusión y segmentación de imágenes basado en MRF.

Como se puede observar, el método de fusión y segmentación de imágenes propuesto en este trabajo, proporciona mejoras con respecto a otros algoritmos de segmentación. Por esta razón, se puede decir que el objetivo principal de esta tesis está cumplido. Posteriormente se publicará un artículo con base a los resultados obtenidos y se buscarán nuevas formas para mejorar este algoritmo u otros métodos de segmentación de imágenes.



ANEXO



Ers 2 [2.15]



MÉTODO BAYESIANO DE CLASIFICACIÓN

PRIMERA PARTE.

1. Sobre la imagen a trabajar, se definen 3 ventanas que identifiquen a 3 clases típicas: la clase no urbana, la clase urbana con regiones opacas y la clase urbana con regiones blancas de la escena.
2. Sobre cada ventana se calcula la media m .
3. Se aproximan las probabilidades conjuntas del numerador de la regla de Bayes mediante las funciones mostradas en la figura A, las cuales indican la probabilidad condicional de que un píxel dado pertenezca a la clase ω_k .

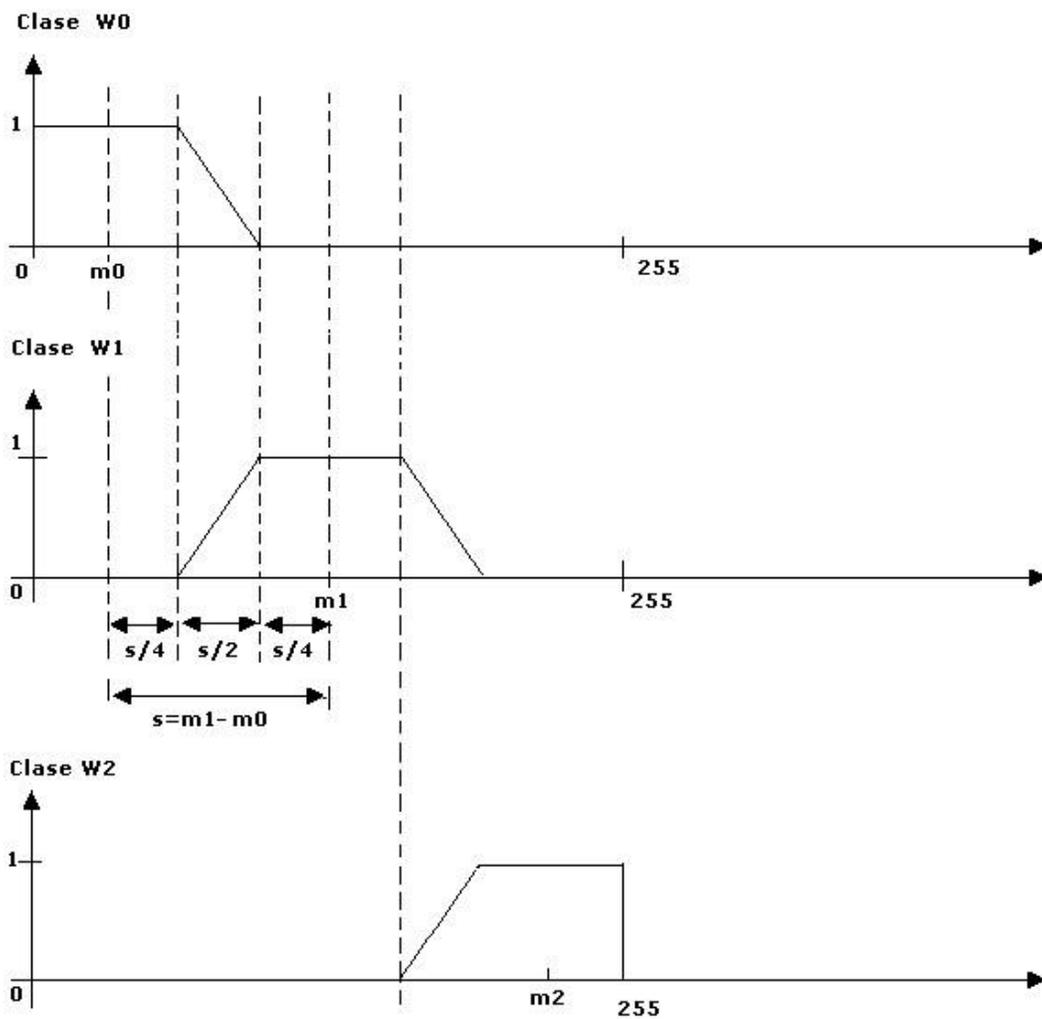


Fig. A Términos de probabilidad condicional $P(x | \omega_k)$



SEGUNDA PARTE: PRECLASIFICACIÓN.

1. Se emplea la función discriminante de Bayes:

$$d_k(x) = p(x | \omega_k) p(\omega_k)$$

donde:

x es la imagen original

ω_k las clases con $k=0, 1, 2, \dots$

$p(\omega_k)$ es la probabilidad a priori de la clase ω_k

$p(x | \omega_k)$ es la probabilidad condicional de x dado ω_k y

$d_k(x) = p(\omega_k | x)$ representa la probabilidad a posteriori

2. Como no se conoce la probabilidad a priori $p(\omega_k)$, se consideran equiprobables a las probabilidades de ocurrencia de las clases $p(\omega_k)$.

3. Se analiza cada uno de los píxeles de la imagen x , clasificando a cada píxel de acuerdo con los valores máximos de la probabilidad a: $\arg \max[p(\omega | x)]$.

TERCERA PARTE: CLASIFICACIÓN BAYESIANA.

En esta etapa, se efectúa nuevamente una segmentación bayesiana. En este caso, se utilizan las probabilidades a priori $p(\omega_k)$ actualizadas. Esta actualización, se lleva a cabo dividiendo el número de píxeles que pertenecen a una clase entre el total de píxeles de la imagen.

Después de realizar la actualización de probabilidades, se clasifica cada uno de los píxeles de la imagen utilizando la misma Función Bayesiana de la etapa anterior.

MÉTODO DE FUSIÓN MULTICLASES BASADA EN EL MÉTODO DE FUSIÓN BINARIA PROPUESTO POR SHAN YU^[6.1]

El método de fusión multiclasses basada en el método de fusión binaria de Shan Yu, fusiona imágenes provenientes de diferentes algoritmos. Para lograrlo, primero estima la confiabilidad de estas imágenes mediante la obtención de dos tipos de error: un error local para cada píxel del resultado y un error global para el resultado completo. Este último error es simplemente la acumulación del error local sobre todas las regiones de la imagen. El error global determina si el resultado es suficientemente bueno para ser usado en el proceso de fusión, mientras que el error local determina como debe tomarse en cuenta cada píxel dentro del proceso de fusión, de esta manera, un píxel con un pequeño error local tiene muy alta confiabilidad y por lo tanto tiene mayor influencia en el proceso de fusión.



La forma ideal de medir la calidad del resultado del análisis de una imagen es usando el campo de escena real. Sin embargo no siempre es posible, por lo cual se puede utilizar la información extraída de mapas geográficos en lugar de la escena real. La información de un mapa previamente simplificada y clasificada sólo da un modelo aproximado de la escena, y por lo tanto la información que brinda es incierta e imprecisa. Este factor debe tomarse en cuenta cuando dicho modelo se utiliza para evaluar la confiabilidad de los resultados en el análisis de imágenes.

Para realizar la clasificación de una imagen, se debe suponer que el mapa se ha registrado con la imagen y que:

- ❖ \mathbf{s} es un lugar o una región de la imagen.
- ❖ \mathbf{S} denota a la imagen completa.
- ❖ $L = \{l_i, 1 \leq i \leq N\}$ denota un conjunto de clases o de regiones a segmentar.
- ❖ $M(\mathbf{s})$ es la clase que pertenece a la región \mathbf{s} de acuerdo al mapa.
- ❖ $I(\mathbf{s})$ es la clase de \mathbf{s} obtenida por el resultado del análisis de imagen.

Suponiendo que $M(\mathbf{s}) = l_i$ y que $I(\mathbf{s}) = l_j$. El cambio de la región de clase l_i (en el mapa) a clase l_j (en el resultado del análisis de la imagen) provoca un error llamado **riesgo**: $X_{l_i, l_j} \geq 0$ ($X_{l_i, l_j} = 0$ si $i=j$). Este riesgo se estima usando la información del mapa y usando el resultado del análisis de la imagen.

Cada una de las regiones de la imagen debe de relacionarse con su vecindario. Supongamos que \mathbf{s}' es una región en la vecindad V_s de la región \mathbf{s} , y $d(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ la distancia entre \mathbf{s} y \mathbf{s}' , entonces se calculan las siguientes medidas:

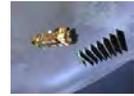
$$a(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{s}' \in V_s} \frac{1_{\{M(\mathbf{s}')=l_i\}}}{d(\mathbf{s}, \mathbf{s}')} \dots\dots\dots (A.1)$$

$$b(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{s}' \in V_s} \frac{1_{\{I(\mathbf{s}')=l_j\}}}{d(\mathbf{s}, \mathbf{s}')} \dots\dots\dots (A.2)$$

donde $1_{\{\cdot\}}$ es el indicador de una función.

$a(\mathbf{s})$ es el número de regiones que existen en V_s , y que son clasificadas como l_j en el mapa, su valor es inversamente proporcional a la distancia que tiene con respecto a la región \mathbf{s} .

$b(\mathbf{s})$ representa el peso que el lugar \mathbf{s} obtiene del resultado del análisis de la imagen. El tamaño de la vecindad depende de la resolución de la imagen. Si la resolución es alta el tamaño es grande.



El error local $E(s)$ del sitio s está definido como:

$$E(s) = \frac{X_{l_i, l_j}}{ra + (1+b)}, r \geq 1 \dots\dots\dots (A.3)$$

Como el resultado del análisis de la imagen y el mapa contienen imprecisiones y errores, se considera que el mapa contiene información más confiable que el resultado del análisis de la imagen y esto se refleja en el coeficiente r .

El error global es la acumulación de las medidas de errores locales a través de cada parte de la imagen y se define como:

$$GE = \sum_{s \in S} E(s) \dots\dots\dots (A.4)$$

PROCESO DE FUSIÓN.

Una vez que se conoce el valor del error global del resultado del análisis de la imagen, podemos decidir si este resultado es lo suficientemente bueno para ser usado en el proceso de fusión. Para hacerlo, simplemente se toman los mejores resultados de todos los resultados disponibles.

Aunque un resultado seleccionado para ser usado en el proceso de fusión tiene una confiabilidad alta, todas las regiones de este resultado no tienen la misma confiabilidad. Por lo tanto, se calcula un coeficiente de confiabilidad para cada región del resultado basándonos en el valor del error local del lugar:

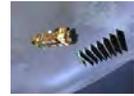
$$C(s) = 1 - \frac{E(s)}{\sum_{l_i, l_j \in L} X_{l_i, l_j}} \dots\dots\dots (A.5)$$

donde el denominador es el valor normalizado de $E(s)$, por lo tanto: $0 \leq C(s) \leq 1$.

La decisión de la clase final que le corresponderá a cada región depende de la acumulación del coeficiente de confiabilidad del mismo lugar a través de todos los resultados almacenados:

$$I(s) = \arg \max_{l_i \in L} \sum_{K=1}^p C_k(s) 1_{\{I_k(s)=l_i\}} \dots\dots\dots (A.6)$$

Donde $I_k(s)$ significa que el resultado es usado como la k^{th} entrada al proceso de fusión y $C_k(s)$ es el coeficiente de confiabilidad de la región s en este resultado.



ESQUEMA BINARIO.

Para fusionar imágenes con dos clases aplicando el método descrito anteriormente, se utilizan los siguientes parámetros:

- ❖ $p=3$
- ❖ $r=2,$
- ❖ $X_{l_i,l_j} = 20, X_{l_j,l_i} = 1 X_{l_i,l_i} = 0$

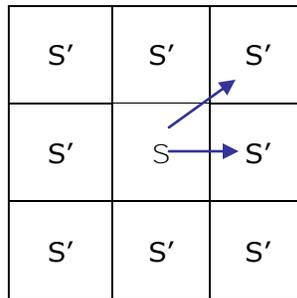
donde p es el número de imágenes.

Para entender mejor, como se aplica el método descrito, se presenta un ejemplo en el cual, el tamaño de la vecindad es una ventana de 3x3 centrada en la región analizada.

Mapa	Imagen1	Imagen2	Imagen3																																				
<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td style="background-color: #0000FF;">1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	2	1	1	1	1	1	1	1	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td style="background-color: #0000FF;">2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	2	2	1	2	2	1	2	1	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td style="background-color: #0000FF;">1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	2	1	1	1	1	1	1	1	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td style="background-color: #0000FF;">2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	1	1	1	2	2	1	2	2
2	1	1																																					
1	1	1																																					
1	1	1																																					
2	2	1																																					
2	2	1																																					
2	1	1																																					
2	1	1																																					
1	1	1																																					
1	1	1																																					
1	1	1																																					
1	2	2																																					
1	2	2																																					

La distancia de una región s a la región s' se calcula como:

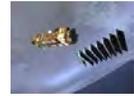
$$a(s) = \frac{1}{d(s,s')}$$



Como se puede observar en la figura anterior, si s' está en dirección horizontal o vertical con respecto a s, la distancia es uno, si esta en dirección diagonal, la distancia es $\sqrt{2}$.

De acuerdo a lo anterior, para la primera imagen:

$$a(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071 \quad \text{y} \quad b(s) = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 3.4142$$



Para obtener el valor de X , se considera que:

❖ $X_{l_i, l_j} = 20$, es decir que si la región analizada en el mapa pertenece a la clase 1 y la región analizada en la imagen es de clase 2, entonces $X=20$.

❖ $X_{l_i, l_i} = 0$, es decir que si la región analizada en el mapa pertenece a la misma clase que la región analizada en la segunda imagen, entonces $X=0$.

❖ $X_{l_j, l_i} = 1$, es decir que si la región analizada en el mapa pertenece a la clase 2 y la región analizada en la imagen es de clase 1, entonces $X=1$.

En este caso $X_{l_i, l_j} = 20$, ya que la región analizada en el mapa pertenece a la clase 1 y la región analizada en la imagen pertenece a la clase 2.

Por lo tanto, el error local es:

$$E(s) = \frac{X_{l_i, l_j}}{ra + (1+b)} = \frac{20}{2(0.7071) + 1 + 3.4142} = 3.4314$$

Y el coeficiente de confiabilidad es:

$$C(s) = 1 - \frac{E(s)}{\sum_{l_i, l_j \in L} X_{l_i, l_j}} = 1 - \frac{3.4314}{20 + 1} = 0.8365$$

Para la segunda imagen el cálculo de los coeficientes es similar.

Una vez que se obtienen los coeficientes de confiabilidad se aplica la ecuación (A.6) para decidir a qué clase pertenece cada región de la imagen.

$$l(s) = \arg \max_{l_i \in L} \sum_{k=1}^p C_k(s) 1_{\{l_k(s)=l_i\}}$$

Con esta ecuación, se analiza la clase de la región estudiada, si dicha región pertenece a la clase 1 su coeficiente de confiabilidad se coloca en $l_1(s)$, si pertenece a la clase 2, se coloca en $l_2(s)$, este proceso se repite después para la segunda imagen. Si tanto la región analizada de la primera y segunda imagen pertenecen a la misma clase sus coeficientes se suman.



ESQUEMA MULTICLASES.

El método de fusión multiclasas, basado en el método de Shan YU para fusión binaria, utiliza los mismos valores de las variables propuestas que se utilizan en el caso binario, es decir:

- ❖ $p=3$
- ❖ $r=2,$
- ❖ $X_{i,j} = 20, X_{j,i} = 1 X_{i,i} = 0$

donde p es el número de imágenes.

Suponiendo que tanto el mapa burdo como las imágenes contienen 3 clases diferentes: clase 0, 127 y 253. Basándose en la fusión binaria, de estas 3 clases se generan 3 pares de clases a analizar las cuales son:

- ❖ 0 y 127
- ❖ 0 y 253
- ❖ 127 y 253

Para facilitar el análisis, la clase 1 siempre será el valor de nivel de gris más pequeño, es decir, 0 para los dos primeros pares de clases y 127 para el último par, con esta consideración, se calculan las $a(s)$ y $b(s)$ correspondientes y después se obtiene $X_{i,j}, E(s)$, el coeficiente de confiabilidad para cada imagen y finalmente se analiza cada píxel de cada imagen, si el píxel de una de las imágenes pertenece a la clase uno, se multiplica al coeficiente de confiabilidad obtenido por uno y si no por cero, de tal forma que los coeficientes de confiabilidad se vayan acumulando en determinada clase para que al final, el píxel respectivo pertenezca a la clase que tenga mayor acumulación del coeficiente de confiabilidad.



GLOSARIO



Spot 5^[2.16].



A

Algoritmo de búsqueda local (Local Search Algorithms – LSA). Este algoritmo está basado en la optimización paso a paso de la función de costo al explorar las vecindades de soluciones cercanas. El algoritmo de búsqueda local está relacionado con el algoritmo de recocido simulado.

Ancho de banda. Es la longitud del rango de frecuencias en el que se concentra la mayor parte de la potencia de la señal. Se mide en Hz.

Autocorrelación. Es la correlación cruzada de la señal consigo misma.

B

Banda espectral. Es una selección de longitudes de onda con comportamientos electromagnéticos similares.

C

Configuración. Es un conjunto específico de etiquetas.

Correlación. Es una medida de la similitud entre variables o funciones.

Covarianza. Representa la media del producto de las desviaciones de dos variables con relación a su media. La covarianza mide el grado en que dos variables aleatorias se mueven en la misma dirección o en direcciones opuestas la una respecto a la otra. Si las dos variables aleatorias se mueven en la misma dirección, su covarianza es positiva. En caso contrario, la covarianza es negativa.

D

Daub-4. Es una función wavelet cuyos filtros están formados por 4 coeficientes.

Dependencia espacial. Es la práctica de la teoría de las variables aleatorias caracterizadas por el conjunto de valores que puede tomar y por su posición en el espacio.

Dipolo. Red con dos bornes. Cuando no poseen ninguna fuente de energía se llaman pasivos, y en el caso contrario, activos.



Distorsión no lineal. En este tipo de distorsión, la señal de salida ya no es idéntica a la de entrada, lo que origina armónicos.

Distribución de probabilidad. Una distribución de probabilidad indica toda la gama de valores que pueden representarse como resultado de un experimento.

E

Espacio de configuraciones (Ω). Es cuando todos los sites tienen el mismo conjunto de etiquetas de L.

Espectro. Diagrama o gráfica de la intensidad de la luz como función de la frecuencia (o la longitud de onda).

Estocástico. (Del griego stokhastes = adivino) Esta palabra significa lo que está ligado al azar.

Eventos mutuamente excluyentes. Dos eventos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente, esto es, si y sólo si su intersección es vacía.

F

Ferromagnético. Es un fenómeno físico en el que se produce ordenamiento magnético en la misma dirección y sentido de todos los momentos magnéticos de una muestra.

Frecuencia espacial. Es el número de cambios que ocurren en el valor del pixel (o brillo) por unidad de distancia para alguna región particular de la imagen. Las frecuencias espaciales bajas están asociadas a texturas suaves en la imagen y las frecuencias espaciales altas están asociadas a las texturas gruesas.

G

Grafo. Un grafo es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto.



H

Heurístico. Es la capacidad de un sistema para realizar innovaciones positivas de forma inmediata para sus propósitos.

I

Imagen estereográfica. Es una imagen tridimensional.

Imagen no estacionaria. Es un sistema de texturas cuya orientación y frecuencia poseen propiedades no estacionarias, es decir, varían lentamente a lo largo de la imagen. Un ejemplo de una imagen no estacionaria es una huella digital.

Isotrópico. Es el material que posee las mismas propiedades físicas en todas las direcciones. También llamado isótropo.

L

Lattice. Para las imágenes digitales es la distribución geométrica de los sites. También se le conoce como malla o rejilla.

M

Mecánica Estadística. Disciplina científica que pretende predecir las propiedades macroscópicas de un sistema a partir de las propiedades moleculares.

Media. Es una medida de tendencia central. Se obtiene sumado todos los valores muestrales y dividiendo por el tamaño muestral.

Metaheurística. Es un método heurístico para resolver un tipo de problema computacional general, usando parámetros proporcionados por el usuario.

Muestreador. Es un mecanismo que entrega un tren de pulsos cuya amplitud corresponde a los valores de la señal analógica a muestrear en el instante que se produce el muestreo.



O

Optimización combinatoria. La optimización combinatoria tiene como objetivo encontrar un objeto matemático finito que maximice una función específica por el usuario de la metaheurística. Al objeto matemático se le llama estado, y al conjunto de todos los estados candidatos se le llama espacio de búsqueda.

Óptimo local. El óptimo local es aquel que resulta de comparar entre sí los valores de la función objetivo en un subconjunto de las soluciones factibles limitado a un entorno arbitrario de la solución.

Óptimo global. Si en la definición de óptimo local, la comparación se amplía a todos los elementos del conjunto factible S entonces se tiene el concepto de **óptimo global**.

P

Par estereoscópico. Son dos fotografías idénticas, pero con una ligera variante en el ángulo horizontal que corresponde a la distancia que hay entre el ojo izquierdo y derecho de una persona.

Píxel. Unidad mínima o elemental percibida en una imagen digital, sobre la que se registra la radiación procedente del área del campo instantáneo de vista.

Probabilidad condicional. Si A y B son dos eventos en S , la probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió el evento B es la probabilidad condicional de A dado B , y se denota $p(A|B)$. La probabilidad condicional por definición es:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, \text{ dado } P(B) > 0.$$

Probabilidad conjunta. Es la probabilidad de que se presenten dos o más eventos simultáneamente o en sucesión.

Procesamiento de imágenes. Es el conjunto de técnicas que se aplican a las imágenes digitales con el fin facilitar la búsqueda de información en la imagen ó de mejorar su calidad.

Proceso estocástico. Es un proceso aleatorio que evoluciona en función de otra variable, generalmente el tiempo.



R

Relaciones contextuales. Sirven para entender el significado de algunos textos.

Resolución. Expresa el número de píxeles que forman una imagen de mapa de bits. La calidad de una imagen, depende de la resolución del dispositivo que la capta.

S

Sesgo. Es una medida estadística que describe la simetría de la distribución alrededor de un promedio.

Site. Es un pixel de una imagen al cual se le asigna una etiqueta.

T

Teorema de la multiplicación para probabilidad condicional. Se define como: $p(A \cap E) = p(E)P(A|E)$, donde: $p(A \cap E)$ es la probabilidad de que ocurran A y E , $P(E)$ es la probabilidad de que ocurra E , $p(A|E)$ es la probabilidad de que ocurra el evento A dado que el evento E ya ocurrió.

Termodinámica estadística. Parte de la Mecánica Estadística que estudia los sistemas en equilibrio.

Texel (*texture element ó texture pixel*). Es la unidad mínima de una textura aplicada a una superficie usada en gráficos por computador.

Topología. Es la disposición física en la que se conectan los nodos de una red.

V

Varianza. Característica de una muestra o población que cuantifica su dispersión o variabilidad. Su raíz cuadrada positiva es la desviación estándar.



BIBLIOGRAFÍA



Satélite Earthsat [2.17].



CAPÍTULO 2. PROBABILIDAD Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

[2.1] Probabilidad y Estadística, Aplicaciones y Métodos

George C. Canavos

McGraw Hill/Interamericana de México, S.A. de C.V.

Traducción Edmundo Gerardo Urbina Medal

pp 29-36 53-67

[2.2] Teoría y problemas de probabilidad

Seymour Lipschutz.

Segunda edición

Mc-graw Hill, 2001, pp89-90

[2.3] Probabilidad y estadística

Louis Marsel

Sperry Rand Reserch Center

Fondo educativo interamericano, S.A.

pp. 183-189 y 238-239

[2.4] Probability and Probabilistic Reasoning for Electrical Engineering

Terrence L. Fine

Pearson Prentice Hall 2006.

Pp. 541

[2.5] Introducción a la teoría de probabilidades e interferencia estadística.

Harold J. Larson

Limusa 1995.

Pp 41-44

[2.6] Probabilidad y estadística. La ciencia de la incertidumbre.

Michael J. Evans, Jeffrey S. Rosenthal

Traducción al español por: Xavier Tomás Morer

Propiedad de Editorial Reverté, S.A.

Pp 227, 230

[2.7] Probabilidad estadística.

Morris H. Degroot

Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

Pp. 1-6 y 12-15.

[2.8] Teoría de Probabilidad.

Juan Obregón Sanin

Editorial Limusa

México, 1977

Pp. 263-290



Páginas electrónicas:

[2.9] Introducción a los métodos estadísticos, numéricos y probabilísticos.

Teodoro Rodríguez

<http://maristascoruna.wikispaces.com/file/view/Apuntes+Estadistica+P3.pdf>

[2.10] Procesos estocásticos.

<http://www.estadisticafacil.com/Main/ProcesosEstocasticos>

[2.11] Introducción a la Estadística y a la Teoría de Procesos Estocásticos en Comunicaciones.

Universidad de las Palmas de Gran Canaria

http://www.ulpgc.es/hege/almacen/download/11/11827/REPASO_DE_ESTADISTICA.pdf

[2.12] Procesos estocásticos.

Ignacio Cascos Fernández

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/leganes/ing_tec_teleco_todas/estadistica/doc_telem/archivos/resumen_procesos.pdf

[2.13] Andrey Kolmogorov.

http://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Kolmogorov

[2.14] Percepción remota

<http://www.teledet.com.uy/imagenes.htm>

[2.15] Ers

http://es.wikipedia.org/wiki/European_Remote_Sensing_Satellite

[2.16] Spot-5

<http://www.satimagingcorp.es/gallery-spot5-images.html>

[2.17] Satélite Envisat

http://icesat4.gsfc.nasa.gov/missions/images_missions/envisat_sat.jpg

[2.18] Ikonos

<http://www.ikonos.be/>



CAPÍTULO 3. ANÁLISIS TEXTURAL

Texturas.

[3.1] Análisis del Comportamiento de Descriptores de la Matriz de Co-ocurrencia en la Extracción de Características de Textura en Imágenes Digitales.

Alvaro Jiménez Jaramillo.

Facultad de Ingeniería y Arquitectura, Universidad Nacional de Colombia, 2002.
pp 2-46.

pci.unalmztl.edu.co/Tesis/alvarojimenez.pdf

[3.2] Clasificación de Imágenes utilizando Descriptores Estadísticos de Textura.
Paulo Ribeiro de Nascimento.

Universidad Federal de Paraná, Brasil.

pp. 2099-2103.

lagavulin.itid.inpe.br:1905/col/Itid.inpe.br/sbsr/2003/03.27.11.57/doc/15_185.PDF

[3.3] Computing Textural Features Based on Co-occurrence Matriz for Infrared Images.

Rozalija, Sapina.

pp. 373-376

Técnicas basadas en modelos.

[3.4] Aplicación de dimensión fractal al estudio de sistemas naturales

Carlos A. Cattaneo, Enrique M. Bionson, Ledda I. Larchera, Ana I. Ruggeria, Aníbal O. Gómez Khairallaha

Facultad de Agronomía y Agroindustrias, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina

www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/2861/2798

[3.5] Estado Actual de la Representación y Análisis de Textura en Imágenes

José Luís Gil Rodríguez

Julio 2008

Centro de Aplicaciones de Tecnologías de Avanzada

http://www.cenatav.co.cu/doc/RTecnicos/RT%20SerieAzul_004web.pdf

[3.6] Modelo Matemático del Proceso de Desertificación Empleando Variables Canónicas y Técnicas de Percepción Remota.

Nidiyare Hevia Montiel.

Facultad de Ingeniería. División de Estudios de Posgrado, UNAM, 2001.

pp. 63-71.



Matriz de Co-ocurrencia

[3.7] Rapid extraction of image texture by co-occurrence using a hybrid data structure

David A. Clausi y Yongping Zhao.

Department of Systems Design Engineering, University of Waterloo.

<http://www.elsevier.com/gej-ng/10/13/38/73/57/30/abstract.html>

[3.8] Digital Image Processing and Computer Vision.

Robert J. Schalkoff.

Department of Electrical and computer engineering, Clemsson University, 1989.

Ed. John Wiley & Sons, Inc.

pp 271-275.

[3.9] Digital Image Processing Using Matlab

Gonzalez, Woods and Eddins

Prentice Hall, 2004

Pp 242- 282

[3.10] Clasificación de Imágenes utilizando Descriptores Estadísticos de Textura. Paulo Ribeiro de Nascimento.

Universidad Federal de Paraná, Brasil.

pp. 2099-2103.

lagavulin.itid.inpe.br:1905/col/Itid.inpe.br/sbsr/2003/03.27.11.57/doc/15_185.PDF

CAPÍTULO 4. CAMPOS ALEATORIOS DE MARKOV.

Campos Aleatorios de Markov.

[4.1] Markov Random Field Modeling in Computer Vision

Stan Z. Li

Ed. Springer Verlag, Segunda edición, 2001,

Pp 7-23.

[4.2] Modelo Jerárquico Multitemperatura para segmentación Markoviana.

Tesis

López López Ludwin Ventura.

Facultad de Ingeniería 2007.



[4.3] 3D Bayesian Regularization of Diffusion Tensor MRI using Multivariate Gaussian Markov Random Fields

Martin Fernandez, Marcos, C.-F. Westin, C. Alberola-Lopez
Seventh International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'04),
Rennes - Saint Malo, France 2004
Laboratory of Mathematics in Imaging
Harvard Medical School
Boston, Massachusetts, USA
<http://lmi.bwh.harvard.edu/papers/pdfs/2004/martin-fernandezCOURSE04c.pdf>

Muestreadores de Gibbs y de Metrópolis

[4.4] Gibbs Sampling.

Alan E. Gelfand
Journal of the American Statistical Association , Vol. 95 No. 452 (Dec. 2000)
1300-1304
http://stat.smmu.edu.cn/STONE/jasa/43_Gibbs%20Sampling.pdf

[4.5] Métodos Computacionales en la Inferencia Bayesiana

Gutiérrez Peña, Eduardo.
IIMAS, UNAM
México, D.F. ,2003
<http://www.dpye.iimas.unam.mx/eduardo/MCB/node26.html>
<http://www.dpye.iimas.unam.mx/eduardo/MCB/node27.html>

[4.6] Cadenas de Markov

Acuña Fernández Edgar
Departamento de matemáticas. Universidad de Puerto rico
<http://math.uprm.edu/~edgar/markov.pdf>

[4.7] Métodos MCMC

Sansó, Bruno.
Departamento de Cómputo Científico y Estadística.
Universidad Simón Bolívar. Caracas, Venezuela.
www.cesma.usb.ve/~bruno/6323b/mcmc.ps

Recocido Simulado.

[4.8] Recocido simulado

Eduardo F. Morales
Ciencias computacionales instituto de geofísica. Óptica y electrónica INAOE
<http://ccc.inaoep.mx/~emorales/Cursos/Busqueda04/sa.pdf>



[4.9] Introduction to Annealing and Simulated Annealing
Elena Settanni Ackley
December, 2000
<http://esa.ackleyshack.com/thesis/esthesis7/node15.html>

Esquemas de decremento de temperatura

[4.10] Simulated Annealing. Decrementing the Temperature
Department of Engineering
University of Cambridge
<http://www-diva.eng.cam.ac.uk/energy/parksteaching/stochastic/5r1simulatedannealing.pdf>

[4.11] Annealing Schedule, Decrementing the Temperature
Computational Science and Engineering Program
<http://csep.hpcc.nectec.or.th/CSEP/MO/NODE31D.HTM>

Portada

[4.12] Andrey Markov
http://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Markov

CAPÍTULO 5. MODELO DE FUSIÓN.

[5.1] Pattern Recognition and Image Analysis
Earl Gose , Richard Johnsonbaugh , Steve Jost
Prentice-Hall, Inc, 1996
Pp. 99-102

[5.2] PhD Thesis
Multi-scale Markovian Modelisation in Computer Vision with Applications to SPOT Image Segmentation
Universidad de Nice, 1994.

[5.3] Multiscale Markov Random Field models for Parallel Image Classification.
Zoltan Kato. Marc Berthod and Josiane Zerubia.
INRIA 2004, France.

[5.4] A Hierarchical Markov Random Field Model and Multi-Temperature Annealing for Parallel Image Classification.
Zoltan Kato. Marc Berthod and Josiane Zerubia.
INRIA 1993, France.



[5.5] Modelo Jerárquico Multitemperatura para segmentación Markoviana.

Tesis

López López Ludwin Ventura.

Facultad de Ingeniería 2007.

[5.6] Apuntes de la clase Campos Aleatorios de Markov.

Dr. Miguel Moctezuma Flores.

Posgrado de Ingeniería, UNAM.

[5.7] Thomas Bayes.

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Thomas_Bayes.gif

CAPÍTULO 6 RESULTADOS

[6.1] Improving Satellite Image Analysis Quality by Data Fusion.

Shan YU.

INRIA Sophia-Antipolis.

2004 Route de Lucioles, B.P. 93.

06902 Sophia Antipolis, France.

[6.2] Análisis Bayesiano y fusión de datos para la clasificación de imágenes de percepción remota.

Rodríguez Cruz Marlene.

Tesis Facultad de Ingeniería, UNAM, 2004.

[6.3] Josiah Willard Gibbs

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Josiah_Willard_Gibbs_-from_MMS-.jpg