



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Modelado y Simulación de la Propagación de  
Ondas Elásticas en Medios Heterogéneos con  
Métodos Espectrales de Chebyshev**

**TESIS**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN  
INGENIERÍA ELÉCTRICA  
PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES**

**PRESENTA:  
MANUEL LOAIZA RAMÍREZ**

**TUTOR:  
DRA. LUCÍA MEDINA GÓMEZ**

2011





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Boris Escalante Ramírez

Secretario: Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar

Vocal: Dra. Lucía Medina Gómez

1er. Suplente: Carlos Rivera Rivera

2do. Suplente: Dr. Ernesto Rubio Acosta

**Universidad Nacional Autónoma de México**

Tutor de Tesis:

Dra. Lucía Medina Gómez

# Agradecimientos

A mi familia

A mi asesora la Dra. Lucía Medina Gómez

A mis profesores del programa de Maestría

Al CONACYT por la beca otorgada

Al proyecto DGAPA-PAPIIT IN107207 Caracterización Acústica de Materiales

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Propagación de Ondas Elásticas</b>	<b>3</b>
2.1	Modelos Matemáticos de Ondas Elásticas	5
2.2	Potenciales de Desplazamiento	8
2.3	Ondas Planas	10
2.3.1	Ondas Planas Armónicas	11
2.4	Impedancia Acústica	12
2.5	Reflexión y Transmisión de Ondas	13
2.5.1	Frontera Fluido – Fluido	14
2.5.2	Frontera Fluido – Sólido	15
2.5.3	Frontera Sólido - Fluido	15
2.5.4	Frontera Sólido – Sólido	16
2.6	Atenuación y Dispersión	16
<b>3</b>	<b>Aproximación de Funciones</b>	<b>18</b>
3.1	Aproximación de Funciones con Polinomios Ortogonales	18
3.1.1	Polinomios Ortogonales de Chebyshev	19
3.2	Aproximación Interpolante y Funciones Cardinales	20
3.3	Cuadratura de Gauss	22
3.3.1	Cuadratura de Gauss-Jacobi	24
3.3.2	Puntos de Interpolación para Polinomios de Chebyshev	25
3.3.3	Producto Interno Discreto	26
3.4	Relación entre Coeficientes Espectrales y Valores Interpolados	27
<b>4</b>	<b>Métodos Espectrales</b>	<b>29</b>
4.1	Método de Galerkin	30
4.2	Método Pseudoespectral o de Colocación	32
<b>5</b>	<b>Modelado y Simulación de la Propagación de Ondas Elásticas en Medios Heterogéneos Bidimensionales</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Resultados y Simulaciones</b>	<b>47</b>
6.1	Onda Elástica Longitudinal en un Sólido Uniforme	47

<b>6.2</b>	<b>Onda Elástica Transversal en un Sólido Uniforme .....</b>	<b>48</b>
<b>6.3</b>	<b>Reflexión y Transmisión de una Onda Elástica Longitudinal en Interfaz Sólido-Sólido.....</b>	<b>49</b>
<b>6.4</b>	<b>Reflexión y Transmisión de una Onda Elástica Transversal en Interfaz Sólido-Sólido.....</b>	<b>51</b>
<b>6.5</b>	<b>Reflexión y Transmisión de Onda Longitudinal en Interfaz Fluido-Sólido.....</b>	<b>53</b>
<b>6.6</b>	<b>Reflexión y Transmisión de Onda Transversal en Interfaz Sólido-Fluido .....</b>	<b>55</b>
<b>6.7</b>	<b>Propagación de Onda Elástica por un Medio Heterogéneo Compuesto por 2 Materiales .....</b>	<b>56</b>
<b>6.8</b>	<b>Propagación de Onda Elástica por un Medio Heterogéneo Compuesto por 3 Materiales .....</b>	<b>59</b>
<b>7</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>62</b>
<b>8</b>	<b>Anexo 1: Algoritmo rápido para derivación en los puntos de interpolación de Chebyshev .....</b>	<b>65</b>
<b>9</b>	<b>Anexo 2: Código en MATLAB .....</b>	<b>68</b>
<b>10</b>	<b>Bibliografía.....</b>	<b>73</b>

# 1 Introducción

Una onda elástica es una perturbación tensional que se propaga a lo largo de un medio elástico, el cual puede ser un sólido o un fluido ideal. La propagación de ondas elásticas es el mecanismo sobre el cual se basan los ensayos no destructivos con ultrasonido. Estos consisten en transmitir energía en forma de onda a través de los materiales a ser examinados y estimar dicho medio a partir de la energía transmitida o reflejada.

La propagación de las ondas elásticas ha sido modelada a partir de la teoría de elasticidad lineal y se han encontrado soluciones analíticas que describen el movimiento de la onda en medios lineales, homogéneos, e isotrópicos. Sin embargo es común que el medio a estudiar no cumpla las características, en específico, el medio puede estar formado de distintos materiales que lo harían heterogéneo.

Los cambios en las propiedades del medio por el que se propaga una onda hacen que parte de ésta se refleje o otra se transmita. Lo anterior ha sido bien estudiado para ondas planas en fronteras entre dos materiales con propiedades distintas. Sin embargo para patrones más complejos de ondas y para medios que provocan múltiples reflexiones es complicado estudiar la propagación de la onda analíticamente, en estos casos es mejor simular la propagación de la onda numéricamente.

En esta tesis se estudia la propagación de ondas elásticas en medios heterogéneos bidimensionales. Se plantea una solución numérica a partir de métodos espectrales, los cuales consisten en aproximar la onda por una combinación lineal de funciones base ortogonales y minimizar el error de dicha representación. Se verá que bajo ciertas condiciones esto es equivalente a resolver la ecuación de la onda elástica en un mallado cuyos puntos se eligen de acuerdo a la base ortogonal que se maneje.

En el segundo capítulo se estudian los fundamentos de la propagación de ondas elásticas. En él se describen los distintos patrones posibles para que una onda se propague y las propiedades del medio relacionadas con la propagación de ondas, al igual que ciertos

procesos como son la reflexión, transmisión, atenuación y la dispersión. Además, a partir de la teoría de elasticidad lineal se formula la ecuación de onda elástica y se encuentran expresiones analíticas para los patrones y velocidades de propagación de cada tipo de onda.

El tercer capítulo se enfoca al estudio de la representación de funciones en bases ortogonales y polinomios de interpolación. Se estudia la relación entre ambas representaciones al aproximar los productos internos que se usan para calcular los coeficientes de las funciones ortogonales con una cuadratura de Gauss-Jacobi en los puntos de interpolación. Se demuestra que los coeficientes de las funciones base de una representación de polinomio de grado  $N$  se pueden calcular sin error a partir de un conjunto de  $N+1$  valores interpolados de dicho polinomio.

En el cuarto capítulo se introduce el concepto de la función residual de una ecuación diferencial, la cual es la diferencia entre su solución exacta y de su aproximación polinomial; y se desarrolla el método espectral como una minimización de los términos con mayor energía de la expansión en polinomios ortogonales de la función residual. Utilizando los resultados obtenidos en el capítulo tercero se desarrolla el método pseudo-espectral como un método espectral donde los productos internos se calculan con cuadraturas de Gauss-Jacobi y se demuestra que es equivalente a resolver la ecuación diferencial parcial en un conjunto de puntos asociados a la base del polinomio utilizado en el método espectral, el cual se conoce como método de colocación. Además se presenta un algoritmo rápido para la diferenciación pseudo-espectral en el caso que las funciones base usadas sean las de Chebyshev.

En el quinto capítulo se plantea la ecuación de onda elástica para medios heterogéneos en dos dimensiones para la región  $[x_{min}, x_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$  y se plantean las ecuaciones para las fronteras de la región de modo que sean absorbentes, es decir que simulen que no hay reflexiones de onda al llegar una onda a ellas. Dicho modelo se resuelve computacionalmente usando el método pseudo-espectral de Chebyshev en las dimensiones espaciales y un método directo de Euler en el tiempo. A partir del programa, se simulan diversos escenarios de la propagación de la onda para probar si los resultados son los teóricamente esperados.



## 2 Propagación de Ondas Elásticas

Las pruebas no destructivas de materiales con ultrasonido se basan en la transmisión de energía en forma de pulsos u ondas a través de los materiales a ser examinados. Los materiales están formados por átomos los cuales pueden ser excitados para que tengan un movimiento vibratorio alrededor de sus posiciones de equilibrio [1]. Existen diversos patrones de movimiento vibratorio a nivel atómico, sin embargo son pocos los que son relevantes para las pruebas acústicas.

Cuando un material no está siendo estresado en tensión o compresión mas allá de su límite elástico, sus partículas individuales llevan a cabo oscilaciones elásticas; si las partículas de un medio son desplazadas de sus puntos de equilibrio se generan fuerzas internas de restauración las que, combinadas con la inercia de las partículas, generan los movimientos oscilatorios dentro del medio [2].

En los gases y fluidos el sonido viaja por la compresión y expansión de las moléculas en la dirección de la propagación. Sin embargo, en sólidos, las moléculas pueden vibrar en otras direcciones debido a los esfuerzos de cruce. Las ondas se clasifican dependiendo de su dirección de propagación en el espacio con patrones oscilatorios que son capaces de mantener su forma y propagación de forma estable.

En la Figura 2.1 se muestra el movimiento de las partículas responsable de la propagación longitudinal de las ondas; en estas ondas las oscilaciones de las partículas ocurren en la dirección de la propagación de la onda. Debido a que las fuerzas de compresión y de dilatación están presentes en estas ondas a veces se les conoce como ondas de presión o de compresión. Este tipo de ondas pueden ser creadas en fluidos y sólidos porque la energía viaja a través de la estructura atómica por una serie de movimientos de compresión y expansión [1].

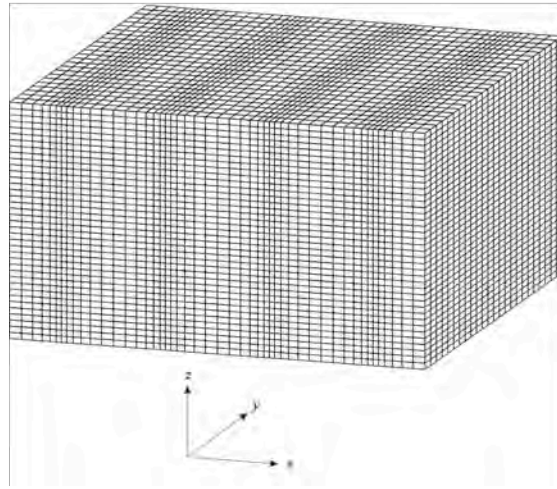


Figura 2.1 Onda Longitudinal propagándose en dirección de  $x$  [1]

En la Figura 2.2 se presenta el mecanismo de transmisión de las ondas transversales, en el cual las partículas oscilan ortogonales a la dirección de propagación. Las ondas transversales requieren de un material sólido para que puedan ser propagadas, cosa que no sucede en líquidos y gases. Además, estas ondas son débiles a comparación de las longitudinales, y por lo general se generan en materiales usando energía de de las ondas de presión [1].

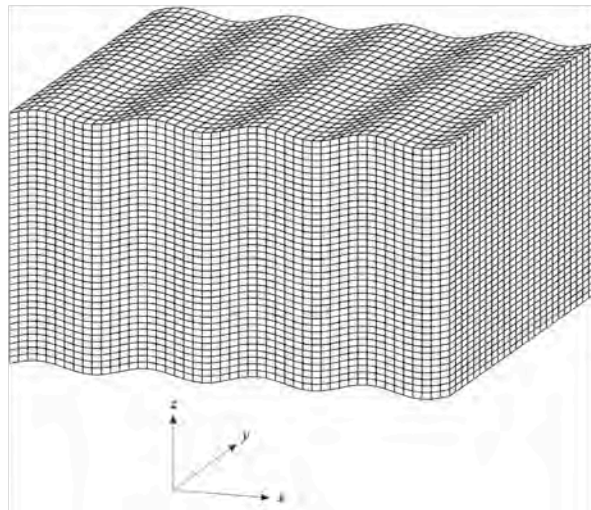


Figura 2.2 Onda transversal propagándose en dirección de  $x$  [1]

Además de las ondas longitudinales y transversales existen otros patrones de propagación. La Tabla 2.1 muestra la mayoría de los tipos de onda que pueden presentarse en sólidos.

<b>Tipo de onda</b>	<b>Vibración de las Partículas</b>
Longitudinal	Paralela a la dirección de propagación de la onda
Transversales	Perpendiculares a la dirección de propagación de la onda
Superficie – Rayleigh	Orbita elíptica – modo simétrico
Ondas Lamb	Componente perpendicular a la superficie (onda extensional)
Ondas Love	Paralela a la capa del plano, perpendicular a la dirección de la onda
Stoneley	Onda guiada a lo largo de una interface
Sezawa	Modo antisimétrico

Tabla 2.1 Tipos de onda en sólidos

Los principales modos de propagación en los sólidos son las ondas longitudinales, ondas transversales, y las ondas de superficie; y todos estos modos se ocupan para la caracterización y monitoreo de los materiales en las pruebas no destructivas con ultrasonido.

## **2.1 Modelos Matemáticos de Ondas Elásticas**

Un material elástico ideal es aquel en el cual la relación entre el esfuerzo y la deformación es lineal, isotrópica y el movimiento de una onda no causa cambios en la temperatura o el flujo de calor dentro del material. Un material sufre una deformación cuando

El vector de posición  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  de cualquier punto del material después de una deformación elástica está relacionado con su posición original  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  y el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  por medio de la relación  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ . El vector de desplazamiento se conforma de  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , donde cada componente es función de la posición y el tiempo  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$  [3].

Las ecuaciones que gobiernan los problemas de los medios elásticos son las ecuaciones de movimiento, las de deformación y las constitutivas de la elasticidad lineal [1]. La ecuación de movimiento es una expresión de la segunda ley de Newton que relaciona al tensor tensión de Cauchy  $\sigma_{ij}$ , el tensor fuerza  $F_i$  y el tensor desplazamiento  $u_i$  por la ecuación:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

La ecuación de deformación – desplazamiento, como su nombre lo dice, relaciona el tensor desplazamiento  $u_i$  con el tensor deformación  $\epsilon_{ij}$ :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.2)$$

Por último, la ecuación constitutiva para materiales elásticos dada por la ley de Hooke representa la relación entre tensiones y deformaciones mediante la ecuación:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.3)$$

donde  $C_{ijkl}$  es el tensor elasticidad.

Para medios isotrópicos el tensor elasticidad no tiene una dirección “preferida” y por lo tanto una fuerza provocará los mismos desplazamientos, con relación a si misma, sin importar la dirección en que se aplique [1], para este caso el tensor  $C_{ijkl}$  puede expresarse a partir del tensor de Kronecker:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.4)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son el primer y el segundo parámetro de Lamé, respectivamente, donde:

$$\lambda = C_{11} - 2C_{44} \quad (2.5)$$

$$\mu = C_{44} \quad (2.6)$$

Sustituyendo la ecuación ( 2.4 ) en ( 2.3 ) se obtiene la ley de Hooke para un medio isotrópico [4]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.7)$$

Sustituyendo ( 2.2 ) en ( 2.7 ):

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.8)$$

Si la ecuación ( 2.8 ) se deriva con respecto a  $x_j$  se obtiene que:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (2.9)$$

Sustituyendo ( 2.9 ) en ( 2.1 ) y reagrupando términos se llega a la ecuación de onda elástica:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

O en forma vectorial:

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

El laplaciano vectorial cumple la igualdad:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.12)$$

Si se sustituye ( 2.12 ) en ( 2.11 ) se obtiene una forma alterna de la ecuación de onda elástica:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

## 2.2 Potenciales de Desplazamiento

El teorema de Helmholtz establece que el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  puede expresarse en términos de un potencial escalar  $\phi$  y de uno vectorial  $\boldsymbol{\psi}$  de la siguiente forma [4]:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (2.14)$$

donde:

$$\nabla \times \nabla \phi \equiv 0 \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\psi} \equiv 0 \quad (2.16)$$

Sustituyendo ( 2.14 ) en ( 2.11 ):

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot (\nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}) - \mu \nabla \times \nabla \times (\nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}) + \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}) \quad (2.17)$$

A partir de ( 2.16 ) y de que  $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$  y, la ecuación ( 2.17 ) se puede llevar a la forma:

$$\nabla \left( \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - f_E \right) + \nabla \times \left( \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \mathbf{f}_V \right) = 0 \quad (2.18)$$

donde  $f_E$  y  $\mathbf{f}_V$  son los potenciales escalar y vectorial de  $\mathbf{F}$  respectivamente.

Dado que en la ecuación ( 2.18 ) el primer término es escalar y el segundo vectorial, los dos términos por separado deben ser igual a cero por separado, por lo tanto la

propagación de la onda elástica puede expresarse equivalentemente a partir de ecuaciones de onda de sus potenciales escalar y vectorial [4], es decir:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{c_L^2} \nabla^2 \phi + \frac{1}{\rho} f_E \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \frac{1}{c_T^2} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_V \quad (2.20)$$

donde

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.21)$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.22)$$

El gradiente del potencial escalar  $\phi$  es un vector que representa desplazamientos en dirección de la propagación de la onda, por lo que se le llama componente longitudinal de la onda de desplazamiento u onda longitudinal [2]:

$$\mathbf{u}_L = \nabla \phi \quad (2.23)$$

Otros nombres para este tipo de onda son ondas de dilatación, ondas de presión, ondas primarias, ondas P, y ondas irrotacionales debido a que su rotacional será nulo; y su velocidad de propagación está dada en la ecuación ( 2.21 ).

Por otro lado, el rotacional del potencial vectorial  $\boldsymbol{\psi}$  describe desplazamientos ortogonales a la dirección de propagación de la onda, por lo tanto a esta componente se le llama onda transversal  $\mathbf{u}_T$  [2]:

$$\mathbf{u}_T = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (2.24)$$

Para esta onda la divergencia del vector de desplazamiento es nula por lo que se le conoce también como onda rotacional, de corte o secundaria; y tiene una velocidad de propagación descrita por la ecuación ( 2.22 ).

### 2.3 Ondas Planas

Una onda de desplazamiento plana propagándose con una velocidad de fase  $c$  se representa por:

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{p}} - ct) \hat{\mathbf{d}} \quad (2.25)$$

En esta ecuación  $\hat{\mathbf{d}}$  y  $\hat{\mathbf{p}}$  son vectores unitarios que definen la dirección del movimiento y propagación respectivamente. El vector  $\mathbf{x}$  es el vector de posición, y  $\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{p}}$  es una constante que describe un plano normal al vector unitario  $\hat{\mathbf{p}}$ . Por lo tanto la onda es plana y los planos de fase constante son normales a  $\hat{\mathbf{p}}$  y se propagan con velocidad  $c$  [2].

A partir de la ecuación ( 2.11 ) puede verse que cuando no hay fuerzas externas aplicadas, las componentes del vector de desplazamiento en un medio homogéneo, isotrópico y lineal, se rigen por la ecuación:

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.26)$$

Al sustituir la expresión ( 2.25 ) en la ecuación ( 2.26 ) se llega a:

$$\left[ \mu \hat{\mathbf{d}} + (\lambda + \mu) (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{d}}) \hat{\mathbf{p}} - \rho c^2 \hat{\mathbf{d}} \right] f''(\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{p}} - ct) = 0 \quad (2.27)$$

lo que implica que:

$$(\mu - \rho c^2) \hat{\mathbf{d}} + (\lambda + \mu) (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{d}}) \hat{\mathbf{p}} = 0 \quad (2.28)$$

La ecuación ( 2.28 ) puede satisfacerse sólo de dos formas:



$$\hat{\mathbf{d}} = \pm \hat{\mathbf{p}} \quad (2.29)$$

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0 \quad (2.30)$$

Si  $\hat{\mathbf{d}} = \pm \hat{\mathbf{p}}$ , entonces  $\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \pm 1$  y la ecuación (2.28) se expresa como:

$$c = c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.31)$$

En este caso la dirección del movimiento es paralela a la dirección de la propagación de la onda, por lo tanto es una onda longitudinal [2].

Por otro lado, si  $\hat{\mathbf{d}} \neq \pm \hat{\mathbf{p}}$ , entonces  $\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = 0$  cumple la ecuación (2.28) y:

$$c = c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.32)$$

En este caso la dirección de la propagación de la onda es normal a la dirección del movimiento, por lo que es una onda transversal [2].

### 2.3.1 Ondas Planas Armónicas

Una onda de desplazamiento armónica de amplitud  $A$ , con velocidad de fase  $c$  en una dirección definida por el vector de propagación unitario  $\hat{\mathbf{p}}$  se representa como:

$$\mathbf{u} = A \mathbf{d} \exp[ik(\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{p}} - ct)] \quad (2.33)$$

Esta onda es de bastante utilidad ya que con ayuda de las series de Fourier una combinación lineal de ondas armónicas planas puede representar a cualquier onda periódica. Algunas de las propiedades más importantes de las ondas armónicas que se propagan por un medio isotrópico son la longitud de onda ( $\lambda$ ), la frecuencia ( $f$ ), el número de onda ( $k$ ) y la velocidad ( $c$ ) [2].

La velocidad ( $c$ ), como ya se ha visto, se refiere a la tasa a la que la fase de una onda se propaga en el espacio [4]. El número de onda ( $k$ ) indica el número de veces que vibra una onda en una unidad de distancia. La longitud de onda ( $\lambda$ ) se refiere a el periodo espacial de la onda, es decir, la distancia sobre la cual el perfil de una onda se repite [4]. Por lo anterior, de la ecuación ( 2.33 ) puede verse que la longitud de onda estará determinada por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad ( 2.34 )$$

La frecuencia ( $f$ ) es el número de ocurrencias de un perfil de onda que se repiten por unidad de tiempo [4], y se relaciona con la velocidad de fase y la longitud de onda por la ecuación:

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad ( 2.35 )$$

## 2.4 Impedancia Acústica

La impedancia acústica ( $Z$ ) es la resistencia de un material para cambiar su estado de equilibrio. Se define como el producto de la densidad y la velocidad de propagación de la onda en el material [1], es decir:

$$Z = \rho c \quad ( 2.36 )$$

La impedancia acústica es importante ya que participa en la transmisión y reflexión de las ondas en fronteras de dos materiales con diferentes impedancias acústicas, el diseño de transductores ultrasónicos, así como en el cálculo de la absorción del sonido en un medio.

Ya que las componentes longitudinales y transversales de una onda elástica se propagan con diferente velocidad para sólidos existe la impedancia acústica longitudinal ( $Z_L$ ) y la transversal ( $Z_T$ ).

La Tabla 2.2 muestra diferentes propiedades acústicas de diversos sólidos:

<b>Sólido</b>	$c_L$ (km/s)	$c_T$ (km/s)	$\rho$ (Mg/m <sup>3</sup> )	$Z_L$ (MRayls)	$Z_T$ (MRayls)
<b>Epoxi</b>	2.70	1.15	1.21	3.25	1.39
<b>Lucite</b>	2.70	1.10	1.15	3.1	1.25
<b>Pyrex</b>	5.65	3.28	2.25	13.1	7.62
<b>Aluminio</b>	6.42	3.04	2.70	17.33	8.21
<b>Latón</b>	4.70	2.10	8.64	40.6	18.15
<b>Cobre</b>	5.01	2.27	8.93	44.6	18.15
<b>Oro</b>	3.24	1.20	19.7	63.8	23.6
<b>Plomo</b>	2.16	0.7	24.6	7.83	0.44
<b>Acero</b>	5.9	3.2	7.90	46.0	24.9
<b>Berilio</b>	12.90	8.9	1.87	24.10	16.60

Tabla 2.2 Propiedades Acústicas de Sólidos [1]

## 2.5 Reflexión y Transmisión de Ondas

La reflexión de ondas acústicas en una frontera entre dos medios se debe a la diferencia en las impedancias acústicas de dichos medios. Mientras mayor sea la diferencia de impedancias mayor será el porcentaje de energía que se reflejará en la frontera entre un medio y otro, y menor el que se transmitirá. La fracción de la onda incidente reflejada y la transmitida pueden obtenerse de condicionar la velocidad de las partículas y las presiones locales como continuas en la frontera [1].

Cuando la onda incide normal a la frontera, el ratio entre la magnitud de la onda transmitida ( $A_2$ ) y la incidente ( $A$ ) está dado por:

$$\frac{A_2}{A} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (2.37)$$

Por otro lado, el ratio de las magnitudes de la onda reflejada ( $A_1$ ) y la incidente ( $A$ ) está dado por:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (2.38)$$

De las ecuaciones se puede afirmar que para incidencia normal:

- Si  $Z_2 > Z_1$  entonces la onda transmitida tendrá mayor magnitud que la reflejada.
- Si  $Z_2 < Z_1 < 3Z_2$  la onda transmitida tendrá mayor magnitud que la reflejada, y la reflejada cambia de polaridad.
- Si  $3Z_2 < Z_1$  la onda reflejada cambia de polaridad y tiene mayor magnitud que la transmitida. Además si  $Z_2 \ll Z_1$  casi toda la onda se reflejará, habrá poca transmisión.
- Si  $Z_2 = Z_1$  no hay reflexión de onda, sólo transmisión (ya que es el mismo medio).

Sin embargo, cuando no hay incidencia normal se pueden generar otros tipos de ondas y las relaciones de transmisión y reflexión dependerán también del ángulo de incidencia.

A continuación se muestran la descripción de la reflexión y transmisión de ondas que inciden en fronteras formadas por distintos tipos de medio.

### 2.5.1 Frontera Fluido – Fluido

Si una onda longitudinal que se propaga por un fluido (gas o líquido) incide en otro fluido, se refleja una onda longitudinal y se transmite otra onda longitudinal [1], como se muestra en la Figura 2.3.

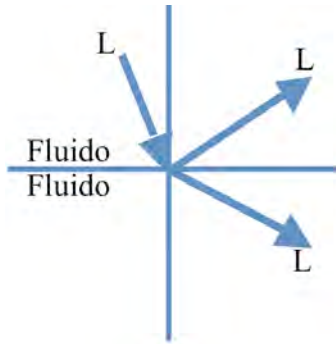


Figura 2.3 Reflexión y transmisión de ondas en frontera Fluido-Fluido

### 2.5.2 Frontera Fluido – Sólido

Cuando una onda longitudinal que se propaga por un fluido incide en un material sólido como en la Figura 2.4, parte de ésta se refleja como onda longitudinal y el resto se transmite como onda longitudinal y como onda transversal [1].

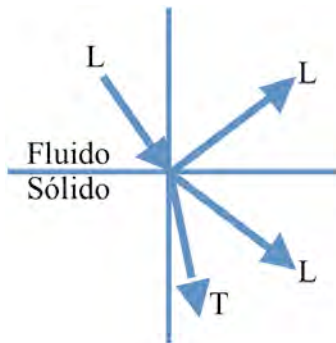


Figura 2.4 Reflexión y Transmisión de ondas en frontera Fluido-Sólido

### 2.5.3 Frontera Sólido - Fluido

En el caso de que una onda longitudinal y/o transversal que se propaga por un sólido incide en un fluido, se reflejan en el sólido ondas longitudinal y transversal y se transmite sólo una onda longitudinal al fluido.

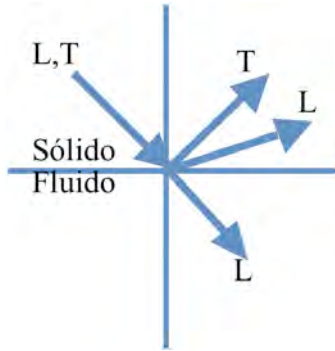


Figura 2.5 Reflexión y transmisión de ondas en frontera Sólido-Fluido

### 2.5.4 Frontera Sólido – Sólido

Si una onda longitudinal y/o transversal viaja en un sólido e incide en otro sólido de distinta impedancia habrá un par de ondas reflejadas (una longitudinal y una transversal) y también se transmitirán una longitudinal y otra transversal en el medio de incidencia [1], como muestra la Figura 2.6.

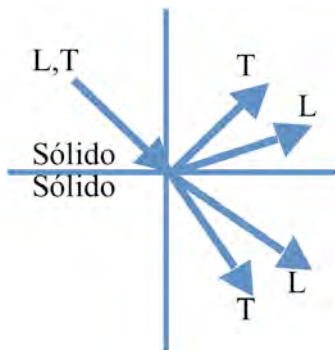


Figura 2.6 Reflexión y transmisión de ondas en frontera Sólido-Sólido

Si las ondas incidentes son planas, los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión se pueden encontrar en cada caso cumpliendo las condiciones de continuidad en la frontera para las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas; dichos coeficientes de reflexión y transmisión para ondas planas pueden encontrarse en [1-4].

## 2.6 Atenuación y Dispersión

Al viajar una onda por un material, su intensidad va disminuyendo conforme avanza. En materiales ideales la amplitud de la onda sólo se ve reducida por el hecho que la onda se

abre en el espacio, sin embargo en materiales reales existen efectos que reducen la amplitud de la onda: la dispersión y la absorción.

La absorción es la conversión de la energía de la onda a otros tipos de energía, que en el caso de ondas acústicas por lo general es a calor. Por otro lado, la dispersión se refiere a la reflexión de la onda en múltiples direcciones además de su dirección original de propagación.

Un modelo sencillo del cambio en la amplitud de la onda es:

$$u = u_0 \exp(-\alpha x) \quad (2.39)$$

donde  $u_0$  es la amplitud de la onda si atenuación en cierta posición,  $u$  es la amplitud de la onda después de haber viajado una distancia  $x$  y  $\alpha$  es el coeficiente de atenuación de la onda cuyas unidades son nepers/unidad de longitud [1].

La atenuación es por lo general proporcional al cuadrado de la frecuencia de la onda acústica. Los valores de atenuación con los que se trabajan usualmente son dados para una sola frecuencia o como un promedio para un grupo de frecuencias. Además, incluso para el mismo tipo de material la atenuación puede variar dependiendo del proceso de fabricación de éste, por lo que hay que tener en cuenta que valores nominales de atenuación de los materiales no necesariamente son precisos.

Por otro lado la dispersión se refiere a la separación de ondas de distinta frecuencia al pasar por un material. Esto sucede si un conjunto de partículas que se mueve en una dirección determinada rebota sucesivamente con las partículas del medio por el que se mueve hasta perder una dirección privilegiada de movimiento.

La dispersión y atenuación de las ondas dificultan en ocasiones las pruebas de ultrasonido en los materiales ya que deforman la onda esperada y si no se toman en cuenta pueden causar que el medio no se bien caracterizado.

### 3 Aproximación de Funciones

Para resolver de forma más sencilla muchos problemas es una práctica común representar las funciones por aproximaciones que son combinaciones lineales de funciones más simples. A continuación se mostrarán dos formas de aproximar una función: la primera consiste en combinar linealmente polinomios ortogonales, mientras que la segunda se basa en interpolar la función a partir de un conjunto de valores muestreados de ésta.

#### 3.1 Aproximación de Funciones con Polinomios Ortogonales

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones arbitrarias, el producto interno de  $f(x)$  y  $g(x)$  con respecto a la función peso  $\rho(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  se define [5] como:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx \quad (3.1)$$

Se dice que un conjunto de funciones  $\{\Phi_n(x)\}$  es ortogonal con respecto a un dado producto interno si y solo si:

$$\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle = \begin{cases} \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (3.2)$$

La ventaja de que el conjunto de funciones base sean ortogonales es que el cálculo de los coeficientes de la expansión de una función es más sencillo [6]. Sea la expansión:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(x) \quad (3.3)$$

si se toma el producto interno de ambos lados con la  $n$ -ésima función base  $\Phi_n$  se tiene que:

$$\langle f(x), \Phi_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k, \Phi_n \right\rangle \quad (3.4)$$

El producto interno es una operación lineal, por lo tanto:



$$\langle f(x), \Phi_n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle \Phi_k, \Phi_n \rangle \quad (3.5)$$

Si y sólo si las funciones base son ortogonales, entonces:

$$\langle f(x), \Phi_n \rangle = a_n \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle \quad (3.6)$$

$$a_n = \frac{\langle f(x), \Phi_n \rangle}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle} \quad (3.7)$$

Si únicamente se consideran los primeros  $N+1$  términos de la expansión (3.3) se tiene una aproximación a la función  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n \Phi_n(x) \quad (3.8)$$

con los coeficientes  $a_n$  determinados por (3.7) [5].

Para el caso  $M$ -dimensional se tiene que:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_M) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \dots \sum_{n_M=0}^{N_M} a_{n_1, n_2, \dots, n_M} \Phi_{n_1}(x_1) \Phi_{n_2}(x_2) \dots \Phi_{n_M}(x_M) \quad (3.9)$$

donde los valores de  $a_{n_1, n_2, \dots, n_M}$  están determinados por:

$$a_{n_1, n_2, \dots, n_M} = \frac{\langle \dots \langle \langle f(x_1, x_2, \dots, x_M), \Phi_{n_1}(x_1) \rangle, \Phi_{n_2}(x_2) \rangle, \dots, \Phi_{n_M}(x_M) \rangle \rangle}{\langle \Phi_{n_1}, \Phi_{n_1} \rangle \langle \Phi_{n_2}, \Phi_{n_2} \rangle \dots \langle \Phi_{n_M}, \Phi_{n_M} \rangle} \quad (3.10)$$

### 3.1.1 Polinomios Ortogonales de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev  $\{T_n\}$  son un conjunto ortogonal de polinomios con respecto a la función peso  $\rho(x)$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , donde  $\rho(x)$  se define como [5]:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.11)$$

Los polinomios de Chebyshev se definen con la relación de recurrencia [5]:

$$\begin{cases} T_0 \equiv 1 \\ T_1(x) \equiv x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

por lo que su producto interno está dado por [5]:

$$\langle T_m, T_n \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

### 3.2 Aproximación Interpolante y Funciones Cardinales

El producto interno integral es una operación básica para la representación de funciones con bases ortogonales, pero calcularlo analíticamente representa un inconveniente en métodos computacionales. Sin embargo, el producto interno puede ser aproximado numéricamente con gran exactitud por medio de cuadraturas gaussianas, las cuales son fórmulas de integración numérica basadas en aproximaciones interpolantes de las funciones.

Una aproximación interpolante de una función  $f(x)$  es una expresión  $f_N(x)$ , usualmente un polinomio ordinario o trigonométrico, de grado  $N$  cuyos  $N+1$  coeficientes están determinados de forma que el interpolante coincide con  $f(x)$  en cada uno de los  $N+1$  puntos de interpolación [5], es decir:

$$f_N(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.14)$$

El esquema más sencillo de interpolación es el lineal, que consiste en crear una línea a partir de dos puntos haciendo que la aproximación de una función dada sea:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \quad (3.15)$$

De esta forma,  $f_1(x)$  es un polinomio único que satisface las condiciones de interpolación:

$$f_1(x_0) = f(x_0); f_1(x_1) = f(x_1).$$

La interpolación cuadrática se basa en especificar el lugar geométrico de una parábola a partir de tres puntos. Por lo tanto, se puede aproximar la función  $f(x)$  por el polinomio

cuadrático  $f_2(x)$  que satisface las tres condiciones de interpolación:  $f_2(x_0) = f(x_0)$ ;

$f_2(x_1) = f(x_1)$ ;  $f_2(x_2) = f(x_2)$ , es decir:

$$\begin{aligned} f_2(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

En general, se pueden satisfacer cualquier conjunto de  $N+1$  puntos por un polinomio de grado  $N$  con la fórmula de interpolación de Lagrange [5]:

$$f_N(x) = \sum_{i=0}^N f(x_i) C_i(x) \quad (3.17)$$

donde  $C_i(x)$  es la  $i$ -ésima función cardinal que cumple con la igualdad:

$$C_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (3.18)$$

y está definida por:

$$C_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3.19)$$

Las funciones cardinales también se conocen como polinomios fundamentales para interpolación puntual, bases de Lagrange o funciones de forma.

Los  $N$  factores  $(x-x_j)$  hacen que el interpolante sea nulo en todos los puntos de interpolación con excepción de  $x_i$ , ya que se omite la situación en que  $j = i$ , mientras que el denominador hace que la función cardinal sea 1 para  $x = x_i$ .

La representación con funciones cardinales no es computacionalmente eficiente, pero representa la posibilidad de ajustar un polinomio interpolante de cualquier orden a cualquier función. Debe notarse que los puntos de interpolación no necesariamente tienen que ser equiespaciados, por lo que la fórmula ( 3.17 ) puede usarse en situaciones con puntos con espaciados variantes [6].

Sea  $f(x)$  es una función con al menos  $(N+1)$  derivadas en el intervalo de interés, y  $f_N(x)$  su interpolante de Lagrange de orden  $N$ , entonces el error de interpolación está dado por:

$$f(x) - f_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^N (x - x_i) \quad (3.20)$$

para alguna  $\xi$  en el intervalo definido por  $x$  y los puntos de interpolación. El punto  $\xi$  depende de la función que se está aproximando, de  $N$ , de  $x$ , y de la localización de los puntos de interpolación [6]. A partir de la ecuación ( 3.20 ) se puede ver que el error de la interpolación de Lagrange al representar un polinomio es nulo, si el número de puntos de interpolación es mayor al grado del polinomio.

### 3.3 Cuadratura de Gauss

Una cuadratura es una fórmula que sirve para evaluar numéricamente una integral definida. Éstas consisten en una suma ponderada de valores del integrando para ciertos puntos.

Sea  $f(x)$  una función definida en el intervalo  $[a,b]$ , la fórmula de cuadratura para su integral es:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^N w_i f(x_i) \quad (3.21)$$

donde la exactitud de la ecuación ( 3.21 ) dependerá de los puntos  $\{x_i\}$  y de los valores de  $w_i$  que se escojan, así como de la función que se integre.

La cuadratura Gaussiana consiste en ajustar un polinomio de interpolación de Lagrange  $f_N(x)$  al integrando  $f(x)$  y después integrar el interpolante [5], es decir:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_N(x)dx \quad (3.22)$$

Al sustituir ( 3.17 ) en ( 3.22 ) se obtiene, que la cuadratura Gaussiana de orden  $N$  (o de  $N+1$  puntos) está dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_N(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^N f(x_i)C_i(x)dx = \sum_{i=0}^N w_i f(x_i) \quad (3.23)$$

donde las funciones de ponderación  $w_i$  son:

$$w_i = \int_a^b C_i(x)dx \quad (3.24)$$

y  $C_i(x)$  son las funciones cardinales en el conjunto de puntos  $\{x_i\}$ , definidas por la ecuación ( 3.19 ).

De la ecuación ( 3.20 ) en el intervalo  $[a,b]$ , y de ( 3.23 ) se puede ver que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^N w_i f(x_i) + \int_a^b \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^N (x-x_i)dx \quad (3.25)$$

En la ecuación ( 3.25 ) se puede ver que la cuadratura Gaussiana es exacta para cualquier conjunto de puntos  $\{x_i\}$  si  $f(x)$  es un polinomio de grado  $N$  o menor, ya que esto hace que  $f^{(N+1)}(\xi)=0$  en todo el intervalo de integración  $[a,b]$ .

Como ya se ha mencionado, el conjunto de puntos de interpolación no tiene que ser necesariamente equiespaciado; si los puntos de interpolación  $\{x_i\}$  se dejan como parámetros libres además de los pesos  $w_i$ , entonces se contará con el doble de parámetros para maximizar la exactitud del método.

### 3.3.1 Cuadratura de Gauss-Jacobi

Considérese la integral de la función  $f(x) \cdot \rho(x)$  el intervalo  $[a, b]$ , donde  $\rho(x)$  es una función peso asociada con un conjunto de polinomios ortogonales  $\{\Phi_n(x)\}$  [5]. La cuadratura de Gauss-Jacobi aproxima dicha integral por:

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx \approx \sum_{i=0}^N w_i f(x_i) \quad (3.26)$$

donde:

$$w_i = \int_a^b \rho(x) C_i(x) dx \quad (3.27)$$

A partir de la ecuación ( 3.20 ) se puede llegar a:

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx = \sum_{i=0}^N w_i f(x_i) + \int_a^b \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^N (x - x_i) \rho(x) dx \quad (3.28)$$

Si los  $N+1$  puntos de interpolación  $\{x_i\}$  se escogen de modo que sean las raíces del polinomio  $\Phi_{N+1}(x)$  se tendrá que:

$$\prod_{i=0}^N (x - x_i) = \alpha_{N+1} \Phi_{N+1}(x) \quad (3.29)$$

Además, si  $f(x)$  es un polinomio de grado menor o igual a  $2N+1$ , entonces  $f^{(N+1)}(\xi)$  será un polinomio de grado  $N$  de modo que puede representarse por:

$$\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} = \sum_{i=0}^N \beta_i \Phi_i(x) \quad (3.30)$$

A partir de ( 3.29 ) y ( 3.30 ) se tiene que:

$$\int_a^b \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^N (x - x_i) \rho(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^N \beta_i \Phi_i(x) \cdot \alpha_{N+1} \Phi_{N+1}(x) \cdot \rho(x) dx \quad (3.31)$$

Desarrollando la ecuación ( 3.31 ) y dado que el conjunto de polinomios  $\{\Phi_n(x)\}$  es ortogonal, se obtiene:

$$\int_a^b \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^N (x-x_i) \rho(x) dx = \alpha_{N+1} \sum_{i=0}^N \beta_i \langle \Phi_i(x), \Phi_{N+1}(x) \rangle = 0 \quad (3.32)$$

Por lo tanto, si los  $N+1$  puntos de interpolación  $\{x_i\}$  se escogen de modo que sean las raíces del polinomio de grado  $N+1$  del conjunto de polinomios ortogonales  $\{\Phi_n(x)\}$  respecto a la función peso  $\rho(x)$  en el intervalo  $[a,b]$ , y  $f(x)$  es un polinomio de grado menor o igual a  $2N+1$ , entonces la ecuación ( 3.26 ) logra la igualdad [6]; estos puntos de interpolación son llamados puntos de interpolación de Gauss-Jacobi.

En el caso de que la función peso sea  $\rho(x)=(1+x^2)^{-0.5}$  se puede comprobar que la ecuación ( 3.26 ) también es exacta si se usan como puntos de interpolación a los puntos extremos del intervalo,  $x=\pm 1$ , y a las  $N-1$  raíces de la derivada de  $\Phi_N(x)$  [5]. Dichos puntos se conocen como puntos de interpolación de Gauss-Lobatto.

### 3.3.2 Puntos de Interpolación para Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev tienen la propiedad de que si  $x \in [-1,1]$ , entonces  $|T_n(x)| \leq 1$  y se cumple la igualdad:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \quad (3.33)$$

En la ecuación ( 3.33 ) se ve que las raíces de  $T_{N+1}$  se dan cuando  $\theta = ((2i-1)\pi)/(2(N+1))$ , por tanto los puntos de interpolación de Gauss-Jacobi-Chebyshev son:

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi(2i-1)}{2(N+1)}\right), \quad i = 1, \dots, N+1 \quad (3.34)$$

Por otro lado, al derivar la ecuación ( 3.33 ) se encuentra que:

$$\frac{dT_n}{d\theta}(\theta) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \quad (3.35)$$

donde las raíces son  $\theta = \pi i/N$ . Por lo anterior, los puntos de interpolación de Gauss-Lobatto para polinomios de Chebyshev son:

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right), \quad i = 0, \dots, N \quad (3.36)$$

Ya sea que en el cálculo de las cuadraturas se usen los puntos de interpolación de Gauss-Jacobi o los de Gauss-Lobatto, para tener el valor de los pesos  $w_i$  es necesario conocer las funciones cardinales; las cuales pueden obtenerse a partir de la ecuación (3.19).

### 3.3.3 Producto Interno Discreto

Se define como el producto interno discreto de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  con respecto a la función de peso  $\rho(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  a la cuadratura:

$$\langle f, g \rangle_G \equiv \sum_{i=0}^N w_i f(x_i) g(x_i) \quad (3.37)$$

$$w_i = \int_a^b \rho(x) C_i(x) dx \quad (3.38)$$

donde puntos de interpolación  $\{x_i\}$  son los puntos de interpolación de Gauss-Jacobi o de Gauss-Lobatto [5].

El producto interno discreto es en sí una cuadratura de Gauss-Jacobi de la función  $f(x) \cdot g(x) \cdot \rho(x)$ , por lo tanto si el producto  $f(x) \cdot g(x)$  es un polinomio de grado  $2N+1$  o menor, entonces el producto interno integral y el discreto son iguales. Una consecuencia interesante del hecho anterior es que si un conjunto de  $N+1$  funciones base son ortogonales bajo el producto interno integral entonces son ortogonales con respecto al producto interno discreto de orden  $N$ . Por lo anterior, el producto interno discreto puede



servir para calcular numéricamente coeficientes de expansiones de funciones en bases ortogonales.

### 3.4 Relación entre Coeficientes Espectrales y Valores Interpolados

Sea  $f_N(x)$  un polinomio de grado  $N$  el cual interpola a la función  $f(x)$  en los  $(N+1)$  puntos  $\{x_i\}$  que son raíces del polinomio  $\Phi_{N+1}(x)$ :

$$f_N(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.39)$$

El polinomio  $f_N(x)$  puede expandirse sin error alguno como una suma ponderada de las primeras  $(N+1)$  funciones ortogonales  $\Phi_n(x)$  ya que es un polinomio de orden  $N$  [5], es decir:

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \Phi_n(x) \quad (3.40)$$

O expresado como transformación matricial:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{a} \quad (3.41)$$

donde:

$$(\mathbf{a})_{i+1} \equiv a_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.42)$$

$$(\mathbf{f})_{i+1} \equiv f_N(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.43)$$

$$(\mathbf{K})_{i+1, j+1} \equiv \Phi_j(x_i), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.44)$$

Por otro lado, los coeficientes  $\{a_n\}$  de esta expansión se pueden calcular exactamente con el producto interno discreto:

$$a_n = \frac{\langle f_N, \Phi_n \rangle_G}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_G} = \frac{\sum_{i=0}^N w_i f_N(x_i) \Phi_n(x_i)}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_G} \quad (3.45)$$

Lo anterior también se puede expresar como la transformación matricial:

$$\mathbf{a} = \mathbf{L}\mathbf{f} \quad (3.46)$$

con la matriz L definida por:

$$(\mathbf{L})_{i+1,j+1} \equiv \frac{\Phi_i(x_j) w_j}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle_G}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.47)$$

De las ecuaciones ( 3.41 ) y ( 3.46 ) puede verse que la matriz L es la inversa de la matriz K. Además, la matriz L puede definirse alternativamente como:

$$(\mathbf{L})_{i+1,j+1} \equiv \frac{\langle C_j, \Phi_i \rangle_G}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle_G}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.48)$$

ya que el producto interno discreto de la  $j$ -ésima función cardinal y de la  $i$ -ésima función base es:

$$\langle C_j, \Phi_i \rangle_G = \sum_{k=0}^N w_k C_j(x_k) \Phi_i(x_k) = \Phi_i(x_j) w_j \quad (3.49)$$

Las ecuaciones ( 3.41 ) y ( 3.46 ) dan la posibilidad de calcular los coeficientes de una representación espectral de una función a partir de una representación interpolante, y viceversa. Además, al trabajar con ciertas bases, como Fourier o Chebyshev, los productos Lf y Ka pueden ser resueltos por un algoritmo rápido con menor número de operaciones que el producto matricial lo que es de gran utilidad para problemas con muchos puntos de interpolación y mayor número de dimensiones [5].

## 4 Métodos Espectrales

Los métodos espectrales son un conjunto de procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales e integrales que se basan en asumir que una función desconocida  $u(x,t)$  puede aproximarse por la combinación lineal de  $N+1$  funciones base  $\Phi_n(x)$  cuyos coeficientes varían en el tiempo, es decir:

$$u(x,t) \approx u_N(x,t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) \Phi_n(x) \quad (4.1)$$

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$Tu(x,t) = Hu(x,t) + f(x,t) \quad (4.2)$$

con condiciones de frontera:

$$Bu(x,t) = g(x,t) \quad (4.3)$$

donde  $T$  es un operador diferencial en el tiempo,  $H$  es un operador diferencial en las variables espaciales y  $B$  es un operador diferencial en la frontera.

Al sustituir  $u_N(x,t)$  de (4.1) en lugar de  $u(x,t)$  en la ecuación (4.2) se obtiene la función residual:

$$R(x,t) = Tu_N - Hu_N - f \quad (4.4)$$

El objetivo de los métodos espectrales es minimizar la función residual para que  $u_N(x)$  tienda a ser la solución de ecuación (4.2) [5].

## 4.1 Método de Galerkin

El método de Galerkin es un método espectral parte del hecho de que la función residual puede ser expresada como una combinación lineal de funciones base ortogonales, es decir:

$$R(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t) \Phi_n(x) \quad (4.5)$$

donde:

$$r_n(t) = \frac{\langle R(x,t), \Phi_n \rangle}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle} \quad (4.6)$$

Si  $N$  es suficientemente grande entonces los valores de  $r_n$  para  $n > N$  serán muy pequeños y por lo tanto se puede minimizar a  $R(x,t)$  haciendo los  $N$  primeros términos  $r_n$  de la ecuación ( 4.5 ) iguales a cero [6].

Al forzar los términos  $r_n$  a ser cero en la ecuación ( 4.6 ) se obtiene que:

$$r_n = 0 \Leftrightarrow \langle R(x,t), \Phi_n \rangle = 0 \quad (4.7)$$

Sustituyendo ( 4.4 ) en ( 4.7 ):

$$\langle Tu_N - Hu_N - f, \Phi_n \rangle = 0 \quad (4.8)$$

Al sustituir la ecuación ( 4.1 ) en ( 4.8 ) se obtiene:

$$\left\langle T \sum_{k=0}^N a_k(t) \Phi_k(x) - H \sum_{k=0}^N a_k(t) \Phi_k(x) - f(x,t), \Phi_n(x) \right\rangle = 0 \quad (4.9)$$

Ya que el producto interno es una operación lineal:

$$T \sum_{k=0}^N a_k(t) \langle \Phi_k, \Phi_n \rangle = \sum_{k=0}^N a_k(t) \langle H \Phi_k, \Phi_n \rangle + \langle f(x,t), \Phi_n(x) \rangle \quad (4.10)$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones base, a partir de ( 4.10 ) se llega a la ecuación diferencial de los coeficientes  $a_n(t)$ :

$$T a_n(t) \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle = \sum_{k=0}^N a_k(t) \langle H \Phi_k, \Phi_n \rangle + \langle f(x,t), \Phi_n(x) \rangle \quad (4.11)$$

para  $n=0,1,\dots,N$ .

Equivalentemente, la ecuación ( 4.11 ) puede expresarse como una ecuación diferencial matricial:

$$T \mathbf{a} = \mathbf{H}_\Phi \mathbf{a} + \mathbf{f}_\Phi \quad (4.12)$$

donde:

$$(\mathbf{a})_j = a_j(t), \quad j = 0,1,\dots,N \quad (4.13)$$

$$(\mathbf{H}_\Phi)_{i,j} = \frac{\langle H \Phi_j, \Phi_i \rangle}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle}, \quad i, j = 0,1,\dots,N \quad (4.14)$$

$$(\mathbf{f}_\Phi)_i = \frac{\langle f(x,t), \Phi_i \rangle}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle}, \quad i = 0,1,\dots,N \quad (4.15)$$

Cuando las funciones base no satisfacen individualmente las condiciones de frontera descritas por la ecuación ( 4.3 ), es necesario reemplazar algunas columnas de la ecuación ( 4.12 ) por ecuaciones que representen dichas condiciones, o crear un nuevo conjunto de funciones base que sí las cumplan [5].

El método de Galerkin también es muy usado en cálculos analíticos y simbólicos ya que su formulación es exacta conforme  $N \rightarrow \infty$  y si los polinomios que se usan son completos entonces se puede usar para hacer análisis de las soluciones de diversos problemas analíticamente, sin necesidad de hacer aproximaciones numéricas [5].

Este método es complicado de formular, en especial para problemas con parámetros no homogéneos y con no linealidades. Además, hay que calcular analíticamente los coeficientes de la matriz H y el vector f, lo que al final se traduce en un mayor tiempo de

procesamiento. Sin embargo, en situaciones donde el grado de los polinomios está restringido a ser bajo (por ejemplo  $N=5$ ), usar el método de Galerkin mejora considerablemente la solución. El uso de un grado pequeño en los polinomios es común en aplicaciones donde se cuenta con una base (por lo general incompleta) de polinomios que se apegan muy bien a la solución, y donde además, por la complejidad de los cálculos, se requiere que  $N$  sea pequeña. Con excepción de dichos casos, en general se recomienda utilizar el método de colocación, el cual se desarrollará a continuación a partir del método de Galerkin.

## 4.2 Método Pseudoespectral o de Colocación

Si los productos internos de la ecuación ( 4.12 ) se calculan con el producto interno discreto definido por la ecuación ( 3.37 ), entonces se obtiene la ecuación diferencial matricial pseudoespectral:

$$T\mathbf{a} = \mathbf{H}_G\mathbf{a} + \mathbf{f}_G \quad (4.16)$$

donde:

$$(\mathbf{a})_j = a_j(t), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.17)$$

$$(\mathbf{H}_G)_{i+1,j+1} = \frac{\langle H\Phi_j, \Phi_i \rangle_G}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle_G} = \frac{\sum_{n=0}^N w_n H\Phi_j(x_n)\Phi_i(x_n)}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle_G}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N \quad (4.18)$$

$$(\mathbf{f}_G)_{i+1} = \frac{\langle f(x,t), \Phi_i(x) \rangle_G}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle_G} = \frac{\sum_{n=0}^N w_n f(x_n,t)\Phi_i(x_n)}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle_G}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.19)$$

La formulación anterior del método espectral puede ser resuelta con un programa computacional para  $\mathbf{a}$ . Sin embargo, trabajar con los coeficientes de la expansión espectral en casos donde la base de polinomios usada no cumple con las condiciones de

frontera resulta complicado ya que el forzar dichas condiciones puede no ser inmediato [5].

Para evitar el inconveniente anteriormente mencionado, se puede utilizar la relación que hay entre los coeficientes espectrales y el valor de la función en los puntos de interpolación, la cual está expresada por la ecuación ( 3.46 ). Aplicando dicha relación y factorizando las matrices  $H_G$  y  $f_G$ , se puede concluir que la ecuación ( 4.16 ) puede representarse como:

$$T(\mathbf{Lu}) = (\mathbf{LR})(\mathbf{Lu}) + (\mathbf{Lf}) \quad (4.20)$$

donde:

$$(\mathbf{u})_j = u(x_j, t), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.21)$$

$$(\mathbf{f})_j = f(x_j, t), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.22)$$

$$(\mathbf{L})_{i+1, j+1} = \frac{w_j \Phi_i(x_j)}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle_G} = \frac{\langle C_j, \Phi_i \rangle_G}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle_G}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N \quad (4.23)$$

$$(\mathbf{R})_{i+1, j+1} = H \Phi_j(x_i), \quad i, j = 0, 1, \dots, N \quad (4.24)$$

Ya que el operador  $T$  es lineal y los coeficientes de la matriz  $L$  no varían en el tiempo:

$$\mathcal{T} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Lu} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{LRLu} + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Lf} \quad (4.25)$$

Simplificando la ecuación ( 4.25 ) se llega a la ecuación diferencial matricial conocida como método pseudoespectral de colocación [5]:

$$\mathcal{T} \mathbf{u} = \mathbf{Mu} + \mathbf{f} \quad (4.26)$$

donde:

$$(\mathbf{M})_{i+1,j+1} = (\mathbf{RL})_{i+1,j+1} = \sum_{k=0}^N H\Phi_j(x_k) \frac{\langle C_j, \Phi_k \rangle_G}{\langle \Phi_k, \Phi_k \rangle_G} = HC_j(x_i) \quad (4.27)$$

Una expresión equivalente a la ecuación ( 4.26 ) es:

$$Tu(x_i, t) = \sum_{j=0}^N HC_j(x_i)u(x_j, t) + f(x_i, t), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.28)$$

Puede verse que en el método pseudoespectral de colocación se discretizan las variables, donde las condiciones de frontera estén definidas, en los puntos de interpolación  $x_i$  asociados al polinomio usado para minimizar la función residual; las incógnitas de la ecuación son los valores de  $u(x_i, t)$ , y las derivadas de  $u(x, t)$  con respecto a  $x$  en los puntos  $x_i$  son una combinación lineal de las derivadas de su representación por funciones cardinales ponderadas por los valores de  $u(x_i, t)$ .



## 5 Modelado y Simulación de la Propagación de Ondas Elásticas en Medios Heterogéneos Bidimensionales

En el capítulo 2 se estudió el modelo de propagación de ondas elásticas en medios lineales, isotrópicos y homogéneos y a partir de la ley de Newton:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

y de la ley de Hooke para medios lineales, isotrópicos y homogéneos;

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (5.2)$$

se llegó a la ecuación de onda elástica:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5.3)$$

Si el medio no es homogéneo, entonces los parámetros de Lamé en la ecuación ( 5.2 ) varían con respecto a la posición, lo que hace en este caso la ecuación de onda elástica sea:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5.4)$$

Si se limita el problema a dos dimensiones, entonces el vector de desplazamiento se compone de  $u = u_x \mathbf{i} + u_z \mathbf{k}$ . En este caso el modelo de la propagación de ondas elásticas en un medio heterogéneo, lineal e isotrópico puede ser expresado por el conjunto de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}(x,z,t) &= \frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}(x,z,t) + \frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}(x,z,t) + \frac{1}{\rho(x,z)} F_x(x,z,t) \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}(x,z,t) &= \frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}(x,z,t) + \frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}(x,z,t) + \frac{1}{\rho(x,z)} F_z(x,z,t) \\
\sigma_{zz}(x,z,t) &= \lambda(x,z) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x}(x,z,t) + \frac{\partial u_z}{\partial z}(x,z,t) \right) + 2\mu(x,z) \frac{\partial u_z}{\partial z}(x,z,t) \\
\sigma_{xz}(x,z,t) &= \mu(x,z) \left( \frac{\partial u_z}{\partial x}(x,z,t) + \frac{\partial u_x}{\partial z}(x,z,t) \right) \\
\sigma_{xx}(x,z,t) &= \lambda(x,z) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x}(x,z,t) + \frac{\partial u_z}{\partial z}(x,z,t) \right) + 2\mu(x,z) \frac{\partial u_x}{\partial x}(x,z,t)
\end{aligned} \right. \quad (5.5)$$

Si se deriva con respecto al tiempo a las ecuaciones correspondientes a la ley de Hooke en el sistema de ecuaciones ( 5.5 ), y en vez de usar  $u_x$  y  $u_z$  como las variables del sistema se usan sus las velocidades de desplazamiento  $v_x$  y  $v_z$ , entonces se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer grado dado por:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t}(x,z,t) &= \frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}(x,z,t) + \frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}(x,z,t) + \frac{1}{\rho(x,z)} F_u(x,z,t) \\
\frac{\partial v_z}{\partial t}(x,z,t) &= \frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}(x,z,t) + \frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}(x,z,t) + \frac{1}{\rho(x,z)} F_w(x,z,t) \\
\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t}(x,z,t) &= \lambda(x,z) \frac{\partial v_x}{\partial x}(x,z,t) + (\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)) \frac{\partial v_z}{\partial z}(x,z,t) \\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t}(x,z,t) &= \mu(x,z) \frac{\partial v_z}{\partial x}(x,z,t) + \mu(x,z) \frac{\partial v_x}{\partial z}(x,z,t) \\
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t}(x,z,t) &= (\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)) \frac{\partial v_x}{\partial x}(x,z,t) + \lambda(x,z) \frac{\partial v_z}{\partial z}(x,z,t)
\end{aligned} \right. \quad (5.6)$$

donde las velocidades de desplazamiento  $v_x$  y  $v_z$  están definidas por:

$$v_i(x,z,t) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,z,t), \quad i = x, z \quad (5.7)$$

El sistema de ecuaciones ( 5.6 ) se puede expresar matricialmente como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(x, z, t) = \mathbf{A}(x, z) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, z, t) + \mathbf{B}(x, z) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}(x, z, t) + \mathbf{F}_\rho(x, z, t) \quad (5.8)$$

donde:

$$\mathbf{U}(x, z, t) = \left( v_x(x, z, t) \quad v_z(x, z, t) \quad \sigma_{zz}(x, z, t) \quad \sigma_{xz}(x, z, t) \quad \sigma_{xx}(x, z, t) \right)^T \quad (5.9)$$

$$\mathbf{A}(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho(x, z) \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho(x, z) & 0 \\ \lambda(x, z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu(x, z) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(x, z) + 2\mu(x, z) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{B}(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/\rho(x, z) & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho(x, z) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(x, z) + 2\mu(x, z) & 0 & 0 & 0 \\ \mu(x, z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(x, z) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{F}_\rho(x, z, t) = \left( \frac{F_u(x, z, t)}{\rho(x, z)} \quad \frac{F_w(x, z, t)}{\rho(x, z)} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T \quad (5.12)$$

El sistema de ecuaciones ( 5.8 ) modela la propagación de la onda elástica en un plano infinito, sin embargo para resolver computacionalmente este problema es conveniente limitar el estudio de la onda a una región finita de interés. Si se limita el problema a la región cerrada  $[x_{min}, x_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$ , entonces en la frontera de dicha región deben definirse ecuaciones que simulen una frontera absorbente, es decir, que las ondas que incidan ahí no tengan reflexiones. Esto se puede lograr creando nuevas ecuaciones para la frontera modificando los valores propios de A y B, ya que estos valores representan las velocidades de propagación en sentidos positivos y negativos de ondas longitudinales y transversales [8].

La descomposición en valores propios de la matriz A es:

$$\mathbf{A}(x,z) = \mathbf{Q}_A(x,z) \Lambda_A(x,z) \mathbf{Q}_A^{-1}(x,z) \quad (5.13)$$

donde:

$$\mathbf{Q}_A(x,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}}{\lambda(x,z)\sqrt{\rho(x,z)}} & -\frac{\sqrt{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}}{\lambda(x,z)\sqrt{\rho(x,z)}} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{\rho(x,z)\mu(x,z)} & -\sqrt{\rho(x,z)\mu(x,z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}{\lambda(x,z)} & \frac{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}{\lambda(x,z)} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{Q}_A^{-1}(x,z) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{\rho(x,z)\mu(x,z)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{\rho(x,z)\mu(x,z)}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\lambda(x,z)}{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)} \\ \frac{\lambda(x,z)\sqrt{\rho(x,z)}}{2\sqrt{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda(x,z)}{2(\lambda(x,z)+2\mu(x,z))} \\ -\frac{\lambda(x,z)\sqrt{\rho(x,z)}}{2\sqrt{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda(x,z)}{2(\lambda(x,z)+2\mu(x,z))} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

$$\Lambda_A(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\mu(x,z)}}{\sqrt{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu(x,z)}}{\sqrt{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Las columnas de la matriz  $\mathbf{Q}_A$  son los vectores propios de la matriz A,  $\mathbf{Q}_A^{-1}$  es la inversa de  $\mathbf{Q}_A$  y la matriz  $\Lambda_A$  es una matriz diagonal con los valores propios de A en su diagonal.

Se puede ver que los valores propios de A corresponden a las velocidades de propagación de las ondas longitudinales y transversales; los positivos corresponden a las ondas que se propagan en dirección negativa de  $x$  y los negativos a las que se propagan en dirección positiva de  $x$  [8].

Para que la frontera  $x=x_{max}$  sea absorbente se requiere que a lo largo de ella no existan ondas propagándose en dirección negativa de  $x$ . Esto se puede lograr remplazando la matriz A en la ecuación ( 5.8 ) con una matriz  $A^{(-)}$  que no tenga los valores propios positivos la de matriz A, ya que estos corresponden a las ondas viajando en sentido negativo de  $x$ . Por lo anterior, la matriz  $A^{(-)}$  se define como:

$$\mathbf{A}^{(-)}(x,z) = \mathbf{Q}_A(x,z)\Lambda_A^{(-)}(x,z)\mathbf{Q}_A^{-1}(x,z) \quad ( 5.17 )$$

donde:

$$\Lambda_A^{(-)}(x,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} \end{pmatrix} \quad ( 5.18 )$$

o equivalentemente como:

$$\mathbf{A}^{(-)}(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho(x,z)} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & \frac{1}{2\rho(x,z)} & 0 \\ \frac{\lambda(x,z)}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(x,z)}{2\sqrt{\rho(x,z)(\lambda(x,z) + 2\mu(x,z))}} \\ 0 & \frac{\mu(x,z)}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 \\ \frac{\lambda(x,z)}{2} + \mu(x,z) & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} \end{pmatrix} \quad ( 5.19 )$$

Del mismo modo, la frontera absorbente en  $x=x_{min}$  se modela remplazando la matriz A en la ecuación ( 5.8 ) con una matriz  $A^{(+)}$  que no tenga los valores propios negativos de A, de modo que sólo se consideren las ondas propagándose en sentido negativo en x. Por lo anterior, la matriz  $A^{(+)}$  se define como:

$$\mathbf{A}^{(+)}(x,z) = \mathbf{Q}_A(x,z) \Lambda_A^{(+)}(x,z) \mathbf{Q}_A^{-1}(x,z) \quad (5.20)$$

donde:

$$\Lambda_A^{(+)}(x,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Al desarrollar ( 5.20 ) se obtiene que:

$$\mathbf{A}^{(+)}(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho(x,z)} \\ 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & \frac{1}{2\rho(x,z)} & 0 \\ \frac{\lambda(x,z)}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda(x,z)}{2\sqrt{\rho(x,z)(\lambda(x,z) + 2\mu(x,z))}} \\ 0 & \frac{\mu(x,z)}{2} & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 \\ \frac{\lambda(x,z)}{2} + \mu(x,z) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Por otro lado, la descomposición en valores propios de la matriz B es:

$$\mathbf{B}(x,z) = \mathbf{Q}_B(x,z) \Lambda_B(x,z) \mathbf{Q}_B^{-1}(x,z) \quad (5.23)$$

donde:

$$\mathbf{Q}_B(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}}{\lambda(x,z)\sqrt{\rho(x,z)}} & -\frac{\sqrt{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}}{\lambda(x,z)\sqrt{\rho(x,z)}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}{\lambda(x,z)} & \frac{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}{\lambda(x,z)} \\ \sqrt{\rho(x,z)\mu(x,z)} & -\sqrt{\rho(x,z)\mu(x,z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{Q}_B^{-1}(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{\rho(x,z)\mu(x,z)}} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{\rho(x,z)\mu(x,z)}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda(x,z)}{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\lambda(x,z)\sqrt{\rho(x,z)}}{2\sqrt{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}} & \frac{\lambda(x,z)}{2(\lambda(x,z)+2\mu(x,z))} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda(x,z)\sqrt{\rho(x,z)}}{2\sqrt{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}} & \frac{\lambda(x,z)}{2(\lambda(x,z)+2\mu(x,z))} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

$$\Lambda_B(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\mu(x,z)}}{\sqrt{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu(x,z)}}{\sqrt{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\lambda(x,z)+2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

La matriz de los vectores propios de B es  $\mathbf{Q}_B$ ,  $\mathbf{Q}_B^{-1}$  es su inversa, y la matriz  $\Lambda_B$  es la matriz de los valores propios de B.

En este caso, los valores propios positivos de B corresponden a las velocidades de propagación de las ondas longitudinales y transversales que viajan en dirección negativa de  $z$ , mientras que los negativos a las que se propagan en dirección positiva de  $z$  [8].

Para tener una frontera absorbente en  $z=z_{max}$  no debe haber ondas propagándose en dirección negativa de  $z$ . Por lo que si se reemplaza la matriz  $\mathbf{B}$  en la ecuación ( 5.8 ) con una matriz  $\mathbf{B}^{(-)}$  que se define como:

$$\mathbf{B}^{(-)}(x,z) = \mathbf{Q}_B(x,z)\Lambda_B^{(-)}(x,z)\mathbf{Q}_B^{-1}(x,z) \quad ( 5.27 )$$

donde:

$$\Lambda_B^{(-)}(x,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} \end{pmatrix} \quad ( 5.28 )$$

se obtiene el efecto de modelar sólo la propagación de ondas viajando en dirección positiva en  $z$ , ya que  $\mathbf{B}^{(-)}$  no tiene los valores propios positivos relacionados a las ondas que viajan en dirección negativa de  $z$ . Desarrollando ( 5.27 ) se obtiene que:

$$\mathbf{B}^{(-)}(x,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho(x,z)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & \frac{1}{2\rho(x,z)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(x,z)}{2} + \mu(x,z) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 \\ \frac{\mu(x,z)}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(x,z)}{2} & -\frac{\lambda(x,z)}{2\sqrt{\rho(x,z)(\lambda(x,z) + 2\mu(x,z))}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ( 5.29 )$$

Por último, la frontera en  $z=z_{min}$  se modela reemplazando la matriz  $\mathbf{B}$  en la ecuación ( 5.8 ) con una matriz  $\mathbf{B}^{(+)}$  que no tiene los valores propios negativos de  $\mathbf{B}$  pero sí los positivos y los mismos vectores propios, de modo que sólo se permitan ondas viajando en sentido negativo de  $z$ . En consecuencia:



$$\mathbf{B}^{(+)}(x,z) = \mathbf{Q}_B(x,z) \Lambda_B^{(+)}(x,z) \mathbf{Q}_B^{-1}(x,z) \quad (5.30)$$

donde:

$$\Lambda_B^{(+)}(x,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

o equivalentemente:

$$\mathbf{B}^{(+)}(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho(x,z)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & \frac{1}{2\rho(x,z)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(x,z) + \mu(x,z)}{2} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda(x,z) + 2\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 & 0 \\ \frac{\mu(x,z)}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x,z)}{\rho(x,z)}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(x,z)}{2} & \frac{\lambda(x,z)}{2\sqrt{\rho(x,z)(\lambda(x,z) + 2\mu(x,z))}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

En suma, la ecuación de onda elástica en dos dimensiones en la región cerrada

$[x_{min}, x_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$  con fronteras absorbentes será:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(x,z,t) = \mathbf{A}^*(x,z) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x,z,t) + \mathbf{B}^*(x,z) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}(x,z,t) + \mathbf{F}_\rho(x,z,t) \quad (5.33)$$

donde:

$$\mathbf{A}^*(x,z) = \begin{cases} \mathbf{A}^{(+)}(x,z), & x = a \\ \mathbf{A}(x,z), & a < x < b \\ \mathbf{A}^{(-)}(x,z), & x = b \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{B}^*(x,z) = \begin{cases} \mathbf{B}^{(+)}(x,z), & z = c \\ \mathbf{B}(x,z), & c < z < d \\ \mathbf{B}^{(-)}(x,z), & z = d \end{cases} \quad (5.35)$$

Si se aplica el método espectral de colocación a la ecuación ( 5.33 ) se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias donde las variables de estado son los elementos del vector  $\mathbf{U}(x,z,t)$  en cada uno de los puntos de interpolación  $(x_i, z_j)$  para  $i, j=0, \dots, N$ , y donde las derivadas espaciales de  $\mathbf{U}(x,z,t)$  se calculan por medio de derivadas pseudoespectrales, las cuales son una combinación lineal de los valores de éstas en los puntos de interpolación ponderados por las derivadas de las funciones cardinales asociadas, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(x_i, z_j, t) = & \mathbf{A}^*(x_i, z_j) \left[ \sum_{k=0}^N \frac{\partial C_k}{\partial x}(x_i) \mathbf{U}(x_k, z_j, t) \right] \\ & + \mathbf{B}^*(x_i, z_j) \left[ \sum_{k=0}^N \frac{\partial C_k}{\partial z}(z_j) \mathbf{U}(x_i, z_k, t) \right] + \mathbf{F}_p(x_i, z_j, t) \end{aligned} \quad (5.36)$$

para  $i, j = 0, 1, \dots, N$ .

La ecuación ( 5.36 ) se puede resolver analíticamente ya que es posible expresarla como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden donde las variables son cada una de las componentes del vector  $\mathbf{U}$  evaluadas en cada punto  $(x_i, z_j)$ . Sin embargo, este método no sería muy eficiente si el número de puntos de interpolación  $N$  se hace grande ya que habría que calcular la matriz exponencial de una matriz de  $5 \times N^2 \times N^2$  lo que sería muy tardado, incluso aunque se hiciera computacionalmente.

Otra forma de resolver la ecuación ( 5.36 ) es aplicando un método numérico para resolver ODEs como el método directo de Euler, el método inverso de Euler, el método Crank-Nicolson, etc [6]. El método directo de Euler es muy sencillo de implementar y su

formulación permite el uso de los algoritmos espectrales basados en la FFT, cosa que no sucede con los otros dos métodos. Sin embargo, el desempeño del método directo de Euler no es tan bueno como el de los otros dos [6]. Otros métodos posibles de implementar son el método de Adams, y el Runge-Kutta [6]; además en las modalidades explícitas de este último se pueden usar los algoritmos de diferenciación pseudoespectral rápidos para las derivadas espacial. En este trabajo se utiliza el método directo de Euler por su fácil implementación computacional y se escogió el incremento en el tiempo ( $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ) menor a la mitad del tiempo mínimo que le tardaría a una onda viajar entre los dos puntos de interpolación más cercanos; al aplicar el método en la ecuación ( 5.36 ), para  $i, j = 0, 1, \dots, N$  y  $n = 0, 1, \dots$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x_i, z_j, t_{n+1}) = \mathbf{U}(x_i, z_j, t_n) + (\Delta t) \left\{ \mathbf{A}^*(x_i, z_j) \left[ \sum_{k=0}^N \frac{\partial C_k}{\partial x}(x_i) \mathbf{U}(x_k, z_j, t_n) \right] \right. \\ \left. + \mathbf{B}^*(x_i, z_j) \left[ \sum_{k=0}^N \frac{\partial C_k}{\partial z}(z_j) \mathbf{U}(x_i, z_k, t_n) \right] + \mathbf{F}_\rho(x_i, z_j, t_n) \right\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Para resolver la ecuación ( 5.37 ) se trabajó con los puntos de interpolación de Gauss-Lobatto-Chebyshev  $x_j = \cos(j\pi/N)$ ,  $j=0, 1, \dots, N$ . En este caso, las funciones cardinales se pueden definir como:

$$C_j(x) = \frac{2}{N p_j} \sum_{m=0}^N \frac{1}{p_m} T_m(x_j) T_m(x) \quad (5.38)$$

donde  $p_j = 2$  si  $j = 0, N$  y  $p_j = 1$  si  $j = 1, \dots, N-1$  [5].

Por lo tanto, las derivadas de las funciones cardinales en los puntos de Gauss-Lobatto son:

$$\frac{dC_j}{dx}(x_i) = \begin{cases} \frac{1+2N^2}{6} & i = j = 0 \\ -\frac{1+2N^2}{6} & i = j = N \\ \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, & i = j = 1, \dots, N-1 \\ \frac{p_i(-1)^{i+j}}{p_j(x_i - x_j)}, & i \neq j \end{cases} \quad (5.39)$$

donde  $p_0 = p_N = 2$ , y  $p_j = 1$  para  $j = 1, \dots, N-1$  [4]. Además para evitar renormalizar la región  $[x_{min}, x_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$  se escogió que fuera  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

Ya que se usan los puntos de interpolación de Gauss-Lobatto-Chebyshev, las derivadas pseudoespectrales de la ecuación ( 5.37 ) pueden llevarse a cabo por un algoritmo rápido basado en la FFT, el cual se presenta en el Anexo A. El uso de dicho algoritmo rápido reduce el tiempo de procesamiento del programa ya que la complejidad de las derivadas espectrales cambia de  $O(N^2)$  a  $O(N \log N)$ .

En el Anexo B se encuentra un código en MATLAB que simula la propagación de ondas elásticas en medios heterogéneos. Algunos resultados de las simulaciones de la propagación de onda en distintos medios se presentan en el siguiente capítulo.

## 6 Resultados y Simulaciones

Con el modelo descrito en la ecuación ( 5.37 ) se realizó un programa en MATLAB el cual se encuentra en el Anexo B. El programa simula la propagación de una onda elástica en un medio isotrópico, lineal y heterogéneo definido por su densidad y parámetros de Lamé o del tensor  $C_{ij}$ , por las condiciones iniciales y por la función de fuerza que perturba al medio.

El programa da como resultado los vectores de desplazamiento de la onda elástica en cada punto de interpolación  $(x_i, z_j)$  del medio para ciertos valores de tiempo  $\{t_n\}$ . Además se calcula la divergencia y el rotacional de la onda elástica para así distinguir claramente la componente longitudinal y transversal de la onda.

A continuación se presentan los resultados de varias simulaciones bajo distintas situaciones. Las unidades y valores de los parámetros no representan a algún medio real y se escogieron a modo de poder apreciar la velocidad de propagación, la absorción de la onda en las fronteras, la reflexión y transmisión en cambios de medio, y otras características interesantes de la propagación de las ondas.

### 6.1 Onda Elástica Longitudinal en un Sólido Uniforme

Como primera prueba se simula la propagación de la onda elástica en un medio homogéneo. Esta simulación servirá para comprobar que la onda elástica simulada por el programa viaja a la velocidad esperada y que las condiciones de frontera absorban la mayor parte de la onda incidente.

El medio de estudio es un sólido con velocidad de propagación longitudinal de  $c_L=2\text{m/s}$ , la cual a partir de la ecuación ( 2.31 ) se tiene con  $\lambda=2\text{Pa}$ ,  $\mu=1\text{Pa}$ ,  $\rho=1\text{kg/m}^3$ . Este sólido es sometido a una fuerza la cual provoca que una onda elástica longitudinal se genere y propague en él.

En la Figura 6.1 puede verse que la onda se expande y la magnitud de los vectores de desplazamiento disminuye en función del tiempo.

En el tiempo  $t=0.3s$  el vector de desplazamiento más adelantado del frente de onda propagándose hacia arriba se encuentra en el punto  $(-0.0242m, 0.645m)$  mientras que para el tiempo  $t=0.43s$  está en  $(-0.0242m, 0.907m)$ . Por lo anterior la velocidad aproximada de la onda elástica longitudinal es:

$$\tilde{c}_L = \frac{z_f - z_i}{t_f - t_i} = \frac{0.907 - 0.645}{0.43 - 0.3} = 2.0154 \quad (6.1)$$

el cual es un resultado muy cercano al valor teórico  $c_L = 2m/s$ .

Se puede ver que para el tiempo  $t=0.71s$  la onda ha sido absorbida por la frontera con excepción de las esquinas, ya que se encuentran más alejadas. En el tiempo  $t=0.94s$  ve que sí hubo pequeñas reflexiones de la frontera, sin embargo, son de casi dos ordenes de magnitud menores, lo que significa que las condiciones de frontera si estan absorbiendo adecuadamente las ondas longitudinales.

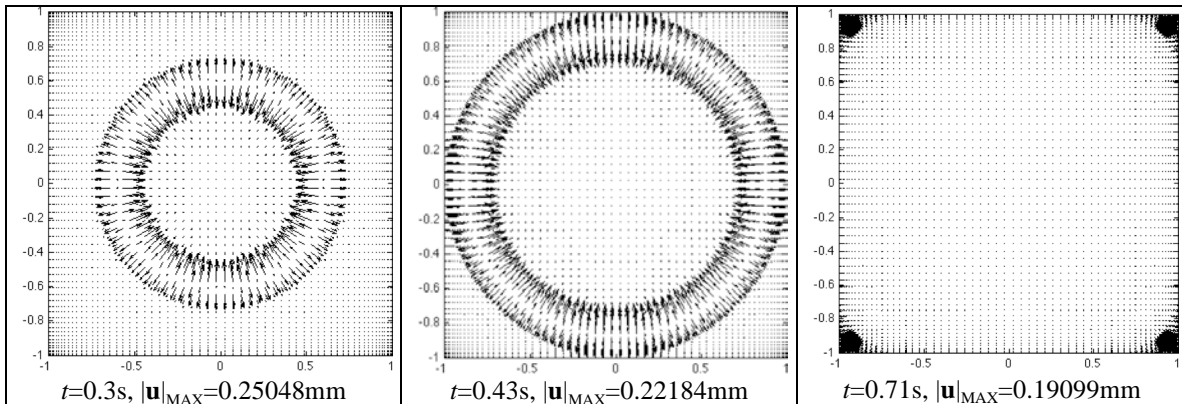


Figura 6.1 Vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$

## 6.2 Onda Elástica Transversal en un Sólido Uniforme

Esta simulación consiste del mismo medio que en el ejemplo anterior pero sometido a una onda elástica transversal. Ya que los parámetros del sólido son  $\lambda=2Pa$ ,  $\mu=1Pa$  y  $\rho=1kg/m^3$ , la velocidad de propagación de la onda transversal, por la ecuación ( 2.32 ), es  $c_T=1m/s$ .

En el tiempo  $t=0.48s$  el frente de onda propagándose a la derecha se encuentra aproximadamente en  $x=0.428m$ , y para el  $t=0.98s$  en  $x=0.942m$ . A partir de estos datos se puede estimar la velocidad de propagación de la onda transversal:

$$\tilde{c}_T = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{0.942 - 0.428}{0.98 - 0.48} = 1.0280 \quad (6.2)$$

este resultado es muy cercano al esperado de  $c_T=1m/s$ .

En el tiempo  $t=1.4s$  casi toda la onda ha salido de la región de simulación y no se aprecian grandes reflexiones por las fronteras comparadas con la onda que aún no abandona las orillas.

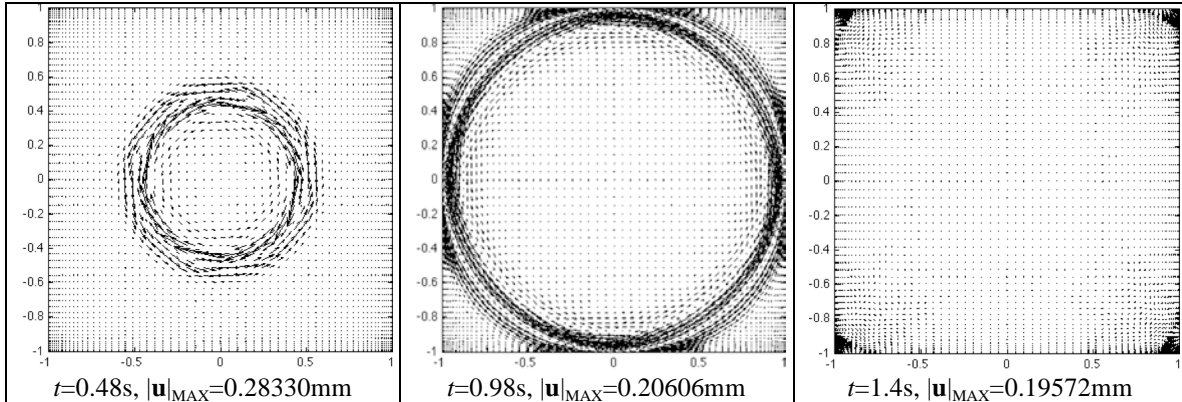


Figura 6.2 Vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$

### 6.3 Reflexión y Transmisión de una Onda Elástica Longitudinal en Interfaz Sólido-Sólido

En esta simulación de la propagación de la onda elástica se considera un medio formado de la unión de dos sólidos, por lo que se analiza la reflexión y la transmisión de ondas en la interfaz.

Para  $x>0m$  el medio es un sólido con parámetros  $\lambda=8Pa$ ,  $\mu=7Pa$ ,  $\rho=3kg/m^3$ . Por lo que de ( 2.31 )  $c_L=2.70m/s$ , de ( 2.32 )  $c_T=1.53m/s$  y de ( 2.36 )  $Z_L=8.1Ns/m^3$  y  $Z_T=4.61Ns/m^3$ .

Para  $x<0m$  se tiene un sólido con parámetros  $\lambda=3Pa$ ,  $\mu=6Pa$  y  $\rho=1.5kg/m^3$ . Por lo que de ( 2.31 )  $c_L=3.16m/s$ , de ( 2.32 )  $c_T=2m/s$  y de ( 2.36 )  $Z_L=4.7 Ns/m^3$  y  $Z_T=3Ns/m^3$ .

Se crea una onda de elástica longitudinal centrada en  $x=-0.5\text{m}$ ,  $z=0\text{m}$  debido a una fuerza externa. Para  $t=0.08\text{s}$  se puede verificar que dicha onda no tiene componente transversal y que la onda transversal se propaga isotrópicamente en la región  $x<0\text{m}$ . No hay aún ninguna onda desplazandose en la región  $x>0\text{m}$ .

Alrededor del tiempo  $t=0.215\text{s}$  la onda elastica longitudinal llega la interfaz entre los sólidos en  $x=0\text{m}$  y el cambio en las propiedades del medio da origen a una onda elástica que se trasmite a la región  $x>0\text{m}$  y una reflejada en la región  $x<0\text{m}$ , ambas con componentes longitudinal y transversal.

En el tiempo  $t=0.445\text{s}$  se pueden distinguir con mayor claridad las componentes longitudinal y transversal de la onda elástica. Se aprecia que la onda longitudinal transmitida tiene mayor magnitud a la reflejada, esto se debe a que la impedancia longitudinal de la región  $x>0\text{m}$  es mayor a la de la región  $x<0\text{m}$ . También puede verse que la onda reflejada tiene un cambio de fase de  $180^\circ$  debido al cambio de dirección de propagación pero el perfil de onda se mantiene. Por otro lado, la onda transversal reflejada es mayor a la transmitida y puede verse que hay asimetría del perfil de la onda transversal ya que para la región  $z>0\text{m}$  la rotación de la onda es en sentido de las manecillas del reloj y para la región  $z<0\text{m}$  es en el sentido contrario. Esto se debe a la variación del ángulo de incidencia de la onda longitudinal en  $x=0\text{m}$ .

Puede notarse que el ángulo de propagación de los vectores de desplazamiento cambia ligeramente al transmitirse y reflejarse la onda lo que produce una variación en las curvaturas de los frentes de onda de cada onda reflejada y transmitida.

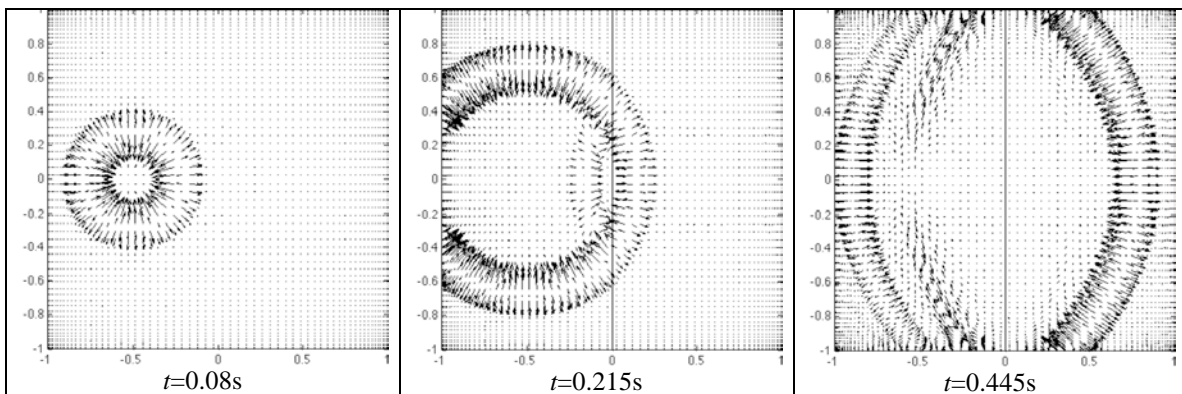


Figura 6.3 Vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$



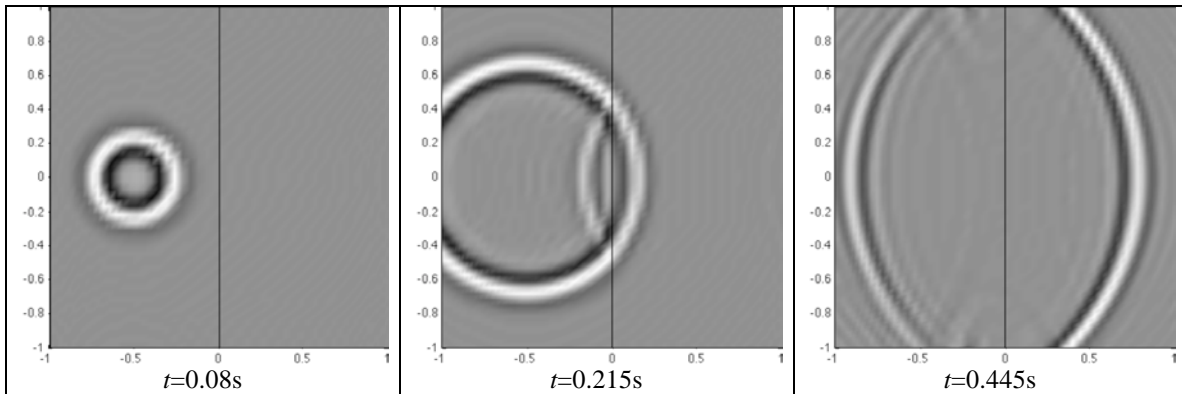


Figura 6.4 Divergencia de la componente longitudinal  $\nabla \cdot \mathbf{u}_L$

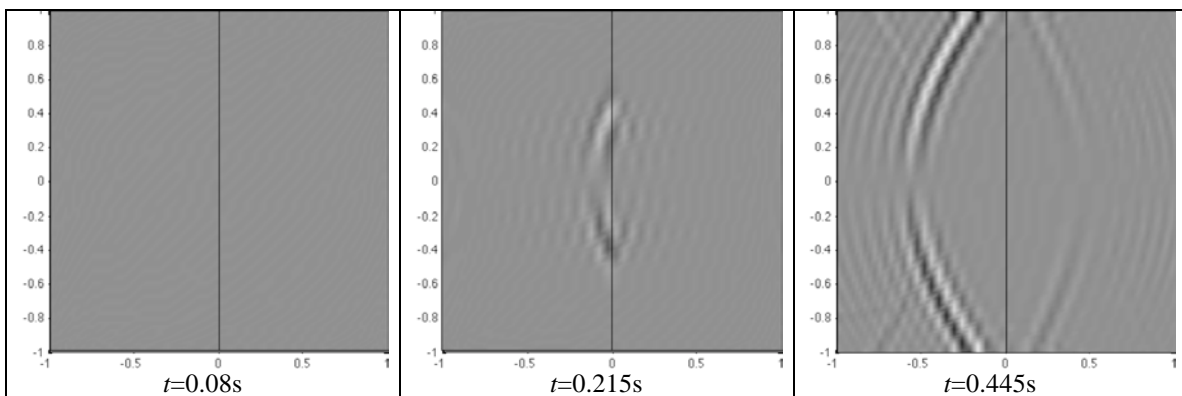


Figura 6.5 Rotacional de la componente transversal  $\nabla \times \mathbf{u}_T$

## 6.4 Reflexión y Transmisión de una Onda Elástica Transversal en Interfaz Sólido-Sólido

En esta simulación de la propagación de la onda elástica transversal se utilizó el mismo medio del ejemplo anterior. En el tiempo  $t=0.132s$  se tiene a una onda elástica transversal propagándose en la región  $x>0m$ , sin que exista componente longitudinal. En la región  $x<0m$  no hay propagación de onda.

Para  $t=0.324s$  la onda transversal ha alcanzado la interfaz entre sólidos en  $x=0m$ . Se refleja una onda elástica en la región  $x>0m$  y se transmite una a la región  $x<0m$ , ambas con componentes longitudinales y transversales, aunque la componentes longitudinales transmitidas y reflejadas son pequeñas, a comparación a las transversales.

Cuando  $t=0.516s$  se pueden apreciar las ondas reflejadas y transmitidas transversales y longitudinales. La onda transversal transmitida tiene mayor magnitud y velocidad de propagación que la reflejada, esto se debe a que la impedancia transversal de  $x>0m$  no es mucho mayor a la impedancia de la región  $x<0m$ . También puede verse que la onda transversal reflejada cambia de polaridad debido a que la impedancia en  $x>0m$  es mayor a la de la región  $x<0m$ .

Por otro lado, la onda longitudinal reflejada tiene mayor magnitud que la transmitida pero menor velocidad de propagación. Y puede verse que el perfil de onda es antisimétrico con respecto a  $z=0m$ , esto se debe al distinto ángulo con que de la onda transversal llega a la interfaz  $x=0m$  para distintos valores de  $z$ .

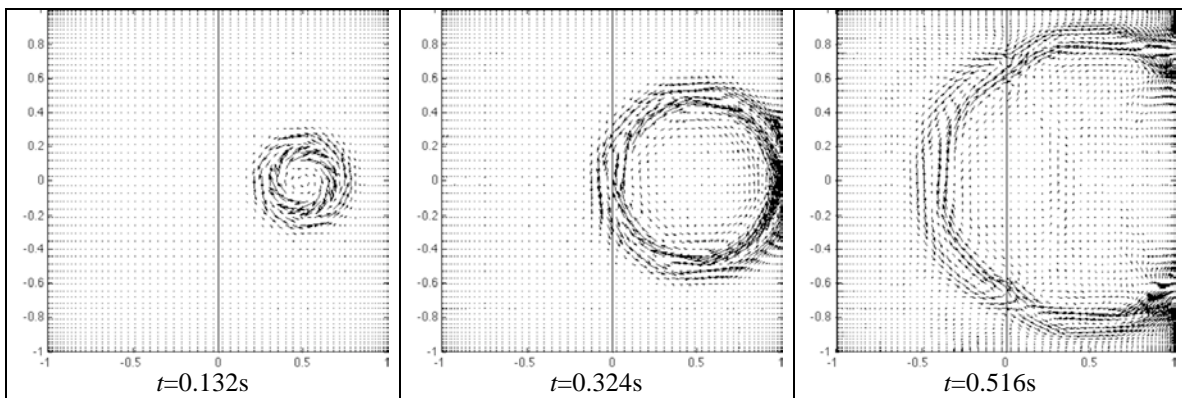


Figura 6.6 Vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$

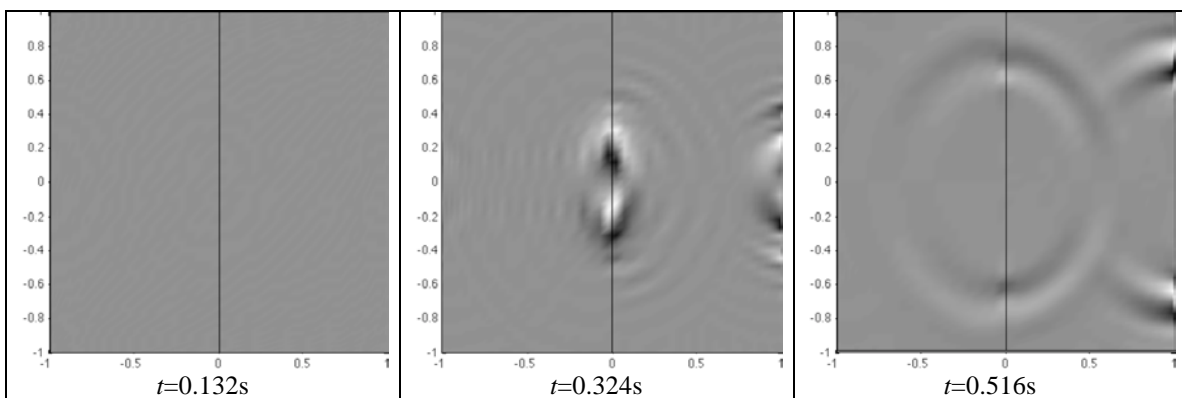


Figura 6.7 Divergencia de la componente longitudinal  $\nabla \cdot \mathbf{u}_L$

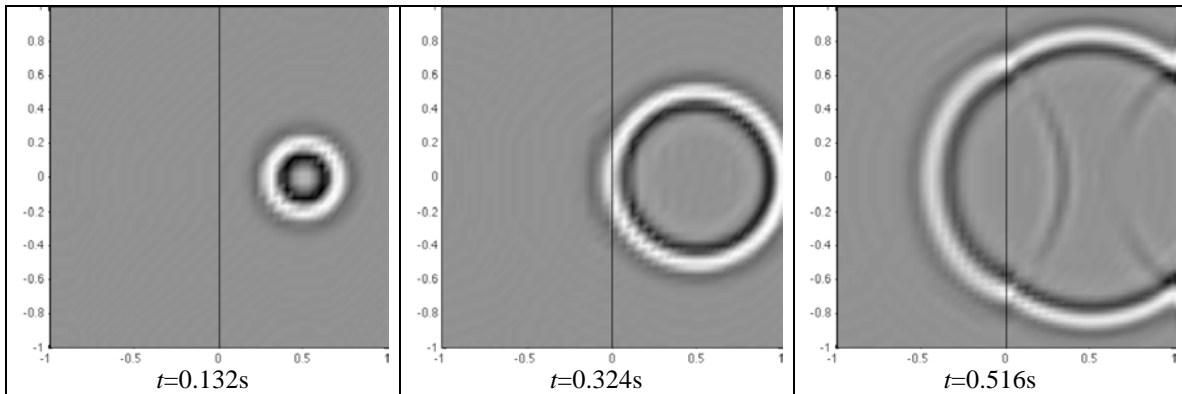


Figura 6.8 Rotacional de la componente transversal  $\nabla \times \mathbf{u}_T$

## 6.5 Reflexión y Transmisión de Onda Longitudinal en Interfaz Fluido-Sólido

Ahora se analizará la propagación de ondas en un medio conformado por un fluido y un sólido. Para  $x > 0\text{m}$  se tiene un sólido con parámetros  $\lambda = 7\text{Pa}$ ,  $\mu = 3\text{Pa}$ ,  $\rho = 1\text{kg/m}^3$ , por lo que de ( 2.31 ) y ( 2.32 ) se tiene que  $c_L = 3.61\text{m/s}$  y  $c_T = 2.65\text{m/s}$ ; por último de ( 2.36 ) se llega a que  $Z_L = 3.61\text{Ns/m}^3$  y  $Z_T = 2.65\text{Ns/m}^3$ . La región  $x < 0\text{m}$  corresponde a un fluido con  $\lambda = 6\text{Pa}$ ,  $\mu = 0\text{Pa}$ ,  $\rho = 1.5\text{kg/m}^3$ . Por lo tanto  $c_L = 2\text{m/s}$ ,  $c_T = 0\text{m/s}$  y  $Z_L = 3\text{Ns/m}^3$ ,  $Z_T = 0\text{Ns/m}^3$ .

En el tiempo  $t = 0.145\text{s}$  se tiene a una onda longitudinal propagándose por el fluido de la región  $x < 0\text{m}$ , mientras que en el sólido de la región  $x > 0\text{m}$  no se propaga ninguna onda.

Cuando  $t = 0.27\text{s}$  una parte la onda longitudinal que se propaga por el fluido alcanza la interfaz con sólido en  $x = 0\text{m}$  lo cual provoca la reflexión de una onda longitudinal en el fluido y la transmisión de una onda elástica con componentes longitudinal y transversal en el sólido (no habrá onda transversal reflejada debido a que en un fluido sólo se propagan ondas longitudinales).

Para  $t = 0.47\text{s}$  se pueden apreciar las ondas longitudinales transmitidas y reflejadas, puede verse que la onda longitudinal transmitida tiene mayor magnitud y velocidad de propagación que la reflejada ya que la impedancia longitudinal para  $x > 0\text{m}$  es mayor a la de la región  $x < 0\text{m}$ . Además puede verse que la onda transversal que se propaga a la región  $x > 0\text{m}$  es asimétrica con respecto a  $z$  debido a la variación en la incidencia de la onda longitudinal para distintos valores de  $z$ . Existen también pequeñas reflexiones de

las fronteras, las cuales no deberían de existir y son debidas a errores numérico y de modelado en la frontera.

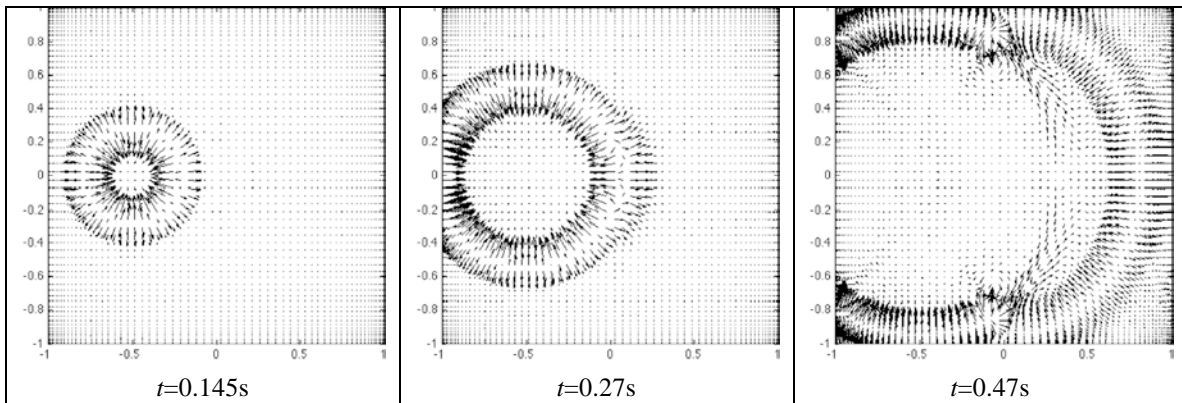


Figura 6.9 Vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$

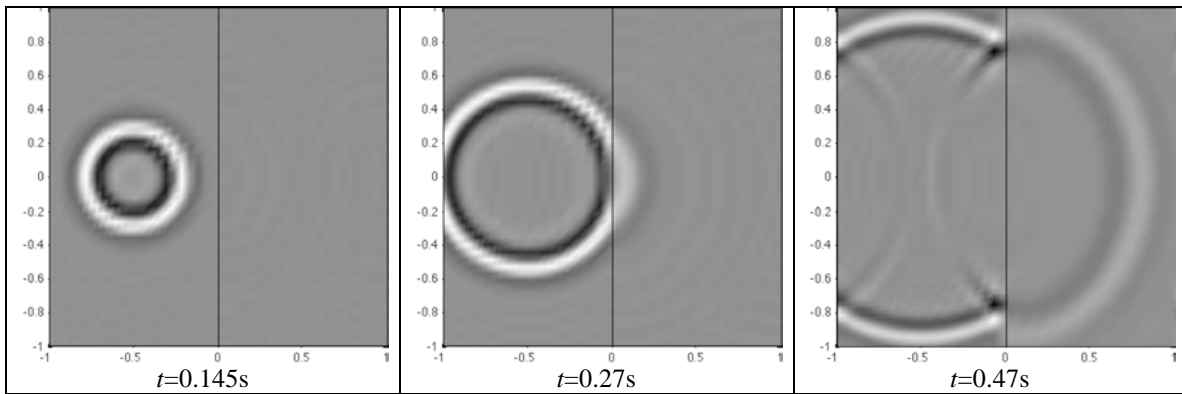


Figura 6.10 Divergencia de la componente longitudinal  $\nabla \cdot \mathbf{u}_L$

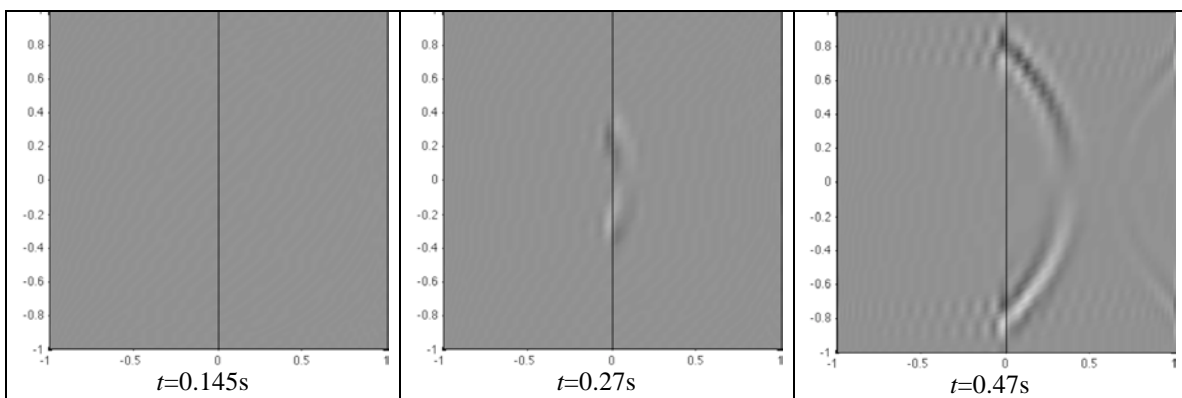


Figura 6.11 Rotacional de la componente transversal  $\nabla \times \mathbf{u}_T$

## 6.6 Reflexión y Transmisión de Onda Transversal en Interfaz Sólido-Fluido

Se considera la misma región de la sección interior formada por la unión de un sólido y un líquido. En el tiempo  $t=0.09\text{s}$  se tiene a una onda transversal propagándose en el sólido de la región  $x>0\text{m}$  que fue generada por una fuerza externa, sin que exista una componente longitudinal. La región  $x<0\text{m}$  no presenta onda transversal ni longitudinal.

Alrededor del tiempo  $t=0.21\text{s}$  la onda transversal ha llegado a la interfaz entre los medios. Se transmite una onda longitudinal al fluido, y se refleja una onda elástica con componentes longitudinal y transversal en el sólido.

Para el tiempo  $t=0.345\text{s}$  se puede ver la onda longitudinal transmitida al fluido con un perfil asimétrico con respecto al eje  $z$ , debido a la diferencia en el ángulo de incidencia de la onda transversal que la originó. En el sólido fue reflejada una onda longitudinal con un cambio de polaridad ya que la impedancia transversal para la región  $x>0$  es mayor a la de  $x<0$ . Además fue reflejada una onda transversal aunque de poca magnitud comparada con la transmitida, pero con mayor velocidad de propagación.

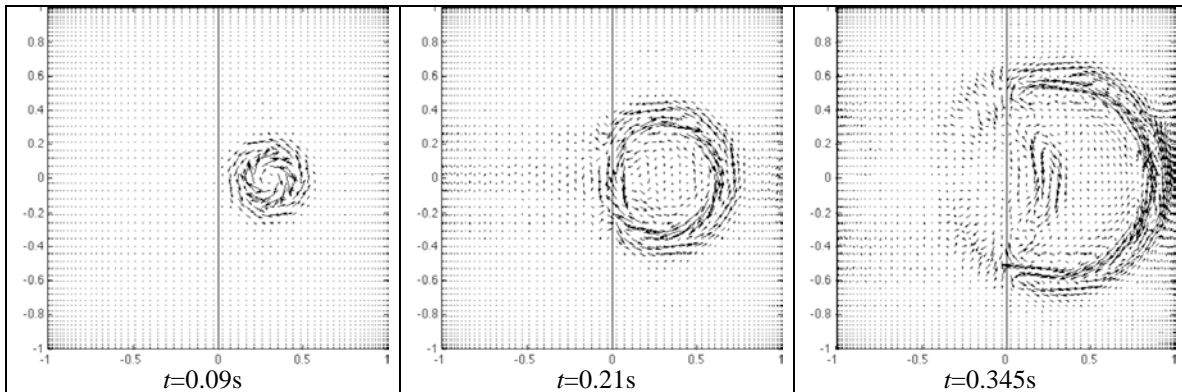


Figura 6.12 Vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$

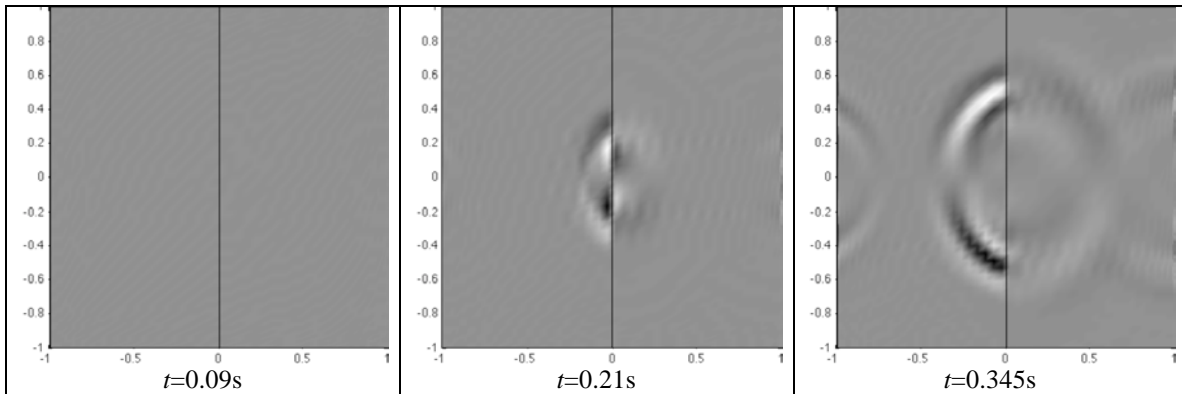


Figura 6.13 Divergencia de la componente longitudinal  $\nabla \cdot \mathbf{u}_L$

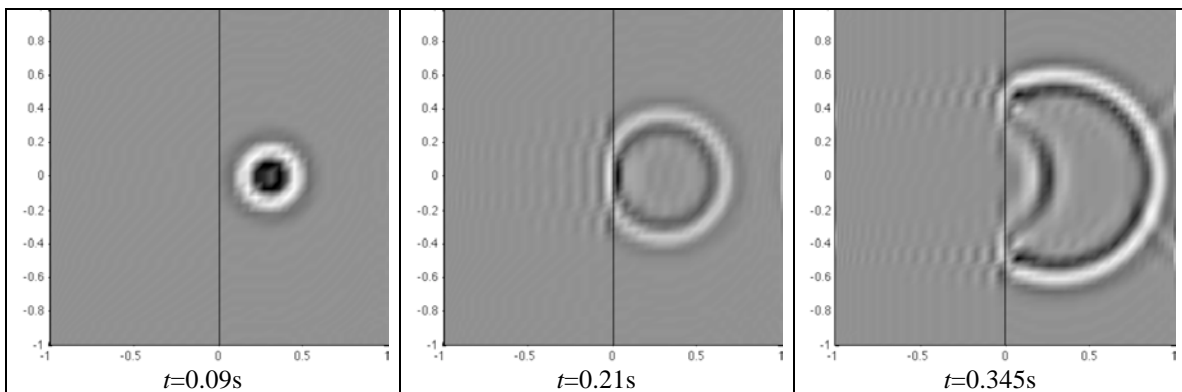


Figura 6.14 Rotacional de la componente transversal  $\nabla \times \mathbf{u}_T$

## 6.7 Propagación de Onda Elástica por un Medio Heterogéneo Compuesto por 2 Materiales

Se planteó un medio como el de la Figura 6.15, donde la región de color blanco correspondiera a un sólido con velocidades de propagación mayores a las del sólido de la región en color negro. Se escogieron los parámetros  $\lambda=2\text{Pa}$ ,  $\mu=1\text{Pa}$ ,  $\rho=1\text{kg/m}^3$ , que resultan velocidades de propagación  $c_L=2\text{m/s}$ ,  $c_T=1\text{m/s}$  para el sólido de la región en color blanco, y para el sólido de la región de color negro se escogieron  $\lambda=1.5\text{Pa}$ ,  $\mu=1\text{Pa}$ ,  $\rho=2\text{kg/m}^3$ , que corresponden a las velocidades de propagación  $c_L=1.32\text{m/s}$ ,  $c_T=0.71\text{m/s}$ , y se cumple la relación deseada de que las ondas se propaguen mas lentamente por el medio de color negro. Las impedancias longitudinal y transversal de la región en blanco son de  $Z_L=2\text{Ns/m}^3$  y  $Z_T=1\text{Ns/m}^3$ ; mientras que para la región en color negro son de  $Z_L=2.64\text{Ns/m}^3$  y  $Z_T=1.42\text{Ns/m}^3$ .

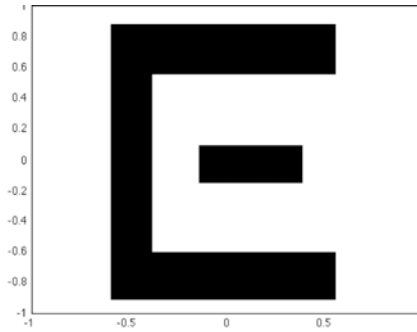


Figura 6.15 Medio compuesto de 2 materiales

En esta simulación se generó una onda elástica longitudinal en el punto  $(x,z)=(0.7m,0m)$ , y puede verse en las imágenes cómo al cambiar la onda de medio de propagación se generan reflexiones y transmisiones de ondas longitudinales y transversales. También se puede ver que la propagación de la onda por el medio de la región en color negro es más lenta. Conforme hay más reflexiones y transmisiones la estructura de la onda elástica se vuelve más compleja, a un grado que sería difícil encontrar una expresión analítica que describiera la onda.

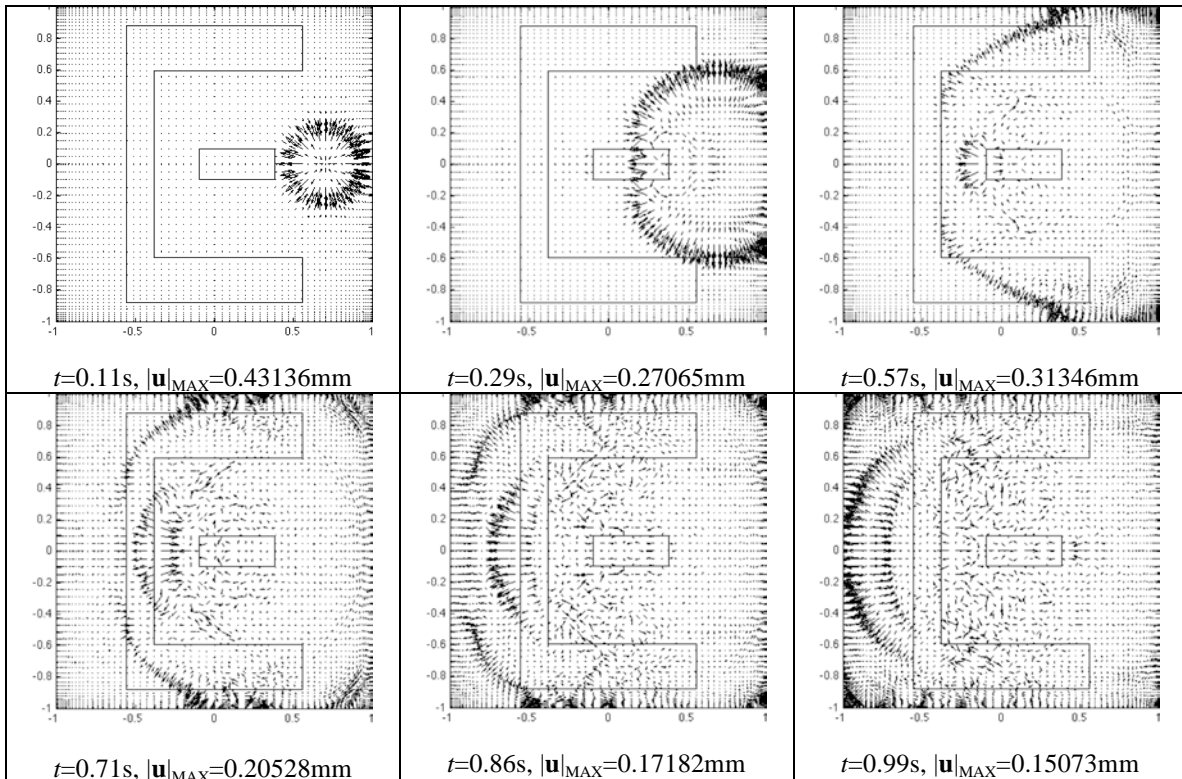


Figura 6.16 Vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$

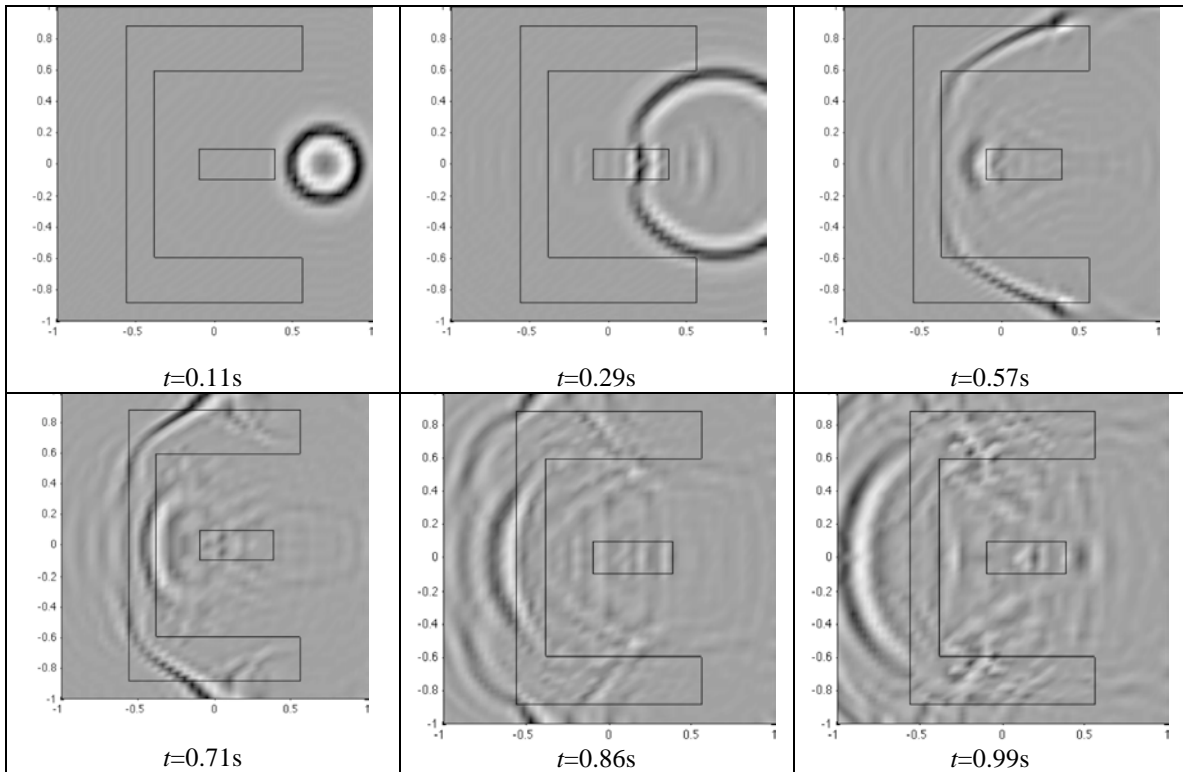


Figura 6.17 Divergencia de la componente longitudinal  $\nabla \cdot \mathbf{u}_L$

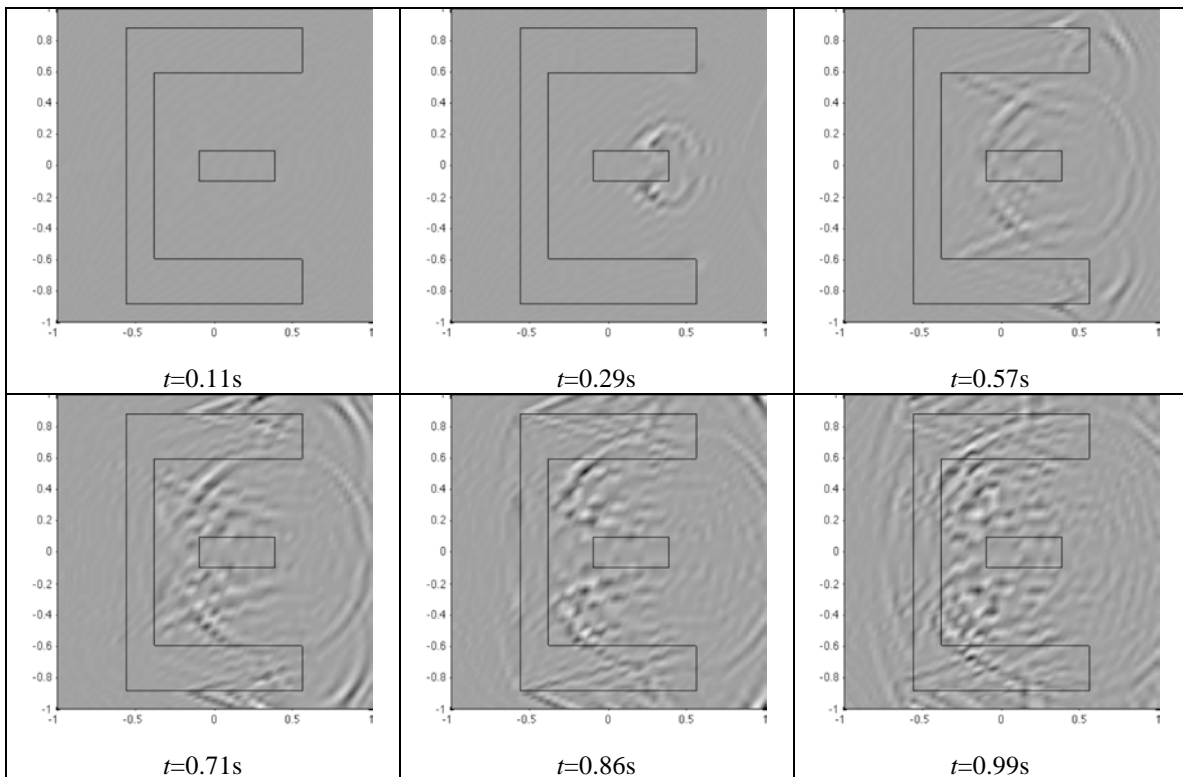


Figura 6.18 6.19 Rotacional de la componente transversal  $\nabla \times \mathbf{u}_T$



## 6.8 Propagación de Onda Elástica por un Medio Heterogéneo Compuesto por 3 Materiales

Se planteó un medio sólido con inclusiones rectangulares de otros dos sólidos como el que se muestra en la Figura 6.20 a modo de ver una situación donde hubiera reflexiones múltiples.

La región de color blanco corresponde a sólidos con parámetros  $\lambda=4\text{Pa}$ ,  $\mu=2\text{Pa}$ ,  $\rho=1\text{kg/m}^3$ , velocidades de propagación  $c_L=2.83\text{m/s}$  y  $c_T=1.41\text{m/s}$ , e impedancias  $Z_L=2.83\text{Ns/m}^3$  y  $Z_T=1.41\text{Ns/m}^3$ . La región de color negro representa sólidos con  $\lambda=1.5\text{Pa}$ ,  $\mu=1\text{Pa}$ ,  $\rho=2\text{kg/m}^3$ , velocidades de  $c_L=1.32\text{m/s}$  y  $c_T=0.71\text{m/s}$ , y  $Z_L=2.64\text{Ns/m}^3$  y  $Z_T=1.42\text{Ns/m}^3$ . Por último, la región de color gris es un sólido con parámetros  $\lambda=2\text{Pa}$ ,  $\mu=1\text{Pa}$ ,  $\rho=1\text{kg/m}^3$ , velocidades de propagación  $c_L=2\text{m/s}$ ,  $c_T=1\text{m/s}$ ; e impedancias  $Z_L=2\text{Ns/m}^3$  y  $Z_T=1\text{Ns/m}^3$ .

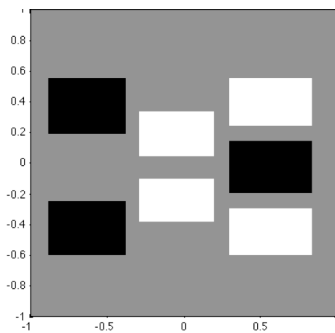


Figura 6.20 Medio compuesto de tres distintos sólidos

En las figuras 6.21 – 6.23 pueden verse imágenes de la simulación de cuando el medio de la Figura 6.20 es excitado por una onda longitudinal en el punto  $(x,z)=(-0.7\text{m},0\text{m})$ . Se puede apreciar que al igual que el ejemplo anterior, se generan múltiples reflexiones al cambiar la onda de medio. Las variaciones en las propiedades del material provocan que se generen ondas longitudinales y transversales y que viajen a diferentes velocidades por el medio. Por lo anterior, después de algún tiempo la estructura de la onda elástica es compleja y no sería sencilla de describir sin ayuda del programa que se hizo.

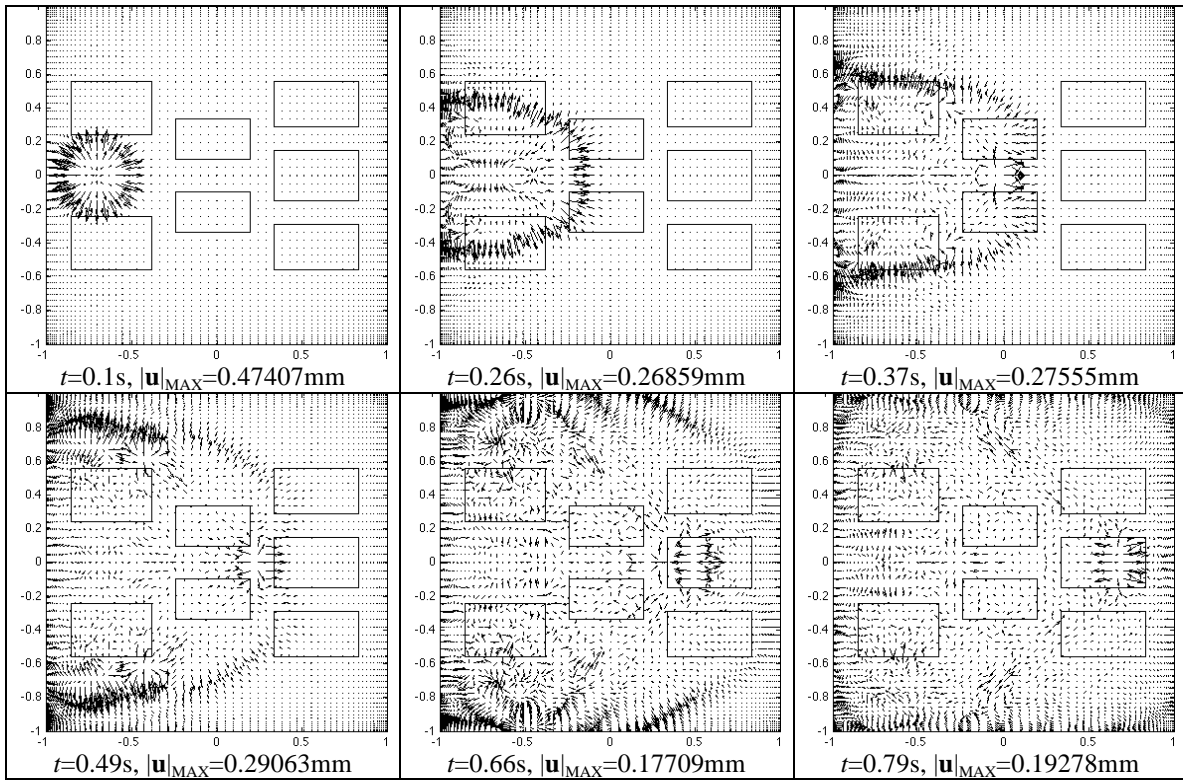


Figura 6.21 Vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$

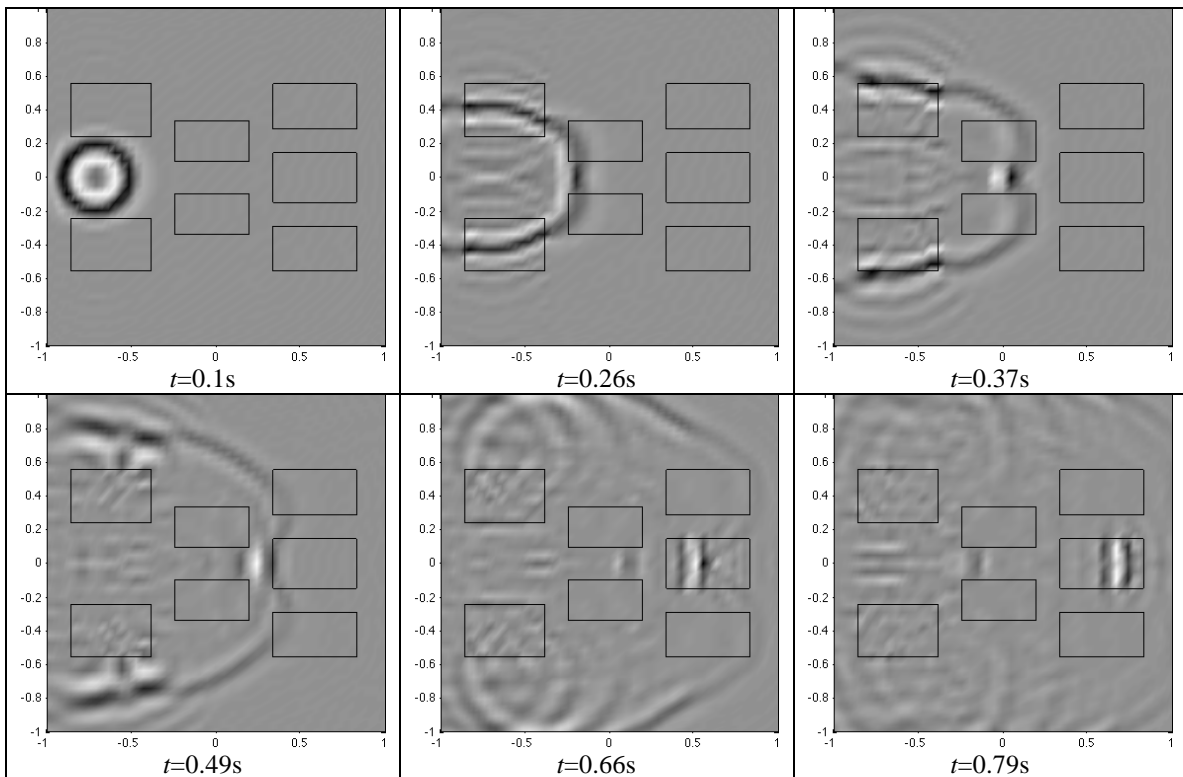


Figura 6.22 Divergencia de la componente longitudinal  $\nabla \cdot \mathbf{u}_L$

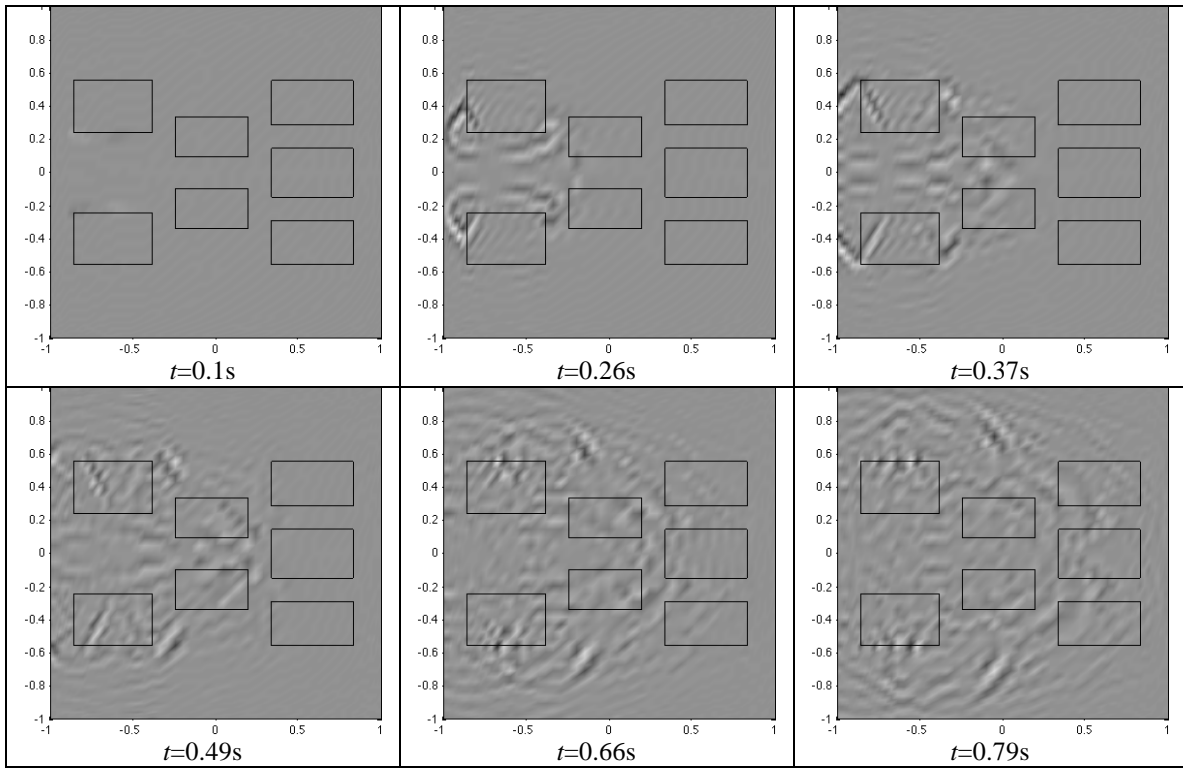


Figura 6.23 Rotacional de la componente transversal  $\nabla \times \mathbf{u}_T$

## 7 Conclusiones

En esta tesis se estudió la propagación de ondas elásticas en medios heterogéneos bidimensionales, se modeló la propagación de la onda a partir de la teoría de elasticidad lineal, se planteó una solución por medio de métodos espectrales y se escribió un programa en MATLAB capaz de simular la propagación de ondas elásticas en diversos escenarios.

Inicialmente se atacó el problema de propagación de una onda en una dimensión con velocidad de propagación dependiente de la posición con el método de Fourier-Galerkin, y se encontraban los valores de los coeficientes de series de Fourier. Con el estudio se relacionó la representación de funciones con polinomios ortogonales y con funciones cardinales; se llegó a la conclusión que ambas representaciones son equivalentes si los puntos de interpolación de la representación con funciones cardinales son los puntos de interpolación de Gauss-Jacobi o de Gauss-Lobatto. Más aún, la relación entre los coeficientes de una representación con funciones ortogonales y los puntos de interpolación de una representación interpolante está dada por una transformación lineal. Esta relación sirvió para demostrar que el método de Galerkin es equivalente al método de colocación en los  $N$  puntos de interpolación de Gauss-Jacobi o Gauss-Lobatto para polinomios de orden  $N$ . El método de colocación o pseudo-espectral es más sencillo de manejar computacionalmente, y tiene un desempeño muy cercano al de Galerkin.

Después de esto se resolvió el problema de la propagación de una onda en una dimensión usando el método de colocación con polinomios de Chebyshev, los cuales tienen menor error en discontinuidades y en general una mejor aproximación. Las condiciones de frontera absorbente se plantearon algebraicamente tomando en cuenta la velocidad de propagación de la onda y que sin variación en esta la amplitud no variaría.

Más adelante se estudió la propagación de onda acústica en medios heterogéneos bidimensionales usando métodos de espectrales de colocación con polinomios de Chebyshev. Las condiciones de frontera absorbente se volvieron un problema más complicado pero se encontraron aproximaciones como la de [9] que resolvían el problema.

Habiendo estudiado y simulado la propagación de ondas en los escenarios anteriores se estudió la propagación de onda elástica en medios heterogéneos bidimensionales que es el tema de este trabajo, y a partir de la teoría de elasticidad lineal se obtuvo un modelo matemático de la propagación. Esta ecuación es distinta a la ecuación de onda elástica con parámetros de Lamé dependientes de la posición, la que erróneamente en un principio se había considerado como el modelo de propagación a utilizar. Además se estudiaron los eigenvalores y eigenvectores del modelo resultante para modificarlos e imponer en las fronteras condiciones absorbentes.

Se hizo un programa en MATLAB para simular la propagación de onda elástica en medios heterogéneos bidimensionales, este programa integra en tiempo con el método directo de Euler y aplica los métodos espectrales de colocación con polinomios de Chebyshev en el espacio, usando el un algoritmo rápido basado en la FFT. Se hicieron diversas simulaciones para comprobar que las ondas se propagaban a la velocidad esperada, y se confirmó el buen funcionamiento del programa en dicho aspecto. También, se hicieron simulaciones en medios compuestos por dos sólidos o por un sólido y un fluido ideal a modo de estudiar la reflexión y transmisión de ondas. Se encontraron los resultados esperados existiendo cambios de modo en la transmisión y reflexión de ondas, y obteniendo ondas longitudinales y transversales en sólidos, y sólo longitudinales en fluidos (como se esperaba).

Otro aspecto que se analizó fue la reflexión causada por las fronteras absorbentes. Se encontró que las ondas longitudinales no generaban demasiada reflexión, es decir eran absorbidas por la frontera. Sin embargo, hubo ocasiones que las ondas transversales generaron reflexiones de considerable magnitud. Un aspecto positivo fue que la región absorbente se hizo sólo sobre los puntos de la frontera, esto es debido a que los métodos espectrales hacen uso de todos los puntos del medio para calcular las derivadas espaciales; esto no sucede con esquemas de diferencias finitas en los cuales las condiciones de frontera absorbente deben aplicarse a una región que represente la frontera para que ésta funcione de buena forma.

Se realizaron también simulaciones donde habían reflexiones múltiples y fue en estos casos donde el programa realizado muestra su utilidad. Ya que pueden simularse

escenarios donde debido a múltiples reflexiones el frente de onda cambie drásticamente de forma. En estas simulaciones se puede ver como las ondas elásticas después de algunos rebotes dentro de un medio pueden dar lugar a patrones muy complejos de ondas elásticas. En general el programa desarrollado puede aplicarse a un medio heterogeneo con cambios ya sea suaves o duros en las propiedades del medio, diferentes condiciones iniciales y funciones de excitación. Mientras mayor sea el orden de los parámetros mencionados mayor será el número de puntos a utilizar.

En general, el objetivo planteado al inicio de esta tesis se cumplió y se obtuvo un programa que podrá servir más adelante para simular escenarios de propagación de ondas en medios que generen muchas reflexiones, que tengan cambios graduales de propiedades y también se espera usar el modelado, la solución por métodos espectrales y este programa para resolver el problema inverso y estimar el medio a partir de la lectura de la onda en ciertos puntos del medio.

## 8 Anexo 1: Algoritmo rápido para derivación en los puntos de interpolación de Chebyshev

Dada una función  $f(x)$  definida en el intervalo  $x \in [-1,1]$ , sea  $F(\theta)$  una función par con periodo de  $2\pi$  tal que:

$$F(\theta) = f(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (8.1)$$

Esta relación entre ambas funciones puede expresarse equivalentemente como

$$f(x) = F(\arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (8.2)$$

Al derivar la ecuación ( 8.2 ) se encuentra que la derivada de la función  $f$  es:

$$f'(x) = -\frac{F'(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 \quad (8.3)$$

En la ecuación ( 8.3 ), se puede ver que la derivada de la función  $f$  en los puntos de interpolación de Chebyshev  $x_j = \cos(j\pi/N)$  está relacionada con la derivada de la función  $F$  en los puntos de interpolación de Fourier  $\theta_j = j\pi/N$  ( $j=0, \dots, N$ ) de la siguiente manera:

$$f'(x_j) = -\frac{F'(\theta_j)}{\sqrt{1-x_j^2}}, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (8.4)$$

La función  $F$  al ser una función periódica puede representarse como:

$$F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^N \hat{F}_k \exp(ik\theta) \quad (8.5)$$

Por lo que su derivada es:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^N ik\hat{F}_k \exp(ik\theta) \quad (8.6)$$

A partir de las ecuaciones ( 8.4 ) y ( 8.6 ) se puede llegar a un algoritmo rápido basado en la FFT para calcular la derivada en los puntos de interpolación de Chebyshev, el cual sería [7]:

- Dados los datos  $v_0, \dots, v_N$  en los puntos de interpolación de Chebyshev  $x_0=1, \dots, x_N=-1$  se extienden estos datos al vector  $V$  de longitud  $2N$  conformado por  $V_{2N-j}=v_j, j=1, \dots, N-1$ .

- Utilizando la FFT se calcula

$$\hat{V}_k = \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^{2N} V_j \exp(-ik\theta_j), \quad k = -N+1, \dots, N \quad (8.7)$$

- Se deriva en frecuencia al hacer:

$$\hat{W}_k = \begin{cases} ik\hat{V}_k, & k = -N+1, \dots, N-1 \\ 0, & k = N \end{cases} \quad (8.8)$$

- Se obtiene la derivada de la función en los puntos de interpolación de Fourier al calcular la IFFT:

$$W_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^N \hat{W}_k \exp(ik\theta_j), \quad j = 1, \dots, 2N \quad (8.9)$$

- Se calcula la derivada en los puntos de interpolación de Chebyshev:

$$w_j = -\frac{W_j}{\sqrt{1-x_j^2}}, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (8.10)$$

- Con las fórmulas especiales para los puntos de interpolación de los extremos obtenidas por la regla de l'Hôpital [7], se calcula:



$$w_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{n=1}^{N-1} n^2 \hat{v}_n + \frac{N^2 \hat{v}_N}{2} \right) \quad (8.11)$$

$$w_N = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n+1} n^2 \hat{v}_n + \frac{(-1)^{N+1} N^2 \hat{v}_N}{2} \right) \quad (8.12)$$

## 9 Anexo 2: Código en MATLAB

```
close all
clear all

N=64;
x=cos(pi*(0:N)/N);
[Z,X]=meshgrid(x);

Rho=ones(N+1,N+1);
Lambda=ones(N+1,N+1);
Mu=ones(N+1,N+1);

R=1./Rho;
C11=Lambda+2*Mu;
C33=Lambda+2*Mu;
C13=Lambda;
C44=Mu;

C11R=(C11.*R).^(1/2);
C33R=(C33.*R).^(1/2);
C44R=(C44.*R).^(1/2);
C131=C13.*((R./C11).^(1/2));
C133=C13.*((R./C33).^(1/2));

tmax=1;
nplots=100;
tplot=tmax/nplots;
dt=0.3*min(min((x(1)-x(2))./sqrt((Lambda+2*Mu)./Rho)));

dtR=dt*R/2;
dtC11=dt*C11/2;
dtC33=dt*C33/2;
dtC13=dt*C13/2;
dtC44=dt*C44/2;

dtC11R=dt*C11R/2;
dtC33R=dt*C33R/2;
dtC44R=dt*C44R/2;
dtC131=dt*C131/2;
dtC133=dt*C133/2;

u_plot=zeros(N+1,N+1,nplots+1);
ut_plot=zeros(N+1,N+1,nplots+1);
w_plot=zeros(N+1,N+1,nplots+1);
wt_plot=zeros(N+1,N+1,nplots+1);

u=zeros(N+1,N+1);
w=zeros(N+1,N+1);
ut=zeros(N+1,N+1);
wt=zeros(N+1,N+1);
szz=zeros(N+1,N+1);
sxz=zeros(N+1,N+1);
sxx=zeros(N+1,N+1);

u_new=zeros(N+1,N+1);
w_new=zeros(N+1,N+1);
ut_new=zeros(N+1,N+1);
wt_new=zeros(N+1,N+1);
szz_new=zeros(N+1,N+1);
sxz_new=zeros(N+1,N+1);
sxx_new=zeros(N+1,N+1);

dx_u=zeros(N+1,N+1);
dx_w=zeros(N+1,N+1);
dx_ut=zeros(N+1,N+1);
dx_wt=zeros(N+1,N+1);
dx_szz=zeros(N+1,N+1);
```

```

dx_sxz=zeros(N+1,N+1);
dx_sxx=zeros(N+1,N+1);

dx_u_new=zeros(N+1,N+1);
dx_w_new=zeros(N+1,N+1);
dx_ut_new=zeros(N+1,N+1);
dx_wt_new=zeros(N+1,N+1);
dx_szz_new=zeros(N+1,N+1);
dx_sxz_new=zeros(N+1,N+1);
dx_sxx_new=zeros(N+1,N+1);

dz_u=zeros(N+1,N+1);
dz_w=zeros(N+1,N+1);
dz_ut=zeros(N+1,N+1);
dz_wt=zeros(N+1,N+1);
dz_szz=zeros(N+1,N+1);
dz_sxz=zeros(N+1,N+1);
dz_sxx=zeros(N+1,N+1);

dz_u_new=zeros(N+1,N+1);
dz_w_new=zeros(N+1,N+1);
dz_ut_new=zeros(N+1,N+1);
dz_wt_new=zeros(N+1,N+1);
dz_szz_new=zeros(N+1,N+1);
dz_sxz_new=zeros(N+1,N+1);
dz_sxx_new=zeros(N+1,N+1);

f=zeros(N+1,N+1);
f_new=zeros(N+1,N+1);
fx=zeros(N+1,N+1);
fz=zeros(N+1,N+1);

phi_plot=zeros(N+1,N+1,nplots+1);
psi_plot=zeros(N+1,N+1,nplots+1);
phi=zeros(N+1,N+1);
phi_new=zeros(N+1,N+1);
psi=zeros(N+1,N+1);
psi_new=zeros(N+1,N+1);

b=1;
t=0;

kd=1:b;
kc=b+1:N+1-b;
ki=N+2-b:N+1;

ld=1:b;
lc=b+1:N+1-b;
li=N+2-b:N+1;

for n=2:nplots
    for tn=0:dt:tplot

        %A,B
        ut_new(kc,lc) = ut(kc,lc) +2*dtR(kc,lc).*dx_sxx(kc,lc)+2*dtR(kc,lc).*dz_sxz(kc,lc) +dt*fx(kc,lc) ;
        wt_new(kc,lc) = wt(kc,lc) +2*dtR(kc,lc).*dx_sxz(kc,lc)+2*dtR(kc,lc).*dz_szz(kc,lc) +dt*fz(kc,lc) ;
        szz_new(kc,lc) = szz(kc,lc) +2*dtC13(kc,lc).*dx_ut(kc,lc)+2*dtC33(kc,lc).*dz_wt(kc,lc) ;
        sxz_new(kc,lc) = sxz(kc,lc) +2*dtC44(kc,lc).*dx_wt(kc,lc)+2*dtC44(kc,lc).*dz_ut(kc,lc) ;
        sxx_new(kc,lc) = sxx(kc,lc) +2*dtC11(kc,lc).*dx_ut(kc,lc) +2*dtC13(kc,lc).*dz_wt(kc,lc) ;

        %A[-],B
        ut_new(kd,lc) = ut(kd,lc)+dtR(kd,lc).*dx_sxx(kd,lc)-dtC11R(kd,lc).*dx_ut(kd,lc)+2*dtR(kd,lc).*dz_sxz(kd,lc) ;
        wt_new(kd,lc) = wt(kd,lc)+dtR(kd,lc).*dx_sxz(kd,lc)-dtC44R(kd,lc).*dx_wt(kd,lc)+2*dtR(kd,lc).*dz_szz(kd,lc) ;
        szz_new(kd,lc) = szz(kd,lc)+dtC13(kd,lc).*dx_ut(kd,lc)-dtC131(kd,lc).*dx_sxx(kd,lc)+2*dtC33(kd,lc).*dz_wt(kd,lc) ;
        sxz_new(kd,lc) = sxz(kd,lc)+dtC44(kd,lc).*dx_wt(kd,lc)-dtC44R(kd,lc).*dx_sxz(kd,lc)+2*dtC44(kd,lc).*dz_ut(kd,lc) ;
        sxx_new(kd,lc) = sxx(kd,lc)+dtC11(kd,lc).*dx_ut(kd,lc)-dtC11R(kd,lc).*dx_sxx(kd,lc)+2*dtC13(kd,lc).*dz_wt(kd,lc) ;

        %A[+],B
        ut_new(ki,lc) = ut(ki,lc) +dtR(ki,lc).*dx_sxx(ki,lc) +dtC11R(ki,lc).*dx_ut(ki,lc) +2*dtR(ki,lc).*dz_sxz(ki,lc) ;
        wt_new(ki,lc) = wt(ki,lc) +dtR(ki,lc).*dx_sxz(ki,lc) +dtC44R(ki,lc).*dx_wt(ki,lc) +2*dtR(ki,lc).*dz_szz(ki,lc) ;

```

```

szz_new(ki,lc) = szz(ki,lc) +dtC13(ki,lc).*dx_ut(ki,lc) +dtC131(ki,lc).*dx_sxx(ki,lc) +2*dtC33(ki,lc).*dz_wt(ki,lc) ;
sxz_new(ki,lc) = sxz(ki,lc) +dtC44(ki,lc).*dx_wt(ki,lc) +dtC44R(ki,lc).*dx_sxz(ki,lc) +2*dtC44(ki,lc).*dz_ut(ki,lc) ;
sxx_new(ki,lc) = sxx(ki,lc) +dtC11(ki,lc).*dx_ut(ki,lc) +dtC11R(ki,lc).*dx_sxx(ki,lc) +2*dtC13(ki,lc).*dz_wt(ki,lc) ;

%A,B[-]
ut_new(kc,ld) = ut(kc,ld) +2*dtR(kc,ld).*dx_sxx(kc,ld) +dtR(kc,ld).*dz_sxz(kc,ld) -dtC44R(kc,ld).*dz_ut(kc,ld) ;
wt_new(kc,ld) = wt(kc,ld) +2*dtR(kc,ld).*dx_sxz(kc,ld) +dtR(kc,ld).*dz_szz(kc,ld) -dtC33R(kc,ld).*dz_wt(kc,ld) ;
szz_new(kc,ld) = szz(kc,ld) +2*dtC13(kc,ld).*dx_ut(kc,ld) +dtC33(kc,ld).*dz_wt(kc,ld) -dtC33R(kc,ld).*dz_szz(kc,ld) ;
sxz_new(kc,ld) = sxz(kc,ld) +2*dtC44(kc,ld).*dx_wt(kc,ld) +dtC44(kc,ld).*dz_ut(kc,ld) -dtC44R(kc,ld).*dz_sxz(kc,ld) ;
sxx_new(kc,ld) = sxx(kc,ld) +2*dtC11(kc,ld).*dx_ut(kc,ld) +dtC13(kc,ld).*dz_wt(kc,ld) -dtC133(kc,ld).*dz_szz(kc,ld) ;

%A,B[+]
ut_new(kc,li) = ut(kc,li) +2*dtR(kc,li).*dx_sxx(kc,li) +dtR(kc,li).*dz_sxz(kc,li) +dtC44R(kc,li).*dz_ut(kc,li) ;
wt_new(kc,li) = wt(kc,li) +2*dtR(kc,li).*dx_sxz(kc,li) +dtR(kc,li).*dz_szz(kc,li) +dtC33R(kc,li).*dz_wt(kc,li) ;
szz_new(kc,li) = szz(kc,li) +2*dtC13(kc,li).*dx_ut(kc,li) +dtC33(kc,li).*dz_wt(kc,li) +dtC33R(kc,li).*dz_szz(kc,li) ;
sxz_new(kc,li) = sxz(kc,li) +2*dtC44(kc,li).*dx_wt(kc,li) +dtC44(kc,li).*dz_ut(kc,li) +dtC44R(kc,li).*dz_sxz(kc,li) ;
sxx_new(kc,li) = sxx(kc,li) +2*dtC11(kc,li).*dx_ut(kc,li) +dtC13(kc,li).*dz_wt(kc,li) +dtC133(kc,li).*dz_szz(kc,li) ;

%A[-],B[-]
ut_new(kd,ld) = ut(kd,ld) +dtR(kd,ld).*dx_sxx(kd,ld) -dtC11R(kd,ld).*dx_ut(kd,ld) +dtR(kd,ld).*dz_sxz(kd,ld) -dtC44R(kd,ld).*dz_ut(kd,ld) ;
wt_new(kd,ld) = wt(kd,ld) +dtR(kd,ld).*dx_sxz(kd,ld) -dtC44R(kd,ld).*dx_wt(kd,ld) +dtR(kd,ld).*dz_szz(kd,ld) -dtC33R(kd,ld).*dz_wt(kd,ld) ;
szz_new(kd,ld) = szz(kd,ld) +dtC13(kd,ld).*dx_ut(kd,ld) -dtC131(kd,ld).*dx_sxx(kd,ld) +dtC33(kd,ld).*dz_wt(kd,ld) -dtC33R(kd,ld).*dz_szz(kd,ld) ;
sxz_new(kd,ld) = sxz(kd,ld) +dtC44(kd,ld).*dx_wt(kd,ld) -dtC44R(kd,ld).*dx_sxz(kd,ld) +dtC44(kd,ld).*dz_ut(kd,ld) -dtC44R(kd,ld).*dz_sxz(kd,ld) ;
sxx_new(kd,ld) = sxx(kd,ld) +dtC11(kd,ld).*dx_ut(kd,ld) -dtC11R(kd,ld).*dx_sxx(kd,ld) +dtC13(kd,ld).*dz_wt(kd,ld) -dtC133(kd,ld).*dz_szz(kd,ld) ;

%A[-],B[+]
ut_new(kd,li) = ut(kd,li) +dtR(kd,li).*dx_sxx(kd,li) -dtC11R(kd,li).*dx_ut(kd,li) +dtR(kd,li).*dz_sxz(kd,li) +dtC44R(kd,li).*dz_ut(kd,li) ;
wt_new(kd,li) = wt(kd,li) +dtR(kd,li).*dx_sxz(kd,li) -dtC44R(kd,li).*dx_wt(kd,li) +dtR(kd,li).*dz_szz(kd,li) +dtC33R(kd,li).*dz_wt(kd,li) ;
szz_new(kd,li) = szz(kd,li) +dtC13(kd,li).*dx_ut(kd,li) -dtC131(kd,li).*dx_sxx(kd,li) +dtC33(kd,li).*dz_wt(kd,li) +dtC33R(kd,li).*dz_szz(kd,li) ;
sxz_new(kd,li) = sxz(kd,li) +dtC44(kd,li).*dx_wt(kd,li) -dtC44R(kd,li).*dx_sxz(kd,li) +dtC44(kd,li).*dz_ut(kd,li) +dtC44R(kd,li).*dz_sxz(kd,li) ;
sxx_new(kd,li) = sxx(kd,li) +dtC11(kd,li).*dx_ut(kd,li) -dtC11R(kd,li).*dx_sxx(kd,li) +dtC13(kd,li).*dz_wt(kd,li) +dtC133(kd,li).*dz_szz(kd,li) ;

%A[+],B[-]
ut_new(ki,ld) = ut(ki,ld) +dtR(ki,ld).*dx_sxx(ki,ld) +dtC11R(ki,ld).*dx_ut(ki,ld) +dtR(ki,ld).*dz_sxz(ki,ld) -dtC44R(ki,ld).*dz_ut(ki,ld) ;
wt_new(ki,ld) = wt(ki,ld) +dtR(ki,ld).*dx_sxz(ki,ld) +dtC44R(ki,ld).*dx_wt(ki,ld) +dtR(ki,ld).*dz_szz(ki,ld) -dtC33R(ki,ld).*dz_wt(ki,ld) ;
szz_new(ki,ld) = szz(ki,ld) +dtC13(ki,ld).*dx_ut(ki,ld) +dtC131(ki,ld).*dx_sxx(ki,ld) +dtC33(ki,ld).*dz_wt(ki,ld) -dtC33R(ki,ld).*dz_szz(ki,ld) ;
sxz_new(ki,ld) = sxz(ki,ld) +dtC44(ki,ld).*dx_wt(ki,ld) +dtC44R(ki,ld).*dx_sxz(ki,ld) +dtC44(ki,ld).*dz_ut(ki,ld) -dtC44R(ki,ld).*dz_sxz(ki,ld) ;
sxx_new(ki,ld) = sxx(ki,ld) +dtC11(ki,ld).*dx_ut(ki,ld) +dtC11R(ki,ld).*dx_sxx(ki,ld) +dtC13(ki,ld).*dz_wt(ki,ld) -dtC133(ki,ld).*dz_szz(ki,ld) ;

%A[+],B[+]
ut_new(ki,li) = ut(ki,li) +dtR(ki,li).*dx_sxx(ki,li) +dtC11R(ki,li).*dx_ut(ki,li) +dtR(ki,li).*dz_sxz(ki,li) +dtC44R(ki,li).*dz_ut(ki,li) ;
wt_new(ki,li) = wt(ki,li) +dtR(ki,li).*dx_sxz(ki,li) +dtC44R(ki,li).*dx_wt(ki,li) +dtR(ki,li).*dz_szz(ki,li) +dtC33R(ki,li).*dz_wt(ki,li) ;
szz_new(ki,li) = szz(ki,li) +dtC13(ki,li).*dx_ut(ki,li) +dtC131(ki,li).*dx_sxx(ki,li) +dtC33(ki,li).*dz_wt(ki,li) +dtC33R(ki,li).*dz_szz(ki,li) ;
sxz_new(ki,li) = sxz(ki,li) +dtC44(ki,li).*dx_wt(ki,li) +dtC44R(ki,li).*dx_sxz(ki,li) +dtC44(ki,li).*dz_ut(ki,li) +dtC44R(ki,li).*dz_sxz(ki,li) ;
sxx_new(ki,li) = sxx(ki,li) +dtC11(ki,li).*dx_ut(ki,li) +dtC11R(ki,li).*dx_sxx(ki,li) +dtC13(ki,li).*dz_wt(ki,li) +dtC133(ki,li).*dz_szz(ki,li) ;

for k=1:N+1
    dx_ut_new(:,k)=chebfft(ut_new(:,k));
    dx_wt_new(:,k)=chebfft(wt_new(:,k));
    %dz_szz_new(:,k)=chebfft(szz_new(:,k));
    dx_sxz_new(:,k)=chebfft(sxz_new(:,k));
    dx_sxx_new(:,k)=chebfft(sxx_new(:,k));

    dz_ut_new(k,:)=chebfft(ut_new(k,:));
    dz_wt_new(k,:)=chebfft(wt_new(k,:));
    dz_szz_new(k,:)=chebfft(szz_new(k,:));
    dz_sxz_new(k,:)=chebfft(sxz_new(k,:));
    %dz_sxx_new(k,:)=chebfft(sxx_new(k,:));
end

u_new=u+dt*0.5*(ut+ut_new);
w_new=w+dt*0.5*(wt+wt_new);

if t<0.025
    f_new=zeros(N+1,N+1);
    f_new =1*sin(2*pi*t/0.025)*exp(-200*(X+0.7071).^2).*exp(-200*(Z).^2);
    for k=1:N+1
        fx(:,k)=chebfft(f_new(:,k));
        fz(k,:)=chebfft(f_new(k,:));
    end

```

```

else
    f_new=zeros(N+1,N+1);
    fx=zeros(N+1,N+1);
    fz=zeros(N+1,N+1);
end

t=t+dt;
f=f_new;
u=u_new;
w=w_new;

ut=ut_new;
wt=wt_new;
szz=szz_new;
sxz=sxz_new;
sxx=sxx_new;

dx_ut=dx_ut_new;
dx_wt=dx_wt_new;
dx_sxz=dx_sxz_new;
dx_sxx=dx_sxx_new;

dz_ut=dz_ut_new;
dz_wt=dz_wt_new;
dz_szz=dz_szz_new;
dz_sxz=dz_sxz_new;

end

u_plot(:,:,n)=u;
w_plot(:,:,n)=w;
ut_plot(:,:,n)=ut;
wt_plot(:,:,n)=wt;

end

figure('color','w');
pause
for n=1:1:nplots
    quiver(X,Z,u_plot(:,:,n),w_plot(:,:,n),3,'k','linewidth',1)
    title(['t=',num2str((n-1)*tplot),' n=',num2str(n)])
    axis([-1 1 -1 1])
    daspect([1 1 1])
    pause
end

fn1=figure('color','w');
fn2=figure('color','w');
fn3=figure('color','w');

for n=nplots+1:1:nplots

    for k=1:N+1
        dx_u(:,k)=chebfft(u_plot(:,k,n));
        dx_w(:,k)=chebfft(w_plot(:,k,n));
        dz_u(k,:)=chebfft(u_plot(k,:,n));
        dz_w(k,:)=chebfft(w_plot(k,:,n));
    end

    fi=dx_u+dz_w;
    si=dx_w-dz_u;
    mn=min(min([fi(kc,lc),si(kc,lc)]));
    mx=max(max([fi(kc,lc),si(kc,lc)]));

    umax=max(max(sqrt(u_plot(:,:,n).^2+w_plot(:,:,n).^2))
    extremo=max([mx -mn])
    tiempo=num2str((n-1)*tplot)

    figure(fn1)
    pcolor(X,Z,fi);

```

```

caxis([-extremo extremo]);
shading interp
colormap gray
daspect([1 1 1])

figure(fn2)
pcolor(X,Z,si);
caxis([-extremo extremo]);
shading interp
colormap gray
daspect([1 1 1])

figure(fn3)
quiver(X,Z,u_plot(:,:,n),w_plot(:,:,n),3,'k')
axis([-1 1 -1 1])
daspect([1 1 1])

pause(0.01)
end

%Función tomada de [7]
function w = chebfft(v)
N = length(v)-1; if N==0, w=0; return, end
x = cos((0:N)*pi/N);
ii = 0:N-1;
v = v(:); V = [v; flipud(v(2:N))];
U = real(fft(V));
W = real(ifft(1i*[ii 0 1-N:-1]'.*U));
w = zeros(N+1,1);
w(2:N) = -W(2:N)./sqrt(1-x(2:N).^2);
w(1) = sum(ii.^2.*U(ii+1))/N + .5*N*U(N+1);
w(N+1) = sum((-1).^(ii+1).*ii.^2.*U(ii+1))/N + .5*(-1)^(N+1)*N*U(N+1);

```

## 10 Bibliografía

- [ 1 ] Cheeke, J. David. Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves. CRC Press, Boca Raton Florida, 2002.
- [ 2 ] Achenbach, J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.
- [ 3 ] Billingham, J. King, A.C. Wave Motion. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [ 4 ] Harris, John G. Linear Elastic Waves. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [ 5 ] Boyd, John P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. DOVER Publications, New York, 2000.
- [ 6 ] Skiba, Yuri. Métodos y Esquemas Numéricos. Un Análisis Computacional. Universidad Nacional Autónoma de México. México, 2005.
- [ 7 ] Trefethen, Lloyd N. Spectral Methods in Matlab. SIAM, Philadelphia, 2000.

- [ 8] Dong, Lianguo et al. An eigenvalue decomposition method to construct absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. Journal of Geophysics and Engineering. UK, 2005
- [9] Renaut, Rosemary. Absorbing Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Waves. Oxford University Press.
- [10] Chew, W.C. Perfectly Matched Layers for Elastodynamics: A New Absorbing Boundary Condition. Journal of Computational Acoustics. 1996.
- [11] Renaut, Rosemary. Frölich, Jochen. A Pseudospectral Chebyshev method for the 2D Wave Equation with Domain Stretching and Absorbing Boundary Conditions. Journal of Computational Physics. February 1995.
- [12] Komatitsch, Dimitri et al. The Spectral Element Method for Elastic Wave Equations – Application to 2D and 3D seismic Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Pp 1139-1164. 1999.
- [13] Jianlei, Zhang et al. P- and S-wave Separated Elastic Wave Equation Numerical Modelling Using 2D Staggered-Grid. SEG/San Antonio 2007 Annual Meeting.
- [14] Ewing, Maurice, Wenceslas Jardetzky and Frank Press. Elastic Waves in Layered Media. McGraw-Hill. 1957.
- [15] Hill, C.R; Bamber and Haar. Physical Principles of Medical Ultrasonics. John Wiley and Sons, Ltd. Sussex 2004.