



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**El oscilador Dirac-Moshinsky, su interpretación  
en óptica cuántica y más allá**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

**Juan Mauricio Torres González**

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Thomas Henry Seligman Schurch

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: Dr. Francois Alain Leyvraz Waltz

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: Dr. Carlos Federico Bunge Molina



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

## Agradecimientos

---

En primer lugar agradezco todo el cariño y apoyo que mis padres Juan y Elvira me han brindado siempre e incondicionalmente. A mis hermanos Rodrigo y Cony por estar siempre presentes cuando los necesito con críticas sinceras y buenos consejos.

A las personas que se han involucrado en mi desarrollo científico. Thomas por su gran labor como tutor de doctorado, su apoyo y paciencia. Marc y Emerson por las enseñanzas académicas, que han resultado en exitosas colaboraciones. Giovanna Morigi y Wolfgang Schleich por recibirme en su grupo de investigación.

A Rocío Jaúregui, Héctor Castaños, Francois Leyvraz, José Recamier, Héctor Castro y Pablo Barberis, por aceptar revisar mi trabajo y con sus comentarios ayudarme a mejorarlo.

A las personas con quienes he compartido buenos momentos durante estos años. Sergio, Aldo, Ángel, Claudia, Laura, Pablo, Victor, Abel, Daniel, Silvia, Manuel. . . En Cuernavaca: Olivia, Aurora, Carlos, Karel, Paty, ClaudiaH, Fátima, Chela, Sayab, Chucho, Rafa, ÁngelM, Samuel, Yenni, Alex, Lina, Mitrani, Andrés, Braulio. . .

Finalmente agradezco al Instituto de Ciencias Físicas y a la UNAM, por las facilidades que me brindaron para realizar este trabajo.

## Resumen

El oscilador Dirac-Moshinsky es un modelo elegante y exactamente soluble en mecánica cuántica relativista, el cual bajo ciertas circunstancias, puede ser mapeado sobre el modelo de Jaynes-Cummings utilizado comúnmente en el contexto de óptica cuántica. En este trabajo se muestra detalladamente cómo hacer este mapeo. Después se extiende el modelo relativista al considerar su acoplamiento con un campo externo, que incluye una estructura de isoespín, y se encuentran las condiciones que mantienen la solubilidad. Se utiliza este sistema extendido para explorar el entrelazamiento en sistemas relativistas y luego se identifica un sistema análogo en cuántica óptica: dos átomos diferentes en interacción con un modo de una cavidad electromagnética. En este último sistema, que puede ser utilizado para emular al anterior, sobresalen otros aspectos del entrelazamiento, que adquieren relevancia cuando se consideran a los dos átomos como un sistema central. El entrelazamiento entre ellos puede ser utilizado como un recurso en el contexto de computación e información cuántica, mientras que el entrelazamiento con la cavidad se podría interpretar como una fuente de decoherencia. Para medir estas dos formas de entrelazamiento, se derivan expresiones analíticas exactas para la concurrencia de los átomos y la pureza de su matriz de densidad. Los resultados se obtienen para la situación en que la cavidad se prepara inicialmente en un estado de número y se caracteriza la dinámica en un plano concurrencia contra pureza.

**Palabras clave:** Oscilador Dirac-Moshinsky, modelo de Jaynes-Cummings, entrelazamiento, decoherencia, concurrencia, pureza.

## Abstract

The Dirac-Moshinsky oscillator is an elegant quantum relativistic model that under certain circumstances can be mapped onto the Jaynes-Cummings model commonly used in the quantum optics community. In this work we show how to do this in detail. Then we extend it by considering its coupling with an external (isospin) field and find the conditions that maintain the solvability. We use this extended system to explore entanglement in relativistic systems and then identify its quantum optical analog: two different atoms interacting with one electromagnetic mode of a cavity. In this last system, which can be used to emulate the former, different aspects of entanglement gain relevance if one considers the two atoms as a central system. The entanglement between them can be explored as a resource in the context of quantum computation and quantum information, while the entanglement with the cavity could be regarded as a source of decoherence. To measure this two different forms of entanglement, we derive exact analytical expressions for the concurrence of the atoms and the purity of its reduced density matrix, when the cavity is prepared initially in a number state. Finally, we characterize the dynamics in a concurrence versus purity plane.

**Keywords:** Dirac-Moshinsky oscillator, Jaynes-Cummings model, entanglement, decoherence, concurrence, purity.

---

# Índice

---

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Oscilador Dirac-Moshinsky: mapeo a óptica cuántica</b>	<b>11</b>
1.1. El oscilador Dirac-Moshinsky . . . . .	11
1.2. Mapeo del ODM sobre MJC . . . . .	14
<b>2. Un oscilador Dirac-Moshinsky acoplado</b>	<b>23</b>
2.1. Acoplamiento a un campo externo . . . . .	23
2.2. Entrelazamiento con el campo . . . . .	25
2.3. Conexión con óptica cuántica . . . . .	29
<b>3. Dos átomos dentro de una cavidad</b>	<b>31</b>
3.1. El Hamiltoniano . . . . .	31
3.2. Diagonalización y evolución temporal . . . . .	33
3.3. Entrelazamiento . . . . .	36
3.4. Plano CP . . . . .	41
<b>4. La cavidad en un estado de número</b>	<b>45</b>
4.1. Átomos iguales, resonantes y con interacción . . . . .	47
4.2. Diferentes acoplamientos . . . . .	55
4.3. Un átomo fuera de la cavidad . . . . .	59
4.4. Desintonías iguales . . . . .	63
4.5. Tres átomos con interacción . . . . .	65

<b>Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>Apéndices</b>	
<b>A. Modelo de Jaynes-Cummings</b>	<b>71</b>
<b>B. Solución general al problema de valores propios</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

---

## Introducción

---

El hecho de que la ecuación de Dirac [1] sea analíticamente soluble para el caso libre y para el problema de Coulomb, hizo plausible explorar otros sistemas cuyas contrapartes no-relativistas, en analogía con la anterior, sean algebraicamente solubles. En efecto, existen problemas adicionales que son solubles en el ámbito relativista. En particular, una generalización del oscilador armónico con su gran simetría dinámica [2, 3]. Moshinsky y Szczepaniak [2] se dieron cuenta de esto y esta línea fue después extensamente seguida por ellos y sus colaboradores [2, 4, 5, 6].

En este trabajo mostramos que su solubilidad en forma exacta, surge de un número cuántico adicional que se conserva. Esta conservación también permite la solubilidad en un sentido algebraico hasta en el caso en que acoplamos el oscilador a un campo de isoespín. En esta tesis mostramos esto, escogiendo cuidadosamente un acoplamiento de Yukawa [7], con el cual se conserva un número cuántico análogo y por lo tanto la simetría del problema. Esta solución se clarifica cuando mapeamos el modelo relativista a uno más general en óptica cuántica, lo cual será mostrado detalladamente.

La conexión con óptica cuántica no sólo hace la solubilidad mas comprensible, sino que permite la posibilidad de concebir experimentos en óptica cuántica que emulen el sistema relativista. Hoy en día esto es posible con iones atrapados. El problema de una partícula de Dirac libre ha sido exitosamente emulado [8, 9] y al menos el mapeo del oscilador Dirac-Moshinsky (ODM) en  $1 + 1$  y  $2 + 1$  dimensiones sobre el modelo de Jaynes-Cummings (MJC) han sido propuestos [10, 11]. En este trabajo revisamos como puede

realizarse dicho mapeo y mostramos como hacerlo, al menos parcialmente, en el caso de  $3+1$  dimensiones. Para el caso acoplado con un campo de isoespín proponemos el mapeo a un sistema de dos átomos en una cavidad. Aquí un átomo representa la estructura de dos niveles (componente grande y chica [3, 12]) del oscilador relativista, otro átomo se identifica con el isoespín del campo, mientras que la cavidad se corresponde con los grados de libertad espaciales del oscilador.

Por otro lado, el sistema de dos átomos en una cavidad es por sí mismo interesante y ha atraído considerable atención en los últimos años, gracias al advenimiento de las trampas de iones y los avances en cavidades ópticas [13, 14]. Teóricamente, diferentes modelos de dos átomos idénticos como sistema central acoplados a un modo de una cavidad han sido previamente explorados [15, 16, 17, 18, 19]. Aquí mostramos que uno puede definir y resolver una clase más amplia de sistemas de este tipo y que mantienen la solubilidad de forma cerrada. Específicamente consideramos átomos con diferentes acoplamientos al modo de la cavidad, diferentes desintonías e incluimos interacciones de tipo dipolo-dipolo e Ising entre los átomos. Mostramos, entonces, que el número total de excitaciones es una cantidad conservada. Usando la base en la cual este operador es diagonal, el Hamiltoniano total puede ser transformado en una matriz diagonal por bloques de a lo más  $4 \times 4$ . Los casos que presentamos deberían ser en principio accesibles experimentalmente en cavidades ópticas [13, 14]. Mientras que las interacciones dipolo-dipolo aparecen comúnmente en estos sistemas, la interacción de Ising podría ser simulada [20, 21, 22].

Cabe señalar, que otros modelos, algunos con átomos diferentes y sólo una excitación del sistema en un continuo de modos, han sido resueltos en trabajos previos [23, 24, 25]. Éstos utilizan el formalismo de *pseudomodos* [26], que resulta en un modo con pérdidas, el cual aunque es similar, no cumple con la conservación del número de excitaciones que usamos y además se restringe a condiciones iniciales con una excitación.

Además, mostraremos que nuestro modelo resulta ser un ejemplo sencillo para estudiar el entrelazamiento bajo efectos de decoherencia. Entender esta combinación es de suma importancia, pues el entrelazamiento es un recurso fundamental y la decoherencia el mayor impedimento para protocolos de información y cómputo cuántico [27]. La relación entre concurrencia y pureza del sistema central nos da el acceso más simple para abordar el problema. Estudiamos el entrelazamiento utilizando en este modelo a los dos átomos como sistema central y la cavidad como su entorno. Analizamos la dinámica conjunta de entrelazamiento y decoherencia utilizando el plano concurrencia

---

vs pureza y encontramos soluciones analíticas exactas cuando el sistema se encuentra preparado en un estado de número.

La tesis está organizada de la siguiente manera, en el capítulo 1 damos un breve resumen del oscilador Dirac-Moshinsky utilizando la notación usual de óptica cuántica. Después explicamos el mapeo entre éste y el modelo de Jaynes-Cummings de óptica cuántica. Revisamos los casos de  $1 + 1$  y  $2 + 1$  dimensiones, explicamos como hacerlo, al menos parcialmente, en  $3 + 1$  dimensiones y mostramos después la solución explícita al problema de valores y vectores propios. En el capítulo 2 acoplamos al ODM un campo de isoespín de una manera que se simplifica y clarifica utilizando la notación y convenciones introducidas en el capítulo 1. Evaluamos el entrelazamiento entre el ODM y el campo, sin detenernos mucho en esto, pues después reconocemos que el tipo de Hamiltoniano es típico de átomos en cavidades. En el capítulo 3 presentamos el modelo de dos átomos en una cavidad, resolvemos el problema de valores propios y explicamos a mayor detalle las medidas de entrelazamiento. Finalmente, en el capítulo 4 evaluamos explícitamente las medidas de entrelazamiento cuando la cavidad se prepara inicialmente en un estado de número.

# CAPÍTULO 1

---

## Oscilador Dirac-Moshinsky: mapeo a óptica cuántica

---

### 1.1. El oscilador Dirac-Moshinsky

En 1989 Marcos Moshinsky y Adam Szczepaniak desarrollaron un modelo cuántico relativista exactamente soluble [2], el cual en el límite no-relativista corresponde a un oscilador armónico con un acoplamiento espín-órbita; lo nombraron oscilador de Dirac. A pesar de que dos décadas antes Ito *et al.* [28] y Cook [29] habían llegado a una ecuación del mismo tipo por un razonamiento distinto, el concepto introducido por M. Moshinsky fue ampliamente estudiado y desarrollado [3, 4, 5, 6, 30]. Es por esto que ahora lo llamamos oscilador Dirac-Moshinsky (ODM) [31, 32].

La idea surge cuando se toma en cuenta que el operador de momento es lineal en la ecuación de Dirac [1], entonces se propone también un término lineal en posición, en analogía con las ecuaciones de Schrödinger [33] y de Klein-Gordon [12] de un oscilador armónico en donde tanto momento y posición aparecen en forma cuadrática. En este trabajo elegimos escribirlo de la siguiente forma Hamiltoniana:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + im\omega\boldsymbol{\beta}\mathbf{r}) + mc^2\beta) |\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \quad (1.1)$$

donde  $c$  denota la velocidad de la luz,  $m$  y  $\omega$  la masa y frecuencia del osci-

lador, y además utilizamos las matrices de Dirac  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$  y  $\beta$  con la siguiente representación:

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Estas matrices tienen la propiedad de anticonmutar, es decir cumplen con las siguientes relaciones

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk}\mathbb{I}_4, \quad \{\alpha_j, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = \mathbb{I}_4, \quad (1.3)$$

donde  $\mathbb{I}_n$  es la matriz identidad de  $n \times n$  y  $\{p, q\} = pq + qp$  es el anticonmutador. Dirac notó que estas matrices de  $4 \times 4$  cumplen con la reglas de anticonmutación que necesitaba para su famosa ecuación [1], la cual es de primer orden tanto en coordenadas espaciales como en la coordenada temporal, y describe una partícula libre relativista en 3 dimensiones espaciales y una temporal (3 + 1 dimensiones).

Uno puede notar que las matrices de Dirac se pueden construir usando el producto tensorial a partir de dos conjuntos de matrices de Pauli de la siguiente manera

$$\alpha = -\sigma_y \otimes \mathbf{s}, = \begin{pmatrix} 0 & i\mathbf{s} \\ -i\mathbf{s} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \sigma_z \otimes \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Denotamos a cada conjunto con diferentes símbolos para evitar confusión. Utilizamos  $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$  para lo que más adelante identificaremos como el espín de la partícula y  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  para la parte que se relaciona con las energías, que también clarificaremos más adelante y nombramos espín\* [34]. Las representaciones de ambas,  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{s}$ , son las mismas, pero actúan sobre espacios diferentes y se escriben como

$$\sigma_x, s_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y, s_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z, s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

En lo que sigue omitiremos escribir el producto tensorial  $\otimes$  para simplificar la notación y utilizaremos la convención de escribir los términos del espín-\* siempre a la izquierda. En este trabajo le damos gran énfasis al espín-\*, por razones que se harán evidentes en la siguiente sección, por lo que nos resultará conveniente utilizar los operadores de ascenso y descenso

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y), \quad (1.6)$$

cuya acción sobre los estados de espín-\* se puede representar de la siguiente manera

$$\sigma_{\pm}|\pm\rangle = 0, \quad \sigma_{\pm}|\mp\rangle = |\pm\rangle. \quad (1.7)$$

Notando ahora de la ecuaciones (1.4) y (1.6), que

$$\boldsymbol{\alpha} = (\sigma_+ + \sigma_-)\mathbf{s},$$

podemos reescribir el Hamiltoniano en (1.1) como

$$\begin{aligned} H &= mc^2\sigma_z + c\sigma_- \mathbf{s} \cdot (m\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} - i\mathbf{p}) + c\sigma_+ \mathbf{s} \cdot (m\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} + i\mathbf{p}) \\ &= \begin{pmatrix} mc^2 & \mathbf{s} \cdot (m\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} + i\mathbf{p}) \\ \mathbf{s} \cdot (m\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} - i\mathbf{p}) & -mc^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

el cual actuará sobre el vector de estado total del oscilador relativista y que denotaremos como

$$|\Psi\rangle = |- \rangle|\psi_1\rangle + |+ \rangle|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_2\rangle \\ |\psi_1\rangle \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Si ahora se considera la ecuación de valores propios del Hamiltoniano,  $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ , entonces uno puede encontrar

$$\begin{aligned} (E - mc^2)|\psi_2\rangle &= \mathbf{s} \cdot (m\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} + i\mathbf{p})|\psi_1\rangle, \\ (E + mc^2)|\psi_1\rangle &= \mathbf{s} \cdot (m\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} - i\mathbf{p})|\psi_2\rangle, \end{aligned} \quad (1.10)$$

de donde se puede apreciar claramente el acoplamiento entre  $|\psi_2\rangle$  y  $|\psi_1\rangle$ , que son conocidas para energías positivas, como las componentes grande y chica, respectivamente [3, 12]; la componente chica tiende a cero en el límite no relativista. Despejando  $|\psi_1\rangle$  de la ecuación (1.10), se puede mostrar que se llega a la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{E^2 - m^2c^4}{c^2}|\psi_1\rangle = (p^2 + m^2\omega^2r^2 - 3\hbar\omega mc^2 - 2mc^2\boldsymbol{\omega}\mathbf{s} \cdot \mathbf{L})|\psi_1\rangle, \quad (1.11)$$

donde se ha introducido el operador de momento angular  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , el cual se acopla con  $\mathbf{s}$ , por lo que a éste último se le atribuye la propiedad de momento angular intrínseco de la partícula, *i.e.* el espín. Una expresión análoga, que omitimos escribir, se obtiene para  $|\psi_2\rangle$ .

En este punto es instructivo considerar el límite no relativista, notando que  $E = mc^2 + \varepsilon$ , siendo  $\varepsilon \ll mc^2$  la energía no relativista. El término a la izquierda de la ecuación se puede aproximar por  $2mc^2\varepsilon$ , lo que significa que  $\varepsilon$  es un valor propio del operador a la derecha de la ecuación, el cual podemos reconocer fácilmente como el Hamiltoniano de un oscilador armónico isotrópico más un término de acoplamiento espín-órbita.

Consideremos ahora los operadores vectoriales de creación y aniquilación del oscilador

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\mathbf{r} + i\frac{\mathbf{p}}{m\omega}), \quad \mathbf{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\mathbf{r} - i\frac{\mathbf{p}}{m\omega}), \quad (1.12)$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1.8) obtenemos

$$H = mc^2\sigma_z + \eta(\sigma_- \mathbf{s} \cdot \mathbf{a}^\dagger + \sigma_+ \mathbf{s} \cdot \mathbf{a}), \quad (1.13)$$

donde hemos definido

$$\eta = \sqrt{2mc^2\hbar\omega}. \quad (1.14)$$

Escrito de esta manera, el Hamiltoniano del ODM se asemeja al conocido modelo de Jaynes-Cummings de óptica cuántica, el cual explicamos en el apéndice A. Ésto debido a la forma en que se acoplan operadores de escalera de un sistema de dos niveles  $\sigma_\pm$  y los operadores  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}$  y su hermitiano conjugado. Antes de analizar esta similitud, en el caso general de 3 + 1 dimensiones, y de evaluar los estados propios y energías de este Hamiltoniano, consideraremos el problema en 1 + 1 y 2 + 1 dimensiones, que ayudarán a clarificar ideas y en donde mostraremos la estrecha conexión de estos casos más restrictivos con el modelo de Jaynes-Cummings.

## 1.2. Mapeo del oscilador Dirac-Moshinsky sobre el modelo Jaynes-Cummings

En esta sección describimos la conexión que existe entre el oscilador Dirac-Moshinsky y el modelo de Jaynes-Cummings, el cual es muy conocido en óptica cuántica y puede representar a un átomo de dos niveles en interacción con un modo de una cavidad electromagnética. En particular, mostraremos bajo que circunstancias se puede mapear el ODM sobre el MJC.

## ODM en 1 + 1 dimensiones

En primera instancia consideremos una dimensión espacial y una temporal, es decir el ODM en 1 + 1 dimensiones. En este caso se necesitan únicamente dos matrices de Dirac y elegimos escribir

$$H^{(1)} = -c\sigma_y(p_x + im\omega\sigma_z x) + mc^2\sigma_z. \quad (1.15)$$

donde el superíndice del Hamiltoniano indica la dimensión espacial en la que estamos trabajando. Usando los operadores de creación y aniquilación en una dimensión:

$$a_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - i\frac{p_x}{m\omega} \right), \quad a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + i\frac{p_x}{m\omega} \right), \quad (1.16)$$

y los operadores de ascenso y descenso  $\sigma_\pm$  del espín-\*, uno puede reescribir la ecuación previa como

$$H^{(1)} = \eta \left( \sigma_+ a_x + \sigma_- a_x^\dagger \right) + mc^2\sigma_z. \quad (1.17)$$

La conexión con el MJC es obvia, si uno compara la ecuación (1.17) con la ecuación (A.9). De esta comparación, podemos concluir que este Hamiltoniano es exactamente el mismo que el de Jayes-Cummings. Por lo tanto, podemos establecer que el ODM en 1 + 1 dimensiones se mapea exactamente al MJC, con las siguientes correspondencias  $\eta \rightarrow \hbar g$ ,  $mc^2 \rightarrow \hbar\delta$ . El espín-\* quedará representado por el sistema atómico y los grados de libertad espaciales por el modo de la cavidad. Con estas consideraciones, no hace falta mostrar cuales son las soluciones del problema, pues éstas son las mismas que para el modelo de Jaynes-Cummings mostrado en el apéndice A.

## ODM en 2 + 1 dimensiones

Ahora consideramos el caso espacial bidimensional, el ODM en 2 + 1 dimensiones. Para una descripción detallada de este caso, referimos a [11, 35]. En esta situación necesitamos de tres matrices de Dirac y escogemos escribir

$$H^{(2)} = -c\sigma_x(p_y + im\omega\sigma_z y) - c\sigma_y(p_x + im\omega\sigma_z x) + mc^2\sigma_z. \quad (1.18)$$

Si ahora utilizamos los operadores de ascenso y descenso, podemos reescribirlo como

$$H^{(2)} = \eta \left( \sigma_+ a_x + \sigma_- a_x^\dagger \right) - i\eta \left( \sigma_+ a_y - \sigma_- a_y^\dagger \right) + mc^2\sigma_z. \quad (1.19)$$

De donde reconocemos que ahora el modelo bidimensional podría ser representado por un sistema de dos niveles en interacción con dos modos de un campo electromagnético. Sin embargo, es posible simplificar este problema, si uno introduce los siguientes operadores de escalera

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - ia_y) & a_i^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^\dagger + ia_y^\dagger) \\ a_d &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + ia_y) & a_d^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^\dagger - ia_y^\dagger) \end{aligned} \quad (1.20)$$

los cuales son otra representación del problema de dos osciladores y también son operadores de creación y aniquilación que cumplen con la regla de conmutación canónica  $[a_d, a_d^\dagger] = 1$  y  $[a_i, a_i^\dagger] = 1$  y están desacoplados, es decir  $[a_d, a_i^\dagger] = [a_i, a_d^\dagger] = 0$ . Reescribiendo la ecuación (1.18) en términos de esta nueva representación reconocemos que el Hamiltoniano se expresa como

$$H^{(2)} = \sqrt{2}\eta (\sigma_+ a_d + \sigma_- a_d^\dagger) + mc^2 \sigma_z, \quad (1.21)$$

en donde uno inmediatamente nota que el conjunto de operadores  $a_i, a_i^\dagger$  no aparece en la ecuación (1.21), lo cual significa que los estados propios de  $H^{(2)}$  dependen únicamente del conjunto de estados número  $\{|n_d\rangle\}$ , correspondientes al operador de número  $a_d^\dagger a_d$ , y son infinitamente degenerados en el subespacio generado por el conjunto  $\{|n_i\rangle\}$ . La conexión en este caso es también obvia, uno ha de identificar el subespacio de  $a_d$  con el de la cavidad, el espín-\* con el sistema atómico y en este caso las correspondencias  $mc^2 \rightarrow \hbar\delta$  y  $\sqrt{2}\eta \rightarrow \hbar g$ . Esto quiere decir que en 2 + 1 dimensiones, el ODM también puede ser representado por un sistema de dos niveles en interacción con un modo del campo electromagnético.

## Un primer intento para el ODM en 3 + 1 dimensiones

Ahora regresamos al caso de 3 + 1 dimensiones y procederemos de inicio de una manera aparentemente ingenua, pero instructiva. Consideremos el Hamiltoniano de la ecuación (1.13) y tratemos de escribirlo en términos de operadores de creación y aniquilación como hicimos en los casos de 1 + 1 y 2 + 1 dimensiones, ecuaciones (1.17) y (1.21). Para ello notamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \mathbf{a} &= s_x a_x + s_y a_y + s_z a_z \\ &= (s_+ + s_-) a_x + i(s_- - s_+) a_y + s_z a_z \\ &= s_+ (a_x - ia_y) + s_- (a_x + ia_y) + s_z a_z \\ &= \sqrt{2} s_+ a_i + \sqrt{2} s_- a_d + s_z a_z \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde hemos usado los operadores de oscilador de la ecuación (1.20) y los operadores de ascenso y descenso del espín, que se definen de la misma manera que los introducidos en la ecuación (1.6). Análogamente, se puede encontrar

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}^\dagger = \sqrt{2}s_+a_d^\dagger + \sqrt{2}s_-a_i^\dagger + s_z a_z^\dagger. \quad (1.23)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1.13) encontramos la siguiente expresión para el Hamiltoniano del ODM

$$\begin{aligned} H = & mc^2\sigma_z + \eta \left( \sigma_-s_z a_z^\dagger + \sigma_+s_z a_z \right) \\ & + \sqrt{2}\eta \left( \sigma_+s_+a_i + \sigma_-s_-a_i^\dagger \right) \\ & + \sqrt{2}\eta \left( \sigma_+s_-a_d + \sigma_-s_+a_d^\dagger \right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

el cual puede ser mejor interpretado si lo expresamos en forma de matriz

$$H = \eta \begin{pmatrix} mc^2/\eta & 0 & a_z & \sqrt{2}a_i \\ 0 & mc^2/\eta & \sqrt{2}a_d & -a_z \\ a_z^\dagger & \sqrt{2}a_d^\dagger & -mc^2/\eta & 0 \\ \sqrt{2}a_i^\dagger & -a_z^\dagger & 0 & -mc^2/\eta \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

De la ecuación anterior notamos que de no ser por los operadores  $a_z$  y  $a_z^\dagger$ , tendríamos un sistema desacoplado en los operadores de  $a_i, a_i^\dagger$  y  $a_d, a_d^\dagger$ . El acoplamiento dado por la componente  $z$  dificulta la diagonalización usando esta representación. Un resultado semejante se reporta previamente en la literatura [36], cuando se consideró una partícula de Dirac en un campo magnético uniforme. Ahí se incorpora en el Hamiltoniano el potencial vectorial  $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$  y obtienen la misma estructura de de la ecuación (1.25) pero con  $p_z$  en lugar de  $a_z$ .

### ODM en 3 + 1 dimensiones

Ahora reconsideramos el caso de 3+1 dimensiones aprovechando la simetría esférica del problema. De la ecuación (1.11) es evidente que  $H^2$  conmuta con  $\mathbf{J}^2$ , el cuadrado del momento angular total

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (1.26)$$

donde  $\mathbf{S} = \hbar\mathbf{s}/2$ . Además, podemos identificar una constante de movimiento adicional

$$I_{ODM} = \mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}\sigma_z, \quad (1.27)$$

para la cual puede verificarse que conmuta con  $H$ . La constante  $I_{ODM}$  está formada por el operador de número del oscilador  $\mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a}$  y por  $\sigma_z$ . Esto nos indica que las funciones propias de  $H$  pueden ser expresadas como una combinación de  $|\pm\rangle$ , los espinores del espín-\*, y los estados propios del oscilador armónico isotrópico tridimensional con momento angular  $l$  acoplados a un espín  $\frac{1}{2}$ :

$$|n_R \left( l, \frac{1}{2} \right) j m_j\rangle, \quad (1.28)$$

donde  $j$  y  $m_j$  son, respectivamente, el número cuántico de momento angular total y su proyección sobre el eje preferencial.  $n_R$  y  $l$  son los números cuánticos radial y de momento angular del oscilador y se relacionan con el número total de la siguiente manera

$$N = 2n_R + l = n_x + n_y + n_z, \quad (1.29)$$

siendo  $n_x, n_y, n_z$  los números cuánticos cartesianos del oscilador. Como el momento angular total queda determinado al sumar o restar  $1/2$  al momento angular total, fijaremos el valor de  $j$  y lo sustituiremos en  $l$ , es decir

$$l = j \pm \frac{1}{2} \quad (1.30)$$

Por otro lado, el Hamiltoniano del ODM en la ecuación (1.13) está formado por los operadores de escalera  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}$  y su hermitiano conjugado. Esto nos indica que una forma para encontrar los estados propios es conociendo la manera en que actúan estos operadores de escalera sobre los estados de la ecuación (1.28). Así podemos escribir esta acción [3], para los dos casos separados donde  $l = j + \frac{1}{2}$  y  $l = j - \frac{1}{2}$ , de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \mathbf{a} |n_R \left( j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) j m_j\rangle &= \sqrt{2n_R + 2j + 2} |n_R \left( j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) j m_j\rangle \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{a} |n_R \left( j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) j m_j\rangle &= \sqrt{2n_R} |n_R - 1 \left( j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) j m_j\rangle. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Con lo que podemos verificar también, que el Hamiltoniano del ODM no afecta la proyección de momento angular total  $m_j$ , es decir los eigenestados del ODM están degenerados con  $m_j$ . Como sólo dependen del valor de  $n_R$  y  $j$  y estos definen a su vez el número total de oscilador

$$N = 2n_R + j \pm \frac{1}{2}, \quad (1.32)$$

entonces ahora podemos usar  $N$  para etiquetar los estados de la siguiente manera

$$|N\rangle = |n_R \left( j \pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) j m_j\rangle. \quad (1.33)$$

No hay ambigüedad si uno recuerda la dependencia de  $N$  en  $j$  y  $n_R$  de la ecuación (1.32). La clave en este caso es la paridad de  $N$ , ya que  $j$  es un semientero, por lo que  $j + \frac{1}{2}$  tiene siempre la paridad opuesta a  $j - \frac{1}{2}$  y por la forma de la ecuación (1.32),  $N$  tiene siempre la paridad de  $j \pm \frac{1}{2}$ . Cabe mencionar que el mínimo valor para  $N$  será  $N_{\min} = j - \frac{1}{2}$ , que es cuando  $n_R = 0$ . Con estas consideraciones, la ecuación (1.31) toma la forma

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}|N\rangle = \sqrt{\mu(N)}|N-1\rangle \quad (1.34)$$

con la introducción de

$$\mu(N) = \begin{cases} 2n_R + 2j + 2 & N = 2n_R + j + \frac{1}{2} \\ 2n_R & N = 2n_R + j - \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (1.35)$$

la cual contempla las dos formas de sumar  $j$ . La tabla 1.1 muestra como  $|N\rangle$  etiqueta a los estados de oscilador acoplados a espín  $1/2$  y el resultado de aplicar a cada uno el operador  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}$  como en la ecuación (1.34).

$\mu(N)$	$ N\rangle$	Estados propios $\mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a}$ y $J^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n_R + 2j + 4$	$ 2n_R + j + \frac{5}{2}\rangle$	$ n_R + 1(j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm_j\rangle$
$2n_R + 2$	$ 2n_R + j + \frac{3}{2}\rangle$	$ n_R + 1(j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm_j\rangle$
$2n_R + 2j + 2$	$ 2n_R + j + \frac{1}{2}\rangle$	$ n_R(j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm_j\rangle$
$2n_R$	$ 2n_R + j - \frac{1}{2}\rangle$	$ n_R(j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm_j\rangle$
$2n_R + 2j$	$ 2n_R + j - \frac{3}{2}\rangle$	$ n_R - 1(j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm_j\rangle$
$2n_R - 2$	$ 2n_R + j - \frac{5}{2}\rangle$	$ n_R - 1(j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm_j\rangle$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2$	$ j + \frac{3}{2}\rangle$	$ 1(j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm_j\rangle$
$2j + 2$	$ j + \frac{1}{2}\rangle$	$ 0(j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm_j\rangle$
$0$	$ j - \frac{1}{2}\rangle$	$ 0(j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm_j\rangle$

Cuadro 1.1: Estados propios del oscilador acoplados a espín  $1/2$  y etiquetados por el número cuántico total de oscilador  $N$ . A la izquierda el valor  $\mu(N)$  en la ecuación (1.34).

Ahora, estamos en posición para diagonalizar  $H$  en bloques de matrices de  $2 \times 2$  de dos tipos

$$H(N) = \begin{pmatrix} mc^2 & \eta\sqrt{\mu(N)} \\ \eta\sqrt{\mu(N)} & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

y en completa analogía con el MJC (ver ecuación (A.10) del apéndice A) uno puede expresar las correspondientes energías propias como

$$E_{\pm}(N) = \pm\sqrt{m^2c^4 + \eta^2\mu(N)} = \pm E(N). \quad (1.37)$$

y los estados propios

$$\begin{aligned} |\varphi_+, N\rangle &= \sin(\theta_N)|-\rangle|N\rangle + \cos(\theta_N)|+\rangle|N-1\rangle, \\ |\varphi_-, N\rangle &= \cos(\theta_N)|-\rangle|N\rangle - \sin(\theta_N)|+\rangle|N-1\rangle, \end{aligned} \quad (1.38)$$

con

$$\theta_N = \arctan \left( \sqrt{\frac{E(N) - mc^2}{E(N) + mc^2}} \right). \quad (1.39)$$

Aquí se puede notar, que en el límite no-relativista la componente chica tiende a cero, ya que  $E(N) \simeq mc^2$ , por lo que  $\theta_N \simeq 0$  y  $|\varphi_+, N\rangle \simeq |+\rangle|N-1\rangle$ . Además, de las ecuaciones (1.37) y (1.35) podemos ver que los estados con  $N = 2n_R + j - \frac{1}{2}$  están infinitamente degenerados, ya que tienen energías que no dependen de  $j$ . La tabla 1.2 muestra la manera de parear los estados  $|N\rangle$  con los espinores  $|\pm\rangle$  para formar eigenestados de energía positiva. Si  $N$  tiene la misma paridad de  $j - \frac{1}{2}$  y  $|N\rangle$  se para con  $|-\rangle$ , entonces  $|N-1\rangle$  se para con  $|+\rangle$  y se tiene un estado de infinita degeneración, el caso contrario es de degeneración finita.

De las ecuaciones (1.36), (1.37), (1.38) uno puede notar una gran semejanza con el MJC del apéndice A. Si ahora uno toma  $N$  con la misma paridad que  $j - \frac{1}{2}$  los bloques en la ecuación (1.36) son equivalentes a aquellos en la ecuación (A.10), si uno identifica  $\sqrt{2}\eta \rightarrow \hbar g$  y  $mc^2 \rightarrow \hbar\delta$ . Por lo tanto, podemos establecer que el ODM en  $3 + 1$  dimensiones puede ser parcialmente mapeado al MJC, siendo la parte mapeable la de soluciones con degeneración infinita. El caso con degeneración finita no está perdido del todo. Es posible aún mapearlo por partes si uno se restringe a bloques de  $2 \times 2$ . En este caso uno necesitaría hacer la identificación  $\sqrt{2n + 2j + 2\eta}$  con  $\hbar g$ .

Finalmente en la tabla 1.3 se presenta un resumen de las correspondencias entre constantes relevantes para el mapeo entre el ODM al MJC en  $1 + 1$ ,  $2 + 1$  y  $3 + 1$  dimensiones.

Degeneración infinita		Degeneración finita	
Espinor	$ N\rangle$	Espinor	
$ -\rangle$	$\vdots$	$\vdots$	
$ +\rangle$	$ 2n_R + j + \frac{5}{2}\rangle$	$ -\rangle$	
$ -\rangle$	$ 2n_R + j + \frac{3}{2}\rangle$	$ +\rangle$	
$ +\rangle$	$ 2n_R + j + \frac{1}{2}\rangle$	$ -\rangle$	
$ -\rangle$	$ 2n_R + j - \frac{1}{2}\rangle$	$ +\rangle$	
$ +\rangle$	$ 2n_R + j - \frac{3}{2}\rangle$	$ -\rangle$	
$ -\rangle$	$ 2n_R + j - \frac{5}{2}\rangle$	$ +\rangle$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$ -\rangle$	$ j + \frac{3}{2}\rangle$	$ +\rangle$	
$ +\rangle$	$ j + \frac{1}{2}\rangle$	$ -\rangle$	
$ -\rangle$	$ j - \frac{1}{2}\rangle$	$ +\rangle$	

Cuadro 1.2: Forma de parear los estados  $|N\rangle$  con los espinores y la degeneración del correspondiente estado del ODM.

DMO	$\delta$	$g$	Base	Constante $I_{ODM}$
1 + 1	$mc^2$	$\eta = \sqrt{2\hbar\omega mc^2}$	$ -\rangle n_x\rangle,$ $ +\rangle n_x - 1\rangle$	$a^\dagger a + \frac{1}{2}\sigma_z$
2 + 1	$mc^2$	$\sqrt{2}\eta$	$ -\rangle n_d\rangle,$ $ +\rangle n_d - 1\rangle$	$a_d^\dagger a_d + \frac{1}{2}\sigma_z$
3 + 1	$mc^2$	Degeneración infinita: $\sqrt{2}\eta$  Degeneración finita (sólo por bloques): $\sqrt{2}\eta\sqrt{n_R + j + 1}$	$ -\rangle N\rangle,$ $ +\rangle N - 1\rangle$	$\mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}\sigma_z$

Cuadro 1.3: Resumen de las correspondencias entre constantes relevantes para el mapeo del ODM sobre MJC.



## CAPÍTULO 2

---

### Un oscilador Dirac-Moshinsky acoplado

---

#### 2.1. Acoplamiento a un campo externo

En esta sección presentamos una extensión al ODM con una interacción con un campo de isoespín modelado como un potencial que se suma al Hamiltoniano total de la siguiente manera

$$\tilde{H} = H + \Phi. \quad (2.1)$$

De las múltiples opciones que preservan la integrabilidad del sistema, en este trabajo usamos probablemente la más simple, un acoplamiento lineal, *i.e.*

$$\Phi = \chi(\sigma'_- \mathcal{A}^\dagger + \sigma'_+ \mathcal{A}) + \gamma \sigma'_z, \quad (2.2)$$

en donde  $\mathcal{A}^\dagger$  y  $\mathcal{A}$  representa el operador de creación y aniquilación de cualquier caso dimensional presentado en la sección 1.2 y se muestran en la tabla 2.1. Hemos denotado con primas los operadores relacionados con el isoespín del campo para distinguirlos de los correspondientes al espín-\*. El Hamiltoniano completo queda entonces representado por

$$\tilde{H} = \eta(\sigma_- \mathcal{A}^\dagger + \sigma_+ \mathcal{A}) + \chi(\sigma'_- \mathcal{A}^\dagger + \sigma'_+ \mathcal{A}) + mc^2 \sigma_z + \gamma \sigma'_z. \quad (2.3)$$

En este trabajo no nos centraremos en la naturaleza de este potencial  $\Phi$  ni en su invariante de Lorentz, para esto referimos a [34] en donde ha sido presentado de manera detallada.

De aquí procederemos tomando  $\mathcal{A}$  como cualquier operador escalera que satisfaga

$$\mathcal{A}|\mathcal{N}\rangle = \mathcal{F}(\mathcal{N})|\mathcal{N} - 1\rangle \quad (2.4)$$

en seguida notamos que tomando en cuenta el isoespín del campo uno tiene la integral de movimiento<sup>1</sup>

$$\mathcal{I} = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} + \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma'_z). \quad (2.5)$$

Usando la base donde  $\mathcal{I}$  es diagonal, es decir

$$|-\rangle|-\rangle|\mathcal{N} + 1\rangle \quad |+\rangle|-\rangle|\mathcal{N}\rangle \quad |-\rangle|+\rangle|\mathcal{N}\rangle \quad |+\rangle|+\rangle|\mathcal{N} - 1\rangle, \quad (2.6)$$

el Hamiltoniano puede representarse de manera diagonal por bloques, con cada bloque formado por matrices de  $4 \times 4$

$$\tilde{H}(\mathcal{N}) = \begin{pmatrix} -mc^2 - \gamma & \chi \mathcal{F}(\mathcal{N} + 1) & \eta \mathcal{F}(\mathcal{N} + 1) & 0 \\ \chi \mathcal{F}(\mathcal{N} + 1) & \gamma - mc^2 & 0 & \eta \mathcal{F}(\mathcal{N}) \\ \eta \mathcal{F}(\mathcal{N} + 1) & 0 & mc^2 - \gamma & \chi \mathcal{F}(\mathcal{N}) \\ 0 & \eta \mathcal{F}(\mathcal{N}) & \chi \mathcal{F}(\mathcal{N}) & mc^2 + \gamma \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

y en donde  $\mathcal{F}(\mathcal{N})$  depende de la dimensión elegida.  $\eta$  quedó definida en (1.14) y  $\chi$  representa la intensidad de acoplamiento con el campo.

El análisis de la sección 1.2 nos ha permitido construir una generalización del ODM en cualquiera de las tres dimensiones consideradas. La Tabla 2.1 muestra para cada dimensión, la correspondencia del operador de escalera  $\mathcal{A}$ , la integral de movimiento  $\mathcal{I}$ , el número cuántico  $\mathcal{N}$  y la función  $\mathcal{F}(\mathcal{N})$  introducida en la ecuación (2.7).

Cuadro 2.1:

ODM	$\mathcal{A}^\dagger, \mathcal{A}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{F}(\mathcal{N})$	$ \mathcal{N}\rangle$
1 + 1	$a^\dagger, a$	$a^\dagger a + \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma'_z)$	$\sqrt{n}$	$ n\rangle$
2 + 1	$\sqrt{2}a_d^\dagger, \sqrt{2}a_d$	$a_d^\dagger a_d + \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma'_z)$	$\sqrt{2}\sqrt{n_d}$	$ n_d\rangle$
3 + 1	$\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}^\dagger, \mathbf{s} \cdot \mathbf{a}$	$\mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma'_z)$	$\sqrt{\mu(N)}$	$ N\rangle$

El sistema es nuevamente integrable y uno puede encontrar las energías y vectores propios diagonalizando cada bloque  $\tilde{H}(\mathcal{N})$ . Las soluciones serán

<sup>1</sup>se define en la tabla 2.1 para cada caso dimensional.

analizadas en el capítulo siguiente cuando consideremos el sistema de óptica cuántica que está representado por un Hamiltoniano del mismo tipo. Ahí daremos la solución de manera más detallada. Aquí mostraremos brevemente como aplicación la evolución del entrelazamiento del ODM con el campo externo.

## 2.2. Entrelazamiento con el campo

En esta sección analizamos con un simple ejemplo la dinámica de una partícula de Dirac bajo la influencia del campo de isoespín. Para este propósito y por simplicidad usaremos el estado producto inicial

$$|\Psi_0\rangle = |\varphi_-, \mathcal{N} = 0\rangle (\cos \theta |+\rangle + \sin \theta |-\rangle), \quad (2.8)$$

el cual está formado por una posible superposición de los estados del campo y por el estado base del ODM, el cual se puede tomar de la ecuación (1.38) para el caso de 3 + 1 dimensiones. En los casos de 2 + 1 y 1 + 1 dimensiones, el estado base corresponde al mismo del MJC en la ecuación (A.12).

Con la elección  $\mathcal{N} = 0$  y en primera instancia con  $\theta = 0$  se puede notar de la ecuación (2.6), que la base se reduce a tres estados, ya que  $\mathcal{N}$  no puede ser negativa. Por lo tanto, la evolución quedará confinada en un subespacio tridimensional (matrices de  $3 \times 3$ )<sup>2</sup> del espacio de Hilbert y el vector de estado a todo momento se puede escribir ahora como

$$|\Psi(t)\rangle = B_1(t)|- \rangle |-\rangle |1\rangle + B_2(t)|+ \rangle |-\rangle |0\rangle + B_3(t)|- \rangle |+\rangle |0\rangle. \quad (2.9)$$

Los coeficientes de  $B(t)$  se pueden obtener una vez que se conoce la transformación que diagonaliza los bloques del Hamiltoniano (2.7). Esto lo explicaremos a detalle en el siguiente capítulo.

Si uno simplifica el problema aún más, usando  $\eta = \chi = 1$  y  $mc^2 = \gamma$ , se pueden encontrar soluciones explícitas sencillas para estos coeficientes,

$$\begin{aligned} B_1(t) &= f_0(t), \\ B_l(t) &= \frac{1}{2} \left( 1 - f_0(t) + (-1)^l g(t) \right), \quad l = 2, 3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>Para  $\mathcal{N} > 0$  uno tendría un espacio de dimensión 4.

con las siguientes definiciones

$$f_0(t) = \frac{\sin\left(t\sqrt{2+\gamma^2}\right)}{2+\gamma^2},$$

$$g(t) = \frac{\gamma + \sqrt{2+\gamma^2}}{2\sqrt{2+\gamma^2}} \cos\left(t\left(\sqrt{2+\gamma^2} - \gamma\right)\right) + \frac{\cos\left(t\left(\sqrt{2+\gamma^2} + \gamma\right)\right)}{\sqrt{2+\gamma^2}(\gamma + \sqrt{2+\gamma^2})}. \quad (2.11)$$

En lugar de analizar el vector de estado, nos enfocaremos a estudiar el entrelazamiento entre el campo y el oscilador Dirac-Moshinsky. En el siguiente capítulo hablaremos más de algunas medidas de entrelazamiento, por el momento baste con mencionar que utilizaremos la pureza de la matriz de densidad reducida al campo para medir esta propiedad: entre más (menos) puro sea el estado del campo, menos (más) entrelazamiento tendrá con el ODM. En este caso se encuentra que

$$\rho'(t) = \text{Tr}_{\text{ODM}} \{ |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| \} = \begin{pmatrix} |B_1(t)|^2 + |B_3(t)|^2 & 0 \\ 0 & |B_2(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

En la operación anterior, la traza fue tomada sobre los grados de libertad del ODM. Con esto, el entrelazamiento con el campo se puede medir ahora con la pureza con la siguiente operación

$$P' = \text{Tr}\{\rho'^2\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (g(t) - f_0(t))^2. \quad (2.13)$$

La figura 2.1 muestra la pureza como función del tiempo  $t$  y  $\gamma$ , la intensidad del campo. Recordamos que en este caso fijamos la energía en reposo al valor de esta intensidad, es decir  $mc^2 = \gamma$ . La pureza toma un valor inicial  $P' = 1$  como era de esperarse, ya que se inicia con un estado puro. El entrelazamiento máximo ocurre cuando la pureza alcanza su valor mínimo en  $P' = 1/2$ . Se observa oscilación entre estados totalmente puros y entrelazados y se aprecia un aumento en el periodo de oscilación con  $\gamma$  creciente.

Normalmente uno esperaría un aumento de la frecuencia como se observa en la figura 2.2, el cual contempla un caso con asimetrías. Ahí calculamos numéricamente con parámetros para la energía en reposo  $mc^2 = 3.2$  y con  $\eta = 1$ , mientras que para el acoplamiento con el campo  $\chi = 1.2$ . Consideramos dos casos, uno en el cual el campo se encuentra en el estado excitado,

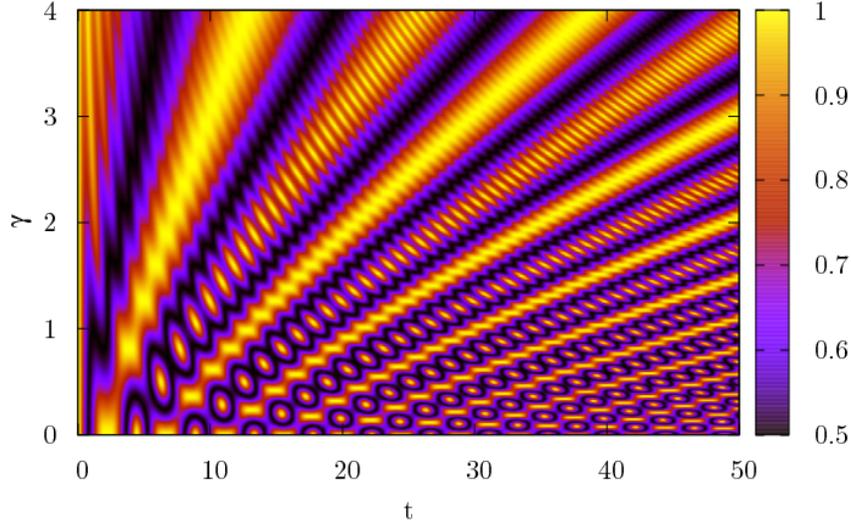


Figura 2.1: Pureza del campo como función del tiempo y la masa en reposo  $mc^2 = \gamma$ , para un estado inicial formado por el estado base del ODM  $E = 0$  y el estado excitado del campo de isoespín  $|+\rangle$ .  $\chi = \eta$ .

en la parte inferior y en la parte superior con  $\theta = \pi/4$  en la ecuación (2.8), o sea una superposición simétrica de los dos estados del campo. En este último caso, en el vector de estado inicial se encuentran términos con diferentes valores de la integral de movimiento. Tendremos  $\mathcal{S} = 0$  que forma un bloque de  $3 \times 3$  e  $\mathcal{S} = -1$  en donde sólo se encuentra el estado  $|0\rangle|-\rangle$ . La figura muestra la Pureza como función del tiempo y de la intensidad del campo  $\gamma$ . En ellas podemos notar como la frecuencia aumenta con la intensidad del campo estático, hasta el punto de la resonancia  $mc^2 = \gamma$ , en donde, como mostramos en la figura 2.1 la frecuencia disminuye. Es de resaltar también, la diferencia entre estados iniciales, pues para  $\theta = \pi/4$  la Pureza oscila con amplitud menor, es decir en este caso el entrelazamiento con el ODM es menor.

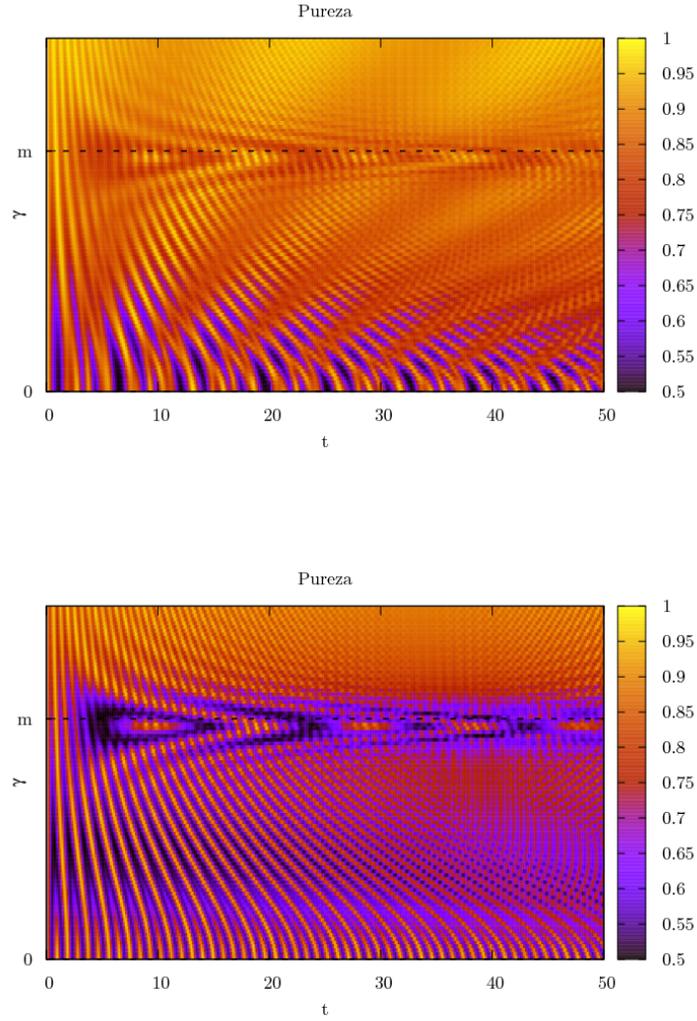


Figura 2.2: Pureza del ODM como función del tiempo  $T$  y el campo estático  $\gamma$ . Los parámetros son  $mc^2 = 3.2$ ,  $\eta = 1.2$ . La figura arriba corresponde a  $\theta = \pi/4$  y abajo a  $\theta = 0$ . Tomamos  $n = 0$  para el estado de oscilador. La estructura  $\gamma \sim m$  se encuentra presente en ambas figuras y persiste a todo tiempo. Este es el análogo a la figura 2.1. En esta región se observa una disminución en la pureza. Esto es una indicación del entrelazamiento máximo entre campo externo y estados de energía positiva y negativa de la partícula confinada. La situación corresponde a un régimen en el cual la intensidad del campo es comparable con la energía en reposo.

## 2.3. Conexión con óptica cuántica

Como vimos en el primer capítulo, hay una estrecha relación entre el oscilador de Dirac-Moshinsky con óptica cuántica, en particular con el modelo de Jaynes-Cummings. El modelo acoplado a un campo con isoespín también está íntimamente relacionado. El Hamiltoniano de la ecuación (2.3) puede ser utilizado en el contexto de óptica cuántica para describir un sistema compuesto por dos átomos dentro de una cavidad, si uno identifica  $\mathcal{A}^\dagger$  y  $\mathcal{A}$  con los operadores de creación y aniquilación  $a^\dagger$  y  $a$  de un modo de la cavidad y el espín- $z$  y el isoespín, cada uno, con un átomo diferente. Además, uno tiene que considerar a  $\eta$  y  $\chi$  como los acoplamientos de cada átomo con la cavidad y  $mc^2$  y  $\gamma$  con las desintonías de cada transición atómica con el modo de la cavidad.

Esto significa que el modelo extendido puede ser también realizado experimentalmente en cavidades ópticas. Los casos de dimensión  $1 + 1$  y  $2 + 1$  pueden ser mapeados de manera exacta, mientras que el caso en  $3 + 1$  puede ser únicamente reproducido para el caso que se consideró en la subsección 2.2. Esto se debe a que en  $3 + 1$ , el acoplamiento con el campo mezcla la dinámica de las partes finita e infinitamente degeneradas, lo cual a su vez ocasiona que la  $\mathcal{F}(N)$  de los bloques (2.7) del Hamiltoniano  $\tilde{H}$  dependan de  $\mu(N)$  e incluyan términos con  $2n_R + 2j + 2$ . Sin embargo, si escogemos  $N = 0$ , la ecuación (2.7) se reduce a una matriz de  $3 \times 3$  y únicamente el valor  $\mu(0) = 2n_R$  entra en juego. Entonces el caso estudiado en la subsección 2.2 puede ser también mapeado en las 3 dimensiones a un sistema de óptica cuántica.

En el contexto de información cuántica, este es quizás un de los modelos más simples en los cuales uno puede estudiar dos aspectos importantes: entrelazamiento y decoherencia. El primero como recurso para implementar protocolos de información o cómputo cuántico, mientras que el segundo resulta ser un obstáculo para dicha implementación. Dedicamos el resto de esta tesis a este estudio.



## CAPÍTULO 3

---

### Dos átomos dentro de una cavidad

---

Hemos visto que el sistema relativista estudiado en el capítulo 2 puede ser representado por un sistema de óptica cuántica: dos átomos acoplados al modo de una cavidad electromagnética. Este tipo de sistemas han despertado gran interés en la comunidad [15, 16, 17], debido a su factible realización experimental [13, 14]. Además, este sistema resulta ideal por su simplicidad para estudiar el entrelazamiento como fuente de decoherencia y como recurso [27], si se considera a la cavidad como el entorno de un sistema central formado por los dos átomos. Es por esto que a partir de este capítulo cambiamos a esta perspectiva de óptica cuántica y encontramos las soluciones detalladas del problema. Dedicamos la última parte de este capítulo para explicar las medidas de entrelazamiento relevantes para nuestro sistema.

### 3.1. El Hamiltoniano

El modelo que utilizaremos en los siguientes capítulos describe a 2 átomos de dos niveles con interacción y acoplados a un modo de una cavidad electromagnética. El Hamiltoniano que describe tal modelo puede dividirse de la siguiente manera

$$H_{\text{tot}} = H_{\text{cav}} + H_{\text{at}} + H_{\text{cav-at}} + H_{\text{at-at}}. \quad (3.1)$$

Los dos primeros términos corresponden a la energía de los sistemas desacoplados, la energía del modo de la cavidad y la energía de los átomos, es decir

$$H_{\text{cav}} = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad H_{\text{at}} = \hbar\omega_1 \sigma_z + \hbar\omega_2 \sigma'_z, \quad (3.2)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia del modo de la cavidad y  $\hbar$  la constante de Planck sobre  $2\pi$ , cada  $\hbar\omega_j$  es la diferencia de energías entre los dos niveles del  $j$ -ésimo átomo. Usamos definiciones estándar de los operadores de creación y aniquilación de un oscilador ( $a, a^\dagger$ ) en donde si  $|n\rangle$  es un estado de  $n$  fotones en la cavidad, se cumple

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (3.3)$$

En cuanto a los operadores atómicos los hemos distinguido poniendo una prima a los que corresponden al “segundo” átomo. Y utilizamos las matrices de Pauli que se muestran en la ecuación (1.5).

El tercer término de la ecuación (3.1) corresponde al acoplamiento de los átomos con la cavidad y puede escribirse como:

$$H_{\text{at-cav}} = \hbar g_1 \left( \sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger \right) + \hbar g_2 \left( \sigma'_+ a + \sigma'_- a^\dagger \right). \quad (3.4)$$

Cada uno de estos términos corresponde a una interacción de tipo Jaynes-Cummings, la cual se describe en el apéndice A y cada  $g_j$  representa la intensidad del acoplamiento del  $j$ -ésimo átomo con la cavidad. Utilizamos además los operadores atómicos de ascenso y descenso  $\sigma_\pm|\mp\rangle = |\pm\rangle$ , introducidos en la ecuación (1.6), para los estados base  $|-\rangle$  y excitado  $|+\rangle$  de un átomo de dos niveles.

Finalmente, el cuarto término de la ecuación (3.1) describe la interacción<sup>1</sup> de los dos átomos y en particular la consideraremos del siguiente tipo

$$H_{\text{at-at}} = \hbar J \sigma_z \sigma'_z + 2\hbar\kappa \left( \sigma_- \sigma'_+ + \sigma_+ \sigma'_- \right), \quad (3.5)$$

en donde hemos distinguido entre la interacción Ising con intensidad  $J$  y la interacción dipolo-dipolo con intensidad  $2\kappa$ . Una interacción de Heisenberg isotrópica, es decir el caso  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ , se obtiene en el caso particular cuando  $J = 2\kappa$ .

Para simplificar un poco el tratamiento y disminuir en uno el número de constantes del problema, cambiaremos a un marco de interacción con el Hamiltoniano de referencia

$$H_0 = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left( \sigma_z + \sigma'_z \right), \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>En esta tesis y para evitar confusión, distinguiremos entre “interacción” ente los átomos y “acoplamiento” con la cavidad.

de tal suerte que aplicando la transformación unitaria  $e^{-iH_0t/\hbar}$  como se explica con más detalle en el apéndice A, y tomando unidades de  $\hbar = 1$ , podemos ahora trabajar con el Hamiltoniano

$$H = \delta_1 \sigma_z + \delta_2 \sigma'_z + g_1 (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) + g_2 (\sigma'_+ a + \sigma'_- a^\dagger) + 2\kappa (\sigma_- \sigma'_+ + \sigma_+ \sigma'_-) + J \sigma_z \sigma'_z, \quad (3.7)$$

el cual describe la misma dinámica que  $H_{\text{tot}}$ , un sistema compuesto por dos átomos de dos niveles interactuando con un modo del campo electromagnético. Aquí cada  $\delta_j = \omega - \omega_j$  representa la desintonía de la frecuencia de transición de cada átomo con respecto a la frecuencia del modo de la cavidad.

El Hamiltoniano de la ecuación anterior sin interacción entre átomos es equivalente al de la ecuación (2.3) estudiado en el capítulo anterior para el sistema relativista. En este capítulo incluimos la interacción entre los átomos, ya que cobra sentido físico en este contexto y no se pierde la solubilidad. Una diferencia que vale la pena comentar, es que para llegar esta descripción en óptica cuántica se usa la aproximación de onda rotante, vista en el apéndice A, mientras que la descripción en el sistema relativista no hace uso de ella.

## 3.2. Diagonalización y evolución temporal

Para estudiar la dinámica del sistema descrito por el Hamiltoniano (3.7), es primero necesario resolver la ecuación de Schrödinger estacionaria. Para tal fin, uno nota que al igual que en el caso del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, el número de excitaciones en el sistema se conserva, es decir el operador

$$I = a^\dagger a + \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma'_z) \quad (3.8)$$

conmuta con el Hamiltoniano ( $[H, I] = 0$ ) y por lo tanto es una constante de movimiento y en general ésta es la única. Cabe destacar que la interacción entre los átomos que elegimos también conserva este número de excitaciones, sin embargo, esto no es cierto si uno considerara una interacción de Heisenberg anisotrópica, del tipo

$$c_x \sigma_x \sigma'_x + c_y \sigma_y \sigma'_y + c_z \sigma_z \sigma'_z, \quad c_x \neq c_y.$$

Usando interacciones de Ising y dipolo-dipolo, lo cual corresponde a  $c_x = c_y$ , como elegimos en el Hamiltoniano (3.7) el número de excitaciones siem-

pre se conserva para cualquier elección de constantes de interacción, desintonías y acoplamientos. Por esta razón, usamos la base en la que  $I$  es diagonal:

$$\begin{aligned} |\phi_1^{(n)}\rangle &= |--\rangle|n+1\rangle & |\phi_2^{(n)}\rangle &= |-\rangle|n\rangle \\ |\phi_3^{(n)}\rangle &= |+-\rangle|n\rangle & |\phi_4^{(n)}\rangle &= |++\rangle|n-1\rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $|n\rangle$  describe un estado de  $n$  fotones en la cavidad, mientras que  $|-\rangle$  y  $|+\rangle$  describen el estado base y excitado de un átomo de dos niveles. Hemos utilizado la convención de escribir los kets del primer átomo a la izquierda y ha de entenderse que, por ejemplo,  $|++\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$ . Por otro lado, es fácil corroborar que para cualquier  $n$  los estados de la base satisfacen la siguiente relación:

$$I|\phi_j^{(n)}\rangle = n|\phi_j^{(n)}\rangle.$$

De esta manera, representado en la base de  $I$ , el Hamiltoniano  $H$  puede ser expresado como una matriz diagonal por bloques

$$H = \begin{pmatrix} H^{(0)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & H^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & H^{(2)} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix},$$

en donde los elementos de la diagonal  $H^{(n)}$  representan matrices de  $4 \times 4$  con elementos  $H_{jk}^{(n)} \equiv \langle \phi_j^{(n)} | H | \phi_k^{(n)} \rangle$ . Explícitamente, uno obtiene

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} J - \delta_1 - \delta_2 & g_2 \sqrt{n+1} & g_1 \sqrt{n+1} & 0 \\ g_2 \sqrt{n+1} & \delta_2 - \delta_1 - J & 2\kappa & g_1 \sqrt{n} \\ g_1 \sqrt{n+1} & 2\kappa & \delta_1 - \delta_2 - J & g_2 \sqrt{n} \\ 0 & g_1 \sqrt{n} & g_2 \sqrt{n} & J + \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Para  $n = 0$ , la base se reduce a los tres elementos  $|--\rangle|1\rangle$ ,  $|-\rangle|0\rangle$  y  $|+-\rangle|0\rangle$  y para  $n = -1$  queda representada sólo por el ket  $|--\rangle|0\rangle$ , el cual es un estado estacionario que permanece desacoplado de todos los demás y representa a los dos átomos en el estado base y ningún fotón dentro de la cavidad.

Ahora el problema de eigenvalores se reduce a diagonalizar cada bloque de  $4 \times 4$  del Hamiltoniano encontrando la transformación apropiada  $V^{(n)T} H^{(n)} V^{(n)}$ , de donde se pueden obtener los eigenvectores:

$$|\psi_j^{(n)}\rangle = \sum_{k=1}^4 V_{k,j}^{(n)} |\phi_k^{(n)}\rangle, \quad (3.11)$$

los cuales satisfacen la ecuación  $H|\psi_j^{(n)}\rangle = E_j^{(n)}|\psi_j^{(n)}\rangle$ . Resolviendo la ecuación cuártica deprimida del polinomio característico se pueden encontrar soluciones explícitas para los eigenvalores  $E_i^{(n)}$  y eigenvectores  $V_{j,k}^{(n)}$  y éstos permiten dar la evolución de un estado arbitrario, formado por una superposición de los estados  $|\psi_j^{(n)}\rangle$ , en forma cerrada. En el apéndice B escribimos de forma explícita la solución general para este problema de eigenvalores.

Una vez que hemos diagonalizado el Hamiltoniano (3.7), podemos calcular de manera explícita la evolución temporal de cualquier condición inicial que propongamos. Dado que nuestro objetivo es calcular el entrelazamiento entre los dos átomos y a su vez el de ellos dos con la cavidad, nos resulta conveniente considerar los grados de libertad de la cavidad como un entorno. Para este propósito, escogemos estados iniciales producto con los estados de la cavidad, de la forma

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{j=1}^4 A_j |\phi_j\rangle \otimes \sum_n D^{(n)} |n\rangle, \quad (3.12)$$

donde hemos usado la siguiente base atómica

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= |--\rangle, & |\phi_2\rangle &= |-\rangle, \\ |\phi_3\rangle &= |+\rangle, & |\phi_4\rangle &= |++\rangle. \end{aligned} \quad (3.13)$$

y, en principio, considerando  $D^{(n)}$  como cualquier distribución en el número de fotones  $n$ , restringida a la condición  $\sum_n |D^{(n)}|^2 = 1$ . Lo anterior, junto con los coeficientes  $A_j$  definen completamente el estado inicial. El vector de estado a un tiempo arbitrario en la evolución bajo el Hamiltoniano (3.7), puede escribirse como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \sum_{l=1}^4 B_l^{(n)}(t) |\phi_l^{(n)}\rangle, \quad (3.14)$$

con los coeficientes

$$B_l^{(n)}(t) = \sum_{j,k=1}^4 e^{-iE_k^{(n)}t} D^{(n-h(j))} A_j \left( V_{j,k}^{(n)} \right)^* V_{l,k}^{(n)}, \quad (3.15)$$

donde utilizamos la siguiente función auxiliar

$$h(j) = \begin{cases} -1 & , \quad j = 1 \\ 0 & , \quad j = 2, 3 \\ 1 & , \quad j = 4 \end{cases} .$$

y  $V^{(n)}$  es la transformación que diagonaliza cada bloque del Hamiltoniano de la ecuación (3.10) y se presenta en el apéndice B.

Para una mejor legibilidad, en lo que sigue, omitiremos escribir la dependencia temporal en estos coeficientes, de tal modo que debe entenderse en lo que sigue que  $B_l^{(n)} = B_l^{(n)}(t)$ .

Una vez que hemos calculado la evolución temporal del sistema a través de su vector de estado  $|\Psi(t)\rangle$ , podemos preguntarnos por la evolución de otras cantidades relevantes, como el entrelazamiento entre las diferentes partes que lo componen. En la siguiente sección explicamos qué cantidades son relevantes para ello y como calcularlas.

### 3.3. Entrelazamiento

El entrelazamiento es una propiedad de los sistemas cuánticos que los correlaciona indistintamente de su posición espacial o temporal. Un estado cuántico puro formado por dos partes se encuentra entrelazado si no puede ser escrito como un producto de estados de los dos subsistemas que lo componen, es decir

$$|\text{Entrelazado}\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle. \quad (3.16)$$

El entrelazamiento de dos sistemas se puede cuantificar, es decir es posible distinguir entre estados más y menos entrelazados. En este trabajo estudiamos un sistema que consta de tres partes: dos átomos y una cavidad. Entonces podemos distinguir entre seis posibles formas de entrelazamiento:

1. Dos átomos con la cavidad.
2. La cavidad y un átomo con el otro átomo (dos combinaciones).
3. Un átomo con el otro átomo.
4. La cavidad con otro átomo (dos combinaciones).

En lo que resta de la tesis, nos centraremos en el estudio del entrelazamiento del punto 1 y 3, sin embargo en la sección 2.2 medimos un entrelazamiento que es equivalente al del punto 2, recordando que la cavidad y un átomo se identifican con los grados de libertad del ODM y los del otro átomo con los del campo. En seguida explicaremos como calcular cada forma de entrelazamiento en el sistema, excepto el punto 4 que no consideramos en esta tesis.

## Entrelazamiento de dos átomos con la cavidad

La información sobre el entrelazamiento entre los dos átomos y la cavidad nos la proporciona la matriz de densidad reducida a uno de los subsistemas. Para calcularla, partimos de que conocemos el vector de estado  $|\Psi\rangle = |\Psi(t)\rangle$  del sistema total, el cual ha evolucionado unitariamente en el tiempo y es un estado es puro. Por tanto podemos calcular su matriz de densidad usando el producto exterior de la siguiente manera

$$\varrho = |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

Ahora podemos proceder a calcular la matriz de densidad reducida a uno de los subsistemas, trazando sobre los grados de libertad del otro. Cualquier elección, es decir la matriz reducida a la cavidad o a los átomos nos daría la misma información, en cuanto a entrelazamiento entre ellos se refiere. En nuestro caso tomaremos traza parcial sobre los grados de libertad de la cavidad de la siguiente manera

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\varrho|n\rangle. \quad (3.17)$$

De las ecuaciones (3.14) y (3.15), se puede mostrar que las entradas de esta matriz están dadas por

$$\rho_{jk} = \sum_n B_j^{(n+h(j))} \left( B_k^{(n+h(k))} \right)^*. \quad (3.18)$$

Así, hemos obtenido la matriz de densidad reducida del sistema compuesto por los dos átomos de dos niveles. Esta matriz es de  $4 \times 4$  y contiene toda la información que necesitamos sobre el entrelazamiento con la cavidad. Para el máximo entrelazamiento entre los dos átomos con la cavidad, el resultado de la ecuación (3.18) será un estado completamente mixto, es decir el estado  $\frac{1}{4}\mathbb{I}_4$ , donde  $\mathbb{I}_4$  es la matriz identidad de  $4 \times 4$ . Por otro lado, si los dos átomos no están entrelazados con la cavidad, la matriz de densidad reducida describirá a un sistema puro. Entonces para medir el entrelazamiento necesitamos una cantidad que nos cuantifique que tan pura es la matriz de densidad reducida a los átomos o que tan lejos está del estado completamente mixto. Por la simplicidad operativa con la que se puede calcular, elegimos en este trabajo la pureza, que como su nombre lo indica mide que tan puro es el estado y se define como la traza del cuadrado de  $\rho$ , *i.e.*

$$P(\rho) = \text{Tr}\{\rho^2\}. \quad (3.19)$$

De donde notamos que para una matriz de densidad reducida  $\rho$  pura, la pureza es  $P = 1$ . En esta situación los subsistemas no se encontrarían correlacionados, por lo tanto no habría entrelazamiento entre ellos y el estado  $\rho$  sería separable. El entrelazamiento sería máximo si la matriz de densidad reducida fuese una mezcla total, es decir  $\mathbb{I}_4/4$ . En este caso los subsistemas se encontrarían totalmente correlacionados y la pureza tendría su valor mínimo  $P = 1/4$ . Cabe mencionar que para una matriz de densidad de dimensión  $d$ , el mínimo valor de la pureza sería  $1/d$ .

Como ya mencionamos, utilizaremos la pureza de la matriz reducida por su simpleza, sin embargo no es la única medida de entrelazamiento. Otra medida comúnmente utilizada es la entropía de von Neumann y se define como

$$S(\rho) = -\text{Tr} \{ \rho \log_d \rho \}. \quad (3.20)$$

Es la extensión a mecánica cuántica de la entropía de Shannon en teoría de la información y de la entropía termodinámica [27]. Se toma la base  $d$  (dimensión de la matriz) de la función logaritmo para garantizar que  $S(\rho)$  varíe entre 0 y 1. En este caso  $\rho$  es una matriz de  $4 \times 4$ , por lo que se ha de usar la base  $d = 4$ . El cálculo de esta medida es más complicado por la presencia de la función logaritmo, con lo cual es necesario diagonalizar la matriz de densidad para calcularla a partir de sus valores propios  $r_i$  de la siguiente manera

$$S(\rho) = - \sum_i r_i \log r_i. \quad (3.21)$$

Esto añade la operación de diagonalización para su evaluación, mientras que para la pureza simplemente hace falta evaluar su cuadrado y sumar los términos de la diagonal.

Consideremos ahora la entropía lineal, la cual surge de reemplazar  $\log \rho$  por  $\rho - 1$  en la ecuación (3.20), con lo que se obtiene

$$S_L(\rho) = -\text{Tr} \{ \rho(\rho - 1) \} = 1 - P(\rho). \quad (3.22)$$

Aquí vemos la estrecha relación con la pureza definida en la ecuación (3.19). Para garantizar que  $S_L$  varíe entre 0 y 1 suele usarse la normalización  $d/(d - 1)$ , donde  $d$  es la dimensión de la matriz y en este caso  $d = 4$ .

### Entrelazamiento de la cavidad y átomo con otro átomo

Para calcular el entrelazamiento de un átomo con el resto del sistema, tenemos que calcular la matriz de densidad reducida a este átomo. Con la

matriz de densidad reducida a los dos átomos de la ecuación (3.17) estamos a “mitad del camino”, ahora sólo hace falta trazar sobre los grados de libertad de un átomo para obtener

$$\rho' = \langle +|\rho|+\rangle + \langle -|\rho|-\rangle. \quad (3.23)$$

A partir de ella podemos calcular la pureza

$$P' = \text{Tr}\{\rho'^2\}, \quad (3.24)$$

la cual toma valores entre 1, para un estado puro, y  $1/2$  para el estado completamente mixto  $\mathbb{I}_2/2$ . Este es el caso análogo a la sección 2.2 en donde evaluamos la matriz de densidad reducida al campo de isoespín y evaluamos su entrelazamiento con el ODM.

Alternativamente podríamos usar también la entropía de von Neumann de la ecuación (3.20) tomando  $d = 2$ , pues ahora  $\rho'$  es una matriz de  $2 \times 2$ .

### Entrelazamiento entre los átomos

En este caso, los grados de libertad de la cavidad no interesan más y nuestro punto de partida es la matriz de densidad reducida a los dos átomos, la cual describe un estado que típicamente no será puro, pero que se puede escribir como la suma estadística de estados puros, es decir

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (3.25)$$

donde cada  $p_i$  es el peso estadístico del estado  $|\psi_i\rangle$  de dos átomos en el ensemble que describe alguna matriz de densidad  $\rho$ . Ahora consideremos la matriz de densidad reducida a un sólo átomo  $\rho'_i$  a partir del estado puro de dos átomos<sup>2</sup>  $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ . Para ser específicos con la definición de entrelazamiento para estados mixtos, se introdujo el concepto de entropía de formación [37], el cual se define como

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{mín} \sum_i p_i S(\rho'_i), \quad (3.26)$$

lo cual representa el promedio de la entropía de von Neumann, ecuación (3.20), de la matriz de densidad de un sólo átomo  $\rho'_i$  evaluada a partir del

<sup>2</sup>  $\rho'_i$  se puede obtener con la operación de la ecuación (3.23), reemplazando  $\rho$  por  $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ .

estado puro de dos átomos  $|\psi_i\rangle$ , y minimizado sobre todas las posibles descomposiciones de la matriz de densidad  $\rho$ . Y es que la descomposición en estados puros no es única; la misma matriz de densidad se puede obtener a partir de diferentes estados puros en la ecuación (3.25). Por ejemplo, para el estado

$$\rho_{ej} = \frac{1}{2} (|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|) = \frac{1}{2} (|+-\rangle\langle+-| + |-+\rangle\langle-+|) \quad (3.27)$$

mostramos dos descomposiciones en estados puros, una de ellas a partir de los estados de Bell

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle \pm |-+\rangle), \quad (3.28)$$

para los cuales se puede probar que están completamente entrelazados, mientras que la otra descomposición es a partir de estados producto y por ende no entrelazados, por lo tanto  $\mathcal{E}(\rho_{ej}) = 0$ .

Afortunadamente, dada una matriz  $\rho$  de dos qubits o dos átomos de dos niveles, no hace falta calcular todas sus descomposiciones en estados puros. En este caso, el entrelazamiento de formación puede ser calculado a partir de la concurrencia [38, 39], la cual se define como

$$C(\rho) = \text{Max} \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\} \quad (3.29)$$

donde  $\lambda_j$  son los eigenvalores de la matriz

$$\rho \sigma_y \sigma'_y \rho^* \sigma_y \sigma'_y,$$

en orden decreciente. La relación con el entrelazamiento de formación es la siguiente [38, 39]

$$\mathcal{E}(\rho) = h \left( \frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2} \right), \quad (3.30)$$

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x),$$

de donde se puede apreciar que  $\mathcal{E}(\rho)$  es monótonamente creciente con  $C(\rho)$  y ambas cantidades varían entre 0 y 1. Por lo tanto la concurrencia es también una buena medida del entrelazamiento. Aún cuando es más simple de calcular que la entropía de formación, esta medida es aún difícil de evaluar de forma analítica. Usualmente se recurre a cálculos numéricos para su evaluación. Sin embargo existen algunos procesos simples para los cuales su cálculo en forma cerrada es posible. Esta tesis hace una aportación en este sentido.

Experimentalmente la concurrencia puede ser calculada [40] determinando la matriz de densidad reducida, lo cual puede hacerse por un método conocido como tomografía cuántica [27] y que se usa comúnmente en experimentos con trampas de iones [41].

El siguiente capítulo lo centraremos al estudio de la concurrencia  $C$  de la ecuación (3.29) y la pureza  $P$  de la ecuación (3.19) y haremos énfasis en el plano  $CP$  que presentamos a continuación.

### 3.4. Plano CP

Debido a que estaremos estudiando el entrelazamiento entre los átomos y de éstos dos con la cavidad, nos enfocaremos en estudiar la dinámica conjunta en un plano concurrencia contra pureza. En esta sección ejemplificamos las ventajas de utilizar el plano  $CP$  con tres tipos de procesos, que se describen con detalle en [42]. Éstos son procesos que no se derivan de nuestro modelo.

El primero que consideraremos es un proceso de decoherencia, en donde los términos fuera de la diagonal (coherencias) tienden a cero. En particular, lo podemos ejemplificar con la siguiente matriz de densidad

$$\rho_D = \frac{1+q}{2} |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + \frac{1-q}{2} |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

y considerando que la variable  $q$  toma valores entre 1 y 0. Alternativamente, podríamos pensar en  $q$  parametrizada en el tiempo de la forma

$$q = e^{-t}, \quad t > 0, \quad (3.32)$$

con lo que se tendría al tiempo  $t = 0$  un estado completamente puro de los dos átomos y entrelazados entre ellos, en particular el estado de Bell  $|\Psi^+\rangle$  de la ecuación (3.28). Al transcurrir el tiempo los términos fuera de la diagonal de la matriz de densidad, tienden a cero en el límite  $t \rightarrow \infty$ . En este simple ejemplo es posible obtener soluciones cerradas para concurrencia y pureza, las cuales toman la forma

$$\begin{aligned} C_D &= q, \\ P_D &= \frac{1}{2} (1 + q^2), \end{aligned} \quad (3.33)$$

con lo que se puede encontrar la siguiente relación entre ellas

$$C_D = \sqrt{2P_D - 1}. \quad (3.34)$$

Esta curva se muestra en figura 3.1.

Ahora hacemos mención del proceso de depolarización, en el cual se pasa de una matriz de densidad arbitraria  $\rho$  al estado totalmente mixto  $\mathbb{I}_4/4$ . En este caso lo ejemplificamos con un estado inicial de Bell como el de la ecuación (3.28) y obtenemos los estados

$$\rho_W(t) = q|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + (1-q)\frac{I}{4}, \quad (3.35)$$

cuya componente entrelazada está dada por el estado de Bell  $|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|$  y se conocen como estados de Werner [42, 43]. Ahora la concurrencia y pureza se escriben como

$$\begin{aligned} C_W &= \frac{1}{2}(3q - 1), \\ P_W &= \frac{1}{4}(1 + 3q^2), \end{aligned} \quad (3.36)$$

mientras que la concurrencia en función de la pureza resulta ser

$$C_W = \frac{1}{2}\left(\sqrt{12P_W - 3} - 1\right), \quad (3.37)$$

cuya curva puede verse también en la figura 3.1. Las curvas  $C_W$  y  $C_D$  forman la frontera de las operaciones locales unilaterales que actúan sobre un estado de Bell. Las operaciones locales son aquellas que actúan por separado sobre cada átomo (qubit) y las unilaterales tienen la característica de dejar invariante a la identidad.

Finalmente consideramos los estados máximamente entrelazados [42, 44, 45], MEMS por sus siglas en inglés, los cuales para un valor fijo de la pureza  $P$  maximizan el entrelazamiento, *i.e.* la concurrencia. Éstos pueden ser representados de manera sencilla en la base  $\{|--\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle, |++\rangle\}$ , en donde son diagonales:

$$\rho_M = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} + \frac{q}{2}\right)|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + \left(\frac{1}{3} - \frac{q}{2}\right)|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{1}{3}|--\rangle\langle--|, & q \in \left[0, \frac{2}{3}\right], \\ q|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + (1-q)|--\rangle\langle--|, & q \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \end{cases} \quad (3.38)$$

de donde se aprecia que la componente entrelazada puede ser también expresada en términos de estados de Bell. Ahora se pueden calcular pureza y concurrencia como

$$C_M = q, \quad q \in [0, 1],$$

$$P_M = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{q^2}{2}, & q \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \\ q^2 + (1 - q)^2, & q \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}. \quad (3.39)$$

Con lo anterior se puede verificar que los MEMS, en el plano CP, siguen la siguiente curva

$$C_M = \begin{cases} \sqrt{2P_M - \frac{2}{3}} & \frac{1}{3} \leq P < \frac{5}{9} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2P_M - 1}\right) & \frac{5}{9} \leq P \leq 1 \end{cases}. \quad (3.40)$$

Esta curva forma una frontera para los estados físicamente admisibles y en la figura 3.1 se muestra en gris su complemento, que representa los estados físicamente inadmisibles.

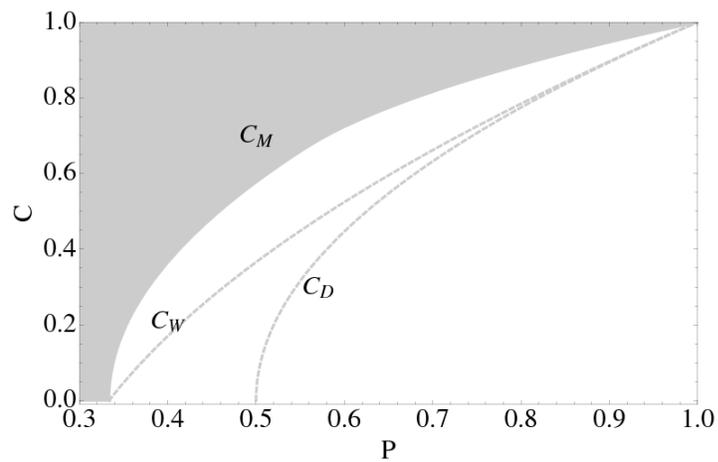


Figura 3.1: Plano  $CP$  en donde se muestran las curvas correspondientes a los procesos de decoherencia  $C_D$ , depolarización  $C_W$  representada por los estados de Werner y la zona gris de estados no físicos, cuya frontera la componen los estados máximamente entrelazados, MEMS por sus siglas en inglés.

## CAPÍTULO 4

---

### La cavidad en un estado de número

---

En este capítulo nos concentraremos en el cálculo explícito de la pureza y la concurrencia para el caso particular en donde la cavidad se encuentra preparada inicialmente en un estado de número [46]. Si se escoge el estado atómico apropiadamente, la dinámica queda confinada en un subespacio de cuatro dimensiones del espacio de Hilbert. Este es el caso más simple en el que se pueden encontrar soluciones analíticas, por lo que usamos este ejemplo para estudiar los procesos de decoherencia y entrelazamiento. Resalta el caso con cero fotones iniciales, pues es el más sencillo de realizar experimentalmente y además el de más simple tratamiento, ya que en ese caso el espacio de Hilbert se reduce a tres dimensiones. Sin embargo, cabe destacar que con la tecnología actual es factible la creación de otros estados de número en cavidades electromagnéticas [47, 48, 49].

En cuanto al estado inicial de los átomos, centraremos nuestro estudio a estados que preserven el número de excitaciones del sistema, es decir una superposición de los estados  $|+-\rangle$  y  $|-\rangle$ , de tal modo que el estado inicial del sistema completo se escriba como:

$$|\Psi_0\rangle = (\cos \alpha |+-\rangle + \sin \alpha |-\rangle) |n\rangle. \quad (4.1)$$

De la ecuación (3.18) del capítulo anterior se sigue que la matriz de densidad

reducida para este caso en particular, se puede escribir como

$$\rho = \begin{pmatrix} |B_1^{(n)}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |B_2^{(n)}|^2 & (B_3^{(n)})^* B_2^{(n)} & 0 \\ 0 & (B_2^{(n)})^* B_3^{(n)} & |B_3^{(n)}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |B_4^{(n)}|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Y uno puede mostrar ahora que la concurrencia la podemos expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} C(t) &= \max \left\{ 0, 2\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \right\} \\ &= \max \left\{ 0, 2|B_2^{(n)}||B_3^{(n)}| - 2|B_1^{(n)}||B_4^{(n)}| \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

mientras que la pureza resulta ser

$$\begin{aligned} P(t) &= \rho_{11}^2 + \rho_{44}^2 + (1 - \rho_{11} - \rho_{44})^2 \\ &= |B_1^{(n)}|^4 + |B_4^{(n)}|^4 + \left( 1 - |B_1^{(n)}|^2 - |B_4^{(n)}|^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por lo tanto, sólo es necesario conocer los coeficientes del vector de estado del sistema total para calcular las medidas de entrelazamiento. Tal vector de estado queda ahora confinado a un bloque de 4 dimensiones determinado por  $n$  y por lo tanto sólo hace falta conocer los cuatro coeficientes  $B_j^{(n)}$ , i.e.

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^4 B_j^{(n)} |\phi_j^{(n)}\rangle. \quad (4.5)$$

Cada  $B_j^{(n)}$  puede ser obtenido partir de la ecuación (3.15).

Algunas características interesantes pueden ser inferidas por inspección de (4.3) y (4.4). Cuando  $n = 0$ ,  $B_4^{(0)} = 0$ , por lo tanto la pureza alcanza un valor mínimo de  $1/2$ , mientras que para la concurrencia, una observación inmediata es la ausencia *entanglement sudden death* [50, 51]. Este término se usa para describir la ausencia súbita de entrelazamiento por un tiempo finito. En este caso, eso sucede cuando  $|B_2^{(n)}||B_3^{(n)}| - |B_1^{(n)}||B_4^{(n)}| < 0$ , lo cual no es posible cuando  $n = 0$  pues  $B_4^{(0)} = 0$ .

Aún cuando ahora las expresiones para la pureza y concurrencia son relativamente simples, éstas resultan ser largas para parámetros arbitrarios. Es por esto que ahora procederemos a estudiar casos separados con simplificaciones que nos permitan encontrar soluciones sencillas.

## 4.1. Átomos iguales, resonantes y con interacción

En esta sección nos concentramos en el caso particular de dos átomos de la misma especie y con frecuencia de transición en resonancia con la cavidad, es decir  $g_1 = g_2 = 1$  y  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ . Sin embargo consideramos ambas interacciones entre ellos. Por supuesto ahora las preguntas más obvias que buscamos responder son, como cambia la dinámica cambiando la intensidad de las interacciones y el número de excitaciones.

Sin más preámbulo, podemos escribir los coeficientes que determinan el vector de estado a todo tiempo (eq. (4.5)) como

$$\begin{aligned} B_1^{(n)} &= -i \frac{\sqrt{n+1}}{\omega_n} e^{-i\kappa t} \sin(\omega_n t) (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)), \\ B_{j=2,3}^{(n)} &= \frac{(-1)^j}{2} e^{i(J+2\kappa)t} (\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) + \\ &\quad \frac{1}{2} e^{-i\kappa t} \cos(\omega_n t) (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + \frac{(\kappa - J)B_1^{(n)}}{2\sqrt{n+1}}, \\ B_4^{(n)} &= \sqrt{\frac{n}{n+1}} B_1^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

en donde hemos definido la frecuencia

$$\omega_n = \sqrt{4n + 2 + (\kappa - J)^2}, \quad (4.7)$$

la cual está relacionada con los valores propios del Hamiltoniano (3.7), bajo las restricciones ya mencionadas (ver apéndice B).

Una vez calculado el vector de estado a tiempo  $t$  es posible encontrar soluciones explícitas en el tiempo para concurrencia y pureza, definiendo

$$\beta_n = \sqrt{\frac{4n^2 + 4n}{4n^2 + 4n + 1}}, \quad \gamma_n = \frac{6n^2 + 6n + 2}{4n^2 + 4n + 1}, \quad (4.8)$$

y las funciones dependientes del tiempo:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{2n+1}{\omega_n^2} (1 + \sin(2\alpha)) \sin^2(\omega_n t) \\ G(t) &= \frac{(\kappa - J) \cos((J + 3\kappa)t) \sin(\omega_n t)}{\omega_n} + \sin((J + 3\kappa)t) \cos(\omega_n t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

encontramos las siguientes soluciones para la pureza y la concurrencia como función del tiempo

$$\begin{aligned} C(t) &= \text{Max} \left\{ 0, \sqrt{(\sin(2\alpha) - F(t))^2 + \cos^2(2\alpha)G^2(t)}, -\beta_n F(t) \right\} \\ P(t) &= 1 - 2F(t) + \gamma_n F^2(t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Éstas son válidas también para diferentes valores de las constantes de interacción, del número de excitaciones  $n$  y de  $\alpha$ , que define el estado inicial en la ecuación (4.1).

Antes de considerar valores arbitrarios para las interacciones, vale la pena detenernos un poco para analizar a detalle el caso sin interacción, es decir  $J = \kappa = 0$ . En ese caso, notamos que la función dependiente del tiempo  $G(t)$ , de la ecuación (4.9), es igual a cero, por lo que la relación para la concurrencia y la pureza depende únicamente de la función  $F(t)$ . Con esto es fácil invertir  $F(t)$  y expresarla en términos de  $P(t)$  y sustituirla en la expresión para la concurrencia, lo cual nos devuelve una relación entre  $C$  y  $P$ , que escribimos a continuación

$$C_{\pm}^{(n)}(P; \alpha) = \text{Max} \left\{ 0, \left| \sin(2\alpha) - f_{\pm}^{(n)}(P) \right| - \beta_n f_{\pm}^{(n)}(P) \right\}, \quad (4.11)$$

con  $\gamma_n$  y  $\beta_n$  definidas en (4.8) y con

$$f_{\pm}^{(n)}(P) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \gamma_n(P-1)}}{\gamma_n}. \quad (4.12)$$

Con esto vemos que la concurrencia como función de la pureza queda determinada por dos curvas en el plano  $CP$ . Esto se debe a la dependencia cuadrática de  $P(t)$  en  $F(t)$ , por lo que al invertirla nos devuelve dos soluciones. Debido a esto, cuando analizamos esta relación, encontramos dos casos distintos:

1. Cuando  $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{n^2+n}{3n^2+3n+1}\right) < \alpha < \pi/4$ , la concurrencia en el plano  $CP$  queda determinada por las dos curvas:

$$\begin{aligned} C_+^{(n)}(P; \alpha) & , \quad 1 - \frac{1}{\gamma_n} \leq P \leq \frac{\gamma_n(1+\sin(2\alpha))^2}{4} - \sin(2\alpha) \\ C_-^{(n)}(P; \alpha) & , \quad 1 - \frac{1}{\gamma_n} \leq P \leq 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

2. De lo contrario, a la concurrencia la determina la curva

$$C_-^{(n)}(P; \alpha), \quad \frac{\gamma_n(1+\sin(2\alpha))^2}{4} - \sin(2\alpha) \leq P \leq 1. \quad (4.14)$$

En la figura 4.1 se muestran en rojo y azul este tipo de soluciones en el plano  $CP$  para  $n = 0$  y diferentes valores del valor  $\alpha$ . La curva roja muestra

el caso cuando el estado inicial es el estado de Bell simétrico ( $\alpha = \pi/4$  en la ecuación (4.1)). Esta solución tiene la forma explícita

$$C_{\pm}^{(0)}(P; \pi/4) = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \sqrt{2P - 1} \right) \quad (4.15)$$

y coincide precisamente con la curva de los MEMS en el intervalo  $5/9 \leq P \leq 1$ . La curva azul punteada representa una situación en la que el estado inicial está determinado por un estado puro, pero no completamente entrelazado con  $\alpha = \pi/20$ , mientras que en la figura 4.2 muestra en la curva azul rayada un estado inicial con  $\alpha = \pi/10$ . Las curvas negras de ambas figuras muestran una situación con interacción que será explicada un poco más adelante.

El comportamiento para toda  $n > 0$  es cualitativamente el mismo y cuando uno toma como estado inicial el estado de Bell simétrico ( $\alpha = \pi/4$ ), la curva converge en el límite  $n \rightarrow \infty$ , a

$$C_{-}^{(\infty)}(P; \pi/4) = \text{Max} \left\{ 0, \frac{1}{3} \left( \sqrt{24P - 8} - 1 \right) \right\}, \quad \frac{1}{3} \leq P \leq 1$$

$$C_{+}^{(\infty)}(P; \pi/4) = 0, \quad \frac{1}{3} \leq P \leq \frac{1}{2}. \quad (4.16)$$

De hecho en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5 hemos escogido  $n = 5$  y la curva roja es ya una buena aproximación a  $C_{\pm}^{(\infty)}$ . Sin embargo, cabe señalar, que sólo en el límite  $n \rightarrow \infty$ , esta curva cae por debajo de la curva de los estados de Werner. Para  $n$  finita la familia de curvas  $C_{-}^{(n)}(P; \pi/4)$  intersecan la de Werner en un punto adicional, además de  $(P, C) = (1, 1)$ . Lo cual tiene como consecuencia que una pequeña región, (inapreciable en la figura 4.3) sobre la curva de Werner, pueda ser alcanzada por la dinámica. Omitimos las expresiones para las curvas azules, ya que pueden ser obtenidas de las ecuaciones (4.13) y (4.14).

Ahora explicamos las características principales que surgen al considerar la interacción entre los átomos. De la figura 4.1 a la 4.5 se muestran en negro las curvas que contemplan interacción para los mismos estados iniciales que las curvas azules punteadas. En todas estas figuras se puede apreciar (ARRIBA), que las curvas negras forman patrones al estilo de las figuras de Lissajous con su frontera definida por las curvas en azul y rojo. Este comportamiento se explica por la inclusión de una frecuencia adicional como lo muestra la ecuación (4.9) para  $J$  y  $\kappa$  distintas de 0 y que también se hace evidente en todas estas figuras (ABAJO). Ahí se muestra la evolución temporal de la concurrencia (verde) y la pureza (negro), correspondiente al caso con interacción (curva negra en el plano  $CP$ ).

Como vimos anteriormente, para las fronteras podemos encontrar soluciones exactas, las cuales están dadas por  $C_{\pm}^{(n)}(P; \alpha)$  en la ecuación (4.11), recordando que para la curva roja se tiene un estado de Bell inicial, con  $\alpha = \pi/4$  y para la azul el mismo estado inicial que la curva negra con interacción.

Nótese que para una interacción creciente, la curva negra no llena completamente la región acotada por las curvas azul punteada y roja. Por ejemplo, la región llenada por la curva negra en la figura 4.1 es menor que en 4.2, ya que en 4.1 usamos una valor mayor de  $|\kappa - J|$ , es decir el área llenada disminuye al aumentar esta diferencia. Lo mismo ocurre si se compara esta diferencia para las figuras 4.3 a 4.5. Y lo que pasa es que el mínimo valor que puede tomar la pureza aumenta. Esto se puede notar al analizar la ecuación (4.9), en donde se aprecia que  $F(t) \propto \frac{1}{\omega_n^2}$  disminuye al aumentar  $|\kappa - J|$ . El valor mínimo de la pureza puede ser calculado como  $P_{\min} = P(t = \pi/2\omega_n)$ , siendo éste una cota inferior para  $P$ , excepto en el caso de la figura 4.2 en donde se tiene que  $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{n^2+n}{3n^2+3n+1}\right) < \alpha < \pi/4$  y

$$(\kappa - J)^2 < \frac{2n(n+1)(3 \sin(2\alpha) - 1) + 2 \sin(2\alpha)}{2n+1},$$

ahí el valor mínimo es  $P_{\min} = 1 - 1/\gamma_n$ .

Intuitivamente uno podría pensar que al aumentar la interacción, disminuirían los efectos del acoplamiento con la cavidad y el estado atómico permanecería mas puro. Sin embargo, como hemos visto, esto ocurre con la diferencia de las intensidades de interacción. Si ambas interacciones tienen la misma intensidad, no importa que tan grande sean, la curva llenará por completo el área encerrada y el mínimo de la pureza no aumentaría en comparación a interacción cero.

Cuando las frecuencias de  $F$  y  $G$  de la ecuación (4.9) sean conmensurables, la curva con interacción será cerrada, como en el caso de la figura 4.5.

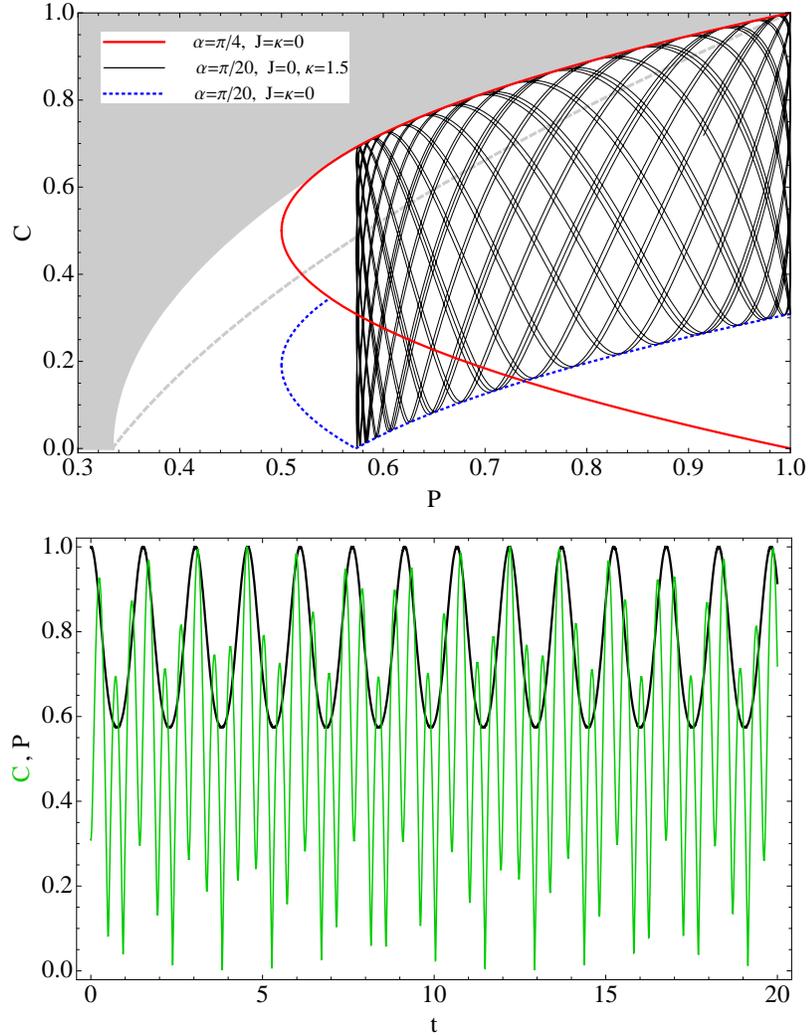


Figura 4.1: (ARRIBA) Plano  $CP$  para  $n = 0$ , o sea una cavidad inicialmente vacía. La curva roja muestra el comportamiento para dos átomos sin interacción con un estado inicial determinado por  $\alpha = \pi/4$  (Ver ec. (4.1)) *i.e.* un estado puro y máximamente entrelazado. La curva azul punteada muestra el comportamiento para dos átomos sin interacción con estado inicial puro, pero no máximamente entrelazado definido por  $\alpha = \pi/20$ . En negro, la curva para dos átomos con interacción con el mismo estado inicial que en la curva azul y parametrizada en el tiempo hasta  $t = 20$ . Los parámetros de la interacción son:  $\kappa = 1.5$  y  $J = 0$ . El área gris indica la región de estados físicamente inadmisibles, mientras que la curva gris rayada representa los estados de Werner. (ABAJO) Concurrencia (verde) y pureza (negro) como función del tiempo correspondiente a la curva negra del plano  $CP$ .

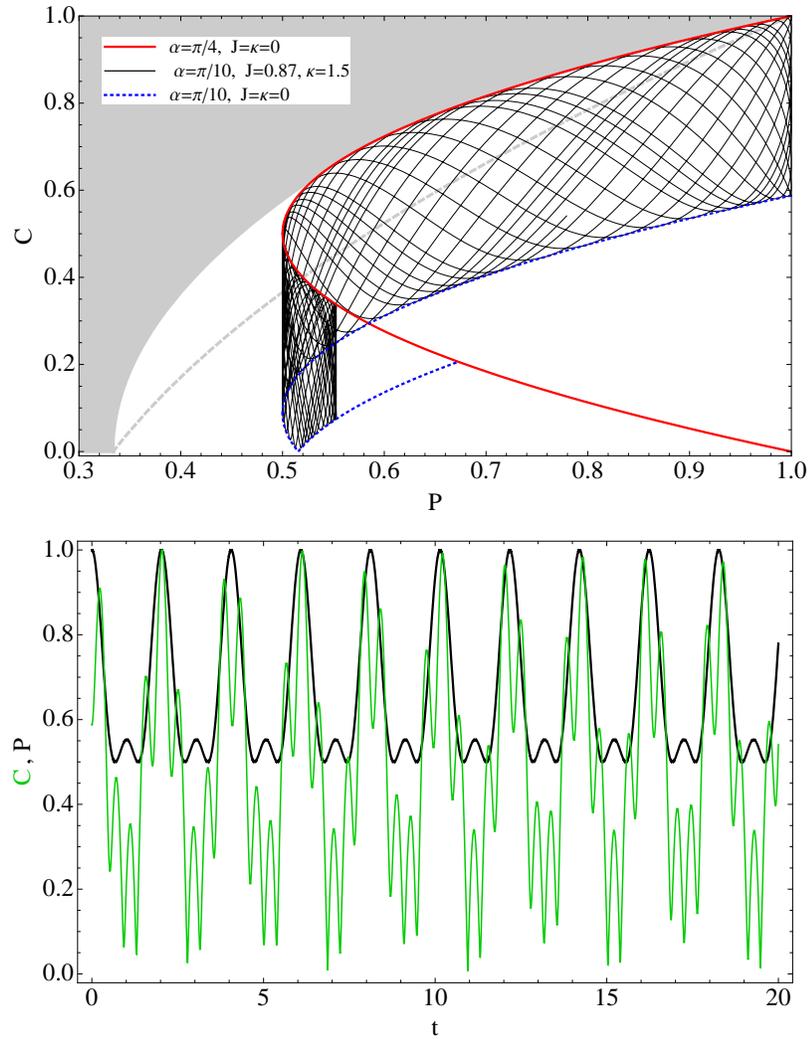


Figura 4.2: Igual que la figura 4.1, pero para la curva azul y negra  $\alpha = \pi/10$  y además  $J = 0.87$ .

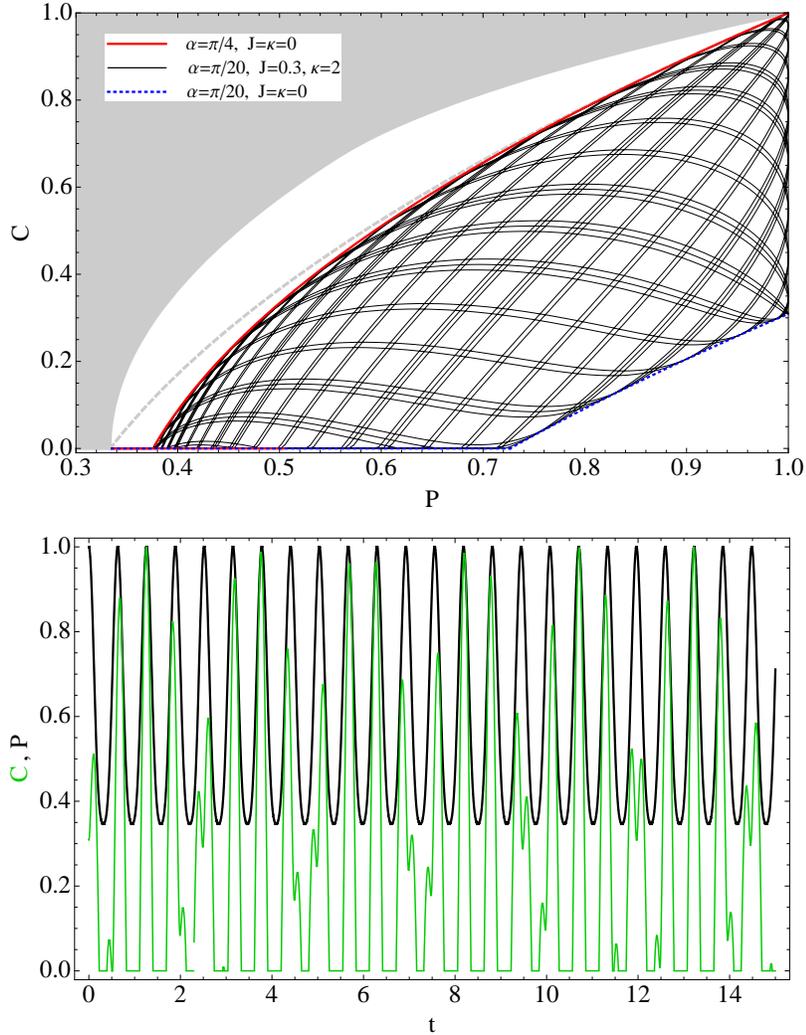


Figura 4.3: (Arriba) Plano  $CP$  para una cavidad inicial preparada en un estado de número con  $n = 5$ . La curva en rojo muestra el comportamiento para dos átomos sin interacción con un estado inicial determinado por  $\alpha = \pi/4$  (Ver ec. (4.1)) *i.e.* un estado puro y máximamente entrelazado. La curva azul punteada muestra el comportamiento para dos átomos sin interacción con estado inicial puro, pero no máximamente entrelazado definido por  $\alpha = \pi/40$ . En negro, la curva para dos átomos con interacción con los mismos estados iniciales que en la curva azul y parametrizada en el tiempo. Los parámetros de la interacción son:  $\kappa = 2$  y  $J = 0.3$ . El área gris indica la región de estados físicamente inadmisibles, mientras que la curva gris rayada representa los estados de Werner. (ABAJO) Concurrencia (verde) y pureza (negro) como función del tiempo correspondiente a la curva negra del plano  $CP$ .

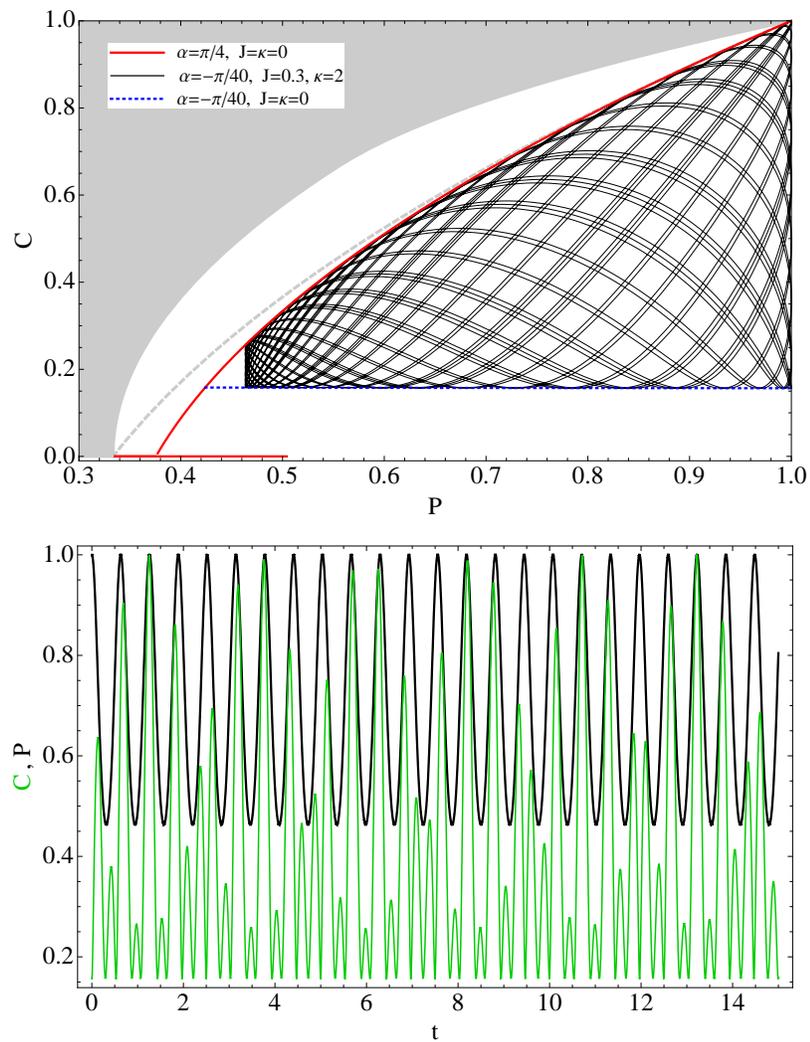


Figura 4.4: Igual que la figura 4.3, pero con  $\alpha = -\pi/40$  para las curvas azul y negra, nótese como la concurrencia se mantiene prácticamente constante, al cambiar el signo de  $\alpha$  en contraste con la figura 4.3.

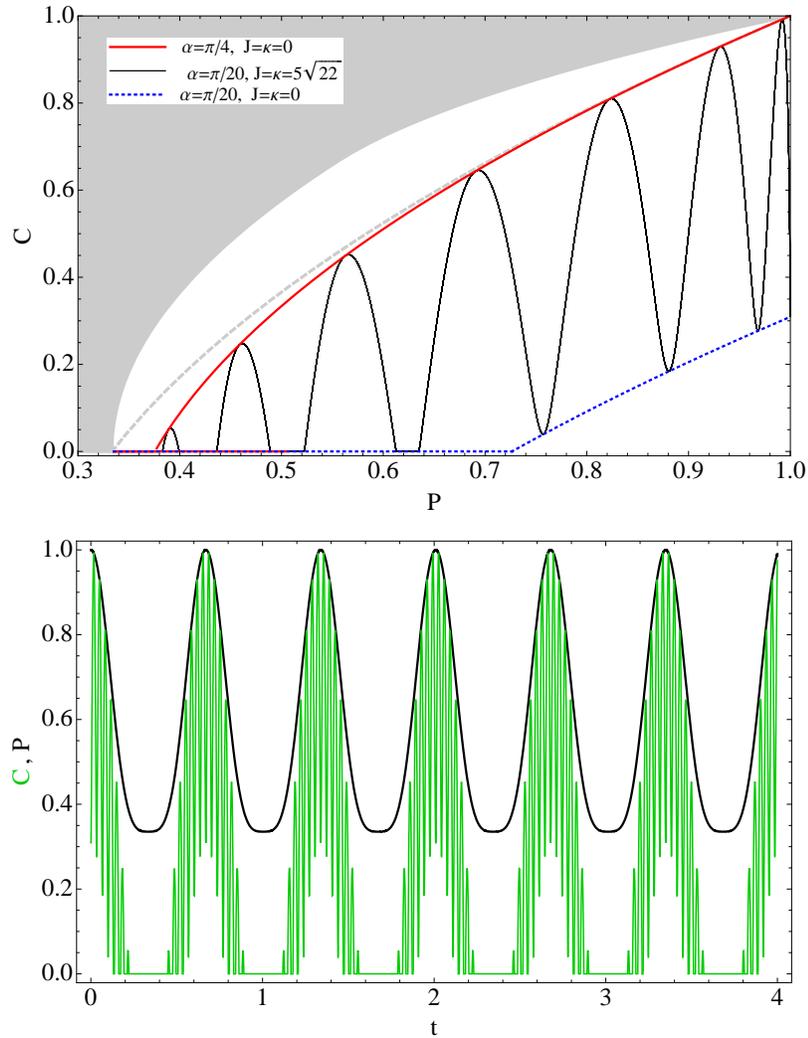


Figura 4.5: Igual que la figura 4.3, pero con constantes de interacción  $J = \kappa = 5\sqrt{4 \times 5 + 2}$ , las cuales son conmensurables con la frecuencia  $\omega_5 = \sqrt{4 \times 5 + 2}$  de la ecuación (4.7). El resultado es una curva negra cerrada en el plano  $CP$ .

## 4.2. Diferentes acoplamientos

Ahora consideramos el caso de dos átomos con acoplamientos diferentes. En la práctica esto podría ser realizado utilizando átomos diferentes o cuando la posición del átomo dentro de la cavidad es asimétrica. Un átomo cerca

del nodo del modo de la cavidad sentiría un acoplamiento menor al de uno cercano a una cresta. En lo que sigue utilizaremos desintonías cero,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  y no consideraremos interacción entre los átomos  $J = \kappa = 0$ . Fijaremos el acoplamiento del primer átomo con la cavidad  $g_1 = 1$  y el del segundo será variable  $g_2 = g$ . Con esto es posible encontrar los coeficientes del vector de estado a cualquier tiempo como

$$\begin{aligned} B_1^{(n)} &= ia_-X_-(t) - ia_+X_+(t), & B_2^{(n)} &= b_-X_-(t) + b_+X_+(t), \\ B_3^{(n)} &= -b_+X_-(t) + b_-X_+(t), & B_4^{(n)} &= ia_+X_-(t) + ia_-X_+(t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

en donde usamos las definiciones

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(1+g^2) \pm \sqrt{(1+g^2)^2 + 16g^2n(n+1)}}{2}}, \\ a_{\pm} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 \pm \frac{1+g^2}{\sqrt{(1+g^2)^2 + 16g^2n(n+1)}}}, \\ b_{\pm} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 \pm \frac{1-g^2}{\sqrt{(1+g^2)^2 + 16g^2n(n+1)}}}, \\ X_{\pm}(t) &= (b_{\pm} \cos(\alpha) \pm b_{\mp} \sin(\alpha)) \sin(g_{\pm}t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Es posible ahora encontrar expresiones para concurrencia y pureza de forma cerrada, sustituyendo en las ecuaciones 4.3 y 4.4, sin embargo resultan ser ecuaciones muy largas que son difícilmente interpretables, así que las omitimos.

Ahora sólo mostramos dos casos con acoplamientos diferentes. Uno en la figura 4.6 para un estado de Bell con  $\alpha = \pi/4$  y  $n = 5$ . La figura de arriba muestra el caso de un acoplamiento  $g = 0.2$  lo cual a penas abre la dinámica alrededor de la curva  $C_-^{(\infty)}(P, \pi/4)$ . Al decrecer  $g$  se abre aún más y la dinámica resulta más complicada cuando  $g < 0.1$ , situación de la figura 4.7. Sin embargo todavía se nota como para valores de  $P$  aproximadamente menores de 0.5 la dinámica queda acotada por arriba por  $C_-^{(\infty)}(P, \pi/4)$ . Abajo en ambas figuras, mostramos la correspondiente figura de pureza y concurrencia como función del tiempo.

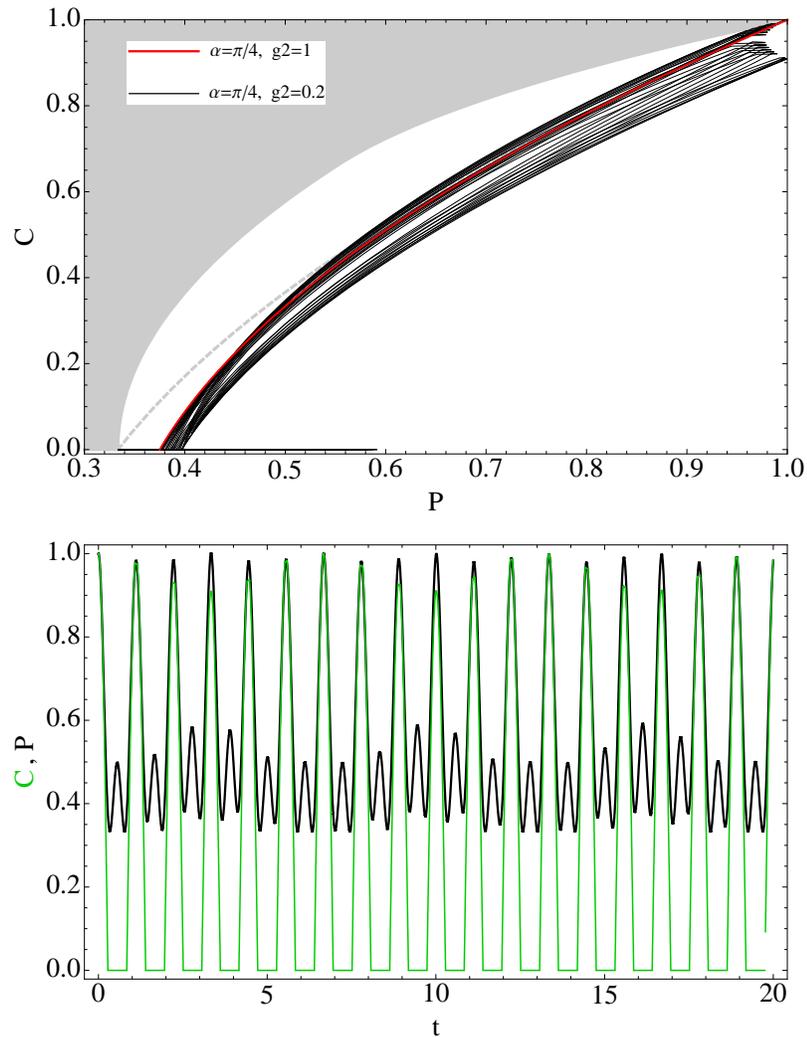


Figura 4.6: (ARRIBA) Plano  $CP$  para un estado inicial en la cavidad con  $n = 5$  y diferentes acoplamientos con los átomos,  $g_1 = 1$  y  $g_2 = 0.2$  para la curva negra. Con esta elección de parámetros la curva negra apenas se desvía del caso con acoplamientos iguales, curva roja. (ABAJO) Concurrencia (verde) y pureza (negro) correspondiente a la curva negra del plano  $CP$ .

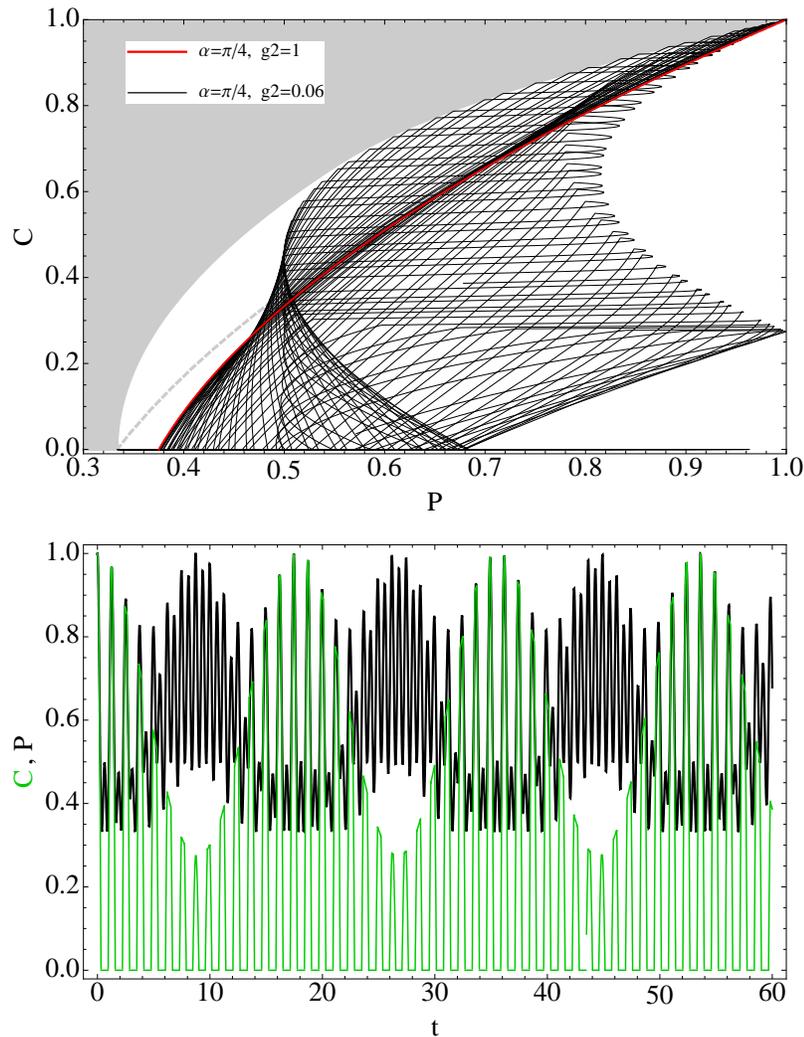


Figura 4.7: (ARRIBA) Plano  $CP$  para un estado inicial en la cavidad con  $n = 5$  y diferentes acoplamientos con los átomos,  $g_1 = 1$  y  $g_2 = 0.06$  para la curva negra. Contrasta con la figura 4.6, ahora la curva negra se desvía considerablemente del caso con acoplamientos iguales, curva roja. (ABAJO) Concurrencia (verde) y pureza (negro) correspondiente a la curva negra del plano  $CP$ .

### 4.3. Un átomo fuera de la cavidad

Ahora consideramos el caso extremo, donde uno de los átomos se encuentra fuera de la cavidad o con un acoplamiento nulo, situación que podría darse en el caso en que uno de los átomos se encontrara en un nodo del modo de la cavidad. Este caso puede ser descrito por el modelo de Jaynes-Cummings, pero con un átomo entrelazado a otro que no interacciona, situación que corresponde a la configuración de espectador [52]. Los coeficientes del vector de estado se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
 B_1^{(n)} &= -i \sin(\sqrt{n+1}t) \sin(\alpha), \\
 B_2^{(n)} &= \cos(\sqrt{n}t) \cos(\alpha), \\
 B_3^{(n)} &= \cos(\sqrt{n+1}t) \sin(\alpha), \\
 B_4^{(n)} &= -i \sin(\sqrt{n}t) \cos(\alpha).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Expresiones para la concurrencia y pureza pueden ser calculadas y se obtiene

$$\begin{aligned}
 C(t) &= \text{Max} \{0, |\sin(2\alpha)| \times \\
 &\quad \left( \left| \cos(\sqrt{n}t) \cos(\sqrt{n+1}t) \right| - \left| \sin(\sqrt{n}t) \sin(\sqrt{n+1}t) \right| \right) \}, \\
 P(t) &= \sin^4(\alpha) \sin^4(\sqrt{n+1}t) + \cos^4(\alpha) \sin^4(\sqrt{n}t) + \\
 &\quad \left( \sin^2(\alpha) \cos(\sqrt{n+1}t) + \cos^2(\alpha) \cos(\sqrt{n}t) \right)^2.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Uno puede corroborar que para  $n = 0$  y  $\alpha = \pi/4$  se cumple la siguiente relación entre pureza y concurrencia.

$$C = (2P - 1)^{\frac{1}{4}} \tag{4.21}$$

Este caso se muestra en la figura 4.8.

La figura 4.9 muestra la situación cuando  $\alpha = \pi/4$  y  $n = 5$ . Es notable ver como ahora la dinámica queda acotada por la curva de la ecuación (4.21) y  $C_-^{(\infty)}(P, \pi/4)$ .

La figura 4.10 muestra la dinámica para  $n = 5$  y  $\alpha = \pi/10$ . La dinámica todavía muestra regularidad, sin embargo las curvas que acotan este caso particular no son obvias de entender y tendrán que ser estudiadas más adelante. Sólo lo mostramos para tener un panorama general de la dinámica en casos menos restrictivos.

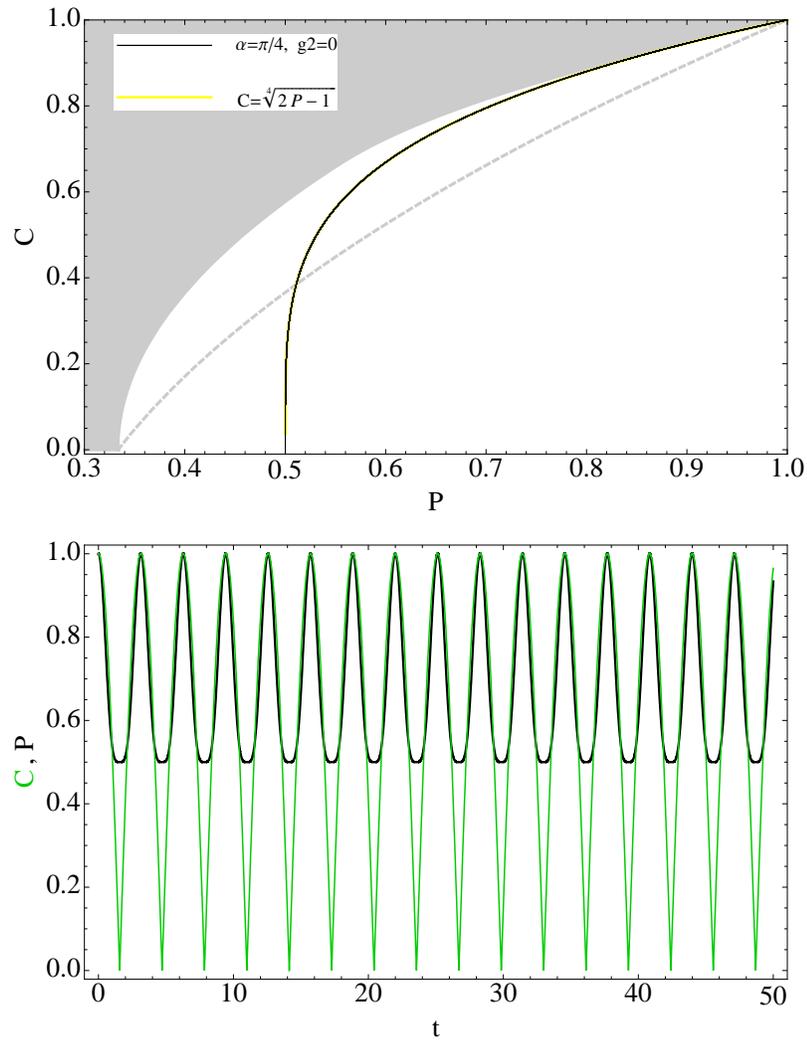


Figura 4.8: (ARRIBA) Plano  $CP$ , en negro para un estado inicial con cero fotones en la cavidad  $n = 0$ ,  $\alpha = \pi/4$  y un átomo desacoplado de la cavidad. Se sigue la curva  $\sqrt[4]{2P-1}$  (amarillo). (ABAJO) concurrencia (verde) y pureza (negro) correspondiente a la curva negra del plano  $CP$ .

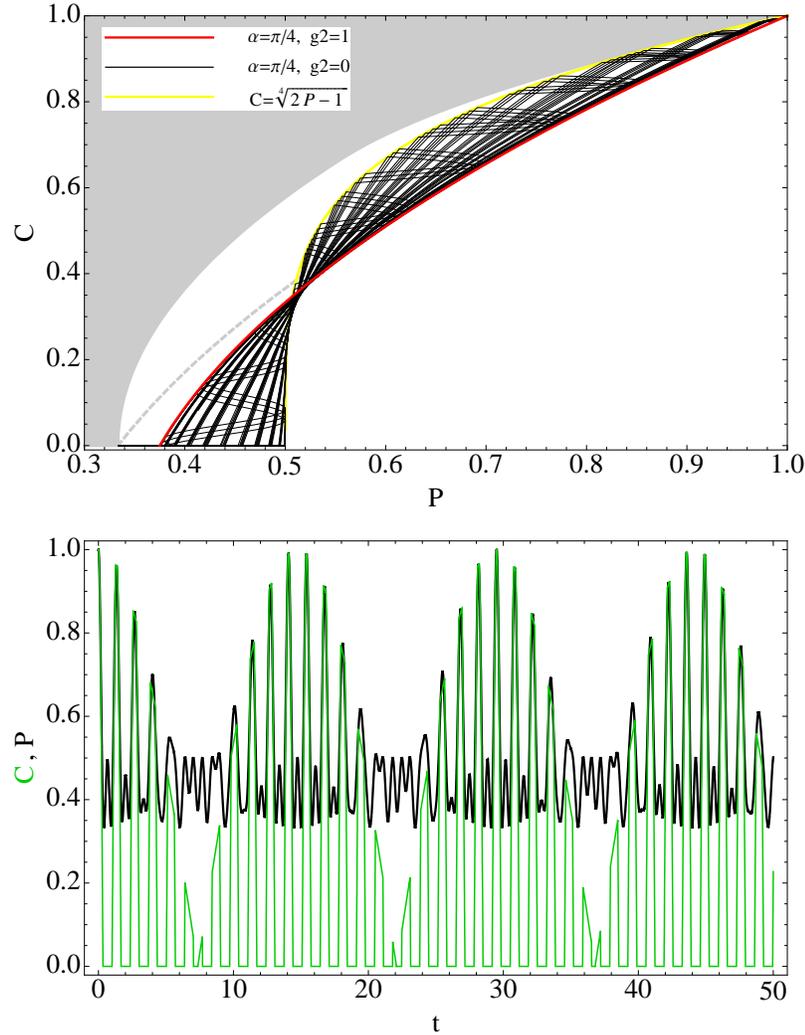


Figura 4.9: (ARRIBA) Plano  $CP$ , en negro para un estado inicial con cero fotones en la cavidad  $n = 5$ ,  $\alpha = \pi/4$  y un átomo desacoplado de la cavidad. Ahora la dinámica queda acotada por la curva  $\sqrt[4]{2P-1}$  (amarillo) y  $C_-^{(\infty)}(P; \pi/4)$  (ec. (4.16)). (ABAJO) concurrencia (verde) y pureza (negro) correspondiente a la curva negra del plano  $CP$ .

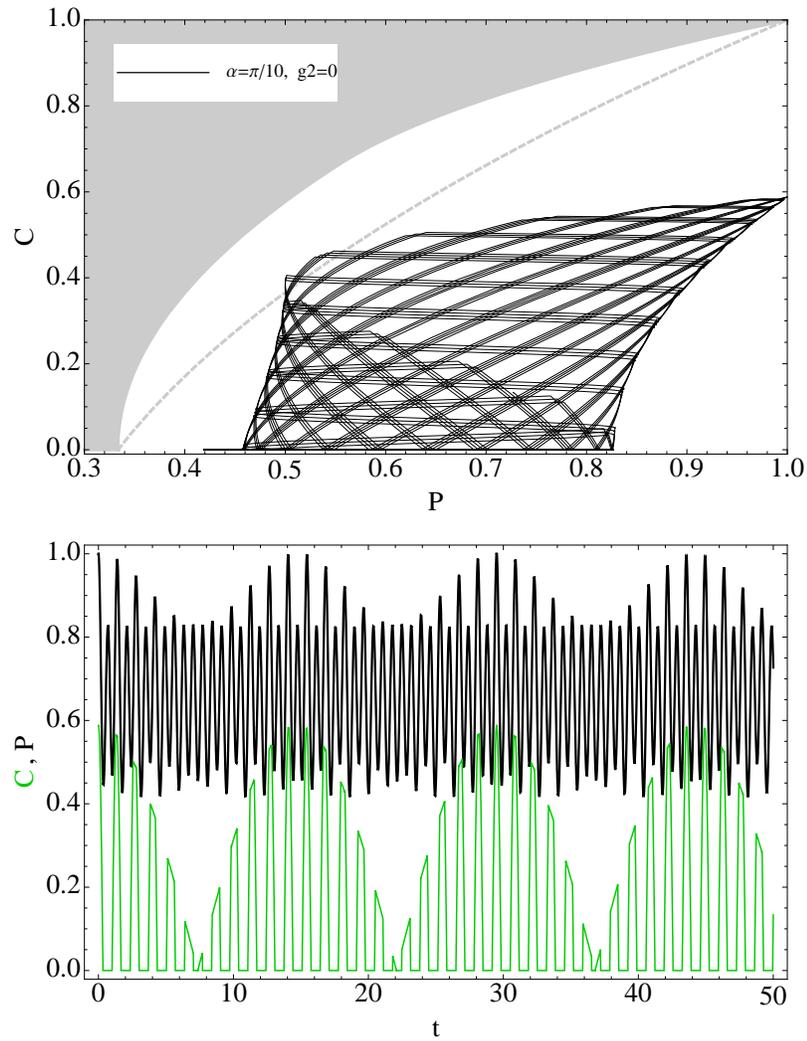


Figura 4.10: (ARRIBA) Plano  $CP$ , en negro para un estado inicial con cero fotones en la cavidad  $n = 5$ ,  $\alpha = \pi/10$  y un átomo desacoplado de la cavidad. (ABAJO) concurrencia (verde) y pureza (negro) correspondiente a la curva negra del plano  $CP$ .

## 4.4. Desintonías iguales

En esta sección consideramos el caso de desintonías iguales y nos centramos únicamente en el caso  $n = 0$ , condiciones equivalentes a la subsección 2.2. Nótese que para  $\alpha = 0$  el estado es el mismo que en la ecuación 2.8, en ese caso con  $\theta = 0$ . Con estas consideraciones, los coeficientes del vector de estado a todo tiempo pueden ser fácilmente encontrados

$$\begin{aligned} B_1(t) &= f_\alpha(t) \\ B_l(t) &= \frac{1}{2} \left( 1 - f_\alpha(t) + (-1)^l g(t) \cos(2\alpha) \right), \quad l = 2, 3 \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde  $g(t)$  y  $f_0(t)$  fueron introducidas en la ecuación (2.11)<sup>1</sup> y ahora usamos

$$f_\alpha(t) = (1 + \sin(2\alpha)) f_0(t). \quad (4.23)$$

Con lo anterior, es posible encontrar expresiones para la pureza

$$P(t) = 1 - 2f_\alpha(t) + 2f_\alpha^2(t) \quad (4.24)$$

y la concurrencia

$$C(t) = \sqrt{(f_\alpha(t) - 1)^2 - g^2(t) \cos^2(2\alpha)}. \quad (4.25)$$

La figura 4.4 muestra este plano en negro para un estado inicial con  $\alpha = 0$ , el cual es equivalente al de la subsección 2.2 y desintonía  $\delta = 1$  y se parametriza en el tiempo hasta  $t = 30$ . La curva negra queda acotada por la curva para cero desintonía y un estado inicial con  $\alpha = \pi/4$ , ec. (4.15)

En este caso la curva negra también forma una curva tipo Lissajous en el plano  $CP$ , justo como lo vimos anteriormente en el caso de átomos con interacción. La frontera de estas figuras está también acotada por las curvas derivadas anteriormente. Este es un caso especial para  $n = 0$  en el caso de desintonías iguales, ya que esto no se cumple para  $n$  mayor. Sin embargo el comportamiento sí es análogo para valores distintos de  $\alpha$ .

---

<sup>1</sup>Hay que reemplazar  $\gamma \rightarrow \delta$

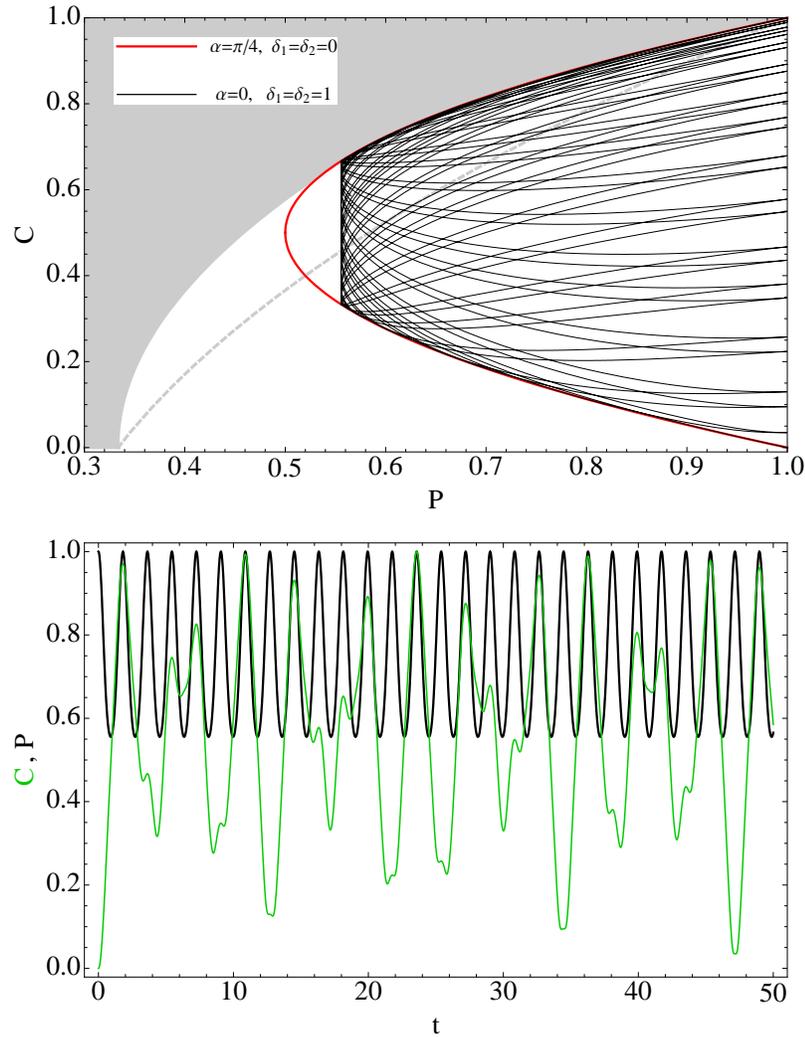


Figura 4.11: (ARRIBA) Plano  $CP$  para una cavidad inicialmente vacía y dos átomos iguales. La curva roja muestra el caso de desintonías cero y un estado inicial con  $\alpha = \pi/4$  (ver ec. (4.1)). Ésta acota la curva negra para desintonías distintas de cero,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$  y con  $\alpha = 0$ . (ABAJO) concurrencia (verde) y pureza (negro) correspondiente a la curva negra del plano  $CP$ .

## 4.5. Tres átomos con interacción

Terminamos este capítulo con una sección para comentar que el caso  $n = 0$  tratado anteriormente, también puede pensarse como un modelo de tres átomos con interacción entre ellos. En este caso basta reemplazar los operadores de escalera  $a \rightarrow \sigma''_-$  y  $a^\dagger \rightarrow \sigma''_+$ , donde hemos distinguido de los otros operadores atómicos con una doble prima. Ahora el Hamiltoniano toma la forma

$$H_{3\text{at}} = g_1 (\sigma''_+ \sigma_- + \sigma''_- \sigma_+) + g_2 (\sigma''_+ \sigma'_- + \sigma''_- \sigma'_+) + 2\kappa (\sigma'_+ \sigma_- + \sigma'_- \sigma_+) + J \sigma_z \sigma'_z + \delta_1 \sigma_z + \delta_2 \sigma'_z \quad (4.26)$$

y representa a un átomo de dos niveles en interacción dipolo-dipolo con otros dos y éstos últimos en interacción dipolo-dipolo e Ising entre ellos. También renombramos los vectores  $|1\rangle \rightarrow |+\rangle$  y  $|0\rangle \rightarrow |-\rangle$ . Ahora cada  $\delta_j$  representa la desintonía de la transición atómica  $j = 1, 2$  con respecto a la del átomo con doble prima. La integral de movimiento correspondiente cambia ligeramente y ahora tenemos que escribir

$$I_{3\text{at}} = \sigma''_z + \sigma_z + \sigma'_z \quad (4.27)$$

El espacio de Hilbert en este caso es de 8 dimensiones y la base en donde  $I_{3\text{at}}$  es diagonal es

$$\begin{array}{ll} & I_{3\text{at}} \\ |---\rangle & -3/2 \\ |--+\rangle, |-+-\rangle, |+--\rangle & -1/2 \\ |-++\rangle, |+-+\rangle, |++-\rangle & 1/2 \\ |+++ \rangle & 3/2 \end{array} \quad (4.28)$$

Con esto también se podría escribir el Hamiltoniano total de manera diagonal por bloques. Con dos bloques de  $3 \times 3$  y dos de 1. Nuestro caso corresponde a haber tomado estados iniciales del tipo

$$\cos \alpha |+-\rangle + \sin \alpha |--\rangle. \quad (4.29)$$

Con lo cual quedaríamos restringidos al subespacio con  $I_{3\text{at}} = -1/2$  y todos los resultados presentados para  $n = 0$  corresponderían a esta situación y son válidos también para este sistema.



---

## Conclusiones

---

Por una parte hemos mostrado la conexión que existe entre el oscilador Dirac-Moshinsky (ODM) y el modelo de Jaynes-Cummings (MJC) comúnmente utilizado en óptica cuántica. Los resultados presentados para  $2 + 1$  dimensiones ya se conocían de la literatura [11, 35], así que sólo los presentamos resumidamente. El caso en  $3 + 1$  no había sido presentado de acuerdo a nuestro conocimiento. Haber explorado este caso y determinado las condiciones para mapearlo parcialmente a sistemas de óptica cuántica, es una de las contribuciones que hemos realizado. La manera en que lo realizamos nos ayudó también para extender de manera simple el modelo, añadiendo la interacción con un campo de isospín para cualquiera de los tres casos dimensionales estudiados. Esto lo hicimos presentando el oscilador Dirac-Moshinsky en la notación usual de óptica cuántica. Por otro lado, este fue un primer intento, por nuestra parte, para estudiar el entrelazamiento en sistemas relativistas. Consideramos el ODM como un ente independiente y calculamos su entrelazamiento con el campo de isoespín, usando como medida la pureza cuando se toma como estado inicial un estado producto del campo y un estado propio del ODM. Encontramos un comportamiento oscilatorio con el tiempo, cuya frecuencia aumenta con el número  $n_R$  del oscilador y típicamente todas las otras constantes del problema. En contraste, en la situación de resonancia de la intensidad del campo estático con la energía en reposo del oscilador, se observa un aumento en el periodo, es decir una disminución en la frecuencia. Este último caso es, además, el que presenta el mayor grado de entrelazamiento entre los subsistemas.

Finalmente notamos que los sistemas obtenidos en  $1 + 1$  y  $2 + 1$  dimensiones son equivalentes a un sistema de dos átomos interactuando con un modo de una cavidad electromagnética. El espín- $\ast$  del ODM y el isoespín del campo se identifican con los átomos, mientras que los grados de libertad del oscilador armónico con los grados de libertad de la cavidad. También podemos establecer que el ODM en  $3+1$  acoplado al campo no es posible mapearlo a este sistema de óptica cuántica, excepto por el primer subespacio de  $3 \times 3$ , cuando  $n = 0$ .

La analogía con el sistema de dos átomos en una cavidad captó nuestra atención y continuamos explorando sobre esta línea, tomando en cuenta que las soluciones obtenidas pueden ser utilizadas para el sistema relativista.

En el sistema de 2 átomos dentro de una cavidad, desarrollamos a detalle la evolución temporal del sistema. Tomando en cuenta un estado inicial producto entre cavidad y sistema de dos átomos, encontramos como evaluar el vector de estado a todo tiempo, utilizando la descomposición espectral del Hamiltoniano. Después evaluamos la matriz de densidad reducida. Estos resultados serán de utilidad para futuros estudios en donde se consideren estados iniciales no considerados aquí, como cuando se tiene una cavidad preparada en un estado coherente. En este trabajo, nos hemos concentrados en el caso en que la cavidad se encontraba inicialmente en un estado de número y los estados atómicos en una superposición de  $|+-\rangle$  y  $| -+\rangle$ . Esto nos permitió restringirnos a un subespacio de  $4 \times 4$  del espacio del Hilbert, que en principio es infinito.

Desde esta perspectiva, el estudio del entrelazamiento entre los átomos y a su vez de éstos dos con la cavidad cobra una mayor relevancia. Concurrencia para lo primero y pureza para lo segundo fueron evaluados analíticamente como función del tiempo. Esto nos permitió hacer un estudio en el plano  $CP$  en donde logramos caracterizar la dinámica para casos particulares. Para el caso más simple de dos átomos iguales resonantes y sin interacción, encontramos una expresión que relaciona a la concurrencia en función de la pureza. Para una cavidad inicialmente vacía, notamos que la curva encontrada sigue precisamente la de los estados máximamente entrelazados (MEMS) al transcurrir el tiempo, si se inicia con el estado de Bell  $|\Psi^+\rangle$  (ver ec. (3.28)). El estado de Bell con signo opuesto  $|\Psi^-\rangle$  es siempre estado propio del sistema.

Encontramos que para átomos con interacción, y en el caso  $n = 0$  para desintonías iguales, la dinámica en el plano  $CP$  muestra figuras del tipo Lissajous, las cuales llenan una región acotada por las curvas obtenidas para el caso sin interacción. A su vez, notamos que el área cubierta disminuye cuando aumenta alguna de las interacciones, es decir cuando la diferencia de intensi-

dad entre interacción dipolo-dipolo e Ising aumenta. La región se acota en el sentido que la pureza mínima alcanzada es siempre mayor, lo cual se entiende, porque a mayor interacción entre los átomos, menor será la perturbación por la cavidad. Sin embargo para interacciones iguales, la pureza mínima es la misma que en el caso sin interacción. Otro punto interesante a resaltar, es el hecho de que para  $\alpha$ 's negativas (ver ecuación (4.1)) la concurrencia muestra un comportamiento más acotado en el Plano  $CP$ , lo que implica que estos estados presentan mayor robustez en el entrelazamiento atómico.

También exploramos el caso de distintos acoplamientos con la cavidad, en donde el comportamiento es más complicado y las expresiones obtenidas poco transparentes. El comportamiento es muy sensible al cambio en acoplamientos. Estudiamos el caso de un átomo desacoplado de la cavidad y encontramos que para un estado inicial de Bell positivo,  $\alpha = \pi/4$ , la dinámica queda parcialmente acotada por dos curvas, una que se sigue en el caso  $n = 0$  y la otra que corresponde a la curva de dos átomos iguales sin interacción  $C_-^{(\infty)}(P, \pi/4)$ , de la ecuación (4.16).

Así, hemos caracterizado el comportamiento en el plano  $CP$  cuando nos restringimos a un subespacio con número fijo de excitaciones. Esto nos permitirá a futuro buscar otro tipo de caracterizaciones del entrelazamiento. No hemos presentado la relación con el entrelazamiento de un átomo con el resto del sistema, situación que corresponde al entrelazamiento del campo de isospín con el ODM. Tenemos avances previos en esta dirección que pensamos podrían servir en la dirección de tratar de caracterizar un sistema o matriz de densidad por este tipo de cantidades. El modelo tiene muchas variables y dependerá de cada experimento que resultado se necesite. Lo más importante es que, basado en la conservación del número de excitaciones, se tiene la solución cerrada de la dinámica de muchos sistemas distintos que se puede explotar en cada caso.

Finalmente cabe mencionar que se pueden construir Hamiltonianos para sistemas de más de dos niveles por átomo y/o más átomos, los cuales conserven el número de excitaciones. En tales casos se pierde en general la solubilidad en forma cerrada, pues los bloques del Hamiltoniano serían mayores a  $4 \times 4$ . Aún así se conserva el mapeo de la dinámica a espacios de Hilbert de dimensión finita, lo cual facilita la implementación numérica eficiente con precisión arbitraria.



# APÉNDICE A

---

## Modelo de Jaynes-Cummings

---

El modelo de Jaynes-Cummings [53] es un paradigma de la óptica cuántica y describe la interacción de un átomo de dos niveles con un modo electromagnético de una cavidad *i.e.* un sistema de dos niveles con un oscilador armónico.

La dinámica total del sistema puede ser separada en tres términos:  $H_{\text{at}}$  correspondiente a la energía del sistema de dos niveles,  $H_{\text{cav}}$  para la energía del modo de la cavidad y por último un término  $H_{\text{int}}$  que describe la interacción entre ambas partes. Explícitamente son:

$$\begin{aligned} H_{\text{at}} &= \hbar \frac{\omega_0}{2} \sigma_z, \\ H_{\text{cav}} &= \hbar \omega \left( a^\dagger a + 1/2 \right), \\ H_{\text{int}} &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = \hbar \frac{g}{2} (a^\dagger + a)(\sigma_+ + \sigma_-). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

en donde introducimos  $\mathbf{d} = \boldsymbol{\rho} (\sigma_+ + \sigma_-)$  el operador dipolar eléctrico del átomo,  $\mathbf{E} = \mathcal{E} (a + a^\dagger)$  el campo eléctrico de la cavidad y definimos la constante de acoplamiento

$$g = 2\boldsymbol{\rho} \cdot \mathcal{E}.$$

Uno puede notar que el término de interacción contiene los términos  $\sigma_+ a^\dagger$  y  $\sigma_- a$ , los cuales pueden ser despreciados en lo que se conoce como aproximación de onda rotante. Una forma de justificar esta aproximación es primero

pasando a un marco de interacción con respecto al Hamiltoniano de referencia

$$H_0 = H_{\text{cav}} + H_{\text{at}}, \quad (\text{A.2})$$

a través la transformación unitaria

$$U = e^{iH_0 t/\hbar}, \quad (\text{A.3})$$

la cual afecta tanto vectores de estado como a operadores de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle_I &= U|\Phi(t)\rangle \\ H_I &= UH_{\text{int}}U^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Después de esta transformación, la siguiente ecuación de Schrödinger es válida

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle_I = H_I |\Phi(t)\rangle_I, \quad (\text{A.5})$$

la cual depende ahora del Hamiltoniano de interacción transformado a

$$H_I = \hbar \frac{g}{2} \left( \sigma_+ a^\dagger e^{i(\omega+\omega_0)t} + \sigma_+ a e^{i(-\omega+\omega_0)t} + \sigma_- a^\dagger e^{i(\omega-\omega_0)t} + \sigma_- a e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right) \quad (\text{A.6})$$

y en donde se aprecian 4 términos, dos de los cuales tienen en el argumento de la exponencial la suma de las frecuencias del  $H_0$ , es decir  $\omega_0 + \omega$  y otros dos con la diferencia,  $\omega_0 - \omega$ . Si se considera que la frecuencia de transición atómica y la frecuencia del modo de la cavidad son cercanas, es decir si se cumple que  $\omega_0 - \omega \ll \omega_0 + \omega$ , entonces los términos con restas en la exponencial son altamente resonantes, mientras que los términos con la suma no lo son. La aproximación de onda rotante consiste en omitir estos términos, ya que su contribución a la dinámica es despreciable. Pues al integrar en el tiempo contribuciones de estos términos, tendremos en el denominador la suma  $\omega_0 + \omega$ , despreciable en comparación a los términos con  $\omega_0 - \omega$  en el denominador.

Regresando al marco original, aplicando la transformación inversa de la ecuación (A.3), después de despreciar los términos antes mencionados, quedamos con el Hamiltoniano

$$H_{\text{tot}} \approx \hbar \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar \omega \left( a^\dagger a + 1/2 \right) + \hbar \frac{g}{2} (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+). \quad (\text{A.7})$$

Finalmente pasando a otro marco de interacción con el Hamiltoniano de referencia

$$H_0 = \hbar \omega \left( \frac{1}{2} \sigma_z + a^\dagger a + 1/2 \right). \quad (\text{A.8})$$

llegamos al Hamiltoniano que describe la misma dinámica y se puede escribir como

$$H_{\text{JC}} = \hbar\delta\sigma_z + \hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (\text{A.9})$$

Este es el Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings que usaremos en este trabajo, aunque cabe mencionar que en algunas referencias le dan este nombre al Hamiltoniano de la ecuación (A.7); ambos describen la misma dinámica. Hemos omitido un factor de  $\frac{1}{2}$  para simplificar la notación.

En la base  $|n-1, +\rangle$ ,  $|n, -\rangle$ , formada por los estados de número  $|n\rangle$  de la cavidad y los estados atómicos  $|\pm\rangle$ , se puede mostrar que  $H_{\text{JC}}$  es diagonal en bloques con cada bloque dado por

$$H_{\text{JC}}(n) = \hbar \begin{pmatrix} \delta & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & -\delta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Diagonalizando estos bloques se encuentran las energías propias del sistema

$$E_n^\pm = \pm E_n = \pm \sqrt{\delta^2 + g^2 n}, \quad (\text{A.11})$$

y es fácil probar que los correspondientes estados propios están dados por

$$\begin{aligned} |\phi_+\rangle &= \sin(\theta_n)|n, -\rangle + \cos(\theta_n)|n-1, +\rangle, \\ |\phi_-\rangle &= \cos(\theta_n)|n, -\rangle - \sin(\theta_n)|n-1, +\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

con

$$\theta_n = \arctan \left( \sqrt{\frac{E_n - \delta}{E_n + \delta}} \right).$$



## APÉNDICE B

---

### Solución general al problema de valores propios

---

En este apéndice presentamos la solución general del problema de valores y vectores propios del Hamiltoniano (3.10).

En general el polinomio característico resulta en un ecuación cuártica deprimida, es decir sin un término cúbico. Usando la fórmula de Ferrari [54] uno puede encontrar los valores propios del Hamiltoniano, es decir las energías

$$E_j^{(n)} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{R+U}}{2} + \frac{(-1)^j}{2} \sqrt{2R - U + \frac{Q}{\sqrt{R+U}}}, & j = 1, 2 \\ \frac{\sqrt{R+U}}{2} + \frac{(-1)^j}{2} \sqrt{2R - U - \frac{Q}{\sqrt{R+U}}}, & j = 3, 4, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

con las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}
P &= (\delta_1^2 - \delta_2^2 + (n+1)(g_1^2 - g_2^2)) (\delta_1^2 - \delta_2^2 + n(g_1^2 - g_2^2)) \\
&\quad + J^2 ((2n+1)(g_1^2 + g_2^2) - 2(\delta_1^2 + \delta_2^2) + J^2 - 4\kappa^2), \\
&\quad + 2J (g_1^2 \delta_1 + g_2^2 \delta_2 + 2(2n+1)\kappa g_1 g_2) + 4\kappa (\delta_1 + \delta_2) (g_1 g_2 + \kappa (\delta_1 + \delta_2)) \\
Q &= 4 (g_1^2 \delta_2 + g_2^2 \delta_1 + 4J (\kappa^2 - \delta_2 \delta_1) - 2(2n+1)\kappa g_1 g_2), \\
R &= 2/3 ((2n+1)(g_1^2 + g_2^2) + 2(\delta_1^2 + \delta_2^2 + J^2) + 4\kappa^2), \\
S &= 2PR + \frac{Q^2 - R^3}{8}, \\
T &= \frac{4P}{3} + \frac{R^2}{4}, \\
U &= \left( S + \sqrt{S^2 - T^3} \right)^{1/3} + \left( S - \sqrt{S^2 - T^3} \right)^{1/3}. \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Los vectores propios no normalizados son

$$\begin{aligned}
v_{1,j}^{(n)} &= (E_j^{(n)} - \delta_1 - \delta_2 - J) \times \\
&\quad \left( (E_j^{(n)} + J)^2 - n(g_1^2 + g_2^2) - (\delta_1 - \delta_2)^2 - 4\kappa^2 \right) \\
&\quad - 2n \left( (\delta_1 + J) g_2^2 + (\delta_2 + J) g_1^2 + 2\kappa g_1 g_2 \right), \\
v_{2,j}^{(n)} &= \sqrt{n+1} \left( 2\kappa g_1 (E_j^{(n)} - \delta_1 - \delta_2 - J) \right. \\
&\quad \left. + g_2 \left( (E_j^{(n)} - \delta_1)^2 + n(g_1^2 - g_2^2) - (\delta_2 + J)^2 \right) \right), \\
v_{3,j}^{(n)} &= \sqrt{n+1} \left( 2\kappa g_2 (E_j^{(n)} - \delta_1 - \delta_2 - J) \right. \\
&\quad \left. + g_1 \left( (E_j^{(n)} - \delta_2)^2 + n(g_2^2 - g_1^2) - (\delta_1 + J)^2 \right) \right), \\
v_{4,j}^{(n)} &= \sqrt{n(n+1)} \left( 2g_1 g_2 (E_j^{(n)} + J) + 2\kappa (g_1^2 + g_2^2) \right), \tag{B.3}
\end{aligned}$$

y la transformación ortogonal que diagonaliza el Hamiltoniano está dada por

$$V_{j,k}^{(n)} = v_{j,k}^{(n)} / \left( \sum_l v_{l,k}^{(n)2} \right)^{1/2}. \tag{B.4}$$

## Átomos iguales resonantes y con interacción

Dado que esta es la situación que estudiamos con mayor detalle en esta tesis, escribimos los resultados completos para este caso particular donde  $g_1 = g_2 = 1$  y  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ .

Las energías resultan ser

$$\begin{aligned}
 E_1^{(n)} &= J, \\
 E_2^{(n)} &= -J - 2\kappa, \\
 E_3^{(n)} &= \kappa - \omega_n, \\
 E_4^{(n)} &= \kappa + \omega_n, \\
 \omega_n &= \sqrt{2 + 4n + (J - \kappa)^2}.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Mientras que la matriz de diagonalización con los vectores propios como columnas se puede escribir como

$$V^{(n)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{n}{2n+1}} & 0 & \sqrt{\frac{n+1}{\omega_n^2 + (J-\kappa)\omega_n}} & \sqrt{\frac{n+1}{\omega_n^2 - (J-\kappa)\omega_n}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{\omega_n + (J-\kappa)}{4\omega_n}} & \sqrt{\frac{\omega_n - (J-\kappa)}{4\omega_n}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{\omega_n + (J-\kappa)}{4\omega_n}} & \sqrt{\frac{\omega_n - (J-\kappa)}{4\omega_n}} \\ -\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} & 0 & \sqrt{\frac{n}{\omega_n^2 + (J-\kappa)\omega_n}} & \sqrt{\frac{n}{\omega_n^2 - (J-\kappa)\omega_n}} \end{pmatrix}. \tag{B.6}$$



---

## Bibliografía

---

- [1] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, USA (1982).
- [2] M. Moshinsky, A. Szczepaniak. ‘The dirac oscillator’. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, L817 (1989).
- [3] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov. *The Harmonic oscillator in modern physics*. Harwood Academic (1996).
- [4] M. Moreno, A. Zentella. ‘Covariance, cpt and the foldy-wouthuysen transformation for the dirac oscillator’. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, L821 (1989).
- [5] C. Quesne, M. Moshinsky. ‘Symmetry lie algebra of the dirac oscillator’. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 2263 (1990).
- [6] O. Castaños, A. Frank, R. López, L. F. Urrutia. ‘Soluble extensions of the dirac oscillator with exact and broken supersymmetry’. *Physical Review D*, **43**, 544 (1991).
- [7] H. Yukawa. ‘Quantum theory of non-local fields. part i. free fields’. *Physical Review*, **77**, 219 (1950).
- [8] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zahringer, E. Solano, R. Blatt, C. F. Roos. ‘Quantum simulation of the dirac equation’. *Nature*, **463**, 68 (2010).

- 
- [9] L. Lamata, J. León, T. Schätz, E. Solano. ‘Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion’. *Physical Review Letters*, **98**, 253005 (2007).
- [10] S. Longhi. ‘Photonic realization of the relativistic dirac oscillator’. *Optics Letters*, **35**, 1302 (2010).
- [11] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, E. Solano. ‘Exact mapping of the  $2 + 1$  dirac oscillator onto the jaynes-cummings model: Ion-trap experimental proposal’. *Physical Review A*, **76**, 041801 (2007).
- [12] J. J. Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison Wesley (1967).
- [13] T. Aoki, B. Dayan, E. Wilcut, W. P. Bowen, A. S. Parkins, T. J. Kippenberg, K. J. Vahala, H. J. Kimble. ‘Observation of strong coupling between one atom and a monolithic microresonator’. *Nature*, **443**, 671 (2006).
- [14] B. Nāgorny, T. Elsässer, A. Hemmerich. ‘Collective atomic motion in an optical lattice formed inside a high finesse cavity’. *Physical Review Letters*, **91**, 153003 (2003).
- [15] C. Xun-Ming, G. Guo-Qin, Y. Miao, H. Qing. ‘Coherently controlled periodic entanglement of two moving atoms in a cavity’. *Communications in Theoretical Physics*, **49**, 1017 (2008).
- [16] C.-Z. Wang, C.-X. Li, J.-F. Li. ‘Entanglements induced by cavity interacting with two-coupled atoms’. *Optics Communications*, **282**, 1160 (2009).
- [17] L. S. Aguiar, P. P. Munhoz, A. Vidiella-Barranco, J. A. Roversi. ‘The entanglement of two dipole–dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field’. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **7**, S769 (2005).
- [18] T. E. Tessier, I. H. Deutsch, A. Delgado, I. Fuentes-Guridi. ‘Entanglement sharing in the two-atom tavis-cummings model’. *Physical Review A*, **68**, 062316 (2003).
- [19] S.-B. Li, J.-B. Xu. ‘Maximally entangled mixed states of two atoms trapped inside an optical cavity’. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42**, 245302 (2009).

- 
- [20] M. J. Hartmann, F. G. S. L. Brandão, M. B. Plenio. ‘Effective spin systems in coupled microcavities’. *Physical Review Letters*, **99**, 160501 (2007).
- [21] D. Porras, J. I. Cirac. ‘Effective quantum spin systems with trapped ions’. *Physical Review Letters*, **92**, 207901 (2004).
- [22] A. Sørensen, K. Mølmer. ‘Spin-spin interaction and spin squeezing in an optical lattice’. *Physical Review Letters*, **83**, 2274 (1999).
- [23] B. Bellomo, R. Lo Franco, G. Compagno. ‘Non-markovian effects on the dynamics of entanglement’. *Physical Review Letters*, **99**, 160502 (2007).
- [24] S. Maniscalco, F. Francica, R. L. Zaffino, N. Lo Gullo, F. Plastina. ‘Protecting entanglement via the quantum zeno effect’. *Physical Review Letters*, **100**, 090503 (2008).
- [25] Y. Li, J. Zhou, H. Guo. ‘Effect of the dipole-dipole interaction for two atoms with different couplings in a non-markovian environment’. *Physical Review A*, **79**, 012309 (2009).
- [26] B. M. Garraway. ‘Nonperturbative decay of an atomic system in a cavity’. *Physical Review A*, **55**, 2290 (1997).
- [27] M. A. Nielsen, I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press (2000).
- [28] D. Itô, K. Mori, E. Carriere. ‘An example of dynamical systems with linear trajectory’. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, **51**, 1119 (1967). 10.1007/BF02721775.
- [29] P. Cook. ‘Relativistic harmonic oscillators with intrinsic spin structure’. *Lettere Al Nuovo Cimento (1971 – 1985)*, **1**, 419 (1971). 10.1007/BF02785170.
- [30] J. Bentez, R. P. Martínez y Romero, H.Ñ. Núñez-Yépez, A. L. Salas-Brito. ‘Solution and hidden supersymmetry of a dirac oscillator’. *Physical Review Letters*, **64**, 1643 (1990).
- [31] J. M. Torres, E. Sadurní, T. H. Seligman. ‘The dirac-moshinsky oscillator coupled to an external field and its connection to quantum optics’. *AIP Conference Proceedings*, **1323**, 301 (2010).

- 
- [32] E. Sadurní. ‘The dirac-moshinsky oscillator: Theory and applications’. *arXiv:1101.3011v1* (2011).
- [33] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley (1993).
- [34] E. Sadurní, J. M. Torres, T. H. Seligman. ‘Dynamics of a dirac oscillator coupled to an external field: a new class of solvable problems’. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **43**, 285204 (2010).
- [35] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, A. Luis. ‘Chirality quantum phase transition in the dirac oscillator’. *Physical Review A*, **77**, 063815 (2008).
- [36] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, E. Solano. ‘Mesoscopic superposition states in relativistic landau levels’. *Physical Review Letters*, **99**, 123602 (2007).
- [37] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters. ‘Mixed-state entanglement and quantum error correction’. *Physical Review A*, **54**, 3824 (1996).
- [38] S. Hill, W. K. Wootters. ‘Entanglement of a pair of quantum bits’. *Physical Review Letters*, **78**, 5022 (1997).
- [39] W. K. Wootters. ‘Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits’. *Physical Review Letters*, **80**, 2245 (1998).
- [40] O. Jiménez Farías, C. Lombard Latune, S. P. Walborn, L. Davidovich, P. H. Souto Ribeiro. ‘Determining the Dynamics of Entanglement’. *Science*, **324**, 1414 (2009).
- [41] C. F. Roos, G. P. T. Lancaster, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, S. Gulde, C. Becher, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt. ‘Bell states of atoms with ultralong lifetimes and their tomographic state analysis’. *Physical Review Letters*, **92**, 220402 (2004).
- [42] M. Ziman, V. Bužek. ‘Concurrence versus purity: Influence of local channels on bell states of two qubits’. *Physical Review A*, **72**, 052325 (2005).
- [43] C. Pineda, T. H. Seligman. ‘Evolution of pairwise entanglement in a coupled  $n$ -body system’. *Physical Review A*, **73**, 012305 (2006).
- [44] S. Ishizaka, T. Hiroshima. ‘Maximally entangled mixed states under non-local unitary operations in two qubits’. *Physical Review A*, **62**, 022310 (2000).

- 
- [45] W. J. Munro, D. F. V. James, A. G. White, P. G. Kwiat. ‘Maximizing the entanglement of two mixed qubits’. *Physical Review A*, **64**, 030302 (2001).
- [46] J. M. Torres, E. Sadurní, T. H. Seligman. ‘Two interacting atoms in a cavity: exact solutions, entanglement and decoherence’. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **43**, 192002 (2010).
- [47] A. Hayat, M. Orenstein. ‘Photon-number state on-demand source by cavity parametric downconversion’. *Applied Physics Letters*, **89**, 171108 (2006).
- [48] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, H. Walther. ‘The creation and detection of arbitrary photon number states using cavity qed’. *New Journal of Physics*, **6**, 97 (2004).
- [49] S. Brattke, B. T. H. Varcoe, H. Walther. ‘Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics’. *Physical Review Letters*, **86**, 3534 (2001).
- [50] T. Yu, J. H. Eberly. ‘Finite-time disentanglement via spontaneous emission’. *Physical Review Letters*, **93**, 140404 (2004).
- [51] M. Yönaç, T. Yu, J. H. Eberly. ‘Sudden death of entanglement of two jaynes–cummings atoms’. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **39**, S621 (2006).
- [52] C. Pineda. *One, Two, and n Qubit Decoherence*. Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México (2007).
- [53] E. Jaynes, F. Cummings. ‘Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser’. *Proceedings of the IEEE*, **51**, 89 (1963).
- [54] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York (1964).