UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

INSTITUTO DE FÍSICA

TERMOESTADÍSTICA DE PROCESOS DE RENOVACIÓN, CAMINATAS ALEATORIAS Y PROCESOS MULTIPLICATIVOS

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
JORGE VELÁZQUEZ CASTRO

Asesor:	Dr. Alberto Robledo Nieto
Comité tutoral:	Dr. Iván Santamaría Holek
	Dr. Octavio Miramontes Vidal

pcf
posgrado en ciencias físicas
u n a m

Ciudad de México Enero de 2011

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

En la econofísica, en la sociofísica, en redes, etc., los métodos de la mecánica estadística se emplean generalmente como técnicas matemáticas aisladas. Es decir, pocas veces se han formulado técnicas tan completas e integradoras para sistemas no térmicos como lo es la estructura formal de la Mecánica Estadística (M.E.) de equilibrio. Sin embargo, resulta interesante saber si es posible establecer una estructura matemática similar a la M.E. y a la termodinámica para tratar sistemas no térmicos. De ser posible, las técnicas ampliamente desarrolladas que se emplean para estudiar sistemas térmicos, podrían ser empleadas de manera mas sistemática para el análisis de sistemas no térmicos. Por otro lado, los sistemas particulares de la M.E. podrían mas fácilmente abordarse desde otro enfoque inspirado en las nuevas áreas de investigación de sistemas no térmicos. Motivados en las ideas anteriores, en este trabajo se muestra de forma explícita una analogía que se puede establecer entre algunas técnicas matemáticas de los procesos estocásticos, que pueden ser fenómenos no térmicos, con el formalismo matemático de la termoestadística. Construiremos las técnicas para las cuales es posible establecer dicha analogía en los procesos de renovación, caminatas aleatorias y procesos multiplicativos. La estructura algebraica resultante en cada caso es una pseudo "termoestadística" propia de cada clase de proceso.

En el caso de los procesos de renovación, es posible establecer una analogía casi perfecta con la M.E. usual. En los otros dos casos, las "termoestadísticas" resultantes difieren de la M.E. usual debido a la naturaleza de las variables. Sin embargo, el procedimiento general empleado en esta tesis para obtener probabilidades y funciones de distribución, es análogo a los procedimientos de la M.E. de equilibrio. La "termoestadística" para cada tipo de proceso estocástico se ilustra con ejemplos y algunas aplicaciones, resultando importantes la obtención de nuevos resultados para el modelo de la hamiltoniana de interacciones de largo alcance (HLR) [1], y una modificación razonable a la distribución del tamaño de poblaciones en bacterias.

Por otro lado, es importante también señalar una característica interesante de la "termoestadística" de los procesos multiplicativos. La relación fundamental que surge en los procesos multiplicativos, se distingue de la entropía termodinámica en que no es homogénea de grado uno en sus variables. Para los procesos multiplicativos, si f representa la relación fundamental y s un estado termodinámico, entonces $f(s^{\lambda}) = \lambda f(s)$. En contraste con la temoestadística convencional que es aditiva, i.e. $f(\lambda s) = \lambda f(s)$. Posteriormente, este nuevo formalismo se extiende al lenguaje de la teoría de desviaciones grandes. Al final de este trabajo se estudia la posibilidad de construir una termodinámica propia de la estadística-q, con los mismos procedimientos que se habían venido empleando en la tesis.

Abstract

It is shown the formal analogy that can be established between the mathematical techniques that are used to treat stochastic processes with the mathematic formalism of the thermostatistic.

The mathematical techniques for which this analogy can be established with renewal processes, random walks and stochastic multiplicative processes are constructed. The resulting algebraic structure is like a thermostatistic that own each kind of stochastic process.

The thermostatistic type structure that own each kind of stochastic process is illustrated with examples and applications. Two important aplications are the obtention of new results for the Hamiltonian Mean Field model (HMF) and the probabilistic analysis of bacteria population growth.

It is shown that the function that plays the role of the fundamental relation for the stochastic multiplicative processes is not homogeneous of first order of its variables in contrast with the fundamental relation of the conventional thermostatistic. The thermostatistic that own the multiplicative stochastic processes is extended to the language of the large deviations theory.

Finally it is analysed the factibility of a thermodynamics that suits the q-statistics.

Índice general

Resumen I

Introducción 1

1. Técnicas matemáticas 5
- 1.1. Procesos de renovación 6
- 1.2. Caminatas aleatorias 8
- 1.3. Procesos multiplicativos 10
  - 1.3.1. Distribución límite para procesos estocásticos multiplicativos 11
- 1.4. Teoría de desviaciones grandes 12
- 1.5. Principio de desviaciones grandes 12
- 1.6. El teorema de Gärtner y Ellis 13
- 1.7. Distribuciones estables de colas gordas 14
- 1.8. Correlaciones de largo alcance 16

2. 'Termoestadística' de procesos de renovación 18
- 2.1. Métodos asintóticos para los procesos de renovación 18
  - 2.1.1. Transformación del espacio de Laplace (ϵ) al espacio t . 19
  - 2.1.2. Transformación del espacio de Laplace (ϵ) y del espacio z al espacio (t, n) 21
  - 2.1.3. Transformación del espacio (t, z) al espacio (t, n) 25
- 2.2. Estadística de Boltzmann–Gibbs 26
- 2.3. Ejemplo: La distribución de Poisson 28
  - 2.3.1. Transformación del espacio (ϵ, n), 'canónico' al espacio (t, n), 'microcanónico' 28
  - 2.3.2. Transformación del espacio (ϵ, z), 'gran canónico' al espacio (ϵ, n), 'canónico' 29

2.3.3. Transformación del espacio (ϵ, z) al espacio (t, z) 31
2.3.4. Transformación del espacio (ϵ, z) al espacio (t, n) . . . 32
2.4. Transformaciones de variables extensivas a intensivas 33
2.5. Ejemplo: Distribución de Poisson 35
2.5.1. Transformación del espacio (t, n), 'microcanónico' al espacio (ϵ, n), 'canónico' 35
2.5.2. Transformación del espacio (t, n) al espacio (t, z) 36
2.5.3. Transformación del espacio (t, n) al espacio (ϵ, z) . . . 37
2.6. Ejemplo: el proceso de renovación de Weierstrass 41
2.6.1. Comportamiento de la densidad del tiempo de espera del proceso de renovación de Weierstrass 42
2.6.2. Termoestadística del proceso de renovación de Weierstrass 44

3. 'Termoestadística' de caminatas aleatorias 46
3.1. Transformación del espacio (k, n) al espacio (l, n) 47
3.2. Transformación del espacio (k, z) al espacio (l, n) 48
3.3. Transformación del espacio (k, z) al espacio (k, n) 49
3.4. Ejemplo: La distribución normal 50
3.4.1. Transformación del espacio (k, n) al espacio (l, n) . . . 51
3.4.2. Transformación del espacio (n, l) al espacio (k, n) . . . 51
3.4.3. Transformación del espacio (l, n) al espacio (l, z) 53
3.4.4. Transformación del espacio (k, n) al espacio (k, z) . . . 54
3.5. Comportamiento de la caminata aleatoria de Weierstrass . . . 55
3.5.1. Ejemplo: Caminata aleatoria de Weierstrass 57
3.6. Ejemplo: Caminata a primeros vecinos 59
3.7. Hamiltoniana de interacciones de largo alcance (HMF) 61

4. 'Termoestadística' de procesos multiplicativos 69
4.1. Procesos estocásticos multiplicativos 70
4.2. 'Termoestadística' de procesos aleatorios multiplicativos 70
4.3. Ejemplo: distribución con forma de ley de potencias 72
4.3.1. Transformación del espacio (s, n) al espacio (w, n) . . . 72
4.3.2. Transformación del espacio (s, z) al espacio (s, n) . . . 73
4.3.3. Transformación del espacio (s, n) al espacio (w, n) . . . 75
4.3.4. Transformación del espacio (s, z) al espacio (w, z) . . . 75
4.3.5. Transformación del espacio (w, z) al espacio (w, n) . . . 76
4.4. Aplicación: Modelo estocástico del crecimiento de bacterias . . 77

5. Teoría de desviaciones logarítmicamente grandes **80**
5.1. Principio de desviaciones logarítmicamente grandes 80
5.2. Teorema modificado de Gärtner y Ellis 81
5.3. Desviaciones grandes en t para procesos de renovación 82
5.3.1. Conexión entre límite termodinámico $n \to \infty$ y $t \to \infty$ 82
5.3.2. Conexión entre el límite $n \to \infty$ y $t \to \infty$ para la estadística de procesos multiplicativos 83

6. Termodinámica-q, estudio en eventos q-independientes **85**
6.1. Transformación del espacio $(\epsilon, n)_q$ al espacio (t, n) 86
6.2. Transformación del espacio $(\epsilon, z)_q$ al espacio $(\epsilon, n)_q$ 89
6.3. Transformación del espacio $(\epsilon, z)_q$ al espacio $(t, z)_q$ 91
6.4. Transformación del espacio (ϵ, z) al espacio $(t, z)_q$ 91

7. Teoría de desviaciones q-grandes **94**
7.1. Principio de desviación q-grande 94
7.2. Límite termodinámico 95
7.3. Convergencia de $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/\beta}} \ln_{q_*} I_N^{(q)}$ 98
7.4. Generalización q al teorema de Gärtner y Ellis 101

8. Conclusiones **103**

A. Transformadas **105**
A.1. Transformada de Laplace 105
A.2. Transformada de Fourier 106
A.3. Transformada z 106
A.4. Transformada de Mellin 106

B. Aproximación del punto silla **108**
B.1. Aproximación del punto silla 108

C. Mecánica estadística de equilibrio de la hamiltonia de interacciones de largo alcance (HMF) a la Mickael Antoni y Stefano Ruffo **112**

Introducción

La M.E. de Boltzmann y Gibbs ha sido una de las ramas de la física más exitosas desde su formulación en la segunda mitad del siglo XIX y durante todo el siglo pasado [2]. La única excepción que podría argumentase es la revolución que trajo consigo la mecánica cuántica, la cual tocó todas las áreas de la física. Sin embargo, la influencia de la mecánica cuántica en la M.E. sólo afectó la naturaleza de los sistemas en los que la M.E. se aplica, dejando intacta su estructura formal. Lo anterior se debe a la gran generalidad de los principios de la M.E. y, en consecuencia, la clase de sistemas que pueden ser estudiados con ella es muy amplia.

El gran éxito que ha tenido y tiene la Mecánica Estadística (M.E.) se debe a la "ubicuidad de la distribución de Boltzmann". Como es sabido, la razón de esta ubicuidad la da el Teorema del Límite Central.

En los últimos años el estudio de los fundamentos de la Mecánica Estadística se ha visto incrementado.

Es sabido que en años recientes se han aplicado las técnicas de la M.E. en sistemas incluso fuera del contexto de la física, como son la economía, la sociología, redes, patrones de comportamiento.

Más allá del ámbito de la física, en la década de los noventa en la investigación de la economía comenzaron a hacerse estudios haciendo uso de los métodos de la mecánica estadística [3, 4], lo cual dio origen a lo que hoy se conoce como econofísica. Posteriormente, derivada de la econofísica surgió la sociofísica que es el estudio de sistemas sociales ya sea en biología o sociología utilizando las mismas herramientas [5, 6]. También han surgido muchas mas áreas de investigación con estas características como redes [7], sistemas dinámicos complejos, dinámica de sistemas en el borde del caos [8], y en general las investigaciones de sistemas complejos [9].

Hasta ahora las técnicas empleadas se han visto como tales, como técnicas que se han desarrollado en el contexto de la M.E. pero que pueden emplearse

en otras áreas de estudio. Sin embargo, pocas veces se ha planteado una estructura "termoestadística" completa para sistemas no térmicos. Entre una de las excepciones a ésto, es la termodinámica de sistemas caóticos de C. Beck y F. Schlögl [9], que como su nombre lo indica plantea una "termoestadística" para sistemas dinámicos.. Una pregunta importante es sí para cualquier sistema compuesto por un gran número de elementos si es posible construir una "termoestadística" a pesar de la naturaleza de sus partes constituyentes.

En esta tesis, a pesar de que no se responde esta cuestión, se muestran casos de sistemas no térmicos que poseen un estructura matemática similar a la termoestadística. Además, no sólo pretende dar ejemplos de dichos sistemas, sino también muestra un procedimiento a seguir para construir dichas pseudo "termoestadísticas" propias de sistemas formados por una gran cantidad de elementos.

Se construirán "termoestadísticas" para procesos de renovación, caminantes aleatorios y procesos estocásticos multiplicativos. También, al final del trabajo se analizará la posibilidad de construir el formalismo termodinámico propio de la estadística-q [10] con el mismo procedimiento que en los otros casos.

Dicho de otra forma, uno de los objetivos de la tesis es mostrar la gran generalidad y versatilidad de los principios de la mecánica estadística, ya que no se limita a describir sistemas de grados de libertad físicos propios de moléculas, átomos y materia, sino que sus principios son tan generales que es posible extraer información de muy diversos sistemas. En este trabajo diremos que un procedimiento algebraico es una pseudo termoestadística si presenta la propiedad análoga a la equivalencia de ensambles de la M.E. La equivalencia de ensambles es una de las principales propiedades de la M.E., que puede ser explotada como una herramienta de cálculo muy poderosa. Esta propiedad consiste en que por medio de transformadas de Legendre es posible pasar de la representación del sistema en un ensamble a la representación del sistema en otro ensamble en el límite termodinámico. Dicha propiedad da la libertad de calcular la función de partición propia de cualquier ensamble y posteriormente por medio de alguna transformada de Legendre encontrar la relación fundamental. En el contexto de procesos estocásticos, en lugar de hablar de alguna representación en un ensamble, se hablará de representaciones en el espacio de transformadas integrales, i.e. transformada de Laplace, transformada z, transformada de Fourier y transformada de Mellin.

Al estudiar las tres clases de sistemas anteriormente mencionadas, se observará que para construir su correspondiente "termoestadística" se sigue el

mismo procedimiento para los tres casos. Dicho procedimiento es la base de este trabajo y también pretende ser una propuesta que sea útil en otro tipo de sistemas por igual. El beneficio más visible que se obtiene de plantear la "termoestadística" para una clase de sistemas no térmicos, es que es posible trasladarles con métodos de cálculo poderosos y largamente estudiados en el contexto de los sistemas térmicos. Lo mismo se puede decir en sentido inverso: es posible enriquecer la manera en que se aborda el estudio de un sistema propio de la M.E. mediante métodos y enfoques que se han generado en otra clase de sistemas. Un ejemplo de lo último se tratará dentro del capítulo 3, donde se extienden los resultados obtenidos en [1] para el modelo hamiltoniana con interacciones de largo alcance (HMF).

Plan de la tesis

Esta tesis se estructura de la siguiente forma. En el Capítulo 1 se da una visión general de los métodos matemáticos empleados comúnmente la literatura [11, 12] para estudiar procesos estocásticos, en particular de los procesos de renovación, caminantes aleatorios. Presentaremos también algunas técnicas matemáticas para estudiar procesos multiplicativos, extendiendo lo que comúnmente se presenta en la literatura [13, 14]. En la sección 1.3 de este capítulo, se presenta una deducción del Teorema del Límite Central (TLC) para procesos multiplicativos empleando técnicas expuestas en esta tesis, que dentro de nuestro conocimiento no han sido empleadas anteriormente en la literatura para dicho fin. En la Sección 1.4 se presenta un breve resumen de la teoría de desviaciones grandes, ya que es posible englobar en esta teoría matemática los métodos empleados en los capítulos 2 y 3.

En el Capítulo 2 se presenta la "termoestadística" correspondiente a los procesos de renovación y su equivalencia matemática con la estadística de Boltzmann. Posteriormente, se ilustra el método con la distribución de Poisson y con el proceso de renovación de Weierstrass. En el Capítulo 3 se presenta la estructura "termoestadística" correspondiente a las caminatas aleatorias. El método se ilustra con la distribución gaussiana, para la caminata de Weierstrass en el régimen regular y para la caminata a primeros vecinos. Posteriormente, se muestra cómo la metodología para estudiar esta estadística de caminantes aleatorios, origina una manera sencilla de encontrar información sobre sistemas térmicos. El sistema térmico con el que se ilustra la utilidad de estos métodos se define con una hamiltoniana con interacciones de largo

alcance (HMF)[1]. Se extienden los resultados de [1] al calcularse en el ensamble microcanónico una expresión explícita de la relación fundamental del sistema. Las ecuaciones de estado del sistema se encuentran coincidiendo con los resultados de [1].

En el Capítulo 4, se deduce la estructura termoestadística que le corresponde a los procesos multiplicativos. Posteriormente se usa el método aplicándolo a una distribución con forma de ley de potencia. También se muestra como aplicación un modelo estocástico de crecimiento de bacterias mostrando la utilidad en éste caso de la estadística multiplicativa.

En el capítulo 5 se presenta una ampliación de la teoría de desviaciones grandes inspirada en el contenido del capítulo 4. Dicha ampliación pretende comprender algunos casos de leyes de potencias en el esquema de la teoría de desviaciones grandes. A dicha ampliación le llamamos *Teoría de desviaciones logarítmicamente grandes*. Las distribuciones características de esta generalización de la teoría de desviaciones grandes tienen forma de leyes de potencia. Por lo anterior, también nos damos a la tarea de estudiar con el lenguaje de la teoría de desviaciones grandes a la estadística-q [10]. En el capítulo 6 se presenta con el estudio del proceso de Poisson con correlaciones q, la forma que debería tener una termodinámica q congruente con las técnicas generales que se han seguido en la tesis.

En el capítulo 7, se plantea una propuesta para la teoría de desviaciones grandes propia de la estadística q, sin embargo, se concluye que tiene deficiencias para su aplicación práctica. Finalmente, en el capítulo 8 se discuten y presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Técnicas matemáticas

Los procesos estocásticos son de gran importancia en la descripción de la naturaleza. La mayoría de los fenómenos en que se involucran una gran cantidad de grados de libertad pueden ser descritos de forma efectiva como procesos estocásticos [15]. La mecánica estadística trata de sistemas con un número muy grande de partículas, de ahí la importancia de estudiar los procesos estocásticos y su relación con la mecánica estadística. Existen diversos tipos de procesos estocásticos, por ejemplo caminantes aleatorios, procesos de renovación [16] y también procesos multiplicativos [14]. Lo anterior nos lleva a preguntarnos si es posible construir un formalismo matemático análogo a la mecánica estadística para cada tipo de proceso, o no, y si es posible, ¿cuál es el tipo de proceso estocástico cuya pseudo-termoestadística se asemeja de manera mas fiel con el formalismo de la mecánica estadística de equilibrio?. Estas preguntas son las que se responderán en este trabajo.

El problema de los procesos de renovación es el siguiente: Dada la distribución del tiempo de espera $\psi(t)$ de un evento en un proceso de renovación, se quiere encontrar la distribución de probabilidad $\psi_N(t)$ de que el n-ésimo evento ocurra al tiempo t. Se verá que para este tipo de procesos el límite $n \to \infty$, $t \to \infty$ de modo que t/n sea finito, es equivalente al límite termodinámico de la mecánica estadística. De manera análoga, en el caso de caminates aleatorios idénticos e independientes, dada la distribución de probabilidad $p(l)$ de que el caminante avance la distancia l en el siguiente paso, se busca la probabilidad $P_N(l)$ de que el caminante se encuentre en la posición l al haber dado N pasos. Por analogía con el caso de procesos de renovación, el límite termodinámico correspondiente es cuando $N \to \infty$, $|l| \to \infty$ de modo que $|l|/N$ sea finito. En los procesos multiplicativos se quiere encontrar las

probabilidad $\phi_N(w)$ de que la multiplicación de N factores estocásticos de por resultado el número w. El análogo límite termodinámico correspondiente es cuando $N \to \infty$, $|l| \to \infty$ de modo que $w/\ln(N)$ sea finito.

En este capítulo haremos una breve reseña de los tres tipos de procesos mencionados anteriormente y de la teoría de desviaciones grandes. La teoría de desviaciones grandes es una teoría matemática formal con la que los procesos de renovación y los caminantes aleatorios pueden ser analizados.

1.1. Procesos de renovación

Un proceso de renovación es una secuencia de variables aleatorias con incrementos t_1, t_2, ... indenticamente distribuidos y no negativos [17]. Por ejemplo, cada vez que una partícula radioactiva alcanza a un contador Geiger, este evento puede ser representado como un proceso de renovación.

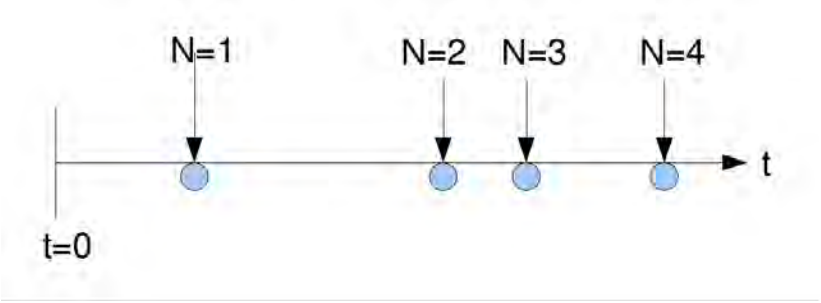

Figura 1.1: Representación esquemática de un proceso de renovación

La pregunta usual en este tipo de procesos es la siguiente. ¿Cuál es la probabilidad $\psi_n(t)dt$ de que el n-ésimo evento tenga lugar en el intervalo de tiempo $(t, t + dt)$?

Para una gran cantidad de sistemas se conoce la probabilidad $\psi(\Delta t)d\Delta t$ de que después de ocurrir un evento transcurra un intervalo de tiempo Δt antes de que acontezca el siguiente. A $\psi(\Delta t)$ se le llama *densidad de tiempo de espera*. Cuando esta densidad del tiempo de espera está dada, un enfoque conveniente para contestar la pregunta anterior es el que sigue.

Consideremos un proceso de renovación aleatorio consistente en una secuencia de eventos, siendo $\psi(t)$ la densidad de probabilidad del tiempo de espera entre eventos. Entonces, la densidad de probabilidad para el tiempo

de ocurrencia del n-ésimo evento es

$$\psi_n(t) = \iint_0^\infty \psi_{n-1}(T)\psi(\tau)\delta(t-T-\tau)dTd\tau \tag{1.1}$$

$$\psi_n(t) = \int_0^\infty \psi_{n-1}(t-\tau)\psi(\tau)d\tau. \tag{1.2}$$

Las igualdades anteriores se pueden leer de la siguiente forma: La probabilidad de ocurrencia del n-ésimo evento al tiempo t está dada por la multiplicación de la probabilidad de ocurrencia del evento $n-1$ al tiempo T por la probabilidad de ocurrencia del siguiente evento a un tiempo τ posterior, sumando sobre todos los valores de T y t que cumplan con la condición $t = T + \tau$. Es decir, la Ec.(1.2) es la ecuación de Chapman-Kolmogorov de un proceso markoviano.

Definimos la transformada de Laplace $\tilde{\psi}(\epsilon)$ de $\psi(t)$ como

$$\tilde{\psi}(\epsilon) = \int_0^\infty e^{-\epsilon t}\psi(t)dt, \tag{1.3}$$

y de manera semejante la transformada de Laplace de $\psi_n(t)$ está dada por

$$\tilde{\psi}_n(\epsilon) = \int_0^\infty e^{-\epsilon t}\psi_n(t)dt, \tag{1.4}$$

de tal forma que se tiene que para un proceso iniciado en $t = 0$,

$$\tilde{\psi}_n(\epsilon) = [\tilde{\psi}(\epsilon)]^n. \tag{1.5}$$

Por lo tanto, $\psi_n(t)$ está dada por la transformada inversa de Laplace (Ver apéndice A.1) de $\tilde{\psi}_n(\epsilon)$,

$$\psi_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{e}^{(t\epsilon)}[\tilde{\psi}(\epsilon)]^n d\epsilon. \tag{1.6}$$

La utilidad del espacio de Laplace se puede observar de la ecuación (1.6) ya que sólo se necesita calcular la transformada de Laplace de $\psi(t)$ para obtener $\psi_n(t)$ por medio de una transformada inversa de Laplace. La transformada de Laplace nos evita realizar la convolución (1.2) n veces.

1.2. Caminatas aleatorias

Consideremos el caso simple de un caminante aleatorio que al paso n realiza un salto que da como resultado un desplazamiento l_n, elegido de forma independiente del desplazamiento de los otros pasos, y asumamos que la probabilidad de que tal evento ocurra es $p(l)$. Su posición X_N después de N pasos es la suma de los N desplazamientos:

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} l_n. \tag{1.7}$$

Si los dos primeros momentos $\langle l \rangle$ y $\langle l^2 \rangle$ de $p(l)$ son finitos, entonces el promedio y la varianza de la posición dependen linealmente del número de pasos N [11],

$$\overline{X_N} = VN, \qquad \overline{X_N^2} - (\overline{X_N})^2 = 2DN, \tag{1.8}$$

donde la velocidad V y el coeficiente de difusión D están dados por

$$V = \langle l \rangle, \qquad D = \frac{\langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2}{2}, \tag{1.9}$$

$\overline{X_N}$ y $\overline{X_N^2}$ son el promedio de X_N y X_N^2 respectivamente. Éste es el conocido comportamiento del movimiento browniano, al que se le llama "difusión normal" [11].

Una caracterización más precisa de esta caminata aleatoria está dada por el Teorema del Límite Central (TLC), el cual establece que cuando las condiciones anteriores se cumplen, la distribución de la posición $\bar{X}_N$ para $N \gg 1$ converge a la distribución normal:

$$\text{Prob}\{u_1 \leq \frac{(X_N - VN)}{2\sqrt{DN}} \leq u_2\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} C \int_{u_1}^{u_2} \mathrm{e}^{-\zeta^2} d\zeta, \tag{1.10}$$

donde C es una constante. Una demostración heurística de este teorema puede ser hecho como a continuación [13].

Partimos de la ecuación de Chapmann-Kolmogorov para el proceso markoviano determinado por la probabilidad de transición $p(l - l')$. Es decir, la probabilidad $P_N(l)$ de que el caminante se encuentre en l después de N pasos está dada por

$$P_N(l) = \int_{-\infty}^{\infty} p(l - l') P_{N-1}(l') dl'. \tag{1.11}$$

Si expresamos $p(l)$ en términos de su transformada de Fourier $\tilde{p}(k)$ (ver Apéndice A.2), se tiene

$$P_N(l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikl}\tilde{p}(k)\tilde{P}_{N-1}(k)dk. \tag{1.12}$$

Aquí,

$$\tilde{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikl}p(l)dl, \qquad \text{y} \qquad \tilde{P}_N(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikl}P_N(l)dl. \tag{1.13}$$

De modo que para un caminante que comenzó en $l_0 = 0$

$$P_N(l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikl}[\tilde{p}(k)]^N dk, \tag{1.14}$$

o de forma equivalente,

$$\tilde{P}_N(k) = [\tilde{p}(k)]^N. \tag{1.15}$$

Para simplificar los cálculos supondremos de ahora en adelante que $\langle l\rangle = 0$. Además, para encontrar el comportamiento para cuando $|l|$ es grande se hace una expansión en serie alrededor de $k = 0$, de modo que

$$\tilde{P}_N(k) = [\tilde{p}(k)]^N = [1 - \frac{1}{2}\langle l^2\rangle k^2 + O(k^3)]^N \tag{1.16}$$

$$\simeq [1 - \frac{1}{2}\langle l^2\rangle N\frac{k^2}{N}]^N \qquad \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \qquad \mathrm{e}^{-N\frac{\langle l^2\rangle}{2}k^2}, \tag{1.17}$$

para cuando $k \sim 1/\sqrt{N}$. Al realizar la transformada inversa de Fourier, se obtiene una distribución gaussiana,

$$P_N(l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikl}\mathrm{e}^{-N\frac{\langle l^2\rangle}{2}k^2}dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle l^2\rangle N}}\mathrm{e}^{-\frac{l^2}{2N\langle l^2\rangle}}, \tag{1.18}$$

con lo que el TLC queda demostrado.

Es importante notar lo siguiente acerca del TLC:

1. En la distribución gaussiana límite, sólo los dos primeros momentos $\langle l\rangle$ y $\langle l^2\rangle$ de $p(l)$ contribuyen en su determinación.

2. La cuenca de atracción de las distribuciones que tienen como distribución límite la gaussiana, son aquellas que para $l \gg 1$ decaen al menos tan rápido como $l^{-\mu}$ con $\mu \geq 3$.

Cabe mencionar que se han hecho analogías matemáticas en la literatura entre distribuciones de probabilidad límites de caminantes aleatorios y funciones de correlación en la termoestadística [11]. Además, uno de los principales objetivos de este trabajo es mostrar que es posible aplicar un formalismo matemático similar a la termodinámica (transformadas de Legendre) y de funciones de partición (funciones generadoras) en el análisis de las caminatas aleatorias.

1.3. Procesos multiplicativos

Se ha revisado las técnicas básicas para estudiar procesos de renovación y caminantes aleatorios, ahora estudiaremos otro tipo de procesos, los procesos multiplicativos. En esta sección se hará un resumen de algunas propiedades de los procesos estocásticos multiplicativos. Los procesos multiplicativos abundan en la naturaleza. Procesos multiplicavos son por ejemplo el cambio del tamaño de las rocas conforme se van partiendo [14], el cambio en el número de nodos en una red, el incremento en el número de integrantes de las poblaciones [14, 18, 19, 20, 21, 22]. En el Capítulo 4 se muestra un modelo de crecimiento de la población de bacterias, el cual se puede describir como un proceso multiplicativo.

Supongamos ahora que tenemos una ecuación estocástica multiplicativa discreta, i.e.

$$x_N = \Gamma_N x_{N-1}, \tag{1.19}$$

donde Γ_N es una variable estocástica que sólo puede tomar valores positivos. Definimos $P_N(x)$ como la probabilidad de que x_N tome el valor x. Esta está dada por

$$P_N(x) = \int\int P_{N-1}(x')p(\gamma)\delta(x-\gamma x')dx'd\gamma, \tag{1.20}$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac y $p(\gamma)$ es la probabilidad de que Γ_N tome el valor γ. Al hacer la integral sobre γ se obtiene la correspondiente ecuación de Chapmann-Kolmogorov para este tipo de procesos Markovianos

$$P_N(x) = \int P_{N-1}(x')\frac{p(x/x')}{x'}dx', \tag{1.21}$$

donde podemos identificar a $p(x/x')/x'$ como la probabilidad de transición entre del estado x' al estado x. En el espacio de Mellin, la Ec.(1.21) es

$$\tilde{P}_N(u) = [\tilde{p}(u)]^N, \tag{1.22}$$

donde

$$\tilde{P}_N(u) = \int_0^\infty x^{u-1} P_N(x) dx \quad \text{y} \quad \tilde{p}(u) = \int_0^\infty \gamma^{u-1} p(\gamma) d\gamma. \tag{1.23}$$

Vemos de la ecuación (1.22) que es conveniente trabajar en el espacio de Mellin ya que la transformada de Mellin factoriza procesos estocásticos multiplicativos, es decir, $\tilde{P}_N(u)$ puede ser escrita como un producto de N factores.

1.3.1. Distribución límite para procesos estocásticos multiplicativos

En esta sección, se obtiene distribución a la que tienden los procesos estocásticos multiplicativos cuando $N \to \infty$.

De 1.23 vemos que el máximo de $\tilde{p}(u)$ está en $u = 1$ ya que $\tilde{p}'(u) = 0$. Hacemos una expansión en serie de Taylor de $\tilde{p}(u)$ alrededor de su máximo, de modo que

$$\tilde{P}_N(u) = \left[1 - \frac{(u-1)^2}{2}\tilde{p}''(1) + O((u-1)^3\right]^N, \tag{1.24}$$

donde $\tilde{p}''$ denota la segunda derivada de $\tilde{p}$. Si se toman sólo los dos primeros términos para $u \sim 1/N + 1$, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{P}_N(u) &\approx [1 - \frac{(u-1)^2}{2}\tilde{p}'']^N & (1.25)\\ &= [1 - N\frac{(u-1)^2}{2N}\tilde{p}'']^N & (1.26)\\ &\approx \mathrm{e}^{-N(u-1)^2\tilde{p''}/2} \quad \text{para} \quad N \to \infty. & (1.27) \end{aligned}$$

Al realizar la transformada inversa de Mellin

$$\begin{aligned} P_N(x) &\approx \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-u}\mathrm{e}^{-N(u-1)^2\tilde{p''}/2} du & (1.28)\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2N\tilde{p}''}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x)^2}{2N\tilde{p}''}}, & (1.29) \end{aligned}$$

se obtiene la distribución límite Log Normal para procesos multiplicativos.

1.4. Teoría de desviaciones grandes

La teoría matemática de desviaciones grandes inició con Cramer [23] en la década de 1930, y posteriormente fue desarrollada por Donsker y Varadhan [24, 25, 26, 27], y Freidlin y Wentzell [28] en la década de 1970. Esta teoría estudia el decaimiento exponencial de las probabilidades con fluctuaciones grandes en sistemas aleatorios. Este tipo de probabilidades son importantes en muchos campos de estudio, entre otros en estadística, ingeniería y finanzas [29], ya que estas distribuciones dan valiosa información sobre los eventos raros del sistema alrededor de su valor más probable. En el contexto de la mecánica estadística de equilibrio, la teoría de desviaciones grandes provee estimaciones de orden exponencial que generaliza y refina a la teoría de fluctuaciones de Einstein [30]. Un físico podría describir la teoría de desviaciones grandes como una formulación rigurosa de la mecánica estadística. Los procesos de renovación y las caminatas aleatorias pueden ser descritos con el lenguaje de la teoría de desviaciones grandes [30]. Sin embargo, no es posible enmarcar a los procesos multiplicativos en esta teoría.

1.5. Principio de desviaciones grandes

Supongamos que A_n es una variable etiquetada por el entero n, y $P(A_n \in B)$ es la probabilidad de que A_n tome algún valor del conjunto B. Se dice que $P(A_n \in B)$ satisface un principio de desviación grande con exponente S_B si el límite

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \ln P(A_n \in B) = S_B \tag{1.30}$$

existe [30]. Si $P(A_n \in B)$ tiene un comportamiento exponencial dominante en n, entonces el límite debe existir con $S_B \neq 0$. Si el límite no existe, entonces $P(A_n \in B)$ es singular o decae con n mas rápido que e^{-nS} con $S > 0$. En este caso, decimos que $P(A_N \in B)$ decae *super-exponencialmente* y $S = \infty$. El límite puede también ser cero si decae *sub-exponencialmente* en n, es decir $P(A_n \in B)$ decae con n más lentamente que e^{-nS} para $S > 0$.

De modo que para una densidad de probabilidad que satisface un principio de desviación grande, escribimos

$$P(A_n \in [a, a + da]) := P_n(a)da \approx e^{-nS(a)}da.$$

1.6. El teorema de Gärtner y Ellis

La teoría de desviaciones grandes puede ser descrita desde un punto de vista práctico como una colección de métodos que se han conjuntado para resolver dos problemas [31]:

1. Determinar si un principio de desviación grande existe para una variable aleatoria determinada,

2. Derivar la expresión para la función tasa S asociada.

El teorema de Gärtner y Ellis [32, 33, 34] da un procedimiento general para calcular las funciones de cambio. Consideremos una variable aleatoria real A_n parametrizada por el entero positivo n. Se define la *función generadora de cumulantes escalada* de A_n por el límite

$$\lambda(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\langle \mathrm{e}^{nkA_n}\rangle, \tag{1.31}$$

donde

$$\langle \mathrm{e}^{nkA_n}\rangle = \int_{\Re} \mathrm{e}^{nka} P_n(a) da. \tag{1.32}$$

El teorema de Gärtner y Ellis establece que si $\lambda(k)$ existe para todo $k \in \Re$, entonces A_n satisface un principio de desviaciones grandes que se escribe como

$$P_n(a)da \approx e^{-nS(a)}da.$$

Además, si $\lambda(k)$ es diferenciable, entonces la función de cambio $S(a)$ está dada por

$$S(a) = \sup_{k\in\Re}\{ka - \lambda(k)\}, \tag{1.33}$$

donde el símbolo "sup" significa "supremo de". La transformada definida por el supremo es una extensión de la transformada de Legendre que generalmente se le llama transformada de Legendre–Fenchel [35] de $\lambda(k)$.

Para demostrar heurísticamente el teorema, se parte de asumir que

$$P_n(a)da \approx e^{-nS(a)}da,$$

la cual insertamos en la eq. (1.32) para obtener

$$\langle e^{nkA_n}\rangle \approx \int e^{n[ka-S(a)]}da.$$

Posteriormente, se aproxima la integral por el método del punto silla, en donde la condición de este método es localizar el máximo en la trayectoria del punto silla de $ka - S(a)$. Por lo que asumiendo que el máximo existe y es único, se escribe

$$\langle e^{nkA_n} \rangle \approx \exp\left(n \sup_a \{ka - S(a)\} \right) \Gamma(1/2) \sqrt{\frac{2}{nS''(a_0)}}$$

donde $S''(a_0)$ es la segunda derivada de $S(a)$ evaluada en el valor de $a = a_0$ para el cual $ka - S(a)$ es el supremo y $\Gamma(z)$ es la función gamma de Euler. Por lo tanto

$$\lambda(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\langle e^{nkA_n} \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(n \sup_a \{ka - S(a)\} + \ln\left[\Gamma(1/2) \sqrt{\frac{2}{S''(a_0)}} \right] - \frac{1}{2} \ln[n] \right).$$

Al tomar el límite se tiene simplemente que

$$\lambda(k) = \sup_a \{ka - S(a)\}.$$

Para obtener $S(a)$ en términos de $\lambda(k)$ se usa el hecho de que la transformada de Legendre–Fenchel puede ser invertida cuando $\lambda(k)$ es diferenciable. En este caso, se dice que la transformada de Legendre-Fenchel es auto-invertible o auto-dual. Por lo tanto

$$S(a) = \sup_k \{ka - \lambda(k)\},$$

que es el resultado de la eq. (1.33).

La derivación anterior ilustra que el teorema de Gärtner y Ellis es la consequencia de que se cumpla el principo de desviación grande en la distribucion, combinado con el método del punto silla.

1.7. Distribuciones estables de colas gordas

Se ha visto que la distribución gaussiana es la distribución límite para la suma de variables independientes

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} l_n \tag{1.34}$$

cuando la distribución $p(l)$ decae al menos tan rápidamente como l^{-3} para $|l| \gg 1$. Sin embargo ¿qué pasa cuando $p(l)$ decae mas lentamente ? Levy y Jinchin [36] dieron una clasificación de las posibles distribuciones límite, basados en criterios de estabilidad sobre convoluciones. Los principales resultados del trabajo de Levy y Jinchin se muestran a continuación.

Supongamos que para $l \gg 1$, $p(l)$ se comporta como $l^{-(1+\mu)}$ con $0 < \mu < 2$. Entonces

1. Para $0 < \mu < 1$, el orden de X_N es "típicamente" de $N^{1/\mu}$. Hay que notar que para este caso $\langle l \rangle$ es infinito así como $\bar{X}_N$.

2. Para $1 < \mu < 2$, $\langle l \rangle$ y $\bar{X}_N = \langle l \rangle N$ son finitos, pero la varianza $\bar{X^2}_N - \bar{X}_N^2$ es infinita.

Dicho de otra forma, la variable $Z_N = X_N / N^{1/\mu}$ para $0 < \mu < 1$ tiene una distribución límite cuando $N \to \infty$, de la forma

$$\text{Prob}(u_1 < Z_N < u_2) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{u_1}^{u_2} L_{\mu,\beta}(u) du. \tag{1.35}$$

A las distribuciones $L_{\mu,\beta}$ se les llama *distribuciones estables* de índice μ. Hasta traslaciones y dilataciones, las distribuciones estables están completamente caracterizadas por los dos parámetros $0 < \mu < 2$ y $-1 < \beta < 1$, donde β indica el grado de asimetría, dado por [11]

$$\frac{1-\beta}{1+\beta} = \lim_{L\to\infty} \frac{R(-L)}{1-R(L)}, \qquad \text{donde} \qquad R(L) = \int_{-\infty}^{L} p(l) dl. \tag{1.36}$$

El valor $\beta = 0$ se obtiene cuando valores positivos y negativos de l_n ocurren con igual frecuencia. Para una distribución simétrica $L_{\mu,0}(Z)$ tiene una expresión en términos de su transformada inversa de Fourier como

$$L_{\mu,0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikZ - C|k|^\mu} dk. \tag{1.37}$$

La distribución normal se recupera cuando $\mu = 2$, mientras que para $\mu = 1$ se tiene la distribución de Cauchy:

$$L_{1,0}(Z) = \frac{C}{\pi} \frac{1}{C^2 + Z^2}. \tag{1.38}$$

Por otro lado, cuando l_n solo toma valores positivos, el valor de β es 1, y la distribución puede ser expresada en términos de una transformada inversa de Laplace

$$L_{\mu,1} = \frac{1}{2\pi} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \mathrm{e}^{sZ - Cs^{\mu}} ds. \tag{1.39}$$

Las distribuciones estables $L_{\mu,\beta}(Z)$ decaen como $Z^{-(1+\mu)}$ para valores grandes de Z, y por lo tanto sus momentos de orden igual o mayor a μ divergen. La cuenca de atracción de estas distribuciones son todas las distribuciones $p(l)$ que para valores grandes de l se comportan de forma similar a $L_{\mu,\beta}(Z)$. Este tipo de distribuciones se han observado en la frecuencia de las distancias que ciertos animales recorren para encontrar comida [37]; en los mercados financieros [38, 39]; en ciencias de la computación [40], en redes [41], en procesamiento de señales [42], entre muchos sistemas mas [11]. Se mostrará mas adelante que no es posible construir una termoestadística para distribuciones en las que $0 < \mu < 1$ a diferencia de cuando $1 < \mu < 2$.

1.8. Correlaciones de largo alcance

En las secciones anteriores, para demostrar el TLC, se exigió la condición de que las variables fueran independientes. Pero ¿qué pasa cuando esta condición no se cumple?, es decir, si las variables no son independientes. En este caso, ya no es posible expresar la $\tilde{P}_N(k)$ como un producto de funciones independientes $\tilde{p}(k)$. Como consecuencia, encontrar la forma explícita de $\tilde{P}_N(k)$ se complica considerablemente.

Consideremos el conjunto ordenado de variables aleatorias (l_k), donde k etiqueta la variable y l indica el valor que puede tomar en una realización particular. La función de correlación está definida por

$$C(n) = \langle l_k l_{k+n} \rangle - \langle l_k \rangle \langle l_{k+n} \rangle. \tag{1.40}$$

Si por simplicidad asumimos $\langle l_k \rangle = 0$, entonces la varianza de $X_N = \sum_{k=1}^{N} l_k$ es

$$\bar{X^2}_N = NC(0) + 2 \sum_{k=1}^{N} (N-k) C(k). \tag{1.41}$$

Un primer caso a considerar se da cuando $C(n)$ decae más rápidamente que n^{-1} para $n \gg 1$. Para este caso, el segundo momento de X_N converge y

puede aplicarse el TLC [11]. Este caso se conoce como de correlaciones de corto alcance. Para el caso de correlaciones de largo alcance, es decir, cuando $C(n)$ decae más lentamente que $1/n$, el comportamiento típico de X_N es modificado por las correlaciones. ésto lo vemos de (1.41) al remplazar la suma por integral para $N \gg 1$,

$$\bar{X^2}_N \sim N \int^N C(n)dn \sim N^{2-\nu}, \qquad \text{donde} \qquad C(n) \sim n^{-\nu}. \tag{1.42}$$

Lo anterior implica que las correlaciones pueden inducir difusión anómala, ya que el segundo momento no es proporcional a N. Una interpretación que resulta útil es la siguiente [11]. La integral de la función de correlación

$$N_s(N) = \sum_{n=1}^{N} C(n)/(\langle l_0^2 \rangle - \langle l_0 \rangle^2) \tag{1.43}$$

es un estimado de la cantidad de variables, que entre las N elegidas son estadísticamente iguales a una l_0. Esto se debe a que $(\langle l_0 l_k \rangle - \langle l_0 \rangle \langle l_k \rangle)/(\langle l_0^2 \rangle - \langle l_0 \rangle^2)$ es la cantidad de veces que l_k tiene un valor igual a l_0. Es por esto que uno puede agrupar el conjunto $\{l_k, 0 \leq k \leq N\}$ en subconjuntos de $N_s(N)$ elementos, los cuales tendrán valores similares. Se tienen entonces N_{efe} variables independientes efectivas que también corresponde al número de subconjuntos. Por lo tanto

$$N_{\text{efe}}(N) \sim N/N_s(N). \tag{1.44}$$

Lo anterior permite escribir la variable aleatoria X_N como

$$X_N = X_{N(N_{efe})} \sim \sum_{k=1}^{N_{efe}} N_s \hat{l}_k, \tag{1.45}$$

donde $\hat{l}$ es el valor de los elementos del conjunto. Si el sistema fuera una caminata aleatoria, entonces $N_s\hat{l}_k$ representaría la longitud efectiva debido a los pasos altamente correlacionados de la caminata. Cuando $\nu < 1$, tenemos $N_s \sim N^{1-y}$, y cuando $\nu > 1$, tenemos $N_s \sim$ constante, lo cual nos lleva a los resultados obtenidos anteriormente.

Esta interpretación nos permite establecer una relación de equivalencia matemática entre variables independientes cuya distribución tenga la característica de tener colas gordas y variables con correlaciones de largo alcance. Es decir, si $P_N(l)$ de variables independientes tiene colas gordas, puede ser tratada de forma efectiva como generada por un proceso de variables correlacionadas, si se hace la correspondencia de N con N_{efe} y l_n con $N_s\hat{l}_n$.

Capítulo 2

'Termoestadística' de procesos de renovación

En este capítulo se presentará el método propuesto para obtener la densidad de probabilidad $\psi_n(t)$ de que sucedan n eventos entre t y $t+dt$ en el límite de $n \gg 1$ a partir de funciones generadoras. El procedimiento que se mostrará es útil cuando no es posible encontrar la transformada inversa de Laplace de las funciones generadoras y nos da soluciones asintóticas para el límite $n \to \infty$, $t \to \infty$ de tal modo que t/n sea finito. Posteriormente se establecerá de forma explícita la relación entre dicho método y la estadística de Boltzmann–Gibbs. Más adelante se ilustrará el método por medio del proceso de Poisson.

Al establecer una relación entre los procesos de renovación y la termoestadística, es posible extrapolar toda la experiencia que se tiene en el estudio de los procesos de renovación a la termoestadística y viceversa.

2.1. Métodos asintóticos para los procesos de renovación

Encontrar una expresión algebraica para $\psi_n(t)$ a partir de $\psi(t)$ es en general una tarea difícil, sin embargo existen algunas técnicas que involucran como principal elemento al método del punto silla para obtener expresiones asintóticas de $\psi_n(t)$ en el límite $n \to \infty$. En esta sección se mostrará en qué consisten dichas técnicas. Posteriormente, como parte esencial de la innovación en este trabajo, se hará una contribución conceptual al formalismo

matemático de la termoestadística, al hacer notar que la termoestadística se basa esencialmente en estas mismas técnicas.

2.1.1. Transformación del espacio de Laplace (ϵ) al espacio t

La transformada inversa de Laplace de $\tilde{\psi}_n(\epsilon)$ puede ser encontrada para $n \gg 1$. Para lograrlo, reescribimos la transformada inversa (Ver apéndice A.1) en la forma de Laplace:

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{t\epsilon}\tilde{\psi}_n(\epsilon)d\epsilon \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{t\epsilon}\left[\tilde{\psi}(\epsilon)\right]^n d\epsilon \\ \psi_n(n\bar{t}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{n[\bar{t}\epsilon+\ln\tilde{\psi}(\epsilon)]}d\epsilon, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde se ha definido $\bar{t} \equiv t/n$. A partir de (2.1) y con ayuda del método del punto silla (Ver apéndice B) encontramos el siguiente límite,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\psi_n(n\bar{t}) = \epsilon_0\bar{t} + \ln\tilde{\psi}(\epsilon_0), \tag{2.2}$$

como veremos mas adelante, el límite anterior es el equivalente límite termodinámico de los procesos estocásticos. En la expresión anterior ϵ_0 es el valor de ϵ en el punto silla de $\sigma(\bar{t};\epsilon) := \epsilon\bar{t} + \tilde{\psi}(\epsilon)$ dada por la condición

$$\bar{t} = -\frac{d}{d\epsilon}\ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0)] := \langle t\rangle_\epsilon. \tag{2.3}$$

A partir de (2.2) deducimos la siguiente distribución límite para cuando $n \to \infty$, $t \to \infty$ de modo que $\bar{t}$ se mantiene finito,

$$\psi_n(n\bar{t}) \approx C\exp n[\epsilon_0\bar{t} + \ln\tilde{\psi}(\epsilon_0)], \tag{2.4}$$

$$\psi_n(t) \approx C\exp[\epsilon_0 t + n\ln\tilde{\psi}(\epsilon_0)], \tag{2.5}$$

donde C es una constante.

Hemos llegado a una expresión para $\psi_n(t)$ en términos de la transformada de Laplace de la densidad del tiempo de espera $\psi(t)$ para $n \gg 1$. Notamos que

el lado derecho de la igualdad en (2.2) tiene la forma de una transformada de Legendre de $\ln\tilde{\psi}(\epsilon)$, donde se elimina ϵ en favor de $\bar{t}$. Es decir, para obtener la distribución en el límite 'termodinámico' $n \to \infty$, basta realizar una transformada de Legendre en $\ln\tilde{\psi}(\epsilon)$.

Más adelante se hará notar que este procedimiento se puede relacionar en el contexto de la mecánica estadística con el obtener la función de partición del ensamble microcanónico a partir de la función de partición del ensamble canónico a través de una transformada de Legendre.

Caso general

El desarrollo anterior es aplicable a eventos idénticos e independientes, donde la aproximación del punto silla se aplica de forma natural cuando $n \gg 1$, manteniendo t/n finito. Sin embargo, cuando $n\ln\tilde{\psi}(\epsilon) \neq \ln\tilde{\psi}_n(\epsilon)$, no se conoce de forma directa qué tan buena es la aproximación del punto silla.

A continuación se obtendrá la condición que se debe cumplir para que la aproximación del punto silla sea buena aún cuando la condición $n\ln\tilde{\psi}(\epsilon) = \ln\tilde{\psi}_n(\epsilon)$, no se cumpla.

Se busca una aproximación de la integral I al aplicar el método del punto silla a la integral

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} \mathrm{e}^{\epsilon t + \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon)]} d\epsilon. \tag{2.6}$$

Donde γ es el contorno de Bromwich (Ver apéndice A.1). Modificamos el contorno de integración a γ^* de tal forma que pase por el punto silla. Además, hacemos una expansión en serie del argumento $\epsilon t + \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon)]$ como función de ϵ alrededor del punto silla ϵ_0 y tomamos sólo el primer término significativo

$$I \approx \int_{\gamma^*} \exp\left(\epsilon_0 t + \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon_0)] + \frac{(\epsilon-\epsilon_0)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}\ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon)]|_{\epsilon=\epsilon_0}\right) d\epsilon.$$

La dirección de la expansión se toma de tal forma que en la trayectoria

$$\frac{(\epsilon-\epsilon_0)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}\ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon)]|_{\epsilon=\epsilon_0}$$

sea real. Si definimos α como la fase en la dirección de la expansión podemos reescribir

$$\frac{(\epsilon-\epsilon_0)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}\ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon)]|_{\epsilon=\epsilon_0}$$

como

$$\frac{t^2 \mathrm{e}^{2i\alpha}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon)]|_{\epsilon=\epsilon_0},$$

donde $t = |\epsilon - \epsilon_0|$. Tomando el hecho de que a lo largo de la trayectoria de integración en el punto silla

$$\mathrm{e}^{2i\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon)]|_{\epsilon=\epsilon_0} = - \left| \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon)] \right|_{\epsilon=\epsilon_0},$$

entonces

$$I \approx \exp\left(\epsilon_0 t + \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon_0)]\right) \int_{\gamma^*} \exp\left(-\frac{t^2}{2} \left| \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon)] \right|_{\epsilon=\epsilon_0} \right) dt. \tag{2.7}$$

Por lo tanto,

$$I \approx \exp\left(\epsilon_0 t + \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon_0)]\right) \sqrt{\frac{2\pi}{C_n}},$$

donde $C_n \equiv \left| \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \ln[\tilde{\psi}_n(\epsilon_0)] \right|$. Más aún, si definimos

$$\langle t \rangle_{\epsilon,n} \equiv \int t \mathrm{e}^{-\epsilon t} \psi_n(t) dt = -\frac{\partial}{\partial \epsilon} \tilde{\psi}_n(\epsilon), \tag{2.8}$$

entonces C_n se puede expresar como

$$C_n = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \langle t \rangle_{\epsilon=\epsilon_0,n}. \tag{2.9}$$

Como $\frac{\partial}{\partial \epsilon} \langle t \rangle_{\epsilon=\epsilon_0,n} \propto n$, se concluye que la expresión (2.2) para el caso general toma la siguiente forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \psi_n(n\bar{t}) = \epsilon_0 \bar{t} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \tilde{\psi}_n(\epsilon_0)}{n}. \tag{2.10}$$

2.1.2. Transformación del espacio de Laplace (ϵ) y del espacio z al espacio (t, n)

En esta sección se mostrará cómo es posible expresar $\psi_n(t)$ cuando $n \gg 1$ en términos de la función generadora $\tilde{\psi}(\epsilon, z)$ que resulta de aplicar la transformada de Laplace y posteriormente la transformada zeta a la densidad del

tiempo de espera $\psi_n(t)$. Ésto nos mostrará la equivalencia de representaciones en dicho límite que es una característica que posee también la termodinámica.

La transformada zeta se define como

$$\tilde{\psi}(\epsilon, z) = \sum_n \tilde{\psi}_n(\epsilon) z^n, \tag{2.11}$$

entonces en este caso (Ver apéndice A.3)

$$\psi_n(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\epsilon \oint_C dz \exp(\epsilon t) \tilde{\psi}(\epsilon, z) z^{-n+1}, \tag{2.12}$$

donde C es un contorno alrededor del origen. De forma equivalente,

$$\psi_n(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\epsilon \oint_C dz \exp\{\epsilon t - (n-1)\ln z + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]\}, \tag{2.13}$$

$$\psi_n(n\bar{t}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\epsilon \oint_C dz \exp\{n(\epsilon t - (1-1/n)\ln z + \frac{\ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]}{n}\}. \tag{2.14}$$

El método del punto silla en la integral anterior, nos da las condiciones

$$t = -\frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z_0)], \tag{2.15}$$

$$n - 1 = z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z_0)]. \tag{2.16}$$

Como estamos trabajando en $n \gg 1$ reescribimos le Ec.(2.16) de la siguiente manera,

$$n = z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z_0)]. \tag{2.17}$$

De las condiciones anteriores obtenemos z_0 y ϵ_0 en términos de t y n, las cuales se sustituyen en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \psi_n(n\bar{t}) = \epsilon_0 \bar{t} - \ln z_0 + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z_0)]}{n}, \tag{2.18}$$

donde se ha hecho la suposición $1/n \approx 0$. De la expresión anterior se concluye que la expresión asintótica para $\psi_n(t)$ está dada por

$$\psi_n(t) \approx C \exp(\epsilon_0 t - n \ln z_0 + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z_0)]), \tag{2.19}$$

donde C es una constante.

La ecuación (2.19) nos muestra como obtener $\psi_n(t)$ para $n \gg 1$ a partir de $\tilde{\psi}(\epsilon, z)$.

Más adelante se mostrará que el procedimiento anterior se puede relacionar con expresar el número de estados accesibles al sistema Ω, en términos de la función de partición del ensamble gran canónico por medio de una trasformada doble de Legendre.

Punto silla de la transformada inversa z

Para mayor claridad sobre como se obtuvo el límite (2.18), analizaremos la integral en la variable z de (2.14),

$$\oint_C dz \exp\{\epsilon t - (n-1)\ln z + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]\}, \tag{2.20}$$

en la cual se hace una expansión en serie alrededor del punto silla en z_0 hasta el primer término significativo del argumento de la exponencial:

$$I' = \oint_C dz \quad \exp\Big\{\epsilon t - (n-1)\ln z_0 + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z_0)] \tag{2.21}$$

$$+ \quad \frac{(z-z_0)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(-(n-1)\ln z + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]\Big)_{z=z_0}\Big\}, \tag{2.22}$$

La dirección de la expansión se toma de tal forma que en la trayectoria

$$(z-z_0)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(-(n-1)\ln z + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]\Big)_{z=z_0}$$

sea real. Si definimos α como la fase en la dirección de la expansión podemos reescribir

$$(z-z_0)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(-(n-1)\ln z + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]\Big)_{z=z_0}$$

como

$$(t)^2 \mathrm{e}^{2i\alpha}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(-(n-1)\ln z + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]\Big)_{z=z_0},$$

donde $t = |z - z_0|$. Tomando el hecho de que a lo largo de la trayectoria de integración en el punto silla

$$\mathrm{e}^{2i\alpha}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(-(n-1)\ln z + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]\Big)_{z=z_0} = -\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(-(n-1)\ln z + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]\Big)_{z=z_0}\right|,$$

entonces

$$I' = \exp\left\{\epsilon t - (n-1)\ln z_0 + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z_0)]\right\} \int dt \exp\left\{-\frac{(t)^2}{2}\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(-(n-1)\ln z + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z)]\right)_{z=z_0}\right|\right\}.$$

Evaluamos sólo la primera derivada para obtener

$$I' = \exp\{\epsilon t - (n-1)\ln z_0 + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z_0)]\} \int dt \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\left|-(n-1)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\langle n\rangle_{\epsilon,z}}{z}\right|_{z=z_0}\right\},$$

donde se ha definido

$$\langle n\rangle_{\epsilon,z} = \frac{\sum_n n\tilde{\psi}_n(\epsilon)z^n}{\sum_n \tilde{\psi}_n(\epsilon)z^n}.$$

Si se aplica la regla de Leibniz en el último término del argumento, se tiene

$$\begin{aligned} I' = \exp\left\{\epsilon t - (n-1)\ln z_0 + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z_0)]\right\} \int \quad dt \quad & \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\left|-(n-1)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right)\right.\right. \\ & + \quad \left.\left.\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\langle n\rangle_{\epsilon,z} + \langle n\rangle_{\epsilon,z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z}\right|_{z=z_0}\right\}. \end{aligned}$$

Si ahora se usa el hecho de que en z_0, $n-1 = \langle n\rangle_{\epsilon,z_0}$ como se observa de (2.17), entonces

$$\begin{aligned} I' &= \exp\{\epsilon t - (n-1)\ln z_0 + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z_0)]\} \int dt \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\left|\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\langle n\rangle_{\epsilon,z}\right|_{z=z_0}\right\}, \\ &= \exp\{\epsilon t - (n-1)\ln z_0 + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z_0)]\}\sqrt{\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\langle n\rangle_{\epsilon,z}\right|_{z=z_0}}}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

A partir de (2.23) se concluye que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln I' &= \lim_{n\to\infty}\left(\epsilon\frac{t}{n} - (1-\frac{1}{n})\ln z_0 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z_0)]\right) + \frac{1}{n}\ln\sqrt{\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\langle n\rangle_{\epsilon,z}\right|_{z=z_0}}}\right) \\ &= \epsilon\frac{t}{n} - \ln z_0 + \frac{1}{n}\ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z_0)], \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que

$$\left|\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\langle n\rangle_{\epsilon,z}\right|_{z=z_0} \propto n. \tag{2.24}$$

2.1.3. Transformación del espacio (t, z) al espacio (t, n)

Partiremos ahora de la función generadora $\psi(t, z)$ para obtener $\psi_n(t)$, es decir supongamos que conocemos la función generadora

$$\psi(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) z^n. \tag{2.25}$$

Obtenemos $\psi_n(t)$ por medio de la transformada inversa zeta

$$\psi_n(t) = \oint dz \psi(t, z) z^{-n+1}. \tag{2.26}$$

Expresamos la integral en la forma de Laplace

$$\psi_n(t) = \oint dz \mathrm{e}^{-(n-1)\ln z + \ln[\psi(t,z)]}, \tag{2.27}$$

Con ayuda del método del punto silla (Ver apéndice B) se encuentra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \psi_n(t) = -\ln z_0 + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln[\psi(t, z_0)]}{n}, \tag{2.28}$$

donde z_0 se obtiene de la condición del punto silla en siguiente

$$\begin{aligned} n - 1 &= z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln[\psi(t, z_0)], \\ n &\approx z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln[\psi(t, z_0)] \qquad \text{para} n \gg 1, \end{aligned} \tag{2.29}$$

de donde se obtiene z_0 en función de n. De (2.28) se concluye que la distribución asintótica para $n \gg 1$ es de la forma

$$\psi_n(t) \approx C \mathrm{e}^{-n \ln z_0 + \ln[\psi(t,z_0)]}. \tag{2.30}$$

Tenemos ahora una expresión para $\psi_n(t)$ en términos de $\psi(t, z)$ para cuando $n \gg 1$. Hay que notar que el argumento en la exponencial de la expresión (2.30) es equivalente a una transformada tipo Legendre.

2.2. Estadística de Boltzmann–Gibbs

En esta sección se establecerá de forma explícita la correspondencia entre las funciones generadoras y las funciones de partición, así como entre las transformadas de Legendre derivadas de las aproximaciones hechas en la sección anterior y los potenciales termodinámicos usuales de la mecánica estadística de Boltzmann–Gibbs (BG). Con esto se pretende hacer explícita la analogía que en la tesis se quiere mostrar entre los procesos de renovación y la mecánica estadística de BG.

Al hacer el cambio de variable $z = \mathrm{e}^{\mu}$ en (2.14) se pueden identificar expresiones similares que aparecen en la estadística de BG, de modo que

$$\psi_n(t) = \int d\epsilon \oint d\mu \exp\{\epsilon t + \mu n + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon, z = e^{\mu})]\}, \tag{2.31}$$

como se ha mostrado en las secciones anteriores con ayuda de la aproximación del punto silla se puede expresar como,

$$\psi_n(t) \approx C \exp\{\epsilon_0 t + \mu_0 n + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z = e^{\mu_0})]\} \tag{2.32}$$

con las condiciones

$$t = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z_0 = e^{\mu_0})], \tag{2.33}$$

$$n = \frac{\partial}{\partial \mu} \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z_0 = e^{\mu_0})], \tag{2.34}$$

y donde C es una constante. Las ecuaciones anteriores se usan para eliminar ϵ_0 y μ_0 en favor de t y n en (2.32). A su vez estas ecuaciones juegan el papel de ecuaciones de estado en el contexto de la M.E. Es posible identificar el argumento de la exponencial en (2.32) como una transformada de Legendre incompleta,

$$\sigma(t, n; \epsilon_0, \mu_0) \equiv [\epsilon_0 t + \mu_0 n + \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z_0 = e^{\mu_0})]] \tag{2.35}$$

en donde σ juega el papel de una entropía y $\ln \tilde{\psi}(\epsilon_0)$ el papel de una función de Massieu. Con la identificación anterior, $\tilde{\psi}(\epsilon, e^{\mu})$ puede pensarse como una función de partición siendo ϵ_0 el 'inverso de la temperatura' y μ_0 un 'potencial químico'.

De (2.33) y (2.11) se observa que

$$t = \frac{1}{\psi(\epsilon_0, z_0)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} [\sum_n (\tilde{\psi}(\epsilon_0))^n z_0^n] \tag{2.36}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0)](z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0, z_0)]) \tag{2.37}$$

y al usar (2.34),

$$\frac{t}{n} = -\frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln[\tilde{\psi}(\epsilon_0)] = -\frac{1}{\tilde{\psi}(\epsilon_0)} \int dt[t\psi(t) \mathrm{e}^{-\epsilon_0 \mathrm{t}}] \equiv \frac{\langle \mathrm{t} \rangle_{\epsilon,\mu}}{\langle \mathrm{n} \rangle_{\epsilon,\mu}}. \tag{2.38}$$

También

$$n = \frac{\sum_n n\tilde{\psi}_n(\epsilon) \exp[\mu_0 n]}{\tilde{\psi}(\epsilon, z = e^{\mu_0})} \equiv \langle n \rangle_{\epsilon,\mu}. \tag{2.39}$$

Por lo tanto, cuando se elige $z = e^{\mu}$, se obtiene el análogo del ensamble gran canónico. Además, de (2.11), se observa que la función generadora

$$\tilde{\psi}(\epsilon, z = e^{\mu}) = \sum_n \tilde{\psi}_n(\epsilon) e^{\mu n} \tag{2.40}$$

tiene la misma forma que la función de partición gran canónica de la estadística de BG, si se identifica z con la actividad química (o fugacidad) y $\tilde{\psi}_n(\epsilon)$ con la función de partición canónica de BG. En (2.32) se comprueba que la estructura termodinámica se mantiene.

En conclusión podemos establecer las siguientes identificaciones entre los procesos de renovación (P.R.) con la M.E.

Tabla 1

P.R.		M.E.
t	$\rightarrow$	E (energía)
n	$\rightarrow$	N (número de partículas)
ϵ	$\rightarrow$	$\frac{1}{kT} := \beta$ (inverso de la temperatura)
z	$\rightarrow$	$\mathrm{e}^{\mu/kT}$ (actividad química)
$\psi(t)$	$\rightarrow$	$\Omega(E, N = 1)$ (No. de microestados por partícula)
$\psi_n(t)$	$\rightarrow$	$\Omega(E, N)$ (No. de microestados)
$\tilde{\psi}_n(\epsilon)$	$\rightarrow$	$Z(\beta, N)$ (función de partición canónica)
$\tilde{\psi}(\epsilon, z)$	$\rightarrow$	$\Xi(\beta, \mu)$ (gran función de partición)

2.3. Ejemplo: La distribución de Poisson

En esta sección se empleará el método de funciones generadoras propuesto para calcular $\psi_n(t)$ del proceso de renovación de Poisson. Este proceso es importante ya que se conocen los resultados exactos, y por lo tanto, podemos comparar las soluciones aproximadas que se obtengan del método de funciones generadoras para $n \gg 1$ con la distribución exacta.

El proceso de renovación de Poisson está definido por la densidad de tiempo de espera

$$\psi(t) = b\mathrm{e}^{-bt}.$$

y

$$\psi_n(t) = \frac{(bt)^n}{n!}\mathrm{e}^{-bt}$$

es la bien conocida distribución de Poisson. También en las próximas secciones se escribirá entre comillas junto a las variables que definen el espacio de trabajo, el nombre del ensamble con el que es posible establecer una relación formal.

2.3.1. Transformación del espacio (ϵ, n), 'canónico' al espacio (t, n), 'microcanónico'

Queremos encontrar $\psi_n(t)$ que tiene una correspondencia con la función de partición del ensamble microcanónico cuando $n \gg 1$, a partir de $\tilde{\psi}_n(\epsilon)$ que corresponde formalmente a la función de partición canónica.

Partamos de un proceso con densidad de probabilidad exponencial

$$\psi(t) = b\mathrm{e}^{-\mathrm{bt}}, \tag{2.41}$$

o de forma equivalente en el espacio de Laplace

$$\tilde{\psi}(\epsilon) = \frac{b}{b+\epsilon}. \tag{2.42}$$

En la relación formal que queremos mostrar, la expresión anterior corresponde a la función de partición canónica por partícula. De modo que

$$\tilde{\psi}_n(\epsilon) = \left[\frac{b}{b+\epsilon}\right]^n, \tag{2.43}$$

corresponde a la función de partición de n partículas. Usando (2.42) junto con la condición (2.3) se tiene

$$t/n = \frac{1}{b + \epsilon_0} \tag{2.44}$$

y de (2.5), al eliminar ϵ_0 en favor de t, se encuentra la distribución de Poisson con la aproximación de Stirling en el factorial,

$$\psi_n(t) \approx C\frac{\mathrm{e}^n}{n^n}(bt)^n \mathrm{e}^{-bt}. \tag{2.45}$$

Para este caso se encuentra que $C = 1$ al normalizar.

La ecuación (2.44) cumple la función de una ecuación de estado que relaciona una variable extensiva t, la cual corresponde con la energía total del sistema, con su correspondiente variable intensiva ϵ, que se puede interpretar como una temperatura inversa. Calcular $\psi_n(t)$ a través de la transformada de Legendre de $\ln\tilde{\psi}_n(\epsilon)$ cuando $n \gg 1$, es la propiedad análoga a la equivalencia de ensambles de la M.E. En las subsecciones siguientes mostraremos esta equivalencia entre los distintos ensambles o espacios.

2.3.2. Transformación del espacio (ϵ, z), 'gran canónico' al espacio (ϵ, n), 'canónico'

Buscamos ahora obtener $\tilde{\psi}_n(\epsilon)$ (canónico) a partir de $\psi(\epsilon, z)$ y mostrar cómo la $\tilde{\psi}_n$ así obtenida, es equivalente a la obtenida de forma directa de la transformada de Laplace de ψ_n en el límite $n \to \infty$. Lo anterior corresponde a la equivalencia de ensambles cuando $n \gg 1$.

Primero calculamos de forma exacta $\psi(\epsilon, z)$ evaluando la transformada z de $\tilde{\psi}_n$. Para el caso de eventos independientes se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi(\epsilon, z) &= \sum_n \tilde{\psi}_n(\epsilon) z^n \\
&= \sum_n [\tilde{\psi}(\epsilon)]^n z^n \\
&= \frac{z\tilde{\psi}(\epsilon)}{1 - \tilde{\psi}(\epsilon) z}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

De tal forma que para un proceso con densidad de probabilidad exponencial

$$\psi(t) = b\mathrm{e}^{-\mathrm{bt}}, \tag{2.47}$$

o en el espacio de Laplace

$$\tilde{\psi}(\epsilon) = \frac{b}{b+\epsilon}, \tag{2.48}$$

tenemos que

$$\psi(\epsilon, z) = \frac{zb}{b(1-z)+\epsilon}. \tag{2.49}$$

Es posible expresar ψ_n en el límite $n \to \infty$ en términos de la expresión anterior con ayuda de la Ec.(2.19) de modo que la solución asintótica de ψ_n está dada por

$$\psi_n(t) \approx C \exp\left[\epsilon_0 t - n \ln z_0 + \ln \psi(\epsilon_0, z_0)\right]. \tag{2.50}$$

Para comprobar la equivalencia de ensambles, comparamos la expresión que se obtiene de eliminar z_0 de (2.50) mediante la condición

$$n = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \psi(\epsilon, z_0), \tag{2.51}$$

con la expresión exacta de $\tilde{\psi}_n$ cuando $n \gg 1$.

La condición anterior para el caso particular que se está analizando se reduce a

$$\begin{aligned} n &= z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{z_0 b}{b - z_0 b + \epsilon} \\ &= z_0 \left(\frac{b}{z_0 b} - \frac{-b}{b - z_0 b + \epsilon} \right) \\ &= 1 + \frac{z_0 b}{b - z_0 b + \epsilon}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Despejando z_0 se encuentra

$$z_0 = \left(\frac{n-1}{n} \right) \frac{b+\epsilon}{b}. \tag{2.53}$$

Sustituimos z_0 en (2.50) de modo que

$$\psi_n(t) \approx C \exp\left[\epsilon_0 t - n \ln \left[\frac{b+\epsilon_0}{b} \left(\frac{n-1}{n} \right) \right] + \ln[n-1] \right]. \tag{2.54}$$

La cual en el límite $n \to \infty$ se puede expresar como

$$\psi_n(t) \approx C \exp\left[\epsilon_0 t - n \ln[(1 + \frac{\epsilon_0}{b})] \right]. \tag{2.55}$$

Definiendo $\Sigma(\epsilon, n) \equiv n \ln[\frac{b}{b+\epsilon_0}]$ entonces,

$$\ln \psi_n(t) \approx \epsilon_0 t + \Sigma(\epsilon_0, n). \tag{2.56}$$

En analogía con la mecánica estadística, $\Sigma(\epsilon, n)$ corresponde a la función de Massieu asociada con el ensamble canónico dada por el logaritmo de (2.43), o bien a $-\beta F(\beta, n)$ donde β es el inverso de la temperatura y F la energía libre de Helmholtz.

2.3.3. Transformación del espacio (ϵ, z) al espacio (t, z)

En el apartado anterior se encontró una expresión para $\psi_n(t)$ partiendo de $\psi(\epsilon, z)$, y dejando indicada la transformada sobre ϵ. En este apartado, partiendo también de $\psi(\epsilon, z)$ se busca la expresión para $\psi_n(t)$ haciendo la transformada de Legendre en ϵ y se dejará indicada la transformada en z. Ésto lo haremos para mostrar que la equivalencia entre ensambles es independiente del orden en que se hagan las transformaciones.

Procedemos de forma similar a los casos anteriores, primero eliminamos ϵ_0 de (2.50) en favor de t mediante la condición

$$t = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[(n-1) \ln z_0 - \ln \psi(\epsilon_0, z_0) \right]. \tag{2.57}$$

Después de derivar y despejar en la ecuación anterior, se encuentra que:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{t} - b(1 - z_0). \tag{2.58}$$

Y por lo tanto el logaritmo de (2.50) en $n \gg 1$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \ln \psi_n(t) &\approx -n \ln z_0 + (-b(1-z_0)t + \ln t z_0 b + 1), \\ \ln \psi_n(t) &\approx -n \ln z_0 + \Gamma(t, z_0), \end{aligned} \tag{2.59}$$

en donde se ha definido $\Gamma(t, z_0) \equiv \epsilon_0 t + \ln \psi(\epsilon_0, z_0)$ eliminando ϵ_0 en favor de t. Es decir,

$$\mathrm{e}^{\Gamma(t,z)} \approx= \mathrm{e}^{-b(1-z)t+1} tzb. \tag{2.60}$$

En la analogía con la mecánica estadística, $\Gamma(t, z)$ es la función de Massieu cuyas variables naturales son la energía interna y el potencial químico.

2.3.4. Transformación del espacio (ϵ, z) al espacio (t, n)

Como se ha mencionado anteriormente, es preciso mostrar que la equivalencia de ensambles es independiente del orden en que se realicen las transformadas de Legendre. A continuación partiremos de los resultados de los dos apartados anteriores, para obtener la expresión final de $\psi_n(t)$. El objetivo es mostrar que el resultado es el mismo para los dos casos y por lo tanto independiente del orden en que se hagan las transformaciones. Primero se calculará $\psi_n(t)$ en el límite $n \to \infty$ mediante la transformación $(\epsilon, z) \to (\epsilon, n) \to (t, n)$ y posteriormente mediante la transformación $(\epsilon, z) \to (t, z) \to (t, n)$.

Transformación $(\epsilon, z) \to (\epsilon, n) \to (t, n)$

La transformación $(\epsilon, z) \to (\epsilon, n)$ ya se ha hecho en la sección 2.3.2 obteniéndose la expresión (2.56)

$$\ln \psi_n(t) \approx \epsilon_0 t + \Sigma(\epsilon, n), \tag{2.61}$$

donde $\Sigma(\epsilon, n) \approx n \ln[\frac{b}{b+\epsilon_0}]$.

Ahora eliminamos ϵ_0 en favor de t con la condición

$$\frac{t}{n} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln[(1 + \frac{\epsilon_0}{b})] \tag{2.62}$$

$$= \frac{1}{b + \epsilon_0}, \tag{2.63}$$

de donde despejando se encuentra

$$\epsilon_0 = \frac{n}{t} - b. \tag{2.64}$$

Al sustituir ϵ_0 en (2.61) se llega al resultad0

$$\ln \psi_n(t) \approx n - bt + n \ln \left[\frac{bt}{n}\right]. \tag{2.65}$$

o bien

$$\psi_n(t) \approx \mathrm{e}^n \left(\frac{bt}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{bt}} \tag{2.66}$$

que como se esperaba es la distribución de Poisson con la aproximación de Stirling.

Transformación $(\epsilon, z) \rightarrow (t, z) \rightarrow (t, n)$

Partiendo de (2.59)

$$\ln \psi_n(t) \approx -n \ln z_0 + \Gamma(t, z_0), \tag{2.67}$$

con $\Gamma(t, z) = -b(1-z)t + \ln[tzb] + 1$, donde ya se ha hecho la transformación $(\epsilon, z) \rightarrow (t, z)$.

Procedemos a eliminar z_0 en favor de n haciendo uso de la condición

$$n = z_0 \frac{\partial}{\partial z} \Gamma(t, z_0), \tag{2.68}$$

la cual, para ste caso en particular es

$$n = z_0 bt + 1. \tag{2.69}$$

Al despejar y sustituir en (2.59), encontramos la forma explícita de la solución asintótica,

$$\ln \psi_n(t) \approx -b(1 - \frac{n-1}{bt})t - n \ln \frac{n-1}{bt} + \ln(n-1) + 1, \tag{2.70}$$

o bien, para $n \gg 1$

$$\psi_n(t) \approx \frac{e^n}{n^n} (bt)^{(n)} e^{-bt}. \tag{2.71}$$

Cuando $n \gg 1$ el resultado coincide con (2.45) y (2.66) como se esperaba.

2.4. Transformaciones de variables extensivas a intensivas

En las secciones anteriores se mostró cómo es posible obtener $\psi_n(t)$ a partir de $\tilde{\psi}_n(\epsilon)$ mediante una transformada de Legendre, también se mostró cómo es posible obtener $\tilde{\psi}_n(\epsilon)$ y $\Gamma(t, z)$ a partir de $\psi(\epsilon, z)$ mediante las correspondientes transformadas de Legendre. En la correspondencia que se ha hecho con la M.E., lo anterior corresponde a obtener las funciones de partición cuyas variables naturales son extensivas a partir de las funciones de partición cuyas variables naturales son intensivas. La forma natural de encontrar las funciones de partición de variables intensivas a partir de las funciones de

partición de variables extensivas es simplemente invirtiendo la transformadas de Legendre generadas por la condición del punto silla de las secciones anteriores. Sin embargo, en las siguientes secciones veremos que también es posible obtener los mismos resultados al emplear la aproximación del punto silla en la evaluación de las transformadas integrales en lugar de en sus inversas, como se había venido haciendo.

Al hacer la traducción de los procesos de renovación al lenguaje de la M.E. de B.G. el volumen del espacio fase (función de partición microcanónica) se mapea a $\psi_n(t)$ y por lo tanto la energía libre se obtiene con una transformada de Legendre,

$$-\epsilon F_n(\epsilon) = \ln\left[\psi_n(t)\right] - \epsilon t, \tag{2.72}$$

de donde se elimina t en favor de ϵ mediante la condición

$$\epsilon = \frac{\partial}{\partial t} \ln\left[\psi_n(t)\right]. \tag{2.73}$$

Lo anterior es equivalente a encontrar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[\mathrm{e}^{-\epsilon F_n(\epsilon)}\right]}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\psi}_n(\epsilon) \tag{2.74}$$

en términos de $\psi_n(t)$ con ayuda de la aproximación del punto silla. Es decir,

$$\mathrm{e}^{-\epsilon F_n(\epsilon)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\epsilon t} \psi_n(t) dt, \tag{2.75}$$

la integral la escribimos en la forma de Laplace

$$\mathrm{e}^{-\epsilon F_n(\epsilon)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\epsilon t + \ln[\psi_n(t)]} dt, \tag{2.76}$$

y al tomar el límite (2.74) en ambos lados de la igualdad se tiene

$$\mathrm{e}^{-\epsilon F_n(\epsilon)} \approx \mathrm{e}^{-\epsilon t_0 + \ln[\psi_n(t_0)]}, \tag{2.77}$$

donde la condición del punto silla es

$$\epsilon = \frac{\partial}{\partial t} \ln\left[\psi_n(t)\right] |_{t=t_0}. \tag{2.78}$$

es decir,

$$-\epsilon F_n(\epsilon) \approx -\epsilon t_0 + \ln\left[\psi_n(t_0)\right]. \tag{2.79}$$

De donde se muestra que la obtención de la energía libre a partir del volumen del espacio fase, corresponde a encontrar el logaritmo de su transformada de Laplace en el límite termodinámico $n \gg 1$.

2.5. Ejemplo: Distribución de Poisson

Ilustraremos lo anterior mediante el caso concreto que hemos estado analizando, el proceso de Poisson.

2.5.1. Transformación del espacio (t, n), 'microcanónico' al espacio (ϵ, n), 'canónico'

Partiendo de la distribución de Poisson

$$\psi_n(t) = \frac{(bt)^n \mathrm{e}^{-bt}}{n!}, \tag{2.80}$$

la correspondiente 'energía libre' está dada por la expresión

$$\mathrm{e}^{-\epsilon F_n(\epsilon)} = \int \mathrm{e}^{-\epsilon t + \ln\left[\frac{(bt)^n \mathrm{e}^{-bt}}{n!}\right]} dt. \tag{2.81}$$

Para comprobar la equivalencia de representaciones en el límite $n \to \infty$, empleamos la aproximación del punto silla para evaluar la integral. De tal forma que

$$\mathrm{e}^{-\epsilon F_n(\epsilon)} \approx \mathrm{e}^{-\epsilon t_0 + \ln\left[\frac{(bt_0)^n \mathrm{e}^{-bt_0}}{n!}\right]}, \tag{2.82}$$

en donde t_0 en función de ϵ está dada por la condición

$$\epsilon = \frac{\partial}{\partial t} \ln \left[\frac{(bt)^n \mathrm{e}^{-bt}}{n!}\right]_{t=t_0} \tag{2.83}$$

$$\epsilon = \frac{n}{t_0} - b. \tag{2.84}$$

Despejando de la última igualdad t_0 se tiene que

$$t_0 = \frac{n}{\epsilon + b}. \tag{2.85}$$

Eliminando t_0 en favor de ϵ en (2.82),

$$\mathrm{e}^{-\epsilon F_n(\epsilon)} \approx \left[\frac{bn}{\epsilon + b}\right]^n \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n!} \tag{2.86}$$

o bien,

$$-\epsilon F_n(\epsilon) \approx n \ln \left[\frac{b}{\epsilon + b}\right] + \ln \left[\frac{n^n}{\mathrm{e}^n n!}\right]. \tag{2.87}$$

De la expresión anterior se ve que para $n \gg 1$

$$-\epsilon F_n(\epsilon) = n \ln \left[\frac{b}{\epsilon + b} \right]. \tag{2.88}$$

Que coincide con la 'energía libre' obtenida de evaluar la integral (2.81) de forma exacta. Ésto comprueba la equivalencia entre la representación (t, n) y (ϵ, n) relacionadas con una transformada de Legendre cuando $n \gg 1$.

2.5.2. Transformación del espacio (t, n) al espacio (t, z)

Volvamos otra vez al proceso de Poisson,

$$\psi_n(t) = \frac{(bt)^n \mathrm{e}^{-bt}}{n!}. \tag{2.89}$$

$\psi(t, z)$ está dado por

$$\psi(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bt)^n \mathrm{e}^{-bt}}{n!} z^n. \tag{2.90}$$

Para n grande, cambiamos la suma por integral

$$\begin{aligned} \psi(t, z) &\approx \int_1^{\infty} \frac{(bt)^n \mathrm{e}^{\mathrm{bt}}}{n!} z^n dn & (2.91) \\ &= \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{\ln[\frac{(bt)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{bt}}}{n!}] + n \ln z} dn. & (2.92) \end{aligned}$$

Con ayuda de la aproximación del punto silla se encuentra el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \psi(t, z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left[\frac{(bt)^{n_0} \mathrm{e}^{-bt}}{n_0!} \right] + \ln z, \\ &= \ln \left[\frac{\mathrm{e}(bt)^{n_0} \mathrm{e}^{-bt}}{n_0^{n_0}} \right] + \ln z, & (2.93) \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\psi(t, z) \approx C \mathrm{e}^{\ln[\frac{(bt)^{n_0} \mathrm{e}^{-bt}}{n_0!}] + n_0 \ln z}, \tag{2.94}$$

en donde C es una constante y n_0 en función de z está dada por la condición

$$\begin{aligned} \ln z &= -\frac{\partial}{\partial n} \ln \left[\frac{\mathrm{e}(bt)^n \mathrm{e}^{\mathrm{bt}}}{n^n} \right]_{n=n_0} & (2.95) \\ \ln z &= -\ln bt - \ln 1/n_0. & (2.96) \end{aligned}$$

Despejando de la última igualdad n_0 se tiene que

$$n_0 = zbt. \tag{2.97}$$

Eliminando n_0 en favor de z en (2.94),

$$\psi(t, z) \approx C\mathrm{e}^{zbt-bt}. \tag{2.98}$$

De este modo obtenemos $\psi(t, z)$ cuando $n \gg 1$ a partir de $\psi_n(t)$ mostrando de forma explícita la equivalencia de representaciones por medio de una transformada de Legendre.

2.5.3. Transformación del espacio (t, n) al espacio (ϵ, z)

En el caso de intentar pasar de cualquiera de las dos representaciones anteriores a la representación correspondiente a la función de Massieu asociada al que hemos llamado ensamble gran canónico (ϵ, z) por medio de la transformada de Legendre, se encuentra el problema de que es idénticamente cero. Esto se debe a que en nuestro problema solo tenemos dos variables t y n, y por lo tanto al tratar de eliminar ambas por sus conjugadas, no queda ninguna variable extensiva, por lo que estrictamente también corresponde al ensamble cuyas variables naturales son todas intensivas, a este ensamble lo llamaremos el ensamble cero. Por otro lado, anteriormente se empleó esta representación con resultados útiles y satisfactorios. Este hecho se puede explotar en favor de la M.E. ya que nos indica la manera en que el ensamble cero se debe tratar y por lo tanto ser útil en la descripción de un sistema térmico. Podemos resumir la característica que hace distinto al ensamble cero y al mismo tiempo su utilidad de la siguiente manera: La función de partición cuyas variables naturales sean todas intensivas (ensamble cero), puede ser empleada para calcular otras energías libres. Sin embargo, se distingue de otras representaciones en que ella misma no puede ser obtenida con transformaciones de Legendre de otras "energías libres". Observemos ésto con el caso particular del gas ideal. La gran función de partición del gas ideal es

$$\Xi(T, V, \mu) = \exp\left[-zV\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right], \qquad z = \mathrm{e}^{\mu/kT}. \tag{2.99}$$

La única variable extensiva es V, sin embargo realizamos la integral para obtener la función de partición del ensamble cero que dependa de la presión

p,

$$\mathrm{e}^{\Gamma} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pV/kT} \Xi(T, V, \mu) dV. \tag{2.100}$$

Obtenemos la función de partición del ensamble cero,

$$\mathrm{e}^{\Gamma} = \left[\frac{p}{kT} + z \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \right]^{-1}. \tag{2.101}$$

Teniendo esta función de partición podemos encontrar el potencial (pV) por medio de una transformada de Legendre y tomando el límite termodinámico.

Lo mostramos a continuación,

$$\ln \Xi(T, V, \mu) = \frac{p}{kT} V + \Gamma(T, p, \mu) \tag{2.102}$$

con la ecuación de estado, deducida de la condición del punto silla,

$$V = -kT \frac{\partial}{\partial p} \Gamma(T, p, \mu). \tag{2.103}$$

Para el caso del gas ideal obtenemos

$$V = \left[\frac{p}{kT} + z \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \right]^{-1}. \tag{2.104}$$

De la ecuación anterior despejamos p

$$\frac{p}{kT} = \frac{1}{V} - z \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2}, \tag{2.105}$$

que en el límite termodinámico $V \to \infty$ es

$$\frac{p}{kT} = \frac{1}{V} - z \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2}. \tag{2.106}$$

Con ayuda de la ecuación anterior eliminamos p de (2.102) y obtenemos

$$\ln \Xi(T, V, \mu) \approx -Vz \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} + \ln[V]. \tag{2.107}$$

En el límite termodinámico, es decir cuando $V \to \infty$ y $N \to \infty$ de tal forma que V/N sea finito, se obtiene

$$\ln \Xi(T, V, \mu) = -Vz \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \tag{2.108}$$

que es el resultado esperado. Comprobamos que la ecuación de estado deducida (2.106) es correcta, ya que coincide con el resultado de haber integrado la relación de Gibbs-Duhem para el gas ideal.

El ejemplo anterior muestra en forma práctica la manera de emplear el ensamble cero para encontrar el resto de las energías libres del sistema.

Ensamble de Mellin

Se ha visto que no es posible obtener la función de Massieu para el ensamble cero a través de una transformada de Legendre, esto porque la energía libre crece linealmente en n y la transformada de Legendre correspondiente tiene la forma

$$n \ln z + n \ln \tilde{\psi}(\epsilon). \tag{2.109}$$

Al derivar con respecto de n para obtener el máximo se tiene una condición para z en la cual no aparece n, por lo que no es posible eliminar n en favor de z

$$\ln z = -\ln \tilde{\psi}(\epsilon). \tag{2.110}$$

De hecho, si se sustituye la z con esta condición nos da una identidad a cero.

Según el procedimiento anterior, la transformada de Legendre correspondiente junto con la condición para z vienen de tratar de encontrar en el límite 'termodinámico' a $\tilde{\psi}(\epsilon, z)$ con ayuda del método del punto silla en la transformada Z,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\psi}(\epsilon, z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \int dz \tilde{\psi}(\epsilon)^n z^n \tag{2.111}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \int dz \mathrm{e}^{(n \ln[\tilde{\psi}(\epsilon)] + n \ln[z])}. \tag{2.112}$$

Donde se ha reemplazado la suma por integral. Por otro lado, un resultado central de este capítulo, fue mostrar que la equivalencia de ensambles no es más que la consecuencia inmediata de la aproximación del punto silla en las transformadas integrales. Lo anterior nos da la libertad de poder emplear otra

transformada integral que no sea la transformada de Laplace, y posteriormente por medio de la aproximación del punto silla, encontrar la transformada de Legendre adecuada para que el nuevo ensamble sea equivalente con los demás.

Teniendo en cuenta la conclusión anterior sobre la equivalencia de ensambles, una alternativa al ensamble cero consiste en trabajar con un ensamble modificado basado en la transformada de Mellin. Es decir, en lugar de obtener la transformada Z o la transformada de Laplace, se busca la transformada de Mellin,

$$\tilde{\psi}^*(\epsilon, s) = \int_0^\infty [\tilde{\psi}(\epsilon)]^n n^{s-1} dn. \tag{2.113}$$

Calculamos el límite termodinámico, es decir $n \to \infty$ y $s \to \infty$ de modo que $s/n := s^*$ sea finito, y con ayuda del método del punto silla se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \tilde{\psi}^*(\epsilon, s) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty \mathrm{e}^{n \ln[\tilde{\psi}(\epsilon)] + (s-1)\ln[n]} dn & (2.114) \\ &= \ln[\tilde{\psi}(\epsilon)] + s^* \ln[n_0]. & (2.115) \end{aligned}$$

La condición del punto silla es

$$s = -n_0 \ln[\tilde{\psi}(\epsilon)]. \tag{2.116}$$

Por lo tanto,

$$\ln[\tilde{\psi}^*(\epsilon, s)] = (1-s)\left[1 - \ln\left[\frac{1-s}{\ln \tilde{\psi}(\epsilon)}\right]\right]. \tag{2.117}$$

Vemos entonces que la forma de pasar a la función de Massieu modificada es mediante una transformada de Legendre modificada

$$\ln[\tilde{\psi}^*(\epsilon, s)] \equiv \Xi^*(\epsilon, s) = (s-1)\ln n_0 + \ln \tilde{\psi}_n(\epsilon), \tag{2.118}$$

donde n_0 se elimina en favor de s mediante la condición

$$(s-1) = -n \frac{\partial}{\partial n} \ln \tilde{\psi}_{n=n_0}(\epsilon). \tag{2.119}$$

Por otro lado, si queremos encontrar alguna otra 'energía libre' a partir de $\tilde{\psi}^*(\epsilon, s)$ podemos comenzar con la transformada inversa de Mellin,

$$\tilde{\psi}_n(\epsilon) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{\psi}^*(\epsilon, s) n^{-s} ds. \tag{2.120}$$

Siguiendo el mismo procedimiento se encuentra

$$\tilde{\psi}_n(\epsilon) \approx C\mathrm{e}^{\ln[\tilde{\psi}^*(\epsilon,s_0)]-s_0\ln[n]}, \tag{2.121}$$

donde C es una constante y s_0 se elimina en favor de n mediante la condición

$$\ln[n] = \frac{\partial}{\partial s}\ln[\tilde{\psi}^*(\epsilon, s_0)]. \tag{2.122}$$

Es muy ilustrativo notar que

$$\frac{\partial}{\partial s}\ln[\tilde{\psi}^*(\epsilon, s_0)] = \frac{\int_0^\infty \ln[n]\tilde{\psi}_n(\epsilon)n^{s-1}dn}{\tilde{\psi}^*(\epsilon, s)} \equiv \langle \ln n\rangle_{\epsilon,s}. \tag{2.123}$$

Es decir, la derivada en la variable natural de la representación de Mellin, corresponde con el promedio del logaritmo de su variable conjugada. Además, en contraste con la representación correspondiente al ensamble cero, es posible encontrar la forma funcional de esta representación con transformadas de Legendre de otras representaciones. Esta característica fue la motivación principal de proponerlo como alternativa al ensamble cero.

En el caso particular de la distribución de Poisson, la función de partición para el ensamble de Mellin $\tilde{\psi}^*(\epsilon, s)$ se encuentra por medio de (2.117) , es decir

$$\tilde{\psi}^*(\epsilon, s) = \mathrm{e}^{(1-s)}\left[\frac{(1-s)(b+\epsilon)}{b}\right]^{s-1}, \tag{2.124}$$

ya que $\tilde{\psi}(\epsilon) = b/(b+\epsilon)$.

2.6. Ejemplo: el proceso de renovación de Weierstrass

La importancia del proceso de renovación de Weierstrass radica en que posee un parámetro H que cuando es mayor a 2, el primer momento de $\psi(t)$ converge. Sin embargo cuando H es menor a 2, el primer momento de $\psi(t)$ no converge [13]. En este trabajo, el proceso de renovación y la caminata de Weierstrass se emplearán para mostrar como un mismo sistema en el régimen regular puede ser descrito con una estructura similar a la M.E. Sin embargo, el mismo sistema en el régimen singular ya no puede ser descrito por las mismas técnicas, es decir, la estructura de la mecánica estadística

como la conocemos sólo es aplicable a sistemas con ciertas características muy específicas, las cuales se analizarán en esta sección. Hasta ahora no se ha podido plantear un análogo termodinámico para el régimen singular

2.6.1. Comportamiento de la densidad del tiempo de espera del proceso de renovación de Weierstrass

Para hacer nuestro análisis, comenzaremos mostrando el comportamiento de la densidad del tiempo de espera del proceso de Weierstrass. La densidad del tiempo de espera $\psi(t)$ del proceso de renovación de Weierstrass está definido por [13]

$$\psi(t) = \frac{1-a}{a} \sum_{j=1}^{\infty} a^j b^j \exp\left(-b^j t\right), \tag{2.125}$$

con a,$b < 1$. Este proceso de renovación está generado por la consideración de un número infinito de procesos exponenciales con frecuencias que obedecen invarianza de escala discreta (b^n) [12] y pesos en forma de ley de potencias (a^n). Por otro lado, la caminata de Weierstrass está definida en el espacio de Fourier por distribución de probabilidad de un solo paso $p(l)$ como $\tilde{p}(k) = \frac{a-1}{a} \sum_n^{\infty} a^{-n} \cos\left(b^n k\right)$, donde $a > 1$ y $b > 1$ son parámetros libres. Esta última función es la función de Weierstrass, que es continua en todos los puntos pero no diferenciable en ninguno. Cabe señalar que en el análogo temporal no se obtiene la función de Weierstrass y simplemente se le ha llamado así por su semejanza. Para observar el comportamiento de $\psi(t)$, la expresamos en términos de la transformada inversa de Mellin. Comenzamos expresando $\exp\left(-b^j t\right)$ en términos de su transformada de Mellin, para lo cual necesitamos la identidad

$$\exp\left(-b^j t\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)(b^j t)^{-s} ds.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\psi(t) = \frac{1-a}{a} \sum_{j=1}^{\infty} a^j b^j \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)(b^j t)^{-s} ds\right], \tag{2.126}$$

donde $c > 0$ debido a la banda fundamental de la transformada de Mellin (Ver apéndice A.4). Al intercambiar la suma y la integral se obtiene

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{1-a}{a\ 2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)t^{-s}\sum_{j=1}^{\infty}a^j b^j (b^j)^{-s}ds \\ &= \frac{1-a}{a\ 2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)t^{-s}\frac{ab^{-s+1}}{1-ab^{-s+1}}ds. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Para evaluar la integral se elige el contorno en el semiplano derecho del plano complejo para obtener la expansión asintótica de $\psi(t)$ alrededor de $t \to \infty$. El factor $1 - ab^{-s+1}$ es cero cuando

$$\begin{aligned} ab^{-s+1} &= e^{2\pi i m}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \\ \Rightarrow (-s+1)\ln[b] &= 2\pi i m - \ln[a], \\ \Rightarrow s &= \frac{\ln a}{\ln b} + 1 - \frac{2\pi i m}{\ln b} \equiv s_0, \end{aligned} \tag{2.128}$$

Para encontrar los residuos debido a este término, primero evaluamos con la ayuda de la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_0}\frac{(s-s_0)}{1-ab^{-s+1}} &= \lim_{s\to s_0}\frac{\frac{d(s_0-s)}{ds}}{\frac{d(1-ab^{-s+1})}{ds}} \\ &= \lim_{s\to s_0}\frac{1}{ab^{-s+1}\ln[b]}. \end{aligned} \tag{2.129}$$

Los residuos debido a este término en el denominador son

$$\begin{aligned}\mathrm{Res(f(s_0))} &= \lim_{s\to s_0}\frac{\Gamma(s)t^{-s}ab^{-s+1}}{ab^{-s+1}\ln b} \\ &= \frac{1}{\ln b}\Gamma(s_0)t^{-s_0}. \end{aligned} \tag{2.130}$$

Finalmente, tomando en cuenta los polos en el lado derecho del plano complejo, la integral (2.127) puede ser evaluada para $t > 1$ usando el resultado anterior y (2.128)

$$\psi(t) = \frac{1}{t^{1+H}}\frac{1-a}{a\ln b}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Gamma(H+1-\frac{2\pi i m}{\ln b})\exp(2\pi i m\frac{\ln t}{\ln b}), \tag{2.131}$$

con $H \equiv \frac{\ln a}{\ln b}$. Con esta expresión para $\psi(t)$ se observa que cuando $H < 1$ el primer momento de la distribución diverge.

Con un análisis similar es posible obtener el desarrollo en serie en el espacio de Laplace, dando como resultado $\tilde{\psi}(\epsilon) = 1 + C_H \epsilon^H + C_1 \epsilon + O(\epsilon^2)$[12]. Cuando $H > 1$ el término mas significativo es $C_1\epsilon$, sin embargo, cuando $H < 1$ el término mas significativo es $C_H \epsilon^H$.

Para obtener la expresión de $\psi(t)$ cuando $t < 1$ tomamos en cuenta los polos del lado izquierdo del plano complejo dados por la función $\Gamma(s)$ en $0, -1, -2, ...$, lo que da la serie,

$$\psi(t) = \frac{1-a}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j t^j}{\frac{1}{ab} - b^j}. \tag{2.132}$$

2.6.2. Termoestadística del proceso de renovación de Weierstrass

Ahora, es posible encontrar $\psi_n(t)$ con los métodos de transformadas de Legendre de las funciones generadoras bajo ciertas aproximaciones.

$\psi(t)$ del proceso de Weierstrass en el espacio de Laplace está dado por

$$\tilde{\psi}(\epsilon) = \frac{1-a}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^j b^j}{\epsilon + b^j}. \tag{2.133}$$

Al hacer una expansión de $\tilde{\psi}(\epsilon)$ alrededor de $\epsilon = 0$,

$$\tilde{\psi}(\epsilon) = 1 - \bar{t}\epsilon + O(\epsilon), \tag{2.134}$$

tomamos en cuenta solo el término más significativo. De modo que

$$\tilde{\psi}(\epsilon) \approx 1 - \bar{t}\epsilon \tag{2.135}$$

$$\approx \frac{1}{1 + \bar{t}\epsilon}. \tag{2.136}$$

En donde se ha definido

$$\bar{t} \equiv \frac{1-a}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^j}{b^j} = \frac{1-a}{a} \frac{1}{1 - \frac{a}{b}}, \tag{2.137}$$

si se cumple que $a < b$. La solución asintótica para $n \gg 1$ es

$$\psi_n(t) \approx C \exp[\epsilon_0 t + n \ln \tilde{\psi}(\epsilon_0)], \tag{2.138}$$

donde C es una constante. Eliminando ϵ_0 en favor de t en (2.138) mediante la condición

$$t = -n\frac{d}{d\epsilon}\ln\tilde{\psi}(\epsilon_0) \tag{2.139}$$

$$= n\frac{\bar{t}}{1+\bar{t}\epsilon_0}, \tag{2.140}$$

se obtiene

$$\psi_n(t) \approx \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{n}}}{n^n}(\frac{t}{\bar{t}})^n \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\bar{\mathrm{t}}}}. \tag{2.141}$$

De aquí vemos que el proceso de renovación de Weierstrass es equivalente al proceso de Poisson con una frecuencia efectiva $b = 1/\bar{t}$. También se observa que si el primer momento $\bar{t}$ de $\psi(t)$ no converge, entonces tampoco converge $\langle t/n\rangle$ donde el promedio es con respecto a $\psi_n(t)$. Esto impide hacer uso de la aproximación del punto silla y el formalismo no es aplicable. Esto es de esperarse ya que es posible interpretar a las variables en una estructura termodinámica como promedios, y en este caso el promedio diverge.

Capítulo 3

'Termoestadística' de caminatas aleatorias

Se ha visto cómo es posible establecer una relación formal entre las funciones generadoras de procesos de renovación y las funciones de partición de la mecánica estadística. También se ha mostrado que el evaluar las transformadas integrales por medio de la aproximación del punto silla y posteriormente calcular el límite 'termodinámico' es equivalente a realizar transformadas de Legendre. En este capítulo analizaremos con técnicas semejantes a las del capítulo anterior a las caminatas aleatorias. Veremos que la técnica para obtener la distribución de probabilidad $P_n(l)$ de que un caminante aleatorio se encuentre en la posición l después de n pasos, genera una termoestadística propia para caminatas aleatorias. También se encuentran las 'transformadas de Legendre' aplicables en estos casos. Se ilustra la termoestadística para caminantes aleatorios al analizar con estas técnicas la distribución gaussiana, la caminata de Weierstrass en el régimen regular y un caminante que sólo puede dar pasos a sus primeros sitios vecinos en una malla unidimensional. Al final del capítulo, se encuentran las ecuaciones de estado del modelo hamiltoniana con interacciones de largo alcance para sistemas de espines [1] empleando un enfoque inspirado en la 'termoestadística' de caminantes aleatorios.

3.1. Transformación del espacio (k, n) al espacio (l, n)

Consideremos una caminata aleatoria siendo $p(l)$ la densidad de probabilidad de que el caminante realice un desplazamiento l. La densidad de probabilidad de que el caminante esté en l después de n pasos es

$$P_n(l) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(l')p(l - l')dl', \tag{3.1}$$

de tal forma que en el espacio de Fourier, para un caminante que comenzó en $l = 0$

$$\tilde{P}_n(k) = [\tilde{p}(k)]^n, \tag{3.2}$$

siendo

$$\tilde{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikl}p(l)dl, \qquad \tilde{P}_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikl}P_n(l)dl. \tag{3.3}$$

El espacio de Fourier es de gran utilidad ya que es posible obtener $\tilde{P}_n(k)$ simplemente elevando a la potencia n la transformada de Fourier $\tilde{p}(k)$. Ahora, supongamos que para un determinado caminante aleatorio conocemos $\tilde{p}(k)$, de modo que para calcular $P_n(l)$ es necesario encontrar la transformada inversa de Fourier de $\tilde{P}_n(k)$ dada por (3.2), de modo que

$$P_n(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikl}[\tilde{p}(k)]^n dk. \tag{3.4}$$

Al evaluar la integral anterior con el método del punto silla (Ver apéndice B) se encuentra

$$P_n(l) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n \left| \frac{d^2 \ln \tilde{p}(k)}{dk^2} \right|_{k=k_0}}} \exp\left[ik_0 l + n \ln \tilde{p}(k_0)\right], \tag{3.5}$$

donde k_0 es el valor de k en el punto silla y se encuentra mediante la condición

$$l = ni\frac{d}{dk} \ln\left[\tilde{p}(k)\right]|_{k=k_0} := \langle l \rangle_{k_0}. \tag{3.6}$$

Notemos que a pesar de la unidad imaginaria en la ecuación de estado anterior, l es real. Es k_0 la que toma en general algún valor en el plano complejo

para que la ecuación de estado relacione un valor real de l con k_0. A partir de (3.5) se encuentra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_n(n\bar{l}) = ik_0\bar{l} + \ln \tilde{p}(k_0), \tag{3.7}$$

donde se ha supuesto que $l \to \infty$ de modo que $l/n := \bar{l}$ se mantiene finito. El procedimiento para encontrar el límite (3.7) es equivalente a realizar una transformada modificada de Legendre donde k_0 se elimina en favor $\bar{l} = l/n$ mediante la Ec.(3.6).

Ahora la transformada modificada de Legendre involucra la unidad imaginaria. Notamos también que en el caso de los procesos de renovación, se empleó la transformada de Laplace para definir las funciones generadoras o funciones de partición. En contraste, para las caminatas aleatorias definimos a las 'funciones de partición' con transformadas de Fourier.

3.2. Transformación del espacio (k, z) al espacio (l, n)

El mismo análisis puede ser hecho no solo para pasar del espacio k al espacio de la variable l, sino también para recuperar la variable n a partir del espacio correspondiente a la transformada z. Es decir, supongamos que conocemos la expresión para la transformada z de alguna función

$$\tilde{p}(k, z) = \sum_n \tilde{p}_n(k) z^n. \tag{3.8}$$

En este caso (Ver apéndice A.3)

$$P_n(l) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dk \oint_C dz \exp(ikl) \tilde{p}(k, z) z^{-n+1}, \tag{3.9}$$

o, de forma equivalente,

$$P_n(l) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dk \oint_C dz \exp\{ikl - (n-1)\ln z + \ln[\tilde{p}(k, z)]\}. \tag{3.10}$$

El método del punto silla nos da las condiciones siguientes para $n \gg 1$

$$l = -\frac{\partial}{\partial ik} \ln[\tilde{p}(k_0, z_0)], \tag{3.11}$$

$$n = z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln[\tilde{p}(k_0, z_0)]. \tag{3.12}$$

Con las ecuaciones (3.11) y (3.12) eliminamos z_0 y k_0 en el siguiente límite que se obtiene con ayuda del meétodo del punto silla,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_n(l) = ik_0\bar{l} - \ln z_0 + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln[\tilde{p}(k_0, z_0)]}{n}. \tag{3.13}$$

En la expresión anterior se supuso que $t \to \infty$ de modo que $t/n = \bar{l}$ se mantiene finito. De (3.13) se observa que la expresión asintótica para $P_n(l)$ es

$$P_n(l) \approx C \exp\{ik_0 l - n \ln z_0 + \ln[\tilde{p}(k_0, z_0)]\}, \tag{3.14}$$

donde C es una constante. Lo anterior es la propiedad análoga a la equivalencia de ensambles en el contexto de caminatas aleatorias.

3.3. Transformación del espacio (k, z) al espacio (k, n)

Ahora se partirá de la función generadora $\tilde{P}(k, z)$ definida por la expresión

$$\tilde{P}(k, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n(k) z^n. \tag{3.15}$$

Para el caso de variables idénticas e independientes se tiene

$$\tilde{P}(k, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{p}(k)]^n z^n = \frac{\tilde{p}(k)z}{1 + \tilde{p}(k)z}. \tag{3.16}$$

Pasaremos ahora de este espacio (k, z) al espacio donde se encuentra definida $\tilde{P}_n(k)$.

La transformada inversa z (Ver apéndice A.3)

$$\tilde{P}_n(k) = \oint_c dz \mathrm{e}^{(-(n-1)\ln z + \ln \tilde{P}(k,z)}, \tag{3.17}$$

donde c es un contorno alrededor del origen. La transformada tipo Legendre correspondiente se deduce con ayuda de la aproximación del punto silla al obtener el límite 'termodinámico'

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{P}_n(k) = -\ln z + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \tilde{P}(k,z)}{n}, \tag{3.18}$$

donde z_0 está dada por la condición

$$n = z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln \tilde{P}(k, z_0). \tag{3.19}$$

De (3.18) se observa que la distribución límite es

$$\tilde{P}_n(k) \approx C \mathrm{e}^{(-n \ln z_0 + \ln \tilde{P}(k,z_0))}, \tag{3.20}$$

donde C es una constante.

Al realizar de forma explícita la derivada para eventos independientes (3.16), se obtiene

$$n = \frac{1}{1 + \tilde{p}(k) z_0}. \tag{3.21}$$

De modo que al despejar z_0

$$z_0 = \frac{1}{\tilde{p}(k)} \left(\frac{1}{n} - 1 \right). \tag{3.22}$$

Eliminando z_0 en favor de n en (3.20) para $n \gg 1$ se obtiene

$$\tilde{P}_n(k) \approx [\tilde{p}(k)]^n. \tag{3.23}$$

Esto muestra la equivalencia de representaciones.

3.4. Ejemplo: La distribución normal

El primer ejemplo que mostraremos será el de un caminante aleatorio caracterizado por una densidad de probabilidad de longitud de paso con forma gaussiana. Elegimos este caso debido a que los resultados exactos son conocidos y nos sirve para mostrar la precisión del método.

3.4.1. Transformación del espacio (k, n) al espacio (l, n)

Un caminante caracterizado por la densidad de probabilidad de longitud de paso

$$p(l) = \frac{a^{(1/2)}}{\Gamma(1/2)} \mathrm{e}^{-al^2}, \tag{3.24}$$

se puede expresar de forma equivalente en el espacio de Fourier como

$$\tilde{p}(k) = \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4a}}. \tag{3.25}$$

De (3.6) se tiene

$$l = -n\frac{ik_0}{2a} \tag{3.26}$$

y de (3.7), al eliminar k_0 en favor de l, se encuentra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln[P_n(l)] = -a(\frac{l}{n})^2. \tag{3.27}$$

De donde deducimos la forma asintótica de la distribución

$$P_n(l) \approx C \exp\left(-\frac{al^2}{n}\right), \tag{3.28}$$

donde C es una constante y vemos que la distribución corresponde a la distribución normal.

3.4.2. Transformación del espacio (n, l) al espacio (k, n)

Ahora se emplearán las transformadas tipo Legendre en sentido inverso. Es decir, pasaremos de un tipo de variables 'extensivas' a un tipo de variables 'intensivas'.

Partimos de la definición de $\tilde{P}_n(k)$

$$\tilde{P}_n(k) = \int e^{-ikl} P_n(l) dl. \tag{3.29}$$

Para la distribución normal $P_n(l)$ es sin aproximaciones

$$P_n(l) = \frac{a^{1/2}}{n^{1/2}\Gamma(1/2)} \mathrm{e}^{-\frac{al^2}{n}} \tag{3.30}$$

por lo tanto al sustituir esta expresión en (3.29)

$$\tilde{P}_n(k) = \frac{a^{1/2}}{n^{1/2}\Gamma(1/2)} \int \mathrm{e}^{-ikl}\mathrm{e}^{-al^2/n} dl. \tag{3.31}$$

Se hace el cambio de variable $\bar{l} := l/n$ además de tomar el límite $n \to \infty$ y $l \to \infty$ de modo que $\bar{l}$ se mantenga finita en

$$\tilde{P}_n(k) = \frac{(an)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int \mathrm{e}^{n(-ik\bar{l}-a(\bar{l})^2)} d\bar{l}. \tag{3.32}$$

Con ayuda del método del punto silla se encuentra el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{P}_n(k) = -ik\bar{l}_0 - a(\bar{l}_0)^2, \tag{3.33}$$

donde $\bar{l}_0$ es el valor de l en el punto silla y está dado por la condición

$$-ik = -\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial \bar{l}} \ln p(n\bar{l}) \tag{3.34}$$

$$-ik = \frac{\partial}{\partial \bar{l}}(a\bar{l}^2)|_{\bar{l}=\bar{l}_0} \tag{3.35}$$

$$-ik = 2a\bar{l}_0. \tag{3.36}$$

Despejando en (3.36) encontramos el valor de $\bar{l}_0$ en términos de k

$$\bar{l}_0 = \frac{-ik}{2a}, \tag{3.37}$$

que al sustituir en (3.33) se encuentra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{P}_n(k) = -\frac{k^2}{4a}, \tag{3.38}$$

o de forma equivalente

$$\tilde{P}_n(k) \approx \mathrm{e}^{-\frac{nk^2}{4a}}. \tag{3.39}$$

La última expresión coincide con (3.23) que es lo que se buscaba verificar.

3.4.3. Transformación del espacio (l, n) al espacio (l, z)

En esta sección se obtendrá $P(l, z)$ de la distribución gaussiana a partir de $P_n(l)$ para $n \gg 1$ con la transformada de Legendre correspondiente.

Partimos de la definición de la transformada z

$$P(l, z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(l) z^n. \tag{3.40}$$

Por otro lado sabemos que $P_n(l) = \frac{a^{1/2}}{n^{1/2}\Gamma(1/2)} \mathrm{e}^{-\frac{al^2}{n}}$, por lo que

$$P(l, z) = \frac{a^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-1/2 \ln n - \frac{al^2}{n} + n \ln z}. \tag{3.41}$$

En el límite 'termodinámico' $n \gg 1$ y $l/n := \bar{l}$ finito se observa que el argumento de la exponencial anterior se reduce a

$$P(l, z) = \frac{a^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{[n(-a(\bar{l})^2 + \ln z)]} \tag{3.42}$$

Con métodos similares a los expuestos hasta ahora se encuentra la distribución asintótica

$$P(l, z) \approx C \mathrm{e}^{-\frac{al^2}{n_0} + n_0 \ln z}, \tag{3.43}$$

donde C es una constante y la condición del punto silla nos indica el valor de n_0

$$\ln z = -\frac{al^2}{n_0^2}. \tag{3.44}$$

Por lo que despejando n_0 encontramos

$$n_0 = \frac{\sqrt{a} l}{\ln[1/z]}, \tag{3.45}$$

y

$$P(l, z) \approx C \mathrm{e}^{-2\sqrt{a} l (\ln[1/z])^{1/2}}. \tag{3.46}$$

Este resultado se obtuvo de manera muy sencilla con los procedimientos aquí presentados, a diferencia de intentar realizar la suma (3.41).

3.4.4. Transformación del espacio (k, n) al espacio (k, z)

Se busca ahora encontrar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{P}(k, z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n(k) z^n \tag{3.47}$$

con ayuda del método del punto silla. Además para eventos independientes se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{p}(k)]^n z^n & (3.48) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n \ln \tilde{p}(k) + n \ln z}. & (3.49) \end{aligned}$$

De inmediato se observa que surge un problema cuando tratamos de evaluar por el método del punto silla, ya que este método no genera una relación entre n y z, debido a que el argumento de la exponencial es lineal en n. Esto nos indica que estamos tratando con el espacio equivalente al ensamble cero en termodinámica. Al seguir el método hasta ahora expuesto, el argumento de la exponencial da cero idénticamente.

Otra posibilidad es trabajar con el ensamble derivado de la transformada de Mellin que se introdujo en la sección 2.5.3. Es decir, transformar $\tilde{P}_n(k)$ a $\tilde{P}(k, s)$ donde

$$\tilde{P}(k, s) = \int_1^{\infty} \tilde{P}_n(k) n^{s-1} dn \tag{3.50}$$

es la transformada de Mellin en n (Ver apéndice A.4).

Para esta transformada se tiene para procesos independientes

$$\tilde{P}(k, s) \approx C \mathrm{e}^{n_0 \ln \tilde{p}(k) + s \ln n_0} dn \tag{3.51}$$

donde se ha empleado el procedimiento presentado en las secciones anteriores para obtener distribuciones asintóticas, C es una constante y n_0 está dado por la condición

$$\begin{aligned} s &= -n_0 \frac{\partial}{\partial n} \tilde{P}_n(k) & (3.52) \\ &= -n_0 \ln \tilde{p}(k). & (3.53) \end{aligned}$$

Es decir,

$$n_0 = -\frac{s}{\ln \tilde{p}(k)} \tag{3.54}$$

que al sustituir en (3.51)

$$\tilde{P}(k,s) \approx C\mathrm{e}^{-s(1-\ln\left[\frac{s}{\ln[1/\tilde{p}(k)]}\right]}. \tag{3.55}$$

Por lo que para $\tilde{p}(k) = \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4a}}$ se reduce a

$$\tilde{P}(k,s) \approx C\mathrm{e}^{-s\left(1-\ln\left[\frac{4as}{k^2}\right]\right)}. \tag{3.56}$$

Por completez en el tratamiento de éste caso, se comprobará que es posible invertir esta relación. La transformada inversa de Mellin es

$$\tilde{P}_n(k) = \int n^{-s}\mathrm{e}^{-s+s\ln\left[\frac{s}{\ln[1/\tilde{p}(k)]}\right]}ds \tag{3.57}$$

$$= \int \mathrm{e}^{-s\ln n - s + s\ln\left[\frac{s}{\ln[1/\tilde{p}(k)]}\right]}ds. \tag{3.58}$$

Empleando los métodos hasta ahora expuestos se encuentra

$$\tilde{P}_n(k) \approx C\mathrm{e}^{-s_0\ln n - s_0 + s_0\ln\left[\frac{s_0}{\ln[1/\tilde{p}(k)]}\right]} \tag{3.59}$$

con

$$s_0 = n\ln[1/\tilde{p}(k)]. \tag{3.60}$$

Al eliminar s_0 en favor de n se obtiene

$$\tilde{P}_n(k) \approx \mathrm{e}^{-n\ln[1/\tilde{p}(k)]} \tag{3.61}$$

$$= [\tilde{p}(k)]^n, \tag{3.62}$$

que es el resultado esperado.

3.5. Comportamiento de la caminata aleatoria de Weierstrass

El capítulo sobre procesos de renovación se trató a modo de ejemplo el proceso de renovación de Weierstrass. En este capítulo exploraremos su contraparte en las caminatas aleatorias. Esta caminata está caracterizada por

un parámetro H que determina si el segundo momento de la distribución es finito o infinito. Para $H > 1$, $\langle l^2 \rangle$ converge y está definido. Sin embargo, para $H < 1$, $\langle l^2 \rangle$ diverge. A continuación mostraremos el comportamiento de esta caminata. Posteriormente se analizará con las técnicas de transformadas de Legendre generadas por el método del punto silla, lo que nos permitirá esclarecer los límites de estas técnicas.

Si $p(l)$ es la densidad de probabilidad de que el caminante haga un desplazamiento l en un paso, la caminata aleatoria de Weierstrass está definida por

$$p(l) = \frac{a-1}{2a} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} [\delta(l - b^j) + \delta(l - (-b^j))], \tag{3.63}$$

con $a, b > 1$ [13].

La densidad de probabilidad (3.63) puede ser escrita de forma más conveniente de la siguiente forma

$$p(l) = \frac{a-1}{2a} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} [\delta(|l| - b^j)], \tag{3.64}$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac. Para mostrar de forma más clara cuál es el comportamiento de este caminante, hacemos uso de la transformada de Mellin de $\delta(|l| - b^j)$, la cual es

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_0^{\infty} \delta(|l| - b^j) |l|^{s-1} d|l| \\ &= b^{js-j}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

De modo que podemos escribir (3.64) en términos de su transformada inversa de Mellin

$$p(l) = \frac{a-1}{2a} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty}^{c+i\infty} b^{js-j} |l|^{-s} ds \right]. \tag{3.66}$$

Intercambiando la suma y la integral se obtiene

$$\begin{aligned} p(l) &= \frac{a-1}{2a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty}^{c+\infty} |l|^{-s} \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{b^{s-1}}{a})^j ds \\ &= \frac{a-1}{2a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty}^{c+\infty} |l|^{-s} \frac{1}{1 - \frac{b^{s-1}}{a}} ds. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Para evaluar la última integral, vemos que hay polos cuando

$$\begin{aligned} \frac{b^{s-1}}{a} &= \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{im}} \qquad \mathrm{m} = 0, \pm 1, \pm 2, ... \\ \Rightarrow b^{s-1} &= \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{im}} \mathrm{a} \\ \Rightarrow s &= \frac{2\pi i n}{\ln b} + \frac{\ln a}{\ln b} + 1 := s_0. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Los polos están en el lado derecho del plano complejo, por lo tanto la expansión será valida para $|l| > 1$. El residuo debido a un polo en s_0 puede ser encontrado con ayuda de la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(\mathrm{f}(\mathrm{s}_0)) &= \lim_{s \to s_0} \frac{(s - s_0)|l|^{-s}}{1 - \frac{b^{s-1}}{a}} \\ &= |l|^{-s_0} \frac{-a}{b^{s_0 - 1} \ln b}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Tomando en cuenta todos los polos se encuentra que

$$p(l) = \frac{1}{|l|^{H+1}} \frac{a-1}{2a} \frac{-a}{b^H \ln b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(2\pi i n \frac{\ln |l|}{\ln b}\right), \tag{3.70}$$

donde $H := \frac{\ln a}{\ln b}$.

3.5.1. Ejemplo: Caminata aleatoria de Weierstrass

La caminata aleatoria de Weierstrass la definimos a través de la densidad de probabilidad de la longitud de paso

$$p(l) = \frac{a-1}{2a} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} [\delta_{l,b^j} + \delta_{l,-b^j}], \tag{3.71}$$

con $a, b > 1$. De tal forma que en el espacio de Fourier

$$\tilde{p}(k) = \frac{a-1}{a} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-j} \cos(b^j k). \tag{3.72}$$

Al hacer una expansión de $\tilde{p}(k)$ alrededor de $k = 0$,

$$\tilde{p}(k) = 1 - \frac{\langle l^2 \rangle}{2} k^2 + O(k^2), \tag{3.73}$$

tomamos en cuenta solo el término más importante en la expansión.

$$\ln \tilde{p}(k) \approx 1 - \frac{1}{2}\langle l^2 \rangle k^2. \tag{3.74}$$

En donde se ha definido

$$\langle l^2 \rangle := \frac{a-1}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{-j}}{b^{2j}} = \frac{a-1}{a} \frac{1}{1-\frac{b^2}{a}}, \tag{3.75}$$

si se cumple que $a > b^2$. Y por lo tanto el segundo momento de $p(l)$ converge. La solución asintótica para $n \gg 1$ es

$$P_n(l) \approx \exp[ik_0 l + n \ln \tilde{p}(k_0)], \tag{3.76}$$

de donde se elimina k_0 en favor de l mediante la condición

$$il = -n \frac{d}{dk} \ln \tilde{p}(k_0) \tag{3.77}$$

$$= n\langle l^2 \rangle k_0. \tag{3.78}$$

Con lo que finalmente se obtiene

$$P_n(l) \approx \exp\left(-\frac{l^2}{2\langle l^2 \rangle n}\right). \tag{3.79}$$

Se observa que la caminata aleatoria de Weierstrass se reduce a la distribución normal en el régimen no singular, con una longitud promedio de paso efectiva determinada por el segundo momento.

Para el caso singular, se observa de (3.70) que el segundo momento diverge y por lo tanto no es posible obtener k_0 en términos de l de (3.78) en consecuencia el método no es aplicable de la manera en que se ha manejado hasta ahora.

Con este ejemplo se observa que cuando el primer término en una expansión en serie de la transformada de Fourier de la distribución converge, entonces las técnicas que se han mostrado pueden ser empleadas. Es decir si el primer momento no cero converge, entonces el procedimiento es aplicable.

3.6. Ejemplo: Caminata a primeros vecinos

Para mostrar la utilidad del método 'termoestadístico' en caminantes aleatorios, se empleará ahora para encontrar la distribución $P_n(t)$ para un caminante en una malla unidimensional, el cual sólo puede avanzar a sus primeros vecinos en cada paso.

La caminata a primeros vecinos está definida por la probabilidad de dar un paso de distancia l

$$p(l) = \frac{1}{2}(\delta(l+1) + \delta(l-1)), \tag{3.80}$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac. En la expresión anterior se ha normalizado la distancia entre los espacios de la red a 1. La función de estructura está dada por

$$\tilde{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikl} p(l) dl. \tag{3.81}$$

Para el caso de primeros vecinos es

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikl}(\delta(l+1) + \delta(l-1))dl & (3.82)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ik} + \mathrm{e}^{-ik}\right) & (3.83)\\ &= \cos(k). & (3.84) \end{aligned}$$

De donde se obtiene que en el espacio de Fourier

$$\tilde{P}_n(k) = [\cos(k)]^n. \tag{3.85}$$

Se quiere obtener $P_n(l)$,

$$\begin{aligned} P_n(l) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikl} [\cos(k)]^n dk & (3.86)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikl + n\ln[\cos(k)]} dk & (3.87)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{n(-ik\bar{l} + \ln[\cos(k)])} dk, & (3.88) \end{aligned}$$

donde se ha definido $\bar{l} \equiv l/n$. Obtenemos con ayuda del método del punto silla el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln[P_n(n\bar{l})] = (-ik_0\bar{l} + \ln[\cos(k_0)]), \tag{3.89}$$

donde k_0 está dada por la condición

$$\begin{aligned} i\bar{l} &= \frac{\partial}{\partial k}\ln[\cos(k_0)] && (3.90)\\ &= -\tan(k_0). && (3.91)\end{aligned}$$

De (3.89) se deduce que la forma asintótica de $P_n(l)$ está dada por

$$P_n(n\bar{l}) \approx C\mathrm{e}^{n(-ik_0\bar{l}+\ln[\cos(k_0)])}, \tag{3.92}$$

donde C es una constante de normalización.

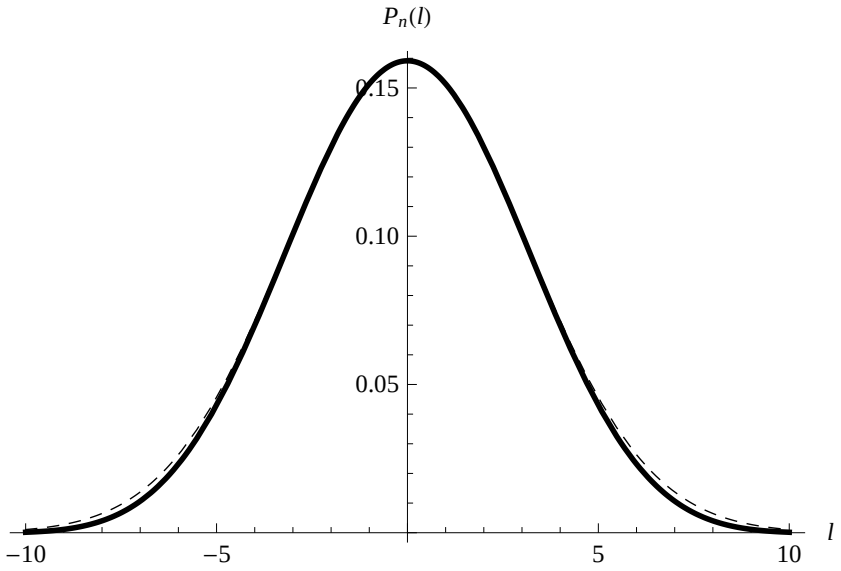

Figura 3.1: Línea sólida: Distribución $P_n(l)$ dada por (3.96) en $n = 10$, línea punteada: Aproximación gaussiana para $P_n(l)$ del caminante a primeros vecinos.

De (3.91) se despeja k_0

$$k_0 = \arctan(-i\bar{l}). \tag{3.93}$$

Ahora se elimina k_0 en favor de $\bar{l}$ en (3.92) y se obtiene

$$\begin{aligned} P_n(n\bar{l}) &\approx C\mathrm{e}^{n\left(-i\bar{l}\arctan(-i\bar{l})+\ln\left[\cos(\arctan(-i\bar{l}))\right]\right)} && (3.94)\\ P_n(l) &= C\mathrm{e}^{n(-il/n\arctan(-il/n)+\ln[\cos(\arctan(-il/n))])}, && (3.95)\\ &= C\frac{\mathrm{e}^{-l\mathrm{arctanh}(l/n)}}{(1-(l/n)^2)^{n/2}}. && (3.96)\end{aligned}$$

En la figura (3.1) se observa que incluso para valores tan pequeños de n como en $n = 10$ la distribución encontrada por medio de la transformada de Legendre es muy cercana a la aproximación gaussiana de la caminata a primeros vecinos. Además de la ec.(3.96) se observa que para $n \to \infty$,

$$\frac{\mathrm{e}^{-l\mathrm{arctanh}(l/n)}}{(1-(l/n)^2)^{n/2}} \longrightarrow \mathrm{e}^{-l^2/2n} \qquad \text{en} \qquad n \gg 1 \tag{3.97}$$

que es la distribución gaussiana correspondiente.

3.7. Hamiltoniana de interacciones de largo alcance (HMF)

En las secciones anteriores se mostraron ejemplos de sistemas no térmicos en donde técnicas análogas a las de la mecánica estadística son útiles. En esta sección a diferencia de las anteriores, mostraremos las ventajas que se tienen al tratar un sistema térmico con un enfoque de proceso estocástico. Esto no excluye en absoluto el análisis con técnicas propias de la M.E. y su análisis conceptual. Este es un ejemplo de como algunas veces es posible avanzar un poco mas cuando un sistema se analiza desde varios enfoques. Además, éste es un ejemplo concreto que muestra que la mecánica estadística se enriquece de las técnicas de los procesos estocásticos. En específico analizaremos un sistema con una función hamiltoniana de interacciones de largo alcance [1].

La función hamiltoniana de interacciones de largo alcance que define el sistema que queremos analizar es la siguiente:

$$H = \sum_{i=0}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{\alpha}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)]. \tag{3.98}$$

Esta hamiltoniana representa un sistema de N partículas interactuantes moviéndose en el circulo unitario. A cada una le corresponde un momento lineal p_i y la fuerza que la partícula i experimenta debido a la partícula j está dada por

$$F_{i,j} = -\frac{\alpha}{N}\sin(\theta_i - \theta_j). \tag{3.99}$$

Si definimos $\vec{m}_i = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$, entonces podemos escribir la función

hamiltoniana anterior de la siguiente forma,

$$H = \sum_{i=0}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{\alpha}{2N}[N^2 - (\sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i) \cdot (\sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i)], \tag{3.100}$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{\alpha}{2N}[N^2 - \vec{M} \cdot \vec{M}] \tag{3.101}$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{\alpha}{2N}[N^2 - M^2]. \tag{3.102}$$

Aquí, se ha definido $\vec{M} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i$, y M es la magnitud de $\vec{M}$. Es posible interpretar $\vec{M}$ como la magnetización del sistema.

Encontraremos la relación fundamental en el ensamble microcanónico, la ecuación calórica entre otras observables del sistema en equilibrio térmico, con un enfoque de caminantes aleatorios, es decir, podemos pensar que $\vec{M}$ es la posición final de un caminante aleatorio después de N pasos, en donde el paso i consiste en el desplazamiento $\vec{m}_i$. De modo que queremos encontrar la densidad de probabilidad $P_N(\vec{M})$ de que después de N partículas (pasos) el sistema se encuentre (con una magnetización) en la vecindad de $\vec{M}$. Desde este enfoque y para obtener $\vec{M}$ tomamos las partículas como estadísticamente idénticas e independientes. La interacción entre ellas está determinada por el hecho de que la hamiltoniana depende de M y no de $\vec{M}$, es por eso que posteriormente se hará una contracción de $\vec{M}$ para obtener M y de ese modo incluir las interacciones.

Si $p(\vec{m})$ es la densidad de probabilidad de que un partícula tenga una magnetización $\vec{m}$, entonces la densidad de probabilidad de un conjunto de N partículas tengan una magnetización total $\vec{M}$ es

$$P_N(\vec{M}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{M}} \tilde{P}_N(\vec{k}) d\vec{k}, \tag{3.103}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{M}} [\tilde{p}(\vec{k})]^N d\vec{k}, \tag{3.104}$$

donde

$$\tilde{P}_N(\vec{k}) = \int \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{M}} P_N(\vec{M}) d\vec{M} \qquad \text{y} \qquad \tilde{p}(\vec{k}) = \int \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{m}} p(\vec{m}) d\vec{m}. \tag{3.105}$$

Para este modelo $p(\vec{m}) = \frac{1}{2\pi}\delta(1-m)$ donde m es la magnitud de $\vec{m}$. Por lo tanto $\tilde{p}(\vec{k})$ está dada por

$$\tilde{p}(k_x, k_y) = J_0\left([k_x^2 + k_y^2]^{1/2}\right), \tag{3.106}$$

donde $J_0(k)$ es la función de orden cero de Bessel. Por lo tanto de (3.104) tenemos que

$$P_N(\vec{M}) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{ik_xM_x+ik_yM_y}[J_0([k_x^2+k_y^2]^{1/2})]^N dk_x dk_y. \tag{3.107}$$

Esta integral puede ser resuelta en coordenadas polares, siendo el resultado

$$P_N(M,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kM)[J_0(k)]^N k dk, \tag{3.108}$$

donde M es la magnitud de $\vec{M}$ y θ el ángulo entre el eje x y la dirección de $\vec{M}$.

La densidad de probabilidad de la magnitud de $\vec{M}$, $P_N(M)$ se determina al realizar la contracción de $P_N(M,\theta)$ en θ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P_N(M) &= \int P(M',\theta)\delta(M'-M)dM'd\theta \\ &= \int \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty J_0(kM')[J_0(k)]^N k dk\right]\delta(M'-M)dM'd\theta \\ &= \int_0^\infty J_0(kM)[J_0(k)]^N k dk. \end{aligned} \tag{3.109}$$

En la correspondencia de la M.E. con procesos de renovación, la función de partición en la M.E. corresponde a la transformada de Laplace de la densidad de probabilidad. De la misma forma podemos encontrar una correspondencia entre la densidad de probabilidad $P_N^{(k)}(E_k)$ de que la energía cinética esté en la vecindad de E_k con la transformada inversa de Laplace de la contribución de la energía cinética a la función de partición. Es decir,

$$P_N^{(k)}(E_k) \propto \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{e}^{\beta E_k}\left[\frac{2\pi}{\beta}\right]^{N/2} d\beta, \tag{3.110}$$

donde β es el inverso de la temperatura $\beta = 1/(k_BT)$. Aquí empleamos esta técnica para hallar $P_N^{(k)}$ y no empleamos simplemente $P_N^{(k)}(E_k) \propto \mathrm{e}^{-\beta E_k}$

debido a que queremos encontrar la relación fundamental en el ensamble microcanónico y el factor de Boltzmann es propio del ensamble canónico e involucra a β. A partir de (3.110) y con las técnicas vistas hasta ahora, encontramos que en el límite termodinámico

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln P_N^{(k)}(N\bar{E}_k) = \beta_0 \bar{E}_k + \frac{1}{2} \ln[\frac{2\pi}{\beta}], \tag{3.111}$$

donde $\bar{E}_k = E_k/N$ y β_0 está dada por la condición del punto silla

$$\begin{aligned} \bar{E}_k &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left[\frac{2\pi}{\beta}\right], & (3.112)\\ &= \frac{1}{2\beta}. & (3.113) \end{aligned}$$

A partir de (3.111) se deduce la forma límite de $P_n^{(k)}$ en el límite termodinámico, que es

$$P_n^{(k)}(E_k) \approx C^{(k)} \exp\left(\frac{N}{2} + \frac{N}{2} \ln[4\pi E_k/N]\right), \tag{3.114}$$

donde $C^{(k)}$ es una constante de normalización. Se tiene entonces que la densidad de probabilidad de encontrar al sistema de N partículas con una energía cinética E_k y una magnetización M está dada por

$$P_N(E_k, M) = P_N^{(k)}(E_k) P_N(M). \tag{3.115}$$

Por otro lado sabemos que $U = E_k + \frac{\alpha}{2N}[N^2 - M^2]$, de modo que la energía cinética E_k está dada como $E_k = U - \frac{\epsilon}{2N}[N^2 - M^2]$. Por lo tanto, la densidad de probabilidad de encontrar al sistema con una energía U y magnitud de magnetización M es

$$P_N(U, M) = P_N^{(k)}(U - \alpha/2N[N^2 - M^2]) P_N(M). \tag{3.116}$$

Haciendo uso de la correspondencia entre la densidad de probabilidad en el contexto de los procesos de renovación con el volumen del espacio fase accesible al sistema en la M.E., expresamos la entropía S de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S(U, M, N) &= \ln[P_N(U, M)] + C \\ &= \ln[P_N^{(k)}(U - \frac{\alpha}{2N}[N^2 - M^2])] + K + \ln[P_N(M)], \end{aligned}$$

donde K es una constante. En el límite termodinámico y escribiendo la forma explícita de $P_N^{(k)}$ en (3.114) y P_N en (3.109) obtenemos la expresión para la relación fundamental S hasta una constante,

$$S(U,M,N) = \frac{N}{2} \quad + \quad \frac{N}{2}\ln\left[4\pi(\frac{U}{N} - \frac{\alpha}{2N^2}[N^2 - M^2])\right] + \ln\left[\int_0^\infty J_0(kM)[J_0(k)]^N k dk\right]. \tag{3.117}$$

De la relación fundamental (3.117) se obtiene la ecuación de estado $\beta = \frac{\partial S}{\partial U}$ que es

$$\beta = \frac{N}{2(U - \alpha/2N[N^2 - M^2])}. \tag{3.118}$$

Además, despejando U obtenemos

$$\frac{U}{N} = \frac{1}{2\beta} + \frac{\alpha}{2}\left[1 - \left(\frac{M}{N}\right)^2\right]. \tag{3.119}$$

La energía libre del sistema se obtiene al hacer la transformada de Legendre $-\beta F = S - \beta U$, dando como resultado

$$-\beta F(\beta, M, N) = \frac{N}{2}\ln\left[\frac{2\pi}{\beta}\right] - \frac{\beta\alpha}{2N}[N^2 - M^2] + \ln\left[\int_0^\infty J_0(kM)[J_0(k)]^N k dk\right]. \tag{3.120}$$

La magnitud de la magnetización M es una variable inconstreñible [43]; por lo tanto, tomaremos a partir de ahora como variables termodinámicas solamente a U y a N irrestricto del valor de M. Para lograr ésto integramos sobre todo posible valor de M en la Ec.. (3.116) de modo que obtengamos la probabilidad de que el sistema se encuentre alrededor en una vecindad de U independientemente del valor de M.

$$P_N(U) = \int_0^\infty P_N^{(k)}(U - \alpha/2N[N^2 - M^2])P_N(M)dM, \tag{3.121}$$

$$= \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{(N/2)}\left(4\pi\left(\frac{U}{N} - \frac{\alpha}{2N^2}[N^2 - M^2]\right)\right)^{N/2} \times \int_0^\infty J_0(kM)[J_0(k)]^N k dk\right) dM. \tag{3.122}$$

Además

$$S(U,N) = \ln P_N(U), \tag{3.123}$$

donde $P_N(U)$ esta dado por la Ec.(3.122). Para calcular la energía libre se emplea el hecho de que $\mathrm{e}^{-\beta F(\beta,M,N)}$ es proporcional a la probabilidad de encontrar al sistema con una magnetización M a una temperatura $T = 1/(k_B\beta)$. Por lo tanto, integramos sobre todos los valores de M en la siguiente expresión

$$\mathrm{e}^{-\beta F(\beta,N)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta F(\beta,M,N)} dM. \tag{3.124}$$

de donde se obtiene

$$-\beta F(\beta,N) = \frac{N}{2}\ln\left[\frac{2\pi}{\beta}\right] - \frac{N\beta\alpha}{2} + (-\beta F^{(M)}(\beta,N)), \tag{3.125}$$

donde

$$-\beta F^{(M)}(\beta,N) = \ln\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta\frac{\alpha}{2N}M^2} P_N(M) dM\right]. \tag{3.126}$$

Otro camino para llegar a la Ec.(3.125) es realizando la transformada de Legendre correspondiente en (3.123).

La condición del mínimo de F con respecto a M en (3.120) da la ecuación de estado que relaciona M con β, encontrándose la siguiente expresión

$$\beta = \frac{N}{\alpha M}\frac{\int_0^\infty J_1(kM)[J_0(k)]^N k^2 dk}{\int_0^\infty J_0(kM)[J_0(k)]^N k dk}. \tag{3.127}$$

Invirtiendo numéricamente la ecuación de estado anterior se tiene $M(\beta)$. Entonces la energía interna puede ser expresada en términos de β,

$$\frac{U}{N} = \frac{1}{2\beta} + \frac{\alpha}{2}[1 - (\frac{M(\beta)}{N})^2]. \tag{3.128}$$

A continuación se grafica la magnetización en función de la temperatura, la energía interna en función de la magnetización y la energía en función de la temperatura. Las gráficas 3.3 y 3.4 que también se presentan en [1], empatan de forma exácta y por lo tanto si se grafican juntas no se distinguen una de otra.

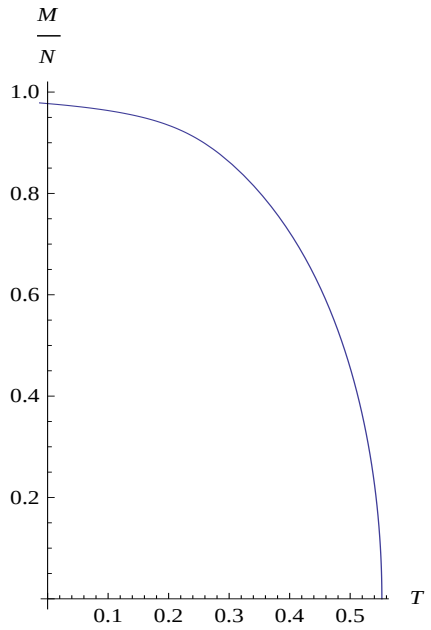

Figura 3.2: Magnetización por partícula como función de la temperatura.

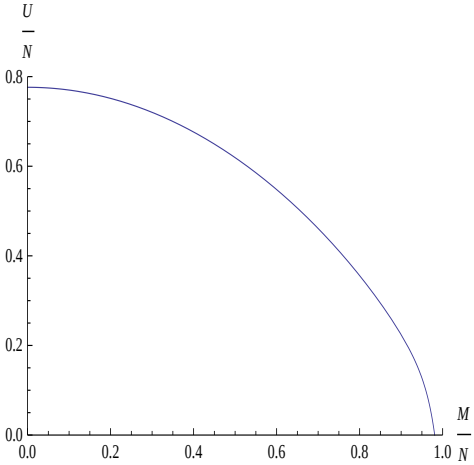

Figura 3.3: Energía por partícula como función de la Magnetización.

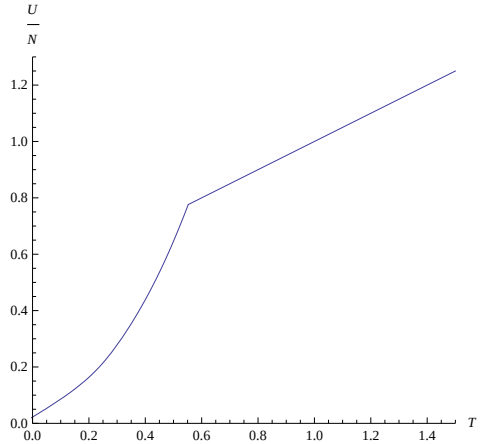

Figura 3.4: Energía por partícula como función de la temperatura.

Debido a que el modelo se abordó con técnicas de caminantes aleatorios y posteriormente se empleó la relación que se en los capítulos anteriores se ha mostrado entre funciones generadoras y funciones de partición, fue posi-

ble encontrar la relación fundamental en el ensamble microcanónico. Cabe mencionar que en la literatura no había sido dada una expresión algebraica para la relación fundamental S. Los resultados para la ecuación calórica y la energía libre concuerdan con los obtenidos en la literatura por medio del ensamble canónico [1] (Ver apéndice C). Algunas ventajas del método aquí presentado sobre el procedimiento empleado en [1] son las siguientes:

- En el método aquí presentado no hay ningún parámetro auxiliar que no se conozca su interpretación física, a diferencia del parámetro y en [1] que surge de la transformación de Hubbard-Stratonovich.

- En [1] es necesario resolver una ecuación de consistencia para cada valor de β en el que se quiera conocer el valor de F. En nuestro método no es necesario resolver ninguna ecuación de consistencia.

- La relación fundamental $S(U, M, N)$ y la energía libre $F(\beta, M, N)$ encontradas en este trabajo son funciones de M a diferencia de la energía libre deducida en [1] donde ya se ha contraido M (Por ser una variable inconstreñible). S y F como funciones de M poseen mas información que cuando ya han sido contraidas en M.

- Al haber expresado F como función de M, una expresión explícita para la ecuación de estado Ec.(3.127) surge de manera natural al minimizar la energía libre con respecto a M. En [1] no se obtiene una expresión algebraica para la ecuación de estado, y sólo es posible obtener valores numéricos para dicha ecuación de estado al resolver una ecuación de consistencia.

Capítulo 4

'Termoestadística' de procesos multiplicativos

Hasta ahora se ha estudiado la relación generada por el método del punto silla entre las funciones generadoras de los procesos renovación con los métodos de la M.E.. También se analizó como técnicas similares pueden ser empleadas para caminantes aleatorios, dando como resultado una estructura similar al de la M.E. con la diferencia de que las transformadas de Legendre correspondientes involucran variables en el plano complejo. En este capítulo estudiaremos la estructura que se origina de las técnicas hasta ahora empleadas, pero aplicadas a los procesos aleatorios multiplicativos.

El problema básico de un proceso aleatorio multiplicativo es encontrar la probabilidad $\varphi_n(w)$ de que la multiplicación de n variables aleatorias dé como resultado w. La evolución en el tamaño de las rocas que se han ido partiendo con el transcurso de los años por diversos factores climáticos es un ejemplo de un proceso aleatorio multiplicativo. Este tipo de procesos también es común encontrarlo en la dinámica de crecimiento de poblaciones, en dinámica de redes, la reacciones nucleares, la propagación de epidemias, en multifractales, etc... [18][19] [20][21][22].

Los procesos multiplicativos se pueden estudiar de una manera más conveniente en el espacio de Mellin y no en el espacio de Fourier. A continuación daremos una breve introducción al método empleado para estudiar procesos estocásticos multiplicativos con la transformada de Mellin.

4.1. Procesos estocásticos multiplicativos

Supongamos que tenemos una ecuación estocástica multiplicativa discreta, i.e.

$$w_n = \Gamma_n w_{n-1}. \tag{4.1}$$

Donde Γ_n es una variable estocástica que solo puede tomar valores positivos y w_n es el valor de la variable de interés al tiempo n. $\varphi_n(w)$ la definimos como la probabilidad de que w_n tome el valor w y está dada por

$$\varphi_n(w) = \int\int \varphi_{n-1}(w')\varphi(\gamma)\delta(w - \gamma w')dw'd\gamma. \tag{4.2}$$

Donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac y $\varphi(\gamma)$ es la probabilidad de que Γ_N tome el valor γ. Al hacer la integral sobre γ se tiene

$$\varphi_N(w) = \int \varphi_{n-1}(w')\frac{\varphi(w/w')}{w'}dw'. \tag{4.3}$$

En el espacio de Mellin la expresión anterior es equivalente a

$$\varphi_n^*(s) = [\varphi^*(s)]^n, \tag{4.4}$$

donde

$$\varphi_n^*(s) = \int_0^\infty w^{s-1}\varphi_n(w)dw \tag{4.5}$$

$$\text{y} \quad \varphi^*(s) = \int_0^\infty \gamma^{s-1}\varphi(\gamma)d\gamma. \tag{4.6}$$

Se observa de la ecuación (4.4) que la transformada de Mellin factoriza procesos estocásticos multiplicativos.

4.2. 'Termoestadística' de procesos aleatorios multiplicativos

La transformada de Legendre propia de los procesos multiplicativos se deduce a partir de la Ec.(4.5), con ayuda del método del punto silla al encontrar el límite cuando $n \to \infty$, $w \to \infty$ de modo que $\overline{\ln w} := (\ln w)/n$ se mantenga finito. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \varphi_n^*(s) = (s-1)\overline{\ln w_0} + \frac{1}{n} \ln \varphi_n(w_0), \tag{4.7}$$

donde w_0 se elimina en favor de s por medio de la condición del punto silla. Al invertir la transformada de Legendre que aparece del lado derecho en (4.7), concluimos que en el límite termodinámico la distribución límite esta dada por

$$\ln \varphi_n(w) \approx -(s_0 - 1) \ln w + \ln \varphi_n^*(s_0), \tag{4.8}$$

o bien, cuando es posible aplicar el teorema de convolución para la transformada de Mellin,

$$\ln \varphi_n(w) \approx -(s_0 - 1) \ln w + n \ln \varphi^*(s_0). \tag{4.9}$$

Donde s_0 se elimina en favor de $\ln w$ por medio de la ecuación

$$\ln w = n \frac{\partial}{\partial s} \ln \varphi^*(s_0). \tag{4.10}$$

La generalización empleando la transformada z en la variable n es la misma que en los capítulos anteriores.

$$\varphi(s, z) = \sum_n \varphi_n^*(s) z^n, \tag{4.11}$$

que en el caso de variables independientes idénticas,

$$\varphi(s, z) = \sum_n [\varphi^*(s)]^n z^n = \frac{\varphi^*(s) z}{1 - \varphi^*(s) z}. \tag{4.12}$$

La forma explícita en n se obtiene a través de la transformada inversa z,

$$\varphi_n^*(s) = \oint \varphi(s, z) z^{-n+1} dz. \tag{4.13}$$

Sin embargo una solución asintótica para $n \gg 1$ se obtiene al encontrar el siguiente límite con ayuda de la aproximación del punto silla en la integral anterior, es decir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \varphi_n^*(s) \approx -\ln z_0 + \lim_{n \to \infty} \frac{\ln \varphi(s, z_0)}{n}, \tag{4.14}$$

donde la condición del punto silla es

$$n = z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln \varphi(s, z_0), \tag{4.15}$$

para $n \gg 1$. Por lo tanto la solución asintótica para n grande está dada por

$$\varphi_n(w) \approx C w^{-(s_0-1)} z_0^{-n} \varphi(s_0, z_0), \tag{4.16}$$

donde C es una constante, y s_0, z_0 se eliminan en favor de w y n respectivamente con las condiciones del punto silla,

$$\ln w = \frac{\partial}{\partial s} \ln \varphi(s_0, z_0) \tag{4.17}$$

$$n = z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln \varphi(s_0, z_0). \tag{4.18}$$

4.3. Ejemplo: distribución con forma de ley de potencias

A continuación ilustraremos la termoestadística propia de procesos multiplicativos mediante una distribución de la forma $\varphi(w) = \frac{H}{w^{H+1}}$.

4.3.1. Transformación del espacio (s, n) al espacio (w, n)

Para emplear las técnicas descritas en la sección anterior en la distribución

$$\varphi(w) = \frac{H}{w^{H+1}}, \tag{4.19}$$

donde $w > 1$. Primero calculamos su transformada de Mellin

$$\varphi^*(s) = \int_0^\infty H w^{-H-1+s-1} \Theta(w-1) dw, \tag{4.20}$$

$$= \frac{H}{H+1-s}, \tag{4.21}$$

donde $\Theta(x)$ es la función escalón. De (4.9),

$$\ln \varphi_n(w) \approx -(s_0 - 1) \ln w + n \ln \varphi^*(s_0), \tag{4.22}$$

donde s_0 se obtiene de la condición del punto silla

$$\frac{\ln w}{n} = \frac{\partial}{\partial s} \ln \varphi^*(s)|_{s=s_0}. \tag{4.23}$$

Para este caso toma la forma

$$\frac{\ln w}{n} = \frac{\partial}{\partial s}\ln[\frac{H}{H+1-s}]\Big|_{s=s_0} \tag{4.24}$$

$$= \frac{1}{H+1-s_0}. \tag{4.25}$$

Despejando s_0 se tiene

$$s_0 = H + 1 - \frac{1}{\ln w/n}, \tag{4.26}$$

y al sustituir el resultado anterior en (4.22) se tiene

$$\ln \varphi_n(w) \approx -(-\frac{n}{\ln w} + H)\ln w + n\ln\left[\frac{(H)\ln(w)}{n}\right], \tag{4.27}$$

de modo que

$$\varphi_n(w) \approx \frac{e^n}{n^n}(H\ln w)^n w^{-H}. \tag{4.28}$$

El resultado es novedoso y difiere de la distribución lognormal debido a que los posibles valores de w son mayores que 1. La distribución lognormal se recupera cuando el dominio de w comprende también valores entre 0 y 1. En este caso el logaritmo del producto sigue una distribución de Poisson.

4.3.2. Transformación del espacio (s, z) al espacio (s, n)

Anteriormente se vio que para variables independientes

$$\varphi(s,z) = \frac{\varphi^*(s)z}{1-\varphi^*(s)z} \tag{4.29}$$

y por otro lado para el proceso que estamos estudiando

$$\varphi^*(s) = \frac{H}{H+1-s}. \tag{4.30}$$

Al sustituir $\varphi^*(s)$ dada por la expresión anterior en (4.29) se obtiene la forma explícita de $\varphi(s, z)$ que es

$$\varphi(s,z) = \frac{Hz}{H+1-s-Hz}. \tag{4.31}$$

A partir de (4.16) es posible escribir la expresión asintótica para $\varphi_n(w)$ dada por

$$\ln \varphi_n(w) \approx -(s_0 - 1) \ln w - n \ln z_0 + \ln \varphi(s_0, z_0), \tag{4.32}$$

donde $\varphi(s, z)$ está dada por (4.31). Se elimina z_0 en favor de n mediante la condición del punto silla

$$n = z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln \varphi(s_0, z) \Big|_{z=z_0}, \tag{4.33}$$

que de forma explícita es

$$\begin{aligned} n &= z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{H z_0}{H + 1 - s_0 - K z} \Big|_{z=z_0} && (4.34) \\ &= z_0 \left(\frac{H}{H z_0} - \frac{-H}{H + 1 - s_0 - K z_0} \right) && (4.35) \\ &= 1 + \frac{K z_0}{H + 1 - s_0 - H z_0}. && (4.36) \end{aligned}$$

Despejando z_0 se encuentra

$$z_0 = \frac{H + 1 - s_0}{H} \frac{n - 1}{n}. \tag{4.37}$$

Sustituimos z_0 en (4.32) de modo que

$$\ln \varphi_n(w) \approx -(s_0 - 1) \ln w - n \ln \left[\frac{H + 1 - s_0}{H} \left(\frac{n - 1}{n} \right) \right] + \ln[n - 1]$$

Lo cual en el límite $n \to \infty$ se reduce a

$$\ln \varphi_n(w) \approx -(s_0 - 1) \ln w + \Phi(s_0, n), \tag{4.38}$$

donde $\Phi(s_0, n) \equiv n \ln[\frac{H}{H+1-s_0}]$.

Este resultado es congruente con (4.21) ya que $\varphi_n^*(s) = \mathrm{e}^{\Phi(s,n)}$, lo cual muestra la equivalencia de representaciones.

4.3.3. Transformación del espacio (s, n) al espacio (w, n)

Partiendo de (4.38) se procede a eliminar s_0 en favor de $\ln w$ con la condición

$$\ln w = \frac{\partial}{\partial s}\Phi(s_0, n), \tag{4.39}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} n \ln \left[\frac{H}{H+1-s}\right]_{s=s_0} \tag{4.40}$$

$$\ln w = n[\frac{1}{H+1-s_0}]. \tag{4.41}$$

de donde, despejando, se encuentra

$$s_0 = H + 1 - \frac{n}{\ln w}. \tag{4.42}$$

Al sustituir s_0 en (4.38) se llega a la aproximación para $n \gg 1$

$$\ln \varphi_n(w) \approx -H \ln w + n + \ln(\frac{H \ln w}{n})^n, \tag{4.43}$$

o bien

$$\varphi_n(w) \approx w^{-H} \mathrm{e}^n (\frac{H \ln w}{n})^n. \tag{4.44}$$

Al comparar este resultado con (4.28) comprobamos nuevamente la equivalencia de representaciones en el contexto de procesos multiplicativos.

4.3.4. Transformación del espacio (s, z) al espacio (w, z)

En el procedimiento para ir de la representación en (s, z) a la representación en (w, n), se eliminó primero la variable z en favor de n y finalmente la variable s en favor de w. Sin embargo es posible primero eliminar s en favor de w obteniendo $\Psi(w, z)$, y posteriormente eliminar z en favor de n para llegar a $\psi_n(w)$.

Partimos de la forma explícita de

$$\varphi(s, z) = \frac{Hz}{H+1-s-Hz}. \tag{4.45}$$

Además

$$\ln \Psi(w, z) \approx -(s_0 - 1) \ln w + \ln[\varphi(s_0, z)], \tag{4.46}$$

donde s_0 está dado en función de w por la condición

$$\ln w = \frac{\partial}{\partial s} \ln[\varphi(s,z)]_{s=s_0} \tag{4.47}$$

$$= \frac{1}{H+1-s_0-Hz}. \tag{4.48}$$

Por lo tanto, al despejar s_0

$$s_0 = (H+1) - Hz - 1/\ln w, \tag{4.49}$$

y al sustituir en (4.46) se encuentra

$$\ln \Psi(w,z) \approx -(H - Hz)\ln w + 1 + \ln[Hz \ln w], \tag{4.50}$$

o de forma equivalente

$$\Psi(w,z) \approx C w^{-H(1-z)} Hz \ln w, \tag{4.51}$$

donde C es una constante.

4.3.5. Transformación del espacio (w,z) al espacio (w,n)

Finalmente, a partir (4.51) obtendremos $\psi_n(w)$.
De (4.16) sabemos que

$$\ln \psi_n(w) \approx -n \ln z_0 + \ln \Psi(w,z) \tag{4.52}$$

con la condición

$$n = z_0 \frac{\partial}{\partial z} \ln \Psi(w, z_0), \tag{4.53}$$

dada por el punto silla. La forma particular de la condición anterior para la distribución de Weierstrass se obtiene a partir de (4.50)

$$n = z_0 \left[H \ln w + \frac{1}{z_0} \right]. \tag{4.54}$$

De modo que

$$z_0 = \frac{n-1}{H \ln w}, \tag{4.55}$$

y finalmente al sustituir z_0 con la igualdad anterior en (4.52) llegamos a la siguiente expresión

$$\ln \psi_n(w) \approx -n \ln \left[\frac{n-1}{H \ln w} \right] - H \ln w + n + \ln[n-1].$$

De modo que se obtiene

$$\psi_n(w) \approx (\frac{H \ln w}{n})^n w^{-H} \mathrm{e}^n. \tag{4.56}$$

La expresión anterior muestra que no importa el orden de las transformadas al igual que en la termoestadística convencional, siempre se llega a la misma distribución como se observa al comparar con (4.44) y (4.28).

4.4. Aplicación: Modelo estocástico del crecimiento de bacterias

En el crecimiento de la población de bacterias, el valor esperado del número de bacterias $\langle Y_N \rangle$ en la generación N, está dado por

$$\langle Y_N \rangle = g \langle Y_{N-1} \rangle, \tag{4.57}$$

donde Y_{N-1} es la población de bacterias una generación anterior y g es la tasa de crecimiento (growth rate)[44]. Sin embargo, la ecuación anterior es reproducible a partir de la ecuación estocástica

$$Y_N = \gamma Y_{N-1}, \tag{4.58}$$

si $g \equiv \langle \gamma \rangle$. De modo que podemos encontrar la probabilidad $P_N(Y)$ de que la población sea Y en la generación N por medio de la convolución

$$P_N(Y) = \int P_{N-1}(Y/\gamma) \frac{p(\gamma)}{\gamma} d\gamma, \tag{4.59}$$

donde $p(\gamma)$ es la probabilidad de que la tasa de crecimiento tome el valor γ en esa generación.

De la Ec. (4.4) sabemos que

$$P_N(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y^{-u} [\tilde{p}(u)]^N du, \tag{4.60}$$

donde

$$\tilde{p}(u) = \int_0^\infty \gamma^{u-1} p(\gamma) d\gamma. \tag{4.61}$$

Supongamos que para una especie de bacterias $p(\gamma) = C\gamma^b$ para $0 \leq \gamma \leq 2$ y $p(\gamma) = 0$ para $\gamma > 2$, donde $b > 0$ es un parámetro que depende del medio y C es una constante de normalización. Esta distribución es monotónicamente creciente y es razonable para poblaciones sanas en donde el valor mas probable es que la población se duplique en la siguiente generación, es decir en $\gamma = 2$. Además de que esta distribución es fácilmente tratable con la transformada de Mellin. Para esta distribución la relación entre g y b esta dada por $g = \frac{2^{b+2}}{b+2}$.

En este caso

$$\begin{aligned} \tilde{p}(u) &= \int_0^2 \gamma^{u-1} C\gamma^b d\gamma & (4.62) \\ &= \frac{2^{b+u}}{b+u}, & (4.63) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} P_N(Y) &= C\frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y^{-u}[\frac{2^{b+u}}{b+u}]^N du & (4.64) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{e}^{-u\ln Y + N\ln[\frac{2^{b+u}}{b+u}]} du. & (4.65) \end{aligned}$$

Evaluando por el método del punto silla, se tiene la condición

$$\frac{\ln Y}{N} = \frac{d}{du}\ln[\frac{2^{b+u}}{b+u_0}] \tag{4.66}$$

de donde se encuentra la relación

$$u_0 = \frac{1}{\ln 2 - \frac{\ln Y}{N}} - b. \tag{4.67}$$

En la generación $N \gg 1$ se encuentra la probabilidad

$$P_N(Y) \approx C' Y^{b - \frac{1}{\ln[2/Y^{(1/N)}]}} 2^{\frac{N}{\ln[2/Y^{(1/N)}]}} \ln[2/Y^{(1/N)}]^N \tag{4.68}$$

de que la población sea Y.

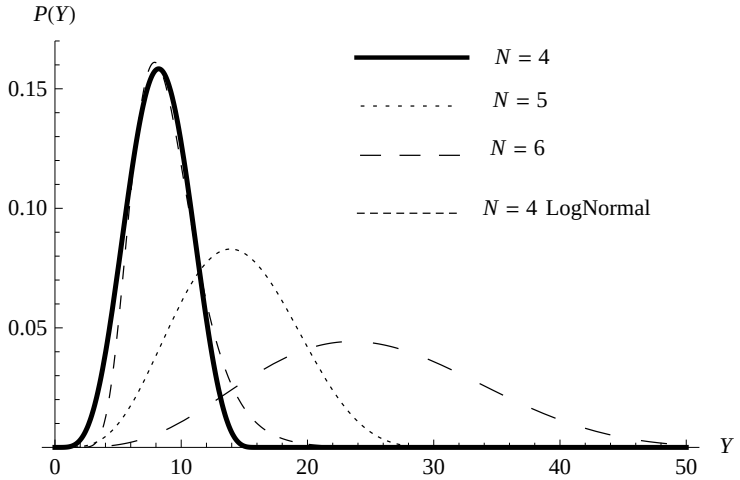

Figura 4.1: Densidad de probabilidad $P_N(Y)$ de la población de bacterias en las generaciones $N = 4$, $N = 5$, $N = 6$ y la distribución lognormal en $N = 4$ donde N es la generación de la población.

La distribución lognormal es una distribución que se ha deducido para este tipo de sistemas en otros trabajos [45] [46]. Sin embargo, la distribución $P_N(Y)$ es una corrección a la distribución lognormal como se ve en la figura 4.1. La distribución lognormal es una aproximación en procesos multiplicativos que sólo toma en cuenta el primer momento y la varianza de las variables aleatorias. La distribución $P_N(Y)$ predice correctamente que la población no puede ser mayor a 2^N. Es decir, a lo más, las bacterias se dividen en dos en cada generación.

Capítulo 5

Teoría de desviaciones logarítmicamente grandes

En el capítulo anterior se mostró de forma heurística la estructura tipo 'termoestadística' para procesos multiplicativos. La diferencia con los procesos aditivos radica en que la transformada de Mellin y no la transformada de Laplace juega el papel central. Por otro lado, los procesos de renovación, las caminatas aleatorias y por supuesto también la mecánica estadística de equilibrio, se pueden enmarcar en una teoría matemática para procesos aditivos que se le conoce con el nombre de teoría de desviaciones grandes. Es de gran interés ampliar o formular de una forma semejante el caso multiplicativo con la transformada de Mellin.

En este capítulo se hará un desarrollo general de una teoría de desviaciones logarítmicamente grandes adecuada para procesos estocásticos multiplicativos. Cabe mencionar que no hemos encontrado un desarrollo similar en la literatura.

5.1. Principio de desviaciones logarítmicamente grandes

Supongamos que B_n es una variable etiquetada por el número n, y $P(B_n \in C)$ es la probabilidad de que B_n tome algún valor del conjunto C. Se dirá que $P(B_n \in C)$ satisface un principio de desviación logarítmicamente grande con

exponente S_C si el límite

$$\lim_{\ln n\to\infty} -\frac{1}{\ln n}\ln P(B_n \in C) = S_C \tag{5.1}$$

existe. De modo que para una densidad de probabilidad que cumpla con el principio de desviaciones logarítmicamente grandes, se puede escribir

$$P(B_n \in [b, b+db]) := P_n(b)db \approx n^{-S(b)}db. \tag{5.2}$$

5.2. Teorema modificado de Gärtner y Ellis

Una forma modificada del teorema de Gärtner y Ellis nos permite tener un procedimiento general para calcular las funciones de cambio.

Consideremos una variable aleatoria B_n parametrizada por el número positivo n, se define la función generadora logarítmicamente escalada de B_n por el límite

$$\theta(\epsilon) = \lim_{\ln n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\ln\langle n^{\epsilon B_n}\rangle, \tag{5.3}$$

donde

$$\langle n^{\epsilon B_n}\rangle = \int n^{\epsilon b} P_n(b)db. \tag{5.4}$$

Si $\theta(\epsilon)$ existe para todo $\epsilon \in \Re$, entonces B_n satisface un principio de desviaciones logarítmicamente grandes que se escribe como

$$P_n(b)db \approx n^{-S(b)}db. \tag{5.5}$$

Además, si $\theta(\epsilon)$ es diferenciable, entonces la función de cambio $S(b)$ está dada por

$$S(b) = \sup_{\epsilon\in\Re}\{\epsilon b - \theta(\epsilon)\}. \tag{5.6}$$

Para demostrar heurísticamente lo anterior, se parte de asumir que

$$P(B_n)db \approx n^{-S(b)}db, \tag{5.7}$$

la cual se inserta en la Ec. (5.4) para obtener

$$\langle n^{\epsilon B_n}\rangle \approx \int n^{[\epsilon b - S(b)]}db. \tag{5.8}$$

Posteriormente se aproximará la integral por el método del punto silla para $\ln n \to \infty$, donde la condición del método es localizar el máximo en la trayectoria del punto silla de $\epsilon b - S(b)$. Por lo que asumiendo que el máximo existe y es único, se escribe

$$\langle n^{\epsilon B_n} \rangle \approx n^{\sup_b\{\epsilon b - S(b)\}} \tag{5.9}$$

por lo que

$$\theta(\epsilon) = \lim_{\ln n \to \infty} \frac{1}{\ln n} \ln \langle n^{\epsilon B_n} \rangle = \sup_b \{\epsilon b - S(b)\}. \tag{5.10}$$

Para obtener $S(b)$ en términos de $\theta(\epsilon)$ se usa el hecho de que la transformada de Legendre-Fenchel puede ser invertida cuando $\theta(\epsilon)$ es diferenciable. En éste caso, se dice que la transformada de Legendre-Fenchel es autoinvertible. Por lo tanto

$$S(b) = \sup_\epsilon \{\epsilon b - \theta(\epsilon)\}, \tag{5.11}$$

que es el resultado de la Ec.(5.6).

5.3. Desviaciones grandes en t para procesos de renovación

Se ha estudiado en su forma general a la teoría de desviaciones logarítmicamente grandes. A continuación se analizará el hecho que cuando la transformada de Mellin factoriza al sistema, entonces se tiene un principio de desviación grande en n pero uno de desviación logarítmicamente grande en s (Ver capítulo 4. Antes de ésto se mostrará que cuando la transformada de Laplace factoriza al sistema como en el capítulo 2, se tiene el principio de desviación grande tanto en n como en t.

5.3.1. Conexión entre límite termodinámico $n \to \infty$ y $t \to \infty$

Se ha visto en el capítulo 2 que para variables independientes $P_n(t)$ cumple con la condición de teoría de desviaciones grandes, entonces

$$P_n(t) \approx C \mathrm{e}^{n(\epsilon_0 \bar{t} + \ln[\psi(\epsilon_0)])} \tag{5.12}$$

donde ϵ_0 es el valor de ϵ en el punto silla del argumento de la exponencial. Lo anterior proviene de haber tomado el límite $n \to$ y $t \to \infty$ de modo que $t/n = \bar{t}$ se mantenga finita. En la integral

$$P_n(t) = \int \mathrm{e}^{n(\epsilon\bar{t}+\ln[\psi(\epsilon)])} d\epsilon, \tag{5.13}$$

a diferencia de lo que se hizo en el capítulo 2, escribimos ahora $n = t/\bar{t}$ para tener

$$P_n(t) = \int \mathrm{e}^{t(\epsilon+\ln[\psi(\epsilon)]/\bar{t})} d\epsilon. \tag{5.14}$$

En el límite $t \to \infty$ es posible con ayuda del método del punto silla encontrar el límite,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln[P_n(t)] = (\epsilon_0 + \ln[\psi(\epsilon_0)]/\bar{t}) \tag{5.15}$$

donde la condición del método es

$$1 + \frac{1}{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln[\psi(\epsilon_0)] = 0, \tag{5.16}$$

o bien

$$\bar{t} = -\frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln[\psi(\epsilon_0)]. \tag{5.17}$$

Concluimos que $P_n(t)$ obedece un principio de desviaciones grandes también en la variable t.

5.3.2. Conexión entre el límite $n \to \infty$ y $t \to \infty$ para la estadística de procesos multiplicativos

Se ha visto en el capítulo 4 que cuando en el espacio de Mellin se tiene $\underline{\varphi_n}(s) = [\varphi(s)]^n$, entonces para $n \to \infty$ y $t \to \infty$ de tal forma que $\ln[t]/n := \overline{\ln t}$ se mantenga finito

$$P_n(n\bar{t}) \approx \mathrm{e}^{n(-s_0\overline{\ln[t]}+\ln[\varphi(s_0)]}, \tag{5.18}$$

donde s_0 está dado por

$$\bar{t} = \frac{\partial}{\partial s} \ln[\varphi(s)]_{s=s_0}. \tag{5.19}$$

Lo anterior se encuentra después de aplicar el método del punto silla a la integral

$$P_n(t) = \int \mathrm{e}^{n(-s\overline{\ln[t]}+\ln[\varphi(s)]} ds, \tag{5.20}$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln[P_n(t)] = -s_0\bar{t} + \ln[\varphi(s_0)]. \tag{5.21}$$

Sin embargo es posible escribir el límite anterior en términos de t, es decir

$$n = \ln[t]/\overline{\ln[t]}$$

de modo que la integral (5.20) puede ser reescrita de la siguiente forma

$$P_n(t) = \int \mathrm{e}^{\ln[t](-s+\ln[\varphi(s)]/\overline{\ln[t]})} ds. \tag{5.22}$$

Encontramos el límite después de aplicar el método del punto silla obteniéndose

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln[t]} \ln P_n(t) = (-s_0 + \ln[\varphi(s_0)]/\overline{\ln[t]}), \tag{5.23}$$

donde la condición del método es

$$-1 + \frac{\partial}{\partial s}\left[\ln[\varphi(s_0)]/\overline{\ln[t]}\right] = 0, \tag{5.24}$$

o bien

$$\overline{\ln[t]} = \frac{\partial}{\partial s} \ln[\varphi(s_0)]. \tag{5.25}$$

Es decir, $P_n(t)$ cumple con una teoría de desviaciones logarítmicamente grandes en t. Es decir,

$$S(t,n) := \ln P_n(t) \approx \ln[t](-s_0 + \ln[\varphi(s_0)]/\overline{\ln[t]}) \tag{5.26}$$

Este resultado es de gran importancia ya que muestra que es posible construir una pseudo 'termodinámica' en donde la relación fundamental no sea homogénea de primer orden en todas sus variables. De la Ec.(5.26) vemos que S es homogénea de grado uno con respecto al logaritmo de t y por lo tanto $S(t^\lambda) = \lambda S(t)$.

Capítulo 6

Termodinámica-q, estudio en eventos q-independientes

En el capítulo anterior se mostró la 'termoestadística' de procesos aleatorios multiplicativos. Para este tipo de procesos surgen transformadas de Legendre modificadas debido a la ley de potencia que interviene en la transformada de Mellin. Surge entonces la pregunta sobre las modificaciones necesarias a las transformadas de Legendre para que puedan ser empleadas en procesos q-correlacionados. La manera de introducir las correlaciones q es mediante la transformada q-Laplace. La estadística q es el resultado de reemplazar le producto convencional con el llamado producto q [47] [48] definido por

$$x \otimes_q y \equiv \left[x^{1-q} + y^{1-q} - 1\right]^{1/(1-q)}, \; x, y > 0, \; q \in \Re. \tag{6.1}$$

El producto q combinado con la función logaritmo q, $\ln_q x \equiv (1-q)^{-1}[x^{1-q} - 1]$, que es la función inversa de la función exponencial q, $\exp_q x \equiv [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}$, genera las propiedades

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q x + \ln_q y \tag{6.2}$$

y

$$\ln_q(x^{\otimes_q n}) = n \ln_q x, \tag{6.3}$$

donde $x^{\otimes_q n} \equiv x \otimes_q x \cdots \otimes_q x$, n veces.

Todas las expresiones anteriores se reducen a las ordinarias cuando $q = 1$.

6.1. Transformación del espacio $(\epsilon, n)_q$ al espacio (t, n)

Al emplear la transformada de Laplace q [49]

$$\widehat{\psi}^{(q)}(\epsilon) \equiv \int_0^\infty dt \ \exp_q(-\epsilon t) \otimes_q \ \psi^{(q)}(t), \tag{6.4}$$

en la densidad normalizada de tiempo de espera de la forma exponencial q

$$\psi^{(q)}(t) = (2-q)b \exp_q(-bt), \ 0 \leq q < 2, \tag{6.5}$$

se obtiene

$$\widehat{\psi}^{(q)}(\epsilon) \equiv \frac{B_q}{b_q + \epsilon}, \tag{6.6}$$

donde $B_q = (2-q)^{1-q} b^{2-q}$ y $b_q = b + (1-q)b \ln_q[(2-q)b]$. Claramente, cuando $q = 1$ se recuperan las expresiones de la sección 2.3 para el caso de tiempos de espera exponenciales. La función de partición para eventos q-correlacionados está dada por

$$\widehat{\psi}_n^{(q)}(\epsilon) = \left[\widehat{\psi}^{(q)}(\epsilon)\right]^{\otimes_q n} \tag{6.7}$$

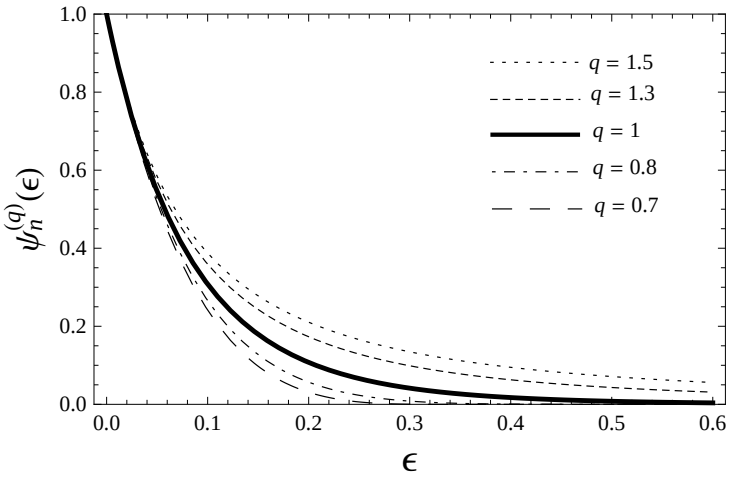

Fig. 1. $\widehat{\psi}_n^{(q)}(\epsilon)$ de Ecs. (6.6) y (6.7) para diversos valores del parámetro q con $n = 10$.

Con analogía en las Ecs. (2.1),(2.5), (2.42) y (2.44) suponemos que

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln_q \psi_n^{(q)}(n\tau) = \epsilon_0\tau + \ln_q \widehat{\psi}^{(q)}(\epsilon_0), \tag{6.8}$$

donde ϵ_0 pude ser eliminado en favor de τ con la condición

$$\tau = -\frac{d}{d\epsilon} \ln_q \widehat{\psi}^{(q)}(\epsilon)\Big|_{\epsilon=\epsilon_0} = -\left[\widehat{\psi}^{(q)}(\epsilon)\right]^{-q} \frac{d}{d\epsilon}\widehat{\psi}^{(q)}(\epsilon)\Big|_{\epsilon=\epsilon_0}, \tag{6.9}$$

donde τ se mantiene finito en el límite $n \to \infty$ y $t \to \infty$. Es posible escribir entonces

$$\psi_n^{(q)}(t) = \exp_q S_{t,n} \tag{6.10}$$

donde $S_{t,n} = \ln_q \psi_n^{(q)}(t)$ satisface que $S_{t,n} = -t\epsilon_0 + S_{\epsilon_0,n}$ con $S_{\epsilon_0,n} = \ln_q \widehat{\psi}_n^{(q)}(\epsilon_0)$. Cuando $\psi^{(q)}(t) = (2-q)b\exp_q(-bt)$ se obtiene

$$t = nB_q^{1-q}(b_q + \epsilon_0)^{-(2-q)}, \tag{6.11}$$

y

$$S_{t,n} = \ln_q \left\{ \left[\left(B_q t n^{-1}\right)^{1/(2-q)} \right]^{\otimes_q n(2-q)} \otimes_q \exp_q(n) \otimes_q \exp_q(-b_q t) \right\}, \tag{6.12}$$

o bien

$$\psi_n^{(q)}(t) \approx \left[\left(B_q t n^{-1}\right)^{1/(2-q)} \right]^{\otimes_q n(2-q)} \otimes_q \exp_q(n) \otimes_q \exp_q(-b_q t). \tag{6.13}$$

Comparando la Ec. (6.12) con la Ec. (2.45) se observa la estructura formal similar al caso de eventos idénticos independientes para el caso de tiempo de espera exponencial. Se complementa la comparación con la evaluación numérica de $\psi_n^{(q)}(t)$ en la Ec. (6.13) como función de t. En la Fig. 2 $\psi_n^{(q)}(t)$ se muestra para un valor fijo de $n = 10$ pero para diversos valores de q. Es interesante observar que el máximo de la densidad $\psi_n^{(q)}(t)$ se recorre a la izquierda de la distribución de Poisson ($q = 1$) cuando $q > 1$, de tal forma que el tiempo requerido para la ocurrencia de n eventos se vuelve gradualmente menor a medida que q aumenta. Al contrario, cuando $q < 1$ la densidad $\psi_n^{(q)}(t)$ se mantiene como una buena aproximación de la distribución de Poisson independientemente del valor de q. Las Figs. 3 y 4 corroboran ésta propiedad cuando el número de eventos n se incrementa y el promedio del tiempo requerido para la ocurrencia de estos eventos se incrementa de igual forma.

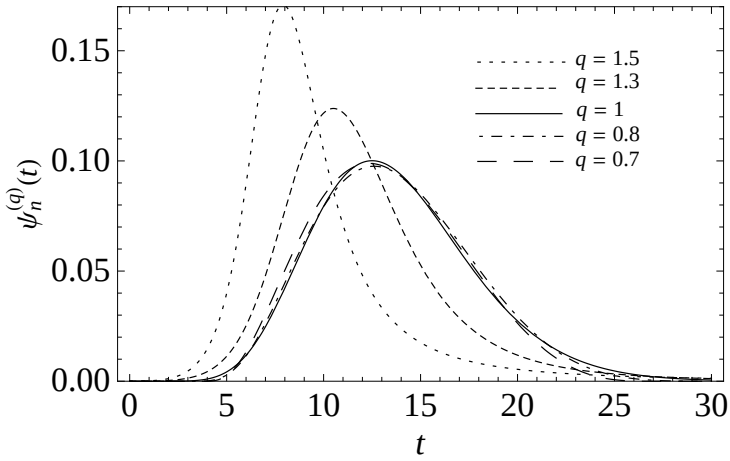

Fig. 2. $\psi_n^{(q)}(t)$ de la Ec. (6.13) para diversos valores del parámetro q con $n = 10$.

A pesar de que la expresión obtenida para $\psi_n^{(q)}(t)$ dada por la Ec. (6.13) es plausible, no se ha probado que sea una representación correcta para el proceso q-independiente definido por las Ecs. (6.6) y (6.7). Es necesario señalar lo que se ha asumido y no ha sido probado. Hasta donde nosotros sabemos no se ha probado la existencia de la transformada inversa de Laplace q [49]. Y una cuestión aún mas fundamental se relaciona con la existencia de una propiedad de desviación grande, la cual se ha supuesto en 6.8.

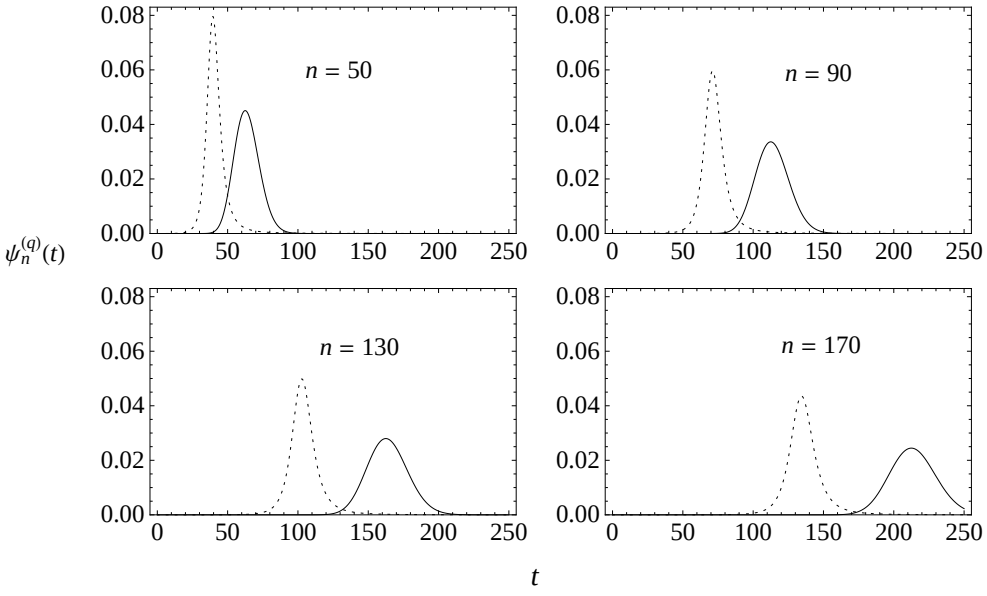

Fig. 3. Comparación de $\psi_n^{(q)}(t)$ para $q = 1{,}5$ (linea punteada) con $\psi_n^{(1)}(t)$ (linea sólida) para diversos valores de n.

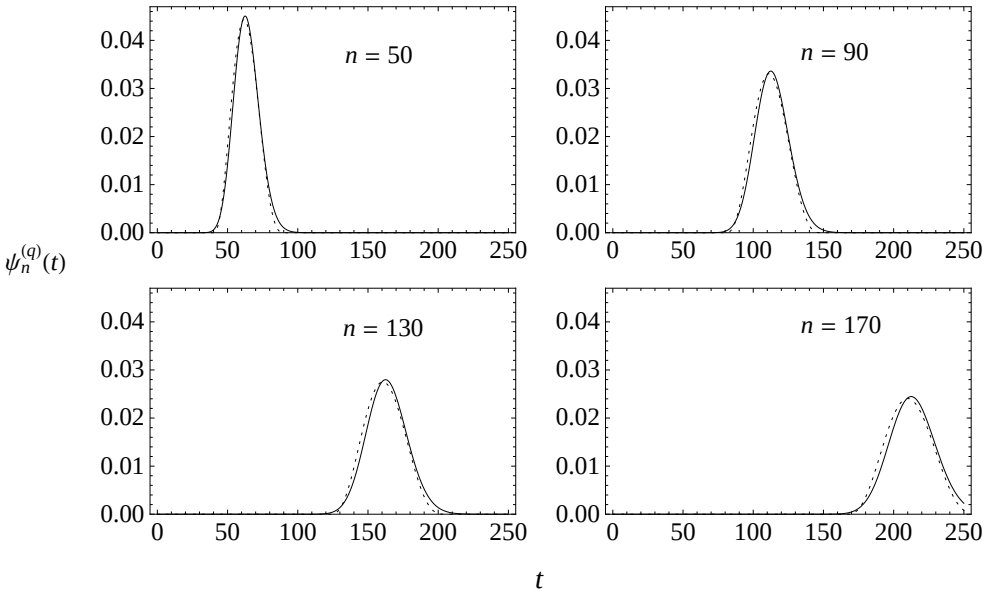

Fig. 4. Comparación de $\psi_n^{(q)}(t)$ para $q = 0{,}7$ (linea punteada) con $\psi_n^{(1)}(t)$ (linea sólida) para diversos valores de n.

6.2. Transformación del espacio $(\epsilon, z)_q$ al espacio $(\epsilon, n)_q$

Para definir el espacio $(\epsilon, z)_q$, se propone que existe un principio de desviaciones grandes en analogía con la Ec.(2.50). De tal forma que para $n \to \infty$ y $t \to \infty$ de modo que t/n se mantenga finito,

$$\ln_q \psi_n(t) \approx -\epsilon_0 t - (n-1) \ln_q z_0 + \ln_q \varphi(\epsilon_0, z_0) \tag{6.14}$$

donde ϵ_0 y z_0 están dadas por las condiciones

$$t = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln_q \varphi(\epsilon_0, z_0) \tag{6.15}$$

$$(n-1) = z_0^q \frac{\partial}{\partial z} \ln_q \varphi(\epsilon_0, z_0). \tag{6.16}$$

Al proponer que la función $\varphi(\epsilon, z)$ cumpla con un principio de desviación

q-grande, es decir

$$\tilde{\psi}_n(\epsilon) = [\tilde{\psi}(\epsilon)]^{\otimes_q n}, \tag{6.17}$$

se propone entonces que la q-función generadora esté dada en términos de $\tilde{\psi}^{(q)}(\epsilon)$ como

$$\varphi(\epsilon, z) = \tilde{\psi}(\epsilon) z \oslash_q [1 - \tilde{\psi}(\epsilon) z]. \tag{6.18}$$

Comprobaremos en lo que sigue que φ es equivalente a $\tilde{\psi}$ por medio de una transformada q-Legendre.

La transformada q-Legendre esta dada por

$$\ln_q \tilde{\psi}_n(\epsilon) = -(n-1) \ln_q z_0 + \ln_q \varphi(\epsilon, z_0), \tag{6.19}$$

en el límite $n \to \infty$, y z_0 dada por la condición

$$(n-1) = z^q \frac{\partial}{\partial z} \ln_q \varphi(\epsilon, z_0). \tag{6.20}$$

De donde la condición anterior toma la forma

$$\begin{aligned}
(n-1) &= z_0^q \frac{\partial}{\partial z} \ln_q \tilde{\psi}(\epsilon) z \oslash_q [1 - \tilde{\psi}(\epsilon) z]|_{z=z_0} && (6.21)\\
&= z_0^q \frac{\partial}{\partial z} \ln_q [\tilde{\psi}(\epsilon) z] - \ln_q [1 - \tilde{\psi}(\epsilon) z]|_{z=z_0} && (6.22)\\
&= z_0^q \frac{\tilde{\psi}(\epsilon)}{[\tilde{\psi}(\epsilon) z_0]^q} + \frac{\tilde{\psi}(\epsilon)}{[1 - \tilde{\psi}(\epsilon) z_0]^q} && (6.23)\\
&= 1 - \frac{\tilde{\psi}(\epsilon) z_0^q}{[1 - \tilde{\psi}(\epsilon) z_0]^q}. && (6.24)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, despejando z_0 se encuentra

$$z_0 = \frac{1}{\tilde{\psi}(\epsilon)} \left(1 - \frac{\tilde{\psi}(\epsilon)^{\frac{1-q}{q}}}{\tilde{\psi}(\epsilon)^{\frac{1-q}{q}} + (n-2)^{\frac{1}{q}}} \right). \tag{6.25}$$

Al eliminar con la igualdad anterior z_0 de (6.19) concluimos

$$\begin{aligned}
\ln_q \tilde{\psi}_n(\epsilon) &= -(n-1) \ln_q \frac{1}{\tilde{\psi}(\epsilon)} \left(1 - \frac{\tilde{\psi}(\epsilon)^{\frac{1-q}{q}}}{\tilde{\psi}(\epsilon)^{\frac{1-q}{q}} + (n-2)^{\frac{1}{q}}} \right) + \ln_q \left(1 - \frac{\tilde{\psi}(\epsilon)^{\frac{1-q}{q}}}{\tilde{\psi}(\epsilon)^{\frac{1-q}{q}} + (n-2)^{\frac{1}{q}}} \right)\\
&\quad - \ln_q \left(\frac{\tilde{\psi}(\epsilon)^{\frac{1-q}{q}}}{\tilde{\psi}(\epsilon)^{\frac{1-q}{q}} + (n-2)^{\frac{1}{q}}} \right)
\end{aligned}$$

Por lo que vemos que para para $q > 0$ en límite $n \to \infty$

$$\frac{1}{n} \ln_q \tilde{\psi}_n(\epsilon) \approx -\ln_q \frac{1}{\tilde{\psi}(\epsilon)} \tag{6.26}$$

o bien

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_n(\epsilon) &\approx \exp_q\{-n \ln_q[1/\tilde{\psi}(\epsilon)]\} & (6.27) \\ &= [\tilde{\psi}(\epsilon)]^{\otimes_q n}. & (6.28) \end{aligned}$$

Del resultado anterior se aprecia la equivalencia de ensambles para este tipo de procesos.

6.3. Transformación del espacio $(\epsilon, z)_q$ al espacio $(t, z)_q$

Partiendo de $\Phi(\epsilon, z)$ es posible primero eliminar ϵ en favor de t para obtener la función correspondiente al espacio $(t, z)_q$. La transformada q de Legendre que hace esto es

$$\ln_q \psi(t, z) = -\epsilon_0 t + \ln_q \varphi(\epsilon_0, z), \tag{6.29}$$

junto con la condición

$$t = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln_q \varphi(\epsilon_0, z) \tag{6.30}$$

6.4. Transformación del espacio (ϵ, z) al espacio $(t, z)_q$

Un camino alternativo para encontrar $\psi(t, z)$ es a partir de $\psi_n(t)$ mediante la propuesta

$$\ln_q \psi(t, z) = -(n_0 - 1) \ln_q z + \ln_q \psi_{n_0}(t), \tag{6.31}$$

con la condición

$$\ln_q z = -\frac{\partial}{\partial n} \ln_q \psi_n(t)|_{n=n_0}. \tag{6.32}$$

Para el caso que se ha visto, donde

$$\psi_n(t) = \mathrm{e}_q^{-(H+1)t} \otimes_q [(Kt/n)^{1/(2-q)}]^{\otimes_q n(2-q)} \otimes_q \mathrm{e}_q^n, \tag{6.33}$$

se tiene entonces que la condición para obtener n_0 es

$$\begin{aligned}\ln_q z &= -\frac{\partial}{\partial n}\left\{-(H+1)t + n(2-q)\ln_q[(kt/n)^{1/(2-q)}] + n\right\}|_{n=n_0} \\ &= -\left\{(2-q)\ln_q[(kt/n_0)^{1/(2-q)}] - (kt/n_0)^{(1-q)/(2-q)} + 1\right\}, \quad (6.34)\end{aligned}$$

empleamos ahora la definición $\ln_q x = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}$ en el lado derecho de la igualdad de modo que reescribimos

$$\begin{aligned}\ln_q z &= -\left\{(2-q)\ln_q[(kt/n_0)^{1/(2-q)}] - (1-q)\ln_q[(kt/n_0)^{1/(2-q)}]\right\} \\ \ln_q z &= -\ln_q[(kt/n_0)^{1/(2-q)}]. \quad (6.35)\end{aligned}$$

Para despejar n_0 usamos el álgebra q,

$$\begin{aligned}-\ln_q z &= \ln_q[(kt)^{1/(2-q)}] \oplus_q \ln_q[(1/n)^{1/(2-q)}] \\ \Rightarrow (-\ln_q z) \ominus_q \ln_q[(kt)^{1/(2-q)}] &= \ln_q[(1/n)^{1/(2-q)}] \quad (6.36) \\ \ln_q[1 \oslash_q z] \ominus_q \ln_q[(kt)^{1/(2-q)}] &= \ln_q[(1/n)^{1/(2-q)}] \quad (6.37) \\ \ln_q[(1 \oslash_q z)(1/kt)^{1/(2-q)}] &= \ln_q[(1/n)^{1/(2-q)}]. \quad (6.38)\end{aligned}$$

En la igualdad anterior aplicamos la función exponencial q en ambos lados y concluimos

$$\begin{aligned}(1 \oslash_q z)(\frac{1}{kt})^{1/(2-q)} &= (\frac{1}{n})^{1/(2-q)} \quad (6.39) \\ \Rightarrow n &= \left(kt\frac{1}{(1 \oslash_q z)^{2-q}}\right). \quad (6.40)\end{aligned}$$

Eliminamos n_0 de (6.31) con la igualdad anterior y con la forma explícita de $\psi_n(t)$ (6.33),

$$\begin{aligned}\ln_q \psi(t,z) &= \left\{\left(kt\frac{1}{(1 \oslash_q z)^{2-q}}\right) - 1\right\}\ln_q z - (H+1)t + \left(kt\frac{1}{(1 \oslash_q z)^{2-q}}\right)(2-q)\ln_q[1 \oslash_q z] \\ &\quad + \left(kt\frac{1}{(1 \oslash_q z)^{2-q}}\right) \\ &= -(H+1)t + \left(kt\frac{1}{(1 \oslash_q z)^{2-q}}\right) + \left(kt\frac{1}{(1 \oslash_q z)^{2-q}}\right)(1-q)\ln_q[1 \oslash_q z] + \ln_q[1 \oslash_q z] \\ &= -(H+1)t + \left(kt\frac{1}{(1 \oslash_q z)^{2-q}}\right) \oplus_q \ln_q[1 \oslash_q z]. \quad (6.41)\end{aligned}$$

Con lo que finalmente obtenemos

$$\psi(t,z) \approx \mathrm{e}_q^{-(H+1)t} \otimes_q \left(\mathrm{e}_q^{\left(kt \frac{1}{(1 \oslash_q z)^{2-q}} \right)} 1 \oslash_q z \right). \tag{6.42}$$

Comparando la Ec.(6.42) con la Ec.(2.45) se observa que para $q = 1$ se obtiene el caso no correlacionado y también una estructura formal similar.

Capítulo 7

Teoría de desviaciones q-grandes

En la sección 1.4 se introdujo la teoría de desviaciones grandes para posteriormente, en el capitulo 5 se deduce una ampliación a dicha teoría para que sea apropiada para tratar los procesos multiplicativos. Para completar el estudio de los procesos q correlacionados, en este capítulo exploraremos la forma de la correspondiente teoría de desviaciones q grandes.

7.1. Principio de desviación q-grande

Como se vio en la sección anterior, si una variable aleatoria parametrizada por un entero positivo n cumple con un principio de desviaciones grandes, entonces

$$P(A_n \in [a, a + da]) \approx e^{-nS(a)}da. \tag{7.1}$$

De ahora en adelante, escribiremos el parámetro n como subíndice de la distribución y emplearemos ahora como variable aleatoria a l en lugar de a, para igualar la notación que se usa en caminatas aleatorias y procesos de renovación. Es decir, si una variable cumple con el principio de desviaciones grandes, quiere decir que

$$P_n(l)dl \approx e^{-nS(l)}dl. \tag{7.2}$$

De la misma forma, se puede suponer que existe un tipo de variables aleatorias que cumplen con un principio diferente de desviaciones grandes,

por ejemplo,

$$P_n(l)dl \approx e_q^{-nS_q(l)}dl, \tag{7.3}$$

donde $e_q^x \equiv [1+(1-q)x]^{1/(1-q)}$ y $S_q(l)$ es la función de cambio de una variable que cumple con un principio de desviaciones grandes como ésta. Diremos que este tipo de variables cumplen con un principio de desviaciones q-grandes.

Para este tipo de variables la función de cambio q estará dada por el límite

$$S_q(l) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\ln_q P_n(l), \tag{7.4}$$

donde $\ln_q[x]$ es la función inversa de $e_q(x)$.

Como se ha visto anteriormente una parte fundamental en la demostración del teorema de Gärtner y Ellis es la aproximación del punto silla que nos dice que para $n \gg 1$ una solución asintótica de las integrales de la forma $\int e^{nf(x)}dx$ es

$$\int \mathrm{e}^{nf(x)}dx \approx \mathrm{e}^{nf(x_0)}\Gamma(1/2)\sqrt{\frac{2}{nf''(x_0)}},$$

donde x_0 es el valor de x donde $f(x)$ tiene su máximo, $f''(x)$ es la segunda derivada de $f(x)$ y Γ es la función gamma. Por lo que si se quiere encontrar el equivalente al teorema de Gärner y Ellis para el caso de desviaciones q-grandes, se torna necesario investigar la generalización de la aproximación del punto silla para integrales de la forma $\int \mathrm{e}_q^{nf(x)}dx$. Esto se hace en la siguiente sección.

7.2. Límite termodinámico en distribuciones con forma de exponencial-q

Queremos obtener un resultado asintótico para integrales de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}_q^{[Nf(x)]}dx, \tag{7.5}$$

cuando $N \gg 1$. Procedemos de manera análoga al método del punto silla. Es decir, expandamos en serie de potencias hasta el primer término significativo a $f(x)$ alrededor de su máximo

$$I \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)-\frac{N}{2}\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}]x^2}dx. \tag{7.6}$$

Se define ahora una operación binaria que llamaremos la suma-q y está dada por $x \oplus_q y = x + y + (1-q)xy$. Esta operación tiene la propiedad de que $\mathrm{e}_q^{x \oplus_q y} = \mathrm{e}_q^x \mathrm{e}_q^y$. Además la suma ordinaria puede ser expresada en términos de la suma-q como

$$x + y = x \oplus_q \frac{y}{1 + (1-q)x}. \tag{7.7}$$

Al hacer uso de la relación anterior en (7.6) ,

$$I \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)] \oplus_q (-\frac{N}{2}\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}x^2)/(1+(1-q)Nf(x_0))} dx. \tag{7.8}$$

Y debido a la propiedad de la suma-q de factorizar la exponencial q, se tiene

$$I \simeq \mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}_q^{(-\frac{N}{2}\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}x^2)/(1+(1-q)Nf(x_0))} dx, \tag{7.9}$$

después de haber sacado de la integral a $\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}$. Haciendo el cambio de variable $u = (\frac{N}{2}\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}x^2)/(1+(1-q)Nf(x_0))$, se reescribe la integral anterior como

$$I \simeq \mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]} \frac{\sqrt{2(1-(1-q)Nf(x_0))}}{\sqrt{N\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}}} \int_0^{\infty} \mathrm{e}_{\mathrm{q}}^{(-\mathrm{u})} \mathrm{u}^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{du}. \tag{7.10}$$

ya que x en términos de u es

$$x = \left(\frac{2}{N} \frac{(1+(1-q)Nf(x_0))}{\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}} u \right)^{1/2},$$

y por lo tanto

$$dx = \left(\frac{(1+(1-q)Nf(x_0))}{\frac{Nd^2 f(x_0)}{dx^2}} \right)^{1/2} u^{1/2-1} du.$$

Finalmente se define

$$\Gamma_q(t) \equiv \int_0^{\infty} \mathrm{e}_{\mathrm{q}}^{(-\mathrm{u})} \mathrm{u}^{\mathrm{t}-1} \mathrm{du}, \tag{7.11}$$

que tiene la propiedad de que cuando $q = 1$ se recupera la función $\Gamma(t)$ usual, y por lo tanto una expresión aproximada para la integral es

$$I \simeq \frac{\sqrt{2(1-(1-q)Nf(x_0))}\Gamma_q(1/2)}{\sqrt{N\frac{d^2f(x_0}{dx^2}}}\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}. \tag{7.12}$$

La segunda parte esencial en la demostración del teorema de Gärner y Ellis consiste en tomar el límite

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln I_N, \tag{7.13}$$

donde I_N representa una integral de la forma $I_N = \int \mathrm{e}^{Nf(x)}dx$. Al emplear la aproximación del punto silla para evaluar la integral debido a que $N \gg 1$ y tomar el límite se tiene que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln I_N = f(x_0). \tag{7.14}$$

Es decir un integrando con dependencia en N de forma exponencial $\mathrm{e}^{Nf(x)}$ nos mapea asintóticamente a una integral con una forma exponencial similar, es decir $I_N \approx \mathrm{e}^{Nf(x_0)}$.

En la siguiente sección comprobaremos un comportamiento similar para el caso con exponenciales q, es decir comprobaremos que el límite

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{1/\beta}}\ln_{q_*} I_N^{(q)}$$

converge. $I_N^{(q)}$ denota una integral de la forma $\int \mathrm{e}_q^{Nf(x)}dx$, y q_* denota simplemente que el valor del parámetro q del logaritmo-q en la expresión no necesariamente es igual al valor del parámetro q del integrando. Se mostrará también que β y q_* no son independientes y que para cuando se elige $q_* = q$, entonces $\beta = 1$ y por lo tanto se tendría el caso particular en donde

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln_q I_N^{(q)}$$

converge.

7.3. Convergencia de $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/\beta}} \ln_{q_*} I_N^{(q)}$

Como $\sqrt{(1-(1-q)Nf(x_0)} = \mathrm{e}_q^{(1-q)/2}$, es posible expresar la ec. (7.12) como

$$I \simeq \left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}\right]^{\frac{3-q}{2}} \Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{Nf''(x_0)}}, \tag{7.15}$$

que a su vez multiplicando y dividiendo por uno

$$I \simeq \left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}\right]^{\beta} \left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}\right]^{\frac{3-q}{2}-\beta} \Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{Nf''(x_0)}} \tag{7.16}$$

$$= \mathrm{e}_{q_*}^{[N\beta f(x_0)]} \left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}\right]^{\frac{3-q}{2}-\beta} \Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{Nf''(x_0)}}. \tag{7.17}$$

donde $\beta \equiv \frac{1-q}{1-q_*}$. La multiplicación ordinaria puede ser expresada en términos de la multiplicación-q como sigue,

$$\mathrm{e}_q^x \cdot y = \mathrm{e}_q^{xy^{(1-q)}} \otimes_q y. \tag{7.18}$$

Al emplear la propiedad anterior para expresar la multiplicación de la primera exponencial-q en (7.17) con el resto, se tiene que

$$I \simeq \mathrm{e}_{q_*}^{[N\beta f(x_0)\left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}\right]^{(\frac{3-q}{2}-\beta)(1-q_*)}(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{Nf''(x_0)}})^{(1-q_*)}]} \otimes_{q_*} \left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}\right]^{\frac{3-q}{2}-\beta} \Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{Nf''(x_0)}}. \tag{7.19}$$

Se define la función de cambio-q por el límite

$$S_{q_*} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/\beta}} \ln_{q_*} I, \tag{7.20}$$

que al sustituir I en su forma explícita (7.19),

$$\begin{aligned} S_{q_*} &= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{N^{1/\beta}} \left(N\beta f(x_0) \left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}\right]^{(\frac{3-q}{2}-\beta)(1-q_*)} \left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{Nf''(x_0)}} \right)^{(1-q)} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{N^{1/\beta}} \ln_{q_*} \left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]}\right]^{\frac{3-q}{2}-\beta} \Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{Nf''(x_0)}} \right]. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Por facilidad en el desarrollo subsiguiente expresamos

$$S_{q_*} = \lim_{N\to\infty} [PT + ST] \tag{7.22}$$

(PT=Primer Término) y (ST=Segundo Término) donde,

$$PT \equiv \frac{1}{N^{1/\beta}} \left(N\beta f(x_0) \left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]} \right]^{(\frac{3-q}{2}-\beta)(1-q_*)} (\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{Nf''(x_0)}})^{(1-q)} \right) \tag{7.23}$$

y

$$ST \equiv \frac{1}{N^{1/\beta}} \ln_{q_*} \left[\mathrm{e}_q^{[Nf(x_0)]} \right]^{\frac{3-q}{2}-\beta} \Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{Nf''(x_0)}}. \tag{7.24}$$

Primero analizaremos PT escribiendo de forma explícita la exponencial q,

$$PT = \frac{1}{N^{1/\beta}} [N\beta f(x_0) \frac{[1+(1-q)Nf(x_0)]^{(\frac{3-q}{2}-\beta)(\frac{1-q_*}{1-q})}}{N^{\frac{1-q_*}{2}}} \left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}} \right)^{(1-q_*)}]. \tag{7.25}$$

Haciendo simplificaciones algebraicas,

$$\begin{aligned} PT &= \frac{1}{N^{1/\beta}} \left[N\beta f(x_0) \frac{[1+(1-q)Nf(x_0)]^{(\frac{3-q}{2}-\beta)(\frac{1}{\beta})}}{N^{\frac{1-q_*}{2}}} \left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}} \right)^{(1-q_*)} \right] \\ &= \beta f(x_0) \left[\frac{1}{N} + (1-q)f(x_0) \right]^{\frac{1-q_*}{2}+\frac{1-\beta}{\beta}} \left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}} \right)^{(1-q_*)}. \end{aligned}$$

Al tomar el límite $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty} PT = \frac{(1-q)}{(1-q_*)} f(x_0) \left[\frac{1}{N} + (1-q)f(x_0) \right]^{\frac{1-q_*}{2}+\frac{1-\beta}{\beta}} \left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}} \right)^{(1-q_*)} \tag{7.26}$$

$$= (1-q_*)^{\frac{-1-q_*}{2}+\frac{1}{\beta}} [\beta f(x_0)]^{\frac{1-q_*}{2}+\frac{1}{\beta}} \left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}} \right)^{(1-q_*)}. \tag{7.27}$$

Analizaremos ahora ST. Escribiendo de forma explícita el logaritmo y la exponencial q de (7.24),

$$ST = \frac{\frac{[1+(1-q)Nf(x_0)]^{(\frac{3-q}{2}-\beta)(\frac{1-q_*}{1-q})}}{N^{\frac{1-q_*}{2}}} - 1}{N^{\frac{1}{\beta}}(1-q_*)}. \tag{7.28}$$

Haciendo algunos pasos algebraicos

$$\begin{aligned} ST &= \frac{\frac{[1+(1-q)Nf(x_0)]^{(\frac{3-q}{2}-\beta)(\frac{1}{\beta})}}{N^{\frac{1-q_*}{2}}} - 1}{N^{\frac{1}{\beta}}(1-q_*)} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{N} + (1-q)f(x_0)\right]^{\frac{1-q_*}{2}+\frac{1-\beta}{\beta}} - 1}{N(1-q_*)} \end{aligned} \tag{7.29}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{N\to\infty} ST = 0. \tag{7.30}$$

Juntando el límite de PT y ST ,

$$S_{q_*} = (1-q_*)^{\frac{-1-q_*}{2}+\frac{1}{\beta}} \left[\beta f(x_0)\right]^{\frac{1-q_*}{2}+\frac{1}{\beta}} \left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}}\right)^{(1-q_*)}. \tag{7.31}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} I &\approx \mathrm{e}_{q_*}^{N^{\frac{1}{\beta}} S_{q_*}} \\ &= \mathrm{e}_{q_*}^{N^{\frac{1}{\beta}}(1-q_*)^{\frac{-1-q_*}{2}+\frac{1}{\beta}}\left[\beta f(x_0)\right]^{\frac{1-q_*}{2}+\frac{1}{\beta}}\left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}}\right)^{(1-q_*)}}. \end{aligned} \tag{7.32}$$

El caso $\beta = 1$, es

$$I \approx \mathrm{e}_q^{\left[N(1-q)^{\frac{1-q}{2}} f(x_0)^{\frac{3-q}{2}}\left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}}\right)^{(1-q)}\right]}. \tag{7.33}$$

y otro caso que se simplifica es cuando $(1-q_*)/2 + 1/\beta = 1$, por lo tanto $q_* = (1-q)/(3-q)$, $1/\beta = (1-q_*)/2$ y

$$I \approx \mathrm{e}_{q_*}^{N^{\frac{1-q_*}{2}}(1-q_*)^{-1-q_*} 2f(x_0)\left(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}}\right)^{(1-q_*)}}. \tag{7.34}$$

Hemos encontrado la expresión asintótica para la integral (7.5) para $N \gg 1$ y comprobamos que cumple con una teoría de desviaciones q-grandes.

7.4. Generalización q al teorema de Gärtner y Ellis

Consideremos una variable aleatoria real A_n parametrizada por el entero positivo n, se define la función $\lambda_q(k)$ por el límite

$$\lambda_q(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln_q \int \left[\mathrm{e}_q^{nka} \otimes_q P(A_n) \right] da. \tag{7.35}$$

Si $\lambda_q(k)$ existe para todo $k \in \Re$, entonces A_n satisface un principio de desviaciones q-grandes que se escribe como

$$P(A_n)da \approx \mathrm{e}_q^{-nS_q(a)} da.$$

Además, si

$$\Lambda_q(k) \equiv \left[\frac{\lambda_q(k)}{(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2(1-q)}{C_q}})^{1-q}} \right]^{\frac{2}{3-q}}$$

es diferenciable, donde $C_q \equiv |S_q''|$, entonces la función de cambio $S_q(a)$ está dada por

$$S_q(a) = \sup_{k\in\Re} \{ka - \Lambda_q(k)\}. \tag{7.36}$$

Para demostrar lo anterior, se parte de asumir que

$$P(A_n)da \approx \mathrm{e}_q^{-nS_q(a)} da,$$

la cual se sustituye en la ec. (7.35) para obtener

$$I \approx \int \mathrm{e}_q^{n[ka - S_q(a)]} da.$$

Posteriormente se calcula la integral en el límite $n \to \infty$ con ayuda del método visto en la sección anterior. Por lo que asumiendo que el máximo existe y es único, se tiene

$$\lambda_q(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln_q I = \left(\sup_a \{ka - S_q(a)\} \right)^{\frac{3-q}{2}} \left(\Gamma_q(1/2) \sqrt{\frac{2(1-q)}{C_q}} \right)^{1-q}.$$

Lo anterior puede expresarse también de la forma más conveniente

$$\left[\frac{\lambda_q(k)}{(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2(1-q)}{C_q}})^{1-q}}\right]^{\frac{2}{3-q}} = \sup_a\{ka - S_q(a)\}$$

$$\Lambda_q(k) = \sup_a\{ka - S_q(a)\}. \tag{7.37}$$

Para obtener $S_q(a)$ en términos de $\Lambda_q(k)$ se usa el hecho de que la transformada de Legendre-Fenchel puede ser invertida cuando $\Lambda_q(k)$ es diferenciable. En éste caso , se dice que la transformada de Legendre-Fenchel es autoinvertible o autodual. Por lo tanto

$$S_q(a) = \sup_k\{ka - \Lambda_q(k)\},$$

donde

$$\Lambda_q(k) \equiv \left[\frac{\lambda_q(k)}{(\Gamma_q(1/2)\sqrt{\frac{2(1-q)}{C_q}})^{1-q}}\right]^{\frac{2}{3-q}}$$

que es el resultado de la ec. (7.36).

Podemos concluir que es posible construir una estructura formal para un teoría de desviaciones q grandes, sin embargo hay que hacer notar que la utilidad práctica del teorema modificado de Gärtner y Ellis no es clara, ya que para encontrar $\Lambda_q(k)$ es necesario conocer $C_q = |S_q''|$ previamente, lo cual generalmente no es posible.

Resumimos los resultados de los capítulos 7 y 8 de la siguiente manera. En el capítulo 7 mostramos que es posible definir transformadas de Legendre modificadas por el logaritmo-q, obteniéndose resultados plausibles para el proceso de Poisson q-correlacionado. En este capítulo 8 se mostró la existencia de la relación fundamental y de las funciones de Massieu en el límite termodinámico para la mecánica estadística-q. Sin embargo, a diferencia de los casos tratados en los capítulos 2, 3 y 4, no fue posible deducir un procedimiento análogo a realizar una transformada de Legendre que fuese útil en la práctica de resolución de problemas. Esta imposibilidad se debió a que no se ha comprobado la existencia de la transformada inversa q-Laplace. La transformada inversa q-Laplace es necesaria para construir un formalismo termoestadístico q completo, debido a que las funciones de partición en este contexto se definen mediante la transformada q-Laplace.

Capítulo 8

Conclusiones

- Es posible construir un procedimiento matemático en el contexto de procesos de renovación que tiene una estructura análoga a los procedimientos de la mecánica estadística de equilibrio.
- La pseudo "termodinámica" existente para procesos estocásticos, hace muy sencillo calcular distribuciones asintóticas a través de transformadas de Legendre.
- Las técnicas aquí desarrolladas para encontrar distribuciones asintóticas de los procesos de renovación, son esencialmente las mismas de la mecánica estadística.
- Debido a que esencialmente los métodos matemáticos son los mismos, es posible abordar un sistema térmico con un enfoque de proceso estocástico obteniéndose resultados satisfactorios. Como por ejemplo, se encontró la relación fundamental en el ensamble canónico y las ecuaciones de estado para el modelo HMF empleando un enfoque de procesos estocásticos. Cabe mencionar que expresiones algebraicas para el modelo HMF sólo se habían encontrado en el ensamble canónico además de que esta es la primera vez que se da una expresión explícita para la relación fundamental.
- Las transformadas de Legendre pueden ser mucho mas generales que las que aparecen en la termodinámica convencional y pueden ayudar a estudiar sistemas de distintas naturalezas como son los caminantes aleatorios y los procesos multiplicativos.

- Es posible deducir una transformada tipo Legendre para cada transformada integral.

- A cada tipo de sistema se le puede asociar una transformada integral natural debido a la conveniencia técnica que presenta, sin embargo también puede ser analizado con otras transformadas integrales. Por ejemplo, la mecánica estadística de equilibrio puede ser formulada de manera formal con transformadas de Mellin en lugar de con transformadas de Laplace.

- La aditividad de la relación fundamental, es decir, si f representa la relación fundamental y s un estado del sistema, entonces $f(\lambda s) = \lambda f(s)$, es propia de sistemas cuyas variables termodinámicas es el resultado de la suma de sus constituyentes. A diferencia de los procesos multiplicativos, donde la variable termodinámica es el resultado del producto de sus constituyentes y por lo tanto $f(s^{\lambda}) = \lambda f(s)$ como se vio en la sección 5.3.2.

- Se propuso una "termodinámica" plausible para procesos q-independientes, y se expuso una formulación de teoría de desviaciones grandes para este tipo de sistemas. Se concluyó que a pesar de que es posible construir una formulación formal, su utilidad práctica para resolver sistemas concretos no es clara aún.

Queda por analizar las consecuencias conceptuales que puede traer el punto 3 tanto en la mecánica estadística como en los procesos estocásticos.

También queda pendiente encontrar una interpretación "física" a las ecuaciones de estado que surgen de la "termoestadística" para caminantes aleatorios, ya que las variables intensivas para este caso son complejas.

Al hacer una rotación de Wick ($t \to -it$) donde t es el tiempo, la ecuación de Scrödinger se transforma en una ecuación de difusión. Falta por analizar si existe una relación entre las técnicas que se emplearon para analizar a las caminatas aleatorias con las técnicas de la mecánica cuántica.

En mecánica clásica se emplea una transformada de Legendre para pasar de la función lagrangiana a la hamiltoniana, falta estudiar las diferencias y equivalencias entre los procedimientos matemáticas de ésta con los planteados en la tesis.

Apéndice A

Transformadas

A.1. Transformada de Laplace

Supongamos que f es una función real o compleja de la variable $t > 0$ y ϵ es un parámetro complejo o real. Definimos la transformada de Laplace de f como

$$F(\epsilon) = L\left(f(t)\right) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\epsilon t} f(t) dt \tag{A.1}$$

cuando la integral converge. Cuando la integral diverge no existe transformada de Laplace definida para f.

La transformada de Laplace bilateral está definida por

$$F(\epsilon) = L\left(f(t)\right) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\epsilon t} f(t) dt. \tag{A.2}$$

La transformada inversa de Laplace y de Laplace bilateral, está dada por la siguiente integral compleja, la cual es conocida como la integral de Bromwich,

$$f(t) = L^{-1}\left(F(\epsilon)\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{e}^{\epsilon t} F(\epsilon) d\epsilon \tag{A.3}$$

donde c es un número real elegido de tal forma que la integral converja. A este contorno de integración se le conoce como el contorno de Bromwich.

A.2. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier $g(k)$ de una función $f(x)$ está definida por

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx} f(x) dx. \tag{A.4}$$

El teorema de la integral de Fourier establece la transformada inversa de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} g(k) dk. \tag{A.5}$$

A.3. Transformada z

La transformada z, $X(z)$, de una función $x(n)$ está definida por

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^n. \tag{A.6}$$

La región de convergencia para una $x(n)$ es definida como el rango de z para la cual la transformada-z converge. La transformada inversa z esta dada por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \tag{A.7}$$

donde C es un círculo cerrado que envuelve el origen y debe contener todos los polos de $X(z)$.

A.4. Transformada de Mellin

La transformada de Mellin de una función está definida por,

$$\{Mf\}(s) = \varphi(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx, \tag{A.8}$$

La banda mas ancha en el plano complejo $\alpha < \mathrm{Re(s)} < \beta$ la cual se denota como $\langle \alpha, \beta \rangle$ en donde la integral converge, se le llama la *banda fundamental*. Las condiciones

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{=} O\left(x^u\right), \qquad f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O\left(x^v\right)$$

cuando $u > v$ grantizan que $\varphi(s)$ existe en la banda $\langle -u, -v \rangle$.

La transformada inversa es

$$\{M^{-1}\varphi(s)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(s)x^{-s}ds. \tag{A.9}$$

La constante c de la linea de integración debe ser tomada en la banda fundamental de la trasformada de Mellin. Además hay un correspondencia precisa entre la expansión asintótica de una función alrededor de 0 y de ∞ con los polos en el semi-plano izquierdo o derecho respectivamente de su transformada de Mellin [50]. Es decir, para estimar asintóticamente una función $f(x)$, se determina la transformada de Mellin y los polos del lado izquierdo (o derecho) de la banda fundamental en el plano complejo, y ellos corresponden prescisamente a los términos de le expansión de $f(x)$ alrededor de 0 (o ∞).

Finalmente, es de gran utilidad saber que la transformada de Mellin de $\exp(-x)$ es

$$\Gamma(s) \equiv \int_0^\infty \exp(-x)x^{s-1}dx$$

en la banda fundamental $\langle 0, +\infty \rangle$.

Apéndice B

Aproximación del punto silla

B.1. Aproximación del punto silla

La aproximación del punto silla [51] es útil para evaluar el comportamiento asintótico de integrales de la forma

$$I(N) = \int_C g(z) \mathrm{e}^{Nf(z)} dz. \tag{B.1}$$

El contorno de integración C se elige de tal forma que la parte real de $f(z)$ se aproxima a menos infinito en ambos límites y que el integrando es cero en ambos límites. Se asume además que $g(z)$ en el integrando está dominado por la exponencial en la región de interés. Si el parámetro N es grande y positivo, el valor del integrando será grande cuando la parte real de $f(z)$ es grande y será pequeño cuando la parte real de $f(z)$ es pequeña o negativa. En particular, cuando N se incremente indefinidamente, la contribución completa del integrando a la integral vendrá de la región en donde la parte real de $f(z)$ tome un valor positivo máximo. Fuera de esta región el integrando será despreciablemente pequeño. Esto se logra ver al expresar $f(z)$ como

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Entonces el integrando puede ser escrito como

$$I(N) = \int_C g(z) \mathrm{e}^{Nu(x,y)} \mathrm{e}^{iNv(x,y)} dz. \tag{B.2}$$

Si ahora empleamos el hecho de que la parte imaginaria del exponente, $iv(x,y)$, es constante en la región en la que la parte real toma su máximo valor, esto es, $v(x,y) = v(x_0,y_0) = v_0$, podemos aproximar la integral por

$$I(N) \approx \mathrm{e}^{isv_0} \int_C g(z)\mathrm{e}^{Nu(x,y)}dz. \tag{B.3}$$

Lejos del máximo de la parte real, la parte imaginaria puede oscilar, como el integrando es despreciablemente pequeño el factor de fase es por lo tanto irrelevante. La parte real de $Nf(z)$ es un máximo para una N dada cuando $u(x,u)$ es un máximo. Esto implica que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

y por lo tanto, haciendo uso de las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{df(z)}{dz} = 0. \tag{B.4}$$

Procedermos a buscar esos ceros de la derivada. Es esencial notar que el máximo de $u(x,y)$ es el máximo solo a lo largo de un determinado contorno. Ni en la parte real ni en la parte imaginaria de la función analitica se tiene un máximo absoluto. Esto puede ser visto recordando que u y v satisfacen la equación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{B.5}$$

De aquí se ve que si la segunda derivada con respecto a x es positiva, entonces la segunda derivada con respecto a y debe ser negativa y por lo tanto ni u ni v posen máximos absolutos o mínimos. Como la función $f(z)$ es analítica, puntos singulares son excluidos. Que la derivada (Ec.B.4) sea cero implica que se trata de un punto silla, que puede ser maximo para $u(x,y)$ para un contorno y un mínimo para otro.

En el punto silla la función $f(z)$ puede ser expandida en una serie de Teylor

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0) + \cdots. \tag{B.6}$$

La primera derivada esta ausente ya que la Ec.B.4 se satisface. El primer término, $\frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0)$, es real y negativo. Es real porque se ha especificado que la parte imaginaria debe ser constante a lo largo del contorno, y

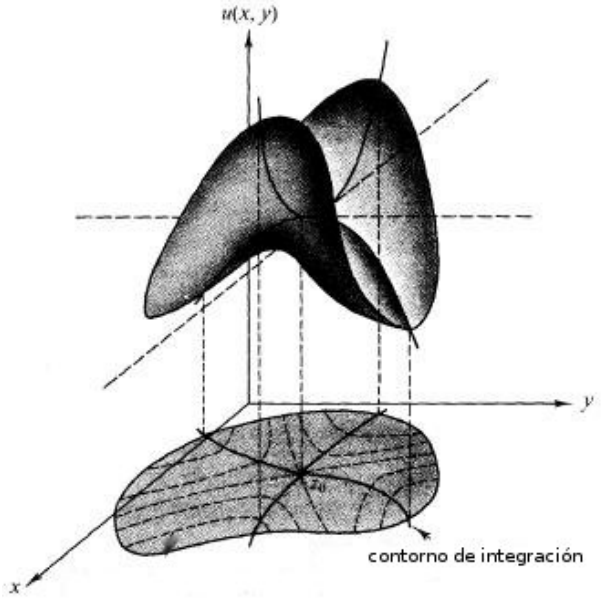

Figura B.1: Punto silla

negativo porque nos estamos moviendo hacia abajo del punto silla o 'pasando la montaña'. Asumiendo que $f''(z_0) \neq 0$, se tiene

$$f(z) - f(z_0) \approx \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) = -\frac{1}{2N}t^2, \tag{B.7}$$

en donde definimos una nueva variable t. Si $(z - z_0)$ se escribe en forma polar

$$(z - z_0) = \delta \mathrm{e}^{i\alpha}, \tag{B.8}$$

se tiene

$$t^2 = -Nf''(z_0)\delta^2 \mathrm{e}^{2i\alpha}. \tag{B.9}$$

Como t es real, se puede escribir como

$$t = \pm\delta|Nf''(z_0)|^{1/2}. \tag{B.10}$$

Sustituyendo la Ec. B.7 en la Ec. B.1, se obtiene

$$I(N) \approx g(z_0)\mathrm{e}^{Nf(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} \frac{dz}{dt} dt. \tag{B.11}$$

También de las Ecs. B.8 y B.10 tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dt}{dz}\right)^{-1} = \left(\frac{dt}{d\delta}\frac{d\delta}{dz}\right)^{-1} = |Nf''(z_0)|^{-1/2}\mathrm{e}^{i\alpha}. \tag{B.12}$$

Ecuación B.11 se rescribe como

$$I(N) \approx \frac{g(z_0)\mathrm{e}^{Nf(z_0)}\mathrm{e}^{i\alpha}}{|Nf''(z_0)|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt. \tag{B.13}$$

Los límites se han establecido de menos infinito a infinito. Esto se permite ya que el integrando es esencialmente cero cuando t se aleja del origen. Obenemos finalmente

$$I(N) \approx \frac{\sqrt{2\pi}g(z_0)\mathrm{e}^{Nf(z_0)}\mathrm{e}^{i\alpha}}{|Nf''(z_0)|^{1/2}}. \tag{B.14}$$

Durante la tesis se emplea el límite de $(\ln I(N))/N$ cuando $N \to \infty$ continuamente, dicho límite se encuentra de forma inmediata de B.14 siendo

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln I(N) = f(z_0). \tag{B.15}$$

Se puede encontrar mas información sobre el método en [52], [53].

Apéndice C

Mecánica estadística de equilibrio de la hamiltonia de interacciones de largo alcance (HMF) a la Mickael Antoni y Stefano Ruffo

La Hamiltoniana de interacciones de large alcance [1] que define el sistema que queremos analizar es la siguiente:

$$H = \sum_{i=0}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{\alpha}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)]. \tag{C.1}$$

Si definimos $\vec{m}_i = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$, entonces podemos escribir la Hamiltoniana anterior de la siguiente forma,

$$H = \sum_{i=0}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{\alpha}{2N} [N^2 - (\sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i) \cdot (\sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i)]. \tag{C.2}$$

Esta Hamiltoniana representa un sistema de N partículas interactuantes moviendose en el circulo unitario.

A continuación se presenta el cálculo de la energía librey de algunas obsevables relevantes (i.e., M) del modelo (C.1) en el ensamble canónico.

La solución de equilibrio del modelo (C.1) se obtiene de aplicar el truco de Hubbard-Stratonovich. La función de partición del modelo (C.1) es

$$Z = \int \prod_{l=1}^{N} dp_l d\theta_l \exp\left(-\beta H\right), \tag{C.3}$$

donde la integral es sobre todo el espacio fase y β es el inverso de la temperatura, $\beta = 1/(k_B T)$. Z se factoriza en la contribución de la energía cinética

$$Z_k = (\frac{2\pi}{\beta})^{N/2}, \tag{C.4}$$

y la contribución debida a la energía potencial

$$Z_V = \exp(-\frac{\beta\alpha N}{2})J, \tag{C.5}$$

con

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{l=1}^{N} d\theta_l \exp\left(\frac{\beta\alpha}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} \cos\left(\theta_i - \theta_j\right)\right). \tag{C.6}$$

J puede reescribirse como

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{l=1}^{N} d\theta_l \exp\left[\frac{\beta\alpha}{2N} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i\right)^2\right]. \tag{C.7}$$

La transformación de Hubbard-Stratonovich cuando $\mu > 0$ es

$$\exp\left(\frac{\mu}{2}\vec{x}^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \exp(-\vec{y}^2 + \sqrt{2\mu}\vec{x} \cdot \vec{y}), \tag{C.8}$$

donde $\vec{y} \in R^2$. De modo que es posible escribir la Eq. (C.7) de la siguiente forma,

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{l=1}^{N} d\theta_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \exp\left(-\vec{y}^2 + \sqrt{2\mu} \sum_{l=1}^{N} \vec{m}_l \cdot \vec{y}\right), \tag{C.9}$$

con $\mu = \beta\alpha/N$. Intercambiando el orden de las integrales, se puede factorizar la integral sobre las coordenadas de las N partículas. Por lo tanto, realizando esta integración y rescalando $\vec{y} \to \vec{y}\sqrt{N/2\beta\alpha}$, se obtiene

$$J = \frac{1}{\pi} \frac{N}{2\beta\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \exp\left(-N \left[\frac{y^2}{2\beta\alpha} - \ln\left(2\pi I_0(y)\right)\right]\right), \tag{C.10}$$

donde y es el módulo de $\vec{y}$ y I_0 es la función de Bessel modificada de orden cero. La energía libre está dada por

$$F = -\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\beta N}\ln Z\right), \tag{C.11}$$

siendo Z la función de partición dada por (C.3). Entonces, empleando el método del punto silla,

$$-\beta F = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - \frac{\alpha\beta}{2} + \max_y\left(-\frac{y^2}{2\beta\alpha} + \ln(2\pi J_0(y))\right). \tag{C.12}$$

Como F depende sólo del modulo y, hay un infinito de mínimos cuando

$$\frac{y}{\beta\alpha} - \frac{J_1}{J_0}(y) = 0. \tag{C.13}$$

Esta es una ecuación de consistencia cuya solución para la mínima energía libre es $y = 0$, y corresponde a una magnetización nula para $\beta\alpha < 2$. Para $\beta\alpha > 2$ la solución da un valor de y dependiente de β que puede ser determinado numericamente. La magnetización está determinada por la razón de las funciones Bessel J_1/J_0 en la Eq.(C.13) evaluada en la solución de la misma ecuación de consistencia. Esto puede ser comprobado al resolver la energía libre dependiente del campo externo y evaluando su derivada para campo cero. La densidad de energía interna U está dada por

$$U = \frac{\partial(\beta F)}{\partial\beta}, \tag{C.14}$$

que da como consecuencia

$$U = \frac{1}{2\beta} + \frac{\alpha}{2}(1 - M^2). \tag{C.15}$$

Bibliografía

[1] Mickael Antoni and Stefano Ruffo. Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics. *Physical Review E*, 52(3):2361–2374, 1995.

[2] D. Flamm. History and outlook of statistical physics. *ArXiv Physics e-prints*, March 1998.

[3] Rosario N., Mantegna H., and Eugene Stanley. *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 1999.

[4] Johannes Voit. *The Statistical Mechanics of Financial Markets (Theoretical and Mathematical Physics)*. Springer, 2010.

[5] Jayram Moorkanikara Nageswaran, Andrew Felch, Ashok Chandrasekhar, Nikil Dutt, Richard Granger, Alex Nicolau, and Alex Veidenbaum. Brain derived vision algorithm on high performance architectures. *Int. J. Parallel Program.*, 37:345–369, August 2009.

[6] Alessandro Pluchino, Vito Latora, and Andrea Rapisarda. Changing opinions in a changing world: a new perspective in sociophysics. *International Journal of Modern Physics C*, 16(4):515–531, April 2005.

[7] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74(1):47–97, Jan 2002.

[8] A Robledo. q-deformed statistical-mechanical structure in the dynamics of the Feigenbaum attractor. *Journal of Physics: Conference Series*, 246(1):012025, 2010.

[9] C. Beck and F. Schlögl. *Thermodynamics of Chaotic Systems*. Cambridge University Press, 1993.

[10] C. Tsallis. Possible generalizations of Boltzmann–Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, 52(1/2):479–487, 1988.

[11] Jean-Philippe Bouchaud and Antoine Georges. Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications. *Physics Reports*, 195(4,5):127–293, 1990.

[12] Michael F. Shlesinger and Barry D. Hughes. Analogs of renormalization group transformations in random processes. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 109(3):597 – 608, 1981.

[13] BD Hughes, MF Shlesinger, and EW Montroll. Random walks with self-similar clusters. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 78(6):3287–91, 1981.

[14] Redner Center For and S. Redner. Random multiplicative processes: An elementary tutorial. *Am. J. Phys*, 58:267–273, 1990.

[15] Horacio S Wio. *An Introduction To Stochastic Processes And Nonequilibrium Statistical Physics*. World Scientific, 1994.

[16] L.E. Reicl. *A Modern Course in Statistical Physics*. Wiley-Interscience, 1998.

[17] Allan Gut. *Probability: A Graduate Course*. Springer, 2005.

[18] EW Montroll and MF Shlesinger. *The wonderful world of random walks. In: Nonequilibrium Phenomena II*. Lebowitz JL and Montroll EW eds, Amsterdam: North-Holland, 1984.

[19] E Landa, I Morales, C Hernández, J.C. López Vieyra, A Frank, and V Velázquez. Scale invariance and criticality in nuclear spectra. *Revista Mexicana de Física*, 54:48 – 55, 12 2008.

[20] S. Havlin and D. Ben-Avraham. Diffusion in disordered media. *Advances in Physics*, 36:695–798, November 1987.

[21] W. K. Brown and K. H. Wohletz. Derivation of the Weibull distribution based on physical principles and its connection to the Rosin-Rammler and lognormal distributions. *Journal of Applied Physics*, 78:2758–2763, August 1995.

[22] L. Pietronero and A. P. Siebesma. Self-similarity of fluctuations in random multiplicative processes. *Phys. Rev. Lett.*, 57(9):1098–1101, Sep 1986.

[23] H. Cramer. Sur un nouveau théorème limite dans la théorie des probabilités. *Colloque consacré à la théorie des probabilités*, 3:2–23, 1938.

[24] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28:1–47, 1975.

[25] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28:279–301, 1975.

[26] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time III. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29:389–461, 1976.

[27] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain markov process expectations for large time IV. *Comm. Pure Appl. Math.*, 36:183–212, 1983.

[28] M.I. Freidlin and A.D. Wentzell. Random perturbations of dynamical systems. In *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, volume 260. Springer-Verlag, New York, 1984.

[29] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637 – 654, 1973.

[30] Hugo Touchette. The large deviation approach to statistical mechanics. *Physics Reports*, 478:1–69, July 2009.

[31] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*. Springer, New York, 1998.

[32] R.S. Ellis. The theory of large deviations: From boltzmann's 1877 caclculation to equilibrium macrostates in 2d turbulence. *Physica D*, 133:106–136, 1999.

[33] M.I. Dykman and K. Lindenberg. *Contemporary Problems in Statistical Physics*, chapter Fluctuations in nonlinear systems driven by colored noise, pages 41–101. SIAM, Philadelphia, 1994.

[34] J. Gärtner. On large deviations of the invariant measure. *Th. Prob. Appl.*, 22:24–39, 1977.

[35] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.

[36] Michael F. Shlesinger, George M. Zaslavsky, and Uriel Frisch. *Levy Flights and Related Topics in Physics: Proceedings of the International Workshop Held at Nice*. Springer, France, 1994.

[37] D. Boyer, O. Miramontes, G. Ramos-Fernández, J. L. Mateos, and G. Cocho. Modeling the searching behavior of social monkeys. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 342(1-2):329 – 335, 2004. Proceedings of the VIII Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena.

[38] Michael Rockinger Eric Jondeau, Poon Ser-Huang. *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer, London, 2007.

[39] R.J. Brown. Risk and private real estate investments. *J. of Real Estate Portfolio Management*, 10(2):113 – 127, 2004.

[40] G. Cormode. Stable distributions for stream computations: it's as easy as 0, 1, 2. *In Proceedings of Workshop on Management and Processing of Data Streams (MPDS)*, 2003.

[41] A.P. Petropulu X. Yang. The extended alternating fractal renewal process for modeling traffic in high-speed communication networks. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 49(7):1349 – 1363, 2001.

[42] C.L. Nikias and M. Shao. *Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications*. Wiley, New York, 1995.

[43] Herbert B. Callen. Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics. 1985.

[44] Joseph Horowitz, Mark D. Normand, and Maria G. Corradini. *Applied and environmental microbiology*, 76(1):230 – 242, 2010.

[45] Susan S. Hirano, Erik V. Nordheim, Deane C. Arny, and Christen D. Upper. Lognormal distribution of epiphytic bacterial populations on leaf surfaces. *Appl. Environ. Microbiol.*, 44(3):695–700, 1982.

[46] Arthur L. Koch. The logarithm in biology 1. mechanisms generating the log-normal distribution exactly. *Journal of Theoretical Biology*, 12(2):276 – 290, 1966.

[47] Ernesto P. Borges. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 340(1-3):95 – 101, 2004. News and Expectations in Thermostatistics.

[48] Hiroki Suyari. Mathematical structures derived from the q-multinomial coefficient in tsallis statistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 368(1):63 – 82, 2006.

[49] S. Steinberg S. Umarov, C. Tsallis. A generalization of the central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics. *Milan Journal of Mathematics*, 76(1):307 – 328, 2008.

[50] P. Flajolet, X. Gourdon, and P. Dumas. Mellin transforms and asymptotics : Harmonic sums. *Theoretical Computer Science*, 144(1–2):3–58, 1995.

[51] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Essential Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier academic press, 2004.

[52] Andre Krzywicki Philippe Dennery. *Mathematics for Physicists*. Dover Publications, 1996.

[53] Steven A. Orszag Carl M. Bender. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 1978.