



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ALGORITMOS PARA OBTENER EL
PERFIL DE LA SUPERFICIE LIBRE Y LA
CARGA DE PRESIÓN EN EL FONDO
CURVO DE UN CIMACIO DE CRESTA
LIBRE

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Ingeniero Civil

PRESENTA:

RAYMOND ANTHONY VICTORY



DIRECTOR DE TESIS:

ÓSCAR VEGA ROLDÁN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivo	1
1.2. Antecedentes	2
1.2.1. Flujo en canales de fondo plano	2
1.2.2. Flujo en canales de fondo curvo	4
1.2.3. Flujo en cimacios de cresta libre	5
1.3. Comentarios	8
2. Perfil de un cimacio de cresta libre	9
2.1. Criterio general de diseño	10
2.1.1. Programación del método semigráfico	14
2.2. Criterio de diseño según el <i>US Bureau of Reclamation</i> , USBR	16
2.3. Criterio de diseño según la <i>Waterways Experiment Station</i> , WES	21
2.4. Comentarios	22
3. Conceptos básicos	25
3.1. Definición de variables	25
3.2. Características del flujo	29
3.2.1. Irrotacionalidad	29
3.2.2. Ecuación de continuidad	30
3.2.3. Ecuación del movimiento transversal	32

3.3. Ecuación de la lámina vertiente	33
4. Régimen crítico	35
4.1. Condición crítica	37
4.2. Localización del tirante crítico	39
4.3. Tirante crítico en canales de fondo curvo	39
4.4. Comentarios	40
5. Perfil de la superficie libre del agua	41
5.1. Superficie libre del agua sobre un cimacio	43
5.2. Comentarios	44
6. Carga de presión	46
6.1. Condiciones de operación de un cimacio	48
6.2. Ecuación para la carga de presión	51
6.3. Comentarios	52
7. Algoritmos	53
7.1. Perfil del cimacio	53
7.2. Régimen crítico	57
7.2.1. Localización del tirante crítico	57
7.2.2. Valor del tirante crítico	59
7.3. Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión sobre el cimacio	61
7.3.1. Intervalo de $x_c \leq x \leq x_P$	62
7.3.2. Intervalo de $x_P \leq x \leq 0$	63
7.3.3. Intervalo de $0 \leq x \leq x_T$	64
7.4. Perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión	65
7.5. Comentarios	68

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
8. Ejemplo de aplicación	70
8.1. Planteamiento del problema	70
8.2. Solución del problema	71
8.2.1. Perfil del cimacio	74
8.2.2. Régimen crítico	78
8.2.3. Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión sobre el cimacio	84
8.2.4. Perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión	86
8.3. Comentarios	94
9. Conclusiones	98
A. Simbología	101
B. Programa en Matlab <i>SupPresCIM</i>	104
B.1. SupPresCIM	105
C. Bibliografía	109

Índice de figuras

1.1. Distribución de la presión en un canal de fondo plano.	3
1.2. Distribución de la presión en fondo convexo	4
1.3. Distribución de la presión en fondo cóncavo	4
1.4. Vertedor de pared delgada	6
2.1. Descarga por encima de una pared gruesa.	10
2.2. Ejes coordenadas	11
2.3. Método semigráfico	13
2.4. Valor de k para el diseño del perfil de un cimacio	17
2.5. Valor de n para el diseño del perfil de un cimacio	17
2.6. Valores de $\frac{x_c}{H_0}$, $\frac{y_c}{H_0}$, $\frac{R_1}{H_0}$ y $\frac{R_2}{H_0}$ para el diseño del perfil de un cimacio, para el criterio tipo USBR	18
2.7. Vertido libre sobre un cimacio tipo WES	21
2.8. Perfil completo de un cimacio con las ecuaciones que lo describen	24
3.1. Principales variables de un fondo curvo	26
4.1. Curva de energía específica y régimen del agua	36
4.2. Posición del tirante crítico sobre el perfil de un cimacio	40
5.1. Superficie libre del agua sobre un cimacio	42
5.2. Superficie libre del agua sobre un cimacio, criterio WES	43

5.3. Definición de las coordenadas de la superficie libre del agua	44
6.1. Distribución de la presión sobre las paredes del cimacio	47
6.2. Presión sobre un cimacio de cresta libre, criterio WES	47
6.3. Características del flujo y la presión para una carga total de operación de $1,00H_0$	48
6.4. Características del flujo y la presión para una carga total de operación de $0,50H_0$	49
6.5. Características del flujo y la presión para una carga total de operación de $1,33H_0$	50
7.1. Diagrama de flujo del perfil de un cimacio	56
7.2. Diagrama de flujo para localizar y obtener el tirante crítico	60
7.3. Solución de la ecuación 6.7	66
7.4. Diagrama de flujo para obtener el perfil de la superficie libre del agua y la carga de presión	67
7.5. Diagrama de flujo completo	69
8.1. Vertido libre sobre un vertedor de pared delgada	71
8.2. Perfiles de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para $H = 1,00H_0$	95
8.3. Perfiles de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para $H = 0,50H_0$	96
8.4. Perfiles de la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión sobre el cimacio para $H = 1,33H_0$	97
B.1. Pasos para el programa SupPresCIM	106
B.2. Pantalla de bienvenida y introducción de datos	107
B.3. Pantalla de resultado del programa SupPresCIM	108

Índice de cuadros

1.1. Comparación de las características hidráulicas entre canales de pequeña y gran curvatura	8
2.1. Ajuste de los valores de k y n para el diseño del perfil de un cimacio, con paramento vertical, criterio USBR	19
2.2. Ajuste de los valores de las variables R_1 , R_2 , x_c y y_c para el diseño del perfil de un cimacio con paramento vertical, criterio USBR	20
7.1. Valores aproximados de la posición del régimen crítico para tres condiciones de operación sobre un cimacio	69
8.1. Cálculos preliminares para la solución del problema	72
8.2. Coordenadas del perfil medido del cimacio	73
8.3. Coordenadas del perfil medido del cimacio aguas abajo de la cresta	74
8.4. Localización de la sección crítica para la carga de diseño; $H_0 = 0,1550m$	83
8.5. Localización de la sección crítica para la carga de operación; $H_1 = 0,0755m$	83
8.6. Localización de la sección crítica para la carga de operación; $H_2 = 0,2159m$	83
8.7. Resumen de resultados del régimen crítico	84
8.8. Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión para la carga total de diseño H_0	88

8.9. Cálculo del perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para la carga total de diseño H_0 . .	89
8.10. Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión para la carga total de operación H_1	90
8.11. Cálculo del perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para la carga total de operación H_1	91
8.12. Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión para la carga total de operación H_2	92
8.13. Cálculo del perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para la carga total de operación H_2	93

CAPÍTULO 1

Introducción

Sección 1.1

Objetivo

El perfil del agua y la presión sobre un cimacio de cresta libre han sido estudiados exhaustivamente por varios autores, por lo que hay una excelente base de datos de las características y del comportamiento esperado del agua sobre un cimacio de cresta libre. No obstante conviene también contar con procedimientos matemáticos basadas en desarrollos teóricas para llegar a los resultados necesarios, ya que la mayoría de los procedimientos son basados en métodos empíricos para la obtención de una respuesta.

Recientemente el Dr Gilberto Sotelo Ávila (en el año 2000) obtuvo un modelo matemático para obtener la superficie libre del agua y la carga de presión en flujos a superficie libre en fondos curvos, pero dicho modelo es muy largo y complicado para resolverlo, y se requiere un nivel avanzado de conocimientos en el tema. En dicho trabajo se presentaron las ecuaciones generales para cualquier sección de canal y fondo de pequeño o gran curvatura.

El presente trabajo, resuelve el modelo matemático y presenta algoritmos que facilitan obtener la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión en cimacios de cresta libre, así como un programa de cómputo que lo resuelve. También se presentan los criterios de diseños más utilizados para obtener el perfil de los mismos.

Sección 1.2

Antecedentes

Un canal es una conducción, con superficie libre expuesta a la presión atmosférica. El flujo en un canal está primordialmente afectado por la fuerza de gravedad, a la cual se debe.

De acuerdo con su origen, los canales pueden ser naturales o artificiales. Los naturales son conducciones hidráulicas que existen para el drenaje natural sobre la tierra, como arroyos, ríos, estuarios, etc. Los artificiales son los construidos por el hombre para conducir el agua con fines de riego, drenaje, generación de energía, navegación, etc. Los canales artificiales tienen, por lo general, secciones geométricas de forma y dimensiones constantes en tramos más o menos largos.

En el caso de canales con tramos con curvas verticales, la presión que actúa en el fondo puede ser una causa de inestabilidad en donde las paredes y el fondo del mismo pueden ser incapaz de soportar las acciones dinámicas de las partículas del agua; por lo que es necesario diseñar los tramos del canal considerando el tipo y grado de curvatura de los mismos.

1.2.1. Flujo en canales de fondo plano

En el análisis de canales se usan modelos convencionales, para canales con un flujo rectilíneo o pequeña curvatura se consideran varias hipótesis, como son:

- Líneas de corriente de escasa o nula curvatura (paralelas a un fondo plano)

- Distribución hidrostática de la presión en la sección ortogonal al fondo
- Velocidad con una sola componente paralela al fondo.

Igualmente se usan conceptos de energía específica, régimen crítico y pérdida por fricción, basados en la consideración de un flujo rectilíneo unidimensional.

La carga de presión en cualquier punto de la sección transversal de un flujo en un canal de pendiente pequeña, por ejemplo menor de diez grados, puede medirse por medio de la altura de la columna de agua, $\frac{p}{g\rho}$, con un piezómetro, figura 1.1.

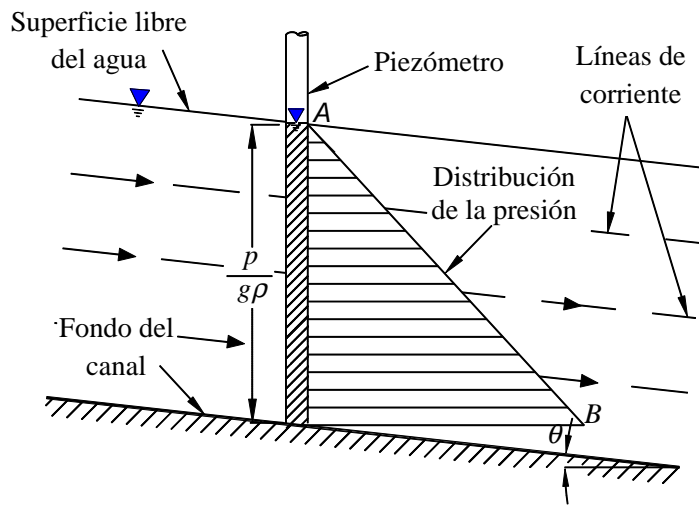


Figura 1.1: Distribución de la presión en un canal de fondo plano.

Al no considerar las pequeñas perturbaciones debidas a la turbulencia, es claro que el nivel del agua en el piezómetro debe subir desde el punto de medición hasta la superficie libre del agua. Por lo tanto, la carga de presión en cualquier punto de la sección es directamente proporcional a su profundidad por debajo de la superficie libre e igual a la distribución hidrostática correspondiente a esa profundidad; es decir, la distribución es lineal y puede representarse mediante la línea recta AB , figura 1.1, también conocida como *ley hidrostática de distribución de presiones*.

1.2.2. Flujo en canales de fondo curvo

El fondo curvo puede ser categorizado como fondo cóncavo o convexo, figuras 1.2 y 1.3. El flujo sobre un canal de fondo curvo es diferente, ya que la curvatura de las líneas de corriente es de consideración y se produce una componente importante de la aceleración normal a la dirección del flujo.

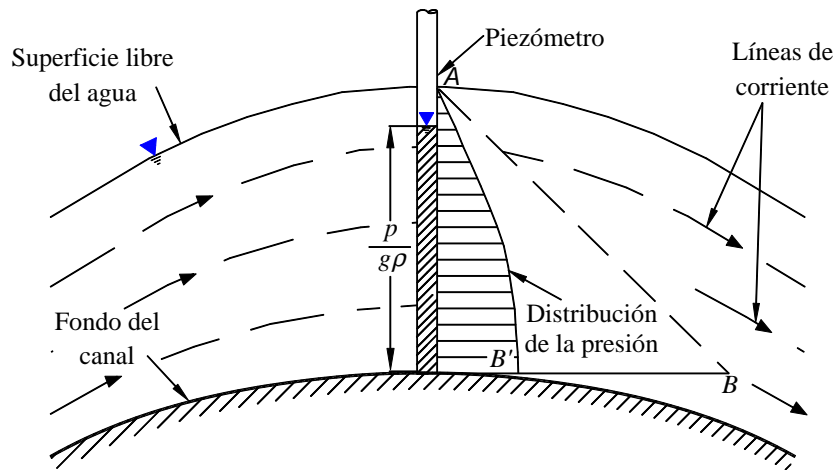


Figura 1.2: Distribución de la presión en fondo convexo

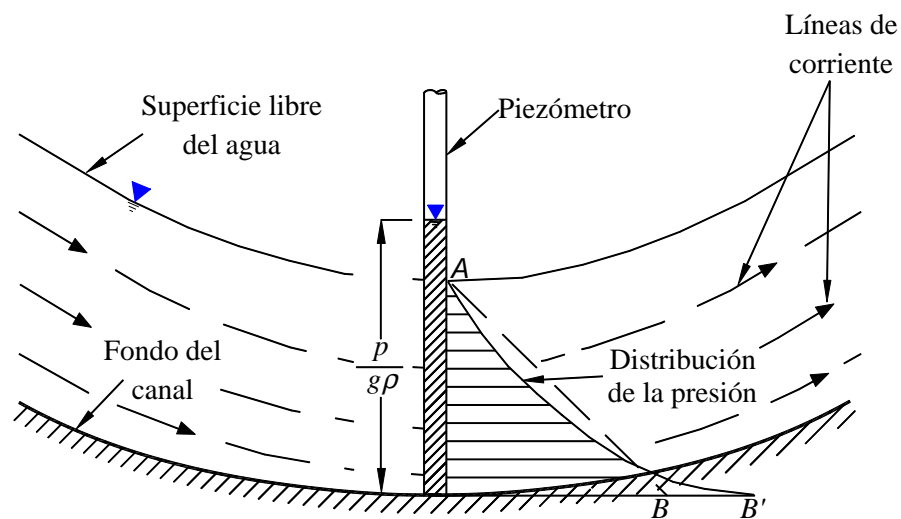


Figura 1.3: Distribución de la presión en fondo cóncavo

Las figuras 1.2 y 1.3 muestran la distribución de la presión a lo largo de una curva cóncava y convexa, en ambos casos, la distribución de la presión está representada por la línea AB' , en lugar de la recta AB del flujo rectilíneo en donde la fuerza centrífuga actúa hacia el exterior del centro de curvatura en ambos casos. La interpretación de esa línea de la distribución de la presión depende del tipo de curva a tratar, en efecto, para el caso de un flujo sobre un fondo convexo; la fuerza centrífuga está en contra de la fuerza gravitacional, mientras que para el flujo en un fondo cóncavo tiene la fuerza centrífuga y la fuerza gravitacional en la misma dirección, es decir la curvatura convexa presenta una carga de presión menor, y lo contrario sucede con la curvatura cóncava. El piezómetro de las dos curvas, muestra esa diferencia de la carga de presión, en donde la curva de fondo convexo tiene el nivel del agua por debajo de la superficie libre y la curva cóncava la tiene por encima de ella.

1.2.3. Flujo en cimacios de cresta libre

Cuando la descarga del líquido se efectúa por encima de un muro o una placa y a superficie libre, la estructura hidráulica en la que ocurre se llama vertedor; éste puede presentar diferentes formas según las finalidades a que se destine. El vertedor cuyo perfil se diseña de modo que coincida con la forma del perfil inferior de la lámina vertiente sobre una pared delgada hipotética, se llama cimacio.

El cimacio tiene una enorme ventaja de que se puede utilizar para regular y gobernar las descargas de un vaso ya que, el cimacio se construye a una altura anteriormente establecida, para así lograr que el exceso de agua pase por encima del cimacio. Es decir, un cimacio de *control* limita o evita las descargas cuando el nivel en el vaso llega a niveles mayores a los considerados en su diseño. Un cimacio de cresta libre es aquel que no tiene ningún obstáculo sobre él. Para el cálculo hidráulico de un cimacio usualmente se revisan tres condiciones de flujo, figura 1.4:

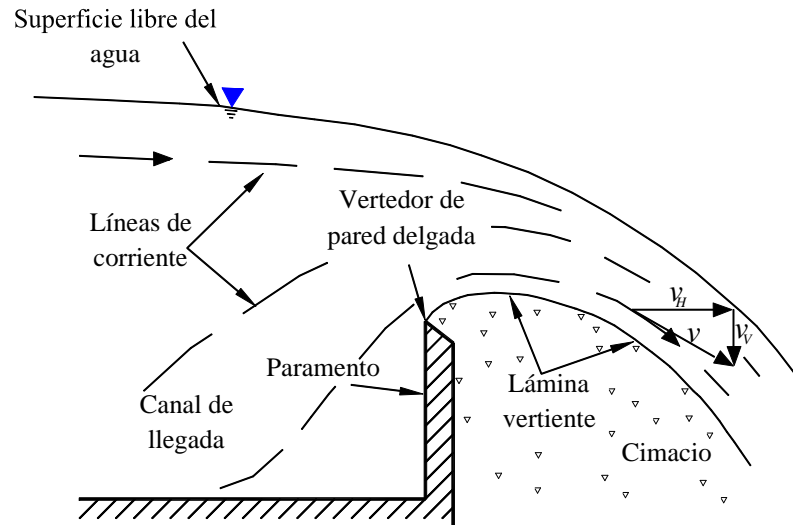


Figura 1.4: Vertedor de pared delgada

1. Flujo en régimen subcrítico en el canal de llegada antes de la cresta
2. Flujo en régimen crítico cuando el agua pasa por encima de la cresta
3. Flujo en régimen supercrítico en la rápida después de la cresta.

Para optimizar el diseño de un cimacio se debe considerar lo siguiente:

- Suficiente longitud de cresta para obtener el gasto de diseño
- Presiones aceptables y mínimas actuando sobre el perfil del cimacio
- Máxima carga de energía aceptable sobre la cresta del cimacio
- Velocidades y características del flujo aceptables en condiciones de operación.

La forma del cimacio es única, y depende del gasto de diseño Q_0 de la carga total de diseño H_0 y de la inclinación del paramento (que influye en la velocidad de llegada).

El gasto de diseño se ve afectado por el coeficiente de descarga de diseño C_0 y la longitud efectiva de cresta L_e . El coeficiente de descarga es básicamente experimental por lo que su valor se obtiene de gráficas que dependen principalmente de la carga total de diseño y de la profundidad del canal de llegada. Por otro lado, la longitud

efectiva de cresta es la longitud real o neta de la cresta vertedora reducida por efecto de las contracciones que experimenta un flujo, debidas a la presencia de estribos y pilas sobre el cimacio. La ecuación de el gasto de diseño es:

$$Q_0 = C_0 L_e H_0^{\frac{3}{2}} \quad (1.1)$$

El gasto de diseño o carga de diseño es el caudal de diseño o la altura del agua sobre la cresta del cimacio respectivamente, al que se desea que el cimacio opere con mayor frecuencia.

El flujo sobre el cimacio involucra líneas de corriente con una curvatura apreciable cuyo centro de curvatura variable queda por debajo del flujo (curvatura convexa); la componente de la gravedad del flujo, queda reducida por la fuerza centrífuga. Si la curvatura es suficientemente grande, la presión interna puede ser menor que la presión atmosférica, y llegar a tener valores de presión de vaporización para estructuras grandes, luego puede presentarse el fenómeno de cavitación con el daño correspondiente. Ese fenómeno causa el desprendimiento de partes del cimacio, justo por esa razón se debe cuidar en el diseño, y así lograr bajar la probabilidad de que ocurra o evitarlo completamente.

Si la curvatura de las líneas de corriente es apreciable, el flujo es conocido teóricamente como flujo curvilíneo. En un cimacio se toman las consideraciones para un flujo curvilíneo convexo, figura 1.2. Es decir, el efecto de la curvatura produce componentes de aceleración apreciables o fuerzas centrífugas perpendiculares a la dirección del flujo, por consiguiente, la distribución de presiones en el fondo de la sección transversal es distinta de la hidrostática. En la figura 1.2 la distribución de presiones es no lineal, representada por AB' en lugar de la distribución recta AB , que ocurriría si el flujo fuera rectilíneo. En el flujo sobre la espalda de un cimacio las fuerzas centrífugas actúan hacia arriba en contra de la acción de la gravedad; en consecuencia, la presión

resultante es menor que la presión hidrostática de un flujo rectilíneo.

Sección 1.3

Comentarios

El flujo en un fondo curvo como se mencionó, tiene ciertas particularidades diferentes a las de un flujo de fondo plano. El efecto de la curvatura aumenta o disminuye el componente de aceleración de un fondo cóncavo o convexo respectivamente. En resumen se pueden identificar las características siguientes:

Característica	Tipo de fondo		
	Horizontal o pequeña curvatura	Gran Curvatura	
		Cóncavo	Convexo
Líneas de corrientes	Horizontales	Cóncavas	Convexas
Componentes de la velocidad	Horizontales v_H	Horizontal v_H y vertical v_V	Horizontal v_H y vertical v_V
Presión	Atmosférica $P = 0$	Mayor a la atmosférica $P > 0$	Menor a la atmosférica $P < 0$
Fuerza Centrífuga	No hay	Mismo sentido a la fuerza gravitacional	Sentido contrario a la fuerza gravitacional
Distribución de presión	Lineal	No lineal	No lineal
Efecto de la presión centrífuga sobre el fondo	Ninguna	Compresión	Tensión

Cuadro 1.1: Comparación de las características hidráulicas entre canales de pequeña y gran curvatura

CAPÍTULO 2

Perfil de un cimacio de cresta libre

La necesidad de controlar el agua ha sido un reto que los ingenieros han enfrentado hace mucho tiempo. El ingeniero que diseña un cimacio de cresta libre utiliza la experiencia de ingenieros que publicaron la información experimental sobre la capacidad de descarga, la longitud efectiva de cresta, el perfil del cimacio, el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de la presión sobre el cimacio que obtuvieron de modelos y prototipos construidos.

De la experiencia se ha observado que cuando se efectúa una descarga por encima de una pared gruesa a superficie libre, éste puede desarrollar zonas de presión distinta a la atmosférica, figura 2.1, es decir, al principio el contacto inicial del agua con la pared gruesa tiende a separarse y se produce una zona de baja presión, después cambia a una zona de presión positiva que provoca la erosión por el contacto y por la energía dinámica de las partículas que intentan desgastar la arista final de la pared gruesa. Es indiscutible que la forma que resulta, es la trayectoria natural que impone el agua cuando de forma frecuente el agua choca con la pared gruesa, figura 2.1.

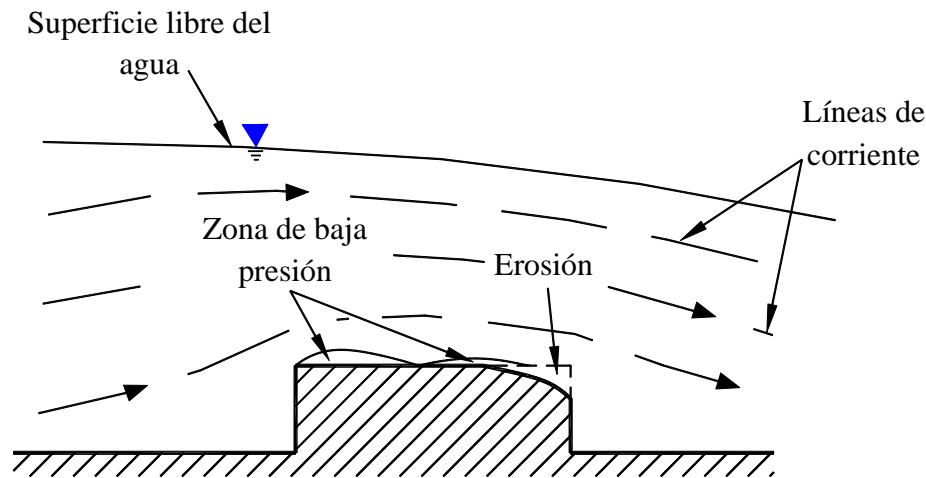


Figura 2.1: Descarga por encima de una pared gruesa.

Sección 2.1

Criterio general de diseño

Este tipo de vertedores a los cuales se les ha dado el nombre de *cimacios*, donde la forma más eficiente y óptima en que funcionan, es la que se aproxima a la de la superficie inferior de la lámina que se produce por un vertedor en pared delgada como la mostrada en la figura 1.4. La forma de esta sección depende de la carga y de la inclinación del paramento, los criterios más utilizados para este tipo de cimacios son; el de *US Bureau of Reclamation* en adelante en el texto USBR y el de *Waterways Experiment Station* en adelante en el texto WES.

Para ambos criterios el perfil de un cimacio se diseña en dos secciones limitadas por la cresta vertedora; aguas arriba y aguas abajo de la cresta. El diseño del perfil del cimacio considera los ejes coordenados x y y sobre la cresta, como se muestra en la figura 2.2.

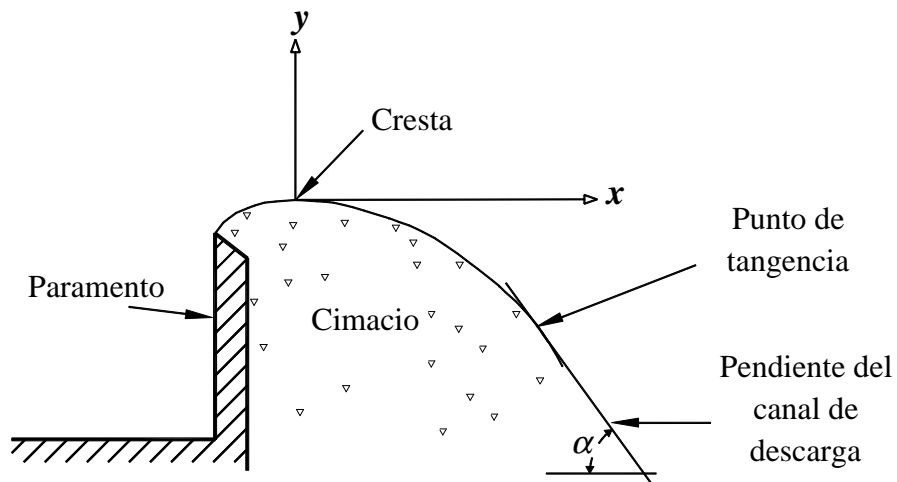


Figura 2.2: Ejes coordenadas

El perfil aguas abajo de la cresta del cimacio se obtiene mediante la ecuación 2.1 que describe el perfil del agua de acuerdo con la experimentación

$$y = -kH_0 \left(\frac{x}{H_0} \right)^n \quad (2.1)$$

donde:

k y n constantes cuyos valores dependen del criterio a emplear, y son adimensionales y se obtuvieron como se explica en los subcapítulos 3.2 y 3.3

x y y coordenadas del perfil de acuerdo con el sistema de ejes mostrada en la figura 2.2, en m.

El perfil aguas abajo de la cresta inicia desde el origen de los ejes coordenados hasta un punto donde se une con el canal de descarga con pendiente constante, el punto donde el perfil abandona la curva del cimacio y adquiere una pendiente constante es un punto de tangencia. El punto único donde la pendiente dada del canal es tangente a la curvatura del perfil de un cimacio es el punto de tangencia y su ubicación depende de las condiciones aguas abajo de la cresta. También, ese punto surge de la necesidad de terminar la parte curva aguas abajo de la cresta para unirla con una pendiente que

así lo requiera el diseño. Obviamente el ángulo de inclinación α de esa línea respecto de un plano horizontal afecta la ubicación del punto de tangencia;

Por lo tanto, el rango de x para la ecuación aguas abajo de la cresta es:

$$0 \leq x \leq x_T$$

donde x_T , es la coordenada sobre el eje x del punto de tangencia y se obtiene derivando e igualando las pendientes lo que da:

$$x_T = \frac{H_0}{\left[k \left(\frac{1}{\tan \alpha} \right) n \right]^{\frac{1}{n-1}}} \quad (2.2)$$

y y_T se obtiene al sustituir el valor de x_T en la ecuación 2.1 que describe el perfil del cimacio.

Método semigráfico

El perfil del cimacio aguas arriba de la cresta según la práctica usual, se puede obtener mediante un método semigráfico que se describe a continuación. El método consiste en dos curvas tangentes entre si y tangentes a la cresta del cimacio (origen de los ejes) figura 2.2. El procedimiento para poder obtener el perfil del cimacio aguas arriba de la cresta es:

Trazos preliminares

1. Localizar el centro de la curvatura A del primer círculo $A(0, -R_1)$
2. Trazar un arco A_1 de radio $R = R_1 - R_2$ con centro en A
3. Localizar el punto C de coordenadas $C(x_c, y_c)$
4. Trazar un arco A_2 de radio R_2 con centro en C
5. Identificar el punto B en la intersección de los arcos A_1 y A_2 , el cual se ubica dentro del triángulo OCA

6. Trazar la línea AB del punto A hasta B extendiéndola hasta el eje x

Trazos Definitivos

7. Trazar un arco A_3 de radio R_1 con centro en A , desde el origen O hasta la línea AB
8. Trazar un arco A_4 de radio R_2 con centro en B desde C hasta la línea AB

El punto P es el punto tangente de las dos curvas A_3 y A_4 por donde pasa la línea AB .

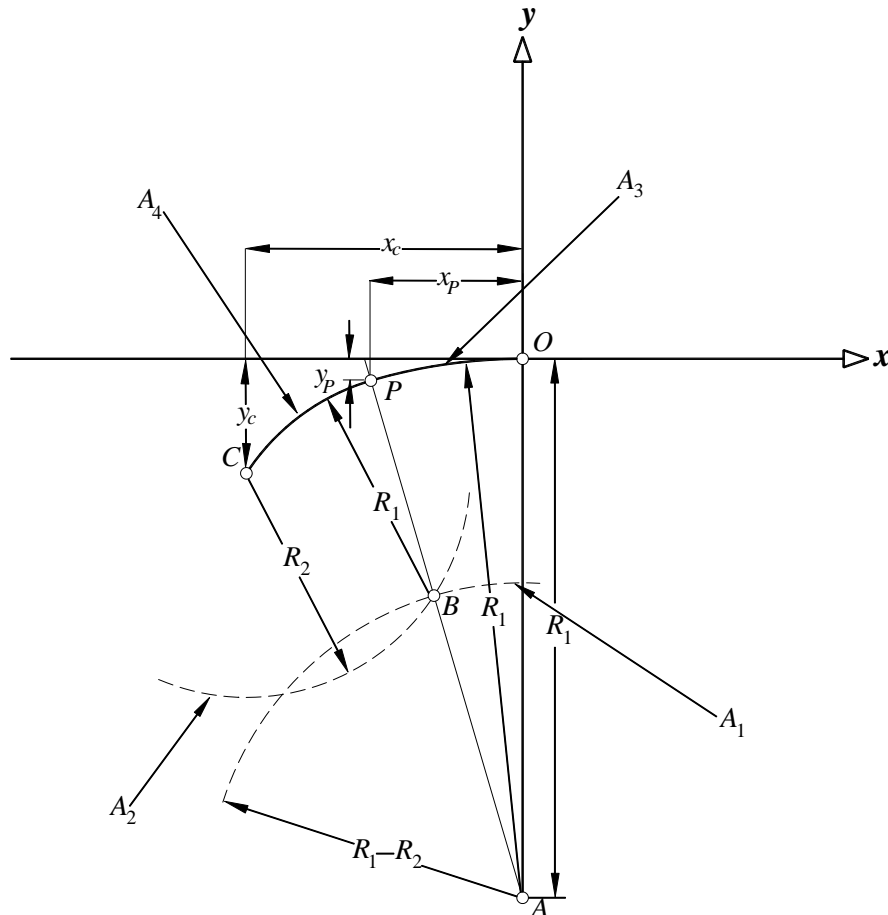


Figura 2.3: Método semigráfico

Las variables R_1 , R_2 , x_c y y_c del método semigráfico dependen del criterio de diseño a emplear, y serán explicados en los subcapítulos 3,2 y 3,3

2.1.1. Programación del método semigráfico

Evidentemente la ventaja de poder sistematizar al método semigráfico es amplia; ya que al lograr su sistematización el tiempo para obtener el perfil buscado es menor. Es decir, se encontraron las ecuaciones debidas para el trazo del método semigráfico. Se aplicaron conocimientos de *Algebra elemental, Geometría Analítica y Plana* se obtuvieron las ecuaciones debidas de las líneas y círculos correspondientes y se resolvieron sistemas de ecuaciones para obtener los puntos de intersección.

La ecuación 2.3 es la ecuación general de un circunferencia con centro en h y k y x y y son coordenadas que describen la circunferencia y r es el radio del círculo.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (2.3)$$

Los trazos definitivos del perfil buscado son dos arcos de círculo por lo que ambos círculos tendría la forma de la ecuación 2.3 pero, al no ser círculos completos, el rango de x que describe el trazo está limitado.

El primer trazo definitivo tiene centro C de coordenadas $(0, -R_1)$, con un radio r de magnitud R_1 , sustituyendo en la ecuación 2.3 y de acuerdo con los ejes coordenados mostrados en la figura 2.2, se obtiene:

$$(x - 0)^2 + (y - (-R_1))^2 = R_1^2 \quad (2.4)$$

De forma similar para la ecuación del segundo trazo definitivo se tiene el segundo arco de circunferencia con centro en C de coordendos (x_B, y_B) , con un radio r de magnitud R_2 y con el mismo sistema de ejes coordenados se tiene la siguiente ecuación.

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = R_2^2 \quad (2.5)$$

Los trazos auxiliares se obtienen mediante la solución del sistema de ecuaciones siguientes:

El punto B corresponde a una de las intersecciones de los círculos A_1 y A_2 cuyas ecuaciones son:

$$A_1 = (x - 0)^2 + (y - (-R_1))^2 = (R_1 - R_2)^2 \quad (2.6)$$

$$A_2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R_2^2 \quad (2.7)$$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones, resultan dos soluciones para el punto $B(x_B, y_B)$ y la correcta es el punto que se encuentra comprendido dentro del triángulo OCA de la figura 2.3, la otra solución no es de interés en el trazo.

La línea AB debe pasar por los puntos A y B y está limitado por los ejes x y y y está dada por:

$$AB = \frac{y - (-R_1)}{x - 0} = \frac{y_B - (-R_1)}{x_B - 0} \quad (2.8)$$

Esta línea corresponde a la frontera entre los trazos definitivos de los arcos A_3 y A_4 . El punto P corresponde al cruce de la línea AB , con el arco A_3 ; es indispensable resolver el sistema de ecuaciones para obtener las coordenadas del punto $P(x_P, y_P)$

A continuación se muestra un resumen de las ecuaciones de los trazos definitivos con sus respectivos rangos:

Curva A_3

$$y = \sqrt{R_1^2 - x^2} - R_1 \quad (2.9)$$

donde

$$x_P \leq x \leq 0$$

Curva A_4

$$y = y_B + \sqrt{-x^2 + 2x x_B - x_B^2 + R_2^2} \quad (2.10)$$

donde

$$x_c \leq x \leq x_P$$

Sección 2.2

Criterio de diseño según el *US Bureau of Reclamation, USBR*

El cuerpo de ingenieros del USBR realizó una serie de investigaciones sobre los cimacios y después de un análisis basado en una gran recopilación de datos y resultados de campo, presentaron los resultados en gráficas adimensionales para obtener las variables necesarias para el diseño de cimacios de manera general, dependen de la carga de velocidad h_a , de la carga de diseño H_0 y de la inclinación α del paramento aguas arriba de la cresta.

Los valores de k y n para obtener las ecuaciones del perfil aguas abajo de la cresta del cimacio, se obtienen de las figuras 2.4 y 2.5 respectivamente y el valor de las variables involucradas en el trazo aguas arribas, el método semigráfico; se obtiene de la figura 2.6.

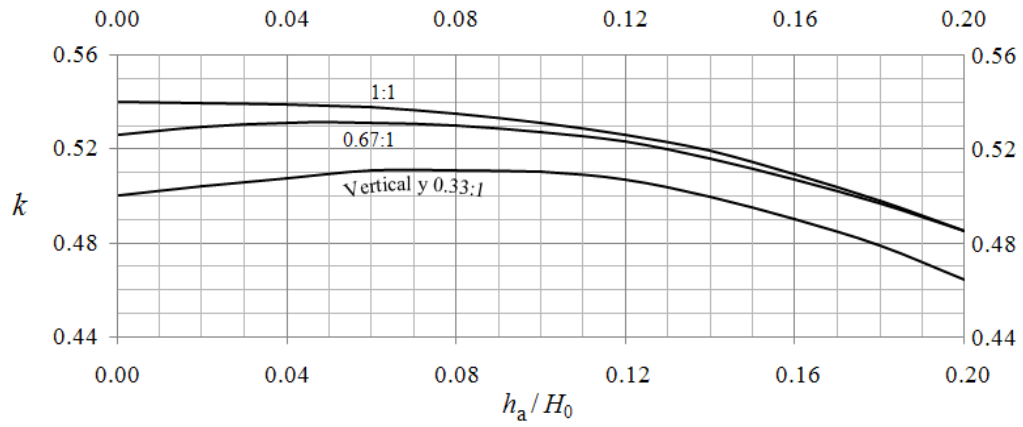


Figura 2.4: Valor de k para el diseño del perfil de un cimacio

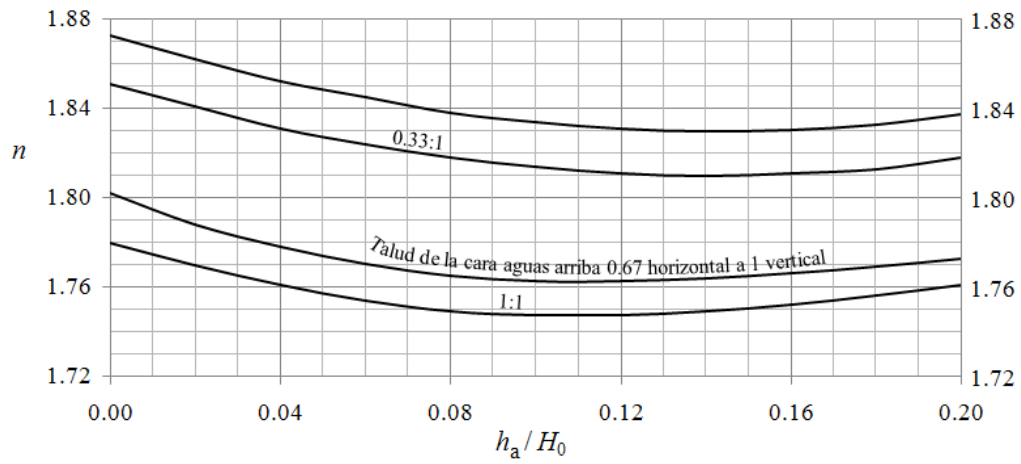


Figura 2.5: Valor de n para el diseño del perfil de un cimacio

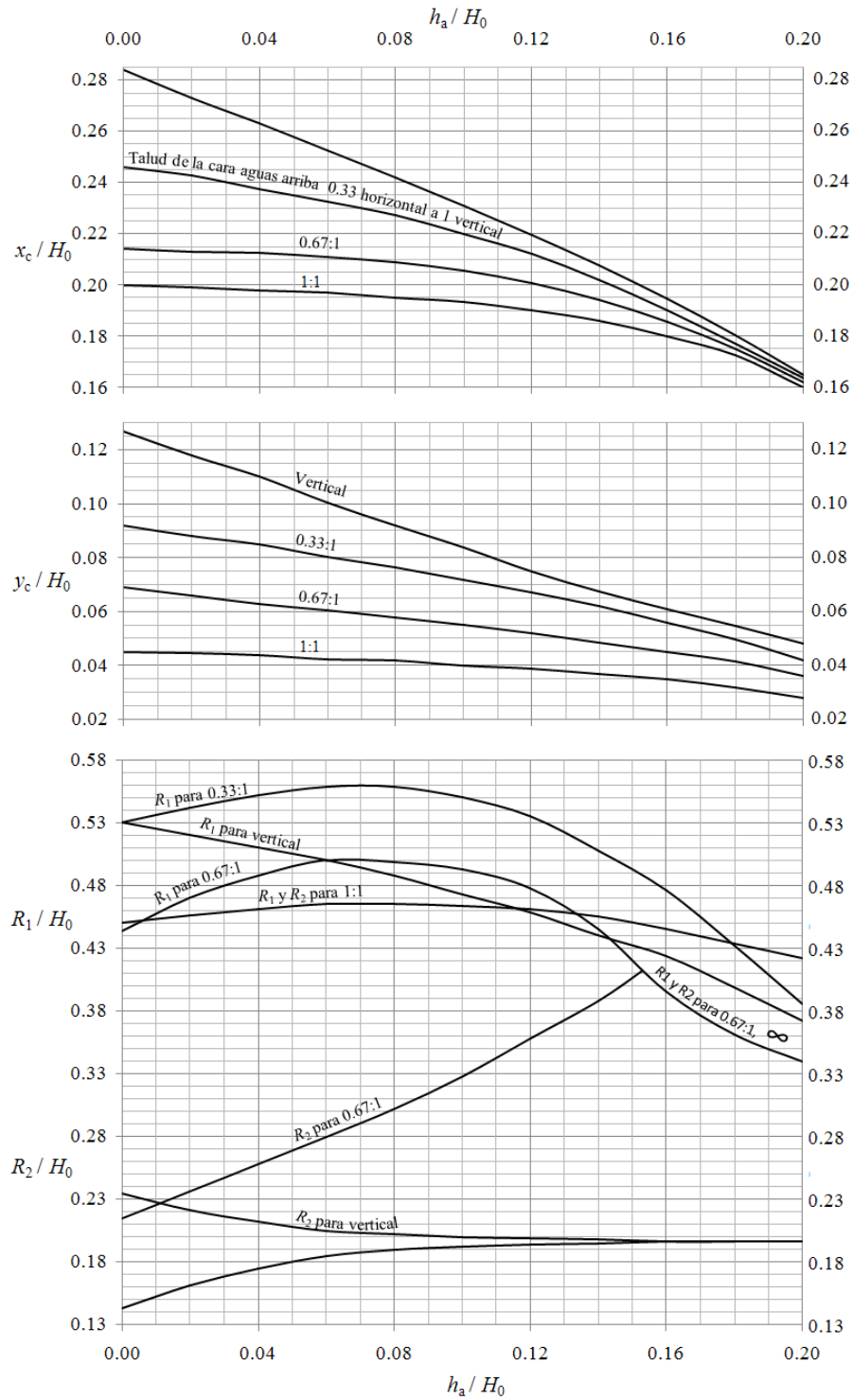


Figura 2.6: Valores de $\frac{x_c}{H_0}$, $\frac{y_c}{H_0}$, $\frac{R_1}{H_0}$ y $\frac{R_2}{H_0}$ para el diseño del perfil de un cimacio, para el criterio tipo USBR

Es conveniente reproducir las figuras 2.4, 2.5 y 2.6 en donde el valor de las variables se puedan obtener rápidamente. Se muestran las figuras 2.4, 2.5 y 2.6 y mediante tramos de ecuaciones de líneas que las reproducen en los cuadros 2.1 y 2.2.

$\frac{h_a}{H_o}$	Variable	
	k	n
0	$k = 0,5$	$n = 1,873$
$0,00 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,01$	$k = 0,1 \frac{h_a}{H_o} + 0,500$	$n = -0,6 \frac{h_a}{H_o} + 1,873$
$0,01 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,02$	$k = 0,3 \frac{h_a}{H_o} + 0,498$	$n = -0,7 \frac{h_a}{H_o} + 1,874$
$0,02 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,03$	$k = 0,3 \frac{h_a}{H_o} + 0,498$	$n = -0,3 \frac{h_a}{H_o} + 1,866$
$0,03 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,04$	$k = 0,2 \frac{h_a}{H_o} + 0,501$	$n = -0,5 \frac{h_a}{H_o} + 1,872$
$0,04 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,05$	$k = 0,1 \frac{h_a}{H_o} + 0,505$	$n = -0,4 \frac{h_a}{H_o} + 1,868$
$0,05 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,06$	$k = 0,1 \frac{h_a}{H_o} + 0,505$	$n = -0,3 \frac{h_a}{H_o} + 1,869$
$0,06 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,07$	$k = 0,2 \frac{h_a}{H_o} + 0,499$	$n = -0,4 \frac{h_a}{H_o} + 1,869$
$0,07 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,08$	$k = -0,1 \frac{h_a}{H_o} + 0,520$	$n = -0,2 \frac{h_a}{H_o} + 1,855$
$0,08 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,09$	$k = -0,1 \frac{h_a}{H_o} + 0,520$	$n = -0,2 \frac{h_a}{H_o} + 1,855$
$0,09 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,10$	$k = -0,1 \frac{h_a}{H_o} + 0,520$	$n = -0,2 \frac{h_a}{H_o} + 1,855$
$0,10 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,11$	$k = -0,1 \frac{h_a}{H_o} + 0,520$	$n = -0,3 \frac{h_a}{H_o} + 1,865$
$0,11 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,12$	$k = -0,2 \frac{h_a}{H_o} + 0,531$	$n = -0,1 \frac{h_a}{H_o} + 1,843$
$0,12 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,13$	$k = -0,4 \frac{h_a}{H_o} + 0,555$	$n = -0,1 \frac{h_a}{H_o} + 1,843$
$0,13 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,14$	$k = -0,3 \frac{h_a}{H_o} + 0,542$	$n = 0,2 \frac{h_a}{H_o} + 1,804$
$0,14 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,15$	$k = -0,5 \frac{h_a}{H_o} + 0,570$	$n = -0,1 \frac{h_a}{H_o} + 1,846$
$0,15 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,16$	$k = -0,5 \frac{h_a}{H_o} + 0,570$	$n = 0,1 \frac{h_a}{H_o} + 1,816$
$0,16 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,17$	$k = -0,5 \frac{h_a}{H_o} + 0,570$	$n = 0,1 \frac{h_a}{H_o} + 1,816$
$0,17 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,18$	$k = -0,6 \frac{h_a}{H_o} + 0,587$	$n = 0,1 \frac{h_a}{H_o} + 1,816$
$0,18 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,19$	$k = -0,7 \frac{h_a}{H_o} + 0,605$	$n = 0,1 \frac{h_a}{H_o} + 1,816$
$0,19 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,20$	$k = -0,6 \frac{h_a}{H_o} + 0,586$	$n = 0,3 \frac{h_a}{H_o} + 1,778$

Cuadro 2.1: Ajuste de los valores de k y n para el diseño del perfil de un cimacio, con paramento vertical, criterio USBR

Variable				
$\frac{h_a}{H_o}$	$\frac{R_1}{H_o}$	$\frac{R_2}{H_o}$	$\frac{x_c}{H_o}$	$\frac{y_c}{H_o}$
0	$\frac{R_1}{H_o} = 0,530$	$\frac{R_2}{H_o} = 0,233$	$\frac{x_c}{H_o} = 0,283$	$\frac{y_c}{H_o} = 0,125$
$0,00 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,01$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,530$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,233$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,283$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,125$
$0,01 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,02$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,530$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,90 \frac{h_a}{H_o} + 0,238$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,284$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,33 \frac{h_a}{H_o} + 0,123$
$0,02 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,03$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,530$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,226$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,60 \frac{h_a}{H_o} + 0,286$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,123$
$0,03 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,04$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,530$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,232$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,283$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,126$
$0,04 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,05$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,530$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,20 \frac{h_a}{H_o} + 0,220$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,60 \frac{h_a}{H_o} + 0,287$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,130$
$0,05 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,06$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,530$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,10 \frac{h_a}{H_o} + 0,215$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,277$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,130$
$0,06 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,07$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,80 \frac{h_a}{H_o} + 0,548$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,239$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,283$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,49 \frac{h_a}{H_o} + 0,129$
$0,07 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,08$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,531$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,20 \frac{h_a}{H_o} + 0,218$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,70 \frac{h_a}{H_o} + 0,297$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,31 \frac{h_a}{H_o} + 0,116$
$0,08 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,09$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,90 \frac{h_a}{H_o} + 0,561$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,10 \frac{h_a}{H_o} + 0,210$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,281$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,124$
$0,09 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,10$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,60 \frac{h_a}{H_o} + 0,534$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,10 \frac{h_a}{H_o} + 0,210$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,70 \frac{h_a}{H_o} + 0,299$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,124$
$0,10 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,11$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,60 \frac{h_a}{H_o} + 0,534$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,10 \frac{h_a}{H_o} + 0,210$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,269$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,134$
$0,11 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,12$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,80 \frac{h_a}{H_o} + 0,556$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,05 \frac{h_a}{H_o} + 0,204$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,60 \frac{h_a}{H_o} + 0,291$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,123$
$0,12 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,13$	$\frac{R_1}{H_o} = -1,00 \frac{h_a}{H_o} + 0,580$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,05 \frac{h_a}{H_o} + 0,204$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,50 \frac{h_a}{H_o} + 0,279$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,123$
$0,13 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,14$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,90 \frac{h_a}{H_o} + 0,567$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,10 \frac{h_a}{H_o} + 0,211$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,80 \frac{h_a}{H_o} + 0,318$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,110$
$0,14 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,15$	$\frac{R_1}{H_o} = -0,70 \frac{h_a}{H_o} + 0,539$	$\frac{R_2}{H_o} = -0,10 \frac{h_a}{H_o} + 0,211$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,60 \frac{h_a}{H_o} + 0,290$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,124$
$0,15 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,16$	$\frac{R_1}{H_o} = -1,00 \frac{h_a}{H_o} + 0,584$	$\frac{R_2}{H_o} = 0,196$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,60 \frac{h_a}{H_o} + 0,290$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,109$
$0,16 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,17$	$\frac{R_1}{H_o} = -1,40 \frac{h_a}{H_o} + 0,648$	$\frac{R_2}{H_o} = 0,196$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,70 \frac{h_a}{H_o} + 0,306$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,109$
$0,17 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,18$	$\frac{R_1}{H_o} = -1,00 \frac{h_a}{H_o} + 0,580$	$\frac{R_2}{H_o} = 0,196$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,70 \frac{h_a}{H_o} + 0,306$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,109$
$0,18 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,19$	$\frac{R_1}{H_o} = -1,20 \frac{h_a}{H_o} + 0,616$	$\frac{R_2}{H_o} = 0,196$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,60 \frac{h_a}{H_o} + 0,288$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,109$
$0,19 \leq \frac{h_a}{H_o} \leq 0,20$	$\frac{R_1}{H_o} = -1,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,635$	$\frac{R_2}{H_o} = 0,196$	$\frac{x_c}{H_o} = -0,90 \frac{h_a}{H_o} + 0,345$	$\frac{y_c}{H_o} = -0,30 \frac{h_a}{H_o} + 0,109$

Cuadro 2.2: Ajuste de los valores de las variables R_1 , R_2 , x_c y y_c para el diseño del perfil de un cimacio con paramento vertical, criterio USBR.

Sección 2.3

Criterio de diseño según la *Waterways Experiment Station, WES*

El Cuerpo de Ingenieros del Ejército de los Estados Unidos de América de la *Waterways Experiment Station, WES* estableció otro criterio de diseño que depende de la relación que hay entre la altura de la cresta y el canal de llegada y la carga total de diseño H_0 ; donde $\frac{P}{H_0} > 1$, para profundidades del canal de llegada grandes cargas de velocidad de diseño despreciable $H_0 = h_0$; $h_a \approx 0$ y para paramentos verticales, figura 2.7. El criterio WES puede verse como un caso particular del criterio USBR. Para este criterio, los valores de k y n de la ecuación 2.1 son constantes y valen:

$k = 0,5$ y $n = 1,85$ si el paramento de aguas arriba es vertical y la profundidad P es grande $P \geq 3H_0$.

Por otra parte, del método semigráfico; los valores de R_1 , R_2 , x_c y y_c se obtienen de las ecuaciones siguientes:

$$R_1 = 0,5H_0, R_2 = 0,2H_0, x_c = -0,27H_0 \text{ y } y_c = -0,126H_0.$$

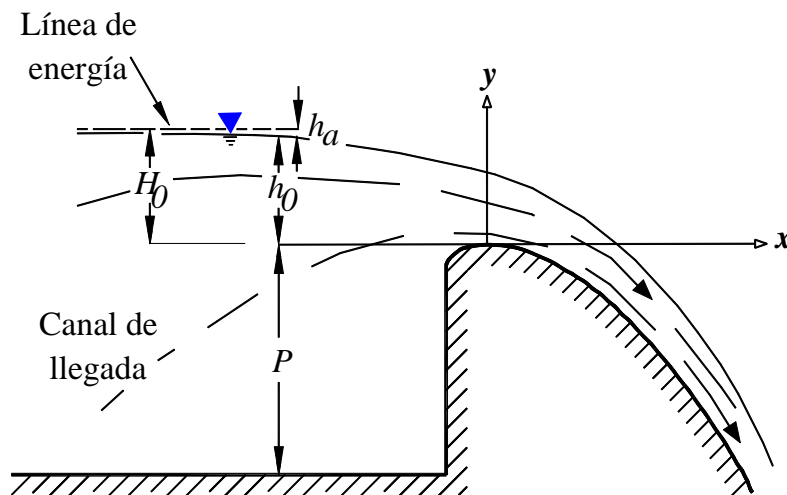


Figura 2.7: Vertido libre sobre un cimacio tipo WES

Comentarios

Es evidente que el perfil de un cimacio funciona de forma óptima para la condición de diseño que corresponde a un único gasto Q_0 y carga total de diseño H_0 , y funciona con menor o mayor eficiencia con otra condición de operación. Por lo que la elección de la carga de diseño es muy importante en el diseño de los cimacios y depende de estudios hidrológicos, topográficos, etc.

El perfil de un cimacio de cresta libre se constituye por tres tramos importantes: dos arcos de su circunferencia en la parte aguas arriba de la cresta y una curva definida por una ecuación la cual describe el perfil aguas abajo de la cresta. Cabe destacar que el criterio WES está limitado para el caso en que la velocidad de llegada del flujo al cimacio es aproximadamente igual a cero; mientras que el criterio USBR es más amplio en su aplicación ya que se puede utilizar para cualquier valor de velocidad de llegada del flujo al cimacio. Las unidades de las variables deben ser las mismas en la ecuación 2.1, dichas ecuaciones manejan relaciones adimensionales, y depende de las relaciones $\frac{x}{H_0}$, $\frac{y}{H_0}$ y de la carga total de diseño H_0 . Las ecuaciones 2.9 y 2.10 son ecuaciones que dependen de las variables dimensionales R_1 , R_2 , x_B y y_B y del intervalo $x_P \leq x \leq 0$ y de $x_c \leq x \leq x_P$.

Para el criterio WES es evidente que su aplicación se restringe pero en cambio las variables que intervienen en el criterio se calculan de manera sencilla y los cálculos proporcionan una ventaja sobre el criterio USBR, por ejemplo en la ecuación del perfil del cimacio aguas abajo de la cresta la ecuación que lo define sólo depende de las variables x y y que son coordenadas que lo definen, por otro lado, donde el criterio WES no es aplicable, el criterio USBR se puede aplicar ya que éste se puede aplicar para cualquier valor de la velocidad del flujo, pero el número de los cálculos se incrementa.

Finalmente el criterio a emplear queda al juicio del ingeniero que diseñe el cimacio de acuerdo con la pericia que tenga para el diseño. En la figura 2.4 se muestra el perfil completo del cimacio y las ecuaciones que describen cada tramo del perfil y los puntos de mayor importancia:

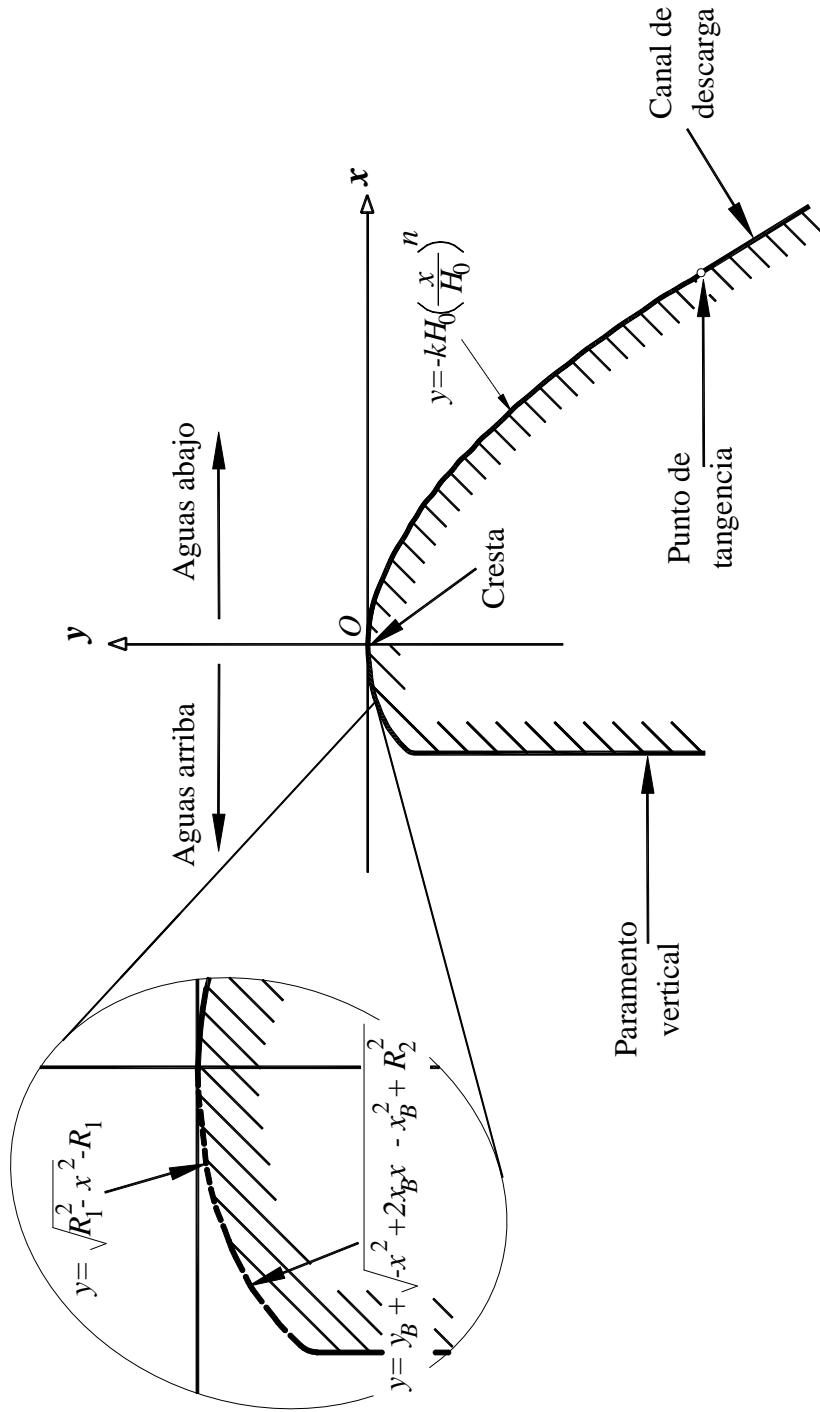


Figura 2.8: Perfil completo de un cimacio con las ecuaciones que lo describen

CAPÍTULO 3

Conceptos básicos

Antes de presentar las ecuaciones para determinar el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión, es conveniente definir las variables que se consideran en el cálculo. La terminología usada en el análisis del cimacio no siempre es clara para el ingeniero principiante. Los términos: coordenada s , componente de la velocidad v , gasto unitarios q , carga total de operación H , coeficiente de descarga C etc, aparecen frecuentemente en la literatura, y su uso no siempre es equivalente en todas las referencias bibliográficas. En este capítulo se expondrán los significados de los términos relevantes al tema, tal como se emplearán en este trabajo.

Sección 3.1

Definición de variables

El eje s , del sistema, sigue fielmente la forma del fondo curvo y mide la longitud de arco de dicho fondo. Sobre dicho eje se mide la coordenada que define la posición de un plano ortogonal al fondo en cada punto, que contiene la sección transversal del canal y sobre el cual se mide la coordenada n , normal a s .

La curva que representa al fondo se define a través de la función

$$y = \zeta(s) \tag{3.1}$$

siendo necesario que la curva sea continua, además de tener pendiente y curvatura también continuas. De la ecuación anterior se deduce que

$$\frac{d\zeta}{dx} = \tan \theta \tag{3.2}$$

siendo θ la inclinación de la tangente al perfil del cimacio en cada punto, como se muestra en la figura 3.1.

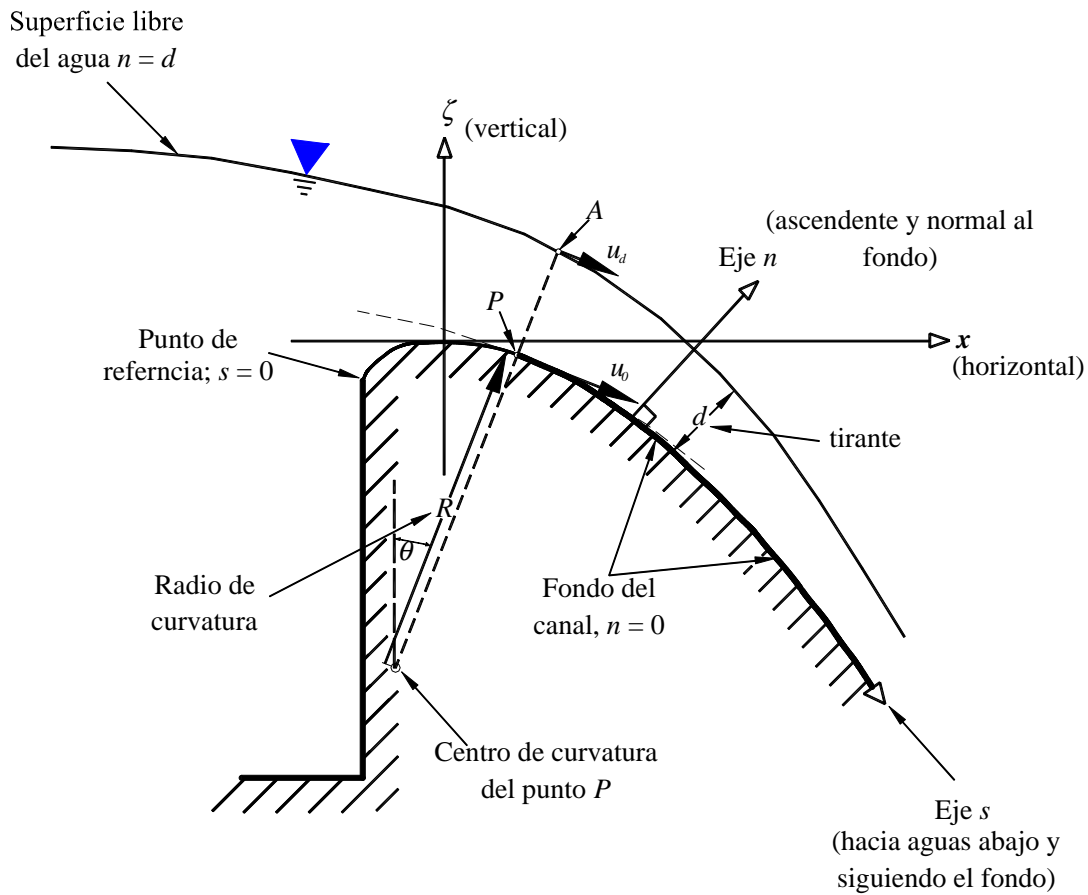


Figura 3.1: Principales variables de un fondo curvo

Las ecuaciones generales deducidas por el Dr. Sotelo en su trabajo doctoral, en las que se basa el desarrollo de esta tesis, toman en cuenta la variable tiempo, pero nosotros analizaremos unicamente el caso de flujo permanente, independiente del tiempo, por lo que eliminaremos ese variable de las ecuaciones que utilizaremos.

La componente de la velocidad u_0 , tiene la dirección de s y también es perpendicular a una sección ortogonal de coordenada de fondo n , la componente principal de la velocidad $u(s, n)$, tiene la misma dirección s y es perpendicular a un fondo n . La magnitud de u en el fondo de la sección es u_0 , pero a nivel de la superficie libre es u_d .

El perfil de la superficie libre se desconoce, pero se representa por $n = d(s)$, donde d es la distancia ortogonal desde el fondo hasta la superficie libre (según n) y es función de s y la variable t . En efecto, cuando $n = 0$ se describe el perfil del cimacio.

La curvatura del fondo en un punto P se define como el recíproco del radio de curvatura R en dicho punto, es decir, $\kappa = \frac{1}{R}$. Además, los libros de matemáticas definen a la curvatura κ de la siguiente manera:

$$\kappa = \frac{\frac{d^2\zeta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{d^2\zeta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \cos^3\theta \frac{d^2\zeta}{dx^2} \quad (3.3)$$

La carga total de diseño y una carga total de operación cualquiera, se expresan como H_0 y H respectivamente; donde $H(s)$ es la ecuación equivalente a la de Bernoulli para las líneas de flujo que cruzan una sección plana ortogonal al fondo. La ecuación de Bernoulli describe el comportamiento de un fluido moviéndose a lo largo de una línea de corriente y expresa que en un fluido ideal (sin viscosidad ni rozamiento) en circulación por un conducto cerrado, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido. A las soluciones de la ecuación que describen el perfil de la superficie libre de la lámina vertiente se les denominan con la variable χ .

El gasto unitario en un cimacio de sección rectangular es el gasto total por unidad de longitud efectiva del cimacio, es decir: $q = \frac{Q}{L_e}$, donde Q es el volumen del flujo que

pasa a través de una superficie transversal S del canal por unidad de tiempo y queda definido como

$$Q = \frac{dv}{dt} = \int \int_A v.dA \quad (3.4)$$

Se llama velocidad media, a través de la superficie S de área A , al promedio calculado como::

$$V = \frac{\int \int_A v.dA}{A} \quad (3.5a)$$

$$V = \frac{Q}{A} \quad (3.5b)$$

y equivale a suponer que la velocidad se distribuye uniformemente sobre toda la superficie S , con un valor constante V y en dirección perpendicular a la misma.

El parámetro adimensional F relaciona al flujo y la geometría del fondo, y se obtiene mediante el coeficiente de gasto del cimacio C , ecuación 1.1, en efecto, apartir de uno se puede obtener el otro; y se obtiene como:

$$F = \frac{q}{\sqrt{2g}H_0^{\frac{3}{2}}} \quad (3.6)$$

el cual debe de ser constante para cada gasto unitario vertido. Por lo tanto, el valor de F varia de acuerdo con la carga h con la que esta operando el cimacio, medida desde la cresta hasta la superficie libre aguas arriba de la cresta, en el canal de llegada.

De la ecuación 1.1 el coeficiente de gasto se obtiene como

$$C = \frac{q}{H^{\frac{3}{2}}} \quad (3.7)$$

multiplicando y dividiendo la ecuación 3.6 por $H_0^{\frac{3}{2}}$ y sustituyendo la expresión del coeficiente de gasto ecuación 3.7, se obtiene

$$F = \frac{C}{\sqrt{2g}} \left(\frac{H}{H_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.8)$$

y resulta el coeficiente de gasto C de la forma

$$C = \frac{\sqrt{2g}}{\left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{3}{2}}} F \quad (3.9)$$

Por lo tanto si se conoce el valor de C para cualquier valor $\frac{H}{H_0}$ se puede obtener el valor de F y viceversa.

Sección 3.2

Características del flujo

Para simplificar los cálculos se ha considerado algunas hipótesis de partida: la curvatura κ del fondo es la única que influye en las líneas de corriente del flujo y queda excluida cualquier discontinuidad de κ . La cantidad κd se puede considerar como un indicador de la pequeñez de la profundidad, ya que es el cociente del tirante del flujo y el radio de curvatura del fondo; se considera que el flujo es de poca profundidad cuando κd es pequeño; además el flujo se considera incompresible (dado que es a superficie libre), irrotacional y no viscoso.

3.2.1. Irrotacionalidad

Un flujo curvilíneo irrotacional es cuando en un flujo el vector $rot v$ es igual a cero para cualquier punto e instante. El flujo irrotacional ocurre con bastante frecuencia en los problemas de la práctica; y sólo será necesario entender con claridad el concepto físico de irrotacionalidad. Si bien el término rotación implica un giro de partículas, esto no significa que es rotacional todo movimiento efectuado de acuerdo a una trayectoria curva o bien que todo movimiento rectilíneo es irrotacional.

Un vórtice es un flujo turbulento en rotación espiral con trayectorias de corriente cerradas. Como vórtice puede considerarse cualquier tipo de flujo circular o rotatorio

que posee vorticidad. La vorticidad es un concepto matemático usado en la dinámica de fluidos que se puede relacionar con la cantidad de circulación o rotación de un fluido. La vorticidad se define como la circulación por unidad de área en un punto del flujo. La velocidad de las partículas en cada punto de intersección sigue la ley del vórtice libre y es

$$vr = \kappa \quad (3.10)$$

donde r es la distancia del centro de curvatura al punto P figura 3.1.

De la sección ortogonal al fondo de coordenada s , la velocidad en el punto P es

$$u(s, n) = \frac{u_0(s)}{1 - \kappa n} \quad (3.11)$$

que equivale a la distribución típica de la velocidad en un vórtice. La componente u sólo depende de n . En efecto, se tiene

$$1 - \kappa n = 1 - \frac{n}{R} = \left(\frac{R - n}{R} \right) = \frac{r}{R}$$

La componente principal de la velocidad en el punto A sobre la superficie libre resulta

$$u_d = \frac{u_0(s)}{1 - \kappa d} \quad (3.12)$$

3.2.2. Ecuación de continuidad

El flujo de masa del agua a través de la sección de un canal es ρVA , donde ρ es la densidad del líquido, V la velocidad media en la sección y A su área hidráulica. Cuando el flujo sigue la dirección del eje del canal según la coordenada curvilínea s sobre el fondo (figura 3.1), y no hay aportaciones o salidas de líquido en el trayecto, la forma matemática de la ecuación de continuidad para el flujo unidimensional permanente

en toda su longitud es

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} = 0 \quad (3.13)$$

es decir, el flujo de masa no cambia al variar s . En un flujo a superficie libre ρ es constante (incompresible) y se puede eliminar en la ecuación anterior,

$$\frac{\partial(VA)}{\partial s} = 0 \quad (3.14)$$

que al integrar entre dos secciones resulta

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (3.15)$$

El gasto en una sección se obtiene mediante la ecuación 3.4. El gasto en una sección plana está dado por

$$Q(s) = \int_0^{d(s,t)} u B dn \quad (3.16a)$$

donde $B(s, t)$ es la dimensión horizontal de la sección que es una función conocida de s y n . Al sustituir la ecuación 3.11 en la anterior se obtiene

$$Q(s) = u_0 \int_0^d \frac{B dn}{1 - \kappa n} = u_0 \mathbf{I}_Q \quad (3.16b)$$

Además con la ecuación 3.5b y $dA = B dn$ la velocidad media sigue su definición (de la ecuación 3.5a) y es

$$V = \frac{1}{A} \int_0^d u dA \quad (3.17a)$$

de donde

$$V = \frac{u_0}{A} \mathbf{I}_Q \quad (3.17b)$$

donde en las expresiones 3.16b y 3.17b el valor del integral \mathbf{I}_Q depende de la forma de la sección que adopte el canal y se ha representado como:

$$\mathbf{I}_Q = \int_0^d \frac{B \, dn}{1 - \kappa n} \quad (3.18)$$

3.2.3. Ecuación del movimiento transversal

La ecuación equivalente a la de Bernoulli para las líneas de flujo que cruzan una sección plana ortogonal al fondo es

$$H(s) = \zeta + n \cos \theta + \frac{p}{g\rho} + \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \frac{u_o^2}{2g} = \text{constante} \quad (3.19a)$$

La presión es cero en cualquier punto sobre la superficie libre, es decir $n = d$, $p = 0$ con ello, la energía en la ecuación anterior resulta:

$$H(s) = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} \frac{u_o^2}{2g} \quad (3.19b)$$

O bien de la ecuación 3.12 también es

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{u_d^2}{2g} \quad (3.19c)$$

Sustituyendo $u_d = \frac{V}{\lambda}$ en la ecuación 3.19c, La energía total de un flujo rectilíneo en una sección que se puede localizar con la altitud del fondo respecto del nivel de referencia coincidente con la cresta y con el tirante d es

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{\lambda^2} \frac{V^2}{2g} \quad (3.19d)$$

donde λ es el coeficiente de curvatura, que permite el intercambio de la velocidad en la superficie libre por la media y que depende de la curvatura del fondo y del tirante

d medido en dirección perpendicular al fondo. La expresión 3.19d es válida para el fondo cóncavo o convexo. Cabe destacar que para calcular la energía en una sección del flujo con curvatura vertical, no es necesario conocer la distribución de la presión ni la que hay en el fondo, sólo el coeficiente de curvatura.

En un canal rectangular se puede emplear el concepto de gasto unitario, $q = \frac{V}{d}$, de manera que la expresión anterior es también

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{\lambda^2 d^2} \frac{q^2}{2g} \quad (3.19e)$$

Sección 3.3

Ecuación de la lámina vertiente

Las ecuaciones que se desarrollaron, fueron obtenidas por Dr. Gilberto Sotelo Ávila en el 2001, en ese trabajo se muestra la aplicación de la teoría del flujo sobre fondos curvos que permite una predicción teórica de la distribución de la presión en el fondo, cuando se conoce el perfil geométrico y las condiciones en las que se opera. La teoría desarrollada es nueva, y para su validación se requiere de los resultados experimentales en curvas con éstas características

Las ecuaciones diferenciales del flujo poco profundo y para una sección rectangular permiten obtener la integral I_Q valuada mediante la ecuación 3.20 que es

$$I_Q = - \left(\frac{L_e}{\kappa} \right) \ln(1 - \kappa d) \quad (3.20)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación 3.16b el gasto unitario q resulta

$$q(s) = \frac{Q}{L_e} = - \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa} u_0 \quad (3.21a)$$

o bien

$$u_0 = -\frac{\kappa}{\ln(1 - \kappa d)}q(s) \quad (3.21b)$$

La energía total por unidad de peso en una sección ortogonal al fondo se obtiene de la ecuación 3.19b. Al sustituir la ecuación 3.21b en la ecuación 3.19b, se obtiene

$$H = \zeta + d \cos \theta + [(1 - \kappa d) \ln(1 - \kappa d)]^{-2} \frac{\kappa^2 q^2}{2g} \quad (3.22)$$

Se aplican las ecuaciones particulares del canal rectangular al flujo permanente que se produce sobre un vertedor tipo cimacio, cuyo diseño geométrico sigue los lineamientos estándar que usan una carga total H_0 de diseño. El perfil de la superficie libre de la lámina vertiente queda definido por la ecuación 3.22, la cual al dividir por H_0 , se expresa de la siguiente manera

$$\left[\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right] = \frac{\cos \theta}{\kappa H_0} \chi + \left[\frac{F \kappa H_0}{(1 - \chi) \ln(1 - \chi)} \right]^2 \quad (3.23)$$

donde la suma de términos antes del signo igual, representa a la energía específica en cada sección. La ecuación anterior tiene dos soluciones χ para cada valor de $\frac{H}{H_0}$ y $\frac{x}{H_0}$; una en régimen subcrítico y la otra en supercrítico. Éstas equivalen a los llamados valores alternos en un canal de fondo plano.

CAPÍTULO 4

Régimen crítico

Es posible distinguir el flujo de agua en un canal en tres tipos de régimen o estados: el flujo supercrítico, el flujo subcrítico o el flujo crítico. Un parámetro utilizado para distinguir entre éstos tres tipos de flujo es en función de la acción que sobre él ejerce la gravedad, es el número de Froude, \mathcal{F} , el cual básicamente, relaciona la fuerza de la gravedad y la fuerza de inercia, ambas dependen de la masa. En general el comportamiento del flujo se ve delimitado por dos elementos, la viscosidad y la gravedad, aunque en canales sólo este último es relevante.

En el flujo supercrítico las fuerzas inerciales tienen mayor influencia que la fuerza gravitacional, además de esto, el flujo se presenta a velocidades y/o pendientes grandes, y tiene profundidades (tirantes) pequeñas. Cuando existe un flujo de este tipo en un canal, un aumento en la cantidad de energía cinética provoca una disminución del tirante del agua, el número de Froude, en este caso, es mayor de 1.

Por otro lado, en un flujo en régimen subcrítico las fuerzas inerciales tienen menor influencia que las gravitacionales; en éste flujo se tienen velocidades y/o pendientes pequeñas, pero las profundidades (tirantes) de la lámina del agua, por el contrario, son mayores a las que se presentan en el flujo supercrítico. El número de Froude en

este régimen es menor de 1.

El **régimen crítico** se presenta cuando las fuerzas inerciales y gravitacionales se equilibran o igualan y provocan un flujo inestable, convirtiéndolo en cierta manera en un estado intermedio y cambiante entre los otros dos tipos de flujo. De acuerdo con lo anterior es poco recomendable usarlo en el diseño de estructuras hidráulicas. Para éste tipo de flujo el número de Froude es 1 y el tirante o profundidad del agua es también llamada crítica

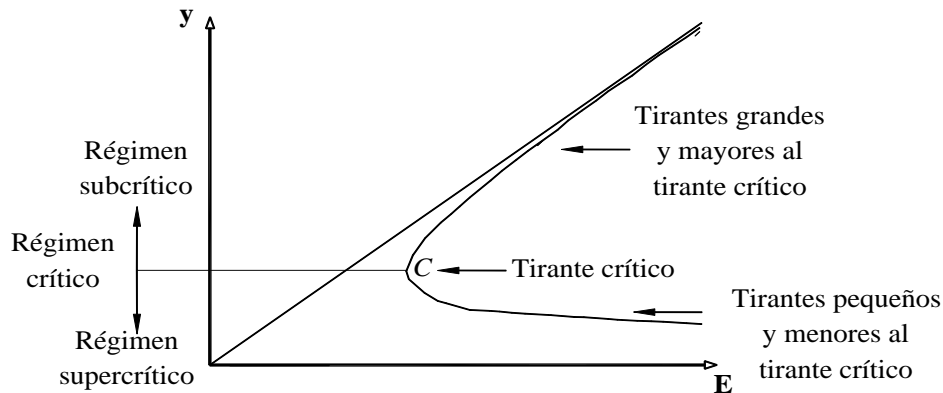


Figura 4.1: Curva de energía específica y régimen del agua

Otra manera de poder distinguir entre los tres posibles regímenes del flujo es por medio de la energía específica. En donde la energía específica se define como la cantidad de energía por unidad de peso en cualquier sección, medida siempre con respecto al fondo de un canal. Por lo anterior, el régimen crítico es cuando la energía específica es mínima para un gasto determinado y constante. En la figura 4.1 se muestra la curva de energía específica y tiene una forma de una parábola que abre hacia la derecha. La región subcrítica tiende asintóticamente a una recta de 45° . Se puede observar que con excepción del tirante crítico, para cada valor de energía específica corresponden dos valores del tirante: uno subcrítico (mayor que el tirante crítico) y el otro supercrítico (menor que el tirante crítico). A medida que el tirante

disminuye, la curva se desplaza hacia la derecha y tiende asintóticamente al eje de la energía.

Sección 4.1

Condición crítica

Se sabe que el estado crítico sirve como frontera entre el régimen subcrítico y el supercrítico. Es conocido que el flujo antes del cimacio es subcrítico y después del mismo supercrítico, lo que significa que en algún punto se presenta la sección crítica. Esto es correcto, pero se comete primero el error de aplicar la condición del régimen crítico convencional del flujo rectilíneo a uno que es curvilíneo; después se acepta que la sección crítica ocurre sobre la cresta, lo cual es cierto en algunos vertedores pero no en un cimacio.

La energía del flujo es:

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{I_Q^2 (1 - \kappa d)^2} \frac{Q^2}{2g} \quad (4.1)$$

donde I_Q es una integral y depende de la geometría de la sección para la sección rectangular es:

$$I_Q = - \left(\frac{L_e}{\kappa} \right) \ln (1 - \kappa d) \quad (4.2)$$

Por tanto, la energía total del flujo con respecto del plano horizontal que pasa por la cresta es

$$H = \zeta + d \cos \theta + \left[\frac{\kappa}{(1 - \kappa d)(1 - \kappa d)} \right]^2 \frac{q^2}{2g} \quad (4.3)$$

Un parámetro aplicable al flujo curvilíneo en un canal rectangular, relacionado con el número de Froude es

$$\mathcal{F} = \frac{q}{\sqrt{gd \cos \theta}} \frac{\kappa (1 - \chi)}{\lambda \chi} \quad (4.4)$$

el cual para las condiciones críticas adquiere el valor

$$\mathcal{F}_c = \frac{q}{\sqrt{g \cos \theta}} \left[\frac{1 - \chi}{\lambda d^{\frac{3}{2}}} \right]_c \quad (4.5a)$$

Es decir

$$\mathcal{F}_c = \left[-\frac{\lambda (1 - \chi)^3}{\chi (1 - \lambda) - 1} \right]_c^{\frac{1}{2}} \quad (4.5b)$$

El numero de Froude para cualquier condición del flujo curvilíneo se define como $\mathbb{F} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_c}$. El cual si alcanza obviamente el valor $\mathbb{F} = 1$ para el flujo crítico curvilíneo. Por otra parte, se sustituye q de la ecuación 4.4 en la 3.19e y se obtiene

$$H = \zeta + \left[1 + \frac{\mathcal{F}^2}{2(1 - \chi^2)} \right] d \cos \theta \quad (4.6)$$

de la cual se despeja \mathcal{F} y en términos adimensionales resulta

$$\mathcal{F} = \sqrt{2} (1 - \chi) \left[\frac{\kappa H_0}{\chi \cos \theta} \left(\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

La sección crítica se ubica donde $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$, siendo \mathcal{F}_c el numero de Froude crítico expresado de la ecuación 4.5b. Es decir, se debe de cumplir

$$\frac{\kappa H_0}{\cos \theta} \left(\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right) = \chi_c - \frac{1(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)}{2 \ln(1 - \chi_c) + 1} \quad (4.8)$$

Esta ecuación permite calcular χ_c para cada valor del término a la izquierda del signo igual, el cual depende a su vez de $\frac{H}{H_0}$ (constante) y de $\frac{\zeta}{H_0}$. No olvidemos que $\chi = \frac{d}{R}$.

Sección 4.2

Localización del tirante crítico

La ecuación 4.8 no ubica la sección crítica ya que depende de ζ_c , es decir, de x_c . La sección crítica tiene que satisfacer la condición de que $\mathbb{F} = 1$, o bien, que $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_c^2$, pero además se ubica donde la energía sea mínima a lo largo de la curva $\frac{dH}{dx} = 0$. Para la primera condición se igualan las ecuaciones 4.4 y 4.5b y la segunda condición resulta:

$$H = \zeta + d \cos \theta + \gamma(\chi) \frac{\kappa^2 q^2}{2g} \quad (4.9)$$

donde $\gamma(\chi) = [(1 - \chi) \ln(1 - \chi)]^{-2}$

Por lo que, para ubicar la sección crítica la ecuación 4.10 debe ser igual a cero.

$$f\left(\frac{x}{H_0}, \frac{H}{H_0}\right) = (1 - \chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \left[2\left(\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0}\right) - 3\frac{\cos \theta}{\kappa H_0} \chi_c\right] \frac{H_0^2 \frac{d\kappa}{dx}}{\kappa H_0} \quad (4.10)$$

Los términos que intervienen en esta ecuación se determinan de la geometría del cimacio y de las condiciones de operación durante el vertido.

Sección 4.3

Tirante crítico en canales de fondo curvo

Como se mencionó, el régimen crítico se podría obtener cuando la energía específica alcanza su valor mínimo, por lo que, de la derivada de la ecuación 4.9 se podría obtener el tirante crítico. Para un canal rectangular, el tirante crítico resulta:

$$\frac{\kappa H_0}{\cos \theta} (F \kappa H_0)^2 = -\frac{1}{2} \frac{[(1 - \chi_{cc}) \ln(1 - \chi_{cc})]^3}{\ln(1 - \chi_{cc}) + 1} \quad (4.11)$$

de donde se puede obtener χ_{cc} y luego sustituir su valor en la siguiente ecuación para obtener d_c

$$d_c = \frac{\chi_{cc}}{\kappa} = \chi_{cc} R \quad (4.12)$$

Sección 4.4

Comentarios

El régimen crítico es único para cada condición de operación. En el caso de un cambio en la carga de operación, el régimen crítico no estaría en la misma posición en donde ya se había calculado y por lo tanto se necesitaría localizar la nueva posición del régimen crítico usando la ecuación 4.10.

El procedimiento para obtener la posición del tirante crítico es un proceso de iteración en donde se propone un valor de x_c , se procede a obtener la solución χ_c y luego se sustituye en la ecuación 4.10 hasta hacerla cero; en otras palabras se sigue ese mecanismo hasta encontrar un valor de x , el cual haga que la ecuación 4.10 sea igual a cero. Una vez localizada la sección crítica se procede a obtener su tirante con las características particulares de esa ubicación.

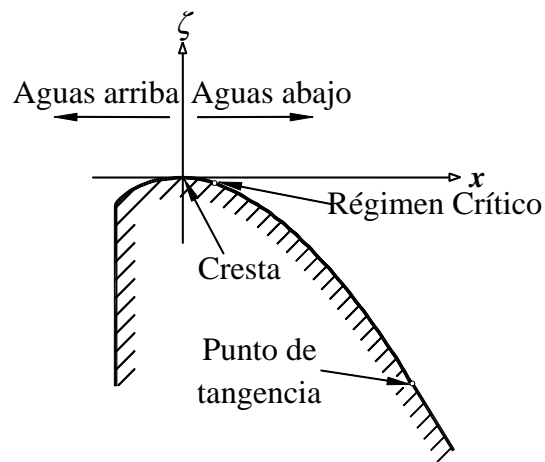


Figura 4.2: Posición del tirante crítico sobre el perfil de un cimacio

CAPÍTULO 5

Perfil de la superficie libre del agua

El flujo uniforme en un canal satisface la condición ideal de equilibrio dinámico entre la componente de la fuerza de peso del líquido en la dirección del movimiento y la fuerza de fricción generada sobre la frontera sólida de la conducción, lo que equivale a la igualdad de la pérdida por fricción entre dos secciones cualesquiera con el desnivel entre ellas. Esto se logra cuando la velocidad del flujo se mantiene constante a lo largo del canal, lo que es posible únicamente si las dimensiones de la sección y el tirante son constantes. Esto significa que el flujo uniforme puede ocurrir sólo en un canal prismático donde el gasto sea constante.

Cualquier otro flujo, aún en un canal prismático, que no satisfaga las condiciones de equilibrio del uniforme, se convierte en variado dentro de un tramo del canal o en toda su longitud.

En todas las situaciones el flujo se caracteriza por una interfaz entre el aire y la capa superior del agua, la cual se denomina superficie libre. En la superficie libre, la presión es constante y en casi todas las situaciones, ésta es la atmosférica. En general la altura de la superficie libre no permanece constante: puede variar de acuerdo con las velocidades del fluido y la curvatura del fondo del canal.

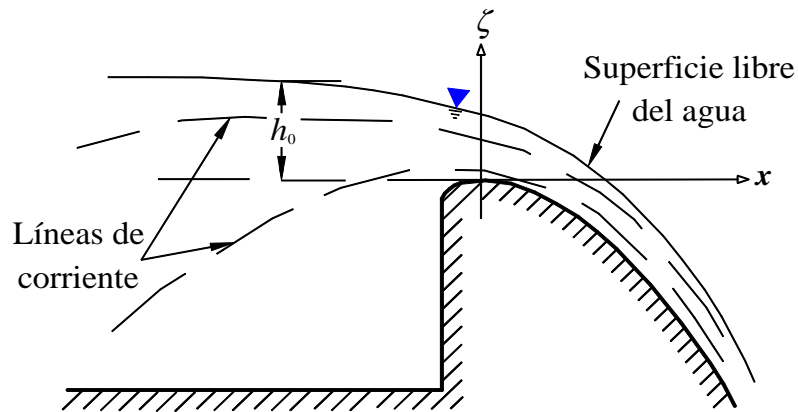


Figura 5.1: Superficie libre del agua sobre un cimacio

Para diseñar y construir un cimacio hay que basarse en la profundidad del flujo proyectada a lo largo de él, para ello es necesario tener en cuenta la profundidad del flujo y la geometría del canal, así como también conocer las características generales del perfil de la superficie para flujos de variación gradual que no solo dependen de la profundidad del flujo si no que también de la curvatura del fondo.

El cuerpo de ingenieros WES proporcionó un cuadro para tres condiciones de operación para poder predecir el comportamiento de la superficie libre del agua sobre un cimacio, figura 5.2.

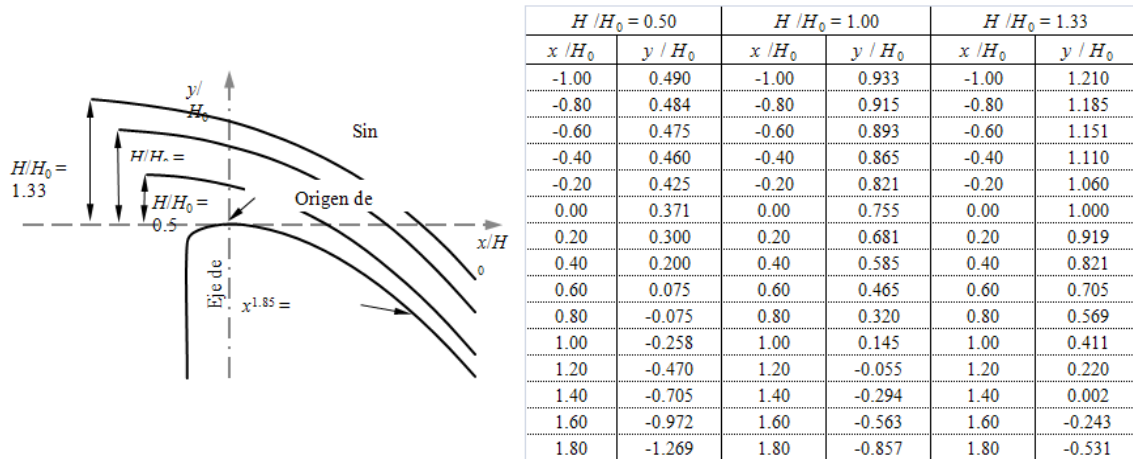


Figura 5.2: Superficie libre del agua sobre un cimacio, criterio WES

Sección 5.1

Superficie libre del agua sobre un cimacio

Debido a la gran curvatura que tienen las líneas de corriente sobre el cimacio, no es confiable la aplicación de la ecuación de energía de Bernoulli en esta zona. Sin embargo la energía total por unidad de peso en una sección ortogonal al fondo para un fondo curvo convexo se obtiene de la ecuación 5.1

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} \frac{u_0^2}{2g} \tag{5.1}$$

La ecuación del perfil de la superficie libre de la lámina vertiente queda definido por la ecuación 3.23 y es

$$\left[\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right] = \frac{\cos \theta}{\kappa H_0} \chi + \left[\frac{F \kappa H_0}{(1 - \chi) \ln(1 - \chi)} \right]^2 \tag{5.2}$$

La ecuación 5.3 permite determinar el perfil de la superficie libre del flujo

$$\chi = \kappa d \tag{5.3}$$

donde χ es la solución de la ecuación 5.2, κ es la curvatura y d es el tirante del agua buscado.

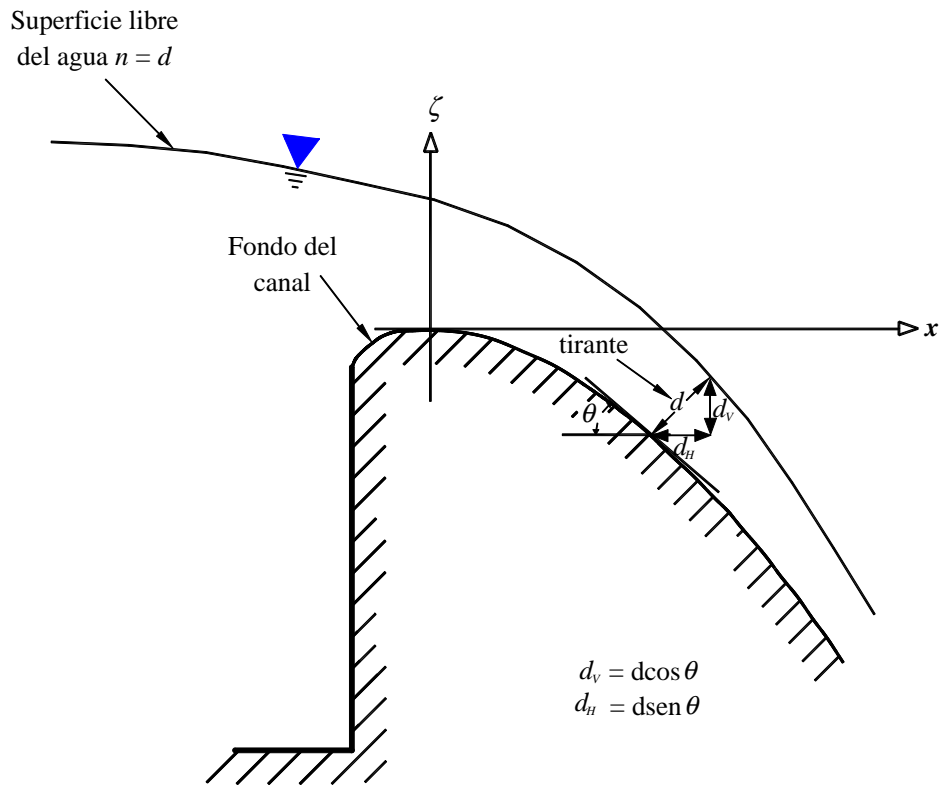


Figura 5.3: Definición de las coordenadas de la superficie libre del agua

Sección 5.2

Comentarios

El perfil de la superficie libre depende de las condiciones con las que se opere el cimacio, es decir, para cargas pequeñas el perfil que resulta sobre el cimacio es más pegado al perfil del mismo, para cargas grandes el perfil que resulta de la superficie se aleja del perfil del cimacio.

Es importante resaltar que existen dos soluciones del tirante para el mismo valor la energía, uno en régimen subcrítico (de mayor profundidad) y otro en régimen

supercrítico (de menor profundidad).

Cuando se trata de un cimacio, es claro que el régimen antes de él es subcrítico, y una vez que el perfil alcanza las condiciones de régimen crítico aguas abajo de la cresta, el régimen es supercrítico.

CAPÍTULO 6

Carga de presión

En canales es importante analizar el efecto que produce el agua sobre el fondo y las paredes que la conducen. La dirección de la velocidad de una partícula es la misma que la del flujo y paralelo a las paredes que lo conducen. En un canal de sección rectangular el flujo produce una distribución hidrostática de la presión sobre las paredes, y la velocidad de una partícula cerca a la pared tiene la dirección de su velocidad paralela a la pared, por lo que la velocidad no afecta la pared, solamente el peso de la columna de agua por encima; por lo que la distribución de la presión tendría la forma como la que se muestra en la figura 6.1.

No obstante si la pared se encuentra en un tramo de una curva horizontal la distribución de la presión ya no sería lineal y la tangente de la velocidad tendría un efecto importante sobre la pared; esa misma observación es aplicable para el fondo de un canal en una curva horizontal. Por lo que en estos casos se requiere un análisis particular del flujo del agua el cual debe de incluir la geometría del canal y las características de la curva; el análisis para el caso posterior será explicado más adelante en éste capítulo.

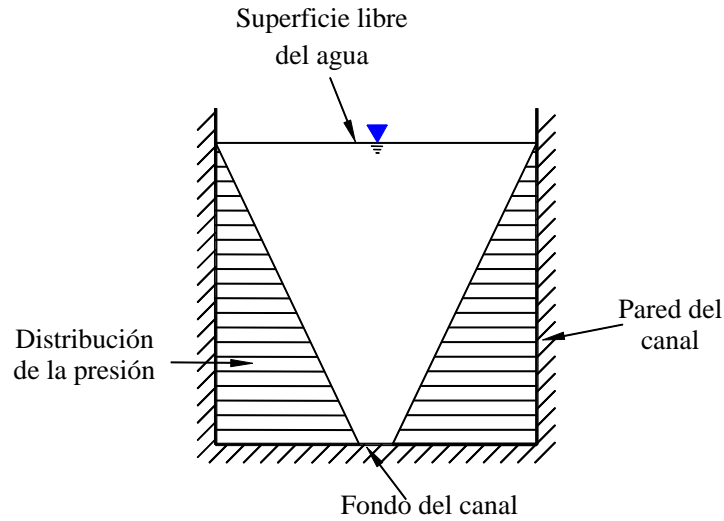


Figura 6.1: Distribución de la presión sobre las paredes del cimacio

Actualmente la presión que se obtiene sobre un cimacio de cresta libre es por medio de la figura 6.2, elaborada por el cuerpo de ingenieros WES, cabe destacar que la misma figura se puede utilizar para el perfil USBR.

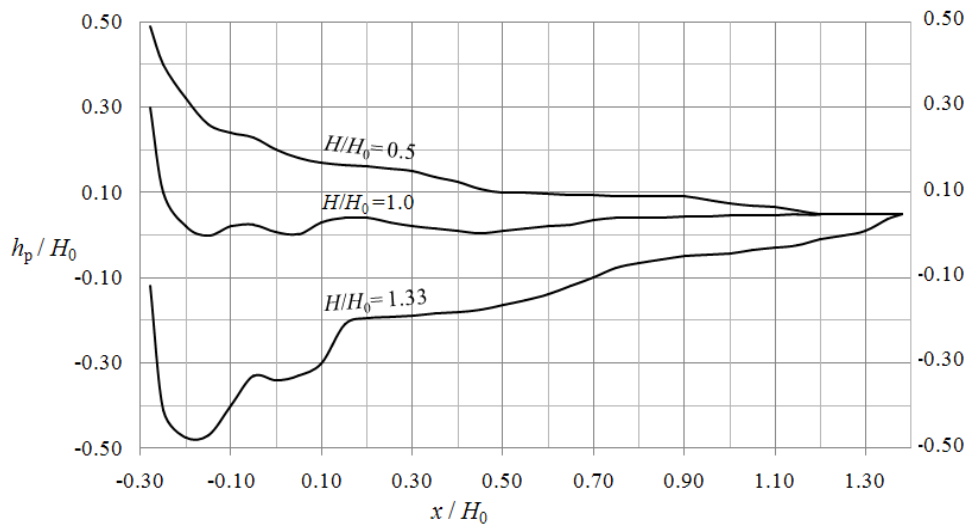


Figura 6.2: Presión sobre un cimacio de cresta libre, criterio WES

En dicha figura adimensional, muestran tres condiciones de operación, cada una para una carga total de operación distinta: Para la carga total de diseño $\left(\frac{H}{H_0} = 1,00\right)$ y

para dos condiciones distintas a la de diseño ($0,5 \leq \frac{H}{H_0} \leq 1,33$) el límite recomendado por los cuerpos de ingenieros. Claramente se ve que cualquier valor intermedio queda al criterio del ingeniero y su habilidad para interpolar.

Sección 6.1

Condiciones de operación de un cimacio

El perfil de un cimacio se diseña con una única carga de operación llamada carga total de diseño, H_0 . La carga total de diseño se selecciona a partir de estudios: topográficos, meteorológicos, de la demanda etc. Como se mencionó en el capítulo tres, el perfil de un cimacio corresponde a la carga total de diseño que es la carga de operación óptima y eficiente con la que funciona, se supone que cuando la carga total de diseño está en operación se evitarán cargas de presión, tanto negativas, como positivas, sobre el cimacio. Por consiguiente, la distribución de presión tendría teóricamente la misma forma del perfil del cimacio, figura 6.3.

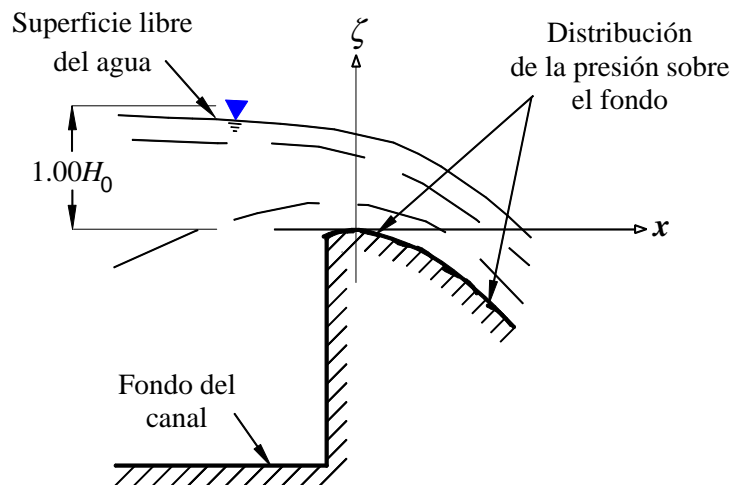


Figura 6.3: Características del flujo y la presión para una carga total de operación de $1,00H_0$

Una vez construido el cimacio, raras ocasiones opera con la carga de diseño. Eso hace indispensable que esté construido de tal manera que pueda soportar cargas de operaciones mayores y menores que la de diseño. Una carga de operación menor que la de diseño figura 6.4 produciría presiones positivas, en dirección hacia el cimacio, provocando su compresión.

Nota: las presiones positivas se representan con la línea abajo del cimacio.

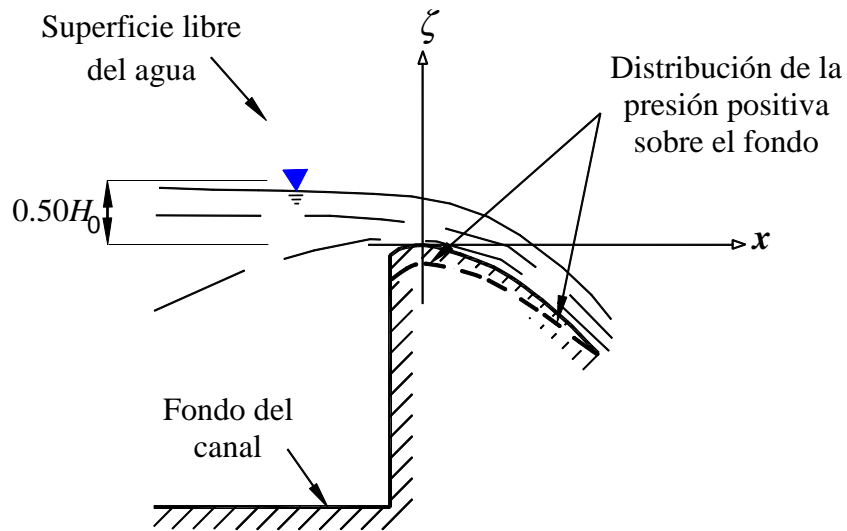


Figura 6.4: Características del flujo y la presión para una carga total de operación de $0,50H_0$

Para una carga de operación mayor que la de diseño; el perfil del agua desarrollado sobre el cimacio de cresta libre está por encima al de diseño, figura 6.5. Para esa condición, la lámina inferior tiende a separarse del cimacio desarrollando presiones negativas, es decir, existe una presión que expone al perfil del cimacio a la tensión, pudiendo provocar el desprendimiento de algunas partes cuando se presentan cargas mayores a $1,33H_0$.

Nota: las presiones negativas se representan con la línea por encima del cimacio.

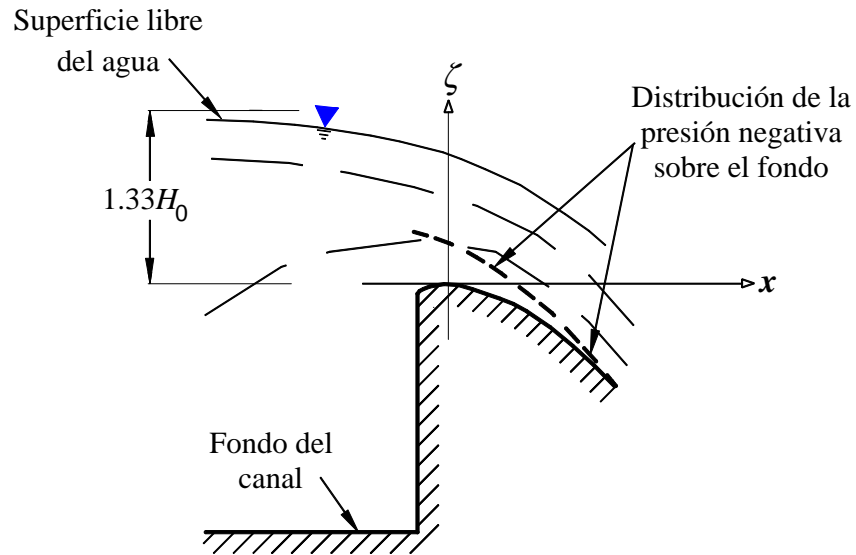


Figura 6.5: Características del flujo y la presión para una carga total de operación de $1,33H_0$

En cimacios de concreto, es conveniente y más eficiente que la carga de diseño sea lo suficiente grande para evitar que el cimacio aguante las presiones negativas, ya que, el concreto tiene mayor resistencia a la compresión que a la tensión. Por esta razón los mismos criterios de diseño USBR y WES, recomiendan que la carga de operación este entre $0,5H_0$ y $1,33H_0$. Es decir, con ese rango recomendado, se aconsejan que el cimacio esté trabajado un 50 por ciento con la presión positiva comparada con un 33 por ciento para la presión negativa y evita la cavitación en el flujo.

Ecuación para la carga de presión

Al sustituir u_0 de la ecuación 3.21b en la ecuación 3.19c es válido también

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{I_Q^2 (1 - \kappa d)^2} \frac{Q^2}{2g} \quad (6.1)$$

Por lado, de la ecuación 3.19a

$$\frac{p}{g\rho} = H - \zeta - n \cos \theta - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \frac{u_o^2}{2g} \quad (6.2)$$

O bien, al igualar las ecuaciones 3.19a y 3.19b resulta la expresión

$$\frac{p}{g\rho} = (d - n) \cos \theta + \left[\frac{1}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \right] \frac{u_o^2}{2g} \quad (6.3)$$

que define la distribución de la presión en la sección ortogonal al fondo en términos de la parte hidrostática y la debida al efecto centrífugo, está dado por el último término.

La carga de presión en el fondo del canal se obtiene para $n = 0$ y resulta

$$\frac{p_0}{g\rho} = d \cos \theta + \left[\frac{1}{(1 - \kappa d)^2} - 1 \right] \frac{u_o^2}{2g} \quad (6.4)$$

Con el mismo proceso, la carga de presión adimensional en el fondo ($n = 0$) resulta de las ecuaciones 3.21b y 6.4

$$\frac{p_0}{g\rho H_0} = \frac{\cos \theta}{\kappa H_0} \chi + (F\kappa H_0)^2 \frac{(1 - \chi)^{-2} - 1}{[\ln(1 - \chi)]^2} \quad (6.5)$$

Donde se elimina el término $\left(\frac{\cos\theta}{\kappa H_0}\right)\chi$ mediante la ecuación 3.23 y resulta:

$$\frac{p_0}{g\rho H_0} = \left[\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right] - \left[\frac{F\kappa H_0}{\ln(1-\chi)} \right]^2 \quad (6.6)$$

donde P_0 es la presión en cualquier punto sobre el perfil sólido del cimacio (de ordenada x y abscisa ζ), F esta definido por la ecuación 3.6 y χ es la misma de la ecuación del perfil de la superficie libre de la lámina vertiente (ecuación 3.23) y es:

$$\left[\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right] = \frac{\cos\theta}{\kappa H_0}\chi + \left[\frac{F\kappa H_0}{(1-\chi)\ln(1-\chi)} \right]^2 \quad (6.7)$$

y se recuerda que la ecuación anterior tiene dos soluciones de χ para cada valor de $\frac{H}{H_0}$ y $\frac{x}{H_0}$: una en régimen subcrítico y la otra en supercrítico.

Sección 6.3

Comentarios

La solución de las ecuaciones para obtener la carga de presión sobre un cimacio se realiza mediante un proceso iterativo de cálculo y seleccionando la solución que corresponde, una vez que se conoce la carga total de diseño. En el capítulo ocho se presenta el procedimiento de solución de la ecuación 6.6 para obtener la carga de presión sobre el perfil del cimacio.

CAPÍTULO 7

Algoritmos

Para resolver las ecuaciones se requiere de realizar sistemáticamente una serie de cálculos para llegar al resultado final por cada punto de análisis, por ello es conveniente plantear algoritmos de solución que faciliten el manejo y aplicación de las ecuaciones. Los algoritmos son una serie de pasos específicos para obtener la solución de una cierta tarea y le da la oportunidad al ingeniero de enfocarse en el resultado y analizarlo.

Sección 7.1

Perfil del cimacio

El perfil de un cimacio se divide en dos tramos: aguas arriba y agua abajo de la cresta. El perfil aguas arriba de la cresta se obtiene mediante el método semigráfico explicado en el capítulo tres y la parte aguas abajo de la cresta se obtiene de la ecuación 2.1.

Algoritmo PC

1. Para el criterio WES es suficiente con definir la carga de diseño, H_0 y la inclinación del canal aguas abajo α , pero para el criterio USBR además es necesario

- conocer la carga de velocidad h_a ; por tanto la geometría y el gasto de diseño.
- Los valores de las variables del criterio WES sólo están en función de la carga total de diseño y son: $k = 0,5$, $n = 1,85$, $x_c = 0,27H_0$, $y_c = 0,126H_0$, $R_1 = 0,5H_0$ y $R_2 = 0,2H_0$. Por otro lado al emplear el criterio del USBR se usa los cuadros 2.1 y 2.2 para obtener los valores de los mismos variables (k , n , x_c , y_c , R_1 , y R_2)
 - Obtener la coordenada x_T del punto de tangencia P_T de la ecuación:

$$x_T = \frac{H_0}{\left[k \left(\frac{1}{\tan \alpha} \right) n \right]^{\frac{1}{n-1}}}$$

Una vez obtenido el valor de x_T se sustituye en la siguiente ecuación para obtener y_T

$$y_T = -kH_0 \left(\frac{x_T}{H_0} \right)^n$$

- Para obtener el punto B se deben resolver las ecuaciones siguientes simultáneamente.

$$(x - 0)^2 + (y - (-R_1))^2 = (R_1 - R_2)^2$$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R_2^2$$

La solución de las dos ecuaciones proporciona dos soluciones; la correcta es la coordenada que se ubica dentro del triángulo OCA , de la figura 2.3.

- Para obtener el punto P se deben resolver las ecuaciones siguientes simultáneamente

$$(x - 0)^2 + (y - (-R_1))^2 = (R_1 - R_2)^2$$

$$\frac{y - (-R_1)}{x - 0} = \frac{y_B - (-R_1)}{x_B - 0}$$

6. Para dibujar el perfil del cimacio se debe considerar lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = -kH_0 \left(\frac{x}{H_0} \right)^n & 0 \leq x \leq x_T \\ y = \sqrt{R_1^2 - x^2} - R_1 & x_P \leq x \leq 0 \\ y = y_B + \sqrt{-x^2 + 2x x_B - x_B^2 + R_2^2} & x_c \leq x \leq x_P \end{array} \right.$$

A continuación se muestra en la figura 7.1, una diagrama de flujo para obtener el perfil de un cimacio.

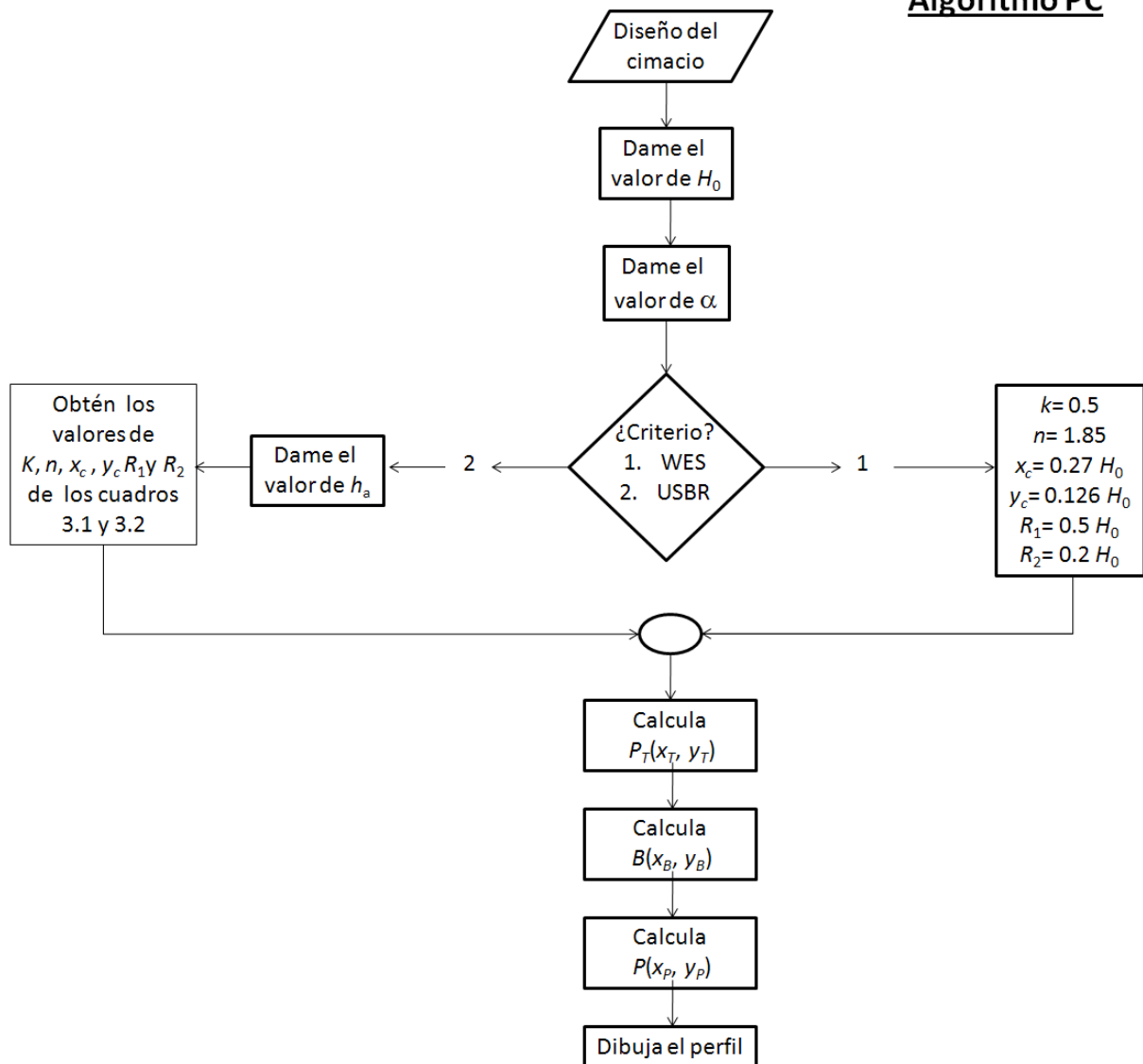
Algoritmo PC

Figura 7.1: Diagrama de flujo del perfil de un cimacio

Régimen crítico

Una vez que la forma del cimacio ha sido diseñada y establecida es necesario conocer tanto la posición del tirante crítico como su magnitud, por lo que los siguientes subcapítulos presentarán la manera de obtener los mismos.

7.2.1. Localización del tirante crítico

La posición del régimen crítico siempre esta en la parte aguas abajo de la cresta de un cimacio, ya que cuando el agua llega a la cresta aún se encuentra en un régimen subcrítico pero cambia a régimen supercrítico antes del punto de tangencia. Por lo tanto, debe de existir un punto en donde el flujo pasa de subcrítico a supercrítico. La localización donde se presenta la condición crítica es de suma importancia para obtener la carga de presión, ya que, la carga de presión esta en función del régimen. El procedimiento es el mismo tanto para aguas arriba como para aguas abajo de la cresta.

Algoritmo TC

Este algoritmo procede el algoritmo *Algoritmo PC* por consiguiente empieza la numeración apartir del algoritmo anterior

7. Elegir la carga total de operación del cimacio H
8. Proponer $x_{critico}$, para la posición del tirante crítico
9. Obtener la posición $\frac{\zeta}{H_0}$ correspondiente a ese valor de x sobre el perfil del cimacio:

$$\frac{\zeta}{H_0} = -k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n \quad (7.1)$$

10. Valuar la primera derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre aguas abajo de la cresta con respecto a x ; también conocido como la tangente del ángulo θ

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{k \left(\frac{x}{H_0}\right)^n n H_0}{x} \quad (7.2)$$

11. Obtener el coseno del ángulo θ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^2 H_0^2}{x^2}}} \quad (7.3)$$

12. Evaluar la segunda derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre con respecto a x

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{k H_0 \left(\frac{x}{H_0}\right)^n n(n-1)}{x^2} \quad (7.4)$$

13. Calcular la curvatura de la carga de diseño κH_0 del perfil para el punto de análisis mediante la ecuación 7.5

$$\kappa H_0 = -\frac{k \left(\frac{x}{H_0}\right)^n n(n-1) H_0^2}{x^2 \left[1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^2 H_0^2}{x^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (7.5)$$

14. Obtener $H_0^2 \frac{d\kappa}{dx}$

$$H_0^2 \frac{d\kappa}{dx} = \frac{k n H_0^3 (n-1) \left(\frac{x}{H_0}\right)^n \left[-n x^2 + 2 k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^3 H_0^2 + 2 x^2 - k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^2 H_0^2\right]}{\sqrt{\frac{x^2 + k^2 \left(\frac{x}{H_0}\right)^{2n} n^2 H_0^2}{x^2}} \left[x^2 + k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^2 H_0^2\right]^2 x} \quad (7.6)$$

15. Obtener χ_c de la ecuación 4.8 que es

$$\frac{\kappa H_0}{\cos \theta} \left(\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0}\right) = \chi_c - \frac{1}{2} \frac{(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)}{\ln(1 - \chi_c) + 1} \quad (7.7)$$

16. Resolver la ecuación 7.8

$$(1 - \chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \left[2 \left(\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right) - 3 \frac{\cos \theta}{\kappa H_0} \chi_c \right] \frac{H_0^2 \frac{d\kappa}{dx}}{\kappa H_0} = 0 \quad (7.8)$$

Si es igual a cero, entonces la posición del régimen crítico sería ese punto, si es distinto de cero, se vuelve al paso 8 en donde se propone otro valor de x , hasta encontrar el valor de x que haga que la ecuación 7.8 sea igual a cero.

7.2.2. Valor del tirante crítico

17. Una vez conocido la posición del tirante se obtiene χ_{cc} de la siguiente ecuación en donde los valores de κH_0 y $\cos \theta$ son conocidos por haber localizado al tirante crítico:

$$\frac{\kappa H_0}{\cos \theta} (F \kappa H_0)^2 = -\frac{1}{2} \frac{[(1 - \chi_{cc}) \ln(1 - \chi_{cc})]^3}{\ln(1 - \chi_{cc}) + 1} \quad (7.9)$$

donde

$$F = \frac{q}{\sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}}}$$

18. Obtener d_c

$$\chi_{cc} = \kappa d_c \quad (7.10)$$

donde

$$\kappa = -\frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n(n-1) H_0}{x^2 \left[1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right)^2 n^2 H_0^2}{x^2} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

A continuación se muestra un diagrama de flujo para el tirante crítico; figura 7.2

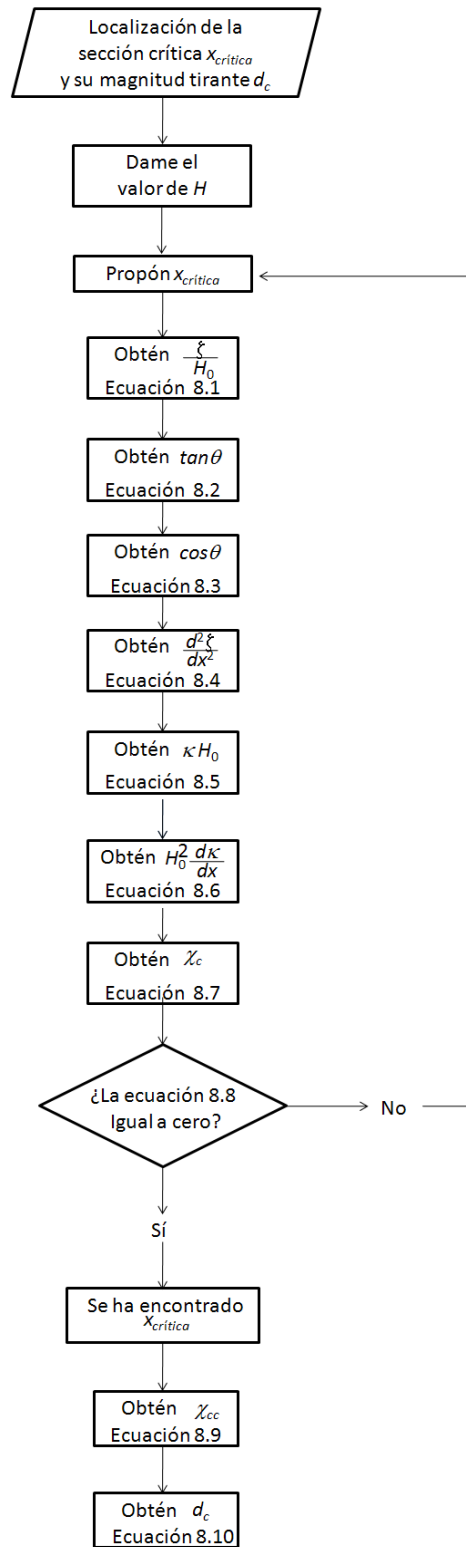
Algoritmo TC

Figura 7.2: Diagrama de flujo para localizar y obtener el tirante crítico

Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión sobre el cimacio

Antes de obtener el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de la presión sobre el cimacio se deben calcular algunas características del flujo que al vez son dependientes del la localización y valor del tirante crítico.

Igual como los algoritmos anteriores este algoritmo sigue la numeración del último algoritmo (*Algoritmo TC*) porque es indispensable llevar acabo los algoritmos anteriores para poder terminar esté. Debido a que el perfil del cimacio responde a distintas curvas que lo definen y que se han identificado en el capítulo tres, es necesario hacer dichos cálculos preliminares de acuerdo con los intervalos siguientes:

$$x_c \leq x \leq x_P$$

$$x_P \leq x \leq 0$$

$$0 \leq x \leq x_T$$

es decir, hay un un análisis distinto para cada intervalo dependiendo en que tramo del cimacio se quiere obtener el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión sobre el cimacio; razon por la numeración siguiente.

Algoritmo SU y PR

Igual como los algoritmos anteriores este algoritmo sigue la última numeración porque es indispensable llevar acabo los algoritmos anteriores para poder terminar al algortimo que se presenta a continuación:

19. Proponer x , del cual se desea conocer el perfil de la superficie libre y la carga de presión.

7.3.1. Intervalo de $x_c \leq x \leq x_P$

Ese intervalo corresponde al arco A_4 de la figura 2.3

Las variables x_B, y_B es la coordenada del punto B del método semigráfico y R_2 el radio de curvatura, ambos explicados en el capítulo tres

20. Obtener la posición $\frac{\zeta}{H_0}$ correspondiente a ese valor de x sobre el perfil del cimacio:

$$\frac{\zeta}{H_0} = \frac{y_B + \sqrt{-x^2 + 2xx_B - x_B^2 + R_2^2}}{H_0} \quad (7.11)$$

21. Valuar la primera derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre aguas abajo de la cresta con respecto a x ; también conocido como la tangente del ángulo θ

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = \frac{x - x_B}{\sqrt{-x^2 + 2xx_B - x_B^2 + R_2^2}} \quad (7.12)$$

22. Obtener el coseno del ángulo θ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(x-x_B)^2}{-x^2 + 2xx_B - x_B^2 + R_2^2}}} \quad (7.13)$$

23. Obtener el seno del ángulo θ

$$\sin \theta = \frac{x - x_B}{\left(\sqrt{-x^2 + 2xx_B - x_B^2 + R_2^2}\right) \sqrt{-\frac{R_2^2}{x^2 - 2xx_B + x_B^2 - R_2^2}}} \quad (7.14)$$

24. Calcular la curvatura por la carga de diseño κH_0 del perfil para el punto de análisis. Por ser un tramo de círculo, la curvatura κ es $\kappa = \frac{1}{r}$ donde r es el radio

del círculo.

$$\kappa H_0 = \frac{H_0}{R_2} \quad (7.15)$$

7.3.2. Intervalo de $x_P \leq x \leq 0$

Ese intervalo corresponde al arco A_3 de la figura 2.3 donde R_1 es el radio de curvatura de ese tramo de círculo A_3 .

20. Obtener la posición $\frac{\zeta}{H_0}$ correspondiente a ese valor de x sobre el perfil del cimacio

$$\frac{\zeta}{H_0} = \frac{\sqrt{R_1^2 - x^2} - R_1}{H_0} \quad (7.16)$$

21. Obtener la primera derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre aguas abajo de la cresta con respecto a x ; también conocido como la tangente del ángulo θ

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R_1^2 - x^2}} \quad (7.17)$$

22. Obtener el coseno del ángulo θ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{R_1^2 - x^2}}} \quad (7.18)$$

23. Obtener el seno del ángulo θ

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{R_1^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R_1^2 - x^2}}} \quad (7.19)$$

24. Calcular la curvatura κ por la carga de diseño κH_0 del perfil para el punto de análisis. Por ser un tramo del arco A_3 la curvatura $\kappa = \frac{1}{r}$ donde r es el radio

del círculo.

$$\kappa H_0 = \frac{H_0}{R_1} \quad (7.20)$$

7.3.3. Intervalo de $0 \leq x \leq x_T$

20. Obtener la posición $\frac{\zeta}{H_0}$ correspondiente a ese valor de x sobre el perfil del cimacio:

$$\frac{\zeta}{H_0} = -k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n \quad (7.21)$$

21. Valuar la primera derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre aguas abajo de la cresta con respecto a x ; también conocido como la tangente del ángulo θ

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n H_0}{x} \quad (7.22)$$

22. Obtener el coseno del ángulo θ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right)^2 n^2 H_0^2}{x^2}}} \quad (7.23)$$

23. Obtener el seno del ángulo θ

$$\sin \theta = \frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n H_0}{x \sqrt{1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right)^2 n^2 H_0^2}{x^2}}} \quad (7.24)$$

24. Obtener la curvatura κ y la curvatura multiplicada por la carga de diseño κH_0 del perfil para el punto de análisis; en ese intervalo el perfil del cimacio se define mediante la ecuación 7.21 por lo que la curvatura es diferente en cada punto, por consiguiente al emplear la ecuación 3.3, κH_0 se obtiene mediante la ecuación

siguiente

$$\kappa H_0 = - \frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n(n-1) H_0^2}{x^2 \left[1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right)^2 n^2 H_0^2}{x^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (7.25)$$

Sección 7.4

Perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión

Para la carga de presión sobre un cimacio de cresta libre hasta ahora siempre se calculaban por medio de gráficas y procedimientos empíricos y ahora se puede obtener al terminar el análisis en esta sección.

25. Obtener el valor de χ mediante la solución de la ecuación 3.23 que se mantiene y es

$$\left[\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right] = \frac{\cos \theta}{\kappa H_d} \chi + \left[\frac{F \kappa H_d}{(1 - \chi) \ln(1 - \chi)} \right]^2 \quad (7.26)$$

La ecuación tiene dos soluciones una en régimen subcrítico y la otra en régimen supercrítico. Se recuerda que F se obtiene mediante la ecuación 3.6 y es:

$$F = \frac{q}{\sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}}}$$

donde

$$q = \frac{Q}{L_e}$$

En la figura 7.3 se presenta un ejemplo de la representación gráficamente de la ecuación 7.26; sobre la cual se indica la solución que se debe de elegir.

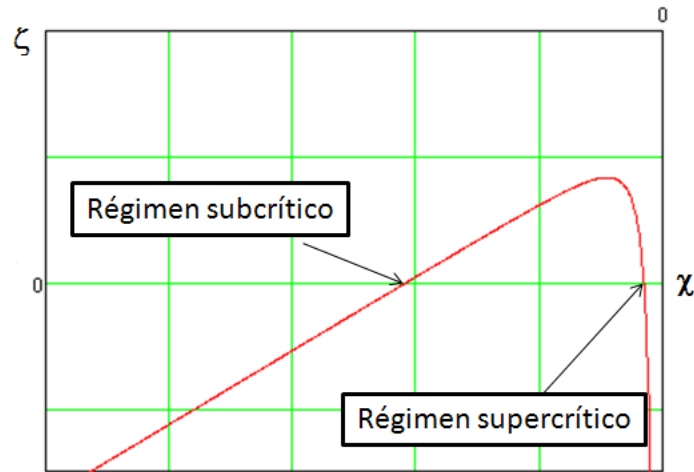


Figura 7.3: Solución de la ecuación 6.7

26. Obtener el tirante d mediante la ecuación siguiente

$$\chi = \kappa d \quad (7.27)$$

27. Calcular la relación adimensional entre la carga de presión y la carga total de diseño $\frac{P}{g\rho H_0}$, que actúa en el punto de análisis mediante la ecuación 6.6 que mantiene igual y es:

$$\frac{P}{g\rho H_0} = \left[\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right] - \left[\frac{F\kappa H_0}{\ln(1-\chi)} \right]^2 \quad (7.28)$$

28. Para obtener la presión actuante en el punto de análisis, se multiplica el resultado del paso anterior por la carga de diseño, H_0 .

La figura 7.4 muestra el diagrama de flujo para obtener el perfil de la superficie libre del agua y la carga de presión en el fondo de un cimacio para cualquier punto de análisis.

Algoritmo SU y PR

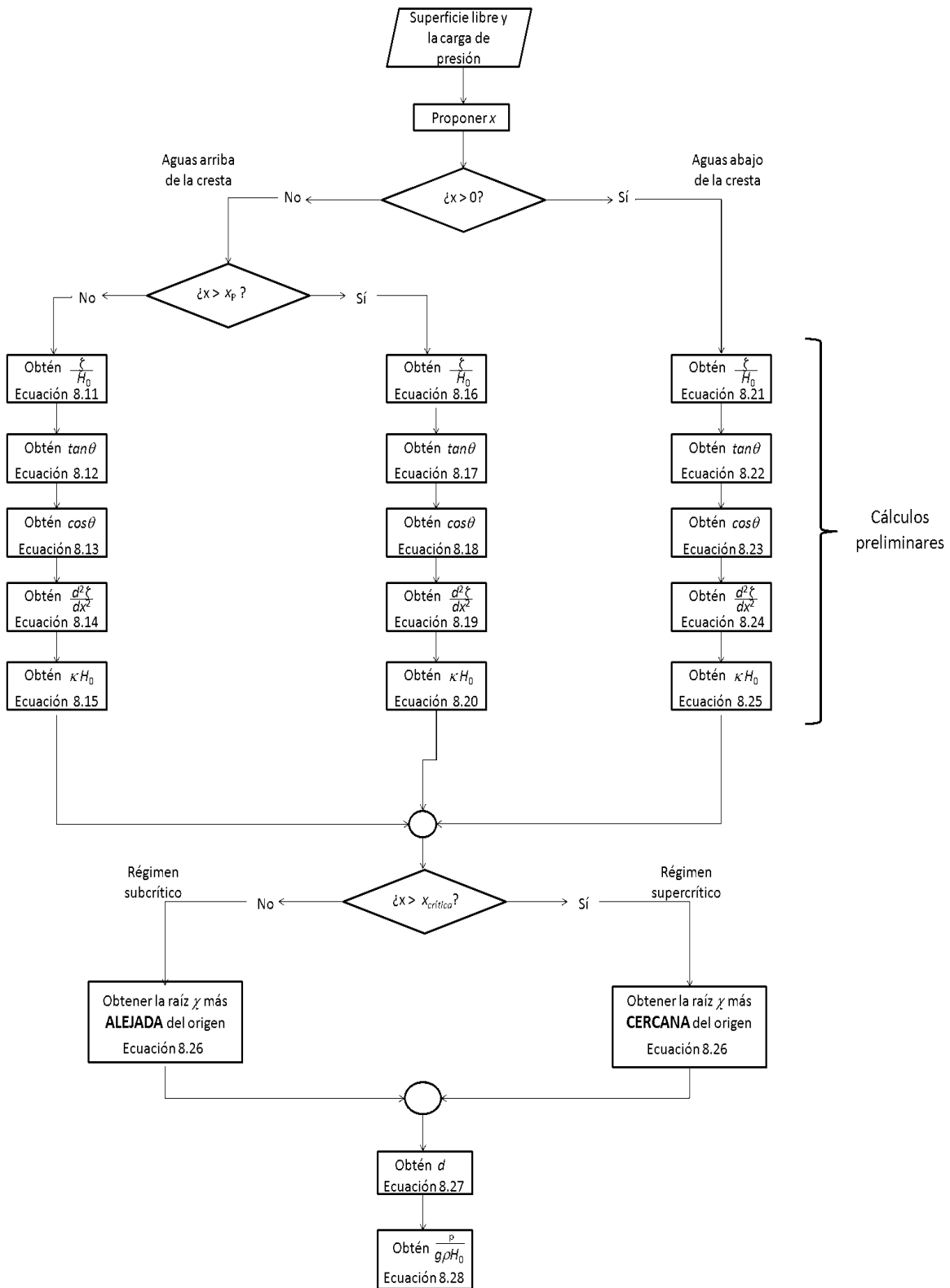


Figura 7.4: Diagrama de flujo para obtener el perfil de la superficie libre del agua y la carga de presión

Comentarios

Para resolver el algoritmo para la obtención de la presión sobre cualquier punto del perfil del cimacio, es importante observar en que intervalo se encuentra el punto de análisis; $x_c \leq x \leq x_P$ o $x_P \leq x \leq 0$ o $0 \leq x \leq x_T$, porque el intervalo determina tanto el perfil del cimacio como en qué régimen se encuentra el flujo. Obtener los valores preliminares del flujo en el punto de análisis tienen gran importancia en la elección correcta de la carga de presión en el mismo. La solución de la ecuación 6.7 tiene dos soluciones, χ , la solución correcta depende en que régimen del flujo se encuentra el punto de análisis. Por lo mismo se recomienda graficar las ecuaciones para así poder diferenciar entre las dos soluciones. En efecto el régimen subcrítico corresponde a todo x aguas arriba del punto crítico y es la solución más alejada del origen y la parte aguas abajo del punto crítico se encuentra el flujo en régimen supercrítico y la solución es la cercana al origen.

También el parámetro adimensional, F , se puede obtener mediante la ecuación 3.6 o por la ecuación 3.8 en donde la segunda está en función del coeficiente de gasto C ; por lo que, en caso de tener el coeficiente de gasto se puede utilizar esa ecuación para obtener el parámetro adimensional, F .

La localización del régimen crítico es un proceso de prueba y error; sólo con la experiencia se obtendrá la respuesta rápida donde se localiza el punto. El cuadro 7.1 muestra la posición aproximada de ese régimen para distintos cargas de operación.

		Régimen Crítico
		$x_{critico}$
Carga de operación, $\frac{H}{H_0}$	0,50	$0,06H_0$
	1,00	$0,09H_0$
	1,33	$0,12H_0$

Cuadro 7.1: Valores aproximados de la posición del régimen crítico para tres condiciones de operación sobre un cimacio

Una aplicación sencilla de los algoritmos de este capítulo es la posibilidad de poder programarlo en una hoja de cálculo o en un software que resuelva y grafique las ecuaciones, como así Mathcad y MATLAB. Se presenta el algoritmo completo, figura 7.5 desarrollado en el programa MATLAB. El apéndice B del presente trabajo desarrolla el algoritmo completo en el programa MATLAB, comprobando así la enorme ventaja de tener al algoritmo programado.

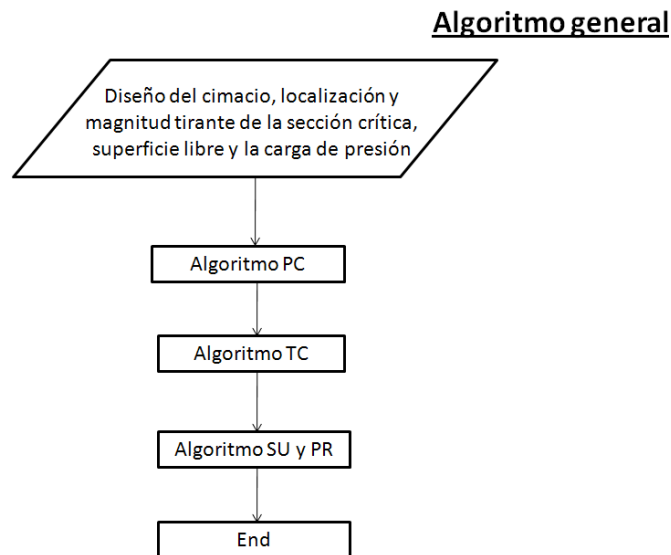


Figura 7.5: Diagrama de flujo completo

CAPÍTULO 8

Ejemplo de aplicación

Para emplear los algoritmos y ecuaciones planteados en el presente trabajo es necesario aplicarlos en un modelo físico que disponga la Facultad de Ingeniería, para que el alumno pueda comprobarlo con otros datos.

Cabe aclarar que el presente trabajo presenta los algoritmos y ecuaciones para cualquier proyecto que tenga un cimacio de cresta libre, ya sea modelo o prototipo.

Sección 8.1

Planteamiento del problema

Al analizar el funcionamiento hidráulico de un cimacio de cresta libre localizado en el laboratorio de hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. El cimacio se opera con tres cargas de operación incluyendo la de diseño, por lo que se procede a:

a) Revisar el perfil del cimacio y obtener la carga de diseño H_0 . Obtener el perfil del cimacio con uno de los criterios presentados en este trabajo y compáralo con el construido.

Para las tres condiciones de operación obtener:

- b) El perfil de la superficie libre del agua sobre el cimacio medido
- c) La superficie libre del agua sobre el cimacio
- d) La distribución de la carga de presión sobre el fondo del cimacio

Para los últimos incisos por medio de la solución de las ecuaciones de los algoritmos del capítulo ocho presentadas en este trabajo y mediante las gráficas experimentales.

- e) Comparar los resultados obtenidos con los valores medidos en el laboratorio.

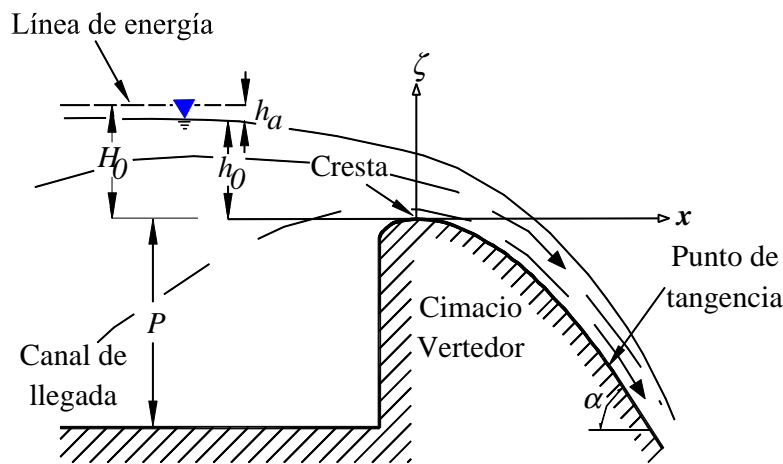


Figura 8.1: Vertido libre sobre un vertedor de pared delgada

El cimacio no tiene contracciones laterales por lo que el ancho del canal de aproximación al cimacio es igual al ancho del vertedor de la cresta $L_e = 0,4$ m. La profundidad de canal entre la cresta y el fondo del canal de llegada es $P = 0,3031$ m.

Sección 8.2

Solución del problema

Se midió el perfil del cimacio. Luego se estableció la condición de diseño, que corresponde a una carga de operación sobre el cimacio, $h_0 = 0,150$ m, figura 8.1, se obtuvo el gasto, Q , del flujo transitando en el canal y se midió el perfil de la

superficie libre del agua sobre el cimacio. Se modificó la carga de operación y se repitió el procedimiento para otras dos condiciones distintas a la de diseño; $h_1 = 0,0750$ m (aproximadamente $0,5h_0$) m y $h_2 = 0,2052$ m (aproximadamente $1,33h_0$).

Una vez establecida la carga de diseño sobre el cimacio; se midió la carga sobre el vertedor de pared delgada que se encuentra aguas abajo del cimacio, para calcular el gasto. Para cada condición de operación del cimacio se midió la carga sobre el vertedor y se obtuvo el gasto correspondiente.

En el cuadro 8.1 se muestran algunos resultados y cálculos preliminares para aplicar los algoritmos de solución.

		Condiciones de operación		
		Diseño	Menor a la de diseño	Mayor a la de diseño
		$h_0 = 0,1500$ m	$h_1 = 0,0750$ m	$h_2 = 0,2052$ m
Gasto Q , en $\frac{m^3}{s}$		0,0589	0,0156	0,0933
Área hidráulica A , en m^2	$A = (P + h)b$	0,1836	0,1516	0,2037
Velocidad media V , en $\frac{m}{s}$	$V = \frac{Q}{A}$	0,3206	0,1032	0,45792
Carga de velocidad h_a , en m	$h_a = \frac{V^2}{2g}$	0,0052	0,0005424	0,01068769
Carga total H , en m	$H = h + h_a$	0,1550	0,0755	0,2159
Coefficiente de descarga experimental, en $\frac{m^{1/2}}{s}$	$C = \frac{Q}{LeH^{\frac{3}{2}}}$	2,2945	1,8835	2,32500133
Parámetro adimensional, F	$F = \frac{C}{\sqrt{2g}} \left(\frac{H}{H_0} \right)^{\frac{3}{2}}$	0,518010	0,137576	0,821148
Relación adimensional de perfil de cimacio	$\frac{P}{H_0}$	1,888	4,00794	1,40165

Cuadro 8.1: Cálculos preliminares para la solución del problema

Cabe destacar que para el desarrollo del ejemplo se eligió el criterio del USBR, de donde es necesario emplear el valor $\frac{h_a}{H_0}$ que vale 0,031613 de donde de los cuadros 2.1

y 2.2 se obtiene el valor de las siguientes variables:

$$k = 0,50732$$

$$n = 1,85619$$

$$\frac{R_1}{H_0} = 0,51419; R_1 = 0,07870$$

$$\frac{R_2}{H_0} = 0,21619; R_2 = 0,03351$$

$$\frac{x_c}{H_0} = 0,26719; x_c = -0,04142$$

$$\frac{y_c}{H_0} = 0,11335; y_c = -0,01757$$

Para revisar el perfil del cimacio y darle solución al inciso **a**, se debe medir el perfil del cimacio cuyos valores son:

$x, \text{ m}$	$y, \text{ m}$
-0.03	-0.0107
-0.02	-0.0040
-0.01	-0.0006
0	0
0.04	-0.0063
0.08	-0.0231
0.12	-0.0489
0.16	-0.0840
0.20	-0.1266

Cuadro 8.2: Coordenadas del perfil medido del cimacio

Para obtener la carga total de diseño H_0 para cada punto de medición del perfil medido, se obtuvo de la ecuación 2.1 la carga H_0 que corresponde, de acuerdo con los resultados del cuadro 8.3.

x , m	y , m	H_0 , m
0.04	-0.0063	0.156
0.08	-0.0231	0.154
0.12	-0.0489	0.155
0.16	-0.0840	0.154
0.20	-0.1266	0.1545
		0.155

promedio de H_0

Cuadro 8.3: Coordenadas del perfil medido del cimacio aguas abajo de la cresta

8.2.1. Perfil del cimacio

La revisión del perfil existente del cimacio se hace utilizando el valor de H_0 promedio. La programación para la obtención del perfil en la hoja de Mathcad se hizo siguiendo los pasos del algoritmo *perfil del cimacio* ejemplificado en la figura 7.1. A continuación se muestran las corridas hechas en el programa donde $H_0 = 0,155$ m, $R_1 = 0,07870$, $R_2 = 0,03351$, $x_c = -0,041415$, $y_c = -0,01757$:

$H_0 := 0.155$			
$R_1 := 0.07870$	$R_2 := 0.03351$	$x_c := -0.041415$	$y_c := -0.01757$
$k := 0.50732$	$n := 1.85619$	$\alpha := 50.\text{deg}$	

Obtener el punto de tangencia P_T	
$x_T := \frac{H_0}{\left[k \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} \right) \cdot n \right]^{\frac{1}{n-1}}} = 0.2040768$	$y_T := -k \cdot H_0 \cdot \left(\frac{x_T}{H_0} \right)^n = -0.131026$

Obtener el Punto B

Se Resuelve las siguientes ecuaciones simultáneamente

Given

Circulo 1

Circulo 2

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R_2^2$$

$$(x - 0)^2 + [y - (-R_1)]^2 = (R_1 - R_2)^2$$

$$\text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} -0.0130679062764190713 & -0.035329628233294230046 \\ -0.035440712840469423162 & -0.050522820068409627635 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del punto B que quedan dentro del triangulo AOC es:

$$x_B := -0.0130679062764190713$$

$$y_B := -0.035440712840469423162$$

Obtener el Punto P

Se Resuelve las siguientes ecuaciones simultáneamente

$$x := 1 \quad y := 1$$

Given

$$\left((x - 0)^2 + [y - (-R_1)]^2 = R_1^2 \right) \quad \left(\frac{y - (-R_1)}{x - 0} = \frac{y_B - (-R_1)}{x_B - 0} \right)$$

$$x < 0$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} -0.0227566 \\ -0.0033677 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del punto P que es mas cerca al eje X es:

$$x_P := -0.0227566$$

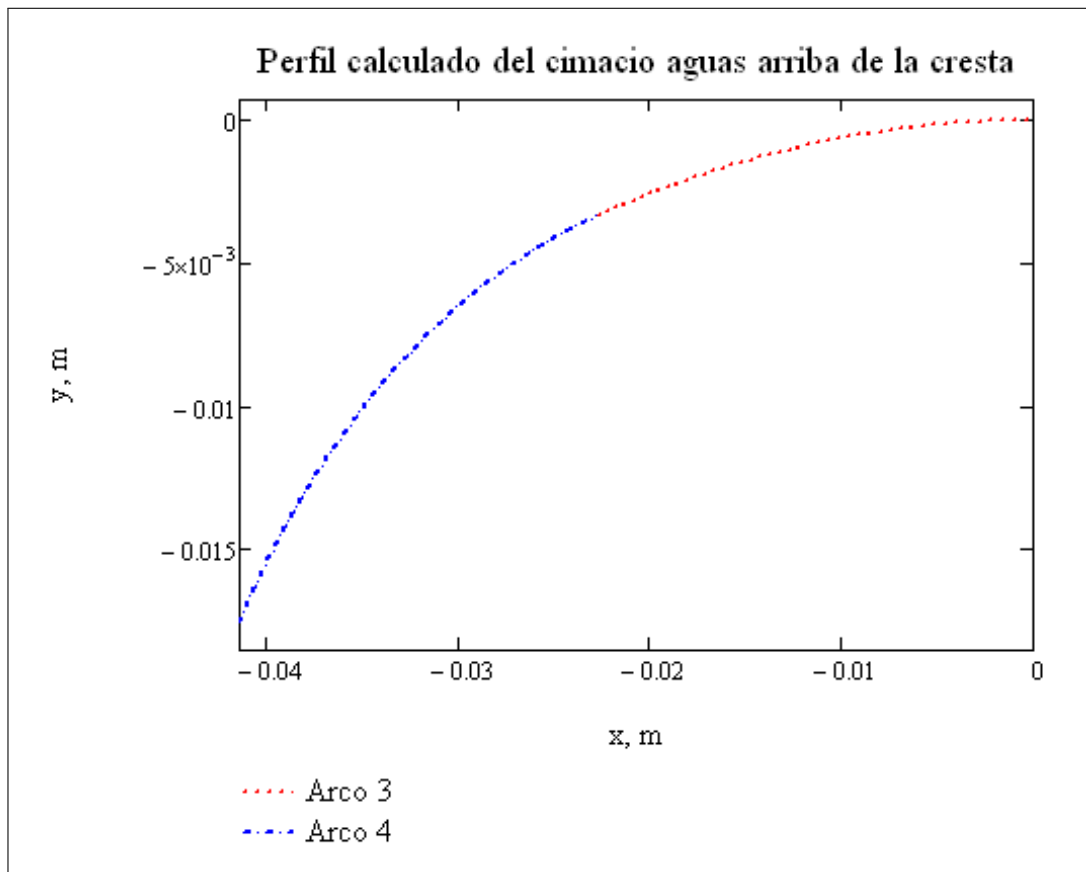
$$y_P := -0.0033677$$

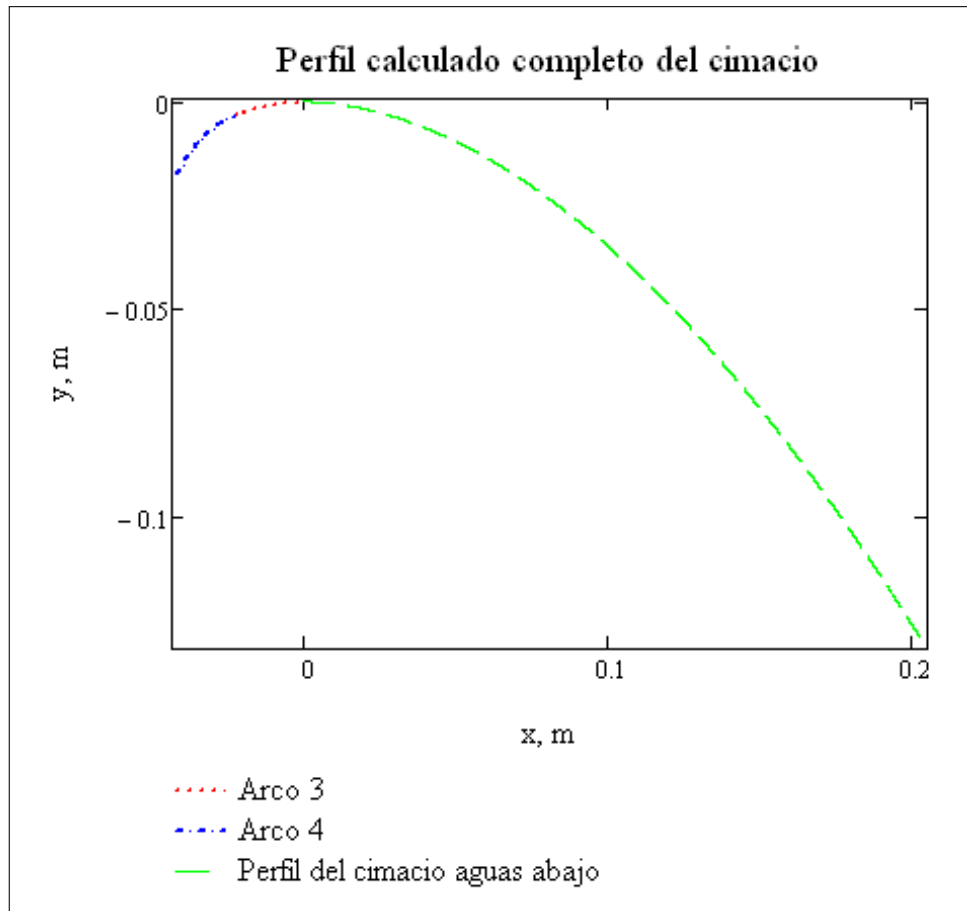
Graficar el perfil del cimacio aguas arriba del cimacio:

$$\text{Perfil}_{\text{abajo}}(x_{\text{abajo}}) := -k \cdot H_0 \cdot \left(\frac{x_{\text{abajo}}}{H_0} \right)^n \quad x_{\text{abajo}} := 0, (0 + 0.00001) \dots x_T$$

$$A_3(x_3) := \sqrt{R_1^2 - x_3^2} - R_1 \quad x_3 := x_p, (x_p + 0.000001) \dots 0$$

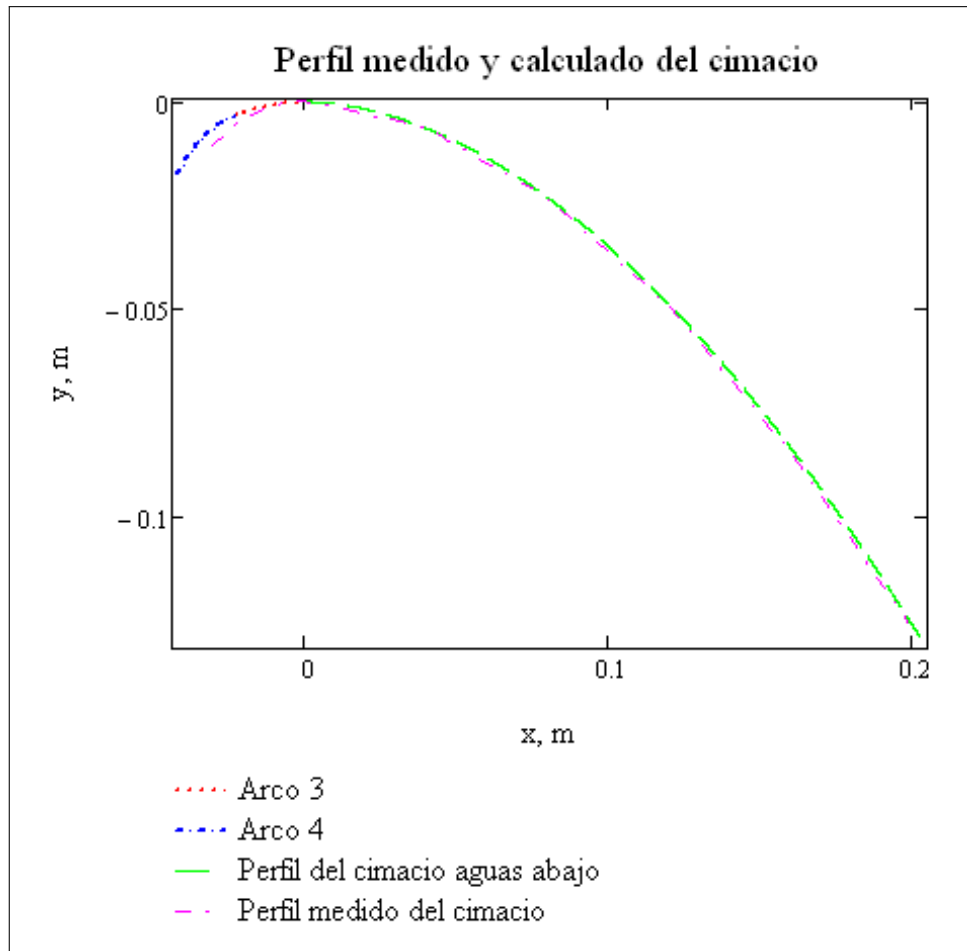
$$A_4(x_4) := y_B + \sqrt{-(x_4)^2 + 2 \cdot x_4 \cdot x_B - x_B^2 + R_2^2} \quad x_4 := x_c, (x_c + 0.000001) \dots x_p$$





Los puntos medidos son:

$x_{\text{puntos}} := \begin{pmatrix} -0.03 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0 \\ 0.04 \\ 0.08 \\ 0.12 \\ 0.16 \\ 0.20 \end{pmatrix}$	$y_{\text{Puntos}} := \begin{pmatrix} -0.0107 \\ -0.004 \\ -0.0006 \\ 0 \\ -0.0063 \\ -0.0231 \\ -0.0489 \\ -0.084 \\ -0.1266 \end{pmatrix}$
---	--



8.2.2. Régimen crítico

El análisis para la obtención de ese régimen está en función de la carga de operación, por lo que, cada una de las tres cargas de operación del problema tendría un análisis distinto y por lo tanto una posición y tirante crítico diferente. Como se había mencionado la localización de éste régimen se obtiene mediante un proceso iterativo.

Condiciones de operacion		
$H_{\text{cr}} := 0.155$	$H_0 := 0.155$	
Variables para el perfil		
$n := 1.85619$	$k := 0.50732$	$F := 0.520968$

Punto de analisis

$$x := 0.0148851$$

$$y := \left[-k \cdot H_0 \cdot \left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right] = -0.00101576$$

Variables adimensionales

$$x_{\text{sobre}}_{H_0} := \frac{x}{H_0} = 0.0960329$$

$$H_{\text{sobre}}_{H_0} := \frac{H}{H_0} = 1$$

$$\text{posicion} := -k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n = -0.0065533$$

$$\tan \theta := \frac{-k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n \cdot n \cdot H_0}{x} = -0.12666675$$

$$\cos \theta := \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2 \cdot \left[\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right]^2 \cdot n^2 \cdot H_0^2}{x^2}}} = 0.99207303$$

$$\text{segunda}_{\text{derivada}} := -\frac{k \cdot H_0 \cdot \left(\frac{x}{H_0} \right)^n \cdot n \cdot (n-1)}{x^2} = -7.2858636$$

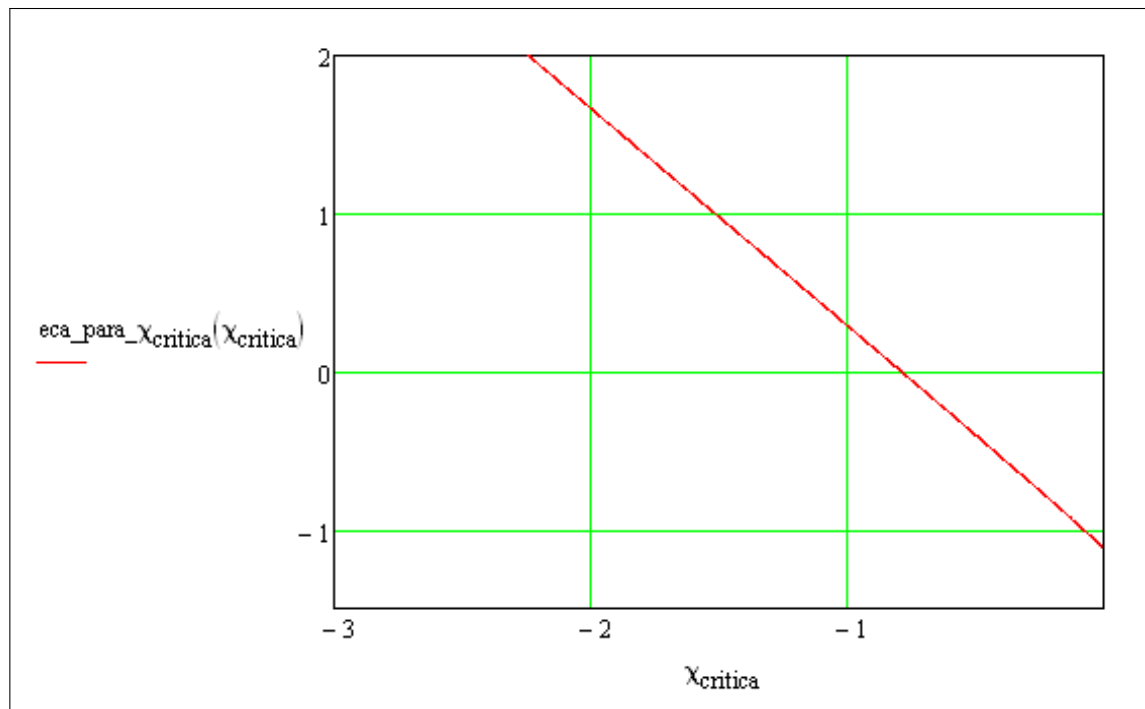
$$\text{kappa}_{H_0} := \frac{-\left[k \cdot \left(\frac{x}{H_0} \right)^n \cdot n \cdot (n-1) \cdot H_0^2 \right]}{x^2 \cdot \left[1 + \frac{k^2 \cdot \left[\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right]^2 \cdot n^2 \cdot H_0^2}{x^2} \right]^{\frac{3}{2}}} = -1.10266518$$

$$\text{segunda_derivada_kappa} := \frac{k \cdot n \cdot H_0^3 \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{x}{H_0}\right)^n \left[-n \cdot x^2 + 2 \cdot k^2 \cdot \left[\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right]^2 \cdot n^3 \cdot H_0^2 + 2 \cdot x^2 - k^2 \cdot \left[\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right]^2 \cdot n^2 \cdot H_0^2 \right]}{\sqrt{\frac{x^2 + k^2 \cdot \left[\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right]^2 \cdot n^2 \cdot H_0^2}{x^2} \left[x^2 + k^2 \cdot \left[\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right]^2 \cdot n^2 \cdot H_0^2 \right]^2} \cdot x}$$

$$\text{segunda_derivada_kappa} = 2.11697235$$

Ecuacion para obtener χ critica

$$\text{eca_para_Xcritica}(X_{\text{critica}}) := \frac{\text{kappa}_{H_0}}{\cos\theta} (H_{\text{sobre } H_0} - \text{posicion}) - X_{\text{critica}} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(1 - X_{\text{critica}}) \cdot \ln(1 - X_{\text{critica}})}{\ln(1 - X_{\text{critica}}) + 1} \right]$$



$$X_{\text{critica}} := -1$$

$$X_{\text{resultado}} := \text{root}(\text{eca_para_Xcritica}(X_{\text{critica}}), X_{\text{critica}}) = -0.78958238$$

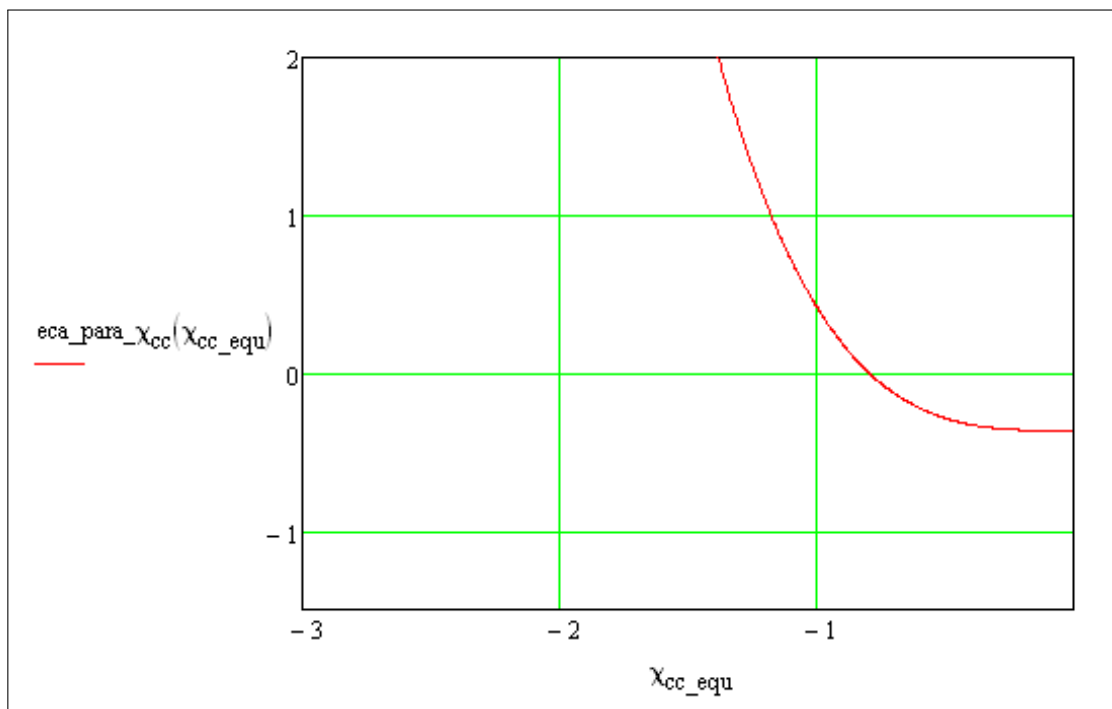
La ecuación para obtener la posición de la sección crítica

$$f := (1 - \chi_{\text{resultado}}) \cdot \tan\theta + \left[2 \cdot (H_{\text{sobre}} H_0 - \text{posicion}) - 3 \cdot \frac{\cos\theta}{\text{kappa}_{H0}} \cdot \chi_{\text{resultado}} \right] \cdot \frac{\text{segunda_derivada_kappa}}{\text{kappa}_{H0}}$$

$$f = -0.00000882$$

Ecuación para obtener χ_{cc}

$$\text{eca_para_}\chi_{cc}(\chi_{cc_equ}) := \frac{\text{kappa}_{H0}}{\cos\theta} (F \cdot \text{kappa}_{H0})^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{[(1 - \chi_{cc_equ}) \cdot \ln(1 - \chi_{cc_equ})]^3}{\ln(1 - \chi_{cc_equ}) + 1} \right]$$



$$\chi_{cc_equ} := -0.5$$

$$\chi_{cc} := \text{root}(\text{eca_para_}\chi_{cc}(\chi_{cc_equ}), \chi_{cc_equ}) = -0.79599176$$

$$\kappa := \frac{k \left[\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right] n \cdot H_0 \cdot (n-1)}{x^2 \cdot \left[1 + \frac{k^2 \left[\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right]^2 n^2 \cdot H_0^2}{x^2} \right]^{\frac{3}{2}}} = -7.11396893$$

$$d_c := \frac{\chi_{cc}}{\kappa} = 0.11189137$$

Es necesario obtener la posición del régimen crítico para cada una de las tres cargas de operación del cimacio, ya que la posición del régimen crítico depende de la carga total en que esta operando el cimacio. Sin mostrar la totalidad de iteraciones necesarias, en los cuadros 8.4, 8.5 y 8.6 se muestran los últimos cálculos para encontrar la posición del régimen crítico; es decir el punto x que haga que la ecuación 7.8 sea igual a cero.

$x_{crítica}$	$\frac{\zeta}{H_o}$	$\frac{d\zeta}{dx} = \tan\theta$	$\cos\theta$	$\frac{d^2\zeta}{dx^2}$	κH_0	$H_0^2 \frac{d\kappa}{dx}$	χ_c	ecuación 7.8
0,01	-0,00313184	-0,09010613	0,995965	-7,71479636	-1,18137667	3,01215211	-0,84100519	0,14205659
0,02	-0,01133885	-0,16311473	0,9869565	-6,98286013	-1,04054072	1,69653854	-0,75164806	-0,0963527
0,017	-0,00838604	-0,14192614	0,99007813	-7,14798459	-1,0752853	1,90715844	-0,77253676	-0,04372218
0,013	-0,00509684	-0,11280062	0,99369809	-7,4291354	-1,12988263	2,37211729	-0,80699064	0,04595916
0,0148851	-0,0065533	-0,12666675	0,99207303	-7,2858636	-1,10266518	2,11697235	-0,78958238	-0,00000882

Cuadro 8.4: Localización de la sección crítica para la carga de diseño; $H_0 = 0,1550m$

$x_{crítica}$	$\frac{\zeta}{H_o}$	$\frac{d\zeta}{dx} = \tan\theta$	$\cos\theta$	$\frac{d^2\zeta}{dx^2}$	κH_0	$H_0^2 \frac{d\kappa}{dx}$	χ_c	ecuación 7.8
0,004	-0,00057167	-0,04111895	0,99915569	-8,80140933	-1,36076588	7,81166588	-0,47523209	0,20161899
0,02	-0,01133885	-0,16311473	0,9869565	-6,98286013	-1,04054072	1,69653854	-0,37361184	-0,15812346
0,01	-0,00313184	-0,09010613	0,995965	-7,71479636	-1,18137667	3,01215211	-0,41463477	-0,01932059
0,008	-0,00206974	-0,07443564	0,99724113	-7,96638142	-1,22459741	3,7479249	-0,42869574	0,02579391
0,009074	-0,00261497	-0,08291289	0,99658035	-7,82336198	-1,20022337	3,30793086	-0,42070546	0,00000619

Cuadro 8.5: Localización de la sección crítica para la carga de operación; $H_1 = 0,0755m$

$x_{crítica}$	$\frac{\zeta}{H_o}$	$\frac{d\zeta}{dx} = \tan\theta$	$\cos\theta$	$\frac{d^2\zeta}{dx^2}$	κH_0	$H_0^2 \frac{d\kappa}{dx}$	χ_c	ecuación 7.8
0,015	-0,00664751	-0,12750344	0,99196922	-7,27781117	-1,10110079	2,10379497	-1,05572067	0,07310688
0,03	-0,02406733	-0,23081326	0,97438179	-6,58733362	-0,94455846	1,33585531	-0,93145388	-0,20546569
0,02	-0,01133885	-0,16311473	0,9869565	-6,98286013	-1,04054072	1,69653854	-1,005192	-0,04486277
0,017	-0,00838604	-0,14192614	0,99007813	-7,14798459	-1,0752853	1,90715844	-1,03382352	0,02069908
0,017884	-0,00921346	-0,14822178	0,9891929	-7,096064	-1,06461405	1,83642213	-1,0249242	0,00000851

Cuadro 8.6: Localización de la sección crítica para la carga de operación; $H_2 = 0,2159m$

Para obtener el tirante crítico, d_c se resuelve la ecuación 4.12. La solución para cada carga de operación se presenta en el cuadro siguiente:

	Carga de operación		
	$H_o = 0,1550 \text{ m}$	$H_1 = 0,0755 \text{ m}$	$H_2 = 0,2159 \text{ m}$
$x_{critica}$	0,0148851	0,009074	0,017884
χ_{cc}	-0,79599176	-0,43572608	-0,99086255
κ	-7,11396893	-7,74337659	-6,93732449
d_c, m	0,11189137	0,05627081	0,14283065

Cuadro 8.7: Resumen de resultados del régimen crítico

8.2.3. Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión sobre el cimacio

Las características físicas del perfil de la lámina vertiente son distintas, de acuerdo con la condición de operación del cimacio; muchas de ellas se obtienen mediante las reglas trigonométricas y la derivación de ecuaciones. El software Mathcad permite la programación del algoritmo que permite obtener las características de acuerdo con la condición de operación,

Condiciones de operacion	
$H := 0.155$	$H_0 := 0.155$
Variables para el perfil	
$n := 1.853546$	$k := 0.503246$

Un parametro adimensional
$F := 0.520968$
Variable adimensional
$H_{sobre_H_0} := \frac{H}{H_0} = 1$

Punto de analisis

$$x := 0.2$$

$$x_{\text{sobre}_H_0} := \frac{x}{H_0} = 1.290323$$

Ecuacion del perfil del cimacio aguas abajo de la cresta (adimensional)

$$eca_{\text{aguas_abajo_sobre}_H_0} := -k \cdot \left(\frac{x}{H_0} \right)^n$$

$$y_{\text{sobre}_H_0} := eca_{\text{aguas_abajo_sobre}_H_0} = -0.807169$$

$$y := eca_{\text{aguas_abajo_sobre}_H_0} \cdot H_0 = -0.125111$$

La primera derivada de la ecuacion del perfil

$$\text{primera_derivada} := -\frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n \cdot H_0}{x} = -1.159497$$

cos θ

$$\cos_{\theta} := \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2 \left[\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right]^2 n^2 \cdot H_0^2}{x^2}}} = 0.653102$$

sin θ

$$\sin_{\theta} := \frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n \cdot H_0}{x \sqrt{1 + \frac{k^2 \left[\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right]^2 n^2 \cdot H_0^2}{x^2}}} = 0.75727$$

El termino κH_0

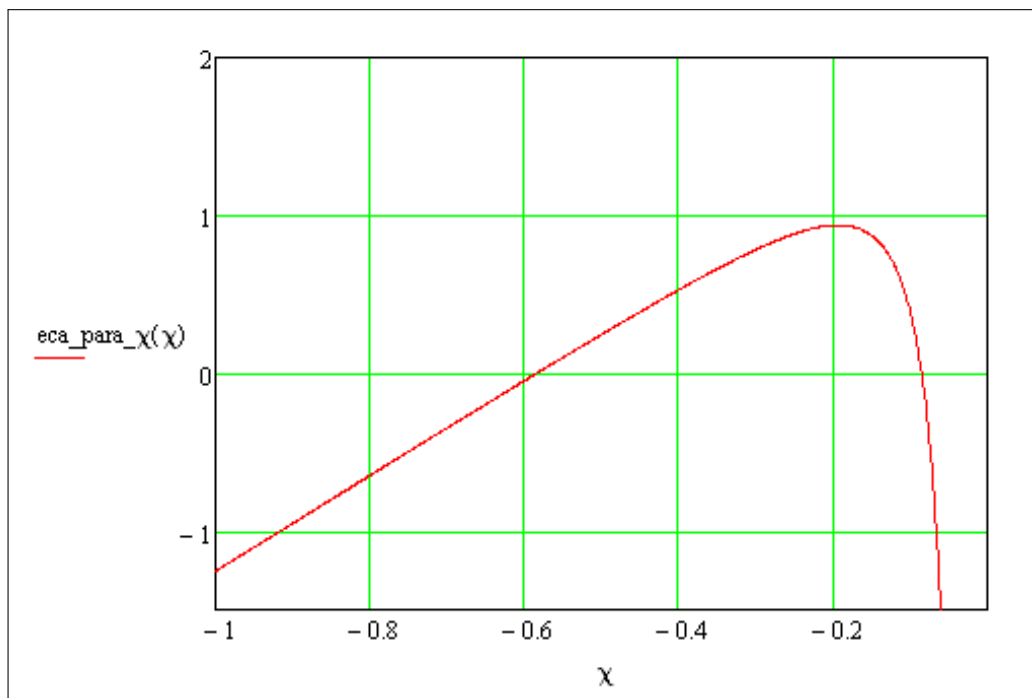
$$\kappa_{\text{por_}H_0} := - \frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n \cdot H_0^2 \cdot (n-1)}{x^2 \cdot \left[1 + \frac{k^2 \left[\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right]^2 n^2 \cdot H_0^2}{x^2} \right]^{\frac{3}{2}}} = -0.213669$$

8.2.4. Perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión

Una vez conocidas las características del cimacio se puede continuar con los incisos **c** y **d** y se resuelvan las ecuaciones 7.26, 7.27 y 7.28.

La ecuacion para obtener χ

$$\text{eca_para_}\chi(\chi) := (H_{\text{sobre } H_0} - y_{\text{sobre } H_0}) - \frac{\cos_{\theta} \cdot \chi}{\kappa_{\text{por_}H_0}} - \left[\frac{F \cdot \kappa_{\text{por_}H_0}}{(1 - \chi) \cdot \ln(1 - \chi)} \right]^2$$



$$\chi := -0.0003$$

$$\chi_{\text{resultado}} := \text{root}(\text{eca_para_}\chi(\chi), \chi) = -0.085978$$

El tirante d es

$$d_{\text{entre_H}_0} := \frac{\chi_{\text{resultado}}}{\kappa_{\text{por_H}_0}} = 0.402391 \qquad d := d_{\text{entre_H}_0} \cdot H_0 = 0.062371$$

La ecuación para obtener la carga de presión (adimensional)

$$\text{presion_sobre_H}_0 := (H_{\text{sobre_H}_0} - y_{\text{sobre_H}_0}) - \left(\frac{F \cdot \kappa_{\text{por_H}_0}}{\ln(1 - \chi_{\text{resultado}})} \right)^2 = -0.014179$$

$$\text{presion} := \text{presion_sobre_H}_0 \cdot H_0 = -0.002198$$

$$\text{presion_ajustada} := y - \text{presion} = -0.122914$$

Coordenadas de la superficie libre del agua

$$x_{\text{superficie}} := x + d \cdot \sin_{\theta} = 0.247231$$

$$y_{\text{superficie}} := y + d \cdot \cos_{\theta} = -0.084377$$

Los cuadros siguientes resumen las características de la lámina vertiente, la obtención de la superficie libre del agua y la carga de presión que actúa sobre el fondo del cimacio. Los cuadros 8.8 y 8.9 muestran los resultados obtenidos para la carga total de diseño \mathbf{H}_0 , los cuadros 8.10 y 8.11 para la carga total de operación \mathbf{H}_1 que corresponde a una carga menor que la de diseño y finalmente los cuadros 8.12 y 8.13 para la carga total de operación \mathbf{H}_2 que es mayor que la de diseño.

$H_0 = 0,1550 \text{ m}$

x	$\frac{x}{H_0}$	$\frac{\zeta}{H_0}$	ζ	$\tan \theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	κH_0
-0,04	-0,258065	-0,100008	-0,015501	1,350693	0,59503	0,803703	-4,625485
-0,02	-0,129032	-0,016453	-0,016453	0,259236	0,968002	0,250941	-1,944793
-0,015	-0,096774	-0,009189	-0,001424	0,19163	0,98213	0,188206	-1,944793
-0,01	-0,064516	-0,004063	-0,00063	0,12647	0,992097	0,125471	-1,944793
-0,005	0,032258	-0,001013	0,000157	0,062859	0,99803	0,062735	1,944793
0	0	0	0	0	1	0	1,944793
0,005	0,032258	-0,000865	-0,000134	-0,049775	0,998763	0,049714	-1,316241
0,03	0,193548	-0,024067	-0,00373	-0,230813	0,974382	0,2249	-0,944558
0,035	0,225806	-0,03204	-0,004966	-0,263378	0,967022	0,254693	-0,903073
0,045	0,290323	-0,051084	-0,007918	-0,326609	0,950583	0,310469	-0,827348
0,06	0,387097	-0,087136	-0,013506	-0,41783	0,922695	0,38553	-0,725981
0,09	0,580645	-0,184951	-0,028667	-0,591245	0,8608	0,508943	-0,556075
0,12	0,774194	-0,315475	-0,048899	-0,756377	0,797552	0,60325	-0,424362
0,15	0,967742	-0,477363	-0,073991	-0,915613	0,737541	0,675302	-0,324998
0,20	1,290323	-0,814252	-0,126209	-1,171341	0,649291	0,76054	-0,212751

Cuadro 8.8: Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión para la carga total de diseño H_0

$\frac{H}{H_0} = 1,00$						
$F = 0,520968$						
χ	x	$\frac{d}{H_0}$	d	$\frac{p}{g\rho H_0}$	$\frac{p}{g\rho}$	$\frac{p}{g\rho}$ ajustada
-8,450766	-0,04	1,827001	0,283185	-0,051005	-0,007906	-0,0075955
-1,790724	-0,02	0,920779	0,142721	0,041869	0,00649	-0,00904
-1,72663	-0,015	0,887822	0,137612	-0,011068	-0,001716	0,000291
-1,679934	-0,01	0,863811	0,133891	-0,052263	-0,008101	0,007471
-1,651284	-0,005	0,849079	0,131607	-0,07873	-0,012203	0,012046
-1,641592	0,00	0,844096	0,130835	-0,0879	-0,013625	0,013625
-0,981676	0,005	0,745818	0,115602	-0,004335	-0,000672	0,000538
-0,654661	0,03	0,693086	0,107428	0,069261	0,010735	-0,014466
-0,604188	0,035	0,669036	0,103701	0,041099	0,00637	-0,011337
-0,525847	0,045	0,635581	0,098515	0,010581	0,00164	-0,009558
-0,433882	0,06	0,597649	0,092636	-0,014248	-0,002208	-0,011298
-0,300231	0,09	0,539911	0,083686	-0,032612	-0,005055	-0,023613
-0,209728	0,12	0,49422	0,076604	-0,032807	-0,005085	-0,043814
-0,148025	0,15	0,455463	0,070597	-0,027011	-0,004187	-0,069805
-0,085375	0,20	0,401291	0,0622	-0,016065	-0,00249	-0,123719

Coordenadas de la superficie libre del agua	
x	ζ
-0,187597	0,153003
-0,055814	0,135604
-0,040899	0,133729
-0,026799	0,132203
-0,013256	0,131191
0	0,130835
0,010747	0,115325
0,054161	0,100946
0,061412	0,095314
0,075586	0,085729
0,095714	0,071968
0,132592	0,04337
0,166211	0,012197
0,197674	-0,021923
0,247306	-0,085823

Cuadro 8.9: Cálculo del perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para la carga total de diseño H_0

$H_1 = 0,0755 \text{ m}$

x	$\frac{x}{H_0}$	$\frac{\zeta}{H_0}$	ζ	$\tan \theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	κH_0
-0,04	0,258065	-0,100008	-0,015501	1,350693	0,59503	0,803703	-4,625485
-0,02	-0,129032	-0,016453	-0,016453	0,259236	0,968002	0,250941	-1,944793
-0,015	-0,096774	-0,009189	-0,001424	0,19163	0,98213	0,188206	-1,944793
-0,01	-0,064516	-0,004063	-0,00063	0,12647	0,992097	0,125471	-1,944793
0,00	0	0	0	0	1	0	-1,944793
0,035	0,225806	-0,03204	-0,004966	-0,263378	0,967022	0,254693	-0,903073
0,045	0,290323	-0,051084	-0,007918	-0,326609	0,950583	0,310469	-0,827348
0,06	0,387097	-0,087136	-0,013506	-0,41783	0,922695	0,38553	-0,725981
0,09	0,580645	-0,184951	-0,028667	-0,591245	0,8608	0,508943	-0,556075
0,12	0,774194	-0,315475	-0,048899	-0,756377	0,797552	0,60325	-0,424362
0,15	0,967742	-0,477363	-0,073991	-0,915613	0,737541	0,675302	-0,324998
0,20	1,290323	-0,814252	-0,126209	-1,171341	0,649291	0,76054	-0,212751

Cuadro 8.10: Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión para la carga total de operación H_1

$\frac{H}{H_0} = 0,50$						
$F = 0,172143$						
χ	x	$\frac{d}{H_0}$	d	$\frac{p}{\rho g H_0}$	$\frac{p}{\rho g}$	$\frac{p}{\rho g}$ <i>ajustada</i>
-4,611571	-0,04	0,996992	0,154534	0,3869	0,059969	-0,075471
-0,875911	-0,02	0,450388	0,06981	0,233253	0,036154	-0,038704
-0,823173	-0,015	0,42327	0,065607	0,198457	0,030761	-0,032185
-0,77873	-0,01	0,400418	0,062065	0,166129	0,02575	-0,02638
-0,729928	0	0,375324	0,058175	0,126889	0,019668	-0,019668
-0,294085	0,035	0,325649	0,050476	0,168422	0,026105	-0,031072
-0,247338	0,045	0,298953	0,046338	0,13582	0,021052	-0,02897
-0,197147	0,06	0,271559	0,042092	0,104778	0,016241	-0,029747
-0,129478	0,09	0,232843	0,036091	0,066839	0,01036	-0,039027
-0,086782	0,12	0,204501	0,031698	0,044958	0,006968	-0,055867
-0,059215	0,15	0,1822	0,028241	0,03159	0,004896	-0,078888
-0,032704	0,2	0,15372	0,023827	0,019075	0,002957	-0,129166

Coordenadas de la superficie libre del agua	
x	ζ
-0,164199	0,076451
-0,037518	0,065026
-0,027348	0,06301
-0,017787	0,060944
0	0,058175
0,047856	0,043845
0,059386	0,03613
0,076228	0,025332
0,108368	0,0024
0,139122	-0,023618
0,169071	-0,053162
0,218121	-0,110739

Cuadro 8.11: Cálculo del perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para la carga total de operación H_1

$H_2 = 0,2159 \text{ m}$

x	$\frac{x}{H_0}$	$\frac{\zeta}{H_0}$	ζ	$\tan \theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	κH_0
-0,04	0,258065	-0,100008	-0,015501	1,350693	0,59503	0,803703	-4,625485
-0,02	-0,129032	-0,016453	-0,016453	0,259236	0,968002	0,250941	-1,944793
-0,015	-0,096774	-0,009189	-0,001424	0,19163	0,98213	0,188206	-1,944793
-0,01	-0,064516	-0,004063	-0,00063	0,12647	0,992097	0,125471	-1,944793
0,00	0	0	0	0	1	0	-1,944793
0,035	0,225806	-0,03204	-0,004966	-0,263378	0,967022	0,254693	-0,903073
0,045	0,290323	-0,051084	-0,007918	-0,326609	0,950583	0,310469	-0,827348
0,06	0,387097	-0,087136	-0,013506	-0,41783	0,922695	0,38553	-0,725981
0,09	0,580645	-0,184951	-0,028667	-0,591245	0,8608	0,508943	-0,556075
0,12	0,774194	-0,315475	-0,048899	-0,756377	0,797552	0,60325	-0,424362
0,15	0,967742	-0,477363	-0,073991	-0,915613	0,737541	0,675302	-0,324998
0,20	1,290323	-0,814252	-0,126209	-1,171341	0,649291	0,76054	-0,212751

Cuadro 8.12: Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión para la carga total de operación H_2

$\frac{H}{H_0} = 1,33$						
$F = 0,779394$						
χ	x	$\frac{d}{H_0}$	d	$\frac{p}{g\rho H_0}$	$\frac{p}{g\rho}$	$\frac{p}{g\rho}$ ajustada
-11,020684	-0,04	2,382601	0,369303	-0,669608	-0,103789	0,088288
-2,45921	-0,02	1,26451	0,195999	-0,143015	-0,022167	0,019617
-2,390963	-0,015	1,229418	0,19056	-0,199361	-0,030901	0,029477
-2,342834	-0,01	1,20467	0,186724	-0,241205	-0,037387	0,036757
-2,304591	0,00	1,185006	0,183676	-0,275786	-0,042747	0,042747
-0,691025	0,035	0,771008	0,119506	-0,403951	-0,062612	0,057667
-0,624169	0,045	0,760118	0,117818	-0,358227	-0,055525	0,047645
-0,533001	0,06	0,739321	0,114595	-0,310848	-0,048181	0,03475
-0,384535	0,09	0,69493	0,107714	-0,240981	-0,037352	0,008874
-0,27627	0,12	0,652548	0,101145	-0,184305	-0,028567	-0,019972
-0,199274	0,15	0,612968	0,09501	-0,138418	-0,021455	-0,051949
-0,118161	0,20	0,553011	0,085717	-0,083897	-0,013004	-0,112107

Coordenadas de la superficie libre del agua	
x	ζ
-0,33681	0,204245
-0,069184	0,187177
-0,050864	0,18573
-0,033428	0,184618
0	0,183676
0,06528	0,110661
0,081374	0,104183
0,103918	0,092414
0,144494	0,064435
0,180674	0,032387
0,213832	0,00303
0,264911	-0,06913

Cuadro 8.13: Cálculo del perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para la carga total de operación H_2

Comentarios

Los resultados calculados, experimentales y mediante gráficas adimensionales, de las figuras 5.2 y 6.2 se dibujaron para las tres condiciones de operación; tanto los de la superficie libre del agua como los de la distribución de la carga de presión.

En las figuras 8.2, 8.3 y 8.4 se observa la concordancia de los resultados obtenidos por el cuerpo de ingenieros WES, los valores teóricos y los experimentales. Los perfiles del flujo calculados para las tres condiciones de operación se muestran con línea llena donde se observan también los puntos obtenidos experimentalmente. Se observa una excelente concordancia entre los perfiles teóricos y los experimentales para la región aguas abajo de la cresta, pero para la región antes de ella, se presentan pequeñas diferencias. La comparación entre los valores teóricos y los experimentales de la distribución de la carga de presión nuevamente se observan mayores discrepancias antes de la cresta que después que ella, ya que para los valores de χ se acercan o rebasan el valor límite de (-2) que es el límite de acuerdo con las hipótesis de un flujo poco profundo. Como en el caso de la superficie libre del agua las mayores discrepancias se presentan ligeramente detrás de la cresta, pero una vez alcanzada la sección crítica existe una gran coincidencia entre los valores teóricos y experimentales.

Pudo así afirmarse que la aplicación de las ecuaciones y la teoría a las curvas convexas conduce efectivamente a buenos resultados, ya que a pesar de las pequeñas diferencias, habría que pensar que los resultados experimentales también tienen un grado de error humano.

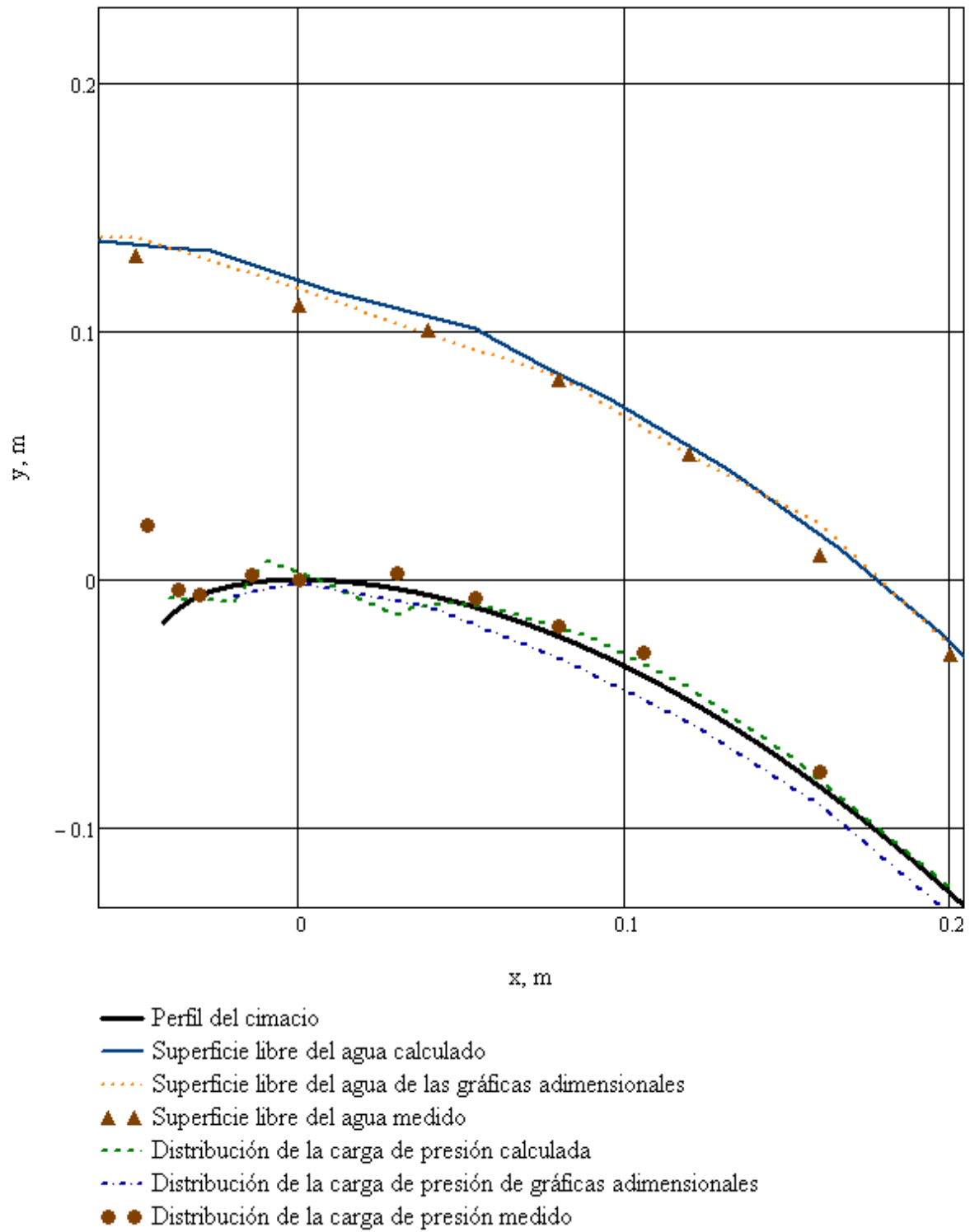
Superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión para h_0 

Figura 8.2: Perfiles de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para $H = 1,00H_0$

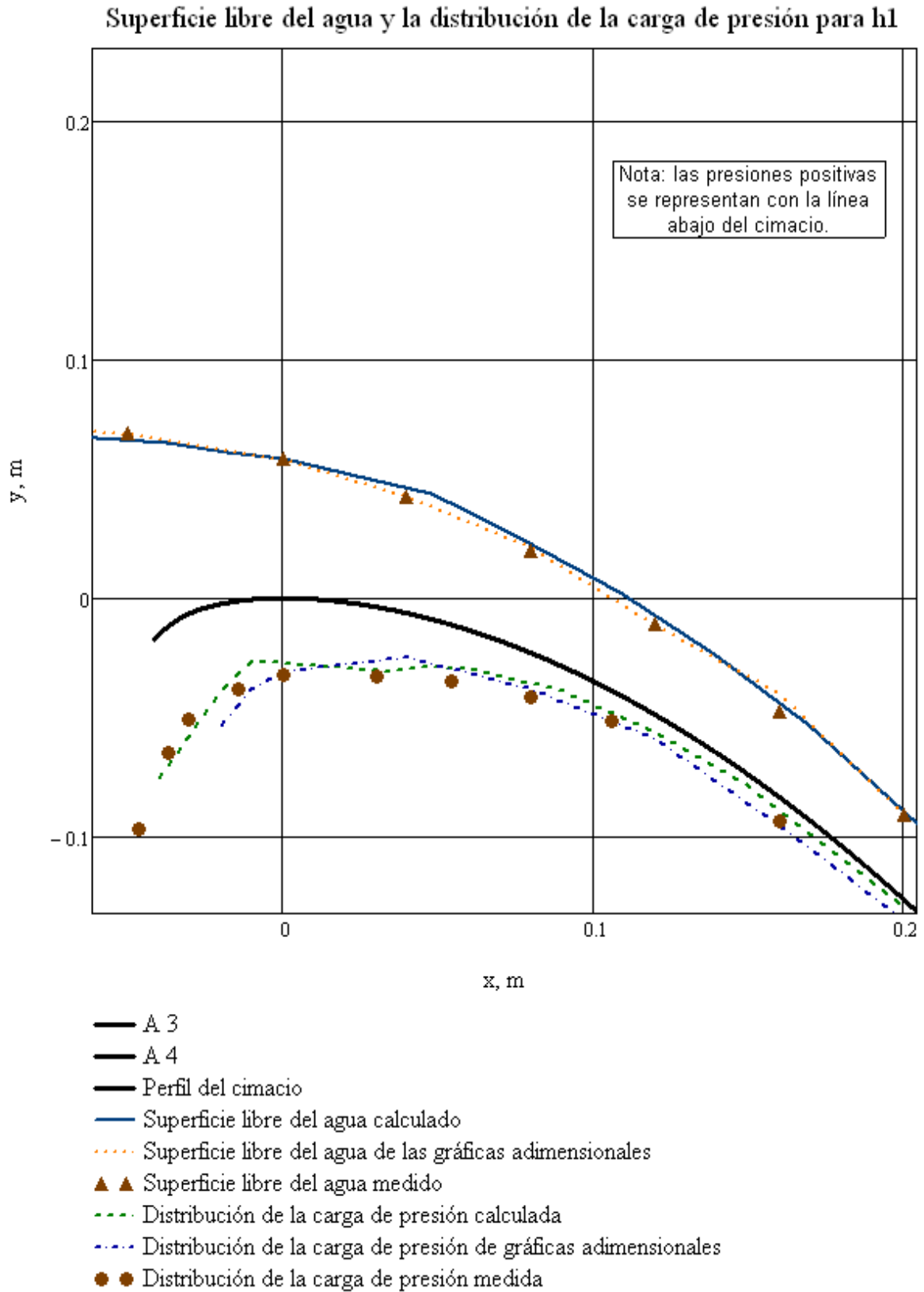


Figura 8.3: Perfiles de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión sobre el cimacio para $H = 0,50H_0$

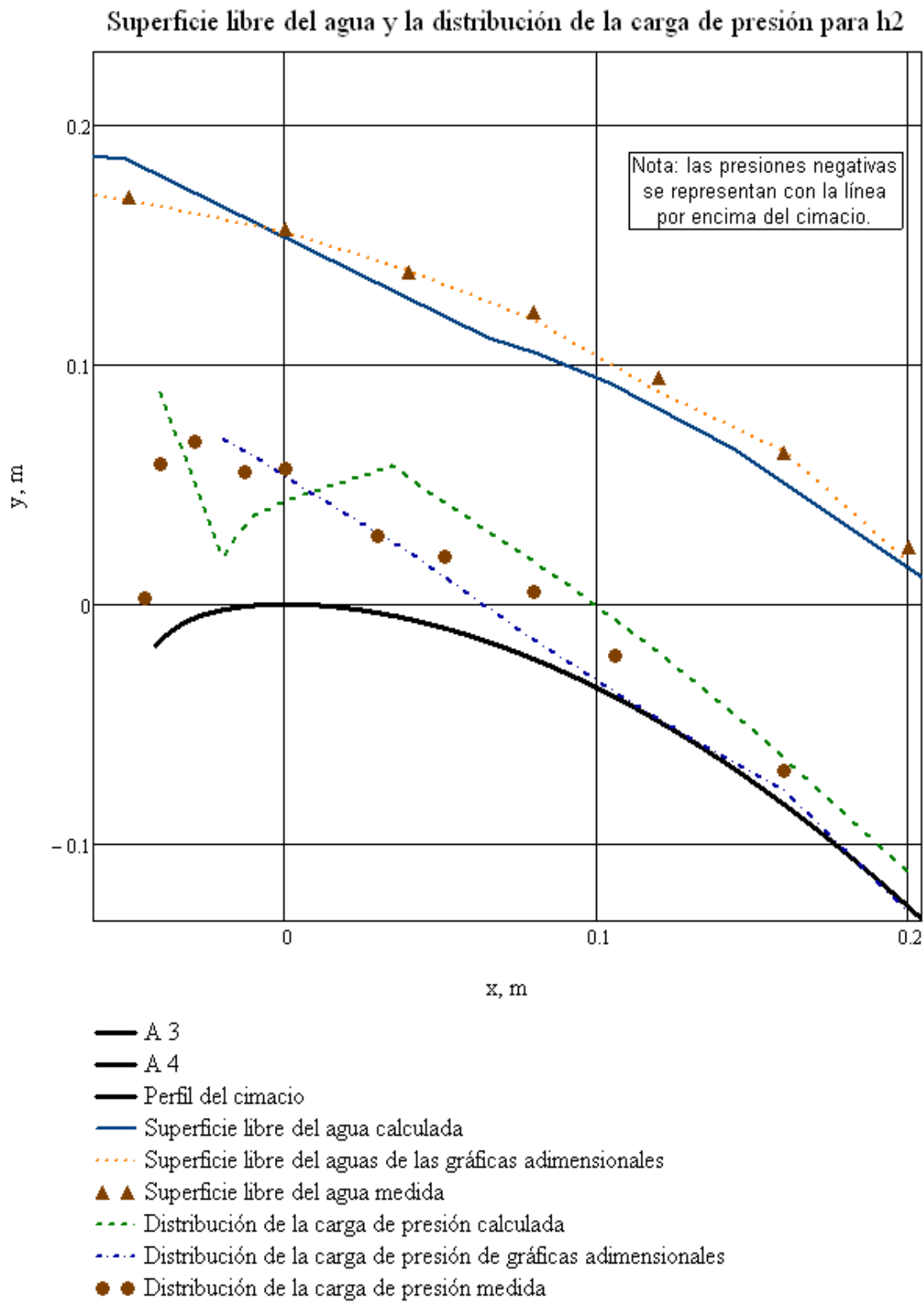


Figura 8.4: Perfiles de la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión sobre el cimacio para $H = 1,33H_0$

CAPÍTULO 9

Conclusiones

Este trabajo presenta las ecuaciones para diseñar un cimacio de cresta libre. El estudio de los cimacios de que se dispone es puramente experimental, recientemente se obtuvieron las ecuaciones que reproducen el perfil del agua y la distribución de la carga de presión sobre un fondo curvo cóncavo y convexo se presentan también dichas ecuaciones aplicadas al fondo convexo del perfil de un cimacio, cuya curvatura es variable. Se utiliza el modelo matemático en vertedores tipo cimacio, para el cual se describen de manera muy práctica las ecuaciones a resolver, así como las variables, para ello se elaboró un procedimiento sencillo de resolver.

La superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión en el fondo de un canal dependen principalmente de las características de la curvatura del fondo. Una vez definido el tipo de cimacio, la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión sobre el fondo del mismo para la condición de diseño se pueden obtener las condiciones de operación para otras cargas sobre el cimacio, ya que éstas dependen de la carga total de diseño H_0 , es decir, con cargas de operación mayores la superficie libre del agua intenta separarse del cimacio y la cargas de presión son menores; y para cargas de operación menores, la superficie libre del agua se recarga

en el cimacio y las cargas de presión a lo largo del cimacio son mayores.

El diseño del perfil de un cimacio se basa en resultados experimentales de donde de una gran base de datos se han obtenido las ecuaciones de ajuste al comportamiento del agua, pero empleando coeficientes experimentales. Este trabajo proporciona un procedimiento matemático para el diseño del perfil de un cimacio una vez establecida la carga total de diseño; sin embargo de esta manera se siguen empleando los coeficientes experimentales.

El régimen crítico es un tema frecuentemente tratado en la hidráulica, su localización siempre se busca por la gran inestabilidad existente en esa región y para una obra civil, como un cimacio, es ventajoso conocer ese punto para así poder diseñar y construir adecuadamente. Las ecuaciones presentadas en la tesis exigen la localización correcta de éste régimen y por consiguiente el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión en el fondo a lo largo del cimacio se obtienen con una mayor certeza.

Se desarrollaron varios algoritmos, sencillos y de fácil comprensión para obtener la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión sobre un vertedor tipo cimacio de cresta libre. Con la ayuda de los algoritmos, el alumno de nivel licenciatura puede obtener resultados de la localización y magnitud de la sección crítica, el perfil de la superficie libre del agua y de la distribución de la carga de presión sobre un fondo como el analizado en el presente trabajo, para así facilitar el interés y análisis en el tema para fondos curvos.

Estos algoritmos presentados simplifican la tarea del ingeniero, ya que, muestran los pasos definidos y concretos a seguir para la obtención de la superficie libre y la carga de presión en un fondo curvo cóncavo con curvatura variable. Los algoritmos presentados en el diseño de cimacios de cresta libre abarcan la solución de los dos criterios más empleados en la práctica.

Finalmente en el capítulo de Ejemplo de Aplicación se muestran cómo se puede

abordar un problema similar, empleando el uso de programas de ingeniería, que proporcionan una gran ventaja, para así obtener una respuesta rápida sin perder precisión. Las aplicaciones de la teoría a la práctica producen perfiles de la superficie libre y presiones en el fondo significativamente cercanas a las mediciones experimentales. Por ello, los cálculos son más económicos y pueden reemplazar con frecuencia los modelos físicos cuando se trata de dichas aplicaciones.

En el trabajo se presentaron soluciones para la comprensión del tema con conocimientos de un nivel de estudios de licenciatura, por lo que se simplificaron las ideas del tema que son de gran importancia. Con un trabajo como éste; durante la vida profesional del ingeniero proyectista hidráulico y con la necesidad de obtener información sobre el tema, la tesis puede ser una fuente de información y de consulta rápida, concisa y adecuada.

APÉNDICE A

Simbología

u_d	magnitud de la componente u de la velocidad al nivel de la superficie libre de la sección
R	radio local de curvatura
κ	curvatura del fondo de la sección ($\frac{1}{R}$)
V	velocidad media de la sección
d	distancia de la superficie libre a una sección ortogonal al fondo
L_e	longitud efectiva de cresta
C_0	coeficiente de descarga de diseño
C	coeficiente de gasto
x_T, y_T	coordenadas del punto de tangencia
x_P	coordenadas en x donde termina el primer trazo definitivo del método semigráfico
x_B, y_B	coordenadas del punto de intersección de los círculos 1 y 2 del método semigráfico
h_a	carga de velocidad

t	tiempo
s	coordenada que sigue fielmente la forma del fondo curvo
n	coordenada recta en el plano de una sección ortogonal al fondo y a s
$\zeta(x)$	función que representa el fondo
θ	ángulo de inclinación de la tangente al fondo de la sección respecto de la horizontal
u_0	magnitud de la componente u de la velocidad en el fondo de la sección
Q :	gasto
q	gasto unitario $q = \frac{Q}{L_e}$
y	eje coordenado en un plano vertical ortogonal a x
x	eje coordenado en un plano horizontal, ortogonal a y
F	parámetro adimensional relacionado con el flujo y la geometría del fondo
λ	coeficiente de curvatura
v	velocidad de una partícula
g	aceleración de la gravedad
a	punto de intersección de la superficie libre y la línea de tirantes críticos
r_a	radio de curvatura en a
v_a	velocidad del flujo en el punto a
H_0	carga total de diseño
H	carga total de operación
d	tirante
p	presión
p_0	presión en el fondo del canal
$\frac{p}{g\rho}$	carga de presión
v_H	componente de la velocidad en x
v_V	componente de la velocidad en y
v	velocidad puntual

k, n coeficiente experiemental que depende del criterio a emplear

R_1, R_2 radio de curvatura que depende del criterio a emplear

x_c, y_c coordenadas del punto C que depende del criterio a emplear

APÉNDICE B

Programa en Matlab *SupPresCIM*

En ese apartado se muestra y comprueba la enorme ventaja de la programación de los algoritmos. Los algoritmos: 7.1, 7.2 y 7.4 presentados en el trabajo son los que se programa en orden secuencial. Se decidió desarrollar los algoritmos en MATLAB ya que MATLAB presenta un lenguaje de alto funcionamiento para computación técnica, integra la computación, la visualización, y la programación, en un entorno fácil de usar donde los problemas y las soluciones son expresados en una notación matemática familiar. Los usos más familiares de Matlab son:

- Matemática y Computación
- Desarrollo de algoritmos
- Modelamiento , simulación y prototipado
- Análisis de datos, exploración y visualización
- Gráficas científicas e ingenieriles
- Desarrollo de aplicaciones, incluyendo construcción de interfaces graficas de

usuario

Atributos perfectos para desarrollar los algoritmos antes mencionado.

Sección B.1

SupPresCIM

SupPresCIM es un programa hecho en MATLAB por el autor del presente trabajo; donde se llevó a cabo los algoritmos y ecuaciones antes mencionadas. *SupPresCIM* tiene la finalidad de obtener tanto el perfil del cimacio como el perfil de la superficie libre del agua como la distribución de la carga de presión en el fondo de un cimacio de cresta libre; su desarrollo se basó fundamentalmente en los pasos de la figura B.1.

Al iniciarse, el programa pide al usuario que elija el criterio que quiere usar (entre el USBR o el WES) luego pide los valores de la carga de diseño, la carga de operación, el parámetro adimensional F y la inclinación del canal aguas abajo además al escoger el criterio del USBR se requiere un dato adicional; la carga de velocidad. Los datos introducidos tienen que tener ciertas características, por ejemplo no pueden ser negativos ni cero, por la naturaleza de las ecuaciones que se emplean para obtener el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión. Al introducir un dato mal, el programa muestra mensajes de advertencias y da la oportunidad de nuevo al usuario de introducir el dato correcto. Al terminar de introducir toda la información necesaria, *SupPresCIM* pregunta al usuario si quiere seguir; al decidir que si el programa procede a obtener una respuesta de lo contrario el programa vuelve a iniciar de nuevo. Estos pasos están pensados en el ingeniero para buscarle la manera de ser más eficiente y reducir los tiempos perdidos ver figura B.2.

En el código de *SupPresCIM* además de las ecuaciones y variables del capítulo ocho, se tomó en consideración las mismas recomendaciones y restricciones que fueron dadas a lo largo del trabajo para así lograr aumentar la eficiencia del programa. Finalmente, el programa muestra como resultado final una solución gráfica, a escala, del perfil del cimacio de cresta libre, la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión, figura B.1.

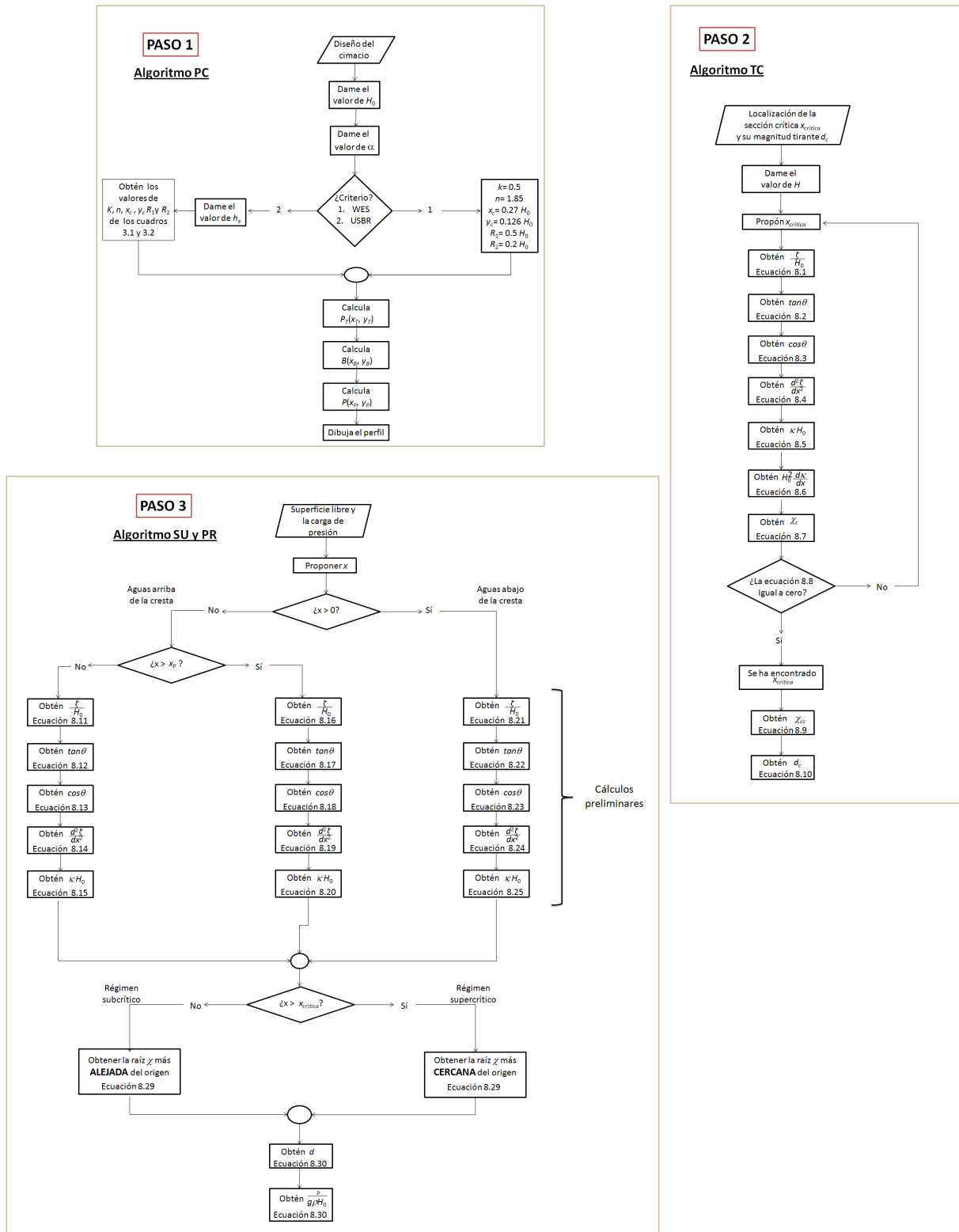


Figura B.1: Pasos para el programa SupPresCIM



Figura B.2: Pantalla de bienvenida y introducción de datos

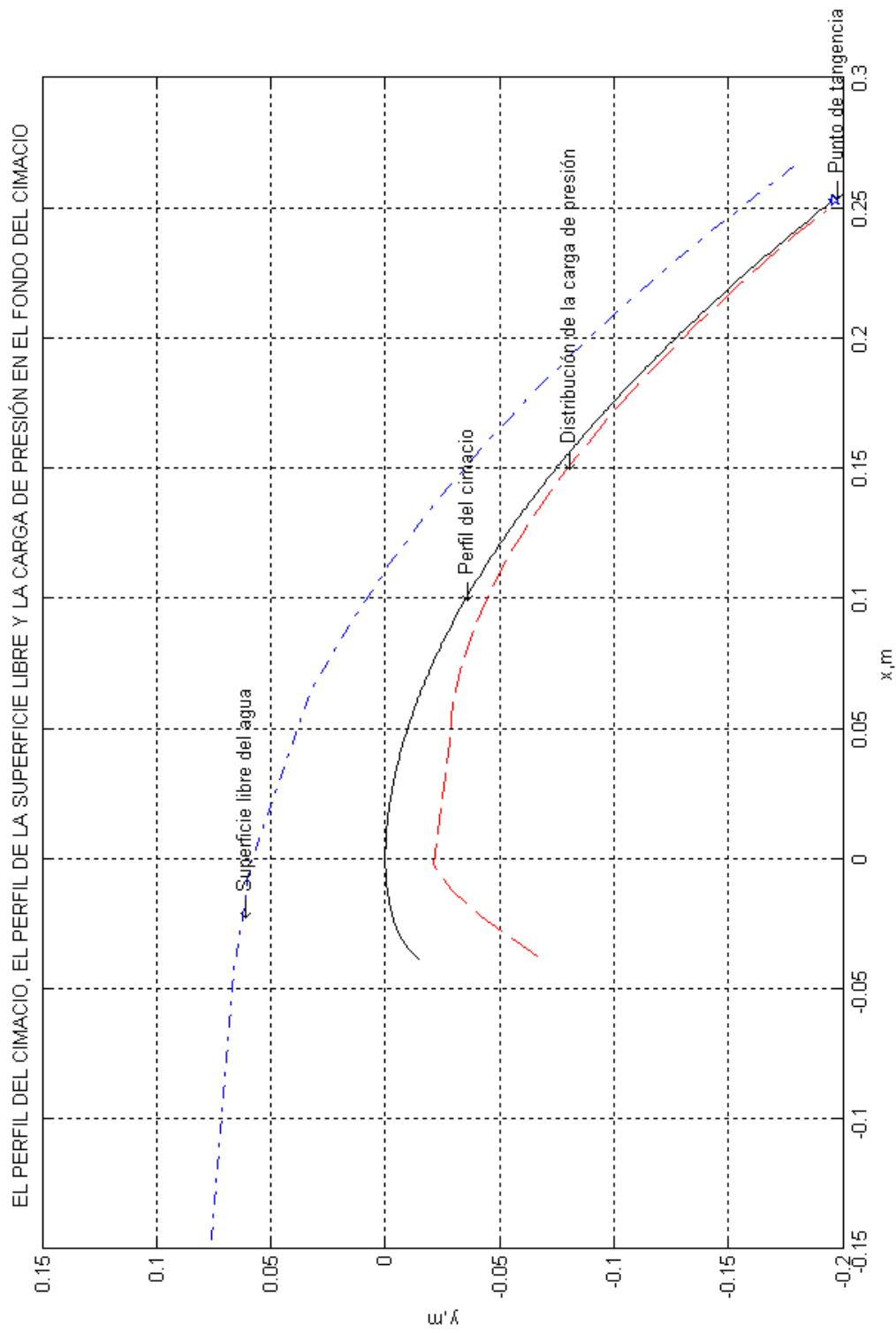


Figura B.3: Pantalla de resultado del programa SupPresCIM

APÉNDICE C

Bibliografía

Bibliografía fundamental

- Sotelo A. G., Tesis doctoral: *Flujo a superficie libre en fondos curvos*, Facultad de Ingeniería, UNAM, México 2003.
- Sotelo A. G., *Diseño hidráulico de estructuras*, México, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1996.
- Ven Te Chow, *Hidráulica de los Canales Abiertos*, Editorial, Mc Graw Hill, México 1985

Bibliografía complementaria

- Andrew Chadwick y John Morfett, *Hydraulics in civil and environmental engineering*, E and F N Spon, 1993
- Design of Small Dams, USBR
- D.L. Vischer y W. H. Hager, *Dam hydraulics*, John Wiley and Sons, Inc, 1992
- F. M. Henderson, *Open channel flow*, The Macmillan Company, New York, 1970

- Ljubonir Tancev, *Dams and appurenant hydraulic structures*, A.A. Balkema Publishers, Great Britain, 2005
- Robert L. Daugherty, Joseph B. Franzini y E. John Finnemore, *Fluid mechanics with engineering applications*, McGraw-Hill Publishing Company
- Sotelo A.G., *Hidráulica general, Vol. 1*, México, Editorial Limusa, 1990.
- Sotelo A. G., *Hidráulica de Canales*, Facultad de Ingeniería, UNAM, México 2001