



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO  
EN INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

EXTRACCIÓN DE CARACTERÍSTICAS DE SEÑALES  
MIOELÉCTRICAS Y UN MODELO DINÁMICO COMPATIBLE PARA  
EL DESARROLLO DE PRÓTESIS DE MIEMBRO SUPERIOR

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**MECÁNICA - MECATRÓNICA**

P R E S E N T A

**SILVA HERNÁNDEZ HECTOR**



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ROGELIO ALCÁNTARA SILVA

2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*"Porque al final no somos lo que sentimos, vivimos, esperamos o hacemos, sino con quien lo compartimos"*

*"Nothing great in the world has ever been accomplished without passion"*

-Wilhelm Friedrich Hegel

*"Rest in reason; move in passion"*

-Khalil Gibran

*"Seek the wisdom of the ages, but look at the world through the eyes of a child"*

-Ron Wild

## *Dedicatoria*

*A todas las personas que han dejado una huella en mí, ya sea de mi familia, de mis amigos, de mis profesores o de aquellos por venir...*

*A mi padre, cuyos actos, palabras y consejos representan sabiduría tan necesaria en mi vida...*

*A mi madre "Irmae", cuya fuerza es una inspiración para luchar y salir adelante...*

*A mi hermano Guillermo "Monkey" cuyos actos me han enseñado una forma más rica de ver y enfrentar la vida...*

*A Alejandra "Chirga" Rivera García, cuya chirguez ha "nutrido" mi ser...*

*Si tú fueras la única persona en el mundo, tu corazón no estaría en ningún lado.*

## *Agradecimientos*

*A Dios, por darme la oportunidad de saborear cada instante de esta vida, de tener una familia tan maravillosa y de conocer a gente extraordinaria...*

*A la UNAM por permitirme hacerme de tan enriquecedoras experiencias y conocimientos...*

*A mis profesores del posgrado que me acompañaron en esta grata aventura y cuyo contacto ha enriquecido mi vida, de manera especial al Dr. Rogelio Alcántara Silva por su guía al realizar la Tesis, al Dr. Francisco Cuenca Jiménez por su gran apoyo en la realización de la dinámica de la prótesis, al Dr. Jorge Carrera Bolaños por su rigor matemático en las materias que cursé con él, al Dr. Jesús Manuel Dorador González por su orientación durante todo el posgrado, al Dr. Edmundo Rocha Cózatl y al Maestro Ulises Peñuelas Rivas.*

*A mis compañeros del posgrado, en especial a Emilio "Emil", Octavio "Okunaru", Marlene "Ñoña", Francisco "Paco" y Roy "Roy", en los cuales encontré nuevos amigos.*

*Al IPN por permitir iniciarme en el apasionante mundo de la ingeniería...*

*A los profesores de la licenciatura en Ing. Mecánica de la ESIME Culhuacán, especialmente al Maestro Ramón Ávila Anaya, al Maestro Christian Martínez Galindo, al Maestro Juan Carlos Báez Crespo, al "Tigre," al Ing. Gilberto Sánchez, al Maestro Daniel Arévalo Grajeda y a la Maestra Sofía Arreola Cervantes.*

*A la UAM, por ayudarme a continuar mi búsqueda de conocimientos...*

*A los profesores de la licenciatura en Ing. Electrónica de la UAM Iztapalapa, en especial al Maestro Mauricio López Villaseñor, al Dr. Miguel López Guerrero, al Dr. Miguel Ángel Pizaña y al Dr. Marcelo Galván Espinoza, cuyo apoyo y orientación trascendió el aula de clases.*

*Al Aikido, cuya filosofía me ha ayudado a enfrentar cada situación de mi vida, al Sensei Arturo, y al buen freak Oleg "Olaf".*

*A todas las personas que han ayudado en la realización de esta tesis, en especial a Ana y Enrique por facilitar la adquisición de datos experimentales.*

*Al CONACyT por otorgarme una beca que facilitó el desarrollo de los estudios de posgrado y que me permitió comprar una gran variedad de cosas (no siempre para fines académicos )*

# Resumen

Este trabajo surge como una propuesta de enfoque que intenta combinar la dinámica de mecanismos (parte fundamental del área de la ingeniería mecánica) y la parte de procesamiento de señales (disciplina cercana a la electrónica y a la computación) para proponer ideas y formas en las cuales el puente que enlaza estas partes dentro de una prótesis (el control) puede hacer uso de estrategias de los dos extremos para mejorar el desempeño del sistema protésico y que, tratándose de un posgrado en mecatrónica, considero adecuado y es uno de los justificantes de esta decisión.

Iniciamos haciendo una breve historia de las prótesis hasta llegar al estado del arte, posteriormente citamos el mecanismo fisiológico de la contracción muscular para finalmente abordar las características de las señales mioeléctricas (resultado obtenido principalmente de la revisión bibliográfica que respecta al procesamiento de señales mioeléctricas).

Después entramos al cuerpo principal de este trabajo, que consiste en dos partes: la primer parte se refiere a generar un modelo dinámico de un mecanismo que permite hacer la función de una prótesis de miembro superior para una amputación de tipo transhumeral. Se calcula la cinemática asociada al mecanismo cuya solución es información requerida para generar un modelo dinámico de la prótesis basado en el conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange. Esta parte concluye estableciendo las expresiones matemáticas del modelo. La segunda parte es la relativa al procesamiento de señales, y tiene como objetivo extraer información (en forma de parámetros) para que sea utilizada por la etapa de control. Iniciamos haciendo una breve explicación de los conceptos de procesamiento de señales involucrados en nuestro estudio. Este preámbulo permite sustentar el uso de las técnicas de procesamiento que abordamos: modelar a la señal mioeléctrica como la salida de un filtro con estructura definida cuya entrada es una señal con las mismas características estadísticas que la señal mioeléctrica. Se proponen filtros adaptables y técnicas para estimar la densidad espectral de potencias de la señal mioeléctrica (estimadores paramétricos y no paramétricos), se analizan las ventajas que presentan estos estimadores y que permiten hacer recomendaciones sobre su uso. Finalmente se analiza una estrategia de análisis de componentes principales (PCA) con el objetivo de reducir la dimensión de todo el conjunto de resultados arrojados por la técnicas analizadas.

Se concluye con una propuesta que consiste en monitorear parámetros adaptables obtenidos del procesamiento de la señal mioeléctrica que se consideran como indicativos de la actividad muscular presente, y gracias a los cuales es posible estimar otras características de la señal (como lo es contenido frecuencial instantáneo) y ofrecen un criterio que permite decidir se es necesario aplicar la estrategia de análisis de componentes principales.

# Índice general

<b>Glosario</b> .....	9
<b>1. Introducción</b> .....	10
1.1 Historia .....	10
1.2 Estado del arte .....	13
1.3 Niveles de amputación en el miembro superior .....	15
1.4 Naturaleza y características de las señales mioeléctricas .....	16
1.4.1 Anatomofisiología del músculo esquelético .....	16
1.4.2 Mecanismo general de la contracción muscular .....	18
1.4.3 Mecánica de la contracción del músculo esquelético.....	20
1.4.4 Señales mioeléctricas.....	20
1.5 Estructura del documento .....	21
<b>2. Cinemática de la prótesis</b> .....	23
2.1 Método vectorial .....	23
2.1.1 Notación a utilizar .....	23
2.1.2 Derivadas de vectores .....	24
2.1.3 Vector de velocidad angular .....	25
2.1.4 Vector de aceleración angular .....	26
2.1.5 Vector de velocidad y aceleración lineal .....	26
2.1.6 Matrices de rotación.....	27
2.1.7 Rotación de un vector .....	27
2.1.8 Matrices de velocidad angular .....	28
2.1.9 Composición de matrices de rotación.....	28
2.2 Propuesta de mecanismo .....	31
2.2.1 Descripción de los vectores y bases dentro del mecanismo .....	32
2.3 Análisis de posición.....	43
2.4 Análisis de velocidad .....	45
2.5 Análisis de aceleración.....	49
<b>3. Modelado mecánico</b> .....	51
3.1 Posición de los centros de gravedad .....	51
3.2 Velocidad de los centros de gravedad .....	55
3.3 Función Lagrangiana .....	60
3.3.1 Desarrollo del primer término de la ecuación de Lagrange .....	60
3.3.2 Desarrollo del segundo término de la ecuación de Lagrange .....	81
<b>4. Conceptos de procesamiento de señales</b> .....	89
4.1 Preliminares.....	89
4.2 Promedios de conjuntos .....	90
4.3 Proceso estacionario .....	90

4.3.1 Estacionaridad en el sentido amplio .....	91
4.4 Proceso de tipo Gaussiano .....	93
4.5 Ergodicidad .....	93
4.6 Consistencia de un estimador .....	94
4.7 Densidad espectral de potencias .....	95
4.8 Ventaneo .....	95
4.9 Metodología de evaluación de herramientas de procesamiento .....	96
<b>5. Estimación espectral .....</b>	<b>99</b>
5.1 Métodos no paramétricos .....	99
5.1.1 Periodograma .....	100
5.1.2 Método de Blackman-Tukey .....	101
5.2 Métodos paramétricos .....	102
5.2.1 Modelo Autoregresivo .....	102
5.2.2 Selección del orden del modelo .....	107
<b>6. Filtrado adaptable .....</b>	<b>110</b>
6.1 Filtros adaptables LMS .....	110
6.2 Filtros RLS .....	114
6.3 Filtros RLS rápidos.....	118
<b>7. Análisis de componentes principales .....</b>	<b>125</b>
7.1 PCA mediante maximización de la varianza .....	126
<b>8. Evaluación del desempeño y evaluación de algoritmos.....</b>	<b>131</b>
8.1 Descripción de la herramienta de ambiente de trabajo.....	131
8.2 Resultados de aplicar las herramientas de procesamiento.....	132
8.3 Parámetros de importancia dentro de la estructura de filtrado adaptable.....	141
8.4 Aplicación del análisis por componentes principales.....	156
<b>9. Conclusiones y perspectivas.....</b>	<b>162</b>
9.1 Conclusiones .....	162
9.2 Trabajo a futuro y perspectivas .....	164
9.2.1 Relación con variables mecánicas.....	164
9.2.2 Versiones rápidas del algoritmo de filtrado RLS .....	164
9.2.3 Descomposición ciega e ICA .....	164
9.2.4 Distribuciones tiempo-frecuencia y wavelets .....	165
9.2.5 Estrategias de control del modelo dinámico propuesto .....	165
<b>A Identidades algebraicas .....</b>	<b>166</b>
<b>B Programas .....</b>	<b>167</b>
B.1 Programa de ventaneo en MATLAB .....	167
B.2 Programa de ecuaciones en diferencias en MATLAB.....	168
B.3 Programa estimar el orden del modelo AR en cada ventana.....	168
B.4 Programa estimar la densidad espectral de potencias instantánea.....	169
B.5 Programa estimar el orden del modelo AR usando la varianza del error del algoritmo RLS...	170
B.6 Programa estimar coeficientes del modelo AR usando el algoritmo RLS .....	171



B.7 Programa estimar coeficientes del modelo AR usando el algoritmo RLS versión rápida (Cioffi y Kailath).....	171
B.8 Programa para generar proceso AR .....	173
<b>C Circuito utilizado para obtener señales mioeléctricas.....</b>	<b>174</b>
C.1 Diagrama y lista de componentes del circuito de adquisición de señales mioeléctricas.....	174
<b>D PSDs de orden 2 y 8 del filtro RLS de las señales EMG.....</b>	<b>175</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>179</b>
<b>Índice alfabético.....</b>	<b>181</b>

# Índice de figuras

1.1	Tipos y distribución estadística:.....	12
1.2	Causas .....	12
1.3	La prótesis ilimb: .....	13
1.4	“Revolutionizing Prosthetics”: .....	14
1.5	Niveles de amputación.....	15
1.6	Organización del músculo esquelético.....	16
1.7	Microfotografía electrónica de las miofibrillas .....	17
1.8	Retículo sarcoplásmico alrededor de las miofibrillas .....	18
1.9	Diagrama de una porción de una fibra de músculo esquelético .....	19
1.10	Ámbito .....	22
1.11	Diagrama de bloques del procesamiento de una sola señal mioeléctrica.....	22
2.1	Rotaciones alrededor del marco actual .....	30
2.2	Rotaciones alrededor del marco fijo .....	30
2.3	Mecanismo propuesto para la prótesis de miembro superior.....	31
2.4	Asignación de números a cada eslabón que compone el mecanismo propuesto.....	32
2.5	Definición de la base 0 y la base 1 .....	33
2.6	Definición de la base 2 .....	34
2.7	Definición de la base 3 .....	35
2.8	Definición de la base 4 .....	36
2.9	Definición de la base 5 .....	37
2.10	Definición de la base 6 .....	38
2.11	Definición de la base 7 .....	39
2.12	Definición de la base 8 .....	39
2.13	Definición de la base 9 .....	40
2.14	Definición de la base 10 .....	41
2.15	Definición de la base 11 .....	42
2.16	Definición de ángulos de Euler.....	42
2.17	La ecuación de cierre vectorial propuesta .....	43
3.1	Posiciones de los centros de gravedad .....	52
3.2	Definición de las posiciones de los centros de gravedad .....	53
3.3	Definición de las posiciones de los centros de gravedad (continuación).....	54
4.1	Temas abordados en la tesis.....	90
4.2	Programa de ventaneo desarrollado. ....	96
4.3	Proceso AR(5) no estacionario .....	97
5.1	Filtro analizador de proceso AR .....	103
5.2	Filtro generador de proceso AR.....	104
5.3	Interfaz gráfica análisis frecuencial mediante periodograma.....	106
5.4	Interfaz gráfica análisis frecuencial mediante Blackman-Tukey.....	107
5.5	Criterio AIC para selección de orden del proceso AR(5) no estacionario.....	108

5.6	Criterio FPE para selección de orden del proceso AR(5) no estacionario .....	109
6.1	Estructura de filtro adaptable .....	111
6.2	Filtro transversal .....	111
6.3	Mecanismo de adaptabilidad del filtro adaptable .....	112
6.4	Diagrama de flujo del algoritmo LMS .....	113
6.5	Diagrama de flujo del algoritmo RLS .....	118
6.6	Evolución temporal del coeficiente 1 estimado del proceso AR(5) no estacionario .....	120
6.7	Evolución temporal del coeficiente 2 estimado del proceso AR(5) no estacionario .....	120
6.8	Evolución temporal del coeficiente 3 estimado del proceso AR(5) no estacionario .....	121
6.9	Evolución temporal del coeficiente 4 estimado del proceso AR(5) no estacionario .....	121
6.10	Evolución temporal del coeficiente 5 estimado del proceso AR(5) no estacionario .....	122
6.11	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias teóricas del proceso AR(5) no estacionario .....	122
6.12	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas mediante LMS normalizado para el proceso AR(5) no estacionario .....	123
6.13	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas mediante RLS para el proceso AR(5) no estacionario .....	123
6.14	Evolución temporal del parámetro $\gamma$ .....	124
7.1	Estructura de procesamiento involucrando PCA.....	125
7.2	Coefficientes por unidad temporal del proceso AR(5).....	129
7.3	Coefficientes representados en el espacio asociado al primer componente principal.....	129
8.1	Ambiente de trabajo .....	131
8.2	Una realización de señal EMG asociada a flexión de bíceps.....	132
8.3	Una realización de señal EMG asociada a extensión de bíceps .....	133
8.4	Una realización de señal EMG asociada a máxima fuerza en flexión de bíceps.....	133
8.5	Ambiente de trabajo periodograma para señal EMG asociada a flexión de bíceps (Ventana rectangular, tamaño de ventana de 128 y traslape 32) .....	134
8.6	Ambiente de trabajo Blackman-Tukey para señal EMG asociada a flexión de bíceps (Ventana Hamming, tamaño de ventana de 128 y traslape 32) .....	134
8.7	Ambiente de trabajo periodograma para señal EMG asociada a extensión de bíceps (Ventana rectangular, tamaño de ventana de 128 y traslape 32).....	135
8.8	Ambiente de trabajo Blackman-Tukey para señal EMG asociada a extensión de bíceps (Ventana Hamming, tamaño de ventana de 128 y traslape32) .....	135
8.9	Ambiente de trabajo periodograma para señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (Ventana rectangular, tamaño de ventana de 128 y traslape 32).....	136
8.10	Ambiente de trabajo Blackman-Tukey para señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (Ventana Hamming, tamaño de ventana de 128 y traslape 32).....	136
8.11	Criterio AIC selección de orden de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99) .....	137
8.12	Criterio FPE selección de orden de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99) .....	137
8.13	Criterio AIC selección de orden de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99) .....	138
8.14	Criterio FPE selección de orden de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99) .....	138

8.15	Criterio AIC selección de orden de señal EMG asociada a máxima fuerza en flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99) .....	139
8.16	Criterio FPE selección de orden de señal EMG asociada a máxima fuerza en flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99) .....	139
8.17	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 4).....	140
8.18	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 4).....	140
8.19	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 4)..	141
8.20	Evolución temporal parámetro $\gamma$ para realización de señal EMG asociada a flexión de bíceps.....	142
8.21	Evolución temporal parámetro $\gamma$ para realización de señal EMG asociada a extensión de bíceps.....	142
8.22	Evolución temporal parámetro $\gamma$ para realización de señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.....	143
8.23	Evolución temporal del PSD, del parámetro $\gamma$ y de los coeficientes del filtro para la señal EMG asociada a flexión de bíceps.....	144
8.24	Evolución temporal del PSD, del parámetro $\gamma$ y de los coeficientes del filtro para la señal EMG asociada a extensión de bíceps.....	144
8.25	Evolución temporal del PSD, del parámetro $\gamma$ y de los coeficientes del filtro para la señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.....	145
8.26	Parámetro $\gamma$ dentro de un intervalo de tiempo y características dentro de la zona fuera del margen establecido.....	146
8.27	Señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps, evolución temporal del parámetro $\gamma$ y de las pendientes asociadas a cambios bruscos en $\gamma$ .....	147
8.28	Señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps, evolución temporal del parámetro $\gamma$ y de las pendientes asociadas a cambios bruscos en $\gamma$ .....	147
8.29	Señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps, evolución temporal del parámetro $\gamma$ y de las pendientes asociadas a cambios bruscos en $\gamma$ .....	148
8.30	Evolución temporal de cada coeficiente de la señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps.....	149
8.31	Evolución temporal de cada coeficiente de la señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps.....	149
8.32	Evolución temporal de cada coeficiente de la señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.....	150
8.33	Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 1 y 2 de la señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps.....	151
8.34	Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 3 y 4 de la señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps.....	151
8.35	Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 1 y 2 de la señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps.....	152
8.36	Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 3 y 4 de la señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps.....	152
8.37	Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 1 y 2 de la señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.....	153

8.38	Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 3 y 4 de la señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.....	153
8.39	Evolución temporal de valores máximos característicos de señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps.....	154
8.40	Evolución temporal de valores máximos característicos de señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps.....	155
8.41	Evolución temporal de valores máximos característicos de señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.....	155
8.42	PSD en el instante n=400 de flexión de bíceps.....	157
8.43	PSD en el instante n=400 de extensión de bíceps.....	157
8.44	Datos originales para cada señal mioeléctrica en el instante n=400.....	160
8.45	Datos obtenidos representados en el espacio asociado al primer componente principal..	161
9.1	Propuesta resultado del trabajo de tesis.....	164
9.1	Descomposición ciega e ICA .....	165
C.1	Circuito de adquisición de señales mioeléctricas.....	174
D.1	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 2).....	175
D.2	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 8).....	176
D.3	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 2) .....	176
D.4	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 8).....	177
D.5	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 2)..	177
D.6	Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 8)..	178

## Índice de cuadros

5.1	Comparación de sesgo, varianza y resolución de métodos no paramétricos abordados....	102
8.1	Promedios en rangos temporales del parámetro $\gamma$ de la señal mioeléctrica EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.....	145
8.2	Distribución energética en bandas de frecuencia para flexión de bíceps.....	158
8.3	Distribución energética en bandas de frecuencia para extensión de bíceps.....	158

# Glosario

- ADP** Difosfato de adenosina. 20
- AIC** Akaike information criterion. 108
- AR** Autoregressive. 102, 104
- ARMA** Autoregressive moving average. 104
- ATP** Trifosfato de adenosina. 18
- CDMIT** Centro de diseño e innovación tecnológica. 12
- DARPA** Defense Advanced Research Projects Agency. 14
- DC** Direct current. 21
- DSP** Digital signal processing. 15
- EMG** Electromyography. 20
- FIR** Finite impulse response. 115
- FPE** Final prediction error. 107
- GDL** Grados de libertad. 14
- ICA** Independent component analysis. 125
- KLT** KarhunenLoeve transform. 128
- LMS** Least mean square. 110
- LTI** Linear time invariant. 89, 92
- MA** Moving average. 104
- ME** Mioelectric. 20
- PCA** Principal component analysis. 125
- PDF** Probability density function. 108
- PSD** Power spectral density. 95
- RLS** Recursive least squares. 117
- WSS** Wide sense stationary. 91

# Capítulo 1

## Introducción

En esta parte se explica brevemente la forma en la que se compone este documento, expone una breve reseña histórica de la evolución de las prótesis, se menciona el mecanismo fisiológico del movimiento muscular y se finaliza exponiendo las características de las señales mioeléctricas. Esta parte tiene como objetivo establecer las tendencias en las investigaciones y las consideraciones que se tomarán al tratar a la señal mioeléctrica y son consistentes con los resultados arrojados por diferentes investigaciones alrededor del mundo que enmarcan el estado del arte. En la última sección de este capítulo se incluye un resumen de la estructura y organización del presente documento.

### 1.1. Historia

Aunque la labor de crear sistemas que sustituyan un miembro o elemento corporal data desde que se tiene un registro histórico, no es sino hasta en el último par de décadas en donde se han alcanzado logros importantes gracias a desarrollos en diversas áreas del saber humano; avances en la electrónica de estado sólido, microelectrónica, herramientas computacionales, sistemas de control, dinámica, mecanismos, métodos de producción, medicina y química, así como la relación interdisciplinaria que guarda cada área con respecto a las demás han permitido un avance acelerado en el desarrollo de sistemas, entre los que encontramos las prótesis de miembros humanos.

Una prótesis es un dispositivo que está diseñado para sustituir a la medida de lo posible, la función o la apariencia de una extremidad o parte del cuerpo faltante, y no debe de confundirse con una órtesis, cuya función es la de apoyar, complementar o aumentar la función de una extremidad o parte del cuerpo.

La noción de las amputaciones y la tarea del desarrollo de prótesis data desde las primeras civilizaciones humanas; la primer prueba de un amputado data de hace 45000 años y es un cráneo humano en el que se han alineado y se han deformado los dientes de tal manera que indique que fue le fue amputada una extremidad superior.

Las prótesis de las antiguas culturas comenzaron como simples muletas de madera y cuero. Posteriormente se desarrolló un "socket" de enchufe para la pierna hecha con trapos de tela para suavizar la tibia y el peroné distal y permitir una mayor gama de movimientos.

Con el nacimiento de las grandes civilizaciones de Egipto, Grecia y Roma vino el desarrollo de la medicina y posteriormente de la ciencia de las prótesis. Plinio el Viejo escribió sobre Sergio de Marco, un general romano, que sufrió heridas y la amputación del brazo derecho durante la Segunda Guerra Púnica (218 a 210 aC) y una mano de hierro le fue creada para que pudiera sostener su escudo, y regresar a la batalla.

La Edad Media fue una época en la que el desarrollo de las prótesis no avanzó de manera considerable debido a las presiones sociales sobre aquellos que realizaban trabajos científicos y desarrollos tecnológicos. No había muchas alternativas de prótesis para los amputados, solo existían muletas y los ganchos de mano, que sólo los ricos podían permitirse.

El Renacimiento marcó un resurgimiento de la ciencia y un redescubrimiento de las prácticas médicas originadas por los griegos y romanos. El barbero-cirujano del ejército Francés Ambroise Paré inventó prótesis para las extremidades superior e inferior que demostraron un conocimiento creciente de la función de una prótesis [1].

Desde el año 1600 a principios de los años 1800, vemos grandes mejoras en prótesis y principios quirúrgicos. La invención del torniquete, la anestesia y las drogas para la medicina de la época ayudó al desarrollo de las prótesis, lo anterior también hizo que una amputación sea aceptada como medida curativa. Gracias a estos avances ahora era viable realizar intervenciones quirúrgicas extensas y complejas donde el cirujano tenía el tiempo suficiente para hacer más funcional la parte residual de las extremidades, lo que permitía al protesista realizar mejores prótesis.

En el año 1858 el Dr. Douglas Bly inventó y patentó la pierna anatómica que lleva su nombre. Más tarde en ese siglo, Dubois Parmlee inventó una prótesis que poseía un zócalo de succión, rodilla policéntrica, y un pie multiarticulado; Gustav Hermann sugirió utilizar el aluminio en lugar de acero, y Heather Bigg escribió un libro de texto se detalla la colocación de uniones para la correcta alineación.

Durante el siglo XIX observamos la utilización de nuevos materiales; se emplearon el cuero, los polímeros naturales y la madera en la fabricación de prótesis; también se desarrollaron nuevos mecanismos para la fabricación de elementos de transmisión de fuerza y para la sujeción. Entre las innovaciones más importantes al diseño de las prótesis de miembro superior, se encuentra Peter Beil en Alemania, el diseño de la mano poseía cierre y apertura de los dedos, era controlada por los movimientos del tronco y hombro, dando origen a las prótesis autopropulsadas. Otra modificación importante en el diseño de prótesis de miembro superior, fue la del Holandés Van Petersen, que logró el movimiento de flexo-extensión a nivel de codo con el sistema de autopropulsión. Más tarde el Conde Beafort dio a conocer un brazo con flexión del codo activado al presionar una palanca contra el tórax, además de que tenía una mano con pulgar móvil utilizando un gancho dividido sagitalmente [31].

Al finalizar la Primera Guerra Mundial, el cirujano general de la armada norteamericana reconoció la preocupante falta de atención para amputados en América. Invitó a los protesistas a reunirse en Washington DC para discutir la tecnología y su desarrollo. De esta reunión surgió la actual American Prosthetics and Orthotics Association. Este evento marcó el inicio del desarrollo moderno de prótesis y ha contribuido más a la ciencia de las prótesis que cualquier otro acontecimiento en la historia. A través de este foro se pudieron desarrollar normas éticas, científicas, programas educativos, y establecer mejores relaciones con otros profesionales de la salud [1].

Las prótesis con control mioeléctrico comenzaron a surgir en el año de 1960 en Rusia. Esta opción protésica funciona con pequeñas diferencias de potencial extraídos durante la contracción de las masas musculares del muñón, siendo estos conducidos y amplificados para obtener el movimiento de la misma. En sus inicios, este tipo de prótesis solo era colocada para amputados de antebrazo, logrando una fuerza prensora de dos kilogramos [11]. En décadas recientes las investigaciones han sido encaminadas al desarrollo de prótesis más eficientes en el gasto energético, con mayor versatilidad de movimientos, más livianas y cómodas de usar, por lo que el desarrollo de mecanismos más avanzados, integración con sistemas eléctricos y electrónicos y formas de control son la áreas de mayor investigación en la actualidad.

Actualmente, son pocos los países que realizan una labor tanto informativa, estadística y de apoyo a personas que necesitan el uso de prótesis, consideremos los datos de amputaciones de los Estados Unidos de



Norteamérica, donde la amputación transhumeral representa el 4% de las amputaciones actuales, y desarrollar una prótesis que sustituya el miembro superior hasta ese punto cubrirá el 14.5% de las amputaciones presentes (ya que se podrían cubrir también amputaciones de mano y por debajo del codo), y el 90.6% de las amputaciones de miembro superior actuales.

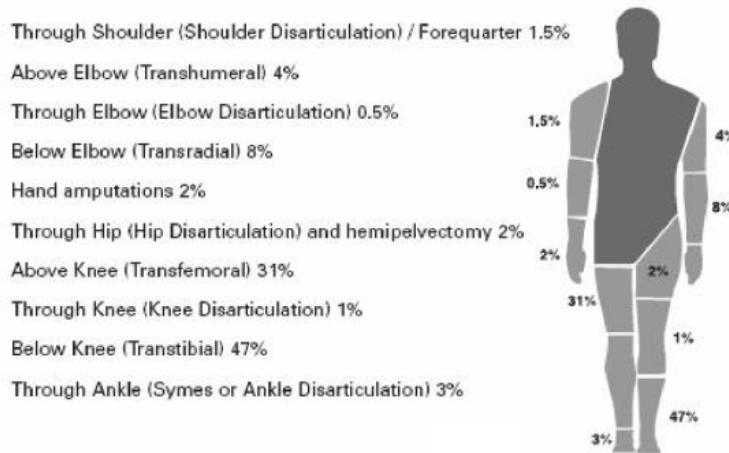


Figura 1.1: Tipos y distribución estadística: Amputaciones [4]

En México, son pocos los datos que se tienen acerca de la estadística de personas con amputaciones, y la inexistencia de un programa informativo y de apoyo a individuos con este tipo de lesiones trae como consecuencia una pobre fuente de información relacionada con el tema. Entre los datos que se tienen consideremos el arrojado por el censo nacional del año 2000 en el cual las amputaciones provocan una discapacidad motriz, cuyas causas se pueden observar en el gráfico de la figura 1.2.

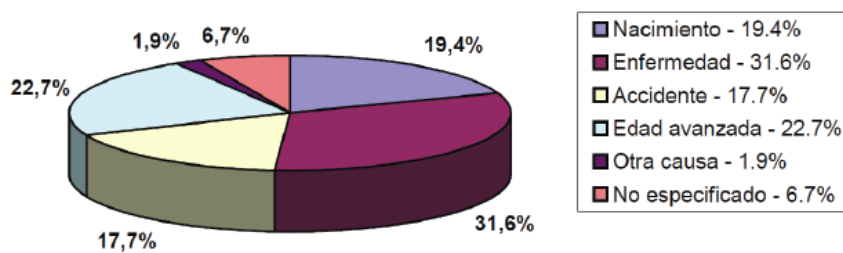


Figura 1.2: Causas: Discapacidad motriz en México [2]

En años recientes el procesamiento de señales ha permitido un gran avance en la detección, predicción y control de movimientos cuya consecuencia ha sido la creación de prótesis de mayor funcionalidad. El estudio y análisis de las señales mioeléctricas es fundamental para su descripción y obtención de la información que permita mejorar las estrategias de control y por ende el desempeño de los sistemas prostéticos de miembro superior.

Este proyecto conforma una parte de un proyecto de mayor alcance, el de prótesis inteligente el cual se desarrolla en el centro de diseño mecánico e innovación tecnológica (CDMIT) de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y cuyo fin es la totalidad del desarrollo de una prótesis de miembro superior. Así

esta parte del proyecto se abocará a analizar el problema que representa el desarrollo de una prótesis de miembro superior desde el punto de vista de la disciplina del procesamiento digital de señales, con el fin de hacer uso de las técnicas y herramientas para mejorar el desempeño y el funcionamiento de una prótesis de miembro superior.

## 1.2. Estado del arte

Debido a que en el desarrollo de sistemas de prótesis concurren diversas áreas del conocimiento humano, cada avance que se presenta en cada una de ellas afectará en cierta medida el estado de las prótesis. Sin embargo podemos observar que recientemente los avances más significativos los encontramos dentro de las áreas de la electrónica, el cómputo, la ingeniería mecánica y de materiales así como en la biomedicina.

Dentro de la mecánica observamos que los mecanismos propuestos para implementar las prótesis han ido evolucionado desde simples correas, arneses y resortes hasta intrincados sistemas de poleas, engranes y sistemas hidráulicos; las prótesis se han vuelto más livianas y más resistentes debido a un mejor entendimiento y observación de los esfuerzos presentes dentro de la prótesis. Dentro de la electrónica, la última década ha sido testigo de un incremento en la capacidad de procesamiento de arquitecturas embebidas, mientras su reducción en tamaño y costo ha permitido que se adapten a sistemas móviles (como lo es una prótesis). En el área de cómputo, el incremento en la capacidad de cálculo de las computadoras ha permitido implementar algoritmos de estimación y detección de movimientos y patrones que antes no eran susceptibles de ser utilizados en aplicaciones de tiempo real. Los nuevos materiales desarrollados han impactado casi todas las áreas involucradas en el desarrollo de las prótesis, desde los materiales para fabricar la estructura del miembro a sustituir, hasta los materiales utilizados en la electrónica. Las nuevas técnicas quirúrgicas han permitido que el miembro residual posea una mayor capacidad de emitir información que puede ser de utilidad para control de la prótesis y el avance en terapias de rehabilitación permiten que la funcionalidad del miembro superior sea superior y más duradera.

El estado del arte lo podemos dividir en dos áreas: el ámbito comercial y el de investigación. Dentro de las prótesis comerciales, tenemos que la denominada *i-limb* de la compañía *touch bionics* es la prótesis más avanzada que se encuentra en el mercado. Entre sus características más importantes tenemos:

- Interfaz mioeléctrica
- Reconocimiento de diferentes tipos de prensiones de mano
- Estructuras de reconocimiento de patrones

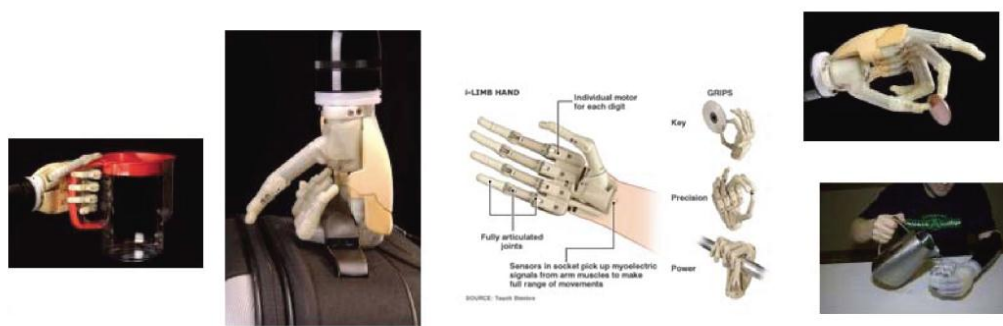


Figura 1.3: La prótesis *i-limb*:  
Touch bionics [5]

Esta prótesis presenta movimientos en los dedos para realizar diferentes tipos de agarre en la mano (aunque los dedos no son de movimientos independientes controlados por el usuario). También presenta estrategias de procesamiento de señales mioeléctricas para detectar patrones de movimiento, los cuales están dentro de la patente del brazo, y representan un secreto de índole industrial que se traduce en una ventaja dentro del mercado. Sin embargo esta prótesis presenta una serie de desventajas entre las que tenemos:

- Dificultad en el aprendizaje de uso
- Funcionalidad limitada
- Alto costo
- Requiere constantes calibraciones

Dentro de la investigación de avanzada tenemos el proyecto denominado “Revolutionizing Prosthetics” del DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency) del departamento de defensa de Norteamérica, entre sus características más sobresalientes tenemos:

- Técnica quirúrgica de reinervación
- 22 GDL (objetivo final de 27 GDL)
- Combina algoritmos neuronales, de estimación y detección
- Redes de múltiples procesadores
- Objetivo de retroalimentación al individuo de condiciones ambientales (temperatura, vibración y presión)



Figura 1.4: “Revolutionizing Prosthetics”:  
La prótesis de proyecto financiado por (DARPA) [3]

Dentro del procesamiento de señales encontramos el uso de diversas técnicas, que aunque se conocen desde hace mucho tiempo, es hasta ahora que el incremento en la capacidad de cómputo ha permitido aplicar estas estrategias, entre estos enfoques tenemos:

- Distribuciones tiempo-frecuencia
- Wavelets
- Procesadores dedicados (myoprocessors)
- Lógica difusa
- Algoritmos genéticos

La mayoría de estas técnicas se enfocan a definir de manera más precisa los parámetros que componen la señal mioeléctrica, como lo es el rango de frecuencias y amplitudes en los que se desenvuelve la señal y la manera en la que varían las propiedades estadísticas, para así determinar algoritmos optimizados para esta aplicación, para finalmente implementarlos en procesadores digitales de señales (DSPs) , los cuales recientemente poseen múltiples núcleos y dificulta su implementación.

### 1.3. Niveles de amputación en el miembro superior

A continuación se presenta una figura que ilustra la clasificación de los niveles de amputación para miembro superior:

- 1 Amputación interescápulo-torácica o de clavícula
- 2 Desarticulación del hombro
- 3 Amputación transhumeral o por encima del codo
- 4 Desarticulación del codo
- 5 Amputación transradial o por debajo del codo
- 6 Desarticulación de la mano y la muñeca
- 7 Amputación transcarpal o de mano parcial
- 8 Amputación de dedos

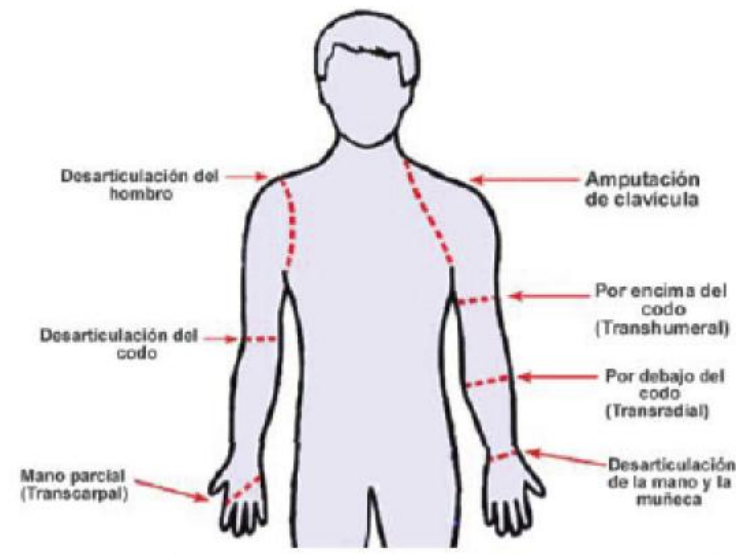


Figura 1.5: *Niveles de amputación*  
Miembro superior [6]

Debido a la lesión que trataremos en este documento es que se propone un mecanismo que sustituya el movimiento del codo y de la muñeca, la mano se está desarrollando como un miembro independiente bajo la premisa de posicionar el miembro terminal de nuestro mecanismo y posteriormente efectuar un tipo de prensión de la mano dependiendo de la tarea a desarrollar.

### 1.4. Naturaleza y características de las señales mioeléctricas

A continuación se presenta un resumen de las bases fisiológicas del movimiento muscular, esta parte tiene como finalidad familiarizarse con el fenómeno de naturaleza electrobioquímica y tomar conciencia del gran número de factores y variables involucradas, lo que trae como consecuencia una dificultad de establecer un modelo basado en condiciones fisiológicas.

### 1.4.1. Anatomofisiología del músculo esquelético

El sistema muscular está constituido por tres tipos de músculos: el músculo cardíaco, que forma el corazón; el músculo liso (no estriado o involuntario) que revisten el interior de los órganos internos; y el músculo esquelético (estriado o voluntario), que se sujeta al esqueleto a través de los tendones. El músculo esquelético es el tejido más abundante del cuerpo humano (40% a 45% de la masa total del cuerpo). Este tipo de tejido es el involucrado en los movimientos de las extremidades, y su capacidad dinámica normalmente representan la acción de grupos musculares, no de músculos individuales. Realizan tanto trabajo dinámico como estático, y para el desarrollo de prótesis mioeléctricas es el de mayor importancia tanto estructural como funcional [13].

#### Fibra del músculo esquelético

En la siguiente figura (1.6) se muestra la organización del músculo esquelético, y se observa que todos los músculos esqueléticos están formados por numerosas fibras cuyos diámetros varían entre 10 y 80 micrómetros. Cada una de estas fibras está formada a su vez por subunidades sucesivamente más pequeñas.

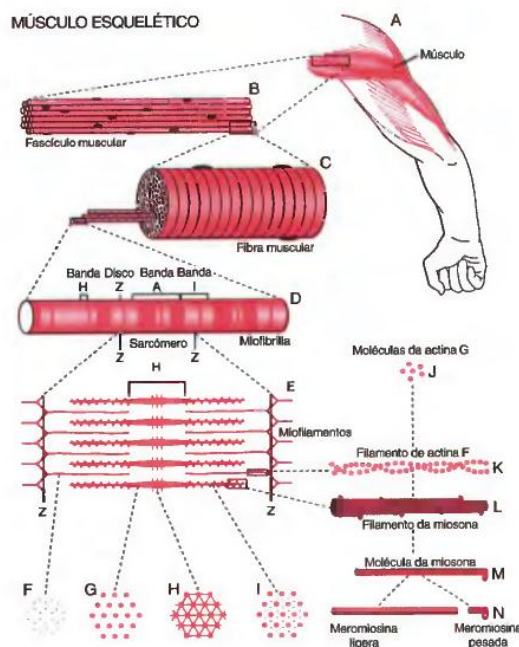


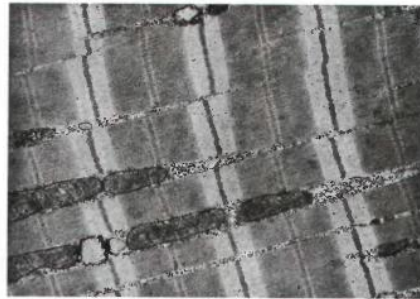
Figura 1.6: Organización del músculo esquelético

Desde el nivel macroscópico al molecular. F, G, H e I son cortes transversales en los niveles indicados [13].

En la mayor parte de los músculos, las fibras se extienden en toda la longitud del mismo; con la excepción de aproximadamente un 2% de las fibras, cada una está inervada por una sola terminación nerviosa, localizada cerca de su porción media. A continuación se describen las partes componentes de la fibra de la músculo esquelético.

El **sarcolema** es la membrana celular de la fibra muscular. Está constituido por una membrana celular verdadera, denominada membrana plasmática, y por una cubierta exterior formada por una fina capa de material polisacárido que contiene numerosas fibrillas finas de colágeno. En cada extremo de la fibra muscular, ésta capa superficial del sarcolema se fusiona con una fibra tendinosa, y estas fibras tendinosas se unen a su vez en haces para formar los tendones musculares e insertarse en los huesos.

**Miofibrillas**, filamentos de actina y de miosina. Cada fibra muscular contiene entre varios centenares y varios millares de miofibrillas, señaladas por los numerosos puntos abiertos en el corte mostrado en la figura 1.6 C. Cada miofibrilla (figura 1.6 D y E) posee a su vez, situados uno al lado de otro, unos 1500 filamentos de miosina y 3000 filamentos de actina, que son grandes moléculas proteicas polimerizadas responsables de la contracción muscular. Se pueden observar en proyección longitudinal en la microfotografía electrónica de la figura 1.7, y se representan esquemáticamente en la figura 1.6, partes E a L. Los filamentos gruesos de los diagramas representan la miosina y los filamentos finos la actina. Obsérvese en la figura 1.6 E que los filamentos de actina y de miosina están parcialmente intercalados, lo que hace que las miofibrillas presenten bandas claras y oscuras alternantes. Las bandas claras contienen tan solo filamentos de actina y se denominan bandas *I* porque son isotrópicas con la luz polarizada. Las bandas oscuras contienen los filamentos de miosina, así como los extremos de los filamentos de actina donde éstos se superponen a la miosina, y se denominan bandas *A* porque son anisotrópicas con la luz polarizada. Obsérvese también las pequeñas proyecciones de los lados de los filamentos de miosina en las Figuras 1.6 E y 1.6 L. Estas estructuras son los puentes cruzados, y hacen prominencia desde las superficies de los filamentos de miosina a lo largo de toda la extensión del filamento, excepto en el centro exacto de éste. La interacción entre estos puentes cruzados y los filamentos de actina produce la contracción.



**Figura 1.7:** *Microfotografía electrónica de las miofibrillas*

Músculo en el que se muestra la organización detallada de los filamentos de actina y de miosina. Obsérvese las mitocondrias situadas entre las miofibrillas [13].

En la figura 1.6 E se muestra también que los extremos de los filamentos de actina están unidos a un denominado *disco Z*. Desde este disco, estos filamentos se extienden en ambas direcciones para intercalarse con los filamentos de miosina. El disco Z, compuesto de proteínas filamentosas distintas de los filamentos de actina y miosina, cruza la miofibrilla y también cruza de una miofibrilla a otra, uniéndolas entre sí a todo lo ancho de la fibra muscular. Por tanto, la fibra muscular completa posee bandas claras y oscuras, al igual que las miofibrillas individuales. Estas bandas proporcionan al músculo esquelético y al músculo cardíaco su aspecto estriado.

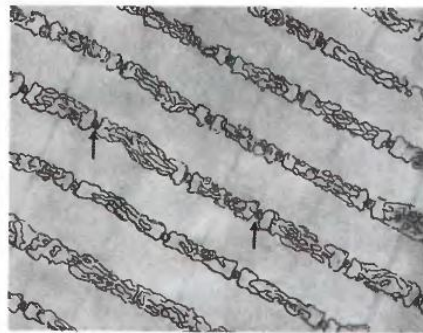
La porción de una miofibrilla (o de toda la fibra muscular) situada entre dos discos Z sucesivos se denomina sarcómero. Cuando la fibra muscular está en su posición de reposo normal, totalmente estirada, la longitud del sarcómero es de unos 2 micrómetros. A esta longitud, los filamentos de actina se superponen a los filamentos de miosina y están a punto de superponerse unos a otros. Y debido a esta longitud, el sarcómero también es capaz de generar su mayor fuerza de contracción.

La relación lado a lado entre los filamentos de actina y miosina es difícil de mantener. Esto se logra mediante un gran número de moléculas filamentosas de una proteína denominada titina. Cada molécula de titina tiene un peso molecular aproximado de 3 000 000, lo que la convierte en una de las moléculas proteicas de mayor tamaño del organismo. Además, debido a que es filamentosa, es una molécula muy elástica. Estas elásticas moléculas de titina actúan como armazón que reviste los filamentos de actina y miosina para constituir la maquinaria contráctil de trabajo del sarcómero.

Existen además motivos para pensar que la propia molécula de titina actúa como molde para la formación inicial de porciones de los filamentos contráctiles del sarcómero, en especial los filamentos de miosina.

**Sarcoplasma:** Dentro de la fibra muscular, las miofibrillas están suspendidas en una matriz denominada sarcoplasma, constituida por los componentes intracelulares habituales. El líquido del sarcoplasma contiene grandes cantidades de potasio, magnesio y fosfato, además de numerosas enzimas proteicas. También está presente un elevado número de mitocondrias, situadas paralelas a las miofibrillas, situación indicativa de la gran necesidad de las miofibrillas contráctiles de disponer de grandes cantidades del trifosfato de adenosina (ATP) formado por las mitocondrias.

**Retículo sarcoplasmático:** También en el sarcoplasma existe un extenso retículo endoplásmico (figura 1.8), que en la fibra muscular se denomina retículo sarcoplásmico. Este retículo posee una organización especial, extremadamente importante para el control de la contracción muscular. Los tipos de músculo de contracción más rápida poseen retículos sarcoplásmicos especialmente extensos, lo que indica que esta estructura es especialmente importante para producir la contracción muscular rápida.



**Figura 1.8:** *Retículo sarcoplásmico alrededor de las miofibrillas*

Se muestra el sistema longitudinal en paralelo con las mismas. También se muestran en corte transversal los túbulos T (flechas) que conducen al exterior de la membrana de la fibra y que contienen líquido extracelular [13].

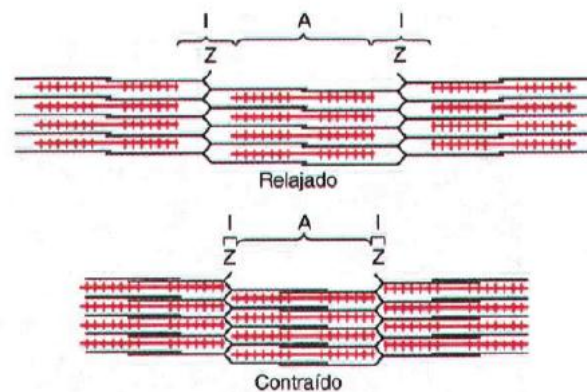
#### 1.4.2. Mecanismo general de la contracción muscular

La iniciación y la ejecución de la contracción muscular se producen según los siguientes pasos secuenciales:

1. Un potencial de acción viaja a lo largo de un nervio motor hasta sus terminaciones en las fibras musculares.
2. En cada terminación el nervio secreta una pequeña cantidad de la sustancia neurotransmisora acetilcolina.

3. La acetilcolina actúa sobre una zona local de la membrana de la fibra muscular para abrir múltiples canales con apertura por acetilcolina a través de moléculas proteicas que flotan en la membrana.
4. La apertura de los canales de acetilcolina permite que grandes cantidades de iones sodio fluyan al interior de la membrana de la fibra muscular. Esto inicia un potencial de acción en la fibra muscular.
5. El potencial de acción viaja a lo largo de la membrana de la fibra muscular, de la misma manera que viajan los potenciales de acción a lo largo de las membranas de los nervios.
6. El potencial de acción despolariza la membrana de la fibra muscular y gran parte de la electricidad del potencial de acción también viaja en profundidad dentro de la fibra muscular, donde hace que el retículo sarcoplásmico libere grandes cantidades de iones calcio que estaban almacenados en el retículo.
7. Los iones calcio inician fuerzas de atracción entre los filamentos de actina y de miosina, haciendo que se deslicen entre sí. lo cual constituye el proceso de contracción.
8. Transcurrida una fracción de segundo, los iones calcio son bombeados de nuevo al interior del retículo sarcoplásmico mediante una bomba de calcio de membrana, donde permanecerán almacenados hasta la llegada de un nuevo potencial de acción al músculo; esta retirada de los iones calcio de las miofibrillas hace que cese la contracción muscular.

A continuación describiremos el mecanismo del proceso contráctil:



**Figura 1.9:** *Diagrama de una porción de una fibra de músculo esquelético*  
Se ilustra el retículo sarcoplásmico que rodea cada miofibrilla [13].

En la figura 1.9 se muestra el mecanismo básico de la contracción muscular. Se observa un sarcómero en estado relajado (arriba) y en estado contraído (abajo). En el estado relajado, los extremos de los filamentos de actina procedentes de dos discos Z sucesivos comienzan a superponerse mínimamente entre sí, al tiempo que están adyacentes a los filamentos de miosina. Por otra parte, en el estado contraído, estos filamentos de actina han sido atraídos hacia adentro entre los filamentos de miosina, de modo que ahora muestran una mayor superposición entre sí. Asimismo, los discos Z han sido atraídos por los filamentos de actina hacia los extremos de los filamentos de miosina. De hecho, durante la contracción intensa, los filamentos de actina han sido atraídos hacia el interior entre los filamentos de miosina, de forma que sus extremos ahora se superponen en mayor medida. Por tanto, la contracción muscular se produce por un mecanismo de deslizamiento de los filamentos.

Los filamentos de actina se deslizan hacia el interior entre los filamentos de miosina debido a las fuerzas mecánicas generadas por la interacción de los puentes cruzados de los filamentos de miosina



con los filamentos de actina. En condiciones de reposo, estas fuerzas están inhibidas, pero cuando un potencial de acción viaja por la membrana de la fibra muscular, hace que el retículo sarcoplásmico libere grandes cantidades de iones calcio que rápidamente penetran en las miofibrillas. Estos iones calcio activan a su vez las fuerzas entre los filamentos de actina y de miosina, y comienza la contracción. Pero también hace falta energía para que se lleve a cabo el proceso contráctil. Esta energía procede de los enlaces de alta energía del ATP, que se degrada a difosfato de adenosina (ADP) para liberar la energía necesaria para el proceso.

### 1.4.3. Mecánica de la contracción del músculo esquelético

#### Unidad motora

Cada motoneurona que abandona la médula espinal inerva muchas fibras musculares diferentes, en número dependiente del tipo de músculo. Todas las fibras musculares inervadas por una sola fibra nerviosa motora reciben el nombre de unidad motora. En general, los músculos pequeños que reaccionan rápidamente y cuyo control debe ser exacto poseen pocas fibras musculares (hasta dos o tres solamente, como ocurre en algunos músculos laríngeos) en cada unidad motora. A la inversa, los grandes músculos que no requieren un control muy fino, tal como el músculo sóleo, pueden poseer varios cientos de fibras musculares en una unidad motora. Sería cuestionable dar una cifra promedio para todos los 108 músculos del organismo, aunque una buena suposición sería alrededor de 100 fibras musculares por unidad motora.

Las fibras musculares de cada unidad motora no están agrupadas en el músculo, sino que se superponen a otras unidades motoras en microhaces de 3 a 15 fibras. Esta interdigitación permite que las distintas unidades motoras se contraigan en apoyo unas de otras, en lugar de hacerlo totalmente como segmentos individuales.

### 1.4.4. Señales mioeléctricas

Debido al potencial de proveer una manera sencilla de obtener estimados cuantitativos del estado de actividad muscular, las señales mioeléctricas han sido utilizadas en diversos campos: análisis clínico, medicina experimental, terapia física, psicoterapia, rehabilitación, prótesis y órtesis. Sin embargo, la calidad obtenida usando estrategias comunes de procesamiento es pobre. Intentos por obtener un estimado cuantitativo de la actividad muscular han estado plagados por la presencia de interferencias y señales consideradas como ruido de gran amplitud y baja frecuencia la cual esta superpuesta en la señal deseada [16].

La señal mioeléctrica (ME) es la manifestación eléctrica de la activación neuromuscular asociada con la contracción muscular. Es una señal extremadamente compleja, la cual es afectada por las propiedades fisiológicas y anatómicas de los músculos, el esquema de control del sistema nervioso periférico, así como de las características de la instrumentación que es usada para detectar y observar estas señales. La falta de una descripción apropiada de la señal mioeléctrica es probablemente el factor más importante que ha limitado el desarrollo de la electromiografía (EMG) en una disciplina precisa [10].

Como se ha observado al describir el proceso fisiológico que se encuentra detrás de la contracción muscular, tratar de modelar a las señales mioeléctricas desde este enfoque implica introducir variables que tienen que ver con la morfología muscular (la cual es propia de cada individuo), el número y la dimensión de fibras musculares involucradas, relaciones entre las sustancias causantes del fenómeno electroquímico involucrado en el mecanismo contráctil, entre otras; por lo que este enfoque se vuelve en general poco utilizado en aplicaciones de control de sistemas usando señales mioeléctricas. En este trabajo se usará un enfoque en el cual se modelará la señal mioeléctrica en base al patrón de variación que presente, dejando a un lado los factores del fenómeno que lo causa.

Las señal mioeléctrica superficial se asume como un proceso aleatorio de tipo Gaussiano: varias investigaciones han observado que la amplitud de la señal mioeléctrica obtenida mediante electrodos

superficiales está descrita adecuadamente mediante una distribución Gaussiana ([29], [19], [30]). Considerar a la señal mioeléctrica como un proceso aleatorio de tipo Gaussiano simplifica su análisis, sin embargo no define la forma del espectro de la señal. Por lo tanto es aceptable asumir que la densidad espectral de potencias de la señal mioeléctrica puede ser expresado como una función racional de la frecuencia. Esto es, el espectro se asume como una relación de dos polinomios en la frecuencia, y además, que solo potencias pares de la frecuencia tienen coeficientes diferentes de cero. Lo anterior permite que la señal sea modelada posteriormente haciendo pasar un ruido blanco a través de un filtro lineal [29]. Así, se puede considerar a la señal mioeléctrica como una señal de naturaleza aleatoria limitada en banda con una distribución Gaussiana y con rango de frecuencias desde DC hasta aproximadamente 500 Hz [22].

Debido a su naturaleza aleatoria, la señal mioeléctrica se considera como la suma de eventos condicionalmente independientes, y la Ley de los grandes números justifica esta consideración, y gracias a los resultados experimentales (para las señales mioeléctricas superficiales) se justifica que el valor promedio es nulo. El otro parámetro de la distribución de amplitud es la varianza, y se asume que es modulada usando un factor multiplicativo de una función estática de la fuerza muscular, la cual es en general no lineal ([19],[24]).

La dependencia temporal entre los valores sucesivos de la actividad mioeléctrica está completamente caracterizada por la función de autocorrelación o, equivalentemente, la densidad espectral de potencia. En general la señal mioeléctrica es un proceso aleatorio no estacionario conforme la fuerza muscular varía, sin embargo, ya que la frecuencia de los componentes de la fuerza muscular son casi de un orden de magnitud menor que los de la actividad mioeléctrica, se puede considerar a la señal mioeléctrica como estacionaria durante el tiempo (muestras) disponibles para procesamiento [16]. Estas premisas son útiles si consideramos a la señal como estacionaria, sin embargo si se considera como no estacionaria, es necesario considerar otros parámetros relacionados con la estadística además de un valor constante de varianza y valor esperado.

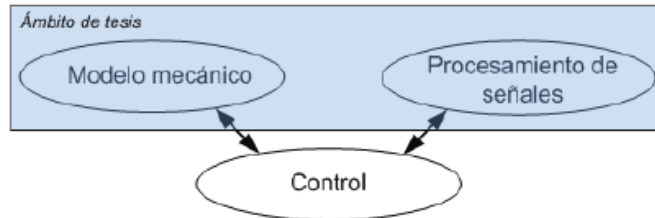
## 1.5. Estructura del documento

En esta sección se establece de manera resumida la estructura y el contenido presente en esta tesis; el cuerpo principal de este trabajo consiste en dos partes: la primera parte se refiere a generar un modelo dinámico de un mecanismo que permite hacer la función de una prótesis de miembro superior para una amputación de tipo transhumeral. Se inicia calculando la cinemática en el capítulo 2, para esto primero explicamos el método a utilizar, la notación que se usará, las estructuras algebraicas involucradas. Posteriormente se propone el mecanismo a utilizar que hace la función de prótesis para finalmente hacer el análisis de posición, velocidad y aceleración del mecanismo. En el capítulo 3, haciendo uso de los resultados obtenidos del análisis cinemático, se deriva un modelo dinámico del mecanismo haciendo uso del conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange. Esta parte finaliza en una expresión que permite calcular los diferentes pares para una posición (o trayectoria) deseada del miembro terminal del mecanismo. Esta expresión se derivó de esta manera para facilitar la generación un modelo en variables de estado (tarea que corresponde a la parte de control de la prótesis) del sistema.

La segunda parte es la relativa al procesamiento de señales, y tiene como objetivo extraer información (en forma de parámetros) para que sea utilizada por la etapa de control. Iniciamos haciendo una breve explicación de los conceptos de procesamiento de señales involucrados en nuestro estudio en el capítulo 4; desde el concepto de señal con distribución Gaussiana, estacionariedad (en sentido estricto y en sentido amplio), ergodicidad (la cual permite hacer uso de promedios temporales en lugar de promedios de conjuntos). Este preámbulo permite sustentar el uso de las técnicas de procesamiento que abordamos: modelar a la señal mioeléctrica como la salida de un filtro con estructura definida cuya entrada es una señal con las mismas características estadísticas que la señal mioeléctrica. En el capítulo 5 se establecen las técnicas que utilizaremos para estimar la densidad espectral de potencias de la señal mioeléctrica (estimadores paramétricos y no paramétricos). En el capítulo 6 se establecen los diferentes algoritmos de filtrado adaptable que utilizaremos y que permiten estimar parámetros en cada instante de

tiempo que representan las características de una señal y que pueden utilizarse para estimar su contenido frecuencial instantáneo. El último tópico introducido se encuentra en el capítulo 7 en el cual se analiza una estrategia de análisis de componentes principales (PCA) con el objetivo de reducir la dimensión de todo el conjunto de resultados arrojados por la técnicas analizadas.

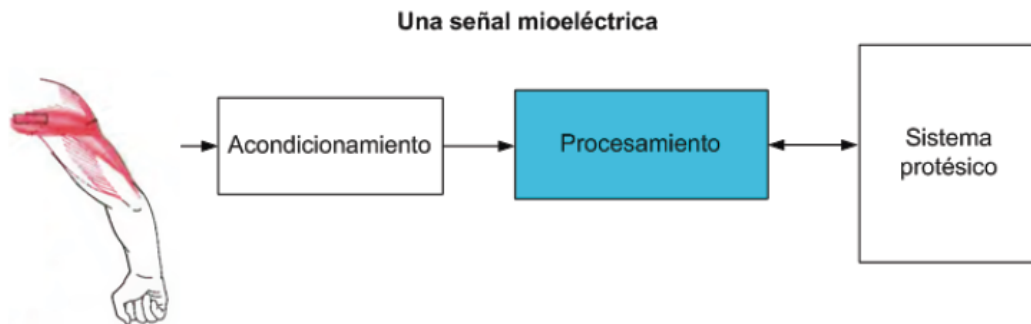
En el capítulo 8 se presentan la evaluación de las herramientas de procesamiento al conjunto de señales mioeléctricas reales y finalmente en el capítulo 9 se presenta las conclusiones y las perspectivas a futuro.



**Figura 1.10:** *Ámbito*  
Presente trabajo de tesis.

Este trabajo presenta ejemplos usando señales mioeléctricas reales para ilustrar las herramientas seleccionadas, sin embargo se deja para un trabajo posterior la tarea de especificar el número y grupos musculares de los cuales se obtendrán las señales mioeléctricas (relacionados íntimamente con el enfoque de control y biomecánica a utilizar).

Cabe destacar que se pudo haber optado por dedicarse exclusivamente a una de las dos partes (modelado mecánico o procesamiento de señales) y sería un resultado válido, pero considerando el trabajo que se ha realizado en cada área creo que le da más valor al trabajo exponer ambos.



**Figura 1.11:** *Diagrama de bloques del procesamiento de una sola señal mioeléctrica.*

## Capítulo 2

# Cinemática de la prótesis

El conjunto de ecuaciones que describen la dinámica del sistema mecánico propuesto para la prótesis será la base para establecer un modelo que se utilizará para validar el trabajo relacionado con el procesamiento de señales. Así, primero se desarrollarán las ecuaciones que describen la posición, velocidad y aceleración del sistema protésico propuesto, para finalmente establecer el modelo usando las ecuaciones de Euler-Lagrange. La forma en la que se desarrollan estos conceptos se basan en la metodología descrita en [21].

A continuación se desarrollarán los conceptos y las estructuras matemáticas necesarias para resolver el problema de determinar la dinámica del mecanismo propuesto; se establecerán las formas que tienen las matrices de rotación, las expresiones de posición, la velocidad y aceleración, así como la notación a utilizar.

El método que se usará será el vectorial, en el cual también se usarán conceptos de matrices de rotación; primero abordaremos la definición de la notación a usar en la representación de vectores, las estructuras para obtener las derivadas (que servirán para definir la velocidad y aceleración), para finalmente definir los conceptos y estructuras matemáticas que se usarán al construir el conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange.

## 2.1. Método vectorial

### 2.1.1. Notación a utilizar

En esta sección definiremos la notación a utilizar, estableceremos las diferencias de notación entre vectores definidos en una base inercial de los definidos en una base local, así como la representación de matrices de cambio de base.

Los vectores de posición, velocidad y aceleración (tanto lineal como angular) los definiremos usando letras “negritas” minúsculas ( $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ). Para especificar en donde está definido un vector utilizaremos un subíndice, por ejemplo, los siguientes vectores se encuentran definidos en una base cualquiera  $p$ : ( $\mathbf{r}_p$ ,  $\mathbf{v}_p$ ,  $\mathbf{a}_p$ ,  $\boldsymbol{\omega}_p$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_p$ ). Para denotar en que base se está proyectando un vector usaremos superíndices, así si los

vectores siguientes se proyectaran en la base  $q$  los escribiremos de la siguiente manera: ( $\mathbf{r}^q$ ,  $\mathbf{v}^q$ ,  $\mathbf{a}^q$ ,  $\boldsymbol{\omega}^q$ ,  $\boldsymbol{\alpha}^q$ ). Por lo que si queremos especificar un vector que está definido en una base pero está proyectado en otra base diferente usaremos la combinación (de subíndices y superíndices); esta combinación será la más utilizada a lo largo de este documento, debido a que se definirán bases locales en cada eslabón del mecanismo propuesto, pero para operar vectorialmente es necesario que estén proyectadas en la misma base. Por lo que los vectores definidos en una base particular  $p$ , pero proyectados en otra base arbitraria  $q$  se escribirán de la siguiente forma: ( $\mathbf{r}_p^q$ ,  $\mathbf{v}_p^q$ ,  $\mathbf{a}_p^q$ ,  $\boldsymbol{\omega}_p^q$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_p^q$ ). Para referirnos a los vectores unitarios de la base canónica reservamos las letras ( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ ), que en concordancia con la notación de vectores serán escritos usando letras “negritas” minúsculas.

Las matrices serán representadas usando letras “negritas” mayúsculas. Una matriz de cambio de base la definiremos usando tanto superíndices como subíndices: los subíndices indicarán la base desde la cual se proyectará y los superíndices indicarán la base en donde se está proyectando. Por ejemplo la matriz  $\mathbf{R}_a^b$  es una matriz que está cambiando de la base  $a$  a la base  $b$ .

Las matrices de rotación las denotaremos usando letras “negritas” mayúsculas, en las cuales con un subíndice especificaremos el eje sobre el cual se está dando la rotación, y tendrán un argumento que denotará la magnitud de la rotación, que en este caso será algún ángulo en particular. Por ejemplo si una matriz representa una rotación de  $\theta$  grados sobre el eje  $z$  la escribiremos como  $\mathbf{R}_z(\theta)$ .

Durante el desarrollo matemático aparecerán otras estructuras matriciales como lo es la matriz de inercia de los eslabones, así como otras estructuras que serán usadas para reducir las expresiones. Estas expresiones serán representadas con letras “negritas” mayúsculas.

Es importante mencionar que todas las variables involucradas en el análisis dinámico (posición, velocidad y aceleración) son funciones temporales:

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t), \boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\alpha}(t))$$

Sin embargo, con la finalidad de reducir la notación, se omitirá la notación de dependencia temporal que guardan las variables  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})$ .

Para denotar las derivadas temporales usaremos puntos sobre la variable derivada, y en algunos casos a las variables derivadas respecto al tiempo se les denominará de otra manera. Algunos ejemplos son:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\alpha}$$

En conclusión, si tenemos un vector  $\mathbf{r}$  definido en una base  $p$  y proyectado en otra base  $q$ , dada nuestra notación, lo escribiremos de la siguiente manera

$$\mathbf{r}_p^q = x\mathbf{i}_p^q + y\mathbf{j}_p^q + z\mathbf{k}_p^q$$

Y la matriz de cambio de base que llevara al vector  $\mathbf{r}_p$  que se encuentra proyectado en una base  $q$

(aunque se encuentre definido en otra base  $p$ ) a la base  $a$ , será el vector  $\mathbf{r}_p$  alterado por la matriz que cambie de la base  $q$  a la base  $a$  ( $\mathbf{R}_q^a$ ):

$$\mathbf{r}_p^a = \mathbf{R}_q^a \mathbf{r}_p^q$$

Esta notación será de gran utilidad porque permitirá representar un vector que cambia de una base a otra mediante matrices de cambio de base, las cuales podrán ser a su vez un conjunto de rotaciones alrededor de diferentes ejes.

### 2.1.2. Derivadas de vectores

Un vector de posición  $\mathbf{r}$  puede cambiar de dos maneras: en magnitud y en dirección [21]. Esto significa aunque el vector no cambie de magnitud es posible que cambie de dirección y en este caso es necesario definir un marco de referencia en el cual se tome la derivada ( $\dot{\mathbf{r}}$ ). Por lo que no es posible calcular la derivada de un vector a menos que se establezca un marco de referencia. En el caso del método que utilizaremos es conveniente establecer una expresión que permita calcular la derivada en una base en particular de un vector definido en otra base.

De esta manera, si definimos  $\mathbf{r}$  como:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Y tomamos a  $A$  como marco de referencia, la derivada de  $\mathbf{r}$  en  $A$  se define como:

$$\dot{\mathbf{r}}^A = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + x^A \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + y^A \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} + z^A \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

Si escogemos que los vectores unitarios  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  tengan direcciones fijas en  $A$ , éstos serán constantes en ese marco de referencia, y por lo tanto:

$$\dot{\mathbf{r}}^A = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

Que es la forma más directa de expresar la derivada de un vector y su asociación con un marco de referencia.

### 2.1.3. Vector de velocidad angular

En esta sección consideramos la relación entre las derivadas de un vector tomadas en dos marcos diferentes, se establecerá así una definición útil y concisa de la velocidad angular.

Sea un vector arbitrario  $\mathbf{r}$ , podemos expresar  $\mathbf{r}$  en términos de sus componentes  $(x, y, z)$  asociadas a direcciones fijas en un marco  $B$  por medio de la expresión:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

En donde los vectores unitarios  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  son paralelos a los ejes de un sistema coordenado ortogonal fijo en  $B$ . Consideremos otro marco de referencia  $A$  en el que derivaremos el vector  $\mathbf{r}$ . Se relacionarán derivadas de un vector tomadas en dos marcos diferentes. Se enfatiza que estos vectores son arbitrarios, no se requiere que estén relacionados con la dinámica ni la derivada tiene que ser respecto al tiempo, aunque esta es la variable de interés en este análisis.

Si  $\dot{\mathbf{r}}^A$  representa la derivada de  $\mathbf{r}$  con respecto al tiempo en  $A$  se tiene:

$$\dot{\mathbf{r}}^A = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + (x\dot{\mathbf{i}}^A + y\dot{\mathbf{j}}^A + z\dot{\mathbf{k}}^A)$$

Podemos observar que:

- 1 Los primeros tres términos del lado derecho de la ecuación representan las derivada de  $\mathbf{r}$  en  $B$  (no hay cambio de dirección).
- 2 Los segundos tres términos representan el cambio de orientación del marco  $B$  respecto a  $A$ .

Así:

$$\dot{\mathbf{r}}^A = \dot{\mathbf{r}}^B + (x\dot{\mathbf{i}}^A + y\dot{\mathbf{j}}^A + z\dot{\mathbf{k}}^A)$$

Lo que resta ahora es definir las derivadas de los vectores unitarios, las cuales estarán determinadas por la relación de velocidades angulares entre los dos marcos de referencia. A este vector los llamaremos  $\boldsymbol{\omega}_{B/A}$  y es el vector de velocidad angular del marco  $B$  en  $A$ . Es claro que  $\boldsymbol{\omega}_{B/A}$  depende del modo en que el marco  $B$  cambia su orientación respecto a  $A$ .

El vector  $\boldsymbol{\omega}_{B/A}$  puede entonces expresarse como:

$$\boldsymbol{\omega}_{B/A} = \omega_{B/A_x} \mathbf{i} + \omega_{B/A_y} \mathbf{j} + \omega_{B/A_z} \mathbf{k}$$

Y además se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}^A &= \boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{j}}^A &= \boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{k}}^A &= \boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \mathbf{k} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas igualdades en (2.1.1) tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}^A &= \dot{\mathbf{r}}^B + (x(\boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \mathbf{i}) + y(\boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \mathbf{j}) + z(\boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \mathbf{k})) \\ &= \dot{\mathbf{r}}^B + (\boldsymbol{\omega}_{B/A} \times x\mathbf{i}) + (\boldsymbol{\omega}_{B/A} \times y\mathbf{j}) + (\boldsymbol{\omega}_{B/A} \times z\mathbf{k}) \\ &= \dot{\mathbf{r}}^B + \boldsymbol{\omega}_{B/A} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ \dot{\mathbf{r}}^A &= \dot{\mathbf{r}}^B + \boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \mathbf{r}\end{aligned}\quad (2.1.2)$$

La ecuación (2.1.2) permite calcular fácilmente la derivada de un vector en un marco si está expresada en términos de vectores base fijos en otro marco.

#### 2.1.4. Vector de aceleración angular

La aceleración del marco B respecto al marco A se define como:

$$\boldsymbol{\alpha}_{B/A} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^A$$

Si tenemos que:

$$\boldsymbol{\omega}_{C/A} = \boldsymbol{\omega}_{C/B} + \boldsymbol{\omega}_{B/A}$$

Derivando respecto al tiempo tenemos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{C/A} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{C/A}^A \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{C/B}^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^A \\ &= \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{C/B}^B + \boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \boldsymbol{\omega}_{C/B} \right) + \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^A + \boldsymbol{\omega}_{A/A} \times \boldsymbol{\omega}_{B/A} \right)\end{aligned}$$

Donde tenemos que  $\boldsymbol{\omega}_{A/A}$  representa la velocidad angular relativa del marco A con respecto al mismo marco A, por lo que este término es nulo; así:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{C/A} &= (\boldsymbol{\omega}_{C/B}^B + \boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \boldsymbol{\omega}_{C/B}) + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^A + \mathbf{0} \times \boldsymbol{\omega}_{B/A}) \\ \boldsymbol{\alpha}_{C/A} &= \boldsymbol{\alpha}_{C/B} + \boldsymbol{\alpha}_{B/A} + (\boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \boldsymbol{\omega}_{C/B})\end{aligned}$$

El término  $(\boldsymbol{\omega}_{B/A} \times \boldsymbol{\omega}_{C/B})$  se denominada generalmente término giroscópico, nótese que desaparece en el movimiento plano, debido a que todas las rotaciones se realizan en ejes paralelos.

#### 2.1.5. Vector de velocidad y aceleración lineal

Consideremos un vector de magnitud y orientación variable, definido en una base cualquiera:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r\mathbf{u}$$

Donde  $r$  y  $\mathbf{u}$  varían con el tiempo, además  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  y  $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{u}\|$ . La ecuación de velocidad lineal se obtiene derivando  $\mathbf{r}$  respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{dr}{dt}\mathbf{u} + r\frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ &= \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\mathbf{u}} \\ &= v\mathbf{u} + r\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \\ &= v\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times (r\mathbf{u}) \\ \mathbf{v} &= v\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\end{aligned}$$

La ecuación de aceleración lineal es:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u} + v\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (2.1.3)$$

$$= a\mathbf{u} + v(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (v\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.1.4)$$

$$\mathbf{a} = a\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\omega} \times (v\mathbf{u}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.1.5)$$

### 2.1.6. Matrices de rotación

En esta sección definiremos las estructuras de las matrices de rotación alrededor de los ejes que definen la base en la cual está definida un vector. Esto quiere decir que estableceremos las estructuras matriciales de rotación alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y las consideraremos positivas para giros antihorarios alrededor de los ejes.

#### Rotación alrededor del eje $z$

Para este caso se alinea el vector  $\mathbf{k}_p$  con otro  $\mathbf{k}_q$ :

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

#### Rotación alrededor del eje $y$

Para este caso se alinea el vector  $\mathbf{j}_p$  con otro  $\mathbf{j}_q$ :

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \text{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

#### Rotación alrededor del eje $x$

Para este caso se alinea el vector  $\mathbf{i}_p$  con otro  $\mathbf{i}_q$ :

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\text{sen}\gamma \\ 0 & \text{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

Las ecuaciones (2.1.6), (2.1.7) y (2.1.8) permiten atribuir un significado geométrico a la matriz de rotación; la matriz  $\mathbf{R}$  describe la rotación alrededor de un eje en el espacio, necesario para alinear los ejes del marco de referencia con los correspondientes ejes del marco del cuerpo.

Para matrices básicas, como las presentadas previamente, la siguiente propiedad se mantiene:

$$\mathbf{R}(\theta)^T = \mathbf{R}(-\theta) \quad (2.1.9)$$

### 2.1.7. Rotación de un vector

Una matriz de rotación puede ser interpretada como un operador matricial, permitiendo rotación de un vector por un ángulo dado alrededor de un eje arbitrario en el espacio.

En resumen, una matriz de rotación representa tres significados geométricos equivalentes:

- 1 Describe la orientación mutua entre dos marcos coordenados, sus vectores columnas con los cosenos directores de los ejes del marco rotado con respecto al marco original.
- 2 Representa la transformación de coordenadas entre las coordenadas de un punto expresado en dos marcos diferentes (con origen común).
- 3 Es un operador que permite la rotación de un vector en el mismo marco coordenado.



### 2.1.8. Matrices de velocidad angular

La velocidad de un vector de posición cualquiera  $\mathbf{u}$ , definido en una base  $a$  y proyectado mediante una matriz de rotación (o una composición de una serie de ellas) se puede expresar mediante un producto cruz de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{u}_a^a = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}\mathbf{u}_a^a) \quad (2.1.10)$$

Con el vector  $\boldsymbol{\omega}$  como un caso general en el cual se tienen velocidades de rotación alrededor de cada uno de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.1.11)$$

Pero también es posible expresar este producto punto mediante un producto de una matriz (que denominaremos matriz de velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$ ), de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.12)$$

Tenemos entonces que:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\boldsymbol{\Omega}^T \quad (2.1.13)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R} \quad (2.1.14)$$

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{u}_a^a = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}\mathbf{u}_a^a \quad (2.1.15)$$

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{u}_a^a = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}\mathbf{u}_a^a) \quad (2.1.16)$$

Haciendo uso de esta matriz de rotación podemos definir matrices de velocidad angular cuya rotación se presente en solo uno de los ejes definidos mediante los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ :

$$\boldsymbol{\Omega}_x(\dot{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\alpha} \\ 0 & \dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.17)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_y(\dot{\beta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\beta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.18)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_z(\dot{\gamma}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.19)$$

### 2.1.9. Composición de matrices de rotación

Debido a que dentro del análisis del mecanismo propuesto es necesario realizar múltiples cambios de base, es útil tener una notación de una expresión que represente un conjunto de rotaciones, por lo que derivaremos reglas de composición de matrices de rotación.

Consideremos tres marcos de referencia  $O_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $O_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $O_2(x_2, y_2, z_2)$  con origen común  $O$ . Consideremos un vector  $\mathbf{r}$  describiendo la posición de un punto genérico en el espacio; éste puede ser expresado en cada uno de los marcos definidos previamente. Sean  $\mathbf{r}^0$ ,  $\mathbf{r}^1$ ,  $\mathbf{r}^2$  las

representaciones de  $\mathbf{r}$  en cada marco.

Si consideramos la relación entre  $\mathbf{r}^2$  en  $O_2$  y  $\mathbf{r}^1$  en  $O_1$  tenemos:

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{r}^2 \quad (2.1.20)$$

Y si ahora consideramos la relación entre  $\mathbf{r}^1$  en  $O_1$  y  $\mathbf{r}^0$  en  $O_0$  se tiene:

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{r}^1 \quad (2.1.21)$$

Y finalmente utilizamos la relación entre  $\mathbf{r}^2$  en  $O_2$  y  $\mathbf{r}^0$  en  $O_0$ :

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{r}^2 \quad (2.1.22)$$

Si sustituimos la ecuación (2.1.20) en la ecuación (2.1.21):

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{r}^2 \quad (2.1.23)$$

Igualando con (2.1.22):

$$\mathbf{R}_2^0 \mathbf{r}^2 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{r}^2 \quad (2.1.24)$$

Tal que:

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \quad (2.1.25)$$

La ecuación (2.1.25) puede ser interpretada como la composición de rotaciones sucesivas. Por lo que la rotación total puede ser expresada como una secuencia de rotaciones parciales, cada rotación es definida con respecto a la precedente. El marco con respecto al cual la rotación ocurre es llamado *marco actual*. La composición de rotaciones es obtenida *postmultiplicando* las matrices de rotación según la ecuación (2.1.25).

Rotaciones sucesivas también pueden ser hechas respecto al marco inicial, en este caso, las rotaciones son hechas respecto al *marco fijo*. Esto es:

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0 \quad (2.1.26)$$

En esta ecuación la composición de rotaciones respecto al marco fijo, es obtenida *premultiplicando* las matrices de rotación.

Debemos hacer énfasis en el hecho de que el producto matricial no es conmutativo. Por lo tanto dos rotaciones no conmutan y su composición depende del orden de las rotaciones. Como lo podemos observar en la siguiente figura:

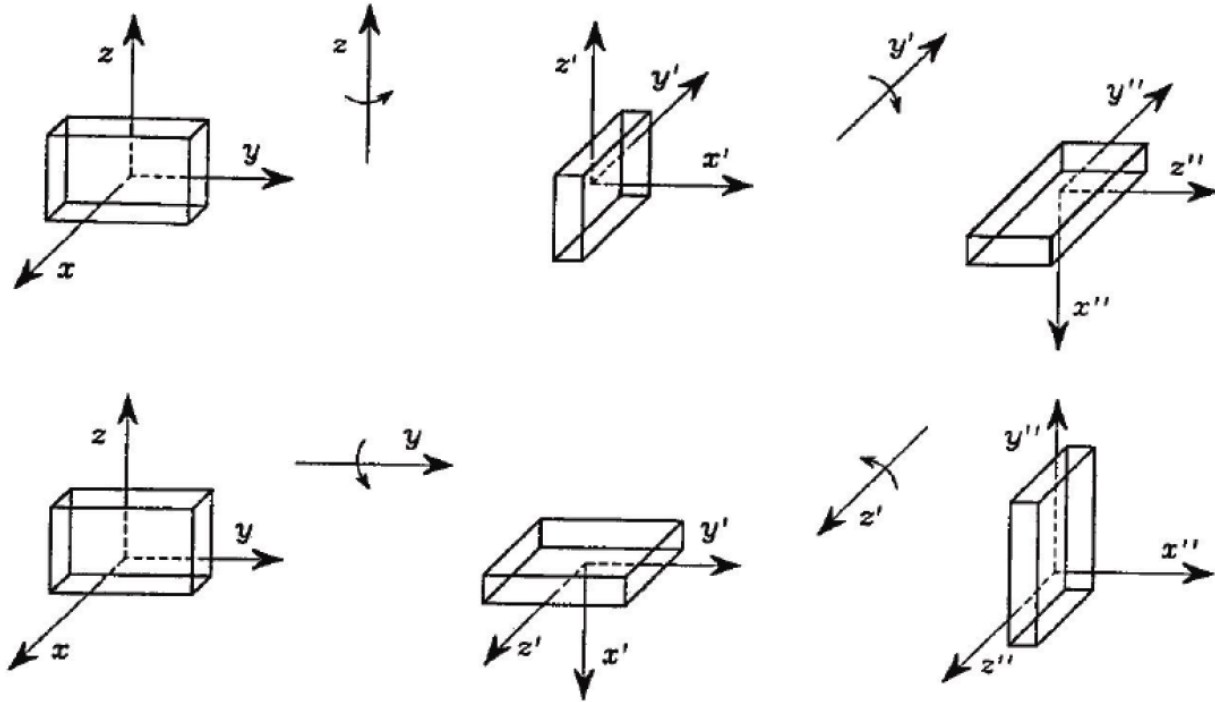


Figura 2.1: Rotaciones alrededor del marco actual [21]

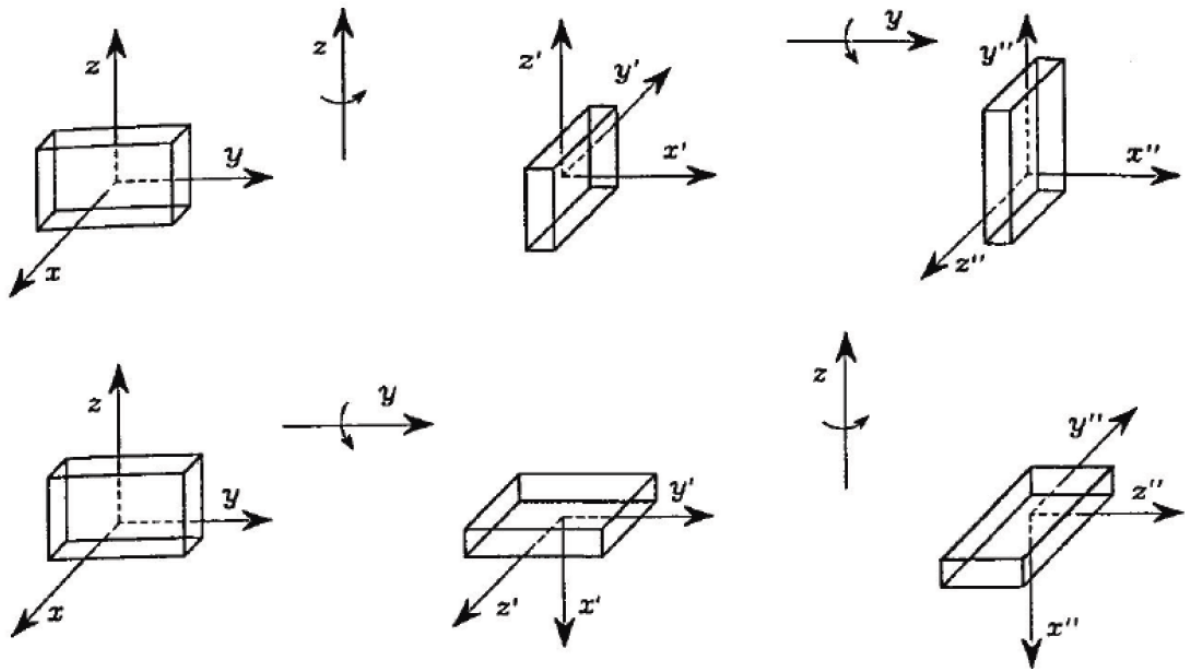


Figura 2.2: Rotaciones alrededor del marco fijo [21]

## 2.2. Propuesta de mecanismo

Para el diseño de la prótesis se propone un mecanismo de 4GDL para sustituir el miembro faltante debido al tipo de amputación (transhumeral). El mecanismo propuesto consta de un eslabón fijo a la parte residual del húmero, después se tiene una junta rotacional que simula el codo y se une a un eslabón que simula el antebrazo. Al final del antebrazo se tiene una junta esférica (modelada como tres juntas rotacionales con ejes de rotación perpendiculares entre ellos) que simula la funcionalidad de la muñeca, y finalmente se une un eslabón que simula la mano. Debemos de tomar en cuenta que en este trabajo no se consideran los movimientos presentes en la mano generados por los dedos, sin embargo, esto se realizó de esta manera debido a que existe otro proyecto dentro del grupo de prótesis que solo se está enfocando en reconocer y producir los tipos de presiones de mano. Aunque también podría extenderse el presente trabajo y establecer la dinámica y el modelado de los movimientos de los dedos de la mano sin modificar el trabajo realizado.

El mecanismo propuesto es el siguiente (figura 2.3):

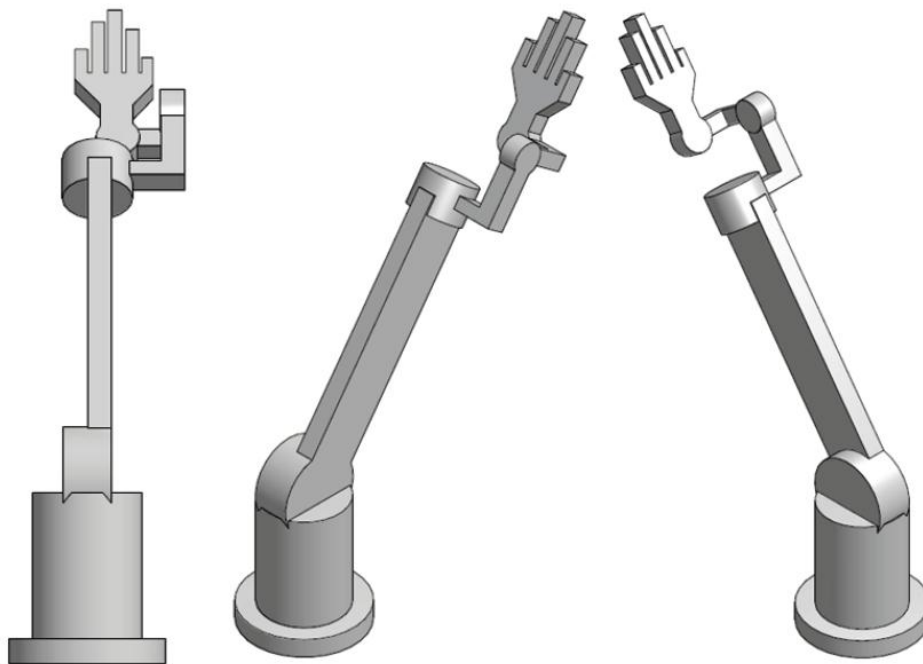


Figura 2.3: Mecanismo propuesto para la prótesis de miembro superior

La forma en la que se estructuran las expresiones de la dinámica y el modelado son generales, lo cual permite que las dimensiones de los eslabones (que estarán basados en estudio antropométricos y funcionales) sean datos a introducir, con lo que se logrará que el método sea utilizado en cualquier prótesis con esa configuración. Más aún es posible adaptar el modelo desarrollado a mecanismos con la misma configuración pero con menos grados de libertad: por ejemplo, si se decide que la funcionalidad de la muñeca se cumple solo con dos grados de libertad, el modelo desarrollado sería aplicable, haciendo que una rotación de la junta rotacional sobrante sea nula y constante en el tiempo.

Antes de iniciar la descripción del mecanismo propuesto, asignemos un número a cada eslabón que lo compone, lo cual se observa en la figura 2.4:

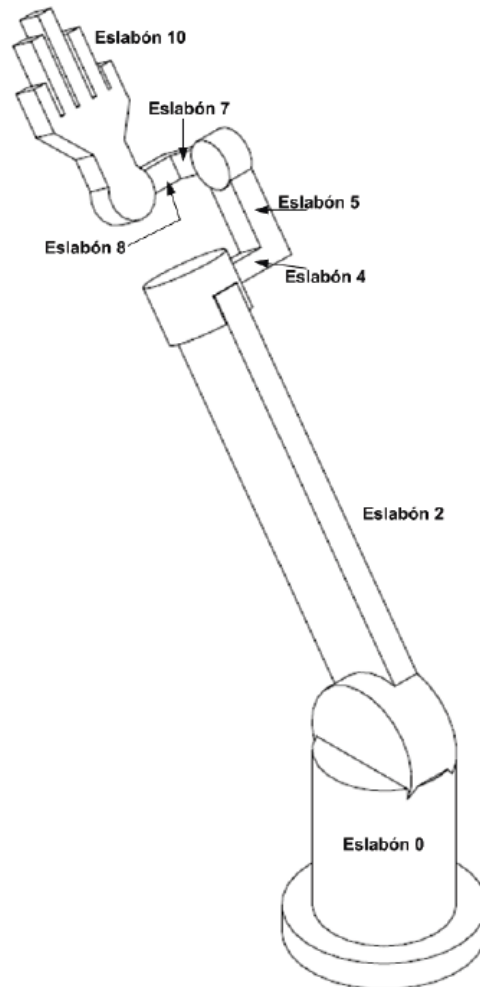


Figura 2.4: *Asignación de números a cada eslabón que compone el mecanismo propuesto*

### 2.2.1. Descripción de los vectores y bases dentro del mecanismo

A continuación describiremos los vectores asociados a las posiciones de cada eslabón y la forma en la que se definen las bases locales que seguirán a cada uno de ellos, para finalmente establecer la ecuación de cierre vectorial que usaremos para plantear el conjunto de ecuaciones de posición y posteriormente la velocidad y aceleración.

Comencemos ubicando la base inercial en el punto donde se origina un primer eslabón que hará la función de completar la longitud del húmero usando el miembro residual, esta base será denominada *base 0*. Posteriormente definimos una base inercial paralela a la *base 0* localizada en un punto del eje de rotación de la junta rotacional que hace la función del codo, esta base será la *base 1*. La longitud del eslabón es asociado con un escalar  $z_{10}$  que pasa por el centroide del primer eslabón y es paralelo a la dirección del vector unitario  $\mathbf{k}_0$ , lo anterior se observar en la figura 2.5.

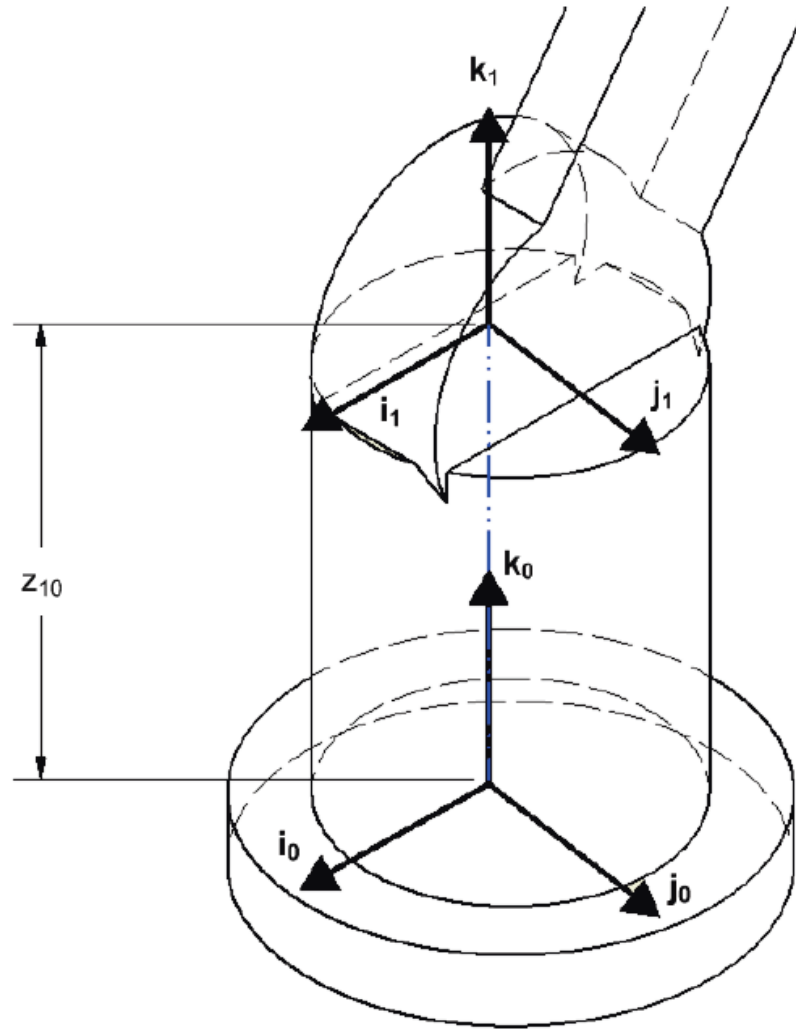


Figura 2.5: Definición de la base 0 y la base 1

Ahora definiremos la siguiente base local localizada en el origen del eslabón que ejecuta la función del antebrazo, esta base será la *base 2* y se generará rotando la *base 1* alrededor del eje asociado al vector unitario  $j_1$  un ángulo de magnitud  $\theta_{21}$  de tal manera que se oriente el vector  $k_2$  en la posición del eslabón del antebrazo (figura 2.6)

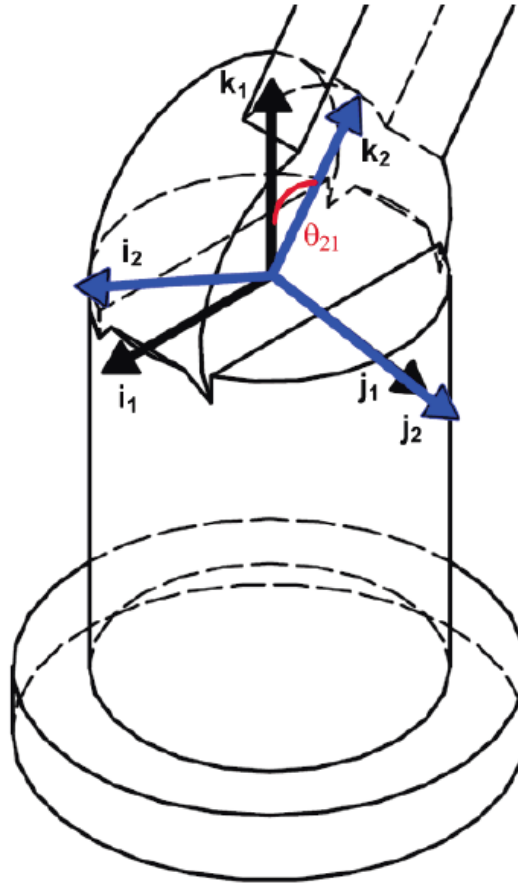


Figura 2.6: Definición de la base 2

Posteriormente definiremos la siguiente base local mediante un desplazamiento de magnitud  $z_{32}$  en dirección al vector  $k_2$  y así generar la base 3 que será paralela a la base 2. La magnitud del desplazamiento permitirá definir la base 3 en la posición donde finalice el antebrazo y corresponde al eje de rotación de la primera junta rotacional que genera la junta esférica de la muñeca (figura 2.7).

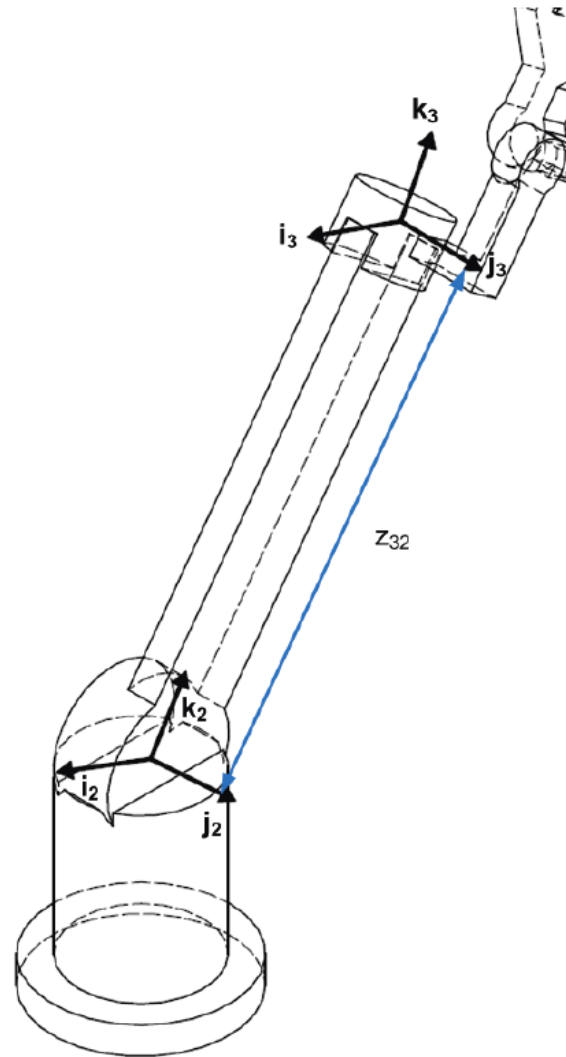


Figura 2.7: Definición de la base 3

Continuamos definiendo la siguiente base local, la *base 4* generada mediante una rotación de la *base 3* alrededor del eje del vector unitario  $\mathbf{k}_3$  una magnitud de  $\theta_{43}$ , de tal manera que la nueva base se oriente a lo largo del eslabón que define el soporte de la siguiente junta rotacional (figura 2.8).



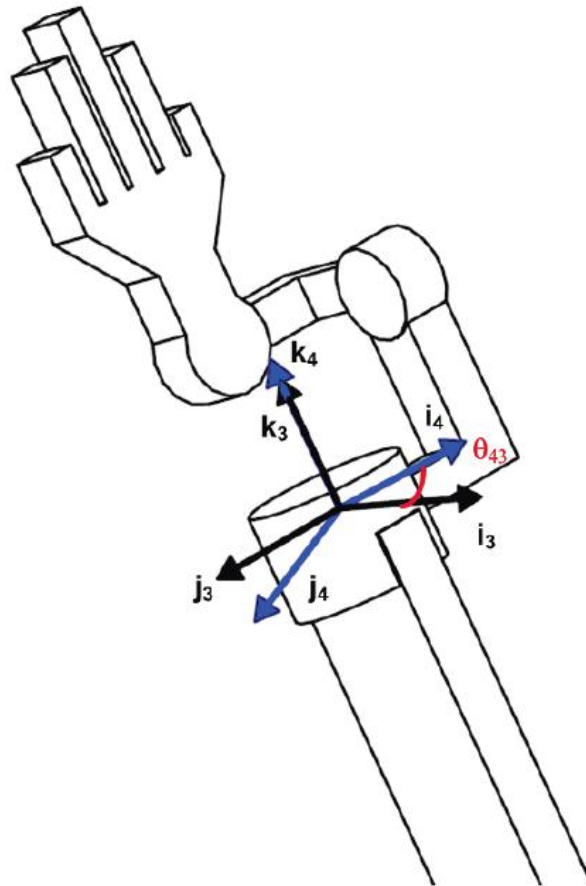


Figura 2.8: Definición de la base 4

La siguiente base local, *base 5*, se define mediante un desplazamiento de magnitud  $x_{54}$  en dirección al vector  $i_4$ , esta base será paralela a la **base 4** (figura 2.9).

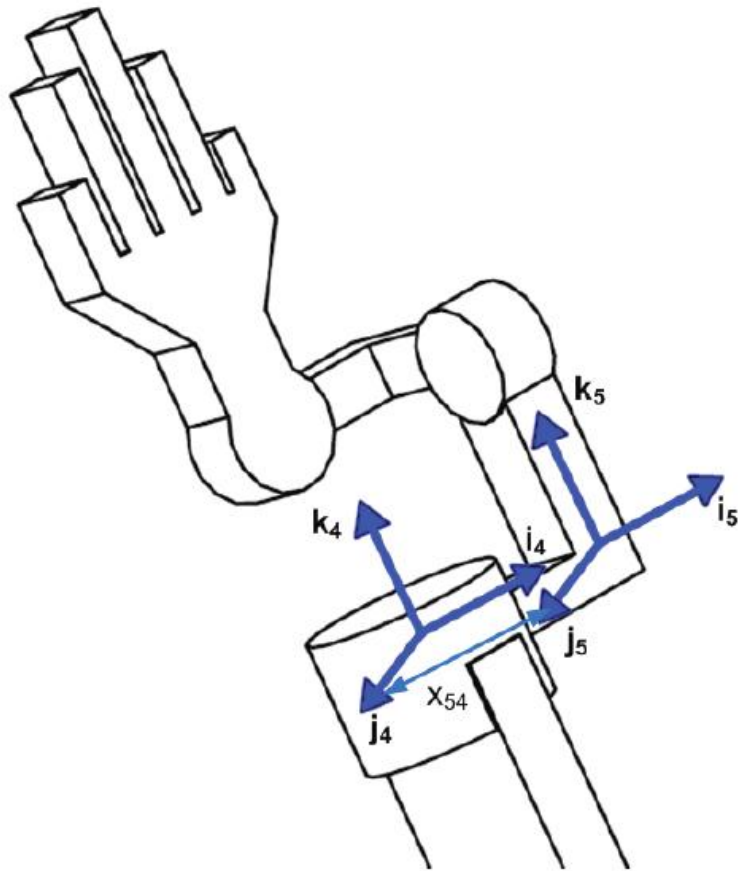


Figura 2.9: Definición de la base 5

De manera semejante a la definición de la base previa, la siguiente base local, *base 6*, se define mediante un desplazamiento de magnitud  $z_{65}$  en dirección al vector  $k_5$  y será paralela a la *base 5*, de tal manera que se ubique donde se encuentra el eje de rotación de la siguiente junta rotacional que compone a la muñeca (figura 2.10).

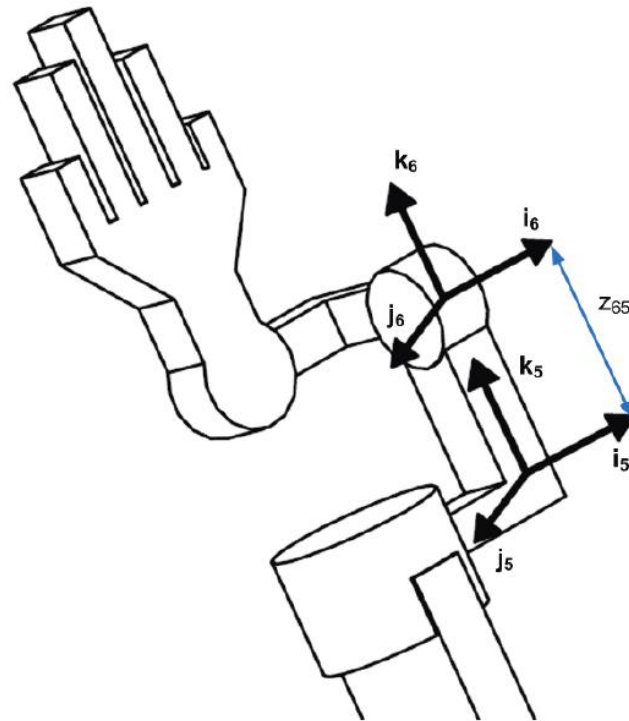


Figura 2.10: Definición de la base 6

Continuando con la siguiente base local, la *base 7* generada mediante una rotación de la *base 6* alrededor del eje del vector unitario  $i_6$  una magnitud de  $\theta_{76}$ , de tal manera que la nueva base se oriente a lo largo del eslabón que define el soporte de la siguiente junta rotacional (figura 2.11).

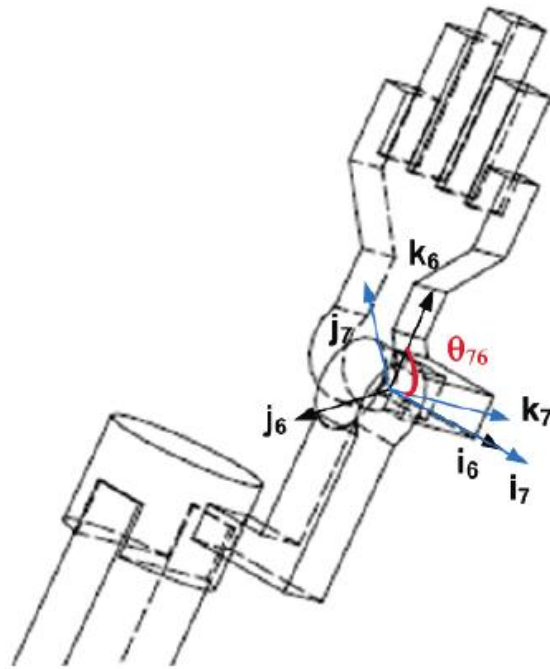


Figura 2.11: Definición de la base 7

La base local siguiente, *base 8*, se define mediante un desplazamiento de magnitud  $z_{87}$  en dirección al vector  $k_7$ , esta base será paralela a la *base 7* (figura 2.12).

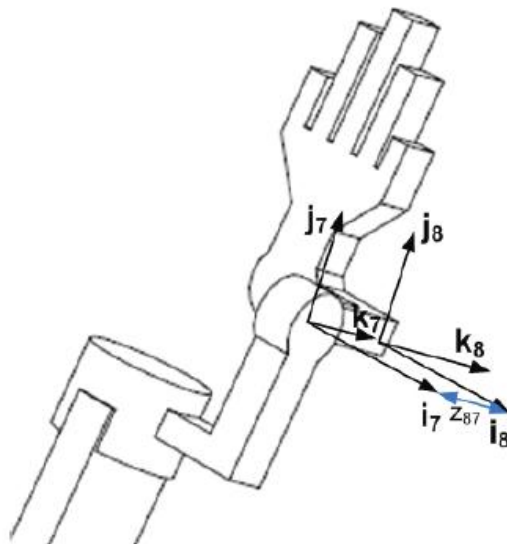


Figura 2.12: Definición de la base 8

Análogamente con la definición de la base previa, la base local siguiente, *base 9*, se define mediante un desplazamiento de magnitud  $-x_{98}$  en dirección al vector  $i_8$ , esta base será paralela a la *base 8*, notemos que la magnitud la consideramos negativa porque el desplazamiento se hizo en el sentido opuesto del vector  $i_8$  (figura 2.13).

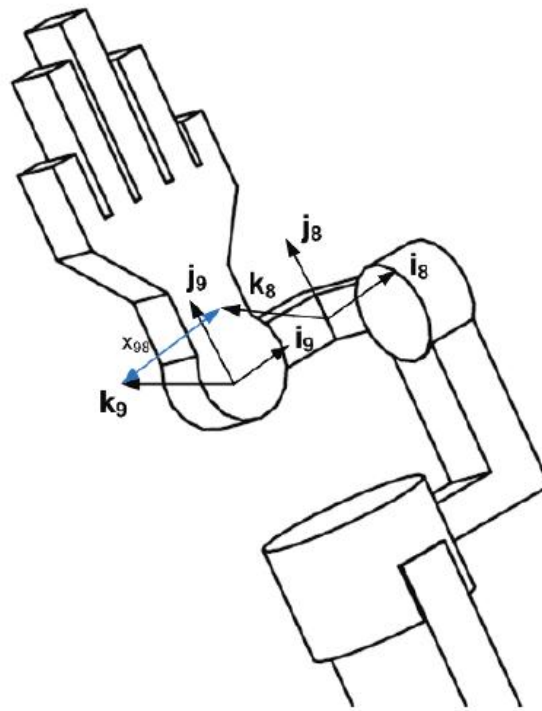


Figura 2.13: Definición de la base 9

La siguiente base local, *la base 10* generada mediante una rotación de la *base 9* alrededor del eje del vector unitario  $k_9$  una magnitud de  $\theta_{10,9}$ , de tal manera que la nueva base se oriente a lo largo del eslabón que define a la mano (figura 2.14).

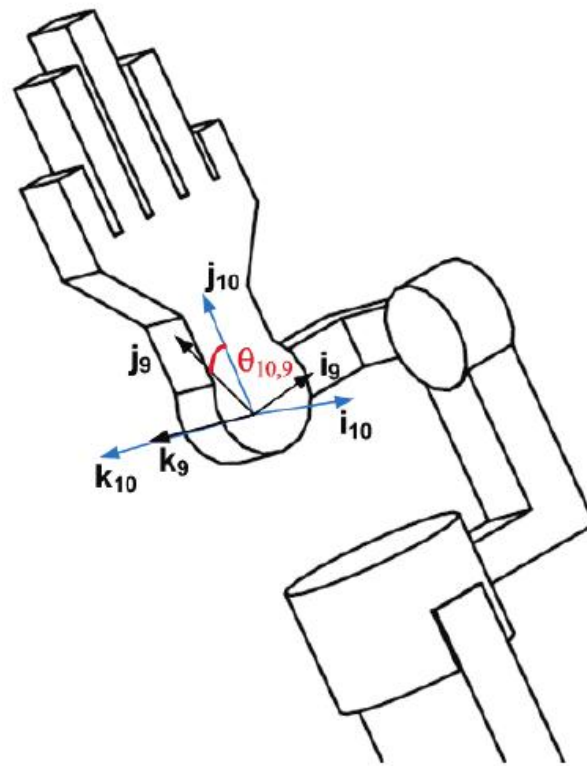


Figura 2.14: Definición de la base 10

Finalmente, la base local siguiente, *base 11*, se define mediante un desplazamiento de magnitud  $y_{11,10}$  en dirección al vector  $j_{10}$ , esta base será paralela a la *base 10* y la posición de esta base está asociada con el punto (sobre la mano) que se desea posicionar usando la prótesis (figura 2.15).

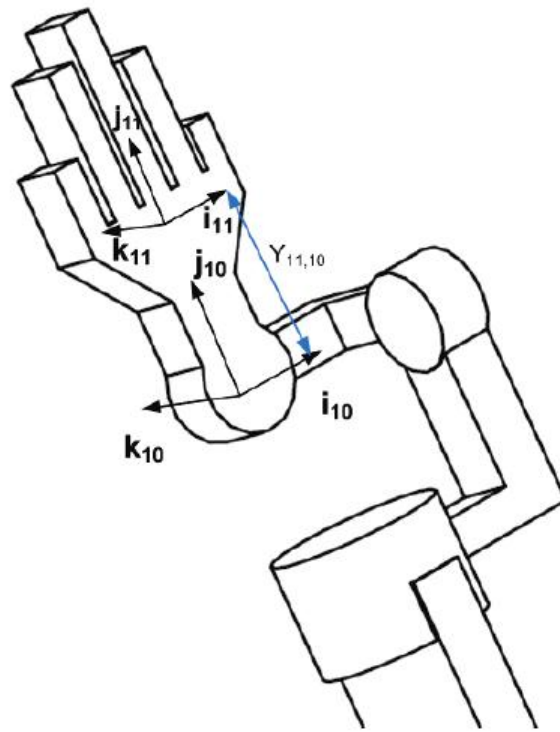


Figura 2.15: Definición de la base 11

Debemos tener en cuenta que el vector de posición que denominaremos  $r_P^0$  es dato y representa las condiciones de ubicación y orientación del miembro terminal de la prótesis. La orientación se plantea como una composición de tres rotaciones de la siguiente manera:

$$R_z(\psi)R_x(\theta)R_z(\phi)$$

Lo cual se ilustra de la siguiente manera:

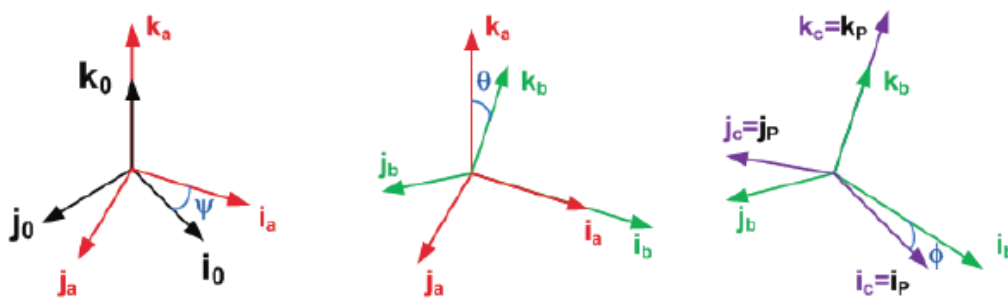


Figura 2.16: Definición de ángulos de Euler de  $r_P^0$

### 2.3. Análisis de posición

Para el análisis de posición escribiremos dos conjuntos de ecuaciones, uno para evaluar la posición lineal y otro para la posición angular, con estos dos conjuntos podremos dar solución a las incógnitas involucradas. Para la ecuación de posición lineal usaremos una ecuación de cierre vectorial, y para el caso de la ecuación de posición angular la orientación del órgano terminal será la misma que el conjunto de rotaciones que suceden en cada uno de los eslabones:

La ecuación de cierre vectorial vendrá dada mediante la siguiente figura, y determinará la ecuación de posición lineal:

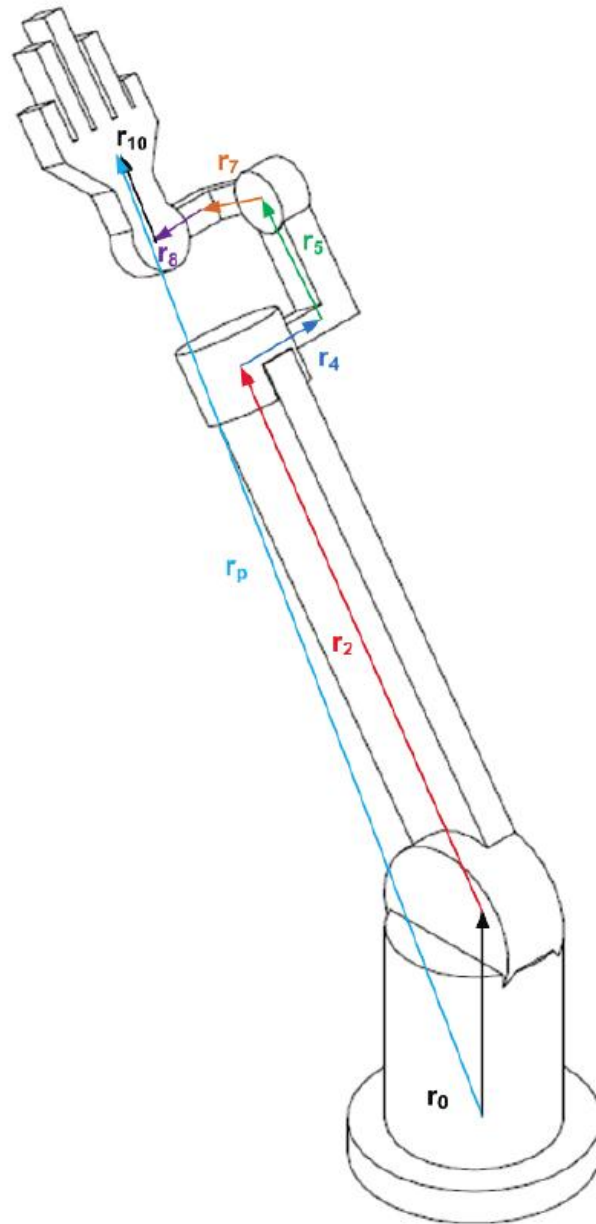


Figura 2.17: La ecuación de cierre vectorial propuesta



Ecuación de posición lineal:

$$\mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 = \mathbf{r}_P^0 \quad (2.3.1)$$

Ecuación de posición angular:

$$\mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_z(\phi) \quad (2.3.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0^0 &= z_{10}\mathbf{k}_0^0 \\ \mathbf{r}_2^0 &= z_{32}\mathbf{k}_2^0 \\ \mathbf{r}_4^0 &= x_{54}\mathbf{i}_4^0 \\ \mathbf{r}_5^0 &= z_{65}\mathbf{k}_5^0 \\ \mathbf{r}_7^0 &= z_{87}\mathbf{k}_7^0 \\ \mathbf{r}_8^0 &= -x_{98}\mathbf{i}_8^0 \\ \mathbf{r}_{10}^0 &= y_{11,10}\mathbf{j}_{10}^0 \end{aligned}$$

Recordemos que:

$$\mathbf{r}_p^0 = x_p\mathbf{i}_0^0 + y_p\mathbf{j}_0^0 + z_p\mathbf{k}_0^0 \quad (2.3.3)$$

Y además:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2^0 &= \mathbf{R}_2^0\mathbf{k}_2^2 \\ \mathbf{i}_4^0 &= \mathbf{R}_4^0\mathbf{i}_4^4 \\ \mathbf{k}_5^0 &= \mathbf{R}_5^0\mathbf{k}_5^5 \\ \mathbf{k}_7^0 &= \mathbf{R}_7^0\mathbf{k}_7^7 \\ \mathbf{i}_8^0 &= \mathbf{R}_8^0\mathbf{i}_8^8 \\ \mathbf{j}_{10}^0 &= \mathbf{R}_{10}^0\mathbf{j}_{10}^{10} \end{aligned}$$

Y las matrices de cambio de base corresponden a:

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{R}_4^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43}) \quad (2.3.5)$$

$$\mathbf{R}_5^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43}) \quad (2.3.6)$$

$$\mathbf{R}_7^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76}) \quad (2.3.7)$$

$$\mathbf{R}_8^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76}) \quad (2.3.8)$$

$$\mathbf{R}_{10}^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \quad (2.3.9)$$

Y los vectores unitarios definidos en cada base son:

$$\mathbf{k}_0^0 = [0, 0, 1]^T \quad (2.3.10)$$

$$\mathbf{k}_2^2 = [0, 0, 1]^T \quad (2.3.11)$$

$$\mathbf{i}_4^4 = [1, 0, 0]^T \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{k}_5^5 = [0, 0, 1]^T \quad (2.3.13)$$

$$\mathbf{k}_7^7 = [0, 0, 1]^T \quad (2.3.14)$$

$$\mathbf{i}_8^8 = [1, 0, 0]^T \quad (2.3.15)$$

$$\mathbf{j}_{10}^{10} = [0, 1, 0]^T \quad (2.3.16)$$

Así, tenemos la ecuación vectorial (2.3.1) y la ecuación de tipo matricial (2.3.2) que deben de resolverse para encontrar la solución a la posición del mecanismo. Es necesario notar que estas ecuaciones podrían proveer más de una única solución, lo cual es indicativo de que el mecanismo puede tener diversas configuraciones dada un posición deseada del elemento terminal del manipulador.

## 2.4. Análisis de velocidad

En semejanza con el análisis de posición realizado, se escribirán también dos conjuntos de ecuaciones, uno para la velocidad lineal y otro para la velocidad angular, para la velocidad lineal se derivará la ecuación de posición lineal (2.3.1). Para la ecuación de velocidad angular, la velocidad angular del órgano terminal será igual a la suma de las velocidades angulares presentes en el conjunto de eslabones que conforman el modelo mecánico propuesto.

Ecuación de velocidad lineal:

$$\mathbf{v}_0^0 + \mathbf{v}_2^0 + \mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_7^0 + \mathbf{v}_8^0 + \mathbf{v}_{10}^0 = \mathbf{v}_p^0 \quad (2.4.1)$$

Ecuación de velocidad angular:

$$\begin{aligned} \omega_p^0 &= \omega_{10}^0 + \omega_{21}^0 + \omega_{32}^0 + \omega_{43}^0 + \omega_{54}^0 + \omega_{65}^0 + \omega_{76}^0 + \omega_{87}^0 \\ &+ \omega_{98}^0 + \omega_{10,9}^0 + \omega_{11,10}^0 \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Donde para encontrar cada velocidad lineal seguiremos la estructura definida en (2.1.2), y en nuestro caso particular los eslabones del mecanismo propuesto son de magnitud constante, por lo que no tenemos una variación en magnitud de los vectores asociados a las dimensiones del mecanismo; así el primero término de la ecuación antes mencionada será nulo en cada caso:

$$\mathbf{v}_0^0 = \mathbf{0} \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{v}_2^0 = \mathbf{0} + \omega_{20}^0 \times \mathbf{r}_2^0 \quad (2.4.4)$$

$$\mathbf{v}_4^0 = \mathbf{0} + \omega_{40}^0 \times \mathbf{r}_4^0 \quad (2.4.5)$$

$$\mathbf{v}_5^0 = \mathbf{0} + \omega_{50}^0 \times \mathbf{r}_5^0 \quad (2.4.6)$$

$$\mathbf{v}_7^0 = \mathbf{0} + \omega_{70}^0 \times \mathbf{r}_7^0 \quad (2.4.7)$$

$$\mathbf{v}_8^0 = \mathbf{0} + \omega_{80}^0 \times \mathbf{r}_8^0 \quad (2.4.8)$$

$$\mathbf{v}_{10}^0 = \mathbf{0} + \omega_{10,0}^0 \times \mathbf{r}_{10}^0 \quad (2.4.9)$$

Y derivando (2.3.3) tenemos:

$$\mathbf{v}_p^0 = \dot{x}_p \mathbf{i}_p^0 + \dot{y}_p \mathbf{j}_p^0 + \dot{z}_p \mathbf{k}_p^0 \quad (2.4.10)$$

Las velocidades angulares absolutas se determinan como las suma de las velocidades angulares presente en cada sistema de referencia:

$$\omega_{20}^0 = \omega_{10}^0 + \omega_{21}^0 \quad (2.4.11)$$

$$\omega_{40}^0 = \omega_{10}^0 + \omega_{21}^0 + \omega_{32}^0 + \omega_{43}^0 \quad (2.4.12)$$

$$\omega_{50}^0 = \omega_{10}^0 + \omega_{21}^0 + \omega_{32}^0 + \omega_{43}^0 + \omega_{54}^0 \quad (2.4.13)$$

$$\omega_{70}^0 = \omega_{10}^0 + \omega_{21}^0 + \omega_{32}^0 + \omega_{43}^0 + \omega_{54}^0 + \omega_{65}^0 + \omega_{76}^0 \quad (2.4.14)$$

$$\begin{aligned} \omega_{80}^0 &= \omega_{10}^0 + \omega_{21}^0 + \omega_{32}^0 + \omega_{43}^0 + \omega_{54}^0 + \omega_{65}^0 + \omega_{76}^0 \\ &+ \omega_{87}^0 \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

$$\begin{aligned} \omega_{10,0}^0 &= \omega_{10}^0 + \omega_{21}^0 + \omega_{32}^0 + \omega_{43}^0 + \omega_{54}^0 + \omega_{65}^0 + \omega_{76}^0 + \omega_{87}^0 \\ &+ \omega_{98}^0 + \omega_{10,9}^0 \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Además, la velocidad angular del órgano terminal se define como:

$$\omega_p^0 = \omega_\psi^0 + \omega_\theta^0 + \omega_\phi^0 \quad (2.4.17)$$

Las velocidades angulares en cada sistema de referencia corresponden a:

$$\omega_{10}^0 = \mathbf{0} \quad (2.4.18)$$

$$\omega_{21}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \quad (2.4.19)$$

$$\omega_{32}^0 = \mathbf{0} \quad (2.4.20)$$

$$\omega_{43}^0 = \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \quad (2.4.21)$$

$$\omega_{54}^0 = \mathbf{0} \quad (2.4.22)$$

$$\omega_{65}^0 = \mathbf{0} \quad (2.4.23)$$

$$\omega_{76}^0 = \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \quad (2.4.24)$$

$$\omega_{87}^0 = \mathbf{0} \quad (2.4.25)$$

$$\omega_{98}^0 = \mathbf{0} \quad (2.4.26)$$

$$\omega_{10,9}^0 = \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \quad (2.4.27)$$

$$\omega_{11,10}^0 = \mathbf{0} \quad (2.4.28)$$

Y además:

$$\mathbf{j}_1^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{j}_1^1 \quad (2.4.29)$$

$$\mathbf{k}_3^0 = \mathbf{R}_3^0 \mathbf{k}_3^3 \quad (2.4.30)$$

$$\mathbf{i}_6^0 = \mathbf{R}_6^0 \mathbf{i}_6^6 \quad (2.4.31)$$

$$\mathbf{j}_9^0 = \mathbf{R}_9^0 \mathbf{j}_9^9 \quad (2.4.32)$$

En nuestro caso la base definida en 1 y en 0 son paralelas y las matrices de cambio de base corresponden a:

$$\mathbf{R}_1^0 = \mathbf{I} \quad (2.4.33)$$

$$\mathbf{R}_3^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \quad (2.4.34)$$

$$\mathbf{R}_6^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \quad (2.4.35)$$

$$\mathbf{R}_9^0 = \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \quad (2.4.36)$$

Y los vectores unitarios definidos en cada base son:

$$\mathbf{j}_1^1 = \mathbf{j}_1^0 = [0, 1, 0]^T \quad (2.4.37)$$

$$\mathbf{k}_3^3 = [0, 0, 1]^T \quad (2.4.38)$$

$$\mathbf{i}_6^6 = [1, 0, 0]^T \quad (2.4.39)$$

$$\mathbf{j}_9^9 = [0, 1, 0]^T \quad (2.4.40)$$

Sustituyendo las expresiones de las ecuaciones (2.4.18) a (2.4.28) en la ecuaciones (2.4.11) a (2.4.16) tenemos:

$$\omega_{20}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \quad (2.4.41)$$

$$\omega_{40}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \quad (2.4.42)$$

$$\omega_{50}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \quad (2.4.43)$$

$$\omega_{70}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \quad (2.4.44)$$

$$\omega_{80}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \quad (2.4.45)$$

$$\omega_{10,0}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \quad (2.4.46)$$

Si ahora sustituimos las ecuaciones (2.4.41) a (2.4.46) en la ecuaciones (2.4.3) a (2.4.9) se tiene:

$$\mathbf{v}_0^0 = \mathbf{0} \quad (2.4.47)$$

$$\mathbf{v}_2^0 = \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \right) \times \mathbf{r}_2^0 \quad (2.4.48)$$

$$\mathbf{v}_4^0 = \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_4^0 \quad (2.4.49)$$

$$\mathbf{v}_5^0 = \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_5^0 \quad (2.4.50)$$

$$\mathbf{v}_7^0 = \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_7^0 \quad (2.4.51)$$

$$\mathbf{v}_8^0 = \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_8^0 \quad (2.4.52)$$

$$\mathbf{v}_{10}^0 = \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right) \times \mathbf{r}_{10}^0 \quad (2.4.53)$$

Sustituyendo ecuaciones (2.4.47) a (2.4.53) en la ecuaciones (2.4.1) y reacomodando:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p^0 &= \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \right) \times \mathbf{r}_2^0 + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_4^0 + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_5^0 \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_7^0 + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_8^0 \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right) \times \mathbf{r}_{10}^0 \\ \mathbf{v}_p^0 &= \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \right) \times \left( \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \right) \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \left( \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \right) \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \left( \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \right) + \left( \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right) \times \left( \mathbf{r}_{10}^0 \right) \\ \mathbf{v}_p^0 &= \dot{\theta}_{21} \left[ \mathbf{j}_1^0 \times \left( \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \right) \right] \\ &\quad + \dot{\theta}_{43} \left[ \mathbf{k}_3^0 \times \left( \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \right) \right] \\ &\quad + \dot{\theta}_{76} \left[ \mathbf{i}_6^0 \times \left( \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \right) \right] + \dot{\theta}_{10,9} \left[ \mathbf{k}_9^0 \times \left( \mathbf{r}_{10}^0 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

Definiendo las siguientes expresiones:

$$\mathbf{u}_2^0 = \mathbf{j}_1^0 \times \left( \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \right) \quad (2.4.55)$$

$$\mathbf{u}_4^0 = \mathbf{k}_3^0 \times \left( \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \right) \quad (2.4.56)$$

$$\mathbf{u}_7^0 = \mathbf{i}_6^0 \times \left( \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \right) \quad (2.4.57)$$

$$\mathbf{u}_{10}^0 = \mathbf{k}_9^0 \times \left( \mathbf{r}_{10}^0 \right) \quad (2.4.58)$$

Y sustituyendo las expresiones definidas en (2.4.55) a (2.4.58) en la ecuaciones (2.4.54):

$$\dot{\theta}_{21} \mathbf{u}_2^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{u}_4^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{u}_7^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{u}_{10}^0 = \mathbf{v}_p^0 \quad (2.4.59)$$

La ecuación (2.4.59) la podemos expresar mediante un producto matricial de la siguiente manera :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^0 & \mathbf{u}_4^0 & \mathbf{u}_7^0 & \mathbf{u}_{10}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{v}_p^0 \quad (2.4.60)$$

Si definimos  $\mathbf{J}_A$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^0 & \mathbf{u}_4^0 & \mathbf{u}_7^0 & \mathbf{u}_{10}^0 \end{bmatrix} \quad (2.4.61)$$

Y al vector asociado a las derivadas de las *coordenadas generalizadas* como  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} \quad (2.4.62)$$

Podemos reescribir (2.4.60) como:

$$\mathbf{J}_A \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_p^0 \quad (2.4.63)$$

Si ahora sustituimos las ecuaciones (2.4.18) a (2.4.28) en la ecuación (2.4.2) se tiene:

$$\boldsymbol{\omega}_p^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \quad (2.4.64)$$

Que también se puede representar mediante un producto matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_1^0 & \mathbf{k}_3^0 & \mathbf{i}_6^0 & \mathbf{k}_9^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_p^0 \quad (2.4.65)$$

Si definimos  $\mathbf{J}_B$  como:

$$\mathbf{J}_B = [\mathbf{j}_1^0 \quad \mathbf{k}_3^0 \quad \mathbf{i}_6^0 \quad \mathbf{k}_9^0] \quad (2.4.66)$$

Y hacemos uso de la definición dada en (2.4.62), podemos reescribir (2.4.65) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega}_p^0 = \mathbf{J}_B \dot{\mathbf{q}} \quad (2.4.67)$$

Las ecuaciones definidas en (2.4.63) y (2.4.67) se pueden escribir como una ecuación de carácter matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_A \\ \mathbf{J}_B \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^0 \\ \boldsymbol{\omega}_p^0 \end{bmatrix} \quad (2.4.68)$$

Donde la matriz:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_A \\ \mathbf{J}_B \end{bmatrix} \quad (2.4.69)$$

Es el *Jacobiano* asociado al sistema.

Y si definimos el siguiente vector:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^0 \\ \boldsymbol{\omega}_p^0 \end{bmatrix} \quad (2.4.70)$$

Podemos escribir (2.4.68) como:

$$\mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}} \quad (2.4.71)$$

Finalmente, para encontrar el conjunto de velocidades debemos resolver la expresión de la ecuación (2.4.71). Se encontrará una solución para cada conjunto de posiciones elegidos.

## 2.5. Análisis de aceleración

Para el análisis de aceleración derivaremos algunas expresiones determinadas en la velocidad y usaremos las estructuras definidas en la sección donde se abordó el método a utilizar. Elaboraremos expresiones que serán de utilidad en la sección del modelado.

Derivando la ecuación (2.4.1) tenemos la ecuación de aceleración lineal:

$$\mathbf{a}_0^0 + \mathbf{a}_2^0 + \mathbf{a}_4^0 + \mathbf{a}_5^0 + \mathbf{a}_7^0 + \mathbf{a}_8^0 + \mathbf{a}_{10}^0 = \mathbf{a}_p^0 \quad (2.5.1)$$

Derivando la ecuación (2.4.64) tenemos la ecuación de aceleración angular:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_p^0 &= \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_p^0) = \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0) \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0) + \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0) + \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0) \\ &\quad + \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Donde desarrollando cada derivada tenemos:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0) = \ddot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \quad (2.5.3)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0) = \ddot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + (\boldsymbol{\omega}_{21}^0 \times \boldsymbol{\omega}_{43}^0) \quad (2.5.4)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0) = \ddot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + (\boldsymbol{\omega}_{21}^0 + \boldsymbol{\omega}_{43}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{76}^0 \quad (2.5.5)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0) = \ddot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 + (\boldsymbol{\omega}_{21}^0 + \boldsymbol{\omega}_{43}^0 + \boldsymbol{\omega}_{76}^0) \times \boldsymbol{\omega}_{10,9}^0 \quad (2.5.6)$$

Y derivando la ecuación (2.4.17) tenemos la ecuación de aceleración angular:

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_p^0) = \boldsymbol{\alpha}_p^0 = \boldsymbol{\alpha}_\psi^0 + \boldsymbol{\alpha}_\theta^0 + \boldsymbol{\alpha}_\phi^0 \quad (2.5.7)$$

Y derivando la ecuación (2.4.10) tenemos que:

$$\mathbf{a}_p^0 = \ddot{x}_p \mathbf{i}_p^0 + \ddot{y}_p \mathbf{j}_p^0 + \ddot{z}_p \mathbf{k}_p^0 \quad (2.5.8)$$

Cada componente de la ecuación (2.5.1) se obtendrá derivando las expresiones dadas por las ecuaciones (2.4.47) a (2.4.53), y haciendo uso de la estructura definida en (2.1.5) tenemos:

$$\mathbf{a}_0^0 = \mathbf{0} \quad (2.5.9)$$

$$\mathbf{a}_2^0 = \boldsymbol{\alpha}_{20}^0 \times \mathbf{r}_2^0 + \boldsymbol{\omega}_{20}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{20}^0 \times \mathbf{r}_2^0) \quad (2.5.10)$$

$$\mathbf{a}_4^0 = \boldsymbol{\alpha}_{40}^0 \times \mathbf{r}_4^0 + \boldsymbol{\omega}_{40}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{40}^0 \times \mathbf{r}_4^0) \quad (2.5.11)$$

$$\mathbf{a}_5^0 = \boldsymbol{\alpha}_{50}^0 \times \mathbf{r}_5^0 + \boldsymbol{\omega}_{50}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{50}^0 \times \mathbf{r}_5^0) \quad (2.5.12)$$

$$\mathbf{a}_7^0 = \boldsymbol{\alpha}_{70}^0 \times \mathbf{r}_7^0 + \boldsymbol{\omega}_{70}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{70}^0 \times \mathbf{r}_7^0) \quad (2.5.13)$$

$$\mathbf{a}_8^0 = \boldsymbol{\alpha}_{80}^0 \times \mathbf{r}_8^0 + \boldsymbol{\omega}_{80}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{80}^0 \times \mathbf{r}_8^0) \quad (2.5.14)$$

$$\mathbf{a}_{10}^0 = \boldsymbol{\alpha}_{10,0}^0 \times \mathbf{r}_{10}^0 + \boldsymbol{\omega}_{10,0}^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{10,0}^0 \times \mathbf{r}_{10}^0) \quad (2.5.15)$$

Y las aceleraciones angulares se encontrarán a partir de las derivadas de las expresiones dadas por (2.4.41)

a (2.4.46), las cuales además ya han sido calculadas en (2.5.3) a (2.5.6):

$$\begin{aligned}\alpha_{20}^0 = \dot{\omega}_{20}^0 &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \right) \\ &= \ddot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0\end{aligned}\quad (2.5.16)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{40}^0 = \dot{\omega}_{40}^0 &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \right) + \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \\ &= \ddot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \ddot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + (\omega_{21}^0 \times \omega_{43}^0)\end{aligned}\quad (2.5.17)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{50}^0 = \dot{\omega}_{50}^0 &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \right) + \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \\ &= \ddot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \ddot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + (\omega_{21}^0 \times \omega_{43}^0)\end{aligned}\quad (2.5.18)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{70}^0 = \dot{\omega}_{70}^0 &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \right) + \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) + \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \\ &= \ddot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \ddot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + (\omega_{21}^0 \times \omega_{43}^0) \\ &\quad + \ddot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + ((\omega_{21}^0 + \omega_{43}^0) \times \omega_{76}^0)\end{aligned}\quad (2.5.19)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{80}^0 = \dot{\omega}_{80}^0 &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \right) + \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) + \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \\ &= \ddot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \ddot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + (\omega_{21}^0 \times \omega_{43}^0) \\ &\quad + \ddot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + ((\omega_{21}^0 + \omega_{43}^0) \times \omega_{76}^0)\end{aligned}\quad (2.5.20)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{10,0}^0 = \dot{\omega}_{10,0}^0 &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \right) + \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) + \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) + \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right) \\ &= \ddot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \ddot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + (\omega_{21}^0 \times \omega_{43}^0) \\ &\quad + \ddot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + ((\omega_{21}^0 + \omega_{43}^0) \times \omega_{76}^0) \\ &\quad + \ddot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 + ((\omega_{21}^0 + \omega_{43}^0 + \omega_{76}^0) \times \omega_{10,9}^0)\end{aligned}\quad (2.5.21)$$

Finalmente, para encontrar el conjunto de aceleraciones tenemos la ecuación vectorial (2.5.1) y la ecuación vectorial (2.5.2) que deben de resolverse.

## Capítulo 3

# Modelado mecánico

Mediante el análisis dinámico del mecanismo, es posible derivar un modelo que permitirá diseñar un sistema de control con mejores características para la prótesis de miembro superior. Así, los resultados obtenidos en el análisis de posición, velocidad y aceleración servirán para determinar el modelo del sistema de prótesis propuesto. En esta capítulo se construirá el conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange para modelar la prótesis de miembro superior. El conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange están definidas de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

Y el Lagrangiano  $L$  está definido como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial:

$$L = K - U$$

Donde:

$L$  = Lagrangiano

$K$  = Energía cinética

$U$  = Energía potencial

$q_j$  = Coordenadas generalizadas

$Q_j$  = Fuerzas generalizadas

Para obtener el modelo, primero calcularemos la posición y velocidad de los centros de gravedad asociados al mecanismo para determinar el Lagrangiano. Posteriormente iremos desarrollando cada uno de los términos que componen la ecuación de Euler-Lagrange, para finalmente derivar una expresión de la forma:

$$\mathbb{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbb{C} = \boldsymbol{\tau}$$

Es en este resultado donde encontramos la utilidad del modelado basado en las Ecuaciones de Euler-Lagrange, ya que la forma en la que están expresadas permite llevar al sistema a una representación de variables de estado, la cual es una forma en la que los enfoques de control se aplican directamente. También debemos remarcar las bondades de este enfoque de modelado, el cual permite evaluar de forma más directa la evolución temporal de las coordenadas generalizadas (seguimiento de trayectorias) [31].

### 3.1. Posición de los centros de gravedad

En la siguiente figura (figura 3.1) se observan las posiciones de los centros de gravedad, y debemos tener en cuenta que:



- El centro de gravedad  $G_0$  se define a partir de la *base 0*, sin embargo debido a que la posición de este centro de gravedad no cambia (no hay cambio en su energía potencial y su energía cinética es nula), este centro de gravedad no se contempla en el análisis de modelado.
- El centro de gravedad  $G_2$  se define a partir de la *base 2*.
- El centro de gravedad  $G_{4,5}$  se define a partir de la *base 4*, y es el centro de gravedad resultante del *eslabón 4* y el *eslabón 5*.
- El centro de gravedad  $G_{7,8}$  se define a partir de la *base 7*, y es el centro de gravedad resultante del *eslabón 7* y el *eslabón 8*.
- El centro de gravedad  $G_{10}$  se define a partir de la *base 10*, y es el centro de gravedad asociado al *eslabón terminal* (*eslabón 10*).
- El centro de gravedad  $G_C$  se define a partir de la *base 10*, y es el centro de gravedad asociado a una carga que mueve el mecanismo.

La definición de los centros de gravedad se puede observar en la figuras 3.2 y 3.3.

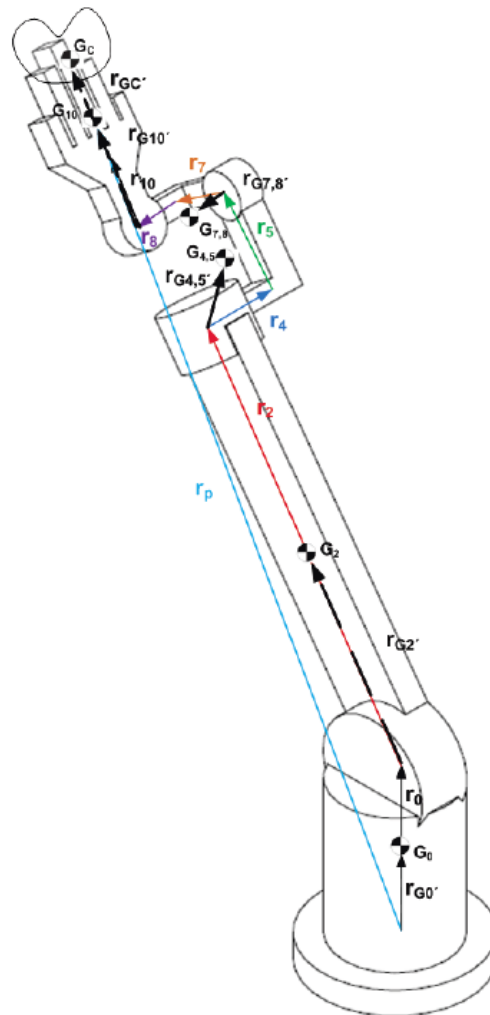


Figura 3.1: Posiciones de los centros de gravedad

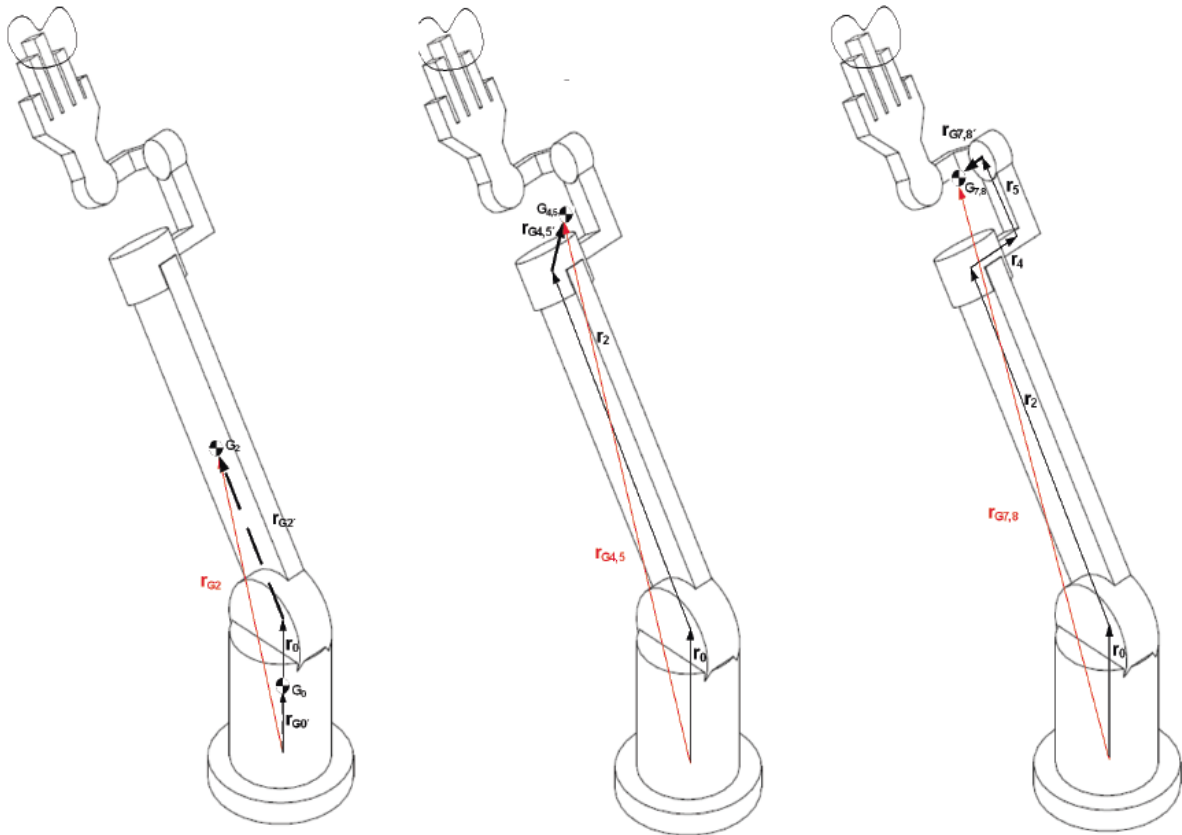


Figura 3.2: Definición de las posiciones de los centros de gravedad

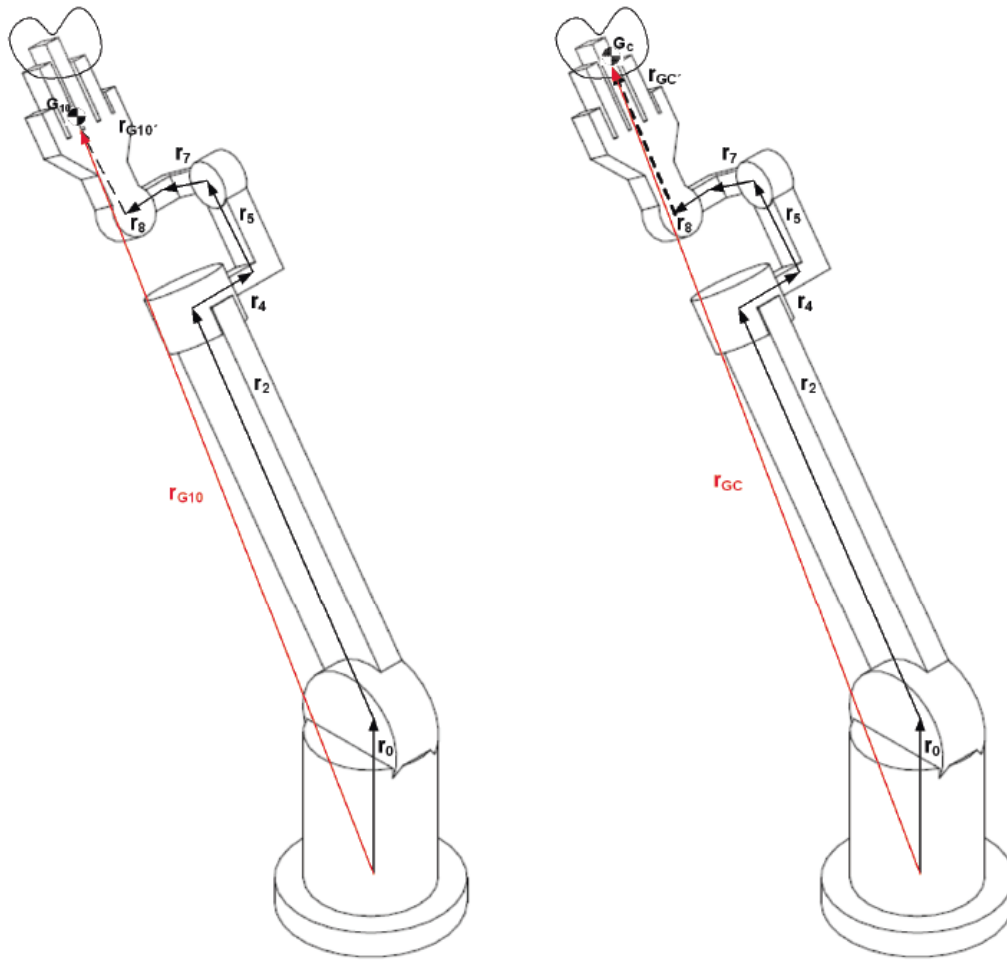


Figura 3.3: Definición de las posiciones de los centros de gravedad (continuación)

Escribamos a continuación las ecuaciones vectoriales de cada centro de gravedad:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{G2}^0 &= \mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_{G2}^0 \\
 \mathbf{r}_{G4,5}^0 &= \mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_{G4,5}^0 \\
 \mathbf{r}_{G7,8}^0 &= \mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,8}^0 \\
 \mathbf{r}_{G10}^0 &= \mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0 \\
 \mathbf{r}_{GC}^0 &= \mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{G2}^0 &= \mathbf{R}_2^0 (z_{G2} \mathbf{k}_2^2) \\
 \mathbf{r}_{G4,5}^0 &= \mathbf{R}_4^0 (x_{G4,5} \mathbf{i}_4^4 + y_{G4,5} \mathbf{j}_4^4 + z_{G4,5} \mathbf{k}_4^4) \\
 \mathbf{r}_{G7,8}^0 &= \mathbf{R}_7^0 (x_{G7,8} \mathbf{i}_7^7 + y_{G7,8} \mathbf{j}_7^7 + z_{G7,8} \mathbf{k}_7^7) \\
 \mathbf{r}_{G10}^0 &= \mathbf{R}_{10}^0 (x_{G10} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{G10} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{G10} \mathbf{k}_{10}^{10}) \\
 \mathbf{r}_{GC}^0 &= \mathbf{R}_{10}^0 (x_{GC} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{GC} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{GC} \mathbf{k}_{10}^{10})
 \end{aligned}$$

Y las matrices de rotación correspondientes (definidas en (2.3.4)) son:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_2^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \\ \mathbf{R}_4^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43}) \\ \mathbf{R}_7^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76}) \\ \mathbf{R}_{10}^0 &= \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{R}_z(\theta_{10,9})\end{aligned}$$

### 3.2. Velocidad de los centros de gravedad

Para esta sección usaremos los resultados arrojados de velocidad expresados en las ecuaciones (2.4.41) a (2.4.53).

Calculo de la velocidad  $\mathbf{v}_{G2}^0$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{G2}^0 &= \mathbf{v}_0^0 + \mathbf{v}_{G2}^0 \\ &= \mathbf{0} + \omega_{20}^0 \times \mathbf{r}_{G2}^0 \\ &= (\dot{\theta}_{21}\mathbf{j}_1^0) \times \mathbf{r}_{G2}^0 \\ &= \dot{\theta}_{21} (\mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_{G2}^0)\end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_{G2}^0 \quad (3.2.1)$$

Tenemos:

$$\mathbf{v}_{G2}^0 = \dot{\theta}_{21}\mathbf{e}_1 \quad (3.2.2)$$

Calculo de la velocidad  $\mathbf{v}_{G4,5}^0$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{G4,5}^0 &= \mathbf{v}_0^0 + \mathbf{v}_2^0 + \mathbf{r}_{G4,5}^0 \\ &= \mathbf{0} + (\dot{\theta}_{21}\mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0) + \omega_{40}^0 \times \mathbf{r}_{G4,5}^0 \\ &= (\dot{\theta}_{21}\mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0) + (\dot{\theta}_{21}\mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43}\mathbf{k}_3^0) \times \mathbf{r}_{G4,5}^0 \\ &= \dot{\theta}_{21} (\mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_{G4,5}^0)) + \dot{\theta}_{43} (\mathbf{k}_3^0 \times \mathbf{r}_{G4,5}^0)\end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_{G4,5}^0) \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}_3^0 \times \mathbf{r}_{G4,5}^0 \quad (3.2.4)$$

Tenemos:

$$\mathbf{v}_{G4,5}^0 = \dot{\theta}_{21}\mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_{43}\mathbf{e}_3 \quad (3.2.5)$$

Calculo de la velocidad  $\mathbf{v}_{G7,s}^0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{G7,s}^0 &= \mathbf{v}_0^0 + \mathbf{v}_2^0 + \mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_{G7,s}^0 \\
&= \mathbf{0} + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0 \right) + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_4^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_5^0 \\
&\quad + \omega_{70}^0 \times \mathbf{r}_{G7,s}^0 \\
&= \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0 \right) + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_4^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_5^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_{G7,s}^0 \\
&= \dot{\theta}_{21} \left( \mathbf{j}_1^0 \times \left( \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,s}^0 \right) \right) \\
&\quad + \dot{\theta}_{43} \left( \mathbf{k}_3^0 \times \left( \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,s}^0 \right) \right) \\
&\quad + \dot{\theta}_{76} \left( \mathbf{i}_6^0 \times \mathbf{r}_{G7,s}^0 \right)
\end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{e}_4 = \mathbf{j}_1^0 \times \left( \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,s}^0 \right) \quad (3.2.6)$$

$$\mathbf{e}_5 = \mathbf{k}_3^0 \times \left( \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,s}^0 \right) \quad (3.2.7)$$

$$\mathbf{e}_6 = \mathbf{i}_6^0 \times \mathbf{r}_{G7,s}^0 \quad (3.2.8)$$

Tenemos:

$$\mathbf{v}_{G7,s}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{e}_4 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{e}_5 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{e}_6 \quad (3.2.9)$$

Calculo de la velocidad  $\mathbf{v}_{G10}^0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{G10}^0 &= \mathbf{v}_0^0 + \mathbf{v}_2^0 + \mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_7^0 + \mathbf{v}_8^0 + \mathbf{v}_{G10}^0 \\
&= \mathbf{0} + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0 \right) + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_4^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_5^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_7^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_8^0 \\
&\quad + \omega_{10,0}^0 \times \mathbf{r}_{G10}^0 \\
&= \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0 \right) + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_4^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_5^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_7^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_8^0 \\
&\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right) \times \mathbf{r}_{G10}^0 \\
&= \dot{\theta}_{21} \left( \mathbf{j}_1^0 \times \left( \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0 \right) \right) \\
&\quad + \dot{\theta}_{43} \left( \mathbf{k}_3^0 \times \left( \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0 \right) \right) \\
&\quad + \dot{\theta}_{76} \left( \mathbf{i}_6^0 \times \left( \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0 \right) \right) \\
&\quad + \dot{\theta}_{10,9} \left( \mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{G10}^0 \right)
\end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{e}_7 = \mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \quad (3.2.10)$$

$$\mathbf{e}_8 = \mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \quad (3.2.11)$$

$$\mathbf{e}_9 = \mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \quad (3.2.12)$$

$$\mathbf{e}_{10} = \mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{G10}^0 \quad (3.2.13)$$

Tenemos:

$$\mathbf{v}_{G10}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{e}_7 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{e}_8 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{e}_9 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{e}_{10} \quad (3.2.14)$$

Calculo de la velocidad  $\mathbf{v}_{GC}^0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{GC}^0 &= \mathbf{v}_0^0 + \mathbf{v}_2^0 + \mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_7^0 + \mathbf{v}_8^0 + \mathbf{v}_{GC}^0 \\ &= \mathbf{0} + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0 \right) + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_4^0 \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_5^0 \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_7^0 \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_8^0 \\ &\quad + \omega_{10,0}^0 \times \mathbf{r}_{GC}^0 \\ &= \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0 \right) + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_4^0 \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right) \times \mathbf{r}_5^0 \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_7^0 \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right) \times \mathbf{r}_8^0 \\ &\quad + \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right) \times \mathbf{r}_{GC}^0 \\ &= \dot{\theta}_{21} \left( \mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \right) \\ &\quad + \dot{\theta}_{43} \left( \mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \right) \\ &\quad + \dot{\theta}_{76} \left( \mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \right) \\ &\quad + \dot{\theta}_{10,9} \left( \mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{GC}^0 \right) \end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{e}_{11} = \mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \quad (3.2.15)$$

$$\mathbf{e}_{12} = \mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \quad (3.2.16)$$

$$\mathbf{e}_{13} = \mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \quad (3.2.17)$$

$$\mathbf{e}_{14} = \mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{GC}^0 \quad (3.2.18)$$

Tenemos:

$$\mathbf{v}_{GC}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{e}_{11} + \dot{\theta}_{43} \mathbf{e}_{12} + \dot{\theta}_{76} \mathbf{e}_{13} + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{e}_{14} \quad (3.2.19)$$

Así, las expresiones (3.2.2),(3.2.5),(3.2.9),(3.2.14),(3.2.19) pueden expresarse matricialmente usando el vector de coordenadas generalizadas definido en (2.4.62):

$$\mathbf{v}_{G2}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.20)$$

Con:

$$\mathbf{J}_1 = [\mathbf{e}_1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.2.21)$$

$$\mathbf{v}_{G4,5}^0 = [\mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.22)$$

Con:

$$\mathbf{J}_2 = [\mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3 \ 0 \ 0] \quad (3.2.23)$$

$$\mathbf{v}_{G7,8}^0 = [\mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_5 \ \mathbf{e}_6 \ 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_3 \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.24)$$

Con:

$$\mathbf{J}_3 = [\mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_5 \ \mathbf{e}_6 \ 0] \quad (3.2.25)$$

$$\mathbf{v}_{G10}^0 = [\mathbf{e}_7 \ \mathbf{e}_8 \ \mathbf{e}_9 \ \mathbf{e}_{10}] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_4 \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.26)$$

Con:

$$\mathbf{J}_4 = [\mathbf{e}_7 \ \mathbf{e}_8 \ \mathbf{e}_9 \ \mathbf{e}_{10}] \quad (3.2.27)$$

$$\mathbf{v}_{GC}^0 = [\mathbf{e}_{11} \ \mathbf{e}_{12} \ \mathbf{e}_{13} \ \mathbf{e}_{14}] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_5 \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.28)$$

Con:

$$\mathbf{J}_5 = [\mathbf{e}_{11} \ \mathbf{e}_{12} \ \mathbf{e}_{13} \ \mathbf{e}_{14}] \quad (3.2.29)$$

De manera análoga podemos expresar las velocidades angulares como el producto matricial involucrando el vector  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$\boldsymbol{\omega}_{20}^0 = [\mathbf{j}_1^0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_6 \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.30)$$

Con:

$$\mathbf{J}_6 = [\mathbf{j}_1^0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.2.31)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{40}^0 = [\mathbf{j}_1^0 \ \mathbf{k}_3^0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_7 \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.32)$$

Con:

$$\mathbf{J}_7 = [\mathbf{j}_1^0 \ \mathbf{k}_3^0 \ 0 \ 0] \quad (3.2.33)$$

$$\omega_{50}^0 = [j_1^0 \quad k_3^0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_8 \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.34)$$

Con:

$$\mathbf{J}_8 = [j_1^0 \quad k_3^0 \quad 0 \quad 0] \quad (3.2.35)$$

$$\omega_{70}^0 = [j_1^0 \quad k_3^0 \quad i_6^0 \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_9 \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.36)$$

Con:

$$\mathbf{J}_9 = [j_1^0 \quad k_3^0 \quad i_6^0 \quad 0] \quad (3.2.37)$$

$$\omega_{80}^0 = [j_1^0 \quad k_3^0 \quad i_6^0 \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{10} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.38)$$

Con:

$$\mathbf{J}_{10} = [j_1^0 \quad k_3^0 \quad i_6^0 \quad 0] \quad (3.2.39)$$

$$\omega_{10,0}^0 = [j_1^0 \quad k_3^0 \quad i_6^0 \quad k_9^0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{\theta}_{76} \\ \dot{\theta}_{10,9} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{11} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.40)$$

Con:

$$\mathbf{J}_{11} = [j_1^0 \quad k_3^0 \quad i_6^0 \quad k_9^0] \quad (3.2.41)$$



### 3.3. Función Lagrangiana

La estructura del Lagrangiano para nuestro modelo compuesto de  $n$  eslabones y una carga  $C$  es de la forma:

$$L = \sum_{i=1}^n L_i + L_c$$

Donde las expresiones generales tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} L_i &= K_i - U_i \\ L_c &= K_c - U_c \\ K &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^T \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{J}_G \boldsymbol{\omega}) \\ U &= -m \mathbf{g}^T \mathbf{r}_G \end{aligned}$$

Desarrollemos los componentes de la función Lagrangiana para nuestro mecanismo propuesto:

$$L_1 = \frac{1}{2} \left( m_1 (\mathbf{v}_{G2}^0)^T \mathbf{v}_{G2}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{20}^0)^T (\mathbf{J}_{G1}^0 \boldsymbol{\omega}_{20}^0) \right) + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2}^0 \quad (3.3.1)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \left( m_2 (\mathbf{v}_{G4,5}^0)^T \mathbf{v}_{G4,5}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{40}^0)^T (\mathbf{J}_{G2}^0 \boldsymbol{\omega}_{40}^0) \right) + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G4,5}^0 \quad (3.3.2)$$

$$L_3 = \frac{1}{2} \left( m_3 (\mathbf{v}_{G7,8}^0)^T \mathbf{v}_{G7,8}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{70}^0)^T (\mathbf{J}_{G3}^0 \boldsymbol{\omega}_{70}^0) \right) + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G7,8}^0 \quad (3.3.3)$$

$$L_4 = \frac{1}{2} \left( m_4 (\mathbf{v}_{G10}^0)^T \mathbf{v}_{G10}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{10,0}^0)^T (\mathbf{J}_{G4}^0 \boldsymbol{\omega}_{10,0}^0) \right) + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G10}^0 \quad (3.3.4)$$

$$L_C = \frac{1}{2} \left( m_C (\mathbf{v}_{GC}^0)^T \mathbf{v}_{GC}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{10,0}^0)^T (\mathbf{J}_{GC}^0 \boldsymbol{\omega}_{10,0}^0) \right) + m_C \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{GC}^0 \quad (3.3.5)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= [0, 0, -9.81]^T \\ \mathbf{J}_{G1}^0 &= \mathbf{R}_2^0 \mathbf{J}_{G1}^2 \mathbf{R}_2^{0T} \\ \mathbf{J}_{G2}^0 &= \mathbf{R}_4^0 \mathbf{J}_{G2}^4 \mathbf{R}_4^{0T} \\ \mathbf{J}_{G3}^0 &= \mathbf{R}_7^0 \mathbf{J}_{G3}^7 \mathbf{R}_7^{0T} \\ \mathbf{J}_{G4}^0 &= \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{G4}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T} \\ \mathbf{J}_{GC}^0 &= \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{GC}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T} \end{aligned}$$

Donde el superíndice de las matrices de inercia  $\mathbf{J}_{Gi}$  y  $\mathbf{J}_{Gc}$  indica una base en el centro de gravedad, paralela a la base local correspondiente a ese número en el superíndice. Además las matrices de cambio de base ya han sido definidas en (2.3.4).

#### 3.3.1. Desarrollo del primer término de la ecuación de Lagrange

Desarrollo de los términos  $\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_j}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}_j}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \dot{\theta}_{21} \\ \dot{q}_2 &= \dot{\theta}_{43} \\ \dot{q}_3 &= \dot{\theta}_{76} \\ \dot{q}_4 &= \dot{\theta}_{10,9}\end{aligned}$$

Para el primer eslabón tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_1 (\mathbf{v}_{G2^0})^T \mathbf{v}_{G2^0} + (\omega_{20^0})^T (\mathbf{J}_{G1^0} \omega_{20^0}) \right) + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2^0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_1 (\mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{J}_6 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_{G1^0} \mathbf{J}_6 \dot{\mathbf{q}}) \right) + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2^0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_1 \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_6^T \mathbf{J}_{G1^0} \mathbf{J}_6) \dot{\mathbf{q}} \right) + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2^0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( m_1 \mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_6^T \mathbf{J}_{G1^0} \mathbf{J}_6 \right) \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2^0} \right)\end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{N}_1 = m_1 \mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_6^T \mathbf{J}_{G1^0} \mathbf{J}_6 \quad (3.3.6)$$

Tenemos:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2^0} \right) \quad (3.3.7)$$

Notemos que tanto la expresión definida de  $\mathbf{N}_1$  como el segundo término de la expresión previa ( $m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2^0}$ ) no dependen de  $\dot{q}_j$ , por lo que al efectuar la derivada parcial tenemos:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.3.8)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el eslabón 2 tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_2 (\mathbf{v}_{G4,5^0})^T \mathbf{v}_{G4,5^0} + (\omega_{40^0})^T (\mathbf{J}_{G2^0} \omega_{40^0}) \right) + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G4,5^0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_2 (\mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{J}_7 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_{G2^0} \mathbf{J}_7 \dot{\mathbf{q}}) \right) + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G4,5^0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_2 \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_7^T \mathbf{J}_{G2^0} \mathbf{J}_7) \dot{\mathbf{q}} \right) + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G4,5^0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( m_2 \mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_7^T \mathbf{J}_{G2^0} \mathbf{J}_7 \right) \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G4,5^0} \right)\end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{N}_2 = m_2 \mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_7^T \mathbf{J}_{G2^0} \mathbf{J}_7 \quad (3.3.9)$$

Tenemos:

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G4,5^0} \right) \quad (3.3.10)$$

Notemos que tanto el segundo término de esta expresión ( $m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G4,5^0}$ ) como la expresión definida de  $\mathbf{N}_2$  no dependen de  $\dot{q}_j$  y al efectuar la derivada parcial tenemos:

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.3.11)$$

Continuando con el eslabón 3 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_3 (\mathbf{v}_{G7,s^0})^T \mathbf{v}_{G7,s^0} + (\boldsymbol{\omega}_{70}^0)^T (\mathbf{J}_{G3}^0 \boldsymbol{\omega}_{70}^0) \right) + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G7,s^0} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_3 (\mathbf{J}_3 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_3 \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{J}_9 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_{G3}^0 \mathbf{J}_9 \dot{\mathbf{q}}) \right) + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G7,s^0} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_3 \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_3^T \mathbf{J}_3) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_9^T \mathbf{J}_{G3}^0 \mathbf{J}_9) \dot{\mathbf{q}} \right) + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G7,s^0} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( m_3 \mathbf{J}_3^T \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_9^T \mathbf{J}_{G3}^0 \mathbf{J}_9 \right) \dot{\mathbf{q}} + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G7,s^0} \right)
 \end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{N}_3 = m_3 \mathbf{J}_3^T \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_9^T \mathbf{J}_{G3}^0 \mathbf{J}_9 \quad (3.3.12)$$

Tenemos:

$$\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}} + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G7,s^0} \right) \quad (3.3.13)$$

De manera semejante en los eslabones previos, tanto  $(\mathbf{N}_3)$  como el segundo término de la expresión anterior  $(m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G7,s^0})$  no dependen de  $\dot{q}_j$ , y efectuando la derivada parcial tenemos:

$$\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_3 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.3.14)$$

Para el eslabón 4 tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_4 (\mathbf{v}_{G10}^0)^T \mathbf{v}_{G10}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{10,0}^0)^T (\mathbf{J}_{G4}^0 \boldsymbol{\omega}_{10,0}^0) \right) + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G10}^0 \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_4 (\mathbf{J}_4 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_4 \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{J}_{11} \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_{G4}^0 \mathbf{J}_{11} \dot{\mathbf{q}}) \right) + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G10}^0 \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_4 \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_4^T \mathbf{J}_4) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{G4}^0 \mathbf{J}_{11}) \dot{\mathbf{q}} \right) + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G10}^0 \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( m_4 \mathbf{J}_4^T \mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{G4}^0 \mathbf{J}_{11} \right) \dot{\mathbf{q}} + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G10}^0 \right)
 \end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{N}_4 = m_4 \mathbf{J}_4^T \mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{G4}^0 \mathbf{J}_{11} \quad (3.3.15)$$

Tenemos:

$$\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_4 \dot{\mathbf{q}} + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G10}^0 \right) \quad (3.3.16)$$

Igualmente que en los casos previos, tanto el segundo término  $(m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G10}^0)$  como la expresión definida  $(\mathbf{N}_4)$  no dependen de  $\dot{q}_j$ , por lo la derivada parcial es:

$$\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_4 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_4 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.3.17)$$

Finalmente para la carga C tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_C (\mathbf{v}_{GC^0})^T \mathbf{v}_{GC^0} + (\boldsymbol{\omega}_{10,0^0})^T (\mathbf{J}_{GC^0} \boldsymbol{\omega}_{10,0^0}) \right) + m_C \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{GC^0} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_C (\mathbf{J}_5 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_5 \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{J}_{11} \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_{GC^0} \mathbf{J}_{11} \dot{\mathbf{q}}) \right) + m_C \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{GC^0} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \left( m_C \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_5^T \mathbf{J}_5) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{GC^0} \mathbf{J}_{11}) \dot{\mathbf{q}} \right) + m_C \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{GC^0} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( m_C \mathbf{J}_5^T \mathbf{J}_5 + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{GC^0} \mathbf{J}_{11} \right) \dot{\mathbf{q}} + m_C \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{GC^0} \right)
 \end{aligned}$$

Si definimos:

$$\mathbf{N}_C = m_C \mathbf{J}_5^T \mathbf{J}_5 + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{GC^0} \mathbf{J}_{11} \quad (3.3.18)$$

Tenemos:

$$\frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_C \dot{\mathbf{q}} + m_C \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{GC^0} \right) \quad (3.3.19)$$

Y el segundo término ( $m_C \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{GC^0}$ ) y la expresión definida ( $\mathbf{N}_C$ ) no dependen de  $\dot{q}_j$ . Por lo que se tiene:

$$\frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_C \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_C \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.3.20)$$

Y debemos considerar que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial}{\partial \theta_{21}} [\theta_{21} \quad \theta_{43} \quad \theta_{76} \quad \theta_{10,9}] \\
 &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial}{\partial \theta_{43}} [\theta_{21} \quad \theta_{43} \quad \theta_{76} \quad \theta_{10,9}] \\
 &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \\
 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_3} &= \frac{\partial}{\partial \theta_{76}} [\theta_{21} \quad \theta_{43} \quad \theta_{76} \quad \theta_{10,9}] \\
 &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \\
 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_4} &= \frac{\partial}{\partial \theta_{10,9}} [\theta_{21} \quad \theta_{43} \quad \theta_{76} \quad \theta_{10,9}] \\
 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]
 \end{aligned}$$

Desarrollo de los términos  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Observando que la estructura de los términos  $\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_j}$  es la de un vector constante, por lo que tenemos que su derivada temporal es nula:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \mathbf{0} \quad (3.3.21)$$

Si desarrollamos el término  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$  tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.3.22)$$

Para el eslabón 1, derivando con respecto al tiempo la expresión dada en (3.3.8) y usando la expresión que se demuestra en (A.0.1) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{N}}_1 \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{N}}_1 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_1 + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}_1^T \right) \ddot{\mathbf{q}} + \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{N}}_1 + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{N}}_1^T \right) \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{N}}_1 + \dot{\mathbf{N}}_1^T) \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (2\mathbf{N}_1) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (2\dot{\mathbf{N}}_1) \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{N}_1) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{N}}_1) \dot{\mathbf{q}} \\ &= D_{1j} \ddot{\mathbf{q}} + V_{1j} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Siguiendo procedimientos análogos para cada eslabón tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{N}_2) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{N}}_2) \dot{\mathbf{q}} = D_{2j} \ddot{\mathbf{q}} + V_{2j} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.3.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{N}_3) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{N}}_3) \dot{\mathbf{q}} = D_{3j} \ddot{\mathbf{q}} + V_{3j} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{N}_4) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{N}}_4) \dot{\mathbf{q}} = D_{4j} \ddot{\mathbf{q}} + V_{4j} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{N}_C) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{N}}_C) \dot{\mathbf{q}} = D_{Cj} \ddot{\mathbf{q}} + V_{Cj} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.3.27)$$

Derivemos ahora los términos  $\dot{\mathbf{N}}_i$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}}_1 &= \frac{d}{dt} \left( m_1 \mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_6^T \mathbf{J}_{G1} \mathbf{J}_6 \right) \\ &= m_1 \left( \dot{\mathbf{J}}_1^T \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_1^T \dot{\mathbf{J}}_1 \right) + \dot{\mathbf{J}}_6^T \mathbf{J}_{G1} \mathbf{J}_6 + \mathbf{J}_6^T \dot{\mathbf{J}}_{G1} \mathbf{J}_6 \\ &\quad + \mathbf{J}_6^T \mathbf{J}_{G1} \dot{\mathbf{J}}_6 \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Y de la misma manera tenemos para los demás términos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}}_2 &= m_2 \left( \dot{\mathbf{J}}_2^T \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_2^T \dot{\mathbf{J}}_2 \right) + \dot{\mathbf{J}}_7^T \mathbf{J}_{G2}^0 \mathbf{J}_7 + \mathbf{J}_7^T \dot{\mathbf{J}}_{G2}^0 \mathbf{J}_7 \\ &\quad + \mathbf{J}_7^T \mathbf{J}_{G2}^0 \dot{\mathbf{J}}_7 \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}}_3 &= m_3 \left( \dot{\mathbf{J}}_3^T \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_3^T \dot{\mathbf{J}}_3 \right) + \dot{\mathbf{J}}_9^T \mathbf{J}_{G3}^0 \mathbf{J}_9 + \mathbf{J}_9^T \dot{\mathbf{J}}_{G3}^0 \mathbf{J}_9 \\ &\quad + \mathbf{J}_9^T \mathbf{J}_{G3}^0 \dot{\mathbf{J}}_9 \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}}_4 &= m_4 \left( \dot{\mathbf{J}}_4^T \mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_4^T \dot{\mathbf{J}}_4 \right) + \dot{\mathbf{J}}_{11}^T \mathbf{J}_{G4}^0 \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{11}^T \dot{\mathbf{J}}_{G4}^0 \mathbf{J}_{11} \\ &\quad + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{G4}^0 \dot{\mathbf{J}}_{11} \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}}_C &= m_C \left( \dot{\mathbf{J}}_5^T \mathbf{J}_5 + \mathbf{J}_5^T \dot{\mathbf{J}}_5 \right) + \dot{\mathbf{J}}_{11}^T \mathbf{J}_{GC}^0 \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{11}^T \dot{\mathbf{J}}_{GC}^0 \mathbf{J}_{11} \\ &\quad + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{GC}^0 \dot{\mathbf{J}}_{11} \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Las matrices de inercia están definidas por:

$$\mathbf{J}_{G1}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{J}_{G1}^2 \mathbf{R}_2^{0T} \quad (3.3.33)$$

$$\mathbf{J}_{G2}^0 = \mathbf{R}_4^0 \mathbf{J}_{G2}^4 \mathbf{R}_4^{0T} \quad (3.3.34)$$

$$\mathbf{J}_{G3}^0 = \mathbf{R}_7^0 \mathbf{J}_{G3}^7 \mathbf{R}_7^{0T} \quad (3.3.35)$$

$$\mathbf{J}_{G4}^0 = \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{G4}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T} \quad (3.3.36)$$

$$\mathbf{J}_{GC}^0 = \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{GC}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T} \quad (3.3.37)$$

Usando las definiciones de las matrices de cambio de base dadas en (2.3.4) y derivando las matrices de inercia tenemos:

$$\dot{\mathbf{J}}_{G1}^0 = \dot{\mathbf{R}}_2^0 \mathbf{J}_{G1}^2 \mathbf{R}_2^{0T} + \mathbf{R}_2^0 \mathbf{J}_{G1}^2 \dot{\mathbf{R}}_2^{0T} \quad (3.3.38)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2^0 = \Omega_y(\dot{\theta}_{21}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \quad (3.3.39)$$

Para el segundo eslabón tenemos:

$$\dot{\mathbf{J}}_{G2}^0 = \dot{\mathbf{R}}_4^0 \mathbf{J}_{G2}^4 \mathbf{R}_4^{0T} + \mathbf{R}_4^0 \mathbf{J}_{G2}^4 \dot{\mathbf{R}}_4^{0T} \quad (3.3.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_4^0 &= \dot{\mathbf{R}}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{43}) \\ &= \Omega_y(\dot{\theta}_{21}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \Omega_z(\dot{\theta}_{43}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

Para el tercer eslabón tenemos:

$$\dot{\mathbf{J}}_{G3}^0 = \dot{\mathbf{R}}_7^0 \mathbf{J}_{G3}^7 \mathbf{R}_7^{0T} + \mathbf{R}_7^0 \mathbf{J}_{G3}^7 \dot{\mathbf{R}}_7^{0T} \quad (3.3.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_7^0 &= \dot{\mathbf{R}}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \dot{\mathbf{R}}_x(\theta_{76}) \\ &= \Omega_y(\dot{\theta}_{21}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \Omega_z(\dot{\theta}_{43}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \Omega_x(\dot{\theta}_{76}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Para el cuarto eslabón tenemos:

$$\dot{\mathbf{J}}_{G4}^0 = \dot{\mathbf{R}}_{10}^0 \mathbf{J}_{G4}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T} + \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{G4}^{10} \dot{\mathbf{R}}_{10}^{0T} \quad (3.3.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{10}^0 &= \dot{\mathbf{R}}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \dot{\mathbf{R}}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{10,9}) \\ &= \Omega_y(\dot{\theta}_{21}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \Omega_z(\dot{\theta}_{43}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \Omega_x(\dot{\theta}_{76}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \Omega_z(\dot{\theta}_{10,9}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Para la carga tenemos que

$$\mathbf{J}_{GC}^0 = \dot{\mathbf{R}}_{10}^0 \mathbf{J}_{GC}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T} + \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{GC}^{10} \dot{\mathbf{R}}_{10}^{0T} \quad (3.3.46)$$

Donde  $\dot{\mathbf{R}}_{10}^0$  ya ha sido definido anteriormente en el cuarto eslabón.

Derivemos los términos  $\mathbf{J}_i$ :

Derivando  $\mathbf{J}_1$  tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= [\dot{\mathbf{e}}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \\ \dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_{G2}^0) \\ &= \dot{\mathbf{j}}_1^0 \times \mathbf{r}_{G2}^0 + \mathbf{j}_1^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{G2}^0 \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{v}_{G2}^0 \\ &= \mathbf{j}_1^0 \times (\boldsymbol{\omega}_{20}^0 \times \mathbf{r}_{G2}^0) \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2 &= [\dot{\mathbf{e}}_2 \quad \dot{\mathbf{e}}_3 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_{G4,5}^0)) \\ &= \dot{\mathbf{j}}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_{G4,5}^0) + \mathbf{j}_1^0 \times (\dot{\mathbf{r}}_2^0 + \dot{\mathbf{r}}_{G4,5}^0) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{v}_2^0 + \mathbf{v}_{G4,5}^0) \\ &= \mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{v}_2^0 + \mathbf{v}_{G4,5}^0) \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_3 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{k}_3^0 \times \mathbf{r}_{G4,5}^0) \\ &= \dot{\mathbf{k}}_3^0 \times \mathbf{r}_{G4,5}^0 + \mathbf{k}_3^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{G4,5}^0 \\ &= (\boldsymbol{\omega}_{30}^0 \times \mathbf{k}_3^0) \times \mathbf{r}_{G4,5}^0 + \mathbf{k}_3^0 \times \mathbf{v}_{G4,5}^0 \end{aligned} \quad (3.3.49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_3 &= [\dot{\mathbf{e}}_4 \quad \dot{\mathbf{e}}_5 \quad \dot{\mathbf{e}}_6 \quad \mathbf{0}] \\ \dot{\mathbf{e}}_4 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,8}^0)) \\ &= \dot{\mathbf{j}}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,8}^0) + \mathbf{j}_1^0 \times (\dot{\mathbf{r}}_2^0 + \dot{\mathbf{r}}_4^0 + \dot{\mathbf{r}}_5^0 + \dot{\mathbf{r}}_{G7,8}^0) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{v}_2^0 + \mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_{G7,8}^0) \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_5 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,8}^0)) \\ &= \dot{\mathbf{k}}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,8}^0) + \mathbf{k}_3^0 \times (\dot{\mathbf{r}}_4^0 + \dot{\mathbf{r}}_5^0 + \dot{\mathbf{r}}_{G7,8}^0) \\ &= (\boldsymbol{\omega}_{30}^0 \times \mathbf{k}_3^0) \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,8}^0) \\ &\quad + \mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_{G7,8}^0) \end{aligned} \quad (3.3.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_6 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{i}_6^0 \times \mathbf{r}_{G7,8}^0) \\ &= \dot{\mathbf{i}}_6^0 \times \mathbf{r}_{G7,8}^0 + \mathbf{i}_6^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{G7,8}^0 \\ &= (\boldsymbol{\omega}_{60}^0 \times \mathbf{i}_6^0) \times \mathbf{r}_{G7,8}^0 + \mathbf{i}_6^0 \times \mathbf{v}_{G7,8}^0 \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

$$\mathbf{J}_4 = [\dot{\mathbf{e}}_7 \quad \dot{\mathbf{e}}_8 \quad \dot{\mathbf{e}}_9 \quad \dot{\mathbf{e}}_{10}]$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_7 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10^0})) \\ &= \dot{\mathbf{j}}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10^0}) \\ &\quad + \mathbf{j}_1^0 \times (\dot{\mathbf{r}}_2^0 + \dot{\mathbf{r}}_4^0 + \dot{\mathbf{r}}_5^0 + \dot{\mathbf{r}}_7^0 + \dot{\mathbf{r}}_8^0 + \dot{\mathbf{r}}_{G10^0}) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{v}_2^0 + \mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_7^0 + \mathbf{v}_8^0 + \mathbf{v}_{G10^0}) \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_8 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10^0})) \\ &= \dot{\mathbf{k}}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10^0}) + \mathbf{k}_3^0 \times (\dot{\mathbf{r}}_4^0 + \dot{\mathbf{r}}_5^0 + \dot{\mathbf{r}}_7^0 + \dot{\mathbf{r}}_8^0 + \dot{\mathbf{r}}_{G10^0}) \\ &= (\omega_{30^0} \times \mathbf{k}_3^0) \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10^0}) \\ &\quad + \mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_7^0 + \mathbf{v}_8^0 + \mathbf{v}_{G10^0}) \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_9 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10^0})) \\ &= \dot{\mathbf{i}}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10^0}) + \mathbf{i}_6^0 \times (\dot{\mathbf{r}}_7^0 + \dot{\mathbf{r}}_8^0 + \dot{\mathbf{r}}_{G10^0}) \\ &= (\omega_{60^0} \times \mathbf{i}_6^0) \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10^0}) + \mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{v}_7^0 + \mathbf{v}_8^0 + \mathbf{v}_{G10^0}) \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{10} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{G10^0}) \\ &= \dot{\mathbf{k}}_9^0 \times \mathbf{r}_{G10^0} + \mathbf{k}_9^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{G10^0} \\ &= (\omega_{90^0} \times \mathbf{k}_9^0) \times \mathbf{r}_{G10^0} + \mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{v}_{G10^0} \end{aligned} \quad (3.3.56)$$



$$\mathbf{J}_5 = [\dot{e}_{11} \quad \dot{e}_{12} \quad \dot{e}_{13} \quad \dot{e}_{14}]$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{11} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0)) \\ &= \dot{\mathbf{j}}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \\ &\quad + \mathbf{j}_1^0 \times (\dot{\mathbf{r}}_2^0 + \dot{\mathbf{r}}_4^0 + \dot{\mathbf{r}}_5^0 + \dot{\mathbf{r}}_7^0 + \dot{\mathbf{r}}_8^0 + \dot{\mathbf{r}}_{GC}^0) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{v}_2^0 + \mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_7^0 + \mathbf{v}_8^0 + \mathbf{v}_{GC}^0) \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{12} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0)) \\ &= \dot{\mathbf{k}}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) + \mathbf{k}_3^0 \times (\dot{\mathbf{r}}_4^0 + \dot{\mathbf{r}}_5^0 + \dot{\mathbf{r}}_7^0 + \dot{\mathbf{r}}_8^0 + \dot{\mathbf{r}}_{GC}^0) \\ &= (\omega_{30}^0 \times \mathbf{k}_3^0) \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \\ &\quad + \mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{v}_4^0 + \mathbf{v}_5^0 + \mathbf{v}_7^0 + \mathbf{v}_8^0 + \mathbf{v}_{GC}^0) \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{13} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0)) \\ &= \dot{\mathbf{i}}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times (\dot{\mathbf{r}}_7^0 + \dot{\mathbf{r}}_8^0 + \dot{\mathbf{r}}_{GC}^0) \\ &= (\omega_{60}^0 \times \mathbf{i}_6^0) \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{v}_7^0 + \mathbf{v}_8^0 + \mathbf{v}_{GC}^0) \end{aligned} \quad (3.3.59)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{14} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{GC}^0) \\ &= \dot{\mathbf{k}}_9^0 \times \mathbf{r}_{GC}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{GC}^0 \\ &= (\omega_{90}^0 \times \mathbf{k}_9^0) \times \mathbf{r}_{GC}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{v}_{GC}^0 \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

Para las  $\mathbf{J}_i$  restantes utilizaremos las siguientes expresiones:

$$\dot{\mathbf{j}}_1^0 = \mathbf{0} \quad (3.3.61)$$

$$\dot{\mathbf{k}}_3^0 = \omega_{30}^0 \times \mathbf{k}_3^0 \quad (3.3.62)$$

$$\dot{\mathbf{i}}_6^0 = \omega_{60}^0 \times \mathbf{i}_6^0 \quad (3.3.63)$$

$$\dot{\mathbf{k}}_9^0 = \omega_{90}^0 \times \mathbf{k}_9^0 \quad (3.3.64)$$

Así:

$$\mathbf{J}_6 = [\dot{\mathbf{j}}_1^0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad (3.3.65)$$

$$\mathbf{J}_7 = [\dot{\mathbf{j}}_1^0 \quad \dot{\mathbf{k}}_3^0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad (3.3.66)$$

$$\mathbf{J}_8 = [\dot{\mathbf{j}}_1^0 \quad \dot{\mathbf{k}}_3^0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad (3.3.67)$$

$$\mathbf{J}_9 = [\dot{\mathbf{j}}_1^0 \quad \dot{\mathbf{k}}_3^0 \quad \dot{\mathbf{i}}_6^0 \quad \mathbf{0}] \quad (3.3.68)$$

$$\mathbf{J}_{10} = [\dot{\mathbf{j}}_1^0 \quad \dot{\mathbf{k}}_3^0 \quad \dot{\mathbf{i}}_6^0 \quad \mathbf{0}] \quad (3.3.69)$$

$$\mathbf{J}_{11} = [\dot{\mathbf{j}}_1^0 \quad \dot{\mathbf{k}}_3^0 \quad \dot{\mathbf{i}}_6^0 \quad \dot{\mathbf{k}}_9^0] \quad (3.3.70)$$

Desarrollo de los términos  $\frac{\partial L_i}{\partial q_j}$

Considerando las expresiones dadas en (3.3.1) que definen a los términos  $L_i$  tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial L_1}{\partial q_j} + \frac{\partial L_2}{\partial q_j} + \frac{\partial L_3}{\partial q_j} + \frac{\partial L_4}{\partial q_j} + \frac{\partial L_C}{\partial q_j} \quad (3.3.71)$$

Para continuar con el procedimiento debemos recordar que el vector  $\dot{\mathbf{q}}$  es función de las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas  $\dot{q}_j$  y no de las coordenadas generalizadas originales  $q_j$  por lo que la derivada parcial de este vector  $\dot{\mathbf{q}}$  no depende de  $q_j$  y  $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_j} = \mathbf{0}$ .

Antes de comenzar es necesario hacer notar que las derivadas parciales de los vectores de posición:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0^0}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_{G2^0}}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5^0}}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,8^0}}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_{G10^0}}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_{GC^0}}{\partial q_j}$$

se encontrarán dentro de las expresiones que se desarrollarán a continuación, por lo que el cálculo de estas derivadas se establece en las ecuaciones (3.3.114) a (3.3.124).

De manera semejante, las derivadas parciales de las matrices de rotación:

$$\frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21})), \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_z(\theta_{43})), \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_x(\theta_{76})), \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_z(\theta_{10,9}))$$

que también aparecerán varias veces en las expresiones que se presentan a continuación, se desarrollan en la ecuaciones (3.3.125) a (3.3.134).

Así, para el primer eslabón tenemos que la derivada parcial de  $L_1$  (3.3.6) es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G2^0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_1 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{G2^0}}{\partial q_j} \\ &= \mathbf{V}'_{1j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{1j} \end{aligned} \quad (3.3.72)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( m_1 \mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_6^T \mathbf{J}_{G1^0} \mathbf{J}_6 \right) \\ &= m_1 \left( \frac{\partial \mathbf{J}_1^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_1^T \frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial \mathbf{J}_6^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_{G1^0} \mathbf{J}_6 + \mathbf{J}_6^T \frac{\partial \mathbf{J}_{G1^0}}{\partial q_j} \mathbf{J}_6 + \mathbf{J}_6^T \mathbf{J}_{G1^0} \frac{\partial \mathbf{J}_6}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (3.3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]) \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_j} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] \\ \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{j}_1^0 \times \mathbf{r}_{G2^0}) \\ &= \mathbf{j}_1^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G2^0}}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (3.3.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}_6}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{j}_1^0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]) \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} = \mathbf{0} \quad (3.3.75)$$

Y la derivada de la matriz de inercia asociada al eslabón 1 es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}_{G1}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \mathbf{R}_2^0 \mathbf{J}_{G1}^2 \mathbf{R}_2^{0T} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_2^0}{\partial q_j} \mathbf{J}_{G1}^2 \mathbf{R}_2^{0T} + \mathbf{R}_2^0 \mathbf{J}_{G1}^2 \frac{\partial \mathbf{R}_2^{0T}}{\partial q_j}\end{aligned}\quad (3.3.76)$$

Y además tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_{G2}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_{G2}^0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_0^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G2}^0}{\partial q_j}\end{aligned}\quad (3.3.77)$$

Para el segundo eslabón tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G4,5}^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5}^0}{\partial q_j} \\ &= \mathbf{V}_{2j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{2j}\end{aligned}\quad (3.3.78)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( m_2 \mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_7^T \mathbf{J}_{G2}^0 \mathbf{J}_7 \right) \\ &= m_2 \left( \frac{\partial \mathbf{J}_2^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_2^T \frac{\partial \mathbf{J}_2}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial \mathbf{J}_7^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_{G2}^0 \mathbf{J}_7 + \mathbf{J}_7^T \frac{\partial \mathbf{J}_{G2}^0}{\partial q_j} \mathbf{J}_7 + \mathbf{J}_7^T \mathbf{J}_{G2}^0 \frac{\partial \mathbf{J}_7}{\partial q_j}\end{aligned}\quad (3.3.79)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}_2}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_j} & \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_j} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_{G4,5}^0)) \\ &= \mathbf{j}_1^0 \times \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_{G4,5}^0) \\ &= \mathbf{j}_1^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5}^0}{\partial q_j} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{k}_3^0 \times \mathbf{r}_{G4,5}^0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} \times \mathbf{r}_{G4,5}^0 + \mathbf{k}_3^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5}^0}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_3^0 \mathbf{k}_3^3) \times \mathbf{r}_{G4,5}^0 + \mathbf{k}_3^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5}^0}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{k}_3^3) \times \mathbf{r}_{G4,5}^0 + \mathbf{k}_3^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5}^0}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{k}_3^3 \times \mathbf{r}_{G4,5}^0 + \mathbf{k}_3^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5}^0}{\partial q_j}\end{aligned}\quad (3.3.80)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}_7}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{j}_1^0 \quad \mathbf{k}_3^0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} & \frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.3.81}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{k}_3^0\tag{3.3.82}$$

Y la derivada de la matriz de inercia asociada al eslabón 2 es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}_{G2}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_4^0 \mathbf{J}_{G2}^4 \mathbf{R}_4^{0T}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_4^0}{\partial q_j} \mathbf{J}_{G2}^4 \mathbf{R}_4^{0T} + \mathbf{R}_4^0 \mathbf{J}_{G2}^4 \frac{\partial \mathbf{R}_4^{0T}}{\partial q_j}\end{aligned}\tag{3.3.83}$$

Y además tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_{G4,5}^0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_0^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5}^0}{\partial q_j}\end{aligned}\tag{3.3.84}$$

Para el tercer eslabón tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_3}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}} + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G7,8}^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_3 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,8}^0}{\partial q_j} \\ &= \mathbf{V}_{3j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{3j}\end{aligned}\tag{3.3.85}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (m_3 \mathbf{J}_3^T \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_9^T \mathbf{J}_{G3}^0 \mathbf{J}_9) \\ &= m_3 \left( \frac{\partial \mathbf{J}_3^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_3^T \frac{\partial \mathbf{J}_3}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial \mathbf{J}_9^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_{G3}^0 \mathbf{J}_9 + \mathbf{J}_9^T \frac{\partial \mathbf{J}_{G3}^0}{\partial q_j} \mathbf{J}_9 + \mathbf{J}_9^T \mathbf{J}_{G3}^0 \frac{\partial \mathbf{J}_9}{\partial q_j}\end{aligned}\tag{3.3.86}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}_3}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{e}_4 \quad \mathbf{e}_5 \quad \mathbf{e}_6 \quad \mathbf{0}]) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_4}{\partial q_j} & \frac{\partial \mathbf{e}_5}{\partial q_j} & \frac{\partial \mathbf{e}_6}{\partial q_j} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_4}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,8}^0)) \\ &= \mathbf{j}_1^0 \times \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,8}^0) \\ &= \mathbf{j}_1^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,8}^0}{\partial q_j} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_5}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,8}^0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,s^0}) + \mathbf{k}_3^0 \times \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,s^0}) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,s^0}) + \mathbf{k}_3^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,s^0}}{\partial q_j} \right) \\
 \frac{\partial \mathbf{e}_6}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{i}_6^0 \times \mathbf{r}_{G7,s^0}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{i}_6^0 \times \mathbf{r}_{G7,s^0} + \mathbf{i}_6^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,s^0}}{\partial q_j}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_6^0 \mathbf{i}_6^6) \times \mathbf{r}_{G7,s^0} + \mathbf{i}_6^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,s^0}}{\partial q_j} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_6^6) \times \mathbf{r}_{G7,s^0} + \mathbf{i}_6^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,s^0}}{\partial q_j} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{i}_6^6 \times \mathbf{r}_{G7,s^0} + \mathbf{i}_6^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,s^0}}{\partial q_j} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_6^6 \times \mathbf{r}_{G7,s^0} + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{i}_6^6 \times \mathbf{r}_{G7,s^0} \\
 &\quad + \mathbf{i}_6^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,s^0}}{\partial q_j}
 \end{aligned} \tag{3.3.87}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{J}_9}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{j}_1^0 \quad \mathbf{k}_3^0 \quad \mathbf{i}_6^0 \quad \mathbf{0}]) \\
 &= \left[ \frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} \quad \frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} \quad \mathbf{i}_6^0 \quad \mathbf{0} \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} = \mathbf{0} \tag{3.3.88}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{k}_3^0 \tag{3.3.89}$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_6^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_6^6 + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{i}_6^6 \tag{3.3.90}$$

Y la derivada de la matriz de inercia asociada al eslabón 3 es:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{J}_{G3}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_7^0 \mathbf{J}_{G3}^7 \mathbf{R}_7^{0T}) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{R}_7^0}{\partial q_j} \mathbf{J}_{G3}^7 \mathbf{R}_7^{0T} + \mathbf{R}_7^0 \mathbf{J}_{G3}^7 \frac{\partial \mathbf{R}_7^{0T}}{\partial q_j}
 \end{aligned} \tag{3.3.91}$$

Y además tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,s^0}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_{G7,s^0}) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{r}_0^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G7,s^0}}{\partial q_j}
 \end{aligned} \tag{3.3.92}$$

Para el cuarto eslabón tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_4}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_4 \dot{\mathbf{q}} + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G10}^0 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{N}_4}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_4 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \\
 &= \mathbf{V}_{4j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{4j}
 \end{aligned} \tag{3.3.93}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{N}_4}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( m_4 \mathbf{J}_4^T \mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{G4}^0 \mathbf{J}_{11} \right) \\ &= m_4 \left( \frac{\partial \mathbf{J}_4^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_4^T \frac{\partial \mathbf{J}_4}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial \mathbf{J}_{11}^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_{G4}^0 \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{11}^T \frac{\partial \mathbf{J}_{G4}^0}{\partial q_j} \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{G4}^0 \frac{\partial \mathbf{J}_{11}}{\partial q_j}\end{aligned}\quad (3.3.94)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}_4}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{e}_7 \ \mathbf{e}_8 \ \mathbf{e}_9 \ \mathbf{e}_{10}]) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_7}{\partial q_j} & \frac{\partial \mathbf{e}_8}{\partial q_j} & \frac{\partial \mathbf{e}_9}{\partial q_j} & \frac{\partial \mathbf{e}_{10}}{\partial q_j} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_7}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0)) \\ &= \mathbf{j}_1^0 \times \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \\ &= \mathbf{j}_1^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_8}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0)) \\ &= \frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \\ &\quad + \mathbf{k}_3^0 \times \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \\ &\quad + \mathbf{k}_3^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_9}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0)) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{i}_6^0) \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_6^0 \mathbf{i}_6^0) \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_6^0) \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \\ &\quad + \mathbf{i}_6^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \right) \quad (3.3.95) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_{10}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{G10}^0) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{k}_9^0) \times \mathbf{r}_{G10}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_9^0 \mathbf{k}_9^0) \times \mathbf{r}_{G10}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{k}_9^0) \times \mathbf{r}_{G10}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76})) \mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{G10}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{G10}^0 + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{i}_6^0 \times \mathbf{r}_{G10}^0 \\
 &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43}) \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial q_j} \mathbf{i}_6^0 \times \mathbf{r}_{G10}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j}
 \end{aligned} \tag{3.3.96}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{J}_{11}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{j}_1^0 \quad \mathbf{k}_3^0 \quad \mathbf{i}_6^0 \quad \mathbf{k}_9^0]) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} & \frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} & \mathbf{i}_6^0 & \mathbf{k}_9^0 \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.3.97}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{k}_3^0 \tag{3.3.98}$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_6^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{i}_6^0 + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{i}_6^0 \tag{3.3.99}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{k}_9^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{k}_9^0 + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{i}_6^0 \\
 &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43}) \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial q_j} \mathbf{i}_6^0
 \end{aligned} \tag{3.3.100}$$

Y la derivada de la matriz de inercia asociada al eslabón 4 es:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{J}_{G4}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{G4}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T}) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{R}_{10}^0}{\partial q_j} \mathbf{J}_{G4}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T} + \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{G4}^{10} \frac{\partial \mathbf{R}_{10}^{0T}}{\partial q_j}
 \end{aligned} \tag{3.3.101}$$

Y además tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{G10}^0) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{r}_0^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j}
 \end{aligned} \tag{3.3.102}$$

Para el carga  $C$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_C}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_C \dot{\mathbf{q}} + m_C \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{GC}^0 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{N}_C}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + m_C \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \\
 &= \mathbf{V}'_{Cj} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{Cj}
 \end{aligned} \tag{3.3.103}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{N}_C}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (m_C \mathbf{J}_5^T \mathbf{J}_5 + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{GC}^0 \mathbf{J}_{11}) \\
 &= m_C \left( \frac{\partial \mathbf{J}_5^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_5 + \mathbf{J}_5^T \frac{\partial \mathbf{J}_5}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial \mathbf{J}_{11}^T}{\partial q_j} \mathbf{J}_{GC}^0 \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{11}^T \frac{\partial \mathbf{J}_{GC}^0}{\partial q_j} \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{11}^T \mathbf{J}_{GC}^0 \frac{\partial \mathbf{J}_{11}}{\partial q_j}
 \end{aligned} \tag{3.3.104}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{J}_5}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{e}_{11} \ \mathbf{e}_{12} \ \mathbf{e}_{13} \ \mathbf{e}_{14}]) \\
 &= \left[ \frac{\partial \mathbf{e}_{11}}{\partial q_j} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{12}}{\partial q_j} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{13}}{\partial q_j} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{14}}{\partial q_j} \right] \\
 \frac{\partial \mathbf{e}_{11}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{j}_1^0 \times (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0)) \\
 &= \mathbf{j}_1^0 \times \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \\
 &= \mathbf{j}_1^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \right) \\
 \frac{\partial \mathbf{e}_{12}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0)) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) + \mathbf{k}_3^0 \times \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{k}_3^0 \times (\mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \\
 &\quad + \mathbf{k}_3^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \right) \tag{3.3.105}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{e}_{13}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{i}_6^0 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0)) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{i}_6^0) \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_6^0 \mathbf{i}_6^6) \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_6^6) \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{i}_6^6 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) + \mathbf{i}_6^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \right) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_6^6 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{i}_6^6 \times (\mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \\
 &\quad + \mathbf{i}_6^0 \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \right) \tag{3.3.106}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{e}_{14}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{k}_9^0 \times \mathbf{r}_{GC}^0) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{k}_9^0) \times \mathbf{r}_{GC}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_9^0 \mathbf{k}_9^9) \times \mathbf{r}_{GC}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_9^9) \times \mathbf{r}_{GC}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76})) \mathbf{k}_9^9 \times \mathbf{r}_{GC}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_9^9 \times \mathbf{r}_{GC}^0 + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_9^9 \times \mathbf{r}_{GC}^0
 \end{aligned}$$



$$+ \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial q_j}\mathbf{i}_6^6 \times \mathbf{r}_{GC}^0 + \mathbf{k}_9^0 \times \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \quad (3.3.107)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}_{11}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} ([\mathbf{j}_1^0 \quad \mathbf{k}_3^0 \quad \mathbf{i}_6^0 \quad \mathbf{k}_9^0]) \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} \quad \frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} \quad \mathbf{i}_6^0 \quad \mathbf{k}_9^0 \right] \\ \frac{\partial \mathbf{j}_1^0}{\partial q_j} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.3.108)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_3^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{k}_3^3 \quad (3.3.109)$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_6^0}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{i}_6^6 + \mathbf{R}_y(\theta_{21})\frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j}\mathbf{i}_6^6 \quad (3.3.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{k}_9^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43})\mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{k}_9^9 + \mathbf{R}_y(\theta_{21})\frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{R}_x(\theta_{76})\mathbf{i}_6^6 \\ &\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21})\mathbf{R}_z(\theta_{43})\frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial q_j}\mathbf{i}_6^6 \end{aligned} \quad (3.3.111)$$

Y la derivada de la matriz de inercia asociada a la carga  $C$  es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}_{GC}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{GC}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_{10}^0}{\partial q_j} \mathbf{J}_{GC}^{10} \mathbf{R}_{10}^{0T} + \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{J}_{GC}^{10} \frac{\partial \mathbf{R}_{10}^{0T}}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (3.3.112)$$

Y además tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{GC}^0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_0^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (3.3.113)$$

Donde las derivadas parciales de cada vector de posición corresponden a:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0^0}{\partial q_j} = \mathbf{0} \quad (3.3.114)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_{G2}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_2^0 (z_{G2} \mathbf{k}_2^2)) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) (z_{G2} \mathbf{k}_2^2)) \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} (z_{G2} \mathbf{k}_2^2) \end{aligned} \quad (3.3.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_2^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_2^0 (z_{32} \mathbf{k}_2^2)) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) (z_{32} \mathbf{k}_2^2)) \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} (z_{32} \mathbf{k}_2^2) \end{aligned} \quad (3.3.116)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_{G4,5}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_4^0 (x_{G4,5} \mathbf{i}_4^4 + y_{G4,5} \mathbf{j}_4^4 + z_{G4,5} \mathbf{k}_4^4)) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) (x_{G4,5} \mathbf{i}_4^4 + y_{G4,5} \mathbf{j}_4^4 + z_{G4,5} \mathbf{k}_4^4)) \\
&= \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) (x_{G4,5} \mathbf{i}_4^4 + y_{G4,5} \mathbf{j}_4^4 + z_{G4,5} \mathbf{k}_4^4) \\
&\quad + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} (x_{G4,5} \mathbf{i}_4^4 + y_{G4,5} \mathbf{j}_4^4 + z_{G4,5} \mathbf{k}_4^4)
\end{aligned} \tag{3.3.117}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_4^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (x_{54} \mathbf{i}_4^0) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (x_{54} (\mathbf{R}_4^0 \mathbf{i}_4^4)) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (x_{54} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_4^4)) \\
&= x_{54} \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{i}_4^4 \\
&= x_{54} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \right) \mathbf{i}_4^4
\end{aligned} \tag{3.3.118}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_5^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (z_{65} \mathbf{k}_5^0) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (z_{65} (\mathbf{R}_5^0 \mathbf{k}_5^5)) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (z_{65} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{k}_5^5)) \\
&= z_{65} \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{k}_5^5 \\
&= z_{65} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \right) \mathbf{k}_5^5
\end{aligned} \tag{3.3.119}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_{G7,8}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_7^0 (x_{G7,8} \mathbf{i}_7^7 + y_{G7,8} \mathbf{j}_7^7 + z_{G7,8} \mathbf{k}_7^7)) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} ((\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76})) (x_{G7,8} \mathbf{i}_7^7 + y_{G7,8} \mathbf{j}_7^7 + z_{G7,8} \mathbf{k}_7^7)) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76})) (x_{G7,8} \mathbf{i}_7^7 + y_{G7,8} \mathbf{j}_7^7 + z_{G7,8} \mathbf{k}_7^7) \\
&= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial q_j} \right) (x_{G7,8} \mathbf{i}_7^7 + y_{G7,8} \mathbf{j}_7^7 + z_{G7,8} \mathbf{k}_7^7)
\end{aligned} \tag{3.3.120}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_7^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (z_{87} \mathbf{k}_7^0) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (z_{87} (\mathbf{R}_7^0 \mathbf{k}_7^7)) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (z_{87} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7)) \\
&= z_{87} \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76})) \mathbf{k}_7^7 \\
&= z_{87} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial q_j} \right) \mathbf{k}_7^7
\end{aligned} \tag{3.3.121}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_8^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (x_{98} \mathbf{i}_8^0) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (x_{98} (\mathbf{R}_8^0 \mathbf{i}_8^8)) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (x_{98} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8)) \\
&= x_{98} \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76})) \mathbf{i}_8^8 \\
&= x_{98} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial q_j} \right) \mathbf{i}_8^8
\end{aligned} \tag{3.3.122}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_{G10}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_{10}^0 (x_{G10} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{G10} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{G10} \mathbf{k}_{10}^{10})) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_{10}^0) (x_{G10} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{G10} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{G10} \mathbf{k}_{10}^{10}) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9})) (x_{G10} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{G10} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{G10} \mathbf{k}_{10}^{10}) \\
&= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{10,9})}{\partial q_j} \right) \\
&\quad (x_{G10} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{G10} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{G10} \mathbf{k}_{10}^{10})
\end{aligned} \tag{3.3.123}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}_{GC}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_{10}^0 (x_{GC} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{GC} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{GC} \mathbf{k}_{10}^{10})) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_{10}^0) (x_{GC} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{GC} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{GC} \mathbf{k}_{10}^{10}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9})) (x_{GC} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{GC} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{GC} \mathbf{k}_{10}^{10}) \\
 &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial q_j} \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial q_j} \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) + \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{10,9})}{\partial q_j} \right) \\
 &\quad (x_{GC} \mathbf{i}_{10}^{10} + y_{GC} \mathbf{j}_{10}^{10} + z_{GC} \mathbf{k}_{10}^{10}) \tag{3.3.124}
 \end{aligned}$$

Derivadas parciales de las matrices de rotación:

Para la matriz de rotación  $\mathbf{R}_y(\theta_{21})$ :

$$\frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_y(\theta_{21})) = \frac{\partial}{\partial \theta_{21}} (\mathbf{R}_y(\theta_{21})) \frac{\partial \theta_{21}}{\partial q_j} \tag{3.3.125}$$

En la cual se tiene que para  $j = 1$ :

$$\frac{\partial \theta_{21}}{\partial q_j} = 1 \tag{3.3.126}$$

Y para  $j \neq 1$

$$\frac{\partial \theta_{21}}{\partial q_j} = 0 \tag{3.3.127}$$

Para la matriz de rotación  $\mathbf{R}_z(\theta_{43})$ :

$$\frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_z(\theta_{43})) = \frac{\partial}{\partial \theta_{43}} (\mathbf{R}_z(\theta_{43})) \frac{\partial \theta_{43}}{\partial q_j} \tag{3.3.128}$$

En la cual se tiene que para  $j = 2$ :

$$\frac{\partial \theta_{43}}{\partial q_j} = 1 \tag{3.3.129}$$

Y para  $j \neq 2$

$$\frac{\partial \theta_{43}}{\partial q_j} = 0 \tag{3.3.130}$$

Para la matriz de rotación  $\mathbf{R}_x(\theta_{76})$ :

$$\frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_x(\theta_{76})) = \frac{\partial}{\partial \theta_{76}} (\mathbf{R}_x(\theta_{76})) \frac{\partial \theta_{76}}{\partial q_j} \tag{3.3.131}$$

En la cual se tiene que para  $j = 3$ :

$$\frac{\partial \theta_{76}}{\partial q_j} = 1 \tag{3.3.132}$$

Y para  $j \neq 3$

$$\frac{\partial \theta_{76}}{\partial q_j} = 0 \tag{3.3.133}$$

Para la matriz de rotación  $\mathbf{R}_z(\theta_{10,9})$ :

$$\frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{R}_z(\theta_{10,9})) = \frac{\partial}{\partial \theta_{10,9}} (\mathbf{R}_z(\theta_{10,9})) \frac{\partial \theta_{10,9}}{\partial q_j} \tag{3.3.134}$$

En la cual se tiene que para  $j = 4$ :

$$\frac{\partial \theta_{10,9}}{\partial q_j} = 1 \quad (3.3.135)$$

Y para  $j \neq 4$

$$\frac{\partial \theta_{10,9}}{\partial q_j} = 0 \quad (3.3.136)$$

### 3.3.2. Desarrollo del segundo término de la ecuación de Lagrange

Cálculo de las fuerzas generalizadas

Las fuerzas generalizadas son la base para determinar el componente  $Q_j$  de la ecuación de Euler-Lagrange, y de acuerdo a [14] la estructura es:

$$\delta W = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{r} + \mathbf{M}^T \delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{EL} \delta \mathbf{q} \quad (3.3.137)$$

En específico deseamos encontrar  $\mathbf{Q}_{EL}$  cuyos componentes son los términos  $Q_j$ .

En nuestro caso, el mecanismo propuesto no posee componentes de fuerzas externas asociados a desplazamientos longitudinales, y solo tenemos torques asociados a las uniones de tipo rotacional del mecanismo, por lo que la expresión se reduce a:

$$\delta W = \mathbf{F}_{ext}^T \delta \mathbf{r}_P + \tau_1^T \delta \mathbf{Q}_1 + \tau_2^T \delta \mathbf{Q}_2 + \tau_3^T \delta \mathbf{Q}_3 + \tau_4^T \delta \mathbf{Q}_4 + \mathbf{M}_{ext}^T \delta \mathbf{Q}_P = \mathbf{Q}_{EL} \delta \mathbf{q} \quad (3.3.138)$$

Donde el único de vector de posición involucrado es el vector  $\mathbf{r}_P^0$  es:

$$\mathbf{r}_P^0 = \mathbf{r}_0^0 + \mathbf{r}_2^0 + \mathbf{r}_4^0 + \mathbf{r}_5^0 + \mathbf{r}_7^0 + \mathbf{r}_8^0 + \mathbf{r}_{10}^0 \quad (3.3.139)$$

Por lo que se tiene:

$$\delta \mathbf{r}_P^0 = \delta \mathbf{r}_0^0 + \delta \mathbf{r}_2^0 + \delta \mathbf{r}_4^0 + \delta \mathbf{r}_5^0 + \delta \mathbf{r}_7^0 + \delta \mathbf{r}_8^0 + \delta \mathbf{r}_{10}^0 \quad (3.3.140)$$

Recordemos la definición de cada uno de los vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0^0 &= z_{10} \mathbf{k}_0^0 = z_{10} \mathbf{k}_0^0 \\ \mathbf{r}_2^0 &= z_{32} \mathbf{k}_2^0 = z_{32} \mathbf{R}_2^0 \mathbf{k}_2^2 = z_{32} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{k}_2^2 \\ \mathbf{r}_4^0 &= x_{54} \mathbf{i}_4^0 = x_{54} \mathbf{R}_4^0 \mathbf{i}_4^4 = x_{54} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_4^4 \\ \mathbf{r}_5^0 &= z_{65} \mathbf{k}_5^0 = z_{65} \mathbf{R}_5^0 \mathbf{k}_5^5 = z_{65} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{k}_5^5 \\ \mathbf{r}_7^0 &= z_{87} \mathbf{k}_7^0 = z_{87} \mathbf{R}_7^0 \mathbf{k}_7^7 = z_{87} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7 \\ \mathbf{r}_8^0 &= -x_{98} \mathbf{i}_8^0 = -x_{98} \mathbf{R}_8^0 \mathbf{i}_8^8 = -x_{98} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8 \\ \mathbf{r}_{10}^0 &= y_{11,10} \mathbf{j}_{10}^0 = y_{11,10} \mathbf{R}_{10}^0 \mathbf{j}_{10}^{10} = y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \end{aligned}$$

Y definamos los desplazamientos virtuales asociados a cada matriz de rotación:

$$\delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21})) = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \quad (3.3.141)$$

$$\delta (\mathbf{R}_y(\theta_{43})) = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \quad (3.3.142)$$

$$\delta (\mathbf{R}_y(\theta_{76})) = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \delta \theta_{76} \quad (3.3.143)$$

$$\delta (\mathbf{R}_y(\theta_{10,9})) = \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{10,9})}{\partial \theta_{10,9}} \delta \theta_{10,9} \quad (3.3.144)$$

Finalmente calculemos los desplazamientos virtuales de estos vectores de posición:

$$\delta \mathbf{r}_0^0 = \delta (z_{10} \mathbf{k}_0^0) = \mathbf{0} \quad (3.3.145)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_2^0 &= \delta (z_{32} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{k}_2^2) \\ &= z_{32} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21})) \mathbf{k}_2^2 \\ &= z_{32} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{k}_2^2 \end{aligned} \quad (3.3.146)$$

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}_4^0 &= \delta (x_{54} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_4^4) \\
 &= x_{54} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{i}_4^4 \\
 &= x_{54} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21})) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_4^4 + x_{54} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \delta (\mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{i}_4^4 \\
 &= x_{54} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_4^4 + x_{54} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{i}_4^4
 \end{aligned} \tag{3.3.147}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}_5^0 &= \delta (z_{65} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{k}_5^5) \\
 &= z_{65} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{k}_5^5 \\
 &= z_{65} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21})) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{k}_5^5 + z_{65} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \delta (\mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{k}_5^5 \\
 &= z_{65} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{k}_5^5 + z_{65} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{k}_5^5
 \end{aligned} \tag{3.3.148}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}_7^0 &= \delta (z_{87} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7) \\
 &= z_{87} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76})) \mathbf{k}_7^7 \\
 &= z_{87} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21})) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7 + z_{87} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \delta (\mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7 \\
 &\quad + z_{87} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \delta (\mathbf{R}_x(\theta_{76})) \mathbf{k}_7^7 \\
 &= z_{87} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7 + z_{87} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7 \\
 &\quad + z_{87} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \delta \theta_{76} \right) \mathbf{k}_7^7
 \end{aligned} \tag{3.3.149}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}_8^0 &= \delta (-x_{98} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8) \\
 &= -x_{98} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76})) \mathbf{i}_8^8 \\
 &= -x_{98} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21})) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8 + (-x_{98}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \delta (\mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8 \\
 &\quad + (-x_{98}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \delta (\mathbf{R}_x(\theta_{76})) \mathbf{i}_8^8 \\
 &= -x_{98} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8 + (-x_{98}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8 \\
 &\quad + (-x_{98}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \delta \theta_{76} \right) \mathbf{i}_8^8
 \end{aligned} \tag{3.3.150}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}_{10}^0 &= \delta (y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10}) \\
 &= y_{11,10} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9})) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
 &= y_{11,10} \delta (\mathbf{R}_y(\theta_{21})) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} + y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \delta (\mathbf{R}_z(\theta_{43})) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
 &\quad + y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \delta (\mathbf{R}_x(\theta_{76})) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} + y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \delta (\mathbf{R}_z(\theta_{10,9})) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
 &= y_{11,10} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
 &\quad + y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_z(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
 &\quad + y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_x(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \delta \theta_{76} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10}
 \end{aligned}$$

$$+ y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{10,9})}{\partial \theta_{10,9}} \delta \theta_{10,9} \right) \mathbf{j}_{10}^{10} \quad (3.3.151)$$

Los componentes de fuerzas externas y momentos externos serán datos del sistema y vendrán dados por las condiciones de fuerza y momento deseados en el elemento terminal del mecanismo:

$$\mathbf{F}_{ext} = f_x \mathbf{i}_0^0 + f_y \mathbf{j}_0^0 + f_z \mathbf{k}_0^0 \quad (3.3.152)$$

$$\mathbf{M}_{ext} = M_x \mathbf{i}_0^0 + M_y \mathbf{j}_0^0 + M_z \mathbf{k}_0^0 \quad (3.3.153)$$

Y la expresión general de  $\delta \mathbf{Q}$  es:

$$\delta \mathbf{Q} = \sum_{j=1}^{n=4} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \quad (3.3.154)$$

Los torques involucrados son:

$$\tau_1^0 = \tau_1 \mathbf{j}_1^0 \quad (3.3.155)$$

$$\tau_2^0 = \tau_2 \mathbf{k}_3^0 = \tau_2 \mathbf{R}_3^0 \mathbf{k}_3^3 \quad (3.3.156)$$

$$\tau_3^0 = \tau_3 \mathbf{i}_6^0 = \tau_3 \mathbf{R}_6^0 \mathbf{i}_6^6 \quad (3.3.157)$$

$$\tau_4^0 = \tau_4 \mathbf{k}_9^0 = \tau_4 \mathbf{R}_9^0 \mathbf{k}_9^9 \quad (3.3.158)$$

Y los términos  $\delta \mathbf{Q}_i$  equivalen a:

Para el término  $\delta \mathbf{Q}_1$  tenemos:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}_1 &= \frac{\partial \omega_{20}^0}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{\partial \omega_{20}^0}{\partial \dot{q}_2} \delta q_2 + \frac{\partial \omega_{20}^0}{\partial \dot{q}_3} \delta q_3 + \frac{\partial \omega_{20}^0}{\partial \dot{q}_4} \delta q_4 \\ &= \frac{\partial \omega_{20}^0}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \omega_{20}^0}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} + \frac{\partial \omega_{20}^0}{\partial \dot{\theta}_{76}} \delta \theta_{76} + \frac{\partial \omega_{20}^0}{\partial \dot{\theta}_{10,9}} \delta \theta_{10,9} \end{aligned} \quad (3.3.159)$$

Y ya que  $\omega_{20}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0$  solo depende de  $\dot{\theta}_{21}$ , la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}_1 &= \frac{\partial \omega_{20}^0}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} \\ &= \frac{\partial \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} \\ &= \mathbf{j}_1^0 \delta \theta_{21} \end{aligned} \quad (3.3.160)$$

Para el término  $\delta \mathbf{Q}_2$  tenemos

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}_2 &= \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{q}_2} \delta q_2 + \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{q}_3} \delta q_3 + \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{q}_4} \delta q_4 \\ &= \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} + \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{\theta}_{76}} \delta \theta_{76} + \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{\theta}_{10,9}} \delta \theta_{10,9} \end{aligned} \quad (3.3.161)$$

Y ya que  $\omega_{40}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0$  solo depende de  $\dot{\theta}_{21}$  y  $\dot{\theta}_{43}$ , la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}_2 &= \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \omega_{40}^0}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} \\ &= \frac{\partial \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right)}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 \right)}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} \\ &= \mathbf{j}_1^0 \delta \theta_{21} + \mathbf{k}_3^0 \delta \theta_{43} \end{aligned} \quad (3.3.162)$$



Para el término  $\delta Q_3$  tenemos

$$\begin{aligned}\delta Q_3 &= \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{q}_2} \delta q_2 + \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{q}_3} \delta q_3 + \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{q}_4} \delta q_4 \\ &= \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} + \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{\theta}_{76}} \delta \theta_{76} + \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{\theta}_{10,9}} \delta \theta_{10,9}\end{aligned}\quad (3.3.163)$$

Y ya que  $\omega_{70}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0$  depende de  $\dot{\theta}_{21}$ ,  $\dot{\theta}_{43}$  y  $\dot{\theta}_{76}$ , la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}\delta Q_3 &= \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} + \frac{\partial \omega_{70}^0}{\partial \dot{\theta}_{76}} \delta \theta_{76} \\ &= \frac{\partial \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right)}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right)}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} \\ &\quad + \frac{\partial \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 \right)}{\partial \dot{\theta}_{76}} \delta \theta_{76} \\ &= \mathbf{j}_1^0 \delta \theta_{21} + \mathbf{k}_3^0 \delta \theta_{43} + \mathbf{i}_6^0 \delta \theta_{76}\end{aligned}\quad (3.3.164)$$

Para el término  $\delta Q_4$  tenemos

$$\begin{aligned}\delta Q_4 &= \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{q}_2} \delta q_2 + \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{q}_3} \delta q_3 + \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{q}_4} \delta q_4 \\ &= \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} + \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{\theta}_{76}} \delta \theta_{76} + \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{\theta}_{10,9}} \delta \theta_{10,9}\end{aligned}\quad (3.3.165)$$

Y ya que  $\omega_{10,0}^0 = \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0$  depende de  $\dot{\theta}_{21}$ ,  $\dot{\theta}_{43}$ ,  $\dot{\theta}_{76}$  y  $\dot{\theta}_{10,9}$ , la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}\delta Q_4 &= \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} + \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{\theta}_{76}} \delta \theta_{76} + \frac{\partial \omega_{10,0}^0}{\partial \dot{\theta}_{10,9}} \delta \theta_{10,9} \\ &= \frac{\partial \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right)}{\partial \dot{\theta}_{21}} \delta \theta_{21} + \frac{\partial \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right)}{\partial \dot{\theta}_{43}} \delta \theta_{43} \\ &\quad + \frac{\partial \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right)}{\partial \dot{\theta}_{76}} \delta \theta_{76} + \frac{\partial \left( \dot{\theta}_{21} \mathbf{j}_1^0 + \dot{\theta}_{43} \mathbf{k}_3^0 + \dot{\theta}_{76} \mathbf{i}_6^0 + \dot{\theta}_{10,9} \mathbf{k}_9^0 \right)}{\partial \dot{\theta}_{10,9}} \delta \theta_{10,9} \\ &= \mathbf{j}_1^0 \delta \theta_{21} + \mathbf{k}_3^0 \delta \theta_{43} + \mathbf{i}_6^0 \delta \theta_{76} + \mathbf{k}_9^0 \delta \theta_{10,9}\end{aligned}\quad (3.3.166)$$

Y además  $\delta Q_4 = \delta Q_P$ .

Antes de seguir avanzando escribiremos la expresión que define a  $\delta \mathbf{r}_P^0$ :

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{r}_P^0 &= \delta \mathbf{r}_0^0 + \delta \mathbf{r}_2^0 + \delta \mathbf{r}_4^0 + \delta \mathbf{r}_5^0 + \delta \mathbf{r}_7^0 + \delta \mathbf{r}_8^0 + \delta \mathbf{r}_{10}^0 \\
&= \mathbf{0} + z_{32} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{k}_2^2 + x_{54} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_4^4 + x_{54} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{i}_4^4 \\
&\quad + z_{65} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{k}_5^5 + z_{65} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{k}_5^5 \\
&\quad + z_{87} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7 + z_{87} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7 \\
&\quad + z_{87} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \delta \theta_{76} \right) \mathbf{k}_7^7 + (-x_{98}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8 \\
&\quad + (-x_{98}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8 + (-x_{98}) \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \delta \theta_{76} \right) \mathbf{i}_8^8 \\
&\quad + y_{11,10} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
&\quad + y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \delta \theta_{43} \right) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
&\quad + y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \delta \theta_{76} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
&\quad + y_{11,10} \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{10,9})}{\partial \theta_{10,9}} \delta \theta_{10,9} \right) \mathbf{j}_{10}^{10}
\end{aligned} \tag{3.3.167}$$

Definamos los siguientes términos con el fin de simplificar la notación de la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \right) \mathbf{k}_2^2 \\
b_2 &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{i}_4^4 \\
b_3 &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \right) \mathbf{i}_4^4 \\
b_4 &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{k}_5^5 \\
b_5 &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \right) \mathbf{k}_5^5 \\
b_6 &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7 \\
b_7 &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \right) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{k}_7^7 \\
b_8 &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \right) \mathbf{k}_7^7 \\
b_9 &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8 \\
b_{10} &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \right) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{i}_8^8 \\
b_{11} &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \right) \mathbf{i}_8^8 \\
b_{12} &= \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{21})}{\partial \theta_{21}} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
b_{13} &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{43})}{\partial \theta_{43}} \right) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
b_{14} &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{76})}{\partial \theta_{76}} \right) \mathbf{R}_z(\theta_{10,9}) \mathbf{j}_{10}^{10} \\
b_{15} &= \mathbf{R}_y(\theta_{21}) \mathbf{R}_z(\theta_{43}) \mathbf{R}_x(\theta_{76}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_y(\theta_{10,9})}{\partial \theta_{10,9}} \right) \mathbf{j}_{10}^{10}
\end{aligned}$$

Y sustituyendo estas definiciones en la expresión de  $\delta \mathbf{r}_P^0$  tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{r}_P^0 &= z_{32}(b_1) \delta \theta_{21} + x_{54}(b_2) \delta \theta_{21} + x_{54}(b_3) \delta \theta_{43} + z_{65}(b_4) \delta \theta_{21} + z_{65}(b_5) \delta \theta_{43} \\
&\quad + z_{87}(b_6) \delta \theta_{21} + z_{87}(b_7) \delta \theta_{43} + z_{87}(b_8) \delta \theta_{76} + (-x_{98})(b_9) \delta \theta_{21} + (-x_{98})(b_{10}) \delta \theta_{43} \\
&\quad + (-x_{98})(b_{11}) \delta \theta_{76} + y_{11,10}(b_{12}) \delta \theta_{21} + y_{11,10}(b_{13}) \delta \theta_{43} + y_{11,10}(b_{14}) \delta \theta_{76} \\
&\quad + y_{11,10}(b_{15}) \delta \theta_{10,9}
\end{aligned} \tag{3.3.168}$$

Y factorizando alrededor de los desplazamientos virtuales:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{r}_P^0 &= (z_{32}(b_1) + x_{54}(b_2) + z_{65}(b_4) + z_{87}(b_6) + (-x_{98})(b_9) + y_{11,10}(b_{12})) \delta \theta_{21} \\
&\quad + (x_{54}(b_3) + z_{65}(b_5) + z_{87}(b_7) + (-x_{98})(b_{10}) + y_{11,10}(b_{13})) \delta \theta_{43} \\
&\quad + (z_{87}(b_8) + (-x_{98})(b_{11}) + y_{11,10}(b_{14})) \delta \theta_{76} \\
&\quad + (y_{11,10}(b_{15})) \delta \theta_{10,9}
\end{aligned} \tag{3.3.169}$$

Reduzcamos la expresión previa definiendo:

$$\begin{aligned} b_{16} &= z_{32}(b_1) + x_{54}(b_2) + z_{65}(b_4) + z_{87}(b_6) + (-x_{98})(b_9) + y_{11,10}(b_{12}) \\ b_{17} &= x_{54}(b_3) + z_{65}(b_5) + z_{87}(b_7) + (-x_{98})(b_{10}) + y_{11,10}(b_{13}) \\ b_{18} &= z_{87}(b_8) + (-x_{98})(b_{11}) + y_{11,10}(b_{14}) \\ b_{19} &= y_{11,10}(b_{15}) \end{aligned}$$

Para finalmente tener la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{r}_P^0 = b_{16} \delta \theta_{21} + b_{17} \delta \theta_{43} + b_{18} \delta \theta_{76} + b_{19} \delta \theta_{10,9} \quad (3.3.170)$$

Desarrollemos la expresión general dada en (3.3.138):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W} &= \mathbf{Q}_{EL} \delta \mathbf{q} = (\mathbf{F}_{ext})^T (b_{16} \delta \theta_{21} + b_{17} \delta \theta_{43} + b_{18} \delta \theta_{76} + b_{19} \delta \theta_{10,9}) \\ &\quad + (\tau_1 \mathbf{j}_1^0)^T (\mathbf{j}_1^0 \delta \theta_{21}) \\ &\quad + (\tau_2 \mathbf{R}_3^0 \mathbf{k}_3^0)^T (\mathbf{j}_1^0 \delta \theta_{21} + \mathbf{k}_3^0 \delta \theta_{43}) \\ &\quad + (\tau_3 \mathbf{R}_6^0 \mathbf{i}_6^0)^T (\mathbf{j}_1^0 \delta \theta_{21} + \mathbf{k}_3^0 \delta \theta_{43} + \mathbf{i}_6^0 \delta \theta_{76}) \\ &\quad + (\tau_4 \mathbf{R}_9^0 \mathbf{k}_9^0)^T (\mathbf{j}_1^0 \delta \theta_{21} + \mathbf{k}_3^0 \delta \theta_{43} + \mathbf{i}_6^0 \delta \theta_{76} + \mathbf{k}_9^0 \delta \theta_{10,9}) \\ &\quad + (\mathbf{M}_{ext})^T (\mathbf{j}_1^0 \delta \theta_{21} + \mathbf{k}_3^0 \delta \theta_{43} + \mathbf{i}_6^0 \delta \theta_{76} + \mathbf{k}_9^0 \delta \theta_{10,9}) \end{aligned} \quad (3.3.171)$$

Y expresando lo anterior en forma matricial tenemos:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W} &= [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4] \begin{bmatrix} (\mathbf{j}_1^0)^T \mathbf{j}_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{R}_3^0 \mathbf{k}_3^0)^T \mathbf{j}_1^0 & (\mathbf{R}_3^0 \mathbf{k}_3^0)^T \mathbf{k}_3^0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{R}_6^0 \mathbf{i}_6^0)^T \mathbf{j}_1^0 & (\mathbf{R}_6^0 \mathbf{i}_6^0)^T \mathbf{k}_3^0 & (\mathbf{R}_6^0 \mathbf{i}_6^0)^T \mathbf{i}_6^0 & 0 \\ (\mathbf{R}_9^0 \mathbf{k}_9^0)^T \mathbf{j}_1^0 & (\mathbf{R}_9^0 \mathbf{k}_9^0)^T \mathbf{k}_3^0 & (\mathbf{R}_9^0 \mathbf{k}_9^0)^T \mathbf{i}_6^0 & (\mathbf{R}_9^0 \mathbf{k}_9^0)^T \mathbf{k}_9^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta_{21} \\ \delta \theta_{43} \\ \delta \theta_{76} \\ \delta \theta_{10,9} \end{bmatrix} \\ &\quad + [\mathbf{F}_{ext}^T \quad \mathbf{M}_{ext}^T] \begin{bmatrix} b_{16} & b_{17} & b_{18} & b_{19} \\ \mathbf{j}_1^0 & \mathbf{k}_3^0 & \mathbf{i}_6^0 & \mathbf{k}_9^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta_{21} \\ \delta \theta_{43} \\ \delta \theta_{76} \\ \delta \theta_{10,9} \end{bmatrix} \\ &= (\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{J}_\tau) \delta \mathbf{q} + (\mathbf{F}^T \mathbf{J}_F) \delta \mathbf{q} \\ &= (\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{J}_\tau + \mathbf{F}^T \mathbf{J}_F) \delta \mathbf{q} \\ &= \mathbf{Q}_{EL}^T \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.3.172)$$

Donde:

$$\mathbf{Q}_{EL} = \mathbf{J}_\tau^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_F^T \mathbf{F} \quad (3.3.173)$$

Reescribamos cada uno de los componentes de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= D_{1j} \ddot{\mathbf{q}} + V_{1j} \dot{\mathbf{q}} + D_{2j} \ddot{\mathbf{q}} + V_{2j} \dot{\mathbf{q}} + D_{3j} \ddot{\mathbf{q}} + V_{3j} \dot{\mathbf{q}} + D_{4j} \ddot{\mathbf{q}} + V_{4j} \dot{\mathbf{q}} + D_{Cj} \ddot{\mathbf{q}} + V_{Cj} \dot{\mathbf{q}} \\ &= (D_{1j} + D_{2j} + D_{3j} + D_{4j} + D_{Cj}) \ddot{\mathbf{q}} + (V_{1j} + V_{2j} + V_{3j} + V_{4j} + V_{Cj}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.3.174)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial q_j} &= \frac{\partial L_1}{\partial q_j} + \frac{\partial L_2}{\partial q_j} + \frac{\partial L_3}{\partial q_j} + \frac{\partial L_4}{\partial q_j} + \frac{\partial L_C}{\partial q_j} \\
 &= \mathbf{V}'_{1j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{1j} + \mathbf{V}'_{2j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{2j} + \mathbf{V}'_{3j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{3j} + \mathbf{V}'_{4j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{4j} + \mathbf{V}'_{Cj} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{Cj} \\
 &= (\mathbf{V}'_{1j} + \mathbf{V}'_{2j} + \mathbf{V}'_{3j} + \mathbf{V}'_{4j} + \mathbf{V}'_{Cj}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_{1j} + \mathbf{C}_{2j} + \mathbf{C}_{3j} + \mathbf{C}_{4j} + \mathbf{C}_{Cj})
 \end{aligned} \tag{3.3.175}$$

Desarrollemos el lado izquierdo de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= (D_{1j} + D_{2j} + D_{3j} + D_{4j} + D_{Cj}) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{V}_{1j} + \mathbf{V}_{2j} + \mathbf{V}_{3j} + \mathbf{V}_{4j} + \mathbf{V}_{Cj}) \dot{\mathbf{q}} \\
 &\quad - (\mathbf{V}'_{1j} + \mathbf{V}'_{2j} + \mathbf{V}'_{3j} + \mathbf{V}'_{4j} + \mathbf{V}'_{Cj}) \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{C}_{1j} + \mathbf{C}_{2j} + \mathbf{C}_{3j} + \mathbf{C}_{4j} + \mathbf{C}_{Cj}) \\
 &= (D_{1j} + D_{2j} + D_{3j} + D_{4j} + D_{Cj}) \ddot{\mathbf{q}} \\
 &\quad + (\mathbf{V}_{1j} + \mathbf{V}_{2j} + \mathbf{V}_{3j} + \mathbf{V}_{4j} + \mathbf{V}_{Cj} - \mathbf{V}'_{1j} - \mathbf{V}'_{2j} - \mathbf{V}'_{3j} - \mathbf{V}'_{4j} - \mathbf{V}'_{Cj}) \dot{\mathbf{q}} \\
 &\quad + (-\mathbf{C}_{1j} - \mathbf{C}_{2j} - \mathbf{C}_{3j} - \mathbf{C}_{4j} - \mathbf{C}_{Cj}) \\
 &= \mathcal{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{V}_j \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}_j
 \end{aligned} \tag{3.3.176}$$

Recordemos que el lado derecho de la ecuación de Euler-Lagrange es  $Q_j$ , por lo que, igualando este término con la expresión desarrollada previamente tenemos:

$$\mathcal{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{V}_j \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}_j = Q_j$$

Escribiendo la ecuación anterior cuatro veces, una para cada  $j = 1, 2, 3, 4$  obtenemos cuatro ecuaciones escalares, las cuales se pueden ordenar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \\ \mathcal{D}_3 \\ \mathcal{D}_4 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_3 \\ \mathcal{V}_4 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 \\ \mathcal{C}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} \tag{3.3.177}$$

$$\mathcal{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{V}_j \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}_j = \mathbf{Q}_{EL}$$

$$\mathcal{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{V}_j \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}_j = \mathbf{J}_\tau^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}$$

$$\mathcal{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{V}_j \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}_j - \mathbf{J}_F^T \mathbf{F} = \mathbf{J}_\tau^T \boldsymbol{\tau}$$

$$\mathbf{J}_\tau^{-T} \mathcal{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_\tau^{-T} \mathcal{V}_j \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_\tau^{-T} (\mathcal{C}_j - \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}) = \boldsymbol{\tau}$$

Definiendo:

$$\mathbb{D} = \mathbf{J}_\tau^{-T} \mathcal{D}_j$$

$$\mathbb{V} = \mathbf{J}_\tau^{-T} \mathcal{V}_j$$

$$\mathbb{C} = \mathbf{J}_\tau^{-T} (\mathcal{C}_j - \mathbf{J}_F^T \mathbf{F})$$

Finalmente llegamos a la expresión final:

$$\mathbb{D} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{C} = \boldsymbol{\tau}$$

Por lo que hemos llegado a una expresión que permite calcular los pares necesarios para una posición (o trayectoria) deseada. Esta expresión deberá evaluarse para una sucesión de puntos que correspondan a la trayectoria que se desea que siga la prótesis.

## Capítulo 4

# Conceptos de procesamiento de señales

En este capítulo se establecen los conceptos de procesamiento de señales necesarios para el tratamiento de las señales mioeléctricas y se basan en considerar a la señal mioeléctrica como una señal de naturaleza aleatoria limitada en banda con una distribución Gaussiana y con rango de frecuencias desde DC hasta aproximadamente 500 Hz [25]. Se definen los conceptos de promedios conjuntos, proceso Gaussiano, estacionaridad, ergodicidad, consistencia de un estimador y densidad espectral de potencias. Estos conceptos permiten hacer consideraciones durante el procesamiento de señales mioeléctricas.

### 4.1 Preliminares

Analizar señales es un proceso que involucra muchos factores; desde la experiencia del personal involucrado hasta el conocimiento que se tiene del proceso. Cuando se inicia el análisis de una señal derivada de un fenómeno del cual se tienen pocos conocimientos sobre la forma en la cual se origina y la manera en que los factores involucrados participan en el fenómeno es necesario hacer una serie de consideraciones que delimiten el problema y permitan comenzar a realizar un análisis. Así, la misma mecánica será utilizada al realizar el procesamiento de señales mioeléctricas, cuyo fenómeno que le da origen no está entendido en su totalidad y la teoría más aceptada es la mencionada en la sección 1.4. Es posible comenzar el procesamiento utilizando herramientas del mundo determinístico, para lo cual se hace uso de técnicas clásicas como el análisis de Fourier, el uso de sistemas LTI y filtros. Si se tiene información acerca de la naturaleza de la señal en cuestión, es posible introducir esta nueva información haciendo usos técnicas más elaboradas que utilicen esta información para obtener características relevantes de la señal y más cercanas a la realidad. En el caso de la señal mioeléctrica, los factores involucrados poseen ciertas características que permiten hacer la consideración de que sea de naturaleza aleatoria, debido a esto, y para fines de esta tesis, se partirá del enfoque aleatorio y se dejara a un lado el enfoque determinístico, aunque, como veremos más adelante, las estructuras determinísticas aún son gran utilidad al tratar señales aleatorias.

Así, en un segundo nivel, se considerará a la señal mioeléctrica como uno de naturaleza aleatoria pero con ciertas características estadísticas, de tal manera que sea un proceso estacionario en sentido amplio. Finalmente en otro nivel se considerara a la señal mioeléctrica como un proceso no estacionario, para la cual se extraerá información en cada instante del tiempo haciendo uso de una estructura de filtro adaptable. A continuación se presentan los conceptos del procesamiento que son de utilidad al analizar señales aleatorias cuyas características serán consideradas en la señal mioeléctrica.

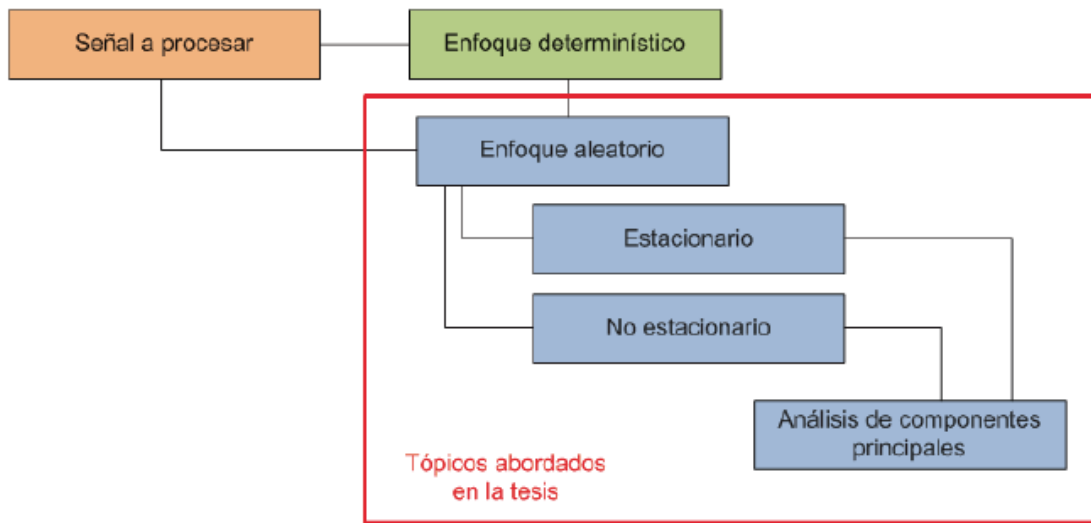


Figura 4.1: Temas abordados en la tesis.

#### 4.1 Promedios de conjuntos

Ya que una señal aleatoria es una secuencia indexada de de variables aleatorias podemos calcular la secuencia:

$$m_x(n) = E \{x(n)\} \quad (4.2.1)$$

conocido como el valor esperado del proceso. De manera similar, calculando la varianza de cada variable aleatoria en la secuencia:

$$\sigma_x^2(n) = E \left\{ |x(n) - m_x(n)|^2 \right\} \quad (4.2.2)$$

Define la varianza del proceso. Estos valores estadísticos representan promedios conjuntos y ambos, en general, dependen de  $n$  [16].

Dos promedios conjuntos de gran importancia en el análisis de señales aleatorias son la autocovarianza:

$$c_x(k, l) = E \left\{ [x(k) - m_x(k)] [x(l) - m_x(l)]^* \right\} \quad (4.2.3)$$

y la autocorrelación:

$$r_x(k, l) = E \{x(k)x(l)^*\} \quad (4.2.4)$$

que relacionan las variables aleatorias  $x(k)$  y  $x(l)$ . Notemos que si  $k = l$  la autocovarianza es equivalente a la varianza.

La autocorrelación y la autocovarianza proveen información acerca del grado de dependencia linear entre dos variables aleatorias. Por ejemplo, si  $c_x(k, l) = 0$  para  $k \neq l$ , entonces las variables aleatorias  $x(k)$  y  $x(l)$  son no correlacionadas y el conocimiento de una no es de utilidad para estimar a la otra mediante un estimador lineal [16].

En la mayoría de las ocasiones no se tiene acceso a todos las realizaciones de un proceso y estas medidas estadísticas no se conocen, por lo que es necesario estimarlas. Más adelante se establecerán estimadores de indicadores estadísticos de importancia en análisis. Además, como se abordará posteriormente, la autocorrelación juega un papel determinante para estimar el la densidad espectral de potencias de un procesos aleatorios con ciertas características.

### 4.3 Proceso estacionario

La primera división natural de todas las señales aleatorias es en las categorías estacionarias y no estacionarias. Las señales estacionarias son constantes en sus parámetros estadísticos sobre el tiempo. Si uno observa una señal estacionaria, durante unos momentos y después espera un periodo determinado y vuelve a observar, esencialmente se vería igual, eso es, su nivel general sería idéntico y su distribución de amplitud y su desviación estándar serían las mismas.

Un proceso estacionario (o proceso estrictamente estacionario) es un proceso estocástico cuya distribución de probabilidad en un instante de tiempo fijo o una posición fija es la misma para todos los instantes de tiempo o posiciones. En consecuencia, parámetros tales como la media y la varianza, si existen, no varían a lo largo del tiempo o la posición.

Si la función de densidad de primer orden de un proceso aleatorio  $x(n)$  es independiente del tiempo, esto es:

$$f_{x(n)}(\alpha) = f_{x(n+k)}(\alpha) \quad (4.3.1)$$

para todo  $k$ , entonces el proceso se dice que es estacionario en primer orden. Para un proceso de este tipo, las estadísticas de primer orden serán independientes del tiempo. Por ejemplo, el valor esperado será constante:

$$m_x(n) = m_x \quad (4.3.2)$$

y lo mismo se cumplirá para la varianza:

$$\sigma_x^2(n) = \sigma_x^2 \quad (4.3.3)$$

De una manera similar se dice que un proceso es estacionario en segundo orden si la función de densidad conjunta de segundo orden:  $f_{x(n_1),x(n_2)}(\alpha_1, \alpha_2)$  depende solo de la diferencia  $n_2 - n_1$ , y no de los tiempos individuales. De manera equivalente, el proceso  $x(n)$  es estacionario de segundo orden si, para cualquier  $k$ , el proceso  $x(n)$  y  $x(n+k)$  tienen la misma función de densidad conjunta de segundo orden:

$$f_{x(n_1),x(n_2)}(\alpha_1, \alpha_2) = f_{x(n_1+k),x(n_2+k)}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (4.3.4)$$

Si un proceso es estacionario en segundo orden, también será estacionario en primer orden. Además los procesos estacionarios de segundo orden tienen medidas estadísticas que son invariantes a un desplazamiento en el tiempo, por ejemplo la secuencia de correlación. Por lo que la correlación entre las variables aleatorias  $x(n)$  y  $x(l)$  depende solo de la diferencia  $k - l$ . Esta diferencia se llama retraso (*lag*).

Continuando con funciones de densidad de probabilidad conjunta de orden superior, un proceso es *estacionario de orden  $L$*  si el proceso  $x(n)$  y  $x(n+k)$  tienen la misma densidad conjunta de orden  $L$ . Finalmente, un proceso que es estacionario para todos los órdenes  $L > 0$  es *estacionario en el sentido estricto*.

### 4.3 Estacionaridad en el sentido amplio

Una forma más débil de estacionaridad de uso común en procesamiento de señales es la llamada estacionaridad débil o estacionaridad en sentido amplio (WSS). Un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio solo requiere que el primer y segundo momento no varíen con respecto al tiempo. Todo proceso estacionario en sentido estricto que tenga media y varianza definidas, es también estacionario en sentido amplio [16].

De esta manera, un proceso aleatorio de tiempo continuo  $x(t)$  que sea estacionario en sentido amplio tiene las siguientes restricciones sobre su función media:

$$E \{x(t)\} = m_x(t) = m_x(t + \tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (4.3.5)$$



y función de correlación:

$$E \{x(t_1)x(t_2)\} = R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 + \tau, t_2 + \tau) = R_x(t_1 - t_2, 0) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (4.3.6)$$

La primera propiedad implica que su función que define su valor esperado  $m_x(t)$  debe ser constante. La segunda propiedad implica que la función de correlación depende solo de la *diferencia* entre  $t_1$  y  $t_2$ , y solo necesita ser indexada por una única variable en lugar de dos. Así, en lugar de escribir:

$$R_x(t_1 - t_2, 0) \quad (4.3.7)$$

normalmente se abrevia notando de la siguiente manera:

$$R_x(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (4.3.8)$$

Por lo que un proceso estacionario en el sentido amplio (WSS) es aquel que cumple las siguientes 3 características:

1. La media (o valor esperado) del proceso es constante
2. La autocorrelación  $r_x(k, l)$ , depende solo de la diferencia  $k - l$
3. La varianza del proceso es finita,  $c(x) < \infty$

Al procesar señales aleatorias estacionarias en sentido amplio mediante filtros lineales invariantes en el tiempo (LTI), resulta útil pensar la función de autocorrelación como un operador lineal. Dado que es un operador circular (pues depende solo de la diferencia entre dos argumentos), sus funciones propias son las exponenciales complejas de Fourier. Más aún, dado que las funciones propias de operadores LTI son también exponenciales complejas, el procesado LTI de señales aleatorias estacionarias en sentido amplio es altamente tratable: todos los cálculos pueden realizarse en el dominio de la frecuencia. Así, asumir estacionaridad en sentido amplio resulta muy común en algoritmos de procesamiento de señales [16].

Propiedades de un proceso WSS:

1. **Simetría:** La secuencia de correlación de un proceso aleatorio WSS es una función simétrica conjugada:

$$r_x(k) = r_x^*(-k) \quad (4.3.9)$$

Para un proceso real, la secuencia de correlación es simétrica:

$$r_x(k) = r_x(-k) \quad (4.3.10)$$

2. **Valor cuadrático medio:** La autocorrelación de un proceso aleatorio WSS con un valor de “lag” de  $k = 0$ , es igual al valor cuadrático medio del proceso:

$$r_x(0) = E \{|x(n)|^2\} \geq 0 \quad (4.3.11)$$

3. **Valor máximo:** La magnitud de la autocorrelación de un proceso aleatorio WSS con un valor de “lag”  $k$  esta limitado superiormente por su valor con “lag” de  $k = 0$ :

$$r_x(0) \geq |r_x(k)|^2 \quad (4.3.12)$$

4. **Periodicidad:** Si la autocorrelación de un proceso aleatorio WSS es tal que:

$$r_x(k_0) = |r_x(0)|^2 \quad (4.3.13)$$

Para algún valor de  $k_0$ , entonces  $r_x(0)$  es periódico con periodo  $k_0$ . Además:

$$E \{|x(n) - x(n - k_0)|^2\} = 0 \quad (4.3.14)$$

$x(n)$  se dice que es cuadrática media periódica.

#### 4.4 Proceso de tipo Gaussiano

Consideremos un proceso de naturaleza aleatoria como la sucesión de  $n$  variables aleatorias, expresando lo anterior mediante un vector  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  de  $n$  variables aleatorias de valores reales. Decimos que  $\mathbf{x}$  es un vector aleatorio de tipo Gaussiano y las variables aleatoria  $x_i$  se dicen que poseen una distribución conjunta Gaussiana si la función de densidad de probabilidad conjunta de las  $n$  variables estocásticas es:

$$f_x(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{C}_x|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x)^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x)} \quad (4.4.1)$$

Donde  $\mathbf{m}_x = [m_1, m_2, \dots, m_n]^T$  es el vector que contiene los valores esperados de  $x_i$ :

$$m_i = E \{x_i\} \quad (4.4.2)$$

$\mathbf{C}_x$  es una matrix simétrica positiva definida con elementos  $c_{ij}$  los cuales son las covarianzas entre  $x_i$  y  $x_j$ :

$$c_{ij} = E \{(x_i - m_i)(x_j - m_j)\} \quad (4.4.3)$$

Y  $|\mathbf{C}_x|$  es el determinante de la matriz de covarianza.

Un proceso discreto aleatorio  $x(n)$  se dice que es Gaussiano si cada colección finita de muestras de  $x(n)$  son Gaussianamente conjuntas. Notemos que un proceso Gaussiano está completamente definido una vez que el vector de valores esperados y la matriz de covarianza son conocidos. Los procesos Gaussianos son de gran interés, tanto teórico como práctico, ya que muchos fenómenos encontrados en aplicaciones son Gaussianos o aproximadamente Gaussianos como resultado del teorema del límite central [16].

#### 4.4 Ergodicidad

El valor esperado y la autocorrelación de un proceso aleatorios son ejemplos de promedios conjuntos que describen los promedios estadísticos del proceso sobre todo el conjunto de posibles de valores que presente la señal aleatoria. Aunque estos promedios conjuntos son requeridos en problemas de modelado, estimación, detección y filtrado, generalmente son desconocidos a priori, y, en muchos caso, no es posible determinarlos debido a que se desconoce todo el conjunto de señales posibles de un proceso aleatorio. Por lo tanto, estimar estos promedios de una sola realización de un proceso aleatorio es una labor importante dentro del procesamiento de señales. Como observaremos mas adelante, nuestro objetivo es poder determinar estos promedios conjuntos haciendo usos de promedios temporales obtenidos de una realización de una señal aleatoria.

Si el valor promedio  $\hat{m}_x(N)$  de un proceso WSS converge a  $m_x$  en el sentido del valor cuadrático medio, entonces se dice que es ergódico en el valor promedio [16]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{m}_x(N) = m_x \quad (4.5.1)$$

Para que se cumpla lo anterior es necesario y suficiente que:

1. El promedio sea asintóticamente no sesgado:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{\hat{m}_x(N)\} = m_x$$

2. La varianza del estimado tienda a cero conforme el numero de muestras disponibles para el calculo  $N$  tienda a infinito:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Var \{\hat{m}_x(N)\} = 0$$

Si  $x(n)$  es un proceso WSS con una secuencia de autocovarianza  $c_x(k)$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $x(n)$  sea *ergódico en el valor promedio* es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} c_x(k) = 0$$

Otra condición suficiente es que  $c_x(0) < \infty$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_x(k) = 0$$

Si consideramos ahora un proceso Gaussiano estacionario en sentido amplio, una condición necesaria y suficiente con autocovarianza  $c_x(k)$  para que sea ergódico en la autocorrelación es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} c_x^2(k) = 0$$

Claramente, en la mayoría de los problemas, determinar si un proceso es ergódico no es práctico, por lo que cuando al afrontar un problema es necesario el conocimiento del valor esperado, la autocorrelación u otro promedio conjunto, se asume que el proceso es ergódico y los promedios temporales son utilizados. El que esta consideración sea o no adecuada será determinado por el desempeño del algoritmo que use este estimado [16].

#### 4.6. Consistencia de un estimador

Existen muchos ejemplos en el área de procesamiento de señales y en otros campos de la ciencia en los cuales es necesario estimar una serie de parámetros desconocidos basados en un conjunto de observaciones de una variable aleatoria. Estos parámetros estimados serán función de las observaciones (que son aleatorias), por lo que los estimados también serán variables aleatorias. Por lo que para poder clasificar la efectividad de un estimador es necesario caracterizar sus propiedades estadísticas. Las dos propiedades estadísticas que usaremos para establecer esta efectividad serán el sesgo y la varianza.

La diferencia entre el valor esperado del estimado  $\hat{\theta}_N$  y su valor actual  $\theta$  se llama sesgo  $B$  (bias):

$$B = \theta - E \{ \hat{\theta}_N \}$$

Aquí, el estimado  $\hat{\theta}_N$  es una función de  $N$  variables aleatorias disponibles. Podemos observar que si el sesgo  $B$  es nulo tenemos que el estimado es igual al valor verdadero y el estimado se dice que es *no sesgado* (unbiased). Si  $B \neq 0$ , entonces  $\hat{\theta}$  se dice que es *sesgado* (biased). Si un estimado es sesgado pero el sesgo tiende a cero conforme el número de observaciones tiende a infinito:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\theta}_N \} = \theta$$

En este caso el estimado es *asintóticamente no sesgado*. En general es deseado que un estimador sea no sesgado o asintóticamente no sesgado.

Para que el estimador de un parámetro converga, en cierto sentido, a su verdadero valor es necesario que la varianza del estimado tienda a cero conforme el número de observaciones tienda a infinito:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Var \{ \hat{\theta}_N \} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left| \hat{\theta}_N - E \{ \hat{\theta}_N \} \right|^2 \right\} = 0$$

Si  $\hat{\theta}_N$  es no sesgado,  $E\{\hat{\theta}_N\} = \theta$  y debido a la desigualdad de Tchebycheff [26] tenemos que para cualquier  $\epsilon > 0$ :

$$Pr\left\{\left|\hat{\theta}_N - \theta\right| \geq \epsilon\right\} \leq \frac{Var\left\{\hat{\theta}_N\right\}}{\epsilon^2}$$

Por lo que, si la varianza tiende a cero conforme  $N$  tiende a infinito, entonces la probabilidad de que  $\hat{\theta}_N$  difiera en mas de  $\epsilon$  del valor verdadero tenderá a cero. En este caso, se dice que  $\hat{\theta}_N$  converge a  $\theta$  con probabilidad 1[16].

Otra forma de convergencia, aún mas fuerte que la convergencia con probabilidad 1 es la denominada convergencia del valor esperado cuadrático (mean-square convergence), un estimado  $\hat{\theta}_N$  se dice que posee este tipo de convergencia si:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\left|\hat{\theta}_N - \theta\right|^2\right\} = 0$$

Finalmente, un estimador es consistente si converge, en algún sentido, al verdadero valor del parámetro, dependiendo de la forma de convergencia que es usada el termino consistencia tiene diferentes definiciones [28]. Para fines de este documento nos referiremos a que un estimador es consistente si es asintóticamente no sesgado y tiene una varianza que tiende a cero conforme se incorporan más datos (el número de datos disponibles tiende a infinito) para su estimación [16].

#### 4.7. Densidad espectral de potencias

Así como lo es de importante el análisis de Fourier como herramienta de análisis y descripción de señales determinísticas, también tiene un rol importante en el análisis de procesos aleatorios, sin embargo, ya que una proceso aleatorio es un conjunto de señales, no es posible calcular simplemente la transformada de Fourier del proceso mismo. Sin embargo, es posible establecer una representación en el dominio de la frecuencia si expresamos la transformada de Fourier en función de un promedio conjunto [16]. En el caso determinístico, la relación de cambio es usualmente medida mediante una transformada de Fourier, señales con alto contenido frecuencial presentan fluctuaciones rápidas en el tiempo mientras que señales con bajo contenido frecuencial exhiben variaciones lentas en el tiempo. Para procesos WSS estamos interesados en la potencia existente en las diferentes frecuencias. En particular se introduce el concepto de densidad espectral de potencias (PSD) , la cual cuantifica la distribución de potencia con respecto a la frecuencia. La PSD provee una medida de potencia promedio dentro una banda de frecuencias. Así, para encontrar la potencia promedio de un proceso aleatorio en una banda frecuencial debemos encontrar el área bajo la curva de PSD [24]. Como veremos más adelante, existen diversas maneras de estimar la densidad de potencias, esto se explicará con más detalle en el capítulo de estimación espectral.

Una manera de estimar la densidad espectral de potencias es haciendo uso de la secuencia de autocorrelación en el caso de un proceso WSS, ya que provee una descripción temporal del momento de segundo orden del proceso. Por lo que tomando la transformada de Fourier de la secuencia de autocorrelación encontramos la PSD.

#### 4.8. Ventaneo

Una herramienta de que se utiliza para establecer el PSD de una señal estacionaria, y que es posible utilizar para analizar señales no estacionarias es el ventaneo. El fin de esta estrategia es analizar la evolución temporal del contenido frecuencial existente en cada ventana, dentro de la cual se considera a la señal estacionaria, así el resultado es una sucesión de PSDs que corresponden al contenido frecuencial dentro de cada ventana.

El ventaneo consiste en dividir a la señal en trozos que incluyan un número determinado de muestras, cada uno de estos trozos se denomina ventanas y puede pensarse como el resultado de aplicar a la señal una función ventana que mantenga los valores durante el intervalo que corresponde a los valores que posee el trozo de señal, mientras que los valores fuera de este intervalo se vuelven nulos, esta técnica puede utilizar ventanas con o sin traslape de muestras y además también puede incluir ventanas de naturaleza impulsiva que reduzcan la varianza de los estimados espectrales reduciendo la contribución de los extremos de la ventana. Esta estrategia permite observar si existe cierto grado de estacionaridad en la señal, además de que permite observar la variación temporal del contenido frecuencial de la señal analizada y poder recomendar el tamaño de la ventana en la cual se considera a la señal mioeléctrica como estacionaria ya que para cada ventana se puede calcular el contenido de frecuencias existentes. Cabe destacar que aunque mediante esta técnica es posible observar la evolución temporal del contenido frecuencial es posible mejorar las características de estos estimados usando técnicas más elaboradas como son las distribuciones tiempo-frecuencia.

A continuación se muestra una imagen del programa y su interfaz gráfica programada para aplicar el ventaneo a la señal y aplicar una ventana en particular y calcular el espectrograma a cada ventana obtenida, así como seleccionar una sola ventana para observar el patrón de variación:

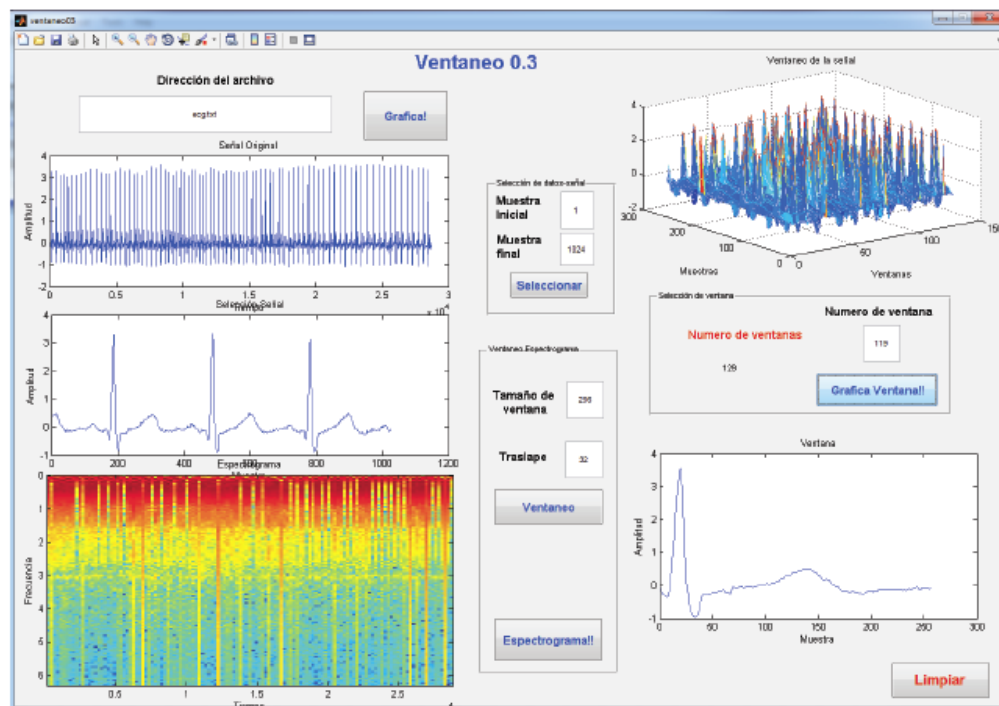


Figura 4.2: Programa de ventaneo desarrollado.

Gracias a este programa se puede dividir la señal mediante ventanas con traslape y observar el grado de estacionaridad que mantienen las ventanas, también es posible aplicar ventanas del tipo: rectangular, Hamming, Hanning, Bartlett y Blackman. Como veremos más adelante esto significa hacer uso del periodograma modificado y del método de Blackman-Tukey.

#### 4.9. Metodología de evaluación de algoritmos de procesamiento

En esta parte explicaremos la secuencia en la cual las herramientas de procesamiento de señales serán aplicadas durante el desarrollo de este documento. En el capítulo 5 se hará uso de técnicas de estimación espectral, en específico se utilizará la técnica de periodograma y de Blackman-Tukey

mediante el ambiente de trabajo implementado en MATLAB. En el capítulo 6 se hará uso del filtrado adaptable para estimar parámetros que caractericen a la señal mioeléctrica por unidad de tiempo y que permiten estimar el contenido frecuencial instantáneo. Finalmente en el capítulo 7 se analizará una técnica de análisis de componentes principales que permite reducir la dimensión y la redundancia existente entre un conjunto de datos. A lo largo del documento se utilizarán estas herramientas en una señal sintética propuesta, por lo que en cada capítulo se observará el resultado de aplicar las herramientas del procesamiento seleccionadas a esta señal sintética. Finalmente, en el capítulo 8 de resultados se incluyen los resultados de aplicación de herramientas a señales mioeléctricas reales.

La señal sintética a la cual se le aplicarán las herramientas de procesamiento conforme se aborde cada capítulo tiene las siguientes características :

- Proceso aleatorio generado usando ecuación en diferencias.
- Proceso AR orden 5 de 2000 muestras.
- No estacionario.
- Dos juegos de parámetros:  
 $a_1 = 0.7348, a_2 = 0.8822, a_3 = 0.36, a_4 = 0.558, a_5 = 0.25$   
 $a_1 = 0.358, a_2 = 0.78, a_3 = 0.58, a_4 = 0.258, a_5 = 0.589$
- Primer 1000 muestras generadas obedeciendo modelo correspondiente al primer conjunto de parámetros y 1000 muestras finales usando el segundo conjunto.

A continuación se muestra el proceso AR(5) no estacionario generado:

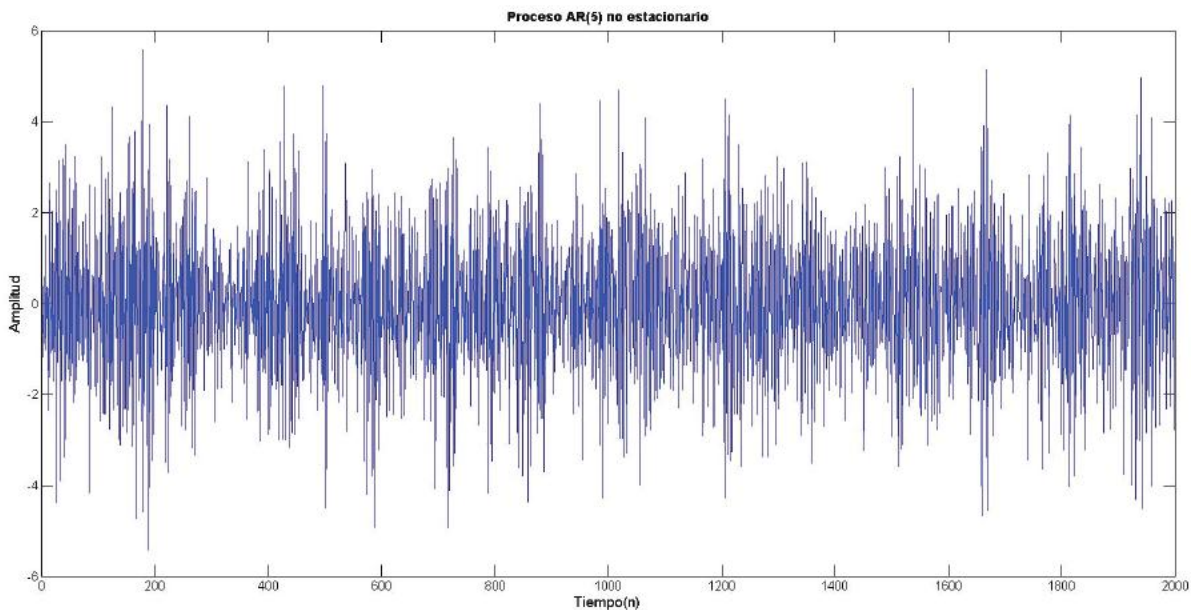


Figura 4.3: Proceso AR(5) no estacionario

Por lo que en cada nueva sección del documento se mostrará la utilización de las herramientas en este ejemplo sintético. El uso de esta señal sintética tiene la finalidad de observar el desempeño de las herramientas ya que los resultados esperados son conocidos debido a que la señal fue generada con unos parámetros conocidos, con un orden determinado y con una evolución temporal establecida. Esta misma secuencia se llevará a cabo para la señal mioeléctrica real en la parte de resultados de este documento. Las señales mioeléctricas fueron obtenidas usando el circuito del anexo C.1.

La finalidad del conjunto de estrategias seleccionadas e implementadas es extraer información de la señal mioeléctrica y enviarla a la etapa de control como medida de la actividad muscular existente y se reducirá la redundancia existente entre diferentes conjuntos de parámetros que caractericen a la señal mioeléctrica.

## Capítulo 5

# Estimación espectral

Las formas de resolver el problema de estimación del espectro de frecuencias se pueden categorizar en dos clases: paramétricos y no paramétricos. Los no paramétricos o clásicos comienzan estimando la secuencia de autocorrelación de una serie de datos, el espectro de potencia es luego estimado usando la transformada de Fourier de la secuencia de autocorrelación. La segunda clase es la de métodos paramétricos, los cuales se basan en usar un modelo para el proceso para así estimar el espectro de potencias [16].

Como se ha establecido previamente, el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la secuencia de autocorrelación. Así, estimar el espectro de frecuencias se relaciona con estimar la autocorrelación. Recordemos que para un proceso ergódico<sup>1</sup> se tiene que:

$$r_x(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n+k)x^*(n) \right\}$$

Así, si  $x(n)$  es conocida para toda  $n$ , estimar el espectro de potencia es directo en teoría, ya que solo debe utilizarse la expresión mostrada anteriormente y posteriormente calcular la transformada de Fourier. Sin embargo existen problemas que impiden seguir este camino tan directo; primero, la cantidad de datos a trabajar nunca es ilimitada y en muchos casos esta cantidad es muy pequeña. El segundo problema es que los datos están con frecuencia mezclados con ruido o contaminados con una señal de interferencia. Por lo que estimar el espectro de potencia es un problema que involucra estimarlo de una serie finita de datos con ruido [16].

### 5.1 Métodos no paramétricos

Esta familia de métodos se basa en el uso un estimador de la función de autocorrelación para posteriormente calcular su transformada de Fourier y así obtener la densidad espectral de potencias. La diferencia de estos métodos radica en el uso de un tipo de ventana que modifica al estimado de la función de autocorrelación o a la señal original de tal manera que el sesgo y la varianza entre cada método no paramétrico es diferente, por lo que dependiendo de las características buscadas dentro de un estimador (ya sea en expresada como una menor varianza o en un menor sesgo) determinara la selección de un método sobre otro, así como la demanda computacional involucrada en cada uno de ellos, ya que el objetivo final es que los algoritmos seleccionados sean implementados en microprocesadores.

---

<sup>1</sup> Recordemos que consideramos a la señal mioeléctrica como ergódica y estacionaria en sentido amplio.



### 5.1.1 Periodograma

La densidad espectral de potencias de un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio es la transformada de Fourier de la secuencia de autocorrelación:

$$\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_x(k)e^{-jk\omega} \quad (5.1.1)$$

Por lo que la estimación espectral es, en un sentido, un problema de estimación de autocorrelación. Para la autocorrelación de un proceso ergódico y una cantidad ilimitada de datos, la secuencia de autocorrelación puede ser, en teoría, determinada haciendo el uso de promedios temporales:

$$r_x(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n+k)x^*(n) \right\} \quad (5.1.2)$$

Sin embargo, si  $x(n)$  solo es medida en un intervalo infinito  $n=1, 2, 3, \dots, N-1$ , entonces la secuencia de autocorrelación puede ser estimada mediante una suma finita usando algún estimado, como lo puede ser:

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x^*(n) \quad (5.1.3)$$

Para asegurar que los valores de  $x(n)$  fuera del intervalo  $[0, N-1]$  sean excluidos de la sumatoria antes descrita, ésta será reescrita de la siguiente manera:

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x^*(n) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.1.4)$$

Con los valores de  $\hat{r}_x(k)$  para  $k < 0$  definidos usando la simetría conjugada que posee la autocorrelación,  $\hat{r}_x(-k) = \hat{r}_x^*(k)$  y con  $\hat{r}_x(k)$  igual a cero cuando  $|k| \geq N$ . Tomando la transformada discreta de Fourier de  $\hat{r}_x(k)$  tenemos el estimado de la densidad espectral de potencia denominado *periodograma*[16].

$$\hat{P}_{Per}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \hat{r}_x(k)e^{-jk\omega} \quad (5.1.5)$$

Es también conveniente definir al periodograma en función de la secuencia de datos del proceso  $x(n)$ , para esto consideremos  $x_N(n)$  como una señal finita de duración  $N$  que es igual a  $x(n)$  durante el intervalo  $[0, N-1]$  y cero fuera de este intervalo:

$$x_N(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Así, en términos de  $x_N(n)$  el estimado de la secuencia de autocorrelación es:

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n+k)x_N^*(n) = \frac{1}{N} x_N(k)x_N^*(-k) \quad (5.1.7)$$

Tomando la transformada de Fourier y haciendo uso del teorema de convolución tenemos que el periodograma se puede expresar de la siguiente manera:

$$\hat{P}_{Per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} X_N(e^{j\omega})X_N^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2 \quad (5.1.8)$$

Es necesario establecer tanto el sesgo como la varianza del periodograma afín de establecer si es un estimador consistente o no:

El valor esperado del periodograma es:

$$E \left\{ \hat{P}_{Per}(e^{j\omega}) \right\} = \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega}) \quad (5.1.9)$$

Donde  $W_B(e^{j\omega})$  es la transformada de Fourier de ventana de Bartlet  $w_B(k)$ :

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left[ \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2 \quad (5.1.10)$$

Así, el valor esperado del periodograma es la convolución entre el espectro de potencias  $P_x(e^{j\omega})$  y la transformada de Fourier de la ventana de Bartlet y por lo tanto es un estimador sesgado, sin embargo, debido a que  $W_B(e^{j\omega})$  converge a un impulso conforme  $N$  tiende a infinito el periodograma es asintóticamente no sesgado[16]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \hat{P}_{Per}(e^{j\omega}) \right\} = P_x(e^{j\omega}) \quad (5.1.11)$$

Para que el periodograma sea un estimador consistente es necesario que sea asintóticamente no sesgado y que posea varianza nula conforme el numero de datos disponibles tiende a infinito, sin embargo debido a que la varianza del periodograma para un proceso de naturaleza Gaussiana es [16]:

$$Var \left\{ \hat{P}_{Per}(e^{j\omega}) \right\} \approx P_x^2(e^{j\omega}) \quad (5.1.12)$$

Por lo que la varianza no es nula conforme  $N$  tiende al infinito y por lo tanto el periodograma no es un estimador consistente y debe tenerse en cuenta esto cuando se este haciendo uso de él.

### 5.1.2 Método de Blackman-Tukey

Un método para disminuir la variabilidad del periodograma se denomina suavizamiento del periodograma (*periodogram smoothing*) frecuentemente llamado método Blackman-Tukey debido al trabajo de Blackman y de Tukey en el área de análisis espectral.

Para observar como este método reduce la varianza del periodograma, recordemos que el periodograma se calcula al tomar la transformada de Fourier de un estimado consistente de una secuencia de autocorrelación. Sin embargo, para cualquier secuencia finita de longitud  $N$  de datos, la varianza de  $\hat{r}_x(k)$  será grande para valores de  $k$  cercanos a  $N$ .

Consecuentemente, la única forma de reducir la varianza del periodograma es reduciendo la varianza de estos estimados o reducir la contribución que hacen al periodograma. En el método de Blackman-Tukey la varianza del periodograma es reducida aplicando una ventana a  $\hat{r}_x(k)$  para reducir la contribución de los estimados poco confiables. Específicamente el estimado espectral del método de Blackman-Tukey es:

$$\hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \hat{r}_x(k) w(k) e^{-jk\omega} \quad (5.1.13)$$

Donde  $w(k)$  es una ventana de atraso (lag window) que es aplicada al estimado de la autocorrelación.

Lo que se sacrifica al reducir la varianza es la resolución, ya que un menor número de estimados de la secuencia de autocorrelación son usados para estimar el espectro de frecuencias.

Usando el teorema de convolución, el espectro de Blackman-Tukey puede ser escrito en el dominio de la frecuencia como:

$$\hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \hat{P}_{Per}(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}_{Per}(e^{j\omega}) * W(e^{j(\omega-u)}) du \quad (5.1.14)$$

Por lo que el estimado de Blackman-Tukey suaviza el periodograma haciendo la convolución del periodograma con la transformada de Fourier de la ventana de autocorrelación,  $W(e^{j\omega})$ . Aunque hay cierta flexibilidad en la elección de la ventana que será usada,  $w(k)$  debe de ser conjugada simétrica para que  $W(e^{j\omega})$  sea real, y que su transformada de Fourier sea no negativa para que  $\hat{P}_{BT}$  sea no negativo.

El sesgo que presenta este método es:

$$E \left\{ \hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) \right\} \approx \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \quad (5.1.15)$$

Y la varianza es:

$$Var \left\{ \hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) \right\} \approx P_x^2(e^{j\omega}) \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M w^2(k) \quad (5.1.16)$$

Método	Sesgo	Varianza	Resolución
Periodograma	$E \left\{ \hat{P}_{Per}(e^{j\omega}) \right\} = \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})$	$0.89 \frac{2\pi}{N}$	Dependiente de la ventana
Blackman-Tukey	$E \left\{ \hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) \right\} \approx \frac{1}{2\pi} P_x(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$	$P_x^2(e^{j\omega}) \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M w^2(k)$	Dependiente de la ventana

Cuadro 5.1: Comparación de sesgo, varianza y resolución de métodos no paramétricos abordados.

## 5.2 Métodos paramétricos

Una de las limitaciones de los métodos clásicos de estimación del espectro de frecuencias es que no están diseñados para incorporar información conocida sobre la manera en la se genera el proceso. Por lo que incorporando un modelo que describa la manera en la que se genera el proceso al algoritmo de estimación espectral es posible encontrar un estimado más preciso y con mayor resolución; esto es posible haciendo uso de los métodos paramétricos [16].

### 5.2.1. Modelo Autoregresivo

Decimos que una serie temporal  $u(n), u(n-1), \dots, u(n-M)$  representa una realización de un proceso autoregresivo (AR) de orden  $M$  si satisface la siguiente ecuación en diferencias [17]:

$$u(n) + a_1^* u(n-1) + \dots + a_M^* u(n-M) = v(n) \quad (5.2.1)$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_M$  son denominados parámetros AR y  $v(n)$  es un ruido blanco. El término  $a_k^* u(n-k)$  es la versión escalar del producto interno de  $a_k$  y  $u(n-k)$ , donde  $k = 1, \dots, M$ .

El término autoregresivo se deriva si reescribimos la expresión anterior de la siguiente manera:

$$u(n) = w_1^* u(n-1) + w_2^* u(n-2) + \dots + w_M^* u(n-M) + v(n) \quad (5.2.2)$$

donde  $w_k = -a_k$ . Así, podemos ver que el valor presente del proceso ( $u(n)$ ) es igual a una combinación lineal de los valores pasados del proceso ( $u(n-1), \dots, u(n-M)$ ) más un término de error ( $v(n)$ ). Por lo que un modelo lineal de la siguiente estructura:

$$y = \sum_{k=1}^M w_k^* x_k + v \quad (5.2.3)$$

que relaciona una variable dependiente  $y$  a un conjunto de variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_M$  más un término de error  $v$  es frecuentemente denominado como un modelo regresivo, y además  $y$  se dice que es “regresada” sobre  $x_1, x_2, \dots, x_M$ . En el caso del modelo autoregresivo, la variable  $u(n)$  es “regresada” sobre valores previos del mismo proceso, de ahí el termino autoregresivo.

Si hacemos uso de la convolución en el dominio de la frecuencia, el modelo autoregresivo se puede expresar de la siguiente manera:

$$H_A(z)U(z) = V(z) \tag{5.2.4}$$

Donde:

$$H_A(z) = \sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n} \tag{5.2.5}$$

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n} \tag{5.2.6}$$

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{-n} \tag{5.2.7}$$

Debido a las expresiones anteriores es posible tener dos interpretaciones del proceso AR dependiendo si se considera a  $u(n)$  como entrada o salida de un filtro con una estructura particular:

1. Dado el proceso AR  $u(n)$ , podemos usar el filtro de la figura 5.1 para producir el ruido blanco  $v(n)$  como salida. Esta estructura corresponde al *analizador de proceso*. Esta estructura de filtro transversal será la utilizada para abordar el problema de filtrado adaptable.
2. Con el ruido blanco  $v(n)$  actuando como entrada podemos utilizar el filtro de la figura 5.2 para producir un proceso AR  $u(n)$  como salida. Esta estructura representa un *generador de proceso*.

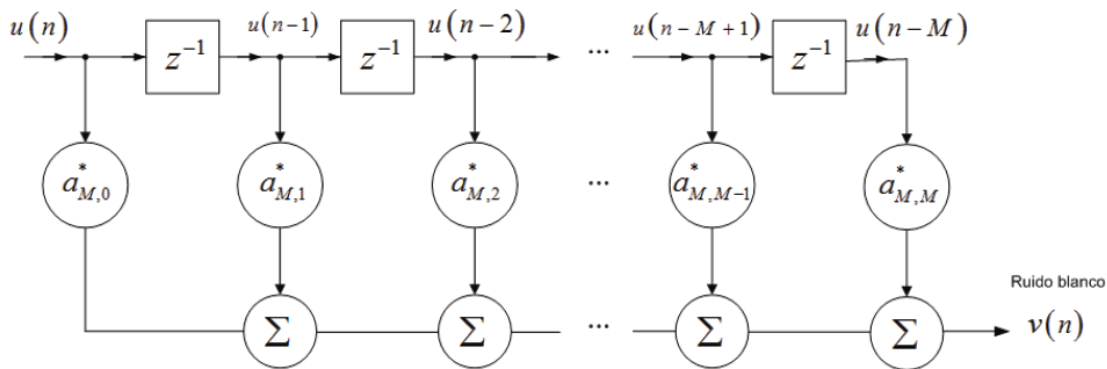


Figura 5.1: Filtro analizador de proceso AR

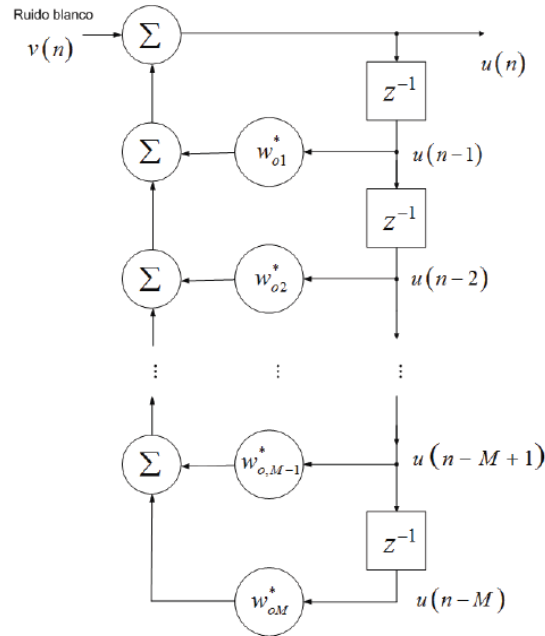


Figura 5.2: Filtro generador de proceso AR

El modelo de series temporales más popular para estimación espectral es el basado en un modelo AR, esto es debido a que es posible obtener estimados precisos de los parámetros del modelo AR resolviendo un conjunto de ecuaciones lineales. Para una estimación precisa de parámetros de un modelo de otro tipo como lo es un modelo ARMA o un modelo MA necesitamos resolver un conjunto de ecuaciones altamente no lineales. Cuando la estimación espectral basada en un modelo AR es válida los estimados obtenidos poseen menor sesgo y varianza que los estimadores espectrales convencionales basados en Fourier. Otro nombre con el que se conoce a la estimación espectral basada en modelo AR es el de la máxima entropía y el estimador espectral de predicción lineal. Aunque los fundamentos teóricos son diferentes, en la práctica son idénticos. Otra de las grandes ventajas es que el teorema de Kolmogorov asegura que cualquier proceso WSS puede ser modelado usando un modelo AR de orden infinito, en la práctica significa que si se establece un modelo AR de orden adecuado (traducido como un modelo de mayor orden) es posible modelar cualquier señal estacionaria en sentido amplio usando un modelo autoregresivo [23].

Un proceso autoregresivo puede ser representado por la salida de un filtro todo polo cuya entrada es un ruido blanco. Así, el espectro de potencias de proceso autoregresivo de orden  $p$  es:

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{|b(0)|^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_p(k)e^{-jk\omega}|^2} \quad (5.2.8)$$

Por lo que si los parámetros del modelo  $b(0)$  y  $a_p(k)$  pueden ser estimados de los datos, un estimado de la densidad de potencias se puede formar usando:

$$\hat{P}_{AR}(e^{j\omega}) = \frac{|\hat{b}(0)|^2}{|1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p(k)e^{-jk\omega}|^2} \quad (5.2.9)$$

Claramente, la precisión del estimado  $\hat{P}_{AR}(e^{j\omega})$  vendrá dada por la precisión en la estimación de los parámetros del modelo y, en mayor parte, en que si el modelo AR propuesto es consistente en la forma en

la que se generan los datos del proceso. Ya que para estimar la densidad espectral de potencias es necesario estimar los parámetros del modelo, existe una variedad de métodos para calcular los parámetros del modelo todo polo asociado con el modelo AR. Sin embargo, ya que se hayan calculado estos parámetros el estimado de la densidad espectral de potencias se puede obtener mediante la misma expresión dada por (5.2.9) [16].

Como se ha presentado, es posible obtener un modelo AR para cada una de las ventanas en las que se puede dividir la señal mioeléctrica, obteniendo así una PSD asociada a cada ventana, y considerando que cada ventana es una representación de la evolución temporal de la señal mioeléctrica se puede determinar un contenido frecuencial en función del tiempo lo cual es de utilidad para el control de la prótesis ya que es necesario enviar información en cada instante temporal. Así, se usarán los estimados de los parámetros para cada ventana usando la herramienta de ambiente de trabajo propuesta y será posible comparar la PSD obtenida usando este enfoque con las obtenidas usando los métodos no paramétricos. No debemos olvidar que estos parámetros estarán asociados a la duración de la ventana, por lo que no serán parámetros instantáneos.

El modelado del tipo todo polo utilizando la secuencia de autocorrelación requiere la solución de la siguiente estructura [16]:

$$r_x(k) + \sum_{l=1}^p a_p(l)r_x(k-l) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, p \quad (5.2.11)$$

Donde el error del modelado es:

$$\varepsilon_p = r_x(0) + \sum_{l=1}^p a_p(l)r_x(l) \quad (5.2.12)$$

Combinando las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & r_x^*(2) & \dots & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p-1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & r_x(p-2) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ a_p(2) \\ \dots \\ a_p(p) \end{bmatrix} = \varepsilon_p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

El cual es un conjunto de  $p + 1$  ecuaciones lineales en las  $p + 1$  incógnitas  $a_p(1), a_p(2), \dots, a_p(p)$  y  $\varepsilon_p$ . Este sistema puede ser descrito como:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{a}_p = \varepsilon_p \mathbf{u}_1 \quad (5.2.14)$$

Donde  $\mathbf{R}_x$  es una matriz de  $(p + 1) \times (p + 1)$  del tipo Hermitiana y de estructura de Toeplitz y  $\mathbf{u}_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$ . En el caso especial de datos reales la matriz  $\mathbf{R}_x$  es simétrica y de Toeplitz. El algoritmo recursivo de Levinson-Durbin es recursivo en el orden del modelo a seguir, donde los parámetros al orden  $i + 1$  son determinados usando los parámetros del orden  $i$ , lo que lo vuelve un algoritmo atractivo computacionalmente hablando.

Como mencionamos previamente los parámetros AR estimados usando el método descrito serán los mismos durante la duración de la ventana (consecuencia de considerar a la señal estacionaria durante la ventana) y no retratan un comportamiento en cada instante de tiempo se la señal, sino un comportamiento en un lapso de tiempo; para determinar parámetros en cada instante de tiempo es que se propone la estructura de un el filtro adaptable, donde los parámetros serán estimados para cada nuevo dato disponible del proceso, generando un modelado para cada instante de tiempo, con lo cual es posible estimar el contenido frecuencial usando solo los parámetros obtenidos, la cual se traduce en información disponible para el sistema protésico.

Las siguientes figuras muestran imágenes de las interfaces gráficas implementadas en MATLAB en las cuales se engloban las herramientas del periodograma (figura 5.3) y en otra se engloban las del método de Blackman-Tukey (figura 5.4):

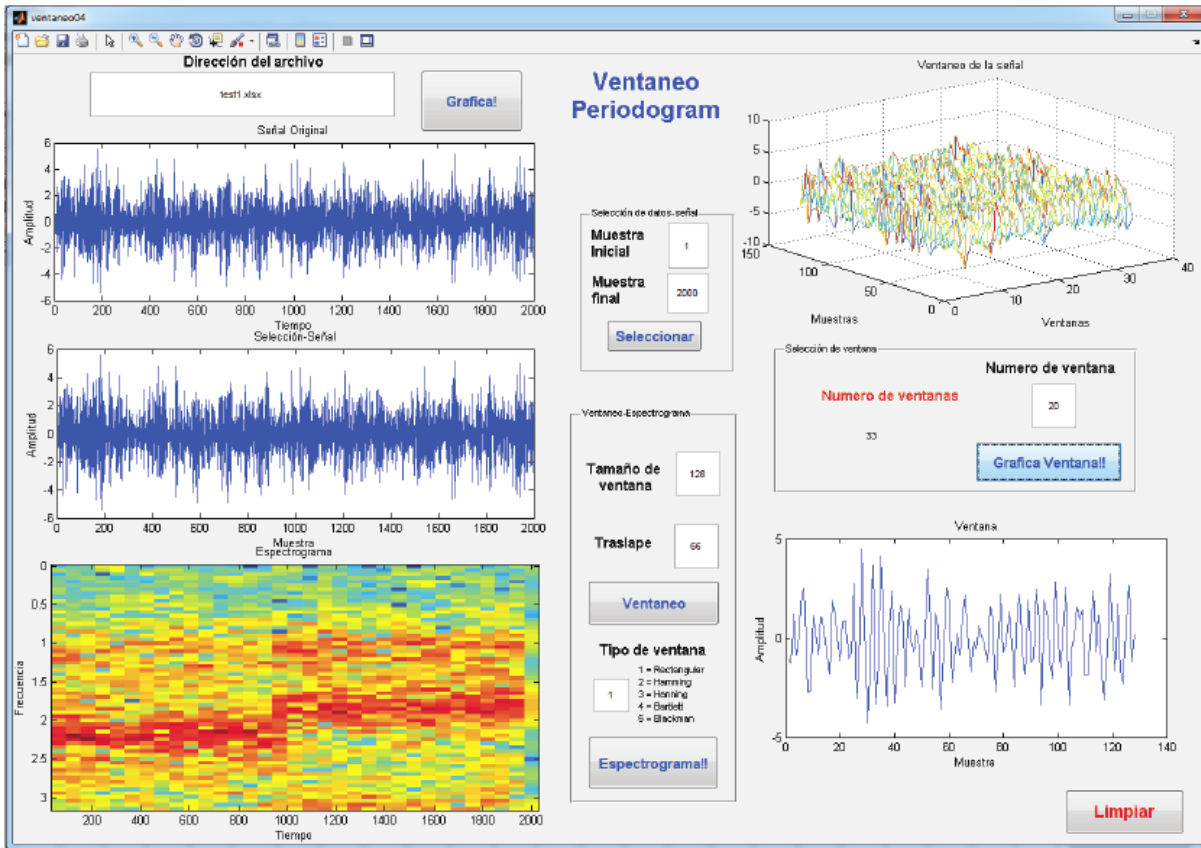


Figura 5.3: *Interfaz gráfica análisis frecuencial mediante periodograma*

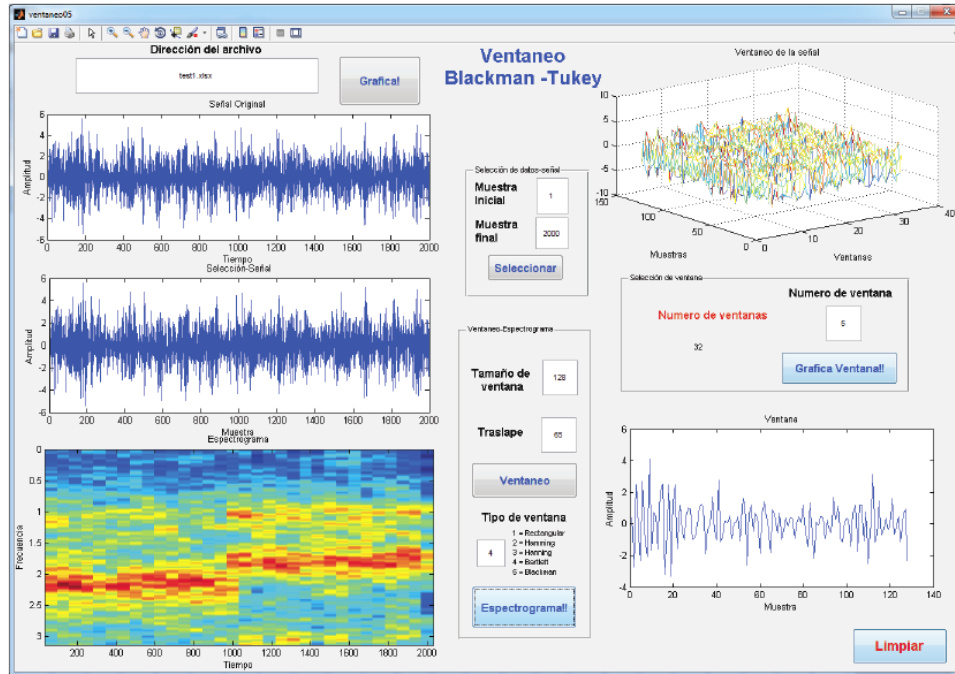


Figura 5.4: Interfaz gráfica análisis frecuencial mediante Blackman-Tukey

Gracias al uso de estos programas es posible hacer una análisis haciendo combinaciones entre longitudes de ventana, traslapes y tipo de ventanas aplicadas a trozos de la señal a analizar. También se utilizaran para analizar las señales mioeléctricas reales en la parte de resultados.

### 5.2.2. Selección del orden del modelo

La selección del orden del modelo AR para estimación espectral es un característica crítica: si se elige un orden demasiado bajo se obtienen estimados suavizados, mientras que órdenes muy altos causan picos e inestabilidad estadística. Se han propuesto diversas técnicas para estimar el orden del modelo. Estos métodos han sido derivados de análisis estadísticos de datos reales. Es probable que estos estimadores del orden del modelo puedan ser aplicados directamente a datos complejos, sin embargo, no hay disponibles extensiones sólidas para datos complejos. Por lo que se debe tener extremo cuidado al usar estas estrategias en el análisis de datos complejos [23].

La mayoría de los estimadores del orden del modelo están basados en el estimado de la potencia del error de predicción, este estimado está garantizado a disminuir o a mantenerse mientras se incrementa el orden del modelo para todos los métodos de estimación de parámetros AR expuestos en este documento. Por lo que no podemos simplemente monitorear la disminución de la potencia para determinar el orden del modelo sino que debemos también tener en cuenta el incremento en la varianza del estimado espectral basado en el incremento del número de parámetros. Dos métodos propuestos por Akaike se adhieren a esta filosofía. El primero de ellos, denominado *final prediction error* (FPE) , estima el orden del modelo como el valor que minimiza [7]:

$$FPE(k) = \frac{N + k}{N - k} \hat{\rho}_k \quad (5.2.15)$$

Donde  $\hat{\rho}_k$  es el estimado de la potencia del error de predicción (estimado de la varianza del ruido blanco) para el modelo AR de orden  $k$ . Se observa que mientras  $\hat{\rho}_k$  decrece con  $k$ , el termino  $\frac{N+k}{N-k}$  se incrementa. El FPE es un estimado de la potencia de error de predicción cuando los coeficientes de predicción deben



ser estimados de los datos. El término  $\frac{N+k}{N-k}$  toma en cuenta el incremento en la varianza del estimado de la potencia del error de predicción debido a las imprecisiones en los estimados de coeficientes de predicción [23].

Un segundo criterio, es el denominado *Akaike information criterion* (AIC) que está definido de la siguiente manera [8]:

$$AIC(k) = N \ln \hat{\rho}_k + 2k \quad (5.2.16)$$

Como en el FPE, el orden seleccionado es el que minimize el AIC. El criterio AIC es un estimado de la distancia de Kullback-Leibler entre la función de densidad de probabilidad (PDF) asumida y la verdadera PDF de los datos. El criterio AIC se puede extender a modelos MA y ARMA. Para una cantidad pequeña de datos el uso del criterio AIC es recomendado [36]. Para cantidades de datos grandes los dos estimadores llevan al mismo estimado del orden del modelo [23].

Ahora usemos los criterios de selección de orden para el ejemplo de nuestro proceso AR(5), por lo que a continuación se muestra en la figura 5.5 el criterio AIC aplicado a nuestra señal generada mediante modelo AR(5) y en la figura 5.6 se muestra el criterio FPE:

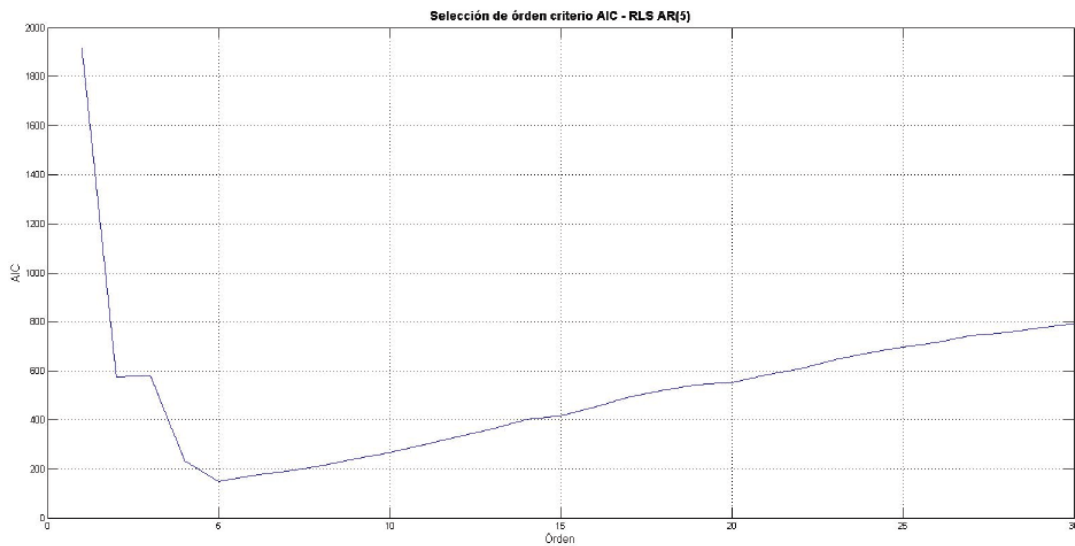


Figura 5.5: Criterio AIC para selección de orden del proceso AR(5) no estacionario

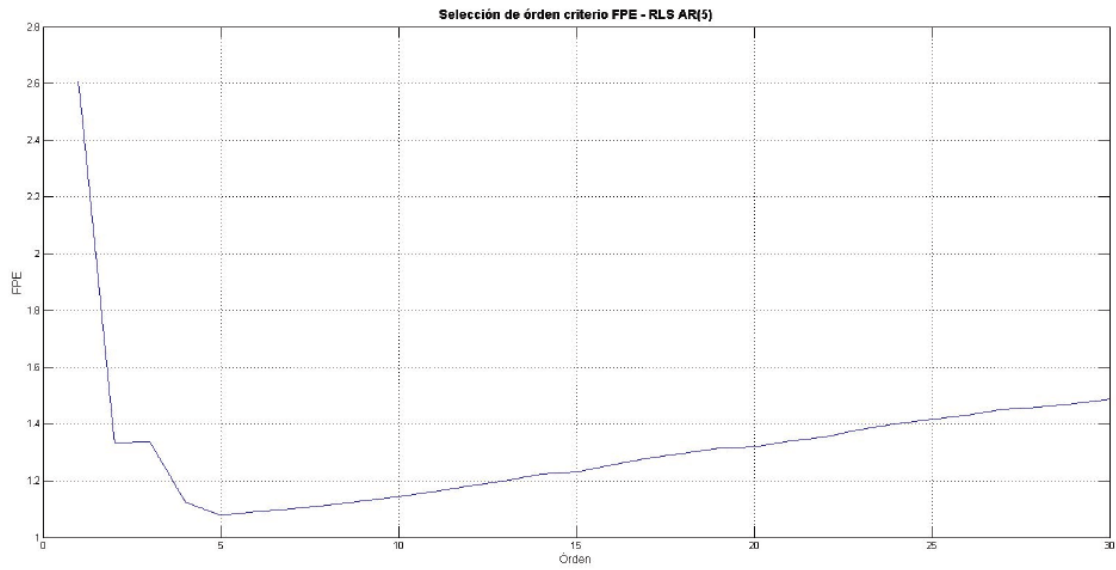


Figura 5.6: Criterio  $FPE$  para selección de orden del proceso  $AR(5)$  no estacionario

## Capítulo 6

# Filtrado adaptable

En muchas aplicaciones de procesamiento de señales no se tiene un conocimiento a priori de las características estadísticas de un proceso, en este caso sistemas con parámetros ajustables son utilizados. Para poder extraer información de las señales mioeléctricas, cuya estadística no es conocida y que además es variante en el tiempo (fenómenos no estacionarios) es necesario hacer uso de estructuras de esta naturaleza. Entre estos sistemas adaptables encontramos los filtros adaptables, cuyos coeficientes que definen al filtro son funciones temporales que se actualizan con cada dato nuevo que se recibe, y permiten estimar parámetros asociados con las señales mioeléctricas, los cuales serán enviados a la etapa de control. En específico excitaremos al filtro con una señal con características semejantes al de la señal mioeléctrica, y se propondrá una forma del filtro con una serie de coeficientes que se estimarán como función del tiempo haciendo uso de un criterio de error o función de costo.

### 6.1. Filtros adaptables LMS

El algoritmo LMS es un importante miembro de la familia de los algoritmos de gradiente estocástico, este término se utiliza para distinguirlo del método de descenso escarpado (*steepest descent*) que usa un gradiente determinístico en una recursión del filtro de Wiener para entradas estocásticas. Una característica importante del algoritmo LMS es su simplicidad, más aún, no requiere el cálculo de la función de correlación ni la inversión matricial.

El algoritmo LMS es un algoritmo lineal y adaptable de filtrado, el cual se muestra en la figura 6.1 consiste en dos procesos :

1. Un *proceso de filtrado*, el cual involucra calcular: a) la salida de un filtro lineal en respuesta a una señal de entrada y b) estimar el error comparando esta salida con la salida deseada. Se muestra en la figura 6.2.
2. Un *proceso adaptable*, el cual involucra ajustar de manera automática los parámetros del filtro de acuerdo con la error estimado. Se observa en la figura 6.3.

La combinación de estos procesos trabajando en conjunto constituyen un lazo de retroalimentación, como se puede observar en la figura , donde tenemos el filtro transversal alrededor del cual se construye el algoritmo, este componente se encarga del filtrado. Se observa también el mecanismo de adaptabilidad en los coeficientes asociados al filtro.

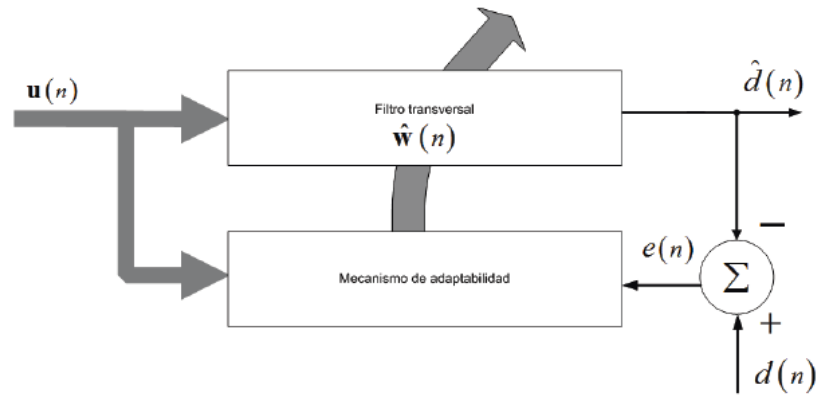


Figura 6.1: Estructura de filtro adaptable

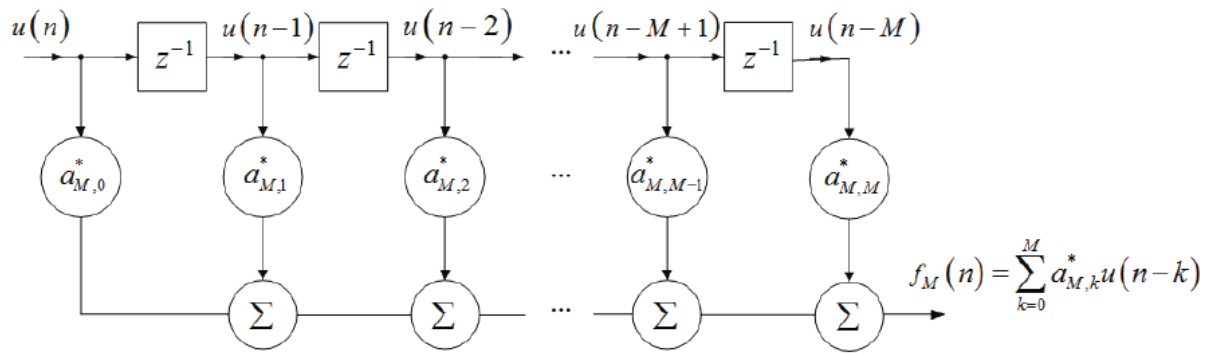


Figura 6.2: Filtro transversal

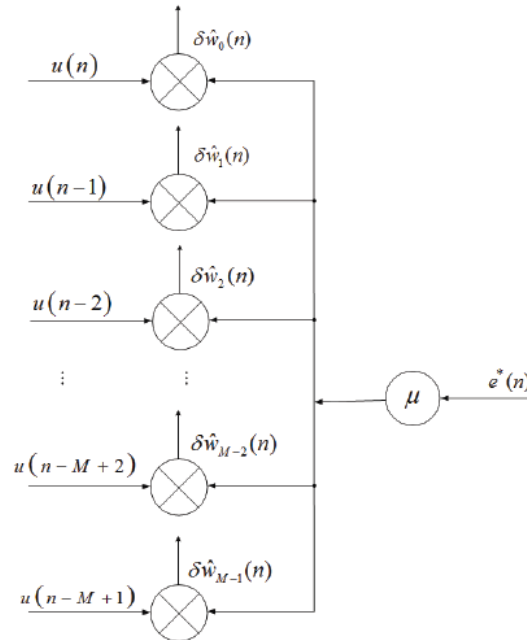


Figura 6.3: Mecanismo de adaptabilidad del filtro adaptable

Así el diagrama de flujo del algoritmo LMS se observa en la figura 6.4 y se puede resumir mediante los siguientes pasos [17]:

■ **Parámetros**

$M =$  Orden del filtro.

$\mu =$  Constante de adaptación.

$$0 < \mu < \frac{2}{MS_{max}}$$

Donde  $S_{max}$  es el máximo valor de la densidad espectral de potencia de las entradas  $u(n)$  y la longitud del filtro es de moderada a grande.

■ **Inicialización:** Si se tiene un conocimiento previo sobre el vector de coeficientes del filtro  $\hat{w}(n)$ , usar ese conocimiento para elegir un valor apropiado de  $\hat{w}(0)$ . De otra manera, usar  $\hat{w}(0) = 0$

■ **Datos**

(a) *Dados:*  $\mathbf{u}(n) =$  Vector de entrada de dimensión  $M \times 1$  al tiempo  $n$ .

$$= [u(n), u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M+1)]^T$$

$d(n) =$  Respuesta deseada al tiempo  $n$ .

(b) *Se calcula:*  $\hat{w}(n+1) =$  Estimado del vector de coeficientes al tiempo  $n+1$ .

■ **Iteraciones**

*Para:*  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$e(n) = d(n) - \hat{w}^H(n)\mathbf{u}(n)$$

$$\hat{w}(n+1) = \hat{w}(n) + \mu\mathbf{u}(n)e^*(n)$$

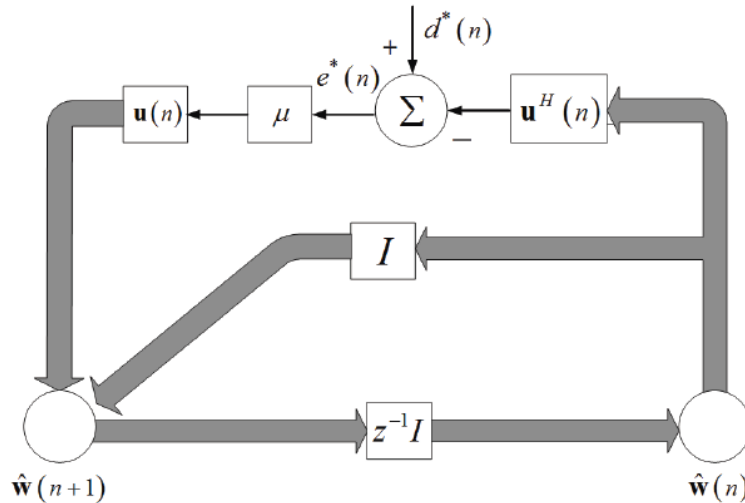


Figura 6.4: Diagrama de flujo del algoritmo LMS

Gracias al algoritmo adaptable es posible estimar el contenido frecuencial instantáneo de una señal, esta información puede dar lugar a establecer y detectar patrones de movimientos que serán traducidos como información para la parte de control de la prótesis.

En la forma del filtro LMS estudiado previamente, el ajuste aplicado al vector de parámetros del filtro en la iteración  $n+1$  es el producto de los tres siguientes términos:

- El tamaño de paso  $\mu$ , el cual es determinado por el diseñador.
- El vector de entrada  $u(n)$ , el cual es suministrado por la fuente de información.
- El error de estimación  $e(n)$  para valores reales, o su complejo conjugado  $e^*(n)$  para valores complejos.

El mecanismo de ajuste observado en el algoritmo LMS es directamente proporcional al vector de entrada  $u(n)$ . Por lo que cuando  $u(n)$  es grande, el filtro LMS sufre del problema de amplificación de ruido gradiente. Para superar esta dificultad se puede utilizar el filtro LMS normalizado. En particular, el ajuste aplicado al vector de entrada  $u(n)$  en la iteración  $n+1$  es “normalizado” respecto a la norma Euclidiana cuadrada del vector de entrada  $u(n)$  en la iteración  $n$ .

A continuación se presentan los pasos del algoritmo LMS normalizado [17]:

▪ **Parámetros**

$$M = \text{Órden del filtro.}$$

$$\tilde{\mu} = \text{Constante de adaptación.}$$

$$0 < \tilde{\mu} < 2 \frac{E\{|u(n)|^2\} \mathfrak{D}(n)}{E\{|e(n)|^2\}}$$

Donde:

$$E\{|e(n)|^2\} = \text{Potencia de la señal de error.}$$

$$E\{|u(n)|^2\} = \text{Potencia de la señal de entrada.}$$

$$\mathfrak{D}(n) = \text{Desviación cuadrática media.}$$

- **Inicialización:** Si se tiene un conocimiento previo sobre el vector de coeficientes del filtro  $\hat{\mathbf{w}}(n)$ , usar ese conocimiento para elegir un valor apropiado de  $\hat{\mathbf{w}}(0)$ . De otra manera, usar  $\hat{\mathbf{w}}(0) = 0$

- **Datos**

(a) *Dados:*  $\mathbf{u}(n)$  = Vector de entrada de dimensión  $M \times 1$  al tiempo  $n$ .  
 $d(n)$  = Respuesta deseada al tiempo  $n$ .

(b) *Se calcula:*  $\hat{\mathbf{w}}(n + 1)$  = Estimado del vector de coeficientes al tiempo  $n + 1$ .

- **Iteraciones**

$$\begin{aligned} \text{Para: } n &= 0, 1, 2, \dots \\ e(n) &= d(n) - \hat{\mathbf{w}}^H(n)\mathbf{u}(n) \\ \hat{\mathbf{w}}(n + 1) &= \hat{\mathbf{w}}(n) + \frac{\tilde{\mu}}{\|\mathbf{u}(n)\|^2} \mathbf{u}(n)e^*(n) \end{aligned}$$

Así, se puede ver al algoritmo LMS normalizado como al algoritmo LMS con un tamaño de paso variante con el tiempo. Un problema asociado, el cual se genera al solucionar el problema de amplificación de ruido gradiente, es producido cuando el vector de entrada  $\mathbf{u}(n)$  es pequeño, debido a las dificultades numéricas que se presentan al dividir entre un número pequeño para el valor de la norma cuadrática  $\|\mathbf{u}(n)\|^2$ .

## 6.2. Filtros RLS

En la formulación de este problema, tenemos un sistema desconocido, que deseamos identificar, en nuestro caso, deseamos estimar el modelo asociado a un filtro que permitirá sintetizar una señal mioeléctrica. La entrada al sistema será una secuencia conocida  $x(n)$ , la salida deseada es  $y(n)$  y la salida estimada es  $\hat{y}(n)$  [29].

Propongamos que la estructura del filtro adaptable es la de un filtro FIR, con un número  $M$  de coeficientes ajustables. Así, la señal de salida del filtro será un estimado de la señal deseada:

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \quad (6.2.1)$$

Y el error lo encontramos como la diferencia entre la señal deseada y el estimado:

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2.2)$$

Y seleccionamos los coeficientes  $h(k)$  que minimicen el error usando algún criterio de evaluación del mismo. Haciendo uso del criterio MSE (mean square error) tenemos:

$$\xi_M = \sum_{k=0}^N \left[ y(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \right]^2 \quad (6.2.3)$$

Donde  $N + 1$  son el número de mediciones u observaciones realizadas.

Haciendo uso de este criterio se obtienen un sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)r_{xx}(l-k) = r_{yx}(l) \quad l = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (6.2.4)$$

Donde  $r_{xx}$  es la autocorrelación de la secuencia  $x(n)$  y  $r_{yx}$  es la correlación cruzada de la secuencia de salida con la secuencia de entrada del sistema. Resolviendo este conjunto de ecuaciones encontramos los coeficientes del sistema, obtenidos directamente haciendo uso de valores de entradas y salidas observados, sin ningún conocimiento a priori del sistema. Debemos destacar que si deseamos identificar el sistema mediante un modelo de filtro FIR, la solución al conjunto de ecuaciones dadas por (6.2.4) es suficiente. Sin embargo, en diversas aplicaciones el modelo puede ser variante en el tiempo, y el filtro debe adaptarse a estos cambios, por lo que es necesario introducir un componente que le de mayor importancia los datos más recientes e ir minimizando la importancia de los datos pasados [29].

Es conveniente expresar este algoritmo en forma matricial para simplificar la notación y además, ya que estos algoritmos serán recursivos en el tiempo, es necesario introducir un índice temporal en el vector de coeficientes a estimar.

Así, definimos al vector de coeficientes del filtro adaptable al tiempo  $n$  como:

$$\mathbf{h}_M(n) = \begin{bmatrix} h(0, n) \\ h(1, n) \\ h(2, n) \\ \vdots \\ h(M-2, n) \\ h(M-1, n) \end{bmatrix} \quad (6.2.5)$$

Donde el subíndice denota la longitud del vector asociado a los parámetros del filtro. Similarmente tenemos que el vector de entrada al filtro en un tiempo  $n$  es:

$$\mathbf{X}_M(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ x(n-2) \\ \vdots \\ x(n-M+2) \\ x(n-M+1) \end{bmatrix} \quad (6.2.6)$$

Y asumimos que  $x(n) = 0$  para tiempos  $n < 0$ , lo cual es llamado generalmente *preventaneo* de la señal.

El algoritmo recursivo se puede formular de la siguiente manera:

Supongamos que hemos observado los diferentes vectores  $\mathbf{X}_M(l)$   $l = 0, 1, 2, \dots, n$  y deseamos determinar los coeficientes del filtro  $\mathbf{h}_M(n)$  que minimicen el error según el criterio que hemos seleccionado:

$$\xi_M = \sum_{l=0}^n \omega^{n-l} [e_M(l, n)]^2 \quad (6.2.7)$$

Donde el error es definido como la diferencia entre el valor deseado y el valor estimado:

$$\begin{aligned} e_M(l, n) &= y(l) - \hat{y}(l, n) \\ &= y(l) - \mathbf{h}_M^T(n) \mathbf{X}_M(l) \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Y  $\omega$  es un factor de peso en el rango de  $0 < \omega < 1$ .

El propósito del factor  $\omega$  es darle mayor peso a los valores más recientes, logrando con esto que los coeficientes se adapten a un comportamiento estadístico variante con el tiempo. Esto se logra usando un factor del tipo exponencial. Alternativamente podemos usar una ventana deslizante de duración finita [29].



La minimización del error  $\xi_M$  con respecto al vector de coeficientes del filtro  $\mathbf{h}_M(n)$  arroja un conjunto de ecuaciones del siguiente tipo:

$$\mathbf{R}_M(n)\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{D}_M(n) \quad (6.2.9)$$

Donde  $\mathbf{R}_M(n)$  es la matriz (estimada) de correlación, definida como:

$$\mathbf{R}_M(n) = \sum_{l=0}^n \omega^{n-l} \mathbf{X}_M^*(l) \mathbf{X}_M^T(l) \quad (6.2.10)$$

Y  $\mathbf{D}_M(n)$  es el vector (estimado) de correlación cruzada, definido como:

$$\mathbf{D}_M(n) = \sum_{l=0}^n \omega^{n-l} \mathbf{X}_M^*(l) y(l) \quad (6.2.11)$$

Y la solución es:

$$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{R}_M^{-1}(n) \mathbf{D}_M(n) \quad (6.2.12)$$

Debemos notar que para valores pequeños de  $n$  la matriz  $\mathbf{R}_M(n)$  pueda no ser invertible, en cuyo caso se acostumbra inicialmente sumar a la matriz  $\mathbf{R}_M(n)$  una matriz identidad multiplicada por un factor positivo  $\mathbf{I}_M(n)$ , cuyo efecto desaparece debido a la adaptabilidad del filtro. Supongamos que tenemos la solución al tiempo  $n-1$ , por lo que poseemos  $\mathbf{h}_M(n-1)$  y deseamos calcular  $\mathbf{h}_M(n)$ . Sería impráctico e ineficiente calcular la solución del conjunto de  $M$  ecuaciones para cada valor componente de la señal, por lo tanto calculamos los vectores y matrices de forma recursiva. Primero calculamos la matriz  $\mathbf{R}_M(n)$  de la siguiente manera [29]:

$$\mathbf{R}_M(n) = \omega \mathbf{R}_M(n-1) + \mathbf{X}_M^*(n) \mathbf{X}_M^T(n) \quad (6.2.13)$$

Llamamos a esta expresión la ecuación de actualización temporal de  $\mathbf{R}_M(n)$ .

Y ya que necesitamos la inversa de  $\mathbf{R}_M(n)$  usamos el lema de inversión matricial:

$$\mathbf{R}_M^{-1}(n) = \frac{1}{\omega} \left[ \mathbf{R}_M^{-1}(n-1) - \frac{\mathbf{R}_M^{-1}(n) \mathbf{X}_M^*(n) \mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{R}_M^{-1}(n-1)}{\omega + \mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{R}_M^{-1}(n-1) \mathbf{X}_M^*(n)} \right] \quad (6.2.14)$$

Así,  $\mathbf{R}_M^{-1}(n)$  puede ser calculada recursivamente.

Por conveniencia, definimos  $\mathbf{P}_M(n) = \mathbf{R}_M^{-1}(n)$ . Es también conveniente definir un vector  $M$ -dimensional  $\mathbf{K}_M(n)$ , algunas veces llamado *ganancia de Kalman*:

$$\mathbf{K}_M(n) = \frac{1}{\omega + \mu_M(n)} \mathbf{P}_M(n-1) \mathbf{X}_M^*(n) \quad (6.2.15)$$

Donde  $\mu_M(n)$  es un escalar definido como:

$$\mu_M(n) = \mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{P}_M(n-1) \mathbf{X}_M^*(n) \quad (6.2.16)$$

Con estas definiciones la ecuación (6.2.14) se reescribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}_M(n) = \frac{1}{\omega} \left[ \mathbf{P}_M(n-1) - \mathbf{K}_M(n) \mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{P}_M(n-1) \right] \quad (6.2.17)$$

Por lo que la ecuación (6.2.12) se puede reescribir usando la definición  $\mathbf{P}_M(n) = \mathbf{R}_M^{-1}(n)$

$$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{P}_M(n) \mathbf{D}_M(n) \quad (6.2.18)$$

Y siguiendo un procedimiento análogo, la expresión recursiva de  $\mathbf{D}_M(n)$ :

$$\mathbf{D}_M(n) = \omega \mathbf{D}_M(n-1) + d(n) \mathbf{X}_M^*(n) \quad (6.2.19)$$

Por lo que sustituyendo las ecuaciones (6.2.17) y (6.2.19) en (6.2.18) tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_M(n) &= \frac{1}{\omega} \left[ \mathbf{P}_M(n-1) - \mathbf{K}_M(n) \mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{P}_M(n-1) \right] \times [\omega \mathbf{D}_M(n-1) + d(n) \mathbf{X}_M^*(n)] \\
&= \mathbf{P}_M(n-1) \mathbf{D}_M(n-1) + \frac{1}{\omega} d(n) \mathbf{P}_M(n-1) \mathbf{X}_M^*(n) \\
&\quad - \mathbf{K}_M(n) \mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{P}_M(n-1) \mathbf{D}_M(n-1) - \frac{1}{\omega} d(n) \mathbf{K}_M(n) \mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{P}_M(n-1) \\
&= \mathbf{h}_M(n-1) + \mathbf{K}_M(n) \left[ d(n) - \mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{h}_M(n-1) \right]
\end{aligned} \tag{6.2.20}$$

Observamos que  $\mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{h}_M(n-1)$  es la salida del filtro adaptable al tiempo  $n$  basado en el uso del filtro al tiempo  $n-1$ , ya que:

$$\mathbf{X}_M^T(n) \mathbf{h}_M(n-1) = \hat{d}(n, n-1) \equiv \hat{d}(n) \tag{6.2.21}$$

Y además:

$$e_M(n, n-1) = d(n) - \hat{d}(n, n-1) \equiv e_M(n) \tag{6.2.22}$$

Por lo que se tiene que la ecuación de actualización temporal para  $\mathbf{h}_M(n)$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{h}_M(n) = \mathbf{h}_M(n-1) + \mathbf{K}_M(n) e_M(n) \tag{6.2.23}$$

El diagrama de flujo del algoritmo RLS se muestra en la figura 6.5 y a continuación se presentan los pasos del Algoritmo RLS [17]:

- **Inicialización:** Inicializar el algoritmo con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{w}}(0) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{P}(0) &= \delta^{-1} \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Y se tiene que:

$$\delta = \begin{cases} \text{Constante positiva pequeña para un valor alto de SNR.} \\ \text{Constante positiva grande para un valor bajo de SNR.} \end{cases}$$

$\lambda = \text{Factor de memoria.}$

- **Recursión:** Para cada instante de tiempo  $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\pi(n) &= \mathbf{P}(n-1) \mathbf{u}(n-1) \\
\mathbf{k}(n) &= \frac{\pi(n)}{\lambda + \mathbf{u}^H(n) \pi(n)} \\
\xi(n) &= d(n) - \hat{\mathbf{w}}^H(n-1) \mathbf{u}(n) \\
\hat{\mathbf{w}}(n) &= \hat{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{k}(n) \xi^*(n)
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\mathbf{P}(n) = \lambda^{-1} \mathbf{P}(n-1) - \lambda^{-1} \mathbf{k}(n) \mathbf{u}^H(n) \mathbf{P}(n-1)$$

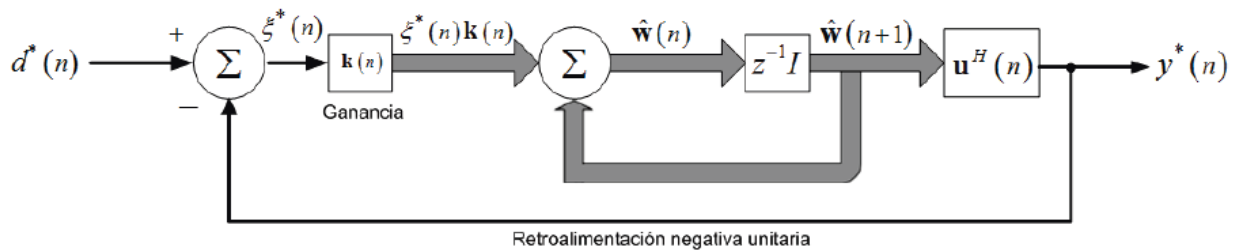


Figura 6.5: Diagrama de flujo del algoritmo RLS

### 6.3. Filtros RLS rápidos

Pensando en que las herramientas propuestas deben de aplicarse a la prótesis es necesario considerar el uso de versiones rápidas del algoritmo de filtrado RLS, las cuales son convenientes debido a que requieren menor número de operaciones, con una consecuencia en reducción de tiempo de cálculo y de energía consumida por el procesador. Existen una diversidad de algoritmos rápidos y en este documento se citará el algoritmo propuesto por Cioffi y Kailath [10] y el cual es uno de los algoritmos más ampliamente utilizados.

Así, este algoritmo rápido se reduce a los siguientes pasos [30] :

- **Inicialización:** Inicializar el algoritmo con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \alpha_p^f(0) &= \delta > 0 \\ \alpha_p^b(0) &= \lambda^{-p} \delta \\ \gamma_p(0) &= 1 \\ \mathbf{A}_p(0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_p(0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_p(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Y se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{Factor de memoria.} \\ \mathbf{A}_p(n) &= \text{Vector de coeficientes del filtro adaptable.} \\ p &= \text{Orden del filtro.} \end{aligned}$$

- **Recursión:** Para cada instante de tiempo  $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
e_p^f(n) &= u(n) + \mathbf{A}_p^T(n-1)\mathbf{u}(n-1) \\
\mathbf{A}_p(n) &= \mathbf{A}_p(n-1) + \mathbf{K}_p(n-1)e_p^{f*} \\
\varepsilon_p^f(n) &= e_p^f(n)\gamma_p(n-1) \\
\alpha_p^f(n) &= \lambda\alpha_p^f(n-1) + \varepsilon_p^f(n)e_p^{f*} \\
\gamma_{p+1}(n) &= \gamma_p(n-1) - \varepsilon_p^{f*}\alpha_p^f(n)^{-1}\varepsilon_p^f(n) \\
\mathbf{K}_{p+1}(n) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_p(n-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{A}_p(n) \end{bmatrix} \alpha_p^f(n)^{-1} \varepsilon_p^f(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p(n) \\ \mu(n) \end{bmatrix} \\
e_p^b(n) &= -\lambda\alpha_p^b(n-1)\mu(n)\gamma_{p+1}(n)^{-1} \\
\gamma_p(n) &= \gamma_{p+1}(n)[1 + e_p^{b*}\mu(n)]^{-1} \\
\varepsilon_p^b(n) &= e_p^b(n)\gamma_p(n) \\
\alpha_p^b(n) &= \lambda\alpha_p^b(n-1) + \varepsilon_p^b(n)e_p^{b*} \\
\mathbf{K}_p(n) &= [\mathbf{M}_p(n) - \mathbf{B}_p(n-1)\mu(n)][1 + e_p^{b*}\mu(n)]^{-1} \\
\mathbf{B}_p(n) &= \mathbf{B}_p(n-1) + \mathbf{K}_p(n)e_p^{b*}
\end{aligned}$$

En este algoritmo el vector de coeficientes  $\mathbf{A}_p(n)$  corresponde al vector de los coeficientes del filtro adaptable. Cabe destacar que mientras el algoritmo RLS necesita de  $2p^2 + 4p$  sumas y multiplicaciones por recursión, el algoritmo rápido abordado requiere  $10p+3$  sumas y multiplicaciones por recursión (donde  $p$  es el orden del filtro) [18].

El parámetro  $\gamma$  definido en el algoritmo previo se conoce como el error de estimación y es un escalar real cuyo valor se encuentra entre  $0 < \gamma \leq 1$  [17]. Este parámetro tiene diferentes interpretaciones dependiendo del contexto en el que se utilice [17], puede ser visto como una variable de verosimilitud (*likelihood variable*) y puede ser un indicativo del grado de estacionaridad de la señal.

Por lo que es posible establecer un margen dentro del cual este parámetro sea un indicativo de que los coeficientes del filtro adaptable asociado a la señal no han cambiado en gran medida y no es necesario modificar los parámetros obtenidos de analizar la señal y que representan la información suministrada a la etapa de control.

Observemos ahora el comportamiento de los estimados de los parámetros en nuestro proceso AR(5) no estacionario mediante el algoritmo LMS normalizado y el RLS. Se omite en la comparación el algoritmo LMS debido a que la varianza de los estimados es muy grande respecto a los estimados del algoritmo LMS normalizado y RLS. Por lo que el algoritmo LMS es inferior en desempeño al LMS normalizado y más aún al RLS, en las siguientes figuras se observa el comportamiento de los parámetros estimados:

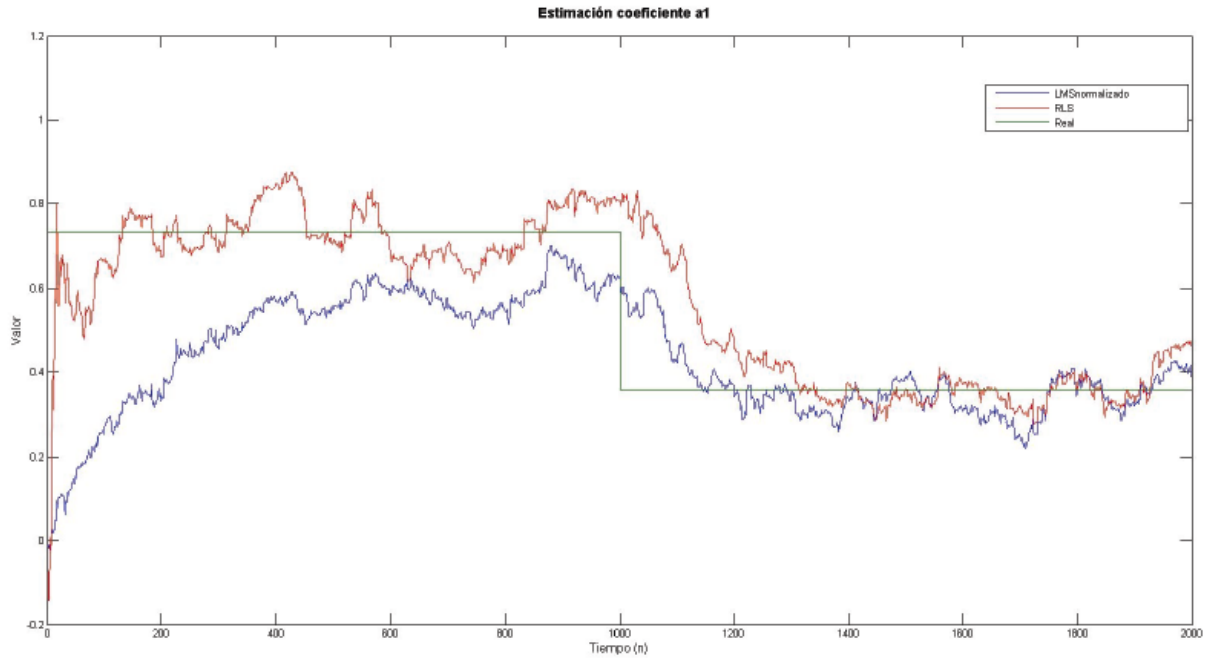


Figura 6.6: Evolución temporal del coeficiente 1 estimado del proceso  $AR(5)$  no estacionario

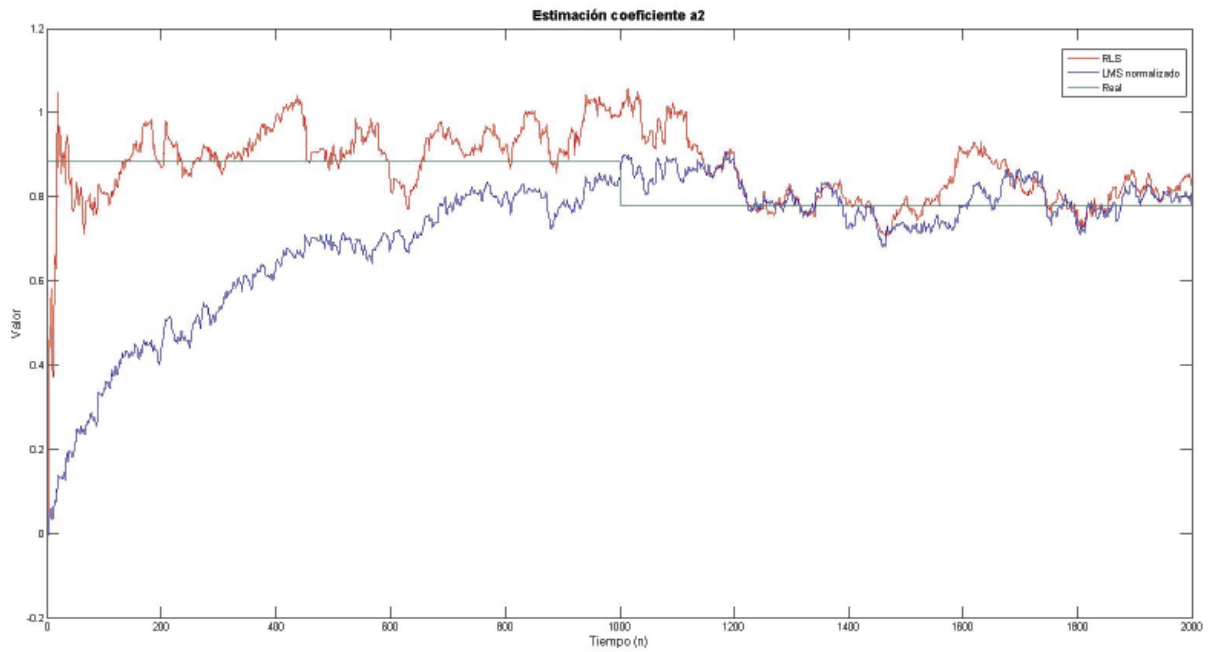


Figura 6.7: Evolución temporal del coeficiente 2 estimado del proceso  $AR(5)$  no estacionario

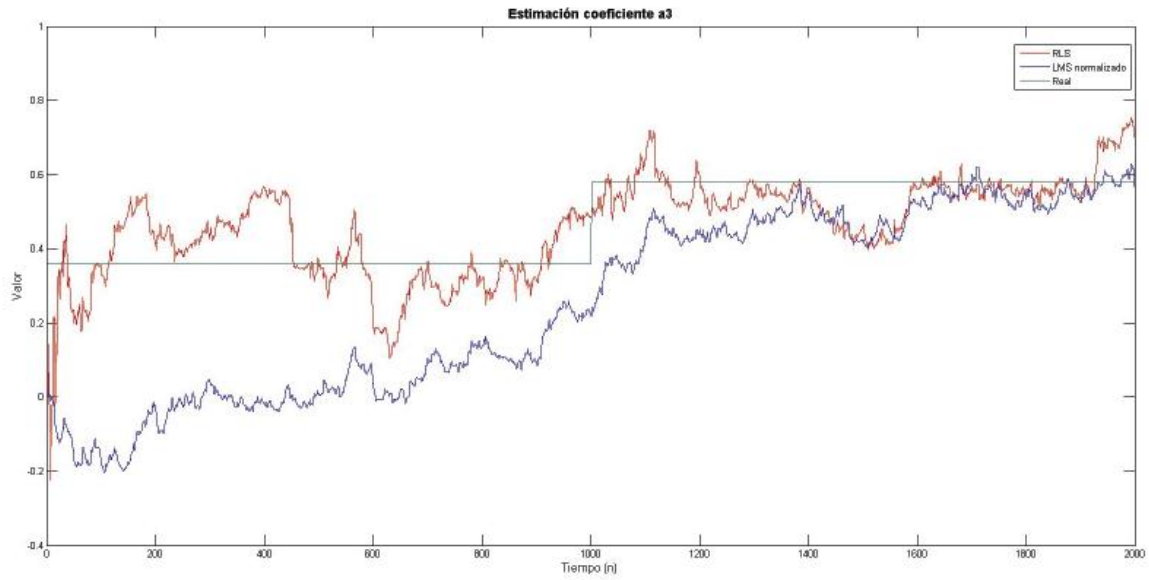


Figura 6.8: Evolución temporal del coeficiente 3 estimado del proceso  $AR(5)$  no estacionario

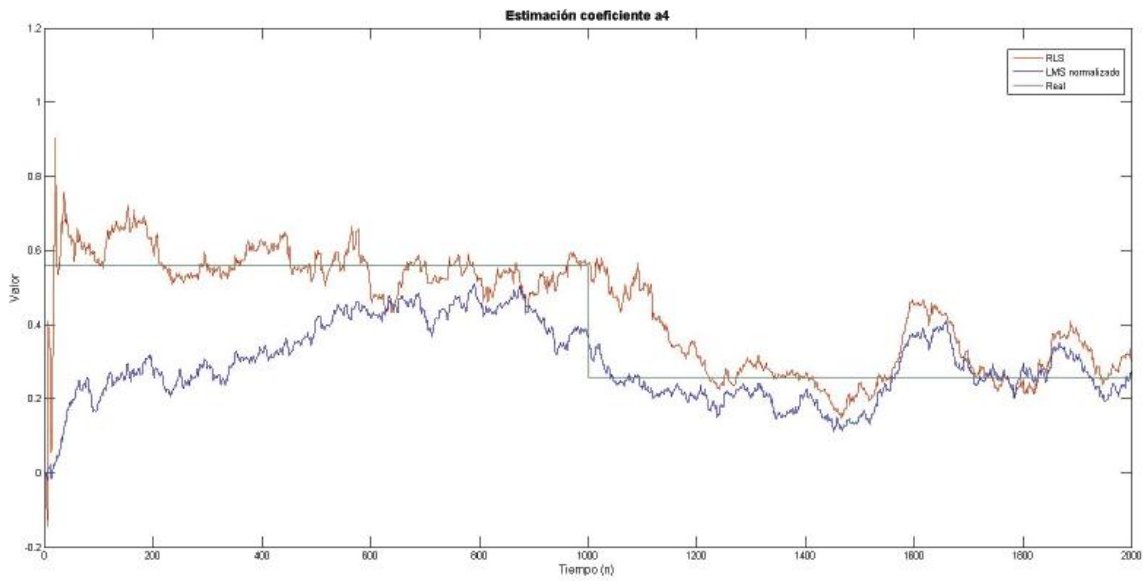


Figura 6.9: Evolución temporal del coeficiente 4 estimado del proceso  $AR(5)$  no estacionario

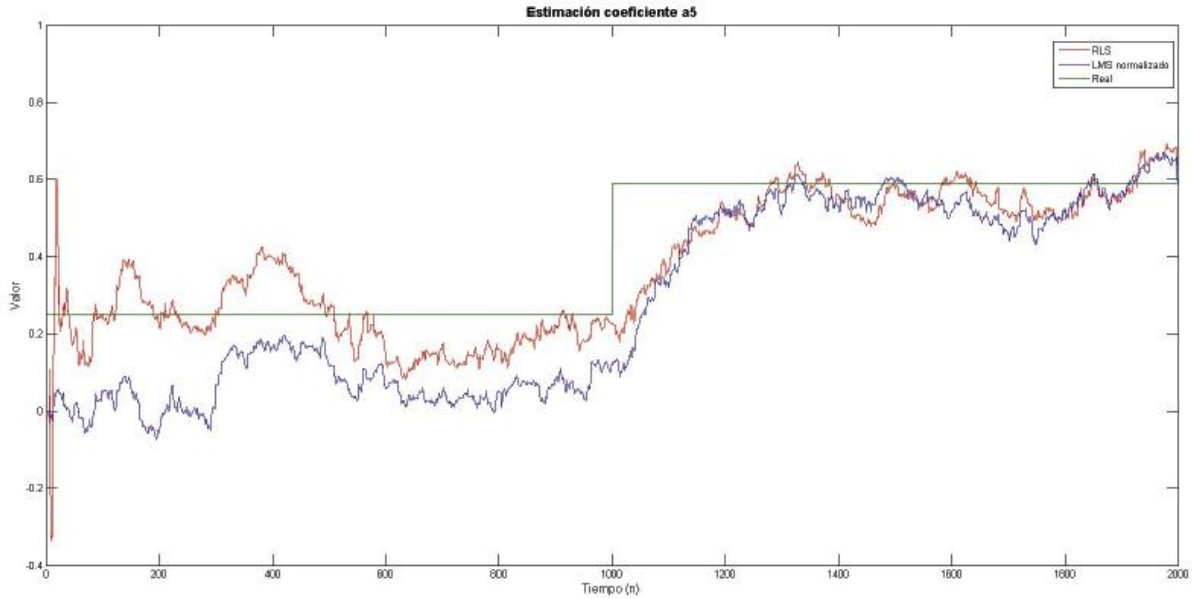


Figura 6.10: Evolución temporal del coeficiente 5 estimado del proceso AR(5) no estacionario

Haciendo uso del conjunto de coeficientes para cada instante de tiempo y empleando la expresión (5.2.9) podemos estimar la densidad espectral de potencias. A continuación se muestra la densidad de potencias teórica y estimada para nuestro ejemplo de proceso AR(5) no estacionario:

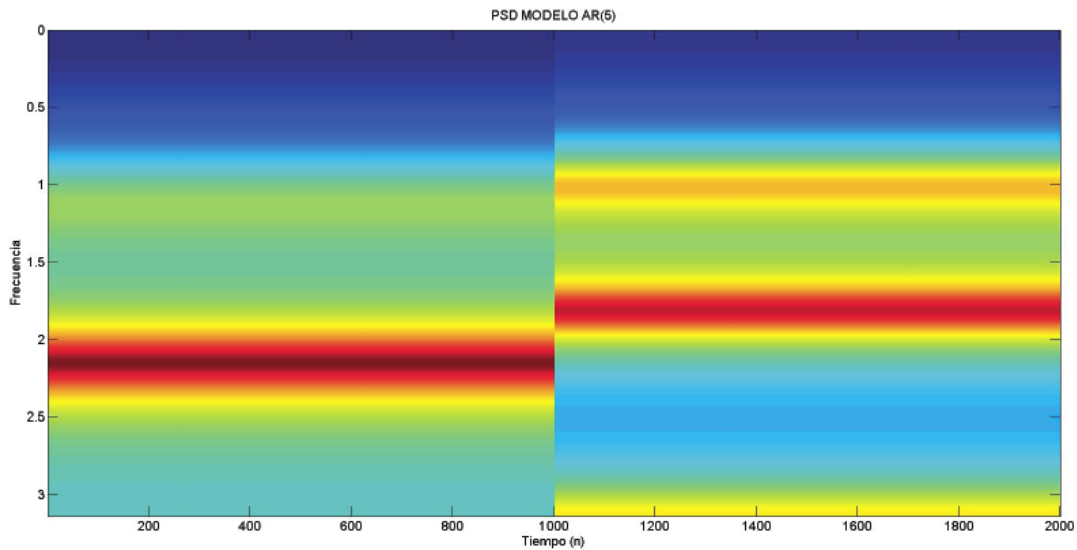
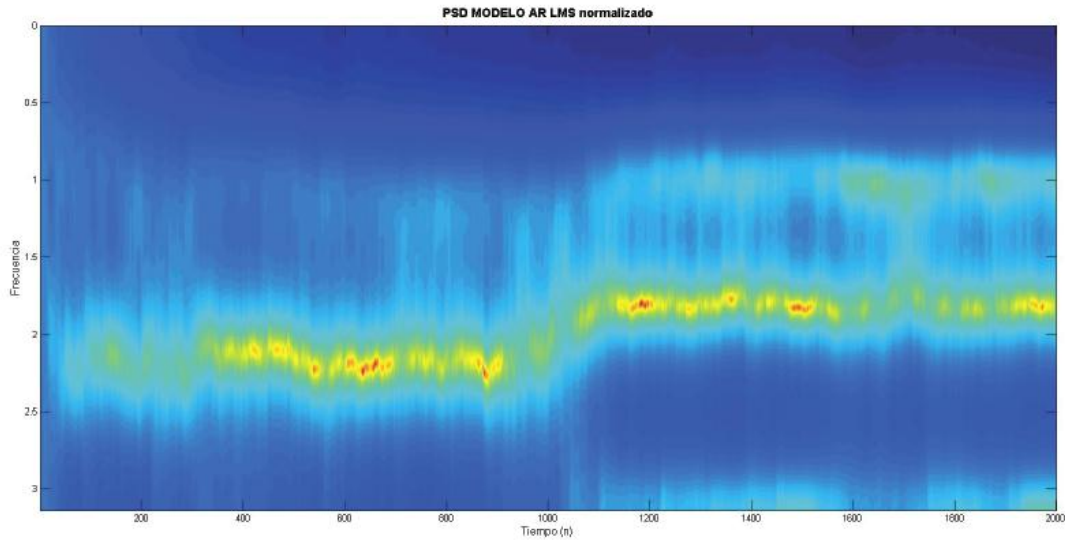
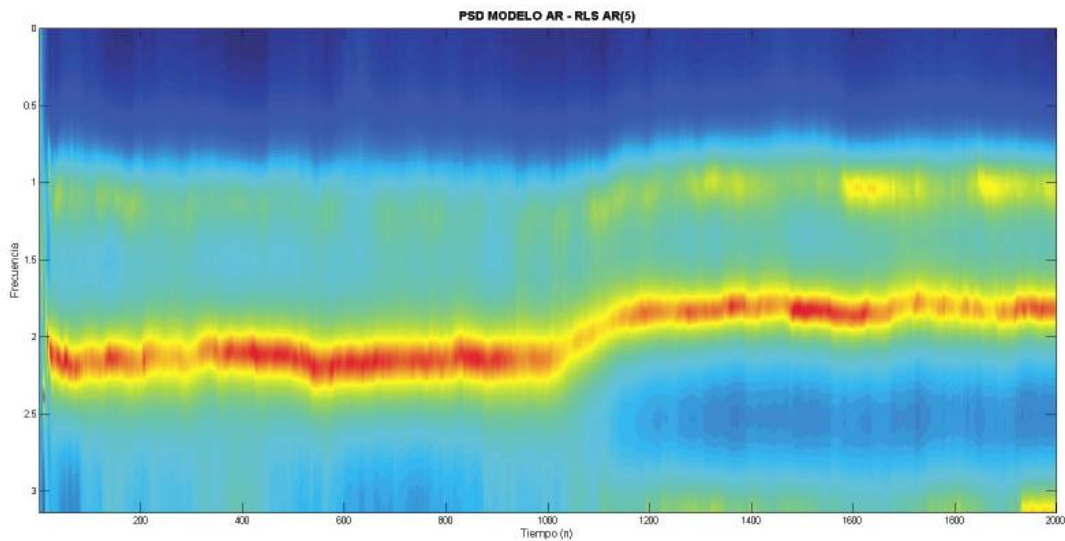


Figura 6.11: Evolución temporal de densidades espectrales de potencias teóricas del proceso AR(5) no estacionario



**Figura 6.12:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas mediante LMS normalizado para el proceso  $AR(5)$  no estacionario



**Figura 6.13:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas mediante RLS para el proceso  $AR(5)$  no estacionario

Observamos que los estimados mediante el algoritmo RLS son mejores que los arrojados por el LMS normalizado, lo anterior a costa de la mayor demanda computacional del algoritmo RLS. Aplicaremos las mismas herramientas a las señales mioeléctricas reales en la sección de evaluación de algoritmos.

Ahora observemos la evolución temporal del parámetro  $\gamma(n)$  el cual se utilizará como indicador del grado de estacionaridad. Por lo que para nuestro ejemplo de proceso  $AR(5)$  no estacionario se tiene:



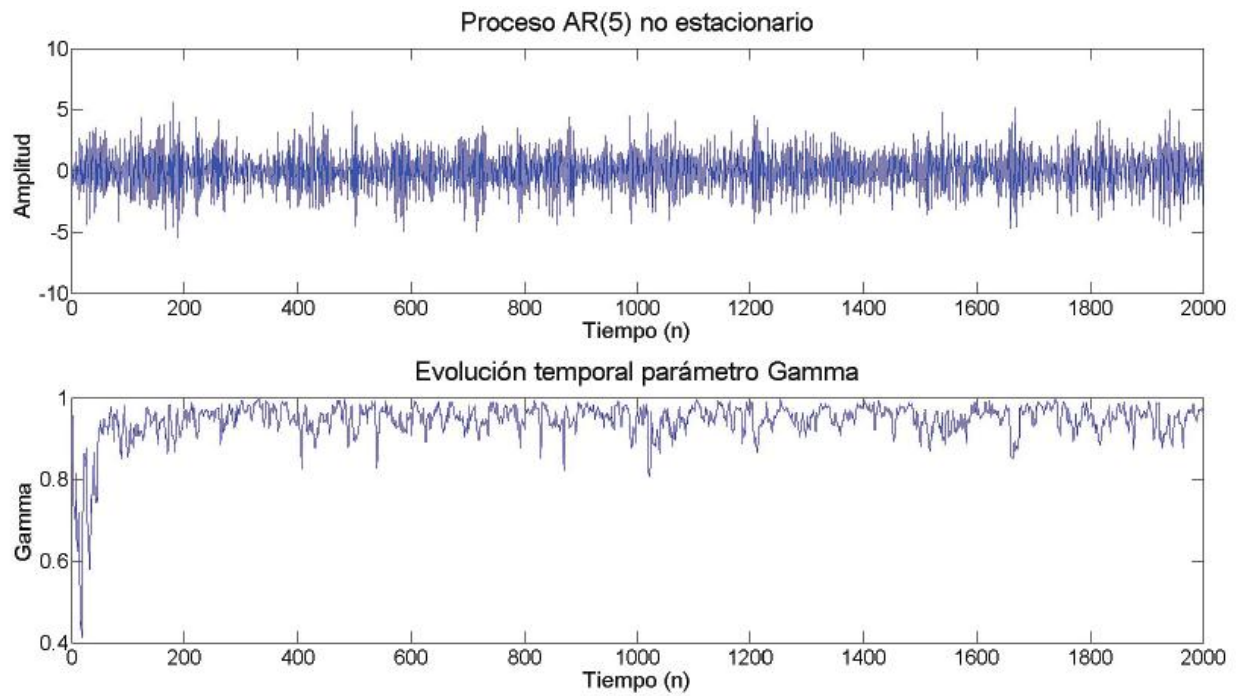


Figura 6.14: Evolución temporal del parámetro  $\gamma$

Observamos que después del tiempo de convergencia la máxima variación del parámetro  $\gamma$  encuentra cercana al instante de tiempo  $n = 1000$  que es donde el proceso cambia de modelo, también podemos observar instante donde existe una variación considerable del parámetro, cambio asociado a un cambio mayor entre los valores de los coeficientes del filtro.

## Capítulo 7

# Análisis de componentes principales

El análisis de componentes principales (PCA) y las transformadas relacionadas de Karhunen-Loève y de Hotelling son técnicas estadísticas clásicas de análisis de datos, extracción de características, compresión de datos y cuyo resultado proviene del trabajo de Pearson [20]. En la figura 7.1 se observa la estructura en la cual se utiliza el PCA para reducir la redundancia de los datos que se transmitirán a la etapa de control.

Dado un conjunto de medidas multivariantes, nuestro propósito es encontrar otro conjunto con menor redundancia que otorgue una buena representación del conjunto original. En PCA la redundancia es medida respecto a las correlaciones existentes entre los elementos, mientras que en ICA el concepto, mucho más rico, de independencia es usado. Usando el análisis de correlación, PCA tiene la ventaja de que sólo son necesarias medidas estadísticas de segundo orden. PCA se limita a encontrar señales que son Gaussianas y no correlacionadas [32].

Por lo que nuestro objetivo es reducir una serie de datos  $X$  de dimensión  $M$  a otra serie de datos  $Y$  de una menor dimensión  $L$ , para aportar datos no redundantes a la etapa de control. Existe una gran variedad de criterios para determinar los componentes principales. En este trabajo nos delimitaremos a estudiar un criterio muy utilizados debido a su rendimiento y su facilidad de implementación; PCA mediante maximización de la varianza [32].

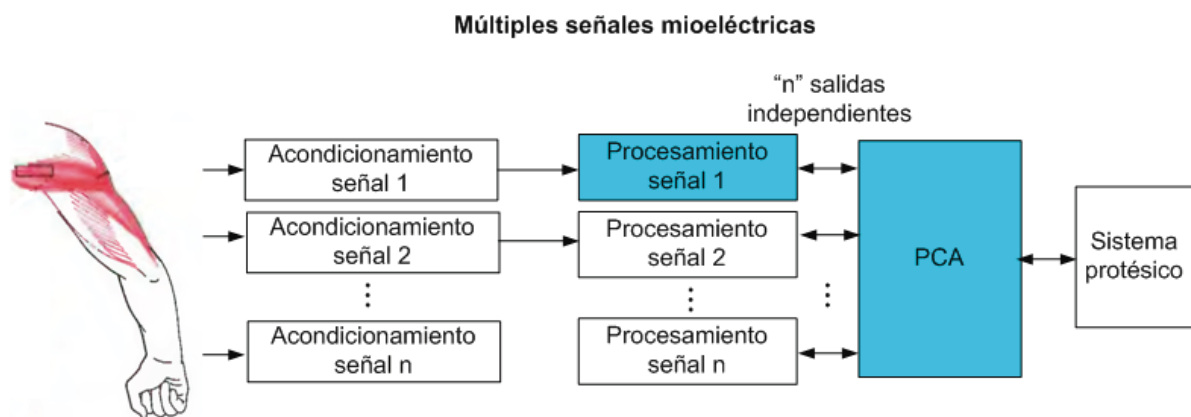


Figura 7.1: Estructura de procesamiento involucrando PCA

## 7.1. PCA mediante maximización de la varianza

Consideremos la combinación lineal:

$$y_1 = \sum_{k=1}^n w_{k1} x_k = \mathbf{w}_1^T \mathbf{x}$$

de los elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  del vector  $\mathbf{x}$ . Los valores  $w_{11}, w_{21}, \dots, w_{n1}$  son coeficientes escalares, elementos de un vector  $n$ -dimensional  $\mathbf{w}_1$ , y  $\mathbf{w}_1^T$  denota el transpuesto de  $\mathbf{w}_1$ .

El factor  $y_1$  se denominada primer componente principal de  $\mathbf{x}$ , si la varianza de  $y_1$  es máxima. Debido a que la varianza depende tanto de la norma y orientación del vector  $\mathbf{w}_1$  y crece sin límite mientras la norma crece, imponemos la restricción de que la norma de  $\mathbf{w}_1$  sea constante, en la practica unitaria. Así lo que buscamos es un vector  $\mathbf{w}_1$  que maximice este criterio de PCA:

$$J_1^{PCA} \mathbf{w}_1 = E \{y_1^2\} = E \{(\mathbf{w}_1^T \mathbf{x})^2\} = \mathbf{w}_1^T E \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^T \} \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}_1 \quad (7.1.1)$$

De tal manera que  $\|\mathbf{w}_1\| = 1$ .

Donde  $E\{\cdot\}$  es la esperanza matemática sobre la (desconocida) densidad del vector de entrada  $\mathbf{x}$  y la norma de  $\mathbf{w}_1$  es la norma Euclidiana definida como:

$$\|\mathbf{w}_1\| = (\mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_1)^{1/2} = \left[ \sum_{k=1}^n w_{k1}^2 \right]^{1/2}$$

Y la matriz  $\mathbf{C}_x$  es matriz de covarianza de tamaño  $n \times n$ :

$$\mathbf{C}_x = E \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^T \}$$

Del álgebra lineal básica encontramos que la solución al problema de PCA es dado en términos de los vectores propios unitarios  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  de la matriz  $\mathbf{C}_x$ . El orden de los vectores propios es tal que corresponde a los valores propios  $d_1, d_2, \dots, d_n$  satisfaciendo que  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ . La solución que se encuentra al maximizar la ecuación (7.1.1) esta dada por:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1$$

Así, el primer componente principal de  $\mathbf{x}$  es  $y_1 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}$ .

El criterio  $J_1^{PCA}$  de la ecuación (7.1.1) puede generalizarse a los  $m$ -componentes principales mediante  $y_m = \mathbf{w}_m^T \mathbf{x}$ , con  $\mathbf{w}_m$  como el correspondiente vector de norma unitaria, la varianza de  $y_m$  es ahora maximizada usando la restricción de que  $y_m$  no está correlacionada con los componentes principales encontrados previamente.

$$E \{y_m y_k\} = 0, \quad k < m \quad (7.1.2)$$

Notemos que los componentes principales  $y_m$  poseen media zero:

$$E \{y_m\} = \mathbf{w}_m^T E \{ \mathbf{x} \} = 0$$

La condición dada por (7.1.2) lleva a que:

$$E \{y_m y_k\} = E \{ \mathbf{w}_m^T \mathbf{x} \mathbf{w}_k^T \mathbf{x} \} = \mathbf{w}_m^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}_k = 0 \quad (7.1.3)$$

Algoritmo de PCA mediante maximización de la varianza:

1. **Organizamos el conjunto de datos compuesto** de  $N$  observaciones de  $M$  variables, y queremos reducir los datos de tal manera que cada observación sea descrita con solo  $L$  variables ( $L < M$ ). Los datos se acomodan de tal manera que cada columna de la matriz de los datos observados correspondan a cada una de las  $N$  observaciones de las  $M$  variables:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & x_{1,N} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \dots & x_{2,N} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \dots & x_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{M,1} & x_{M,2} & x_{M,3} & \dots & x_{M,N} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \dots \ \mathbf{x}_N] \quad (7.1.4)$$

2. **Calculamos el promedio** en cada una de las dimensiones  $m = 1, 2, 3, \dots, M$ . Posteriormente creamos un vector  $\mathbf{u}$  de dimensión  $M \times 1$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{X}[m, n] \quad (7.1.5)$$

3. **Calculamos la desviación del promedio**, para lo cual restamos el vector de promedios  $\mathbf{u}$  de cada una de las columnas de la matriz  $\mathbf{X}$  y almacenamos el nuevo conjunto de datos (el cual ahora ya ha sido “centrado”) en una matriz  $\mathbf{B}$  de  $M \times N$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{X} - \mathbf{u}\mathbf{h} \quad (7.1.6)$$

Donde  $\mathbf{h}$  es un vector de valores unitarios de tamaño  $1 \times N$ :

$$\mathbf{h}[n] = 1 \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (7.1.7)$$

4. **Encontrar la matriz de covarianza:** Para esto calculamos la matriz  $\mathbf{C}$  de tamaño  $M \times M$  haciendo el producto vectorial de la matriz  $\mathbf{B}$  con ella misma:

$$\mathbf{C} = E \{ \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \} = E \{ \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{*T} \} \quad (7.1.8)$$

5. **Calcular la matriz  $\mathbf{V}$  de vectores propios** que diagonalice la matriz de covarianza  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V} = \mathbf{D} \quad (7.1.9)$$

Donde  $\mathbf{D}$  es la matriz diagonal de valores propios de  $\mathbf{C}$ , y tomará la forma de una matriz de tamaño  $M \times M$

6. **Reacomodar los valores y vectores propios:** Ordenamos las columnas de la matriz de vectores propios  $\mathbf{V}$  y la matriz de valores propios  $\mathbf{D}$  en orden decreciente respecto a los valores propios, asegurándose de que sean correctos la relación entre las columnas de cada matriz.
7. **Calcular la energía acumulada en en cada vector propio:** Los valores propios representan la cantidad de energía de los datos a lo largo de cada vector propio, donde los vectores propios forman una base para los datos. La contenido energético acumulado  $\mathbf{g}$  para el  $m$  vector propio es la suma de energía desde el valor propio 1 hasta el valor propio  $m$ .

$$\mathbf{g}[m] = \sum_{q=1}^m \mathbf{D}[q, q] \quad m = 1, 2, 3, \dots, M \quad (7.1.10)$$

8. Seleccionar un subconjunto de los  $L$  vectores propios como vectores que definen una base, y se almacenan en una matriz  $W$ . Para seleccionar el valor de  $L$  se debe de elegir el valor menor posible de tal manera que el posea un alto valor de  $g$ , el cual se relaciona con el contenido energético.

$$W[p, q] = V[p, q] \quad p = 1, 2, \dots, M \quad q = 1, 2, \dots, L \quad (7.1.11)$$

donde  $1 \leq L \leq M$

9. Convertir los datos de origen a resultados “z”, para lo cual creamos un vector  $s$  de  $M \times 1$  de desviación estándar, calculado a partir de la raíz cuadrada de cada elemento a lo largo de la diagonal principal de la matriz de covarianza  $C$

$$s[m] = \sqrt{C[p, q]} \quad p = q = m = 1, 2, 3, \dots, M \quad (7.1.12)$$

Calculamos la matriz de resultado  $Z$  de tamaño  $M \times N$

$$Z = \frac{B}{s \cdot h} \quad (7.1.13)$$

10. Proyectar la matriz  $Z$  en la nueva base, los vectores proyectados son las columnas de la matriz:

$$Y = W^{*T} \cdot Z = \text{KLT}\{X\} \quad (7.1.14)$$

Las columnas de la matriz  $Y$  representan las transformadas Karhunen-Loeve (KLT) de los vectores de datos de  $X$

Si aplicamos PCA a nuestro ejemplo, podemos realizar tanto la tarea de comprimir, como de reducir redundancia existente entre una variedad de datos, como ejemplo, reduciremos la redundancia de los estimados de los coeficientes de nuestro ejemplo de proceso AR(5), para lo cual tomaremos los primeros 1000 estimados (correspondientes a las 1000 muestras generadas usando el primer conjunto de coeficientes AR). Ya que estos estimados se encuentran alrededor de los valores reales, existe un cierto grado de redundancia entre ellos, por lo que si aplicamos la técnica de PCA y consideramos a cada conjunto de parámetros como una variable, podemos reducir las 1000 variables a un menor número de ellas.

Así, al aplicar la estrategia de PCA propuesta, observamos que en el nuevo espacio generado por los vectores correspondientes a los componentes principales es posible obtener un solo conjunto de parámetros sobre el cual se concentra la mayor cantidad de energía acumulada. A continuación se muestran dos gráficas, la primera de ellas corresponde a cada juego de parámetros, donde cada recta representa uno de los estimados y la otra donde se muestra la representación de los datos en el espacio del primer componente principales:

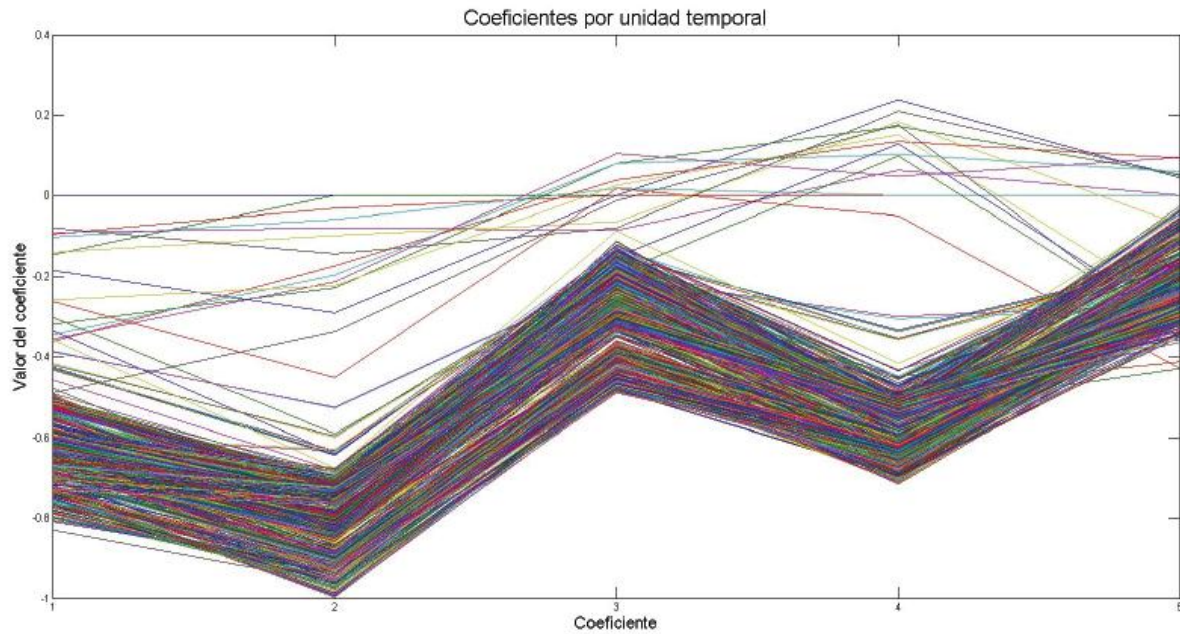


Figura 7.2: Coeficientes por unidad temporal de proceso  $AR(5)$ .

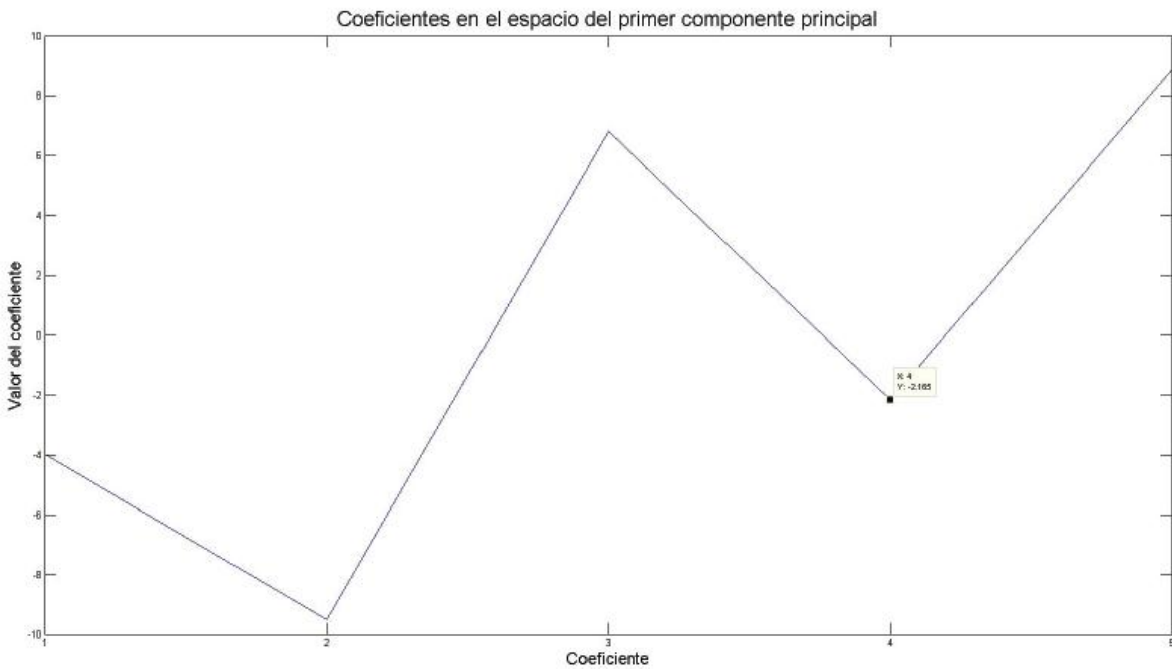


Figura 7.3: Coeficientes representados en el espacio asociado al primer componente principal.

De la misma manera en la que hemos reducido la redundancia existente es posible obtener una serie de datos de menor dimensión que la original que sea un buen representante de los datos que se desean enviar a la etapa de control. Aunque en este ejemplo se ha utilizado el PCA para reducir una serie de datos correspondientes a una serie de datos temporales, es posible utilizar el PCA para reducir un

conjunto de datos obtenidos por unidad de tiempo, los cuales pueden provenir de diferentes variables no relacionadas entre sí.

## Capítulo 8

# Evaluación del desempeño y evaluación de algoritmos

En este capítulo de la tesis se presentan la evaluación de las técnicas de procesamiento de señales descritas previamente aplicadas a señales reales. Se aplican las diferentes estrategias a las 3 señales reales que representan diferentes movimientos asociados con la actividad del bíceps.

### 8.1. Descripción del ambiente de trabajo

Como primer parte se presenta la herramienta de trabajo que se utilizará para analizar las señales mioeléctricas y consta de los algoritmos de procesamiento seleccionados para tratar a las señales. A continuación se muestra la herramienta de trabajo implementada:

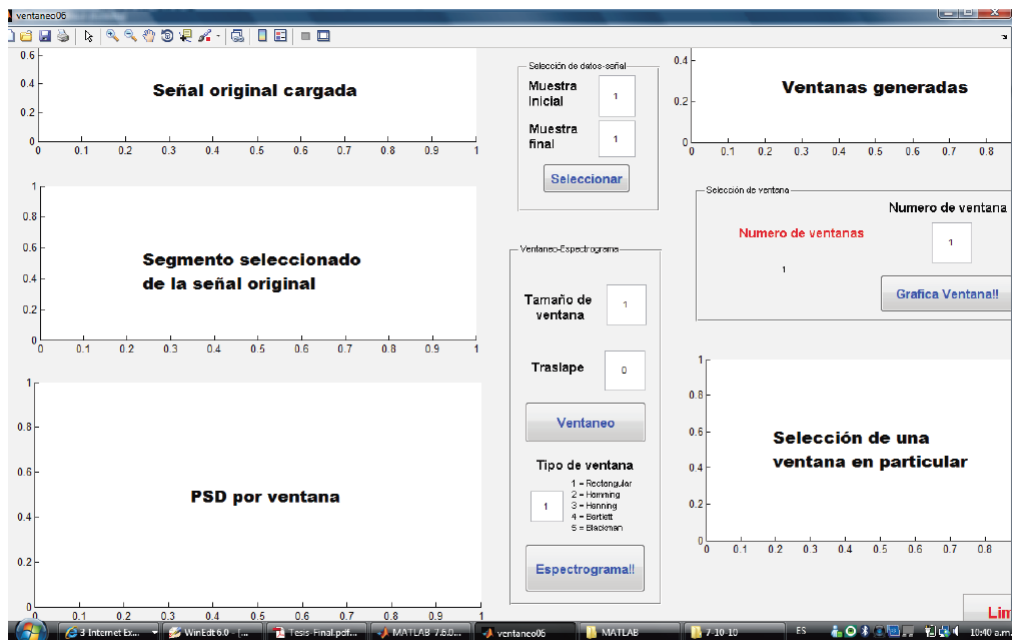


Figura 8.1: Ambiente de trabajo

Esta herramienta de trabajo permite analizar la densidad espectral de potencias bajo los enfoques propuestos, los cuales son:



- Métodos paramétricos:
  - Periodograma
  - Método de Blackman-Tukey
- Métodos no paramétricos:
  - Basado en modelo AR

El ambiente de trabajo es en forma el mismo, lo que cambia es la selección del método para estimar la densidad espectral de potencias de la señal. Esa herramienta permita cargar cualquier señal que este en el formato de documentos que sea capaz de abrir MATLAB y permite:

- 1 Visualizar la evolución temporal de la señal
- 2 Seleccionar un trozo de la señal original con la cual se trabajará
- 3 Dividir a la señal mediante el uso de ventanas de cierto tamaño y traslape
- 4 Estimar la densidad espectral de potencias para cada ventana
- 5 Seleccionar una ventana en particular y observar su densidad espectral de potencias

Haciendo el uso del ambiente de trabajo es posible comparar las densidades espectrales estimadas, así como seleccionar tamaños de ventana y traslapes adecuados para tratar a la señal en cuestión.

## 8.2. Resultados de aplicar las herramientas de procesamiento

En esta sección expondremos los resultados de usar las herramientas del procesamiento de señales seleccionadas en señales mioeléctricas obtenidas de un paciente masculino sano de 25 años de edad. Se realizaron 3 tipos de movimiento, a cada uno de las cuales se le asocia una realización de señal mioeléctrica: se realizó un movimiento de flexión completa en bíceps, una extensión completa, y se registró una señal mioeléctrica durante el cual el bíceps se encuentra totalmente contraído para una máxima fuerza de flexión en bíceps. A continuación se muestran las figuras que corresponden a una realización de cada uno de estos movimientos:

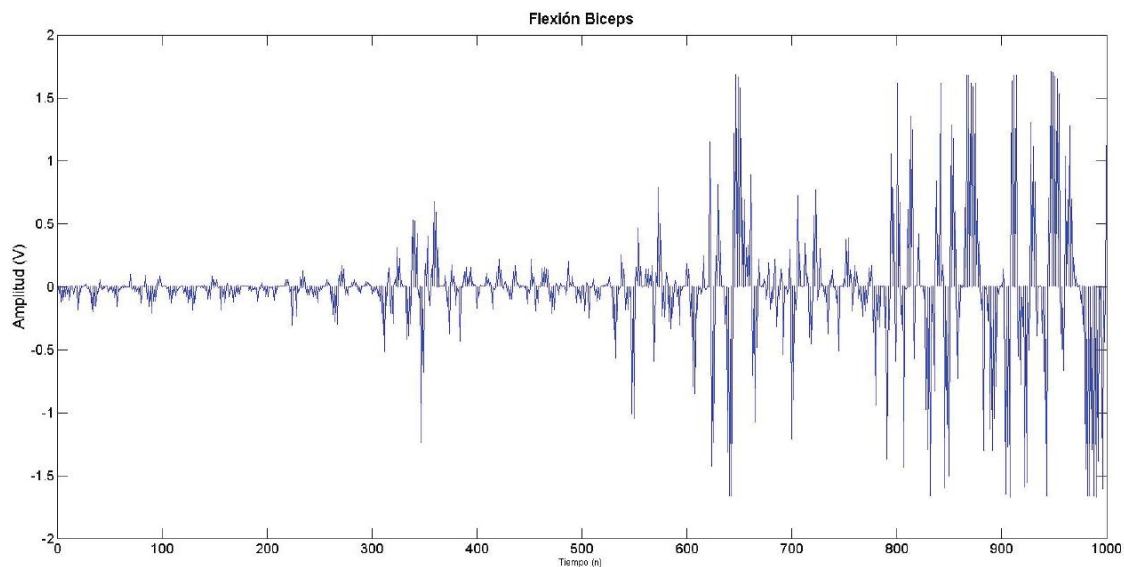
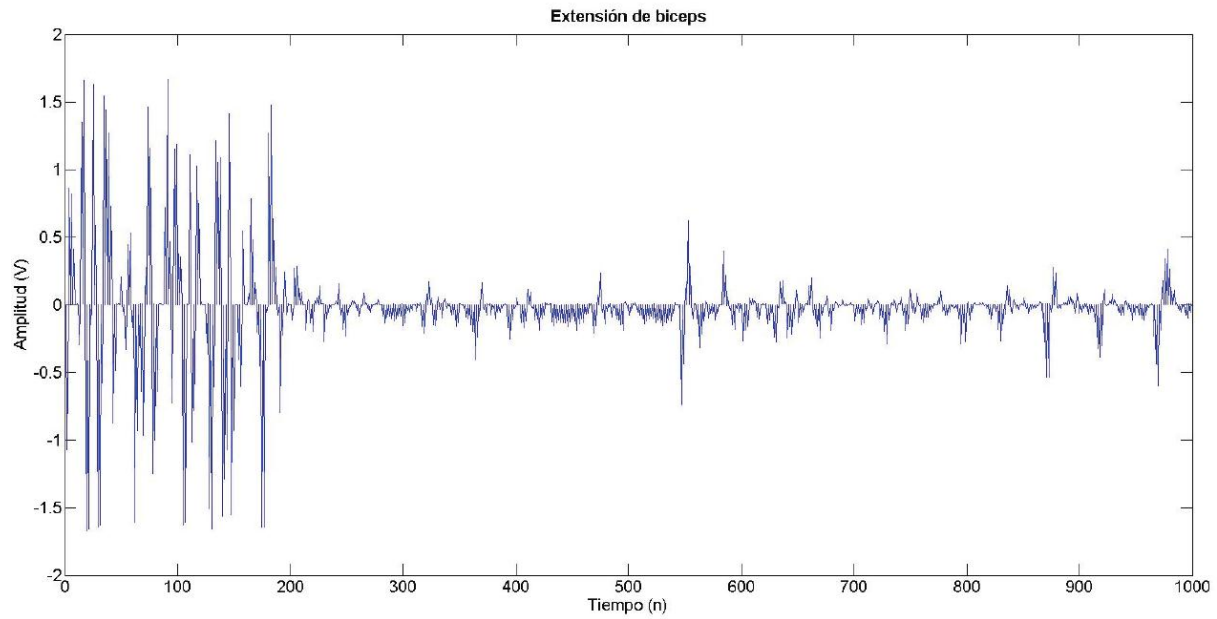
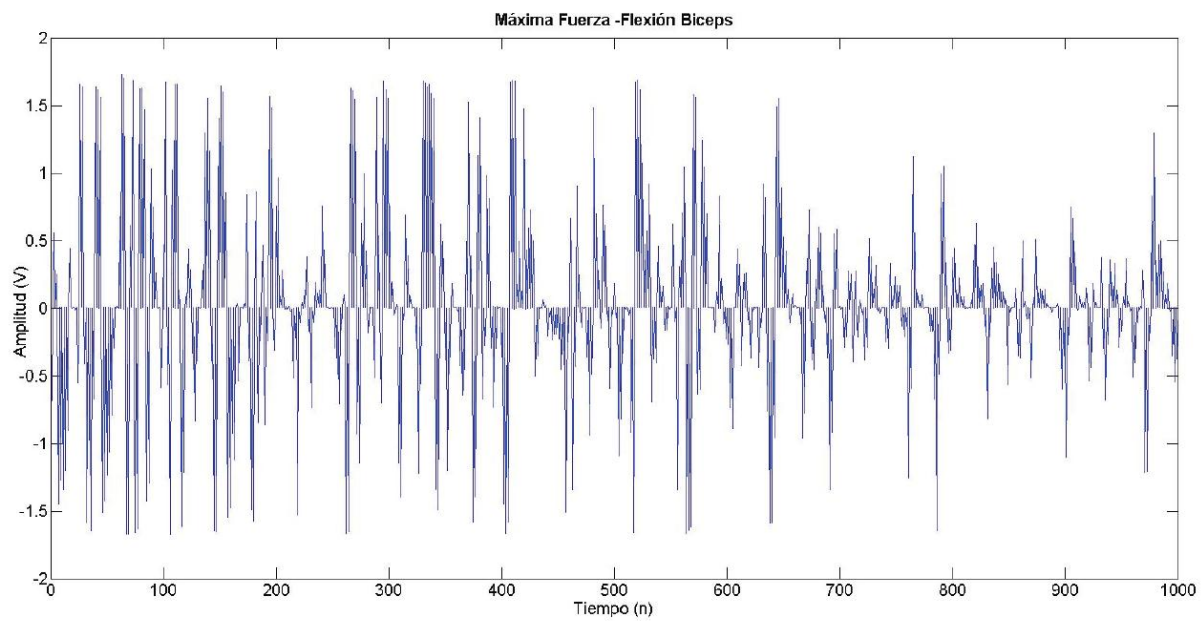


Figura 8.2: Una realización de señal EMG asociada a flexión de bíceps



**Figura 8.3:** Una realización de señal EMG asociada a extensión de bíceps



**Figura 8.4:** Una realización de señal EMG asociada a máxima fuerza en flexión de bíceps

Como primer parte analicemos las señales reales usando el ambiente de trabajo para análisis mediante periodograma y Blackman-Tukey:

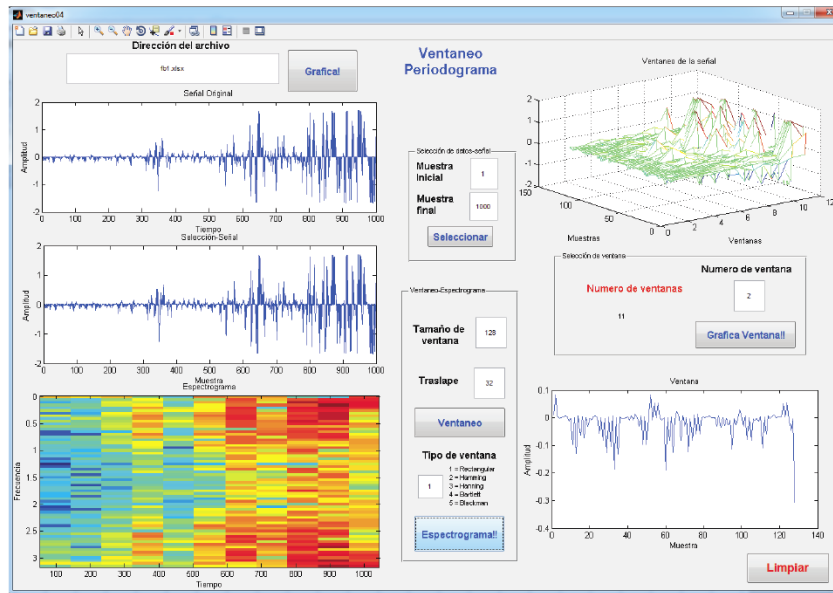


Figura 8.5: Ambiente de trabajo periodograma para señal EMG asociada a flexión de bíceps (Ventana rectangular, tamaño de ventana de 128 y traslape 32)

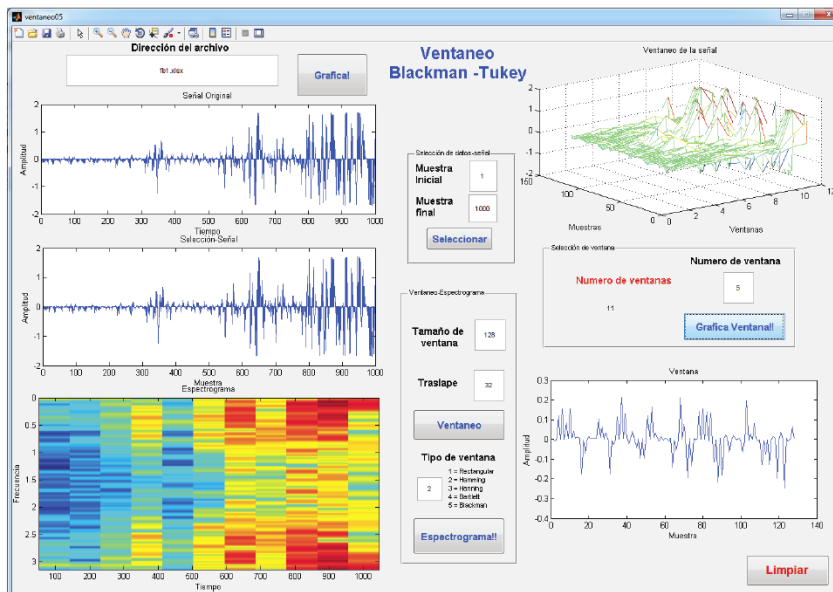


Figura 8.6: Ambiente de trabajo Blackman-Tukey para señal EMG asociada a flexión de bíceps (Ventana Hamming, tamaño de ventana de 128 y traslape 32)

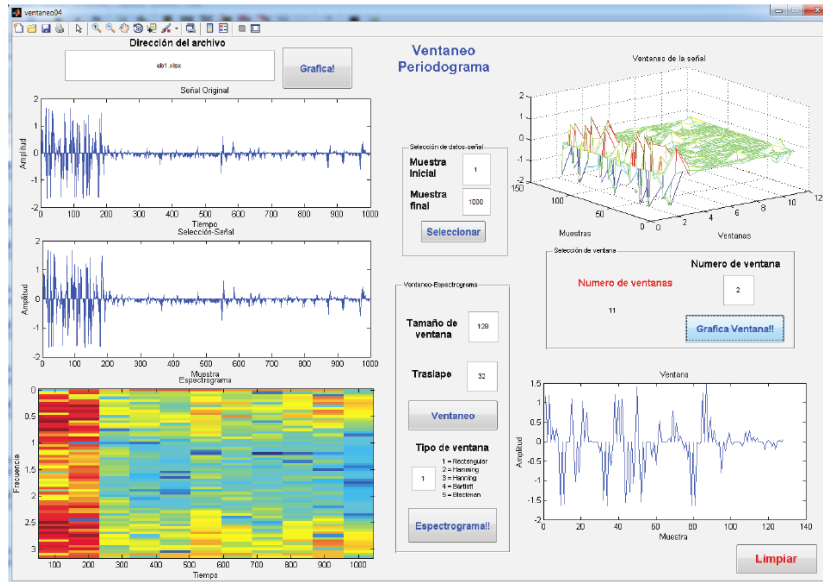


Figura 8.7: Ambiente de trabajo periodograma para señal EMG asociada a extensión de bíceps (Ventana rectangular, tamaño de ventana de 128 y traslape 32)

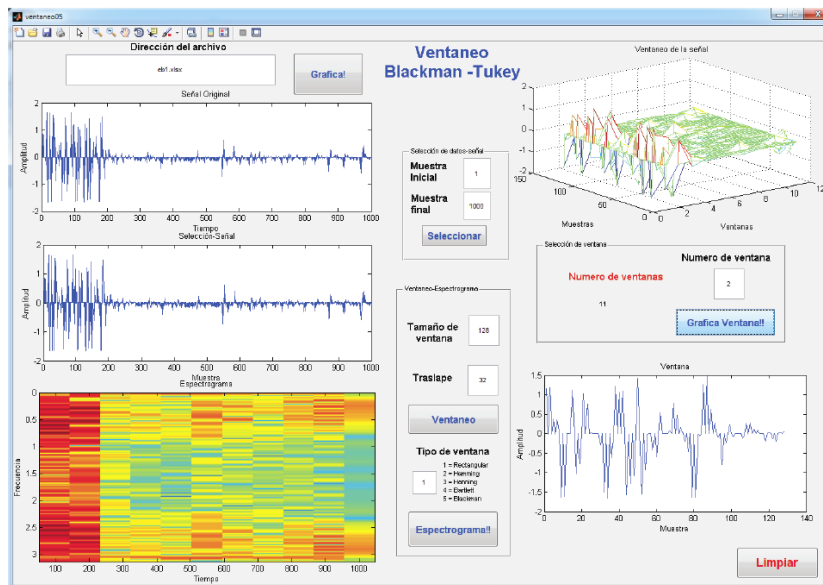


Figura 8.8: Ambiente de trabajo Blackman-Tukey para señal EMG asociada a extensión de bíceps (Ventana Hamming, tamaño de ventana de 128 y traslape 32)

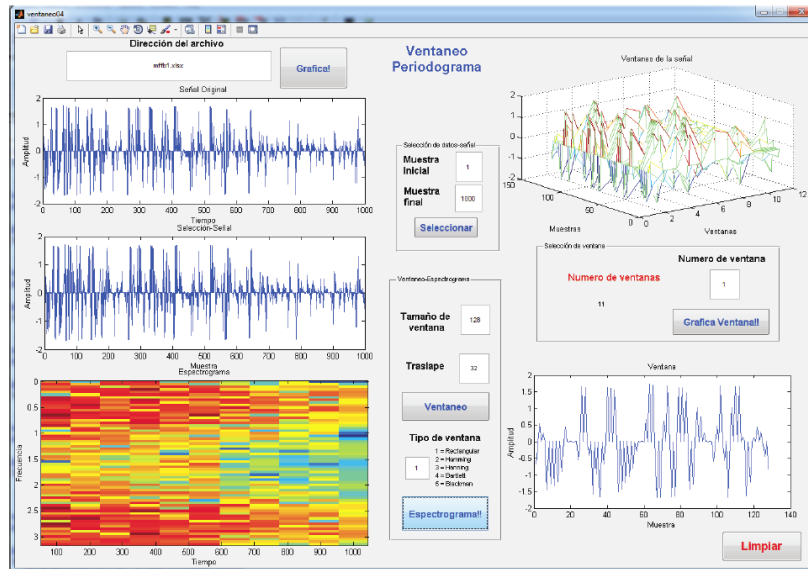


Figura 8.9: Ambiente de trabajo periodograma para señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (Ventana rectangular, tamaño de ventana de 128 y traslape 32)

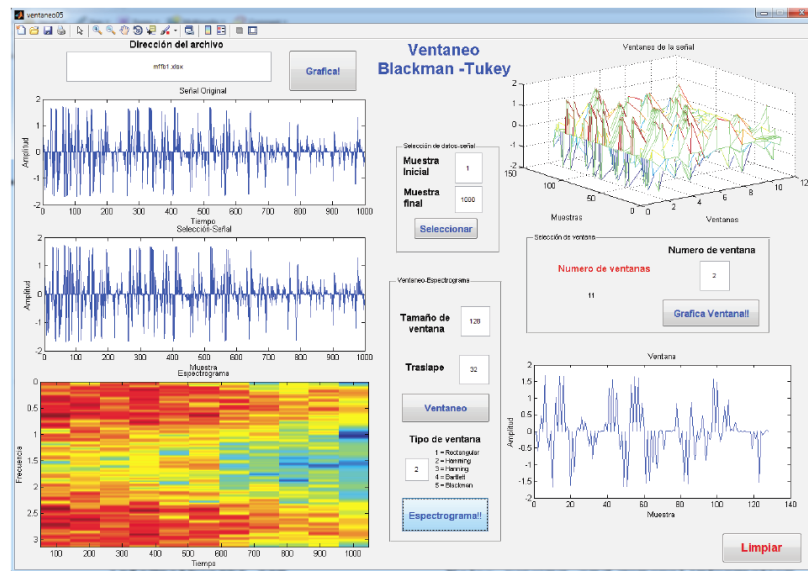


Figura 8.10: Ambiente de trabajo Blackman-Tukey para señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (Ventana Hamming, tamaño de ventana de 128 y traslape 32)

Es necesario hacer notar que es posible realizar una gran cantidad de resultados debido a las combinaciones posibles de tamaño de ventana y traslape. Sin embargo podemos observar que al utilizar estos métodos no paramétricos se observan que al aplicarse en las realizaciones de señales mioeléctricas disponibles se observan que la densidad espectral de potencias en cada ventana posee una forma en la cual se observan un comportamiento simétrico en el rango de frecuencias de  $0$  a  $\pi$ , como observaremos en la estimación de la densidad espectral de potencias usando la estructura de filtro adaptable, este patrón que se observa estará ligado a un comportamiento de la evolución temporal de los coeficientes del filtro.

Ahora apliquemos la estrategia de selección de orden (5.2.2) a nuestras señales reales:

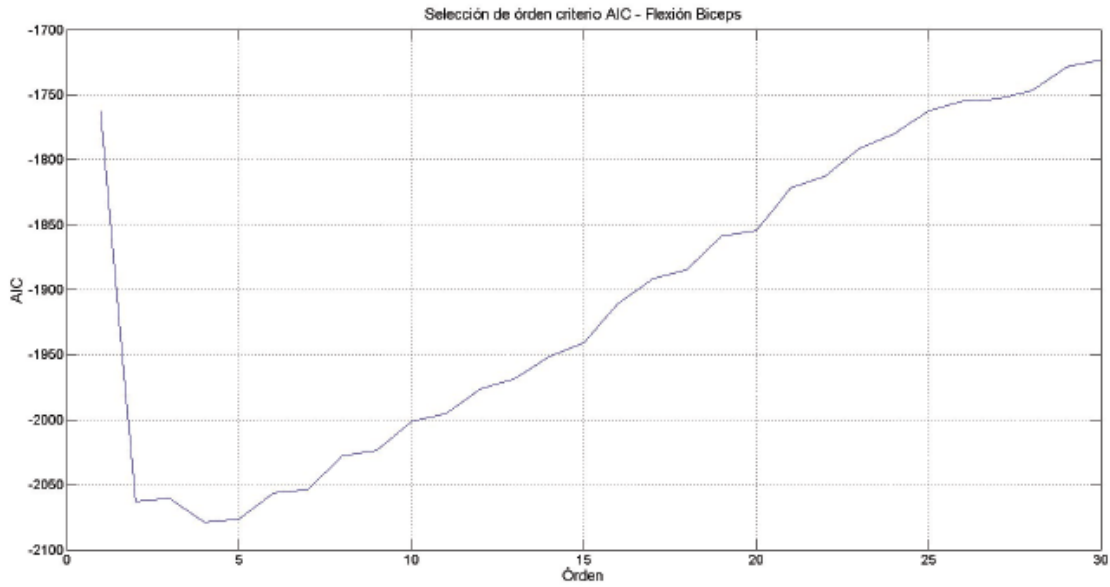


Figura 8.11: Criterio AIC selección de orden de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99)

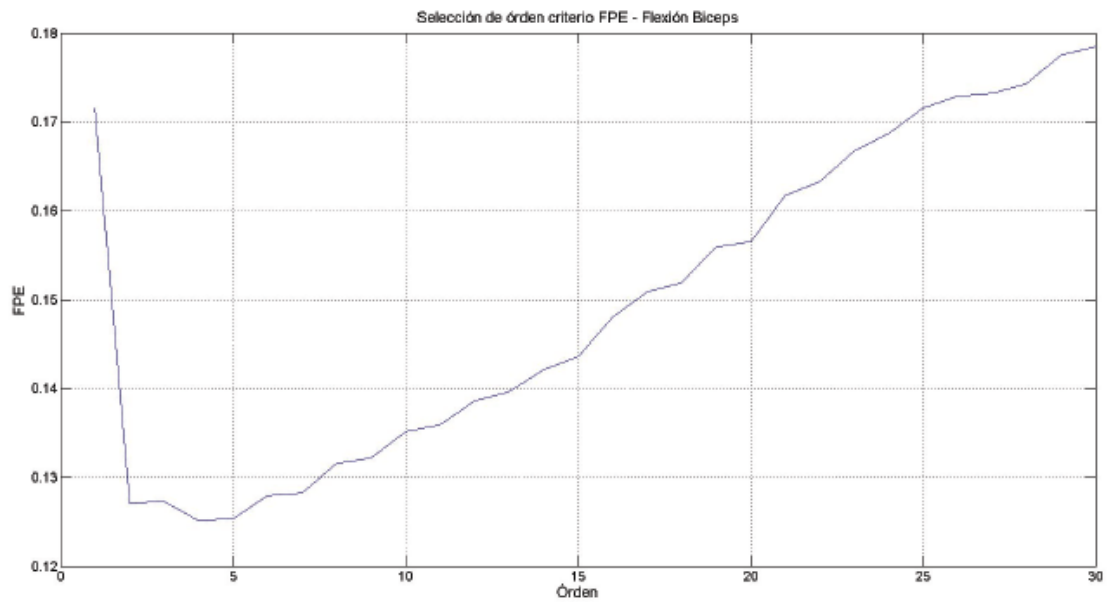


Figura 8.12: Criterio FPE selección de orden de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99)

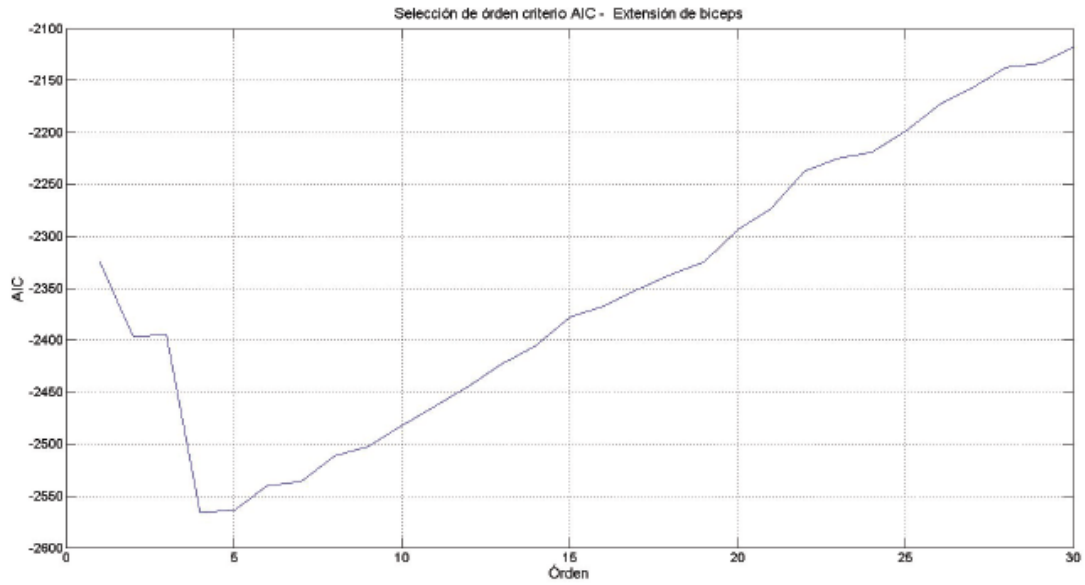


Figura 8.13: Criterio AIC selección de orden de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99)

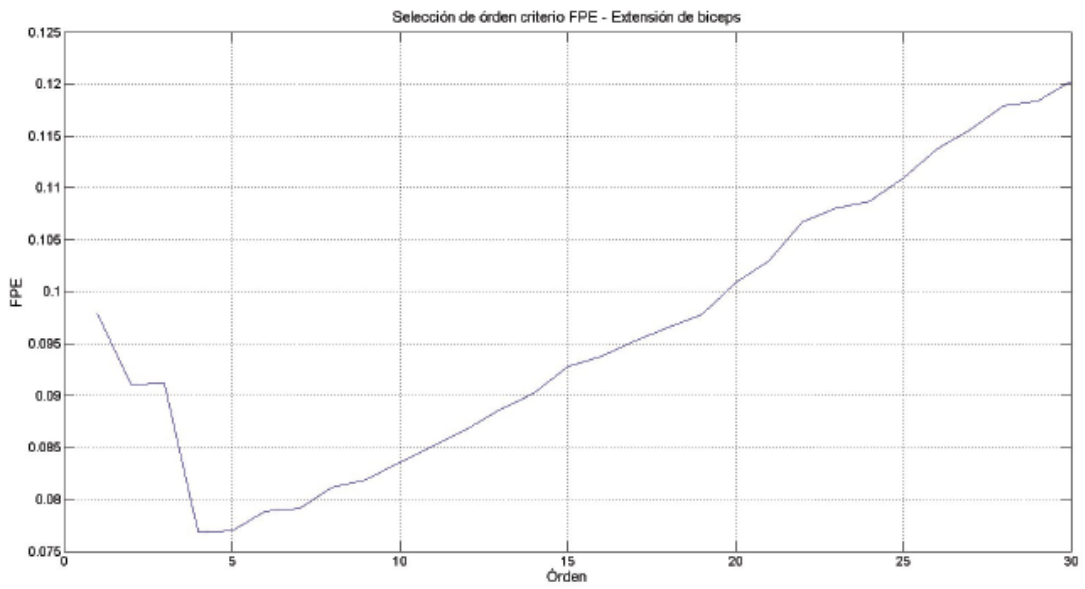
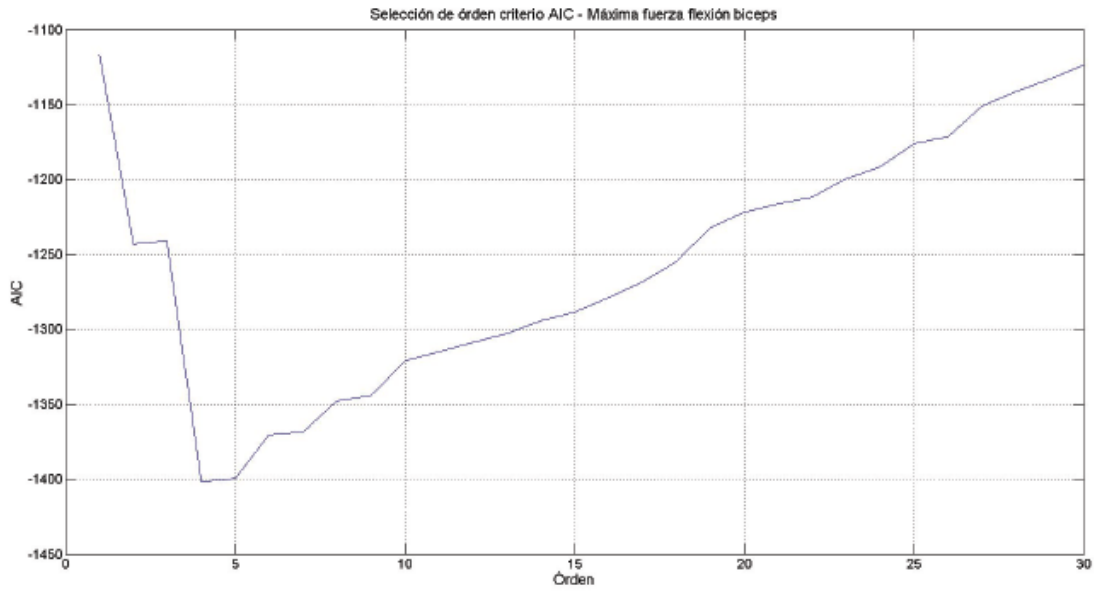
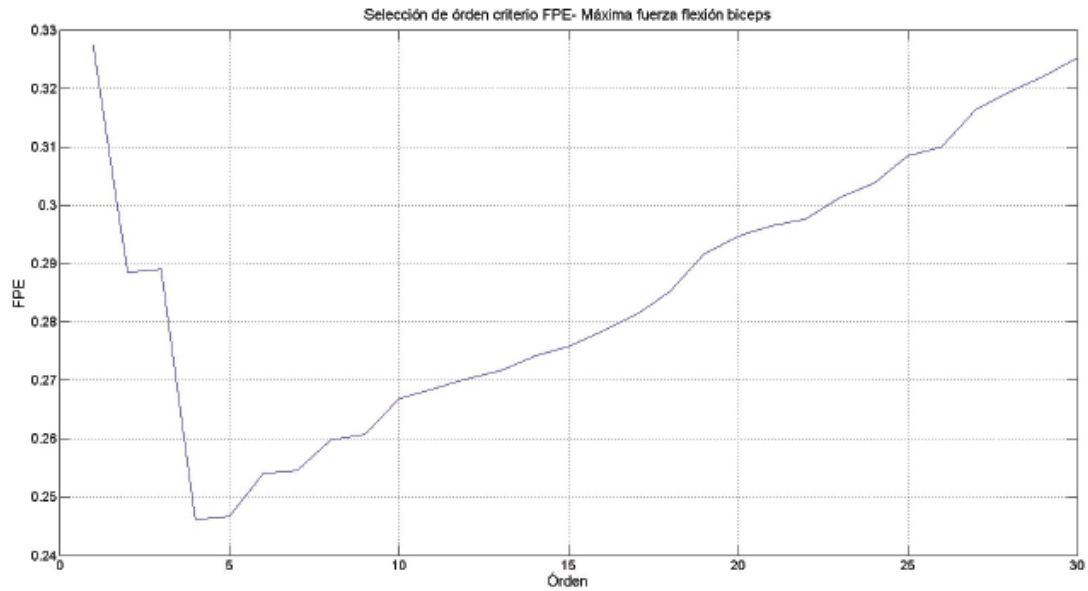


Figura 8.14: Criterio FPE selección de orden de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99)



**Figura 8.15:** Criterio AIC selección de orden de señal EMG asociada a máxima fuerza en flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99)

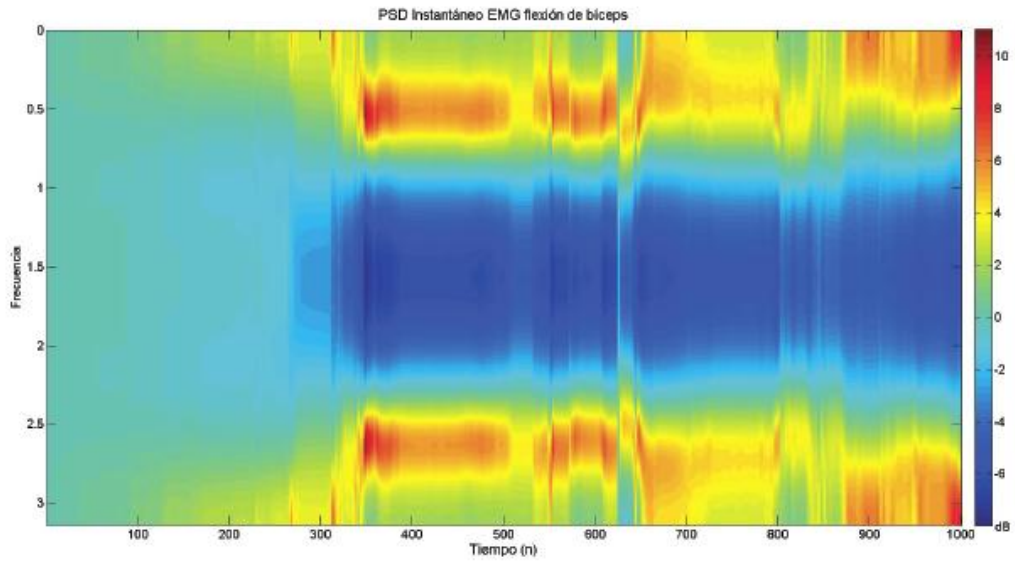


**Figura 8.16:** Criterio FPE selección de orden de señal EMG asociada a máxima fuerza en flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99)

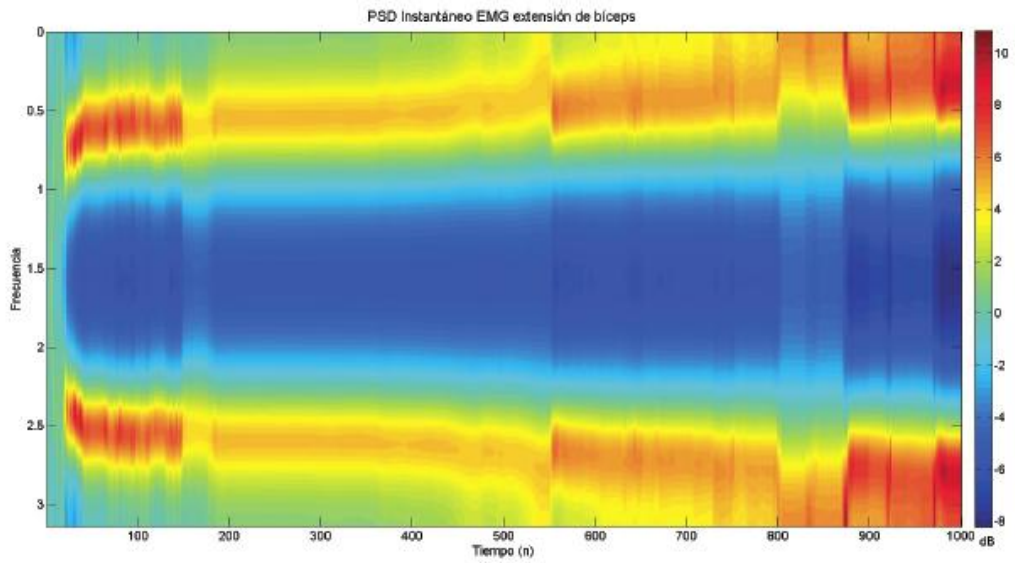
Como podemos observar, en los tres casos, y usando los dos criterios de selección de orden (AIC y FPE) el orden óptimo es 4, por lo que usaremos ese orden para el orden del filtro adaptable.



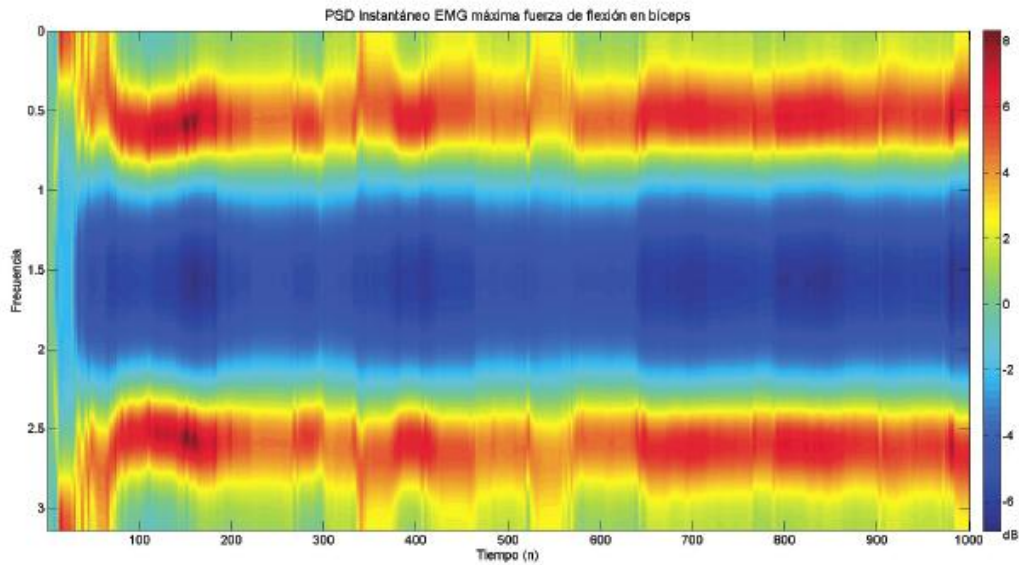
Estimemos ahora el contenido frecuencial instantáneo a nuestras señales reales, usando la estructura de filtro adaptable de orden 4:



**Figura 8.17:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 4)



**Figura 8.18:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 4)



**Figura 8.19:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 4)

Aquí podemos observar un comportamiento simétrico como el que se observaba en la estimación de la densidad espectral de potencias usando los métodos no paramétricos, con lo cual se reafirma la distribución de frecuencias presentes en cada instante de tiempo. En el apéndice D se muestran la evolución temporal de las señales mioeléctricas con las que contamos para un orden 2 y 8 donde se puede observar como varían los estimados, sin embargo se observa que se mantiene el mismo patrón en el que se observan 2 picos principales en los PDSs instantáneos.

### 8.3. Parámetros de importancia dentro de la estructura del filtrado adaptable

Retomando el parámetro  $\gamma$  definido en el algoritmo RLS rápido citado 6.3 y considerándolo un indicativo de la estacionariedad de la señal, se propone utilizarlo como una referencia que permitirá identificar el instante de tiempo en el cual es necesario realizar el PCA, ya que cuando se rebase el margen dentro del cual consideramos que este parámetro como indicativo de que la señal ha mantenido un grado de estacionariedad significará que los coeficientes del filtro adaptable han cambiado y es necesario realizar nuevamente la técnica de PCA. Así, si se tienen diferentes variables obtenidas de señales mioeléctricas de diferentes músculos no es necesario aplicar nuevamente la estrategia de PCA hasta que el parámetro  $\gamma$  de cualquiera de las señales rebase el margen establecido. Si los parámetros  $\gamma$  se mantiene dentro del margen esto significa que los coeficientes asociados al filtro no han variado en gran medida y las señales han mantenido un comportamiento muy cercano al estacionario y no existe la necesidad de realizar el PCA en cada instante de tiempo, sino sólo cuando sea necesario, ahorrando costo computacional.

Observemos la evolución temporal del parámetro  $\gamma$  aplicado a cada una de nuestras realizaciones de movimientos asociados a señales EMG:

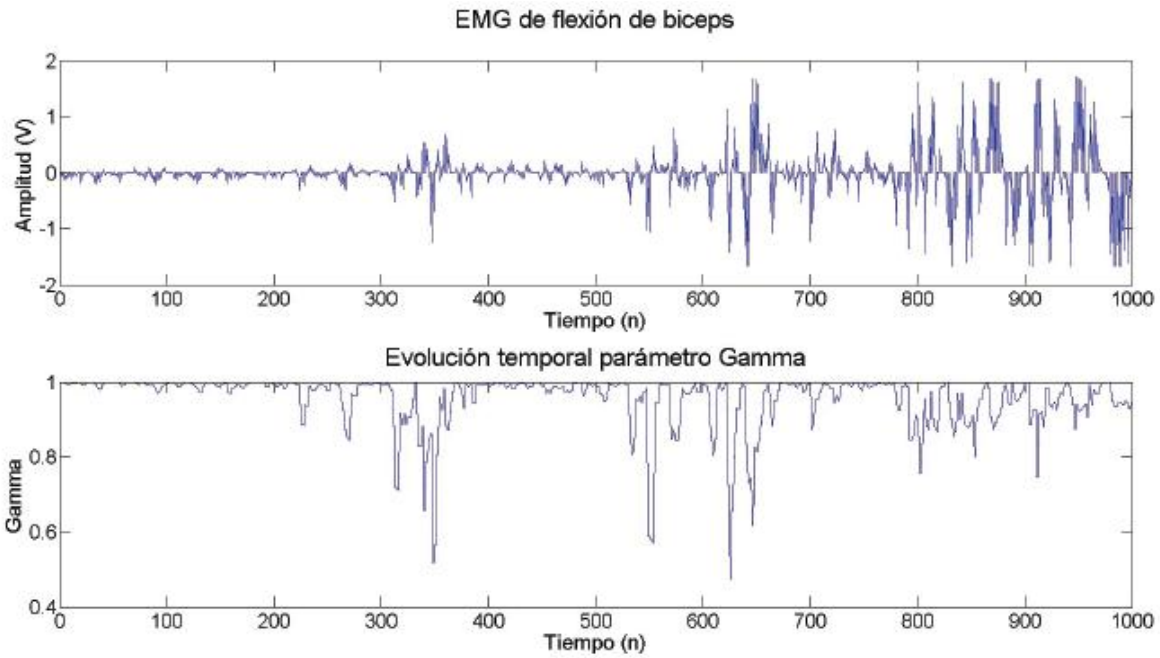


Figura 8.20: Evolución temporal parámetro  $\gamma$  para realización de señal EMG asociada a flexión de bíceps.

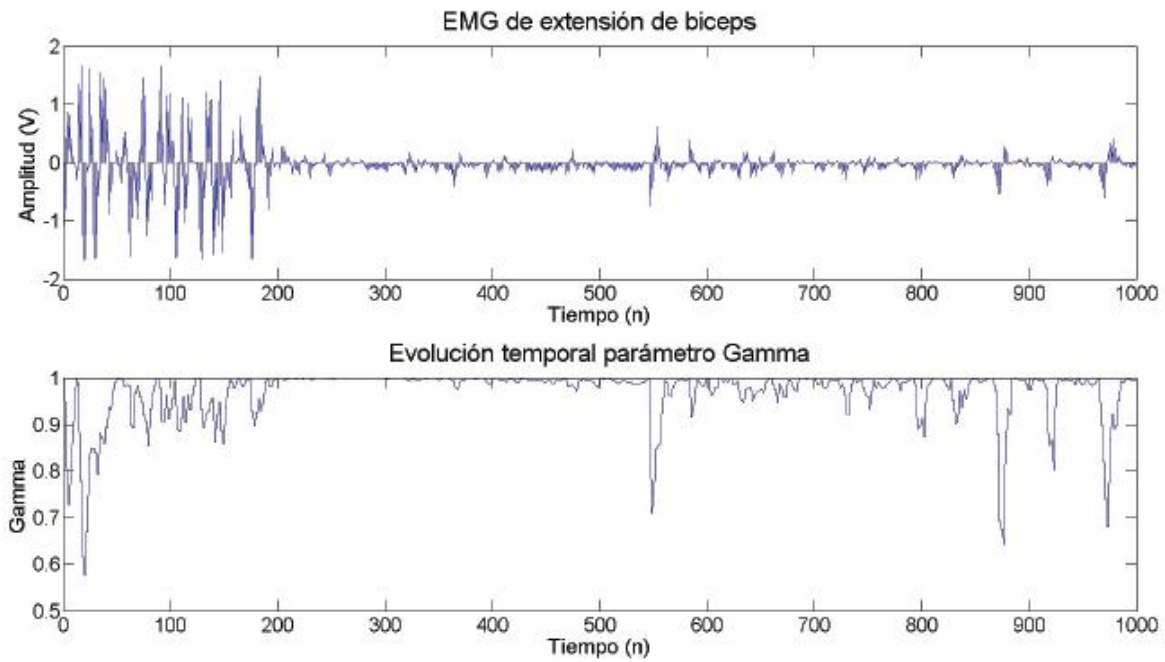
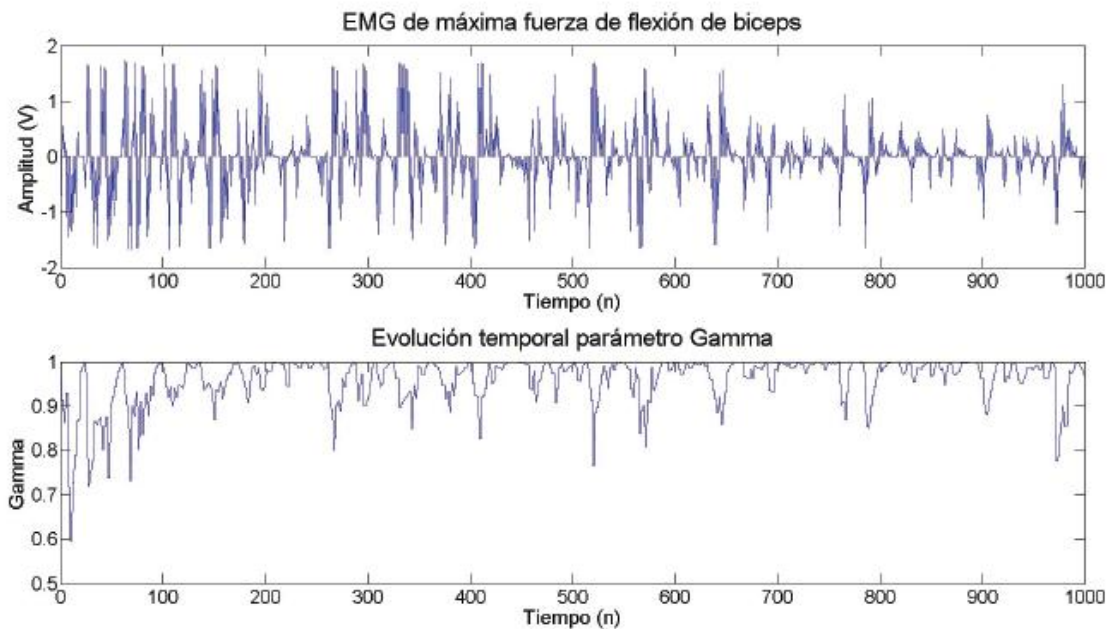


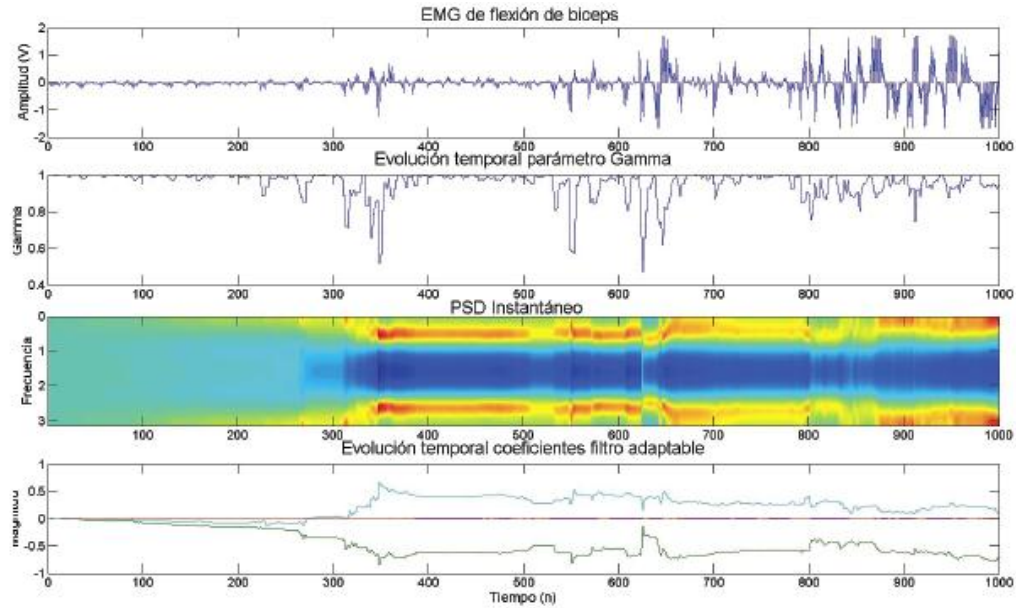
Figura 8.21: Evolución temporal parámetro  $\gamma$  para realización de señal EMG asociada a extensión de bíceps.



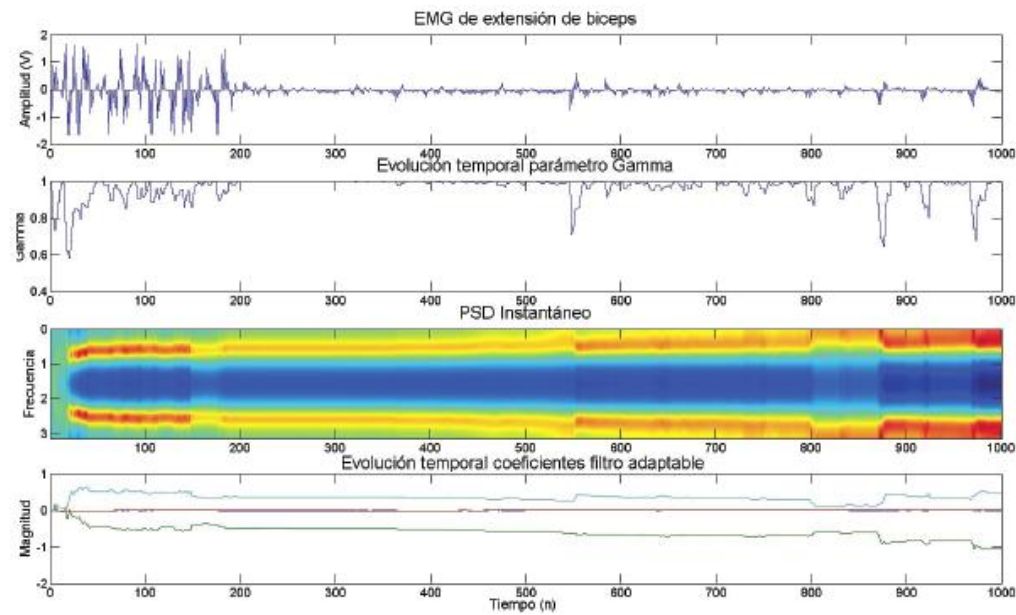
**Figura 8.22:** Evolución temporal parámetro  $\gamma$  para realización de señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.

Si establecemos un margen para el parámetro  $\gamma$  y dentro del cual consideramos que la evolución de los coeficientes del filtro no presenta un cambio considerable es posible determinar los instantes para los cuales es necesario llevar a cabo la estrategia de PCA.

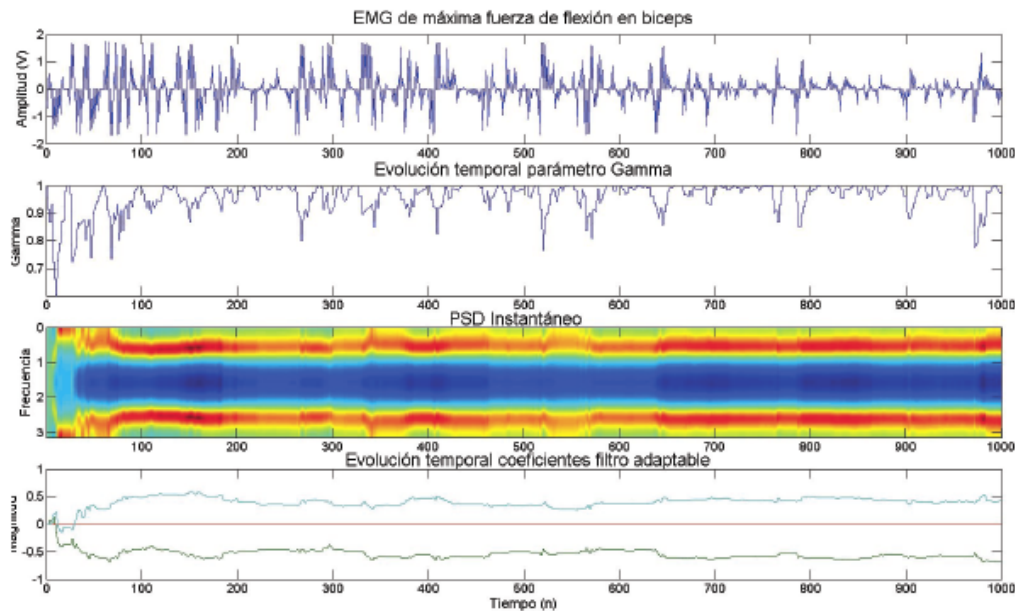
Consideremos ahora la necesidad de poseer información en cada instante de tiempo para controlar una prótesis, por lo que se propone elegir la estructura del filtro adaptable para estimar la densidad espectral de potencias, ofreciendo este enfoque la posibilidad de monitorear un cambio brusco de modelo usando el parámetro antes definido  $\gamma$ . Y cuando se detecte un cambio fuera de un margen establecido, se propone utilizar el PCA. Finalmente, la información arrojada serán los datos que se proporcionen a la etapa de control. Basados en esta propuesta observemos en las siguientes figuras la información que obtendríamos haciendo uso de nuestras muestras de señales mioeléctricas:



**Figura 8.23:** Evolución temporal del PSD, del parámetro  $\gamma$  y de los coeficientes del filtro para la señal EMG asociada a flexión de bíceps.



**Figura 8.24:** Evolución temporal del PSD, del parámetro  $\gamma$  y de los coeficientes del filtro para la señal EMG asociada a extensión de bíceps.



**Figura 8.25:** Evolución temporal del PSD, del parámetro  $\gamma$  y de los coeficientes del filtro para la señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.

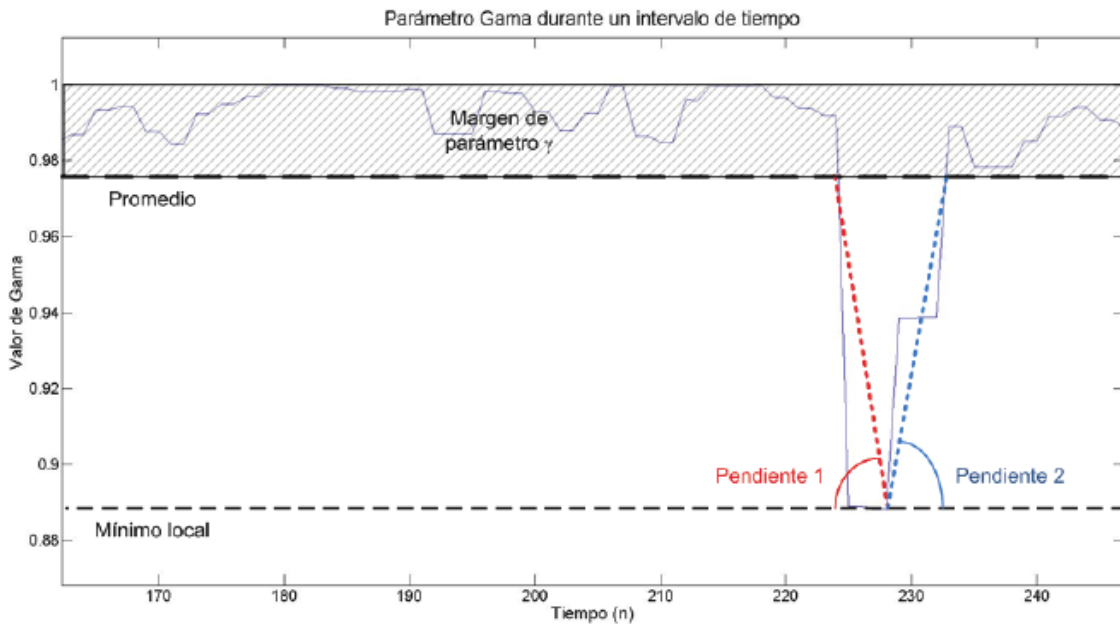
Aunque no se tienen disponibles una gran cantidad de realizaciones de señales mioeléctricas para concluir un margen adecuado para el parámetro  $\gamma$  fuera del cual es necesario aplicar la estrategia del PCA, podemos utilizar la señal mioeléctrica asociada al movimiento durante el cual se tiene la máxima fuerza de flexión en el bíceps para establecer un rango del parámetro  $\gamma$  tentativo para este músculo (y esa posición en particular del sensor mioeléctrico), ya que es de esperarse que durante la duración de ese movimiento la información que se envía al controlador sea la misma debido a que es un movimiento con fuerza y dirección constante y por ende se puede esperar que no exista mucha diferencia en la evolución temporal del PSD, por lo que para proponer un valor del margen usaremos valores promedios del parámetro  $\gamma$  dentro de zonas donde se observe poco cambio en el PSD:

Tiempo inicial (n)	Tiempo final (n)	Promedio del valor de $\gamma$
200	260	0.9892
650	760	0.9871
910	970	0.9810
430	450	0.9962
790	900	0.9824

**Cuadro 8.1:** Promedios en rangos temporales del parámetro  $\gamma$  de la señal mioeléctrica EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.

Estos rangos que fueron seleccionadas mediante la visualización de zonas del PSD donde no se observara un gran cambio son un indicativo del margen del parámetro  $\gamma$  que se puede utilizar para condicionar el uso del PCA, por lo que una manera simple de seleccionar este margen puede ser el valor del promedio mínimo (0.9810) de las zonas seleccionadas como referencias de comportamiento muy cercano al estacionario. Es necesario hacer notar que el objetivo de este documento no es establecer de manera concreta los valores de esta clase de márgenes de parámetros, sino a la manera de extraerlos, además que para obtener esos valores concretos es necesario contar con un mayor número de realizaciones de señales mioeléctricas, lo cual

Una vez que se establecido el margen del parámetro  $\gamma$  dentro del cual lo no consideraremos un cambio en el contenido frecuencial de la señal, podemos analizar con mayor detalle este parámetro, para lo cual consideremos la situación donde el parámetro ha rebasado el margen establecido (se ha presentado un cambio considerable en los coeficientes del modelo), posteriormente el parámetro tenderá nuevamente a la unidad, por lo que se producirá un cruce en el valor límite del margen, durante este intervalo es posible establecer características dentro de esta zona, un ejemplo es considerar que se generan dos pendientes en esta zona, las cuales parten del mínimo local que se encuentra en esta zona, como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 8.26:** Parámetro  $\gamma$  dentro de un intervalo de tiempo y características dentro de la zona fuera del margen establecido.

Estas pendientes que se crean en cada una de las zonas donde el parámetro  $\gamma$  se sale del margen establecido son indicativos de la magnitud en el cambio del modelo y del tiempo de convergencia del algoritmo, y se relacionan directamente con cambios abruptos en el contenido frecuencial (cambio del PSD) entre un instante y otro. Estos cambios además pueden estar relacionados con cambios en el movimiento muscular, como lo es la activación muscular necesaria para vencer la inercia del miembro superior para cambiar de posición, o detener un movimiento que se está llevando a cabo. Observemos ahora las pendientes que se producen en nuestras realizaciones de señales mioeléctricas para los diferentes patrones de movimiento, para lo cual se graficarán mediante puntos donde se muestre el valor de la pendiente en el instante de tiempo en la cual el parámetro  $\gamma$  se sale del margen y otro valor de pendiente para cuando el parámetro vuelve dentro del margen:

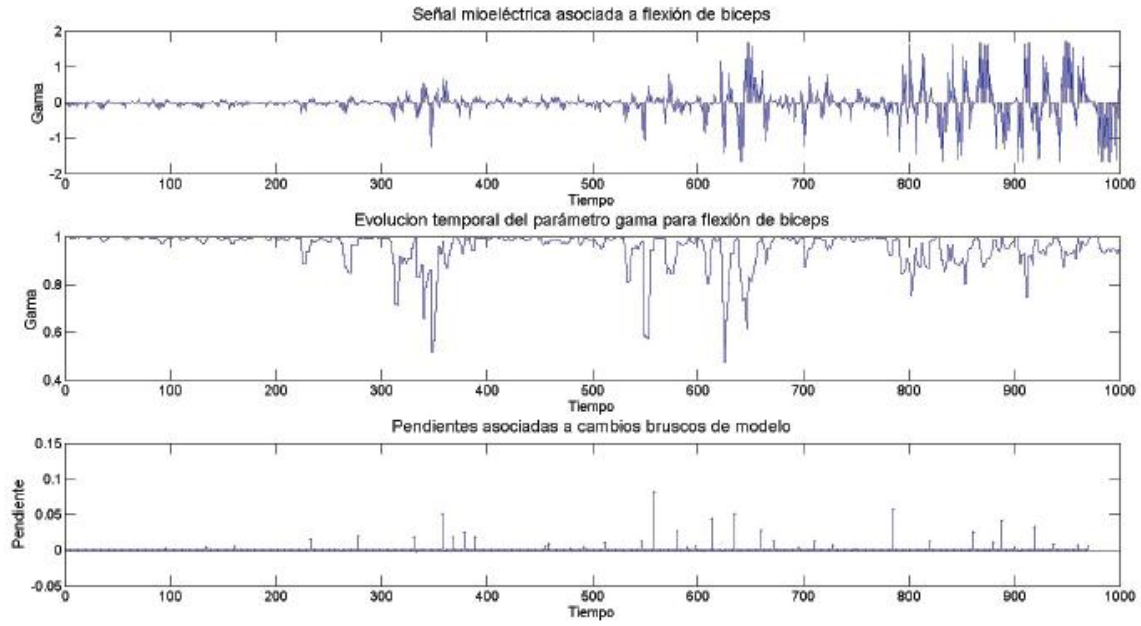


Figura 8.27: Señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps, evolución temporal del parámetro  $\gamma$  y de las pendientes asociadas a cambios bruscos en  $\gamma$ .

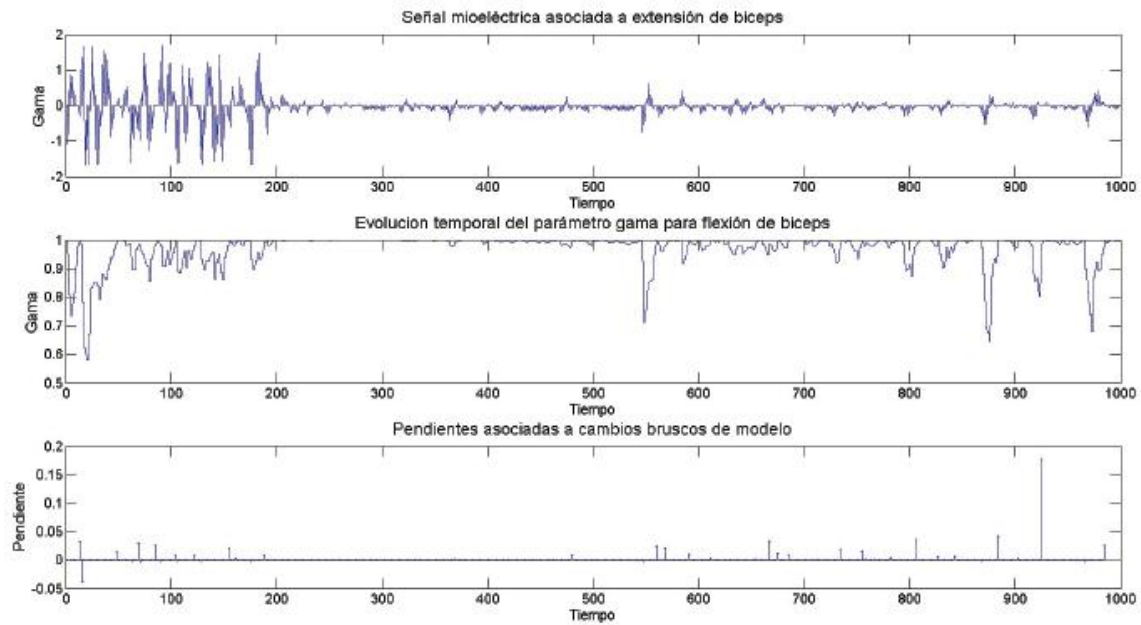
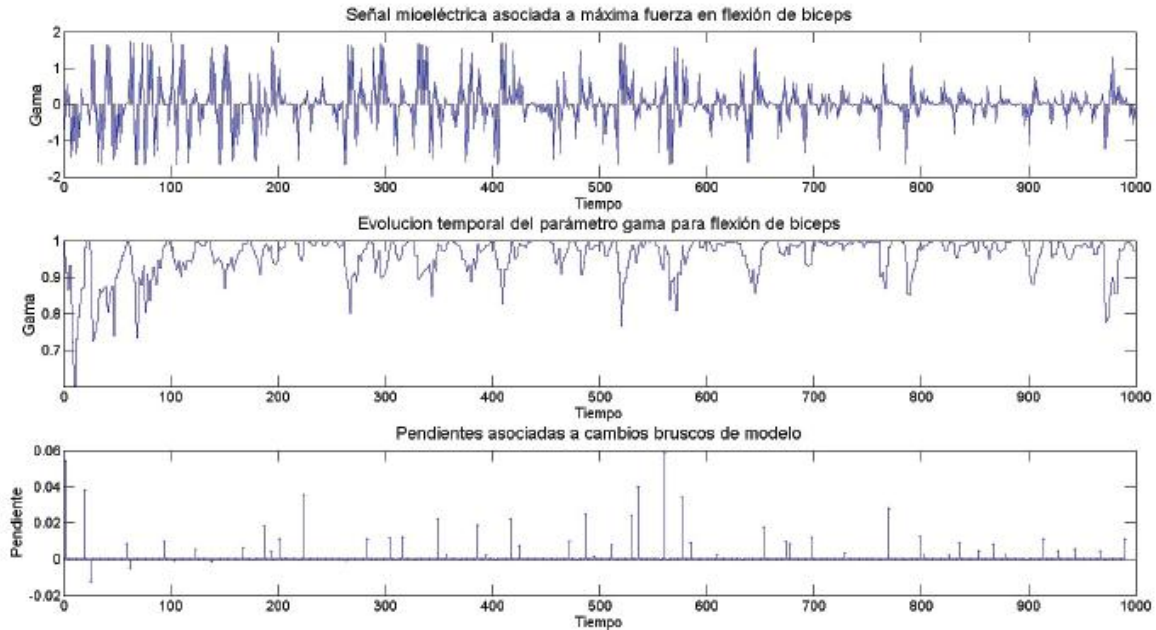


Figura 8.28: Señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps, evolución temporal del parámetro  $\gamma$  y de las pendientes asociadas a cambios bruscos en  $\gamma$ .





**Figura 8.29:** Señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps, evolución temporal del parámetro  $\gamma$  y de las pendientes asociadas a cambios bruscos en  $\gamma$ .

Observamos que en los tres casos los valores de la pendiente negativa no están tan dispersos como los valores de la pendiente positiva, y que además permiten intuir la manera en la que se puede utilizar esta información para relacionar la actividad del miembro superior. Durante el movimiento de máxima fuerza de flexión en bíceps (figura 8.29) podemos observar que la magnitud de pendiente máxima es 0.06, lo cual comparando con los valores máximos de pendientes de flexión de bíceps (0.9) y de la extensión de bíceps (0.18) es de un orden menor de magnitud, lo cual era de esperarse considerando que mientras que se lleva a cabo el movimiento de máxima fuerza de flexión en bíceps se presentan pocos cambios en los coeficientes del modelo y como resultado las pendientes asociadas son de menor valor. Al observar las gráficas asociadas a flexión de bíceps observamos que alrededor del instante de tiempo que corresponde a la muestra 350 se presenta un cambio abrupto de modelo (y por ende en el valor de  $\gamma$  y de la pendiente asociada) que puede deberse a la activación muscular necesaria para vencer la inercia del miembro superior que se encuentra en ese momento extendido por lo cual puede ser un indicativo del inicio de un movimiento y cambio de posición del miembro superior.

La variación observada en el parámetro es un indicativo directo del cambio en los coeficientes del filtro adaptable; al observar la evolución de estos es posible determinar cuál de ellos es más sensible durante la duración del movimiento, observemos en las siguientes gráficas la evolución de los 4 coeficientes asociados a las señales mioeléctricas de los diferentes movimientos experimentales:

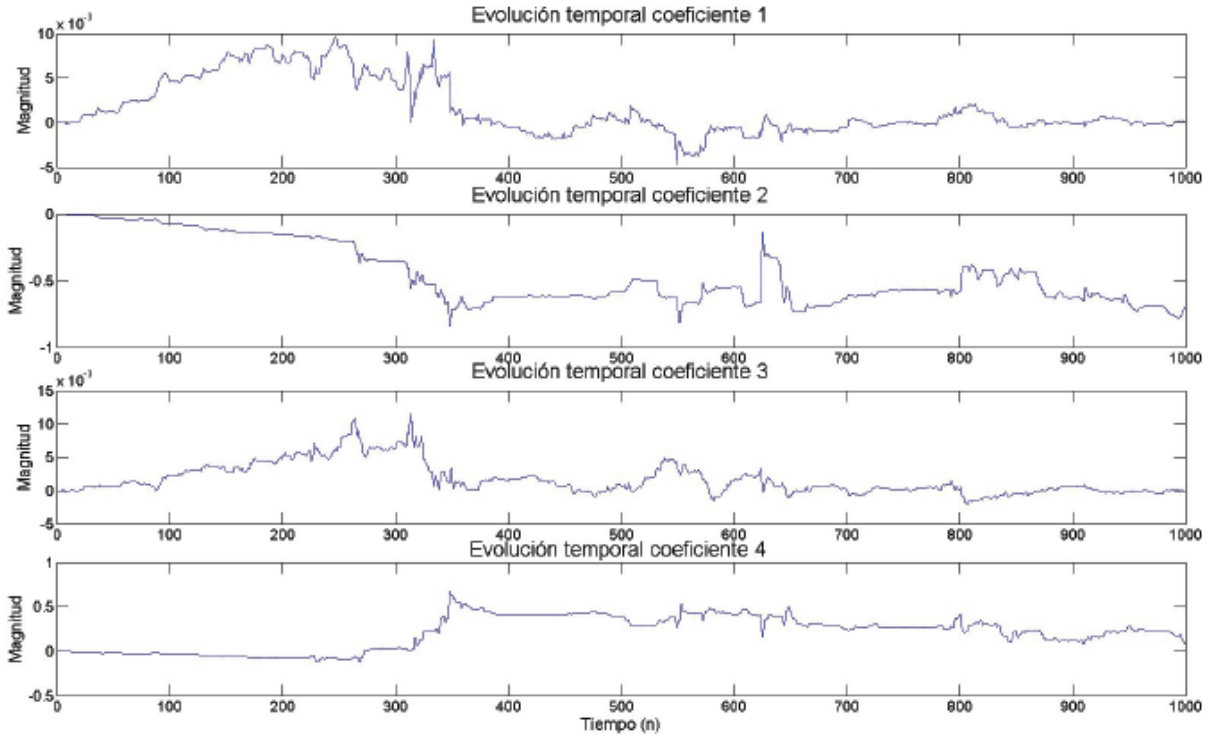


Figura 8.30: Evolución temporal de cada coeficiente de la señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps.

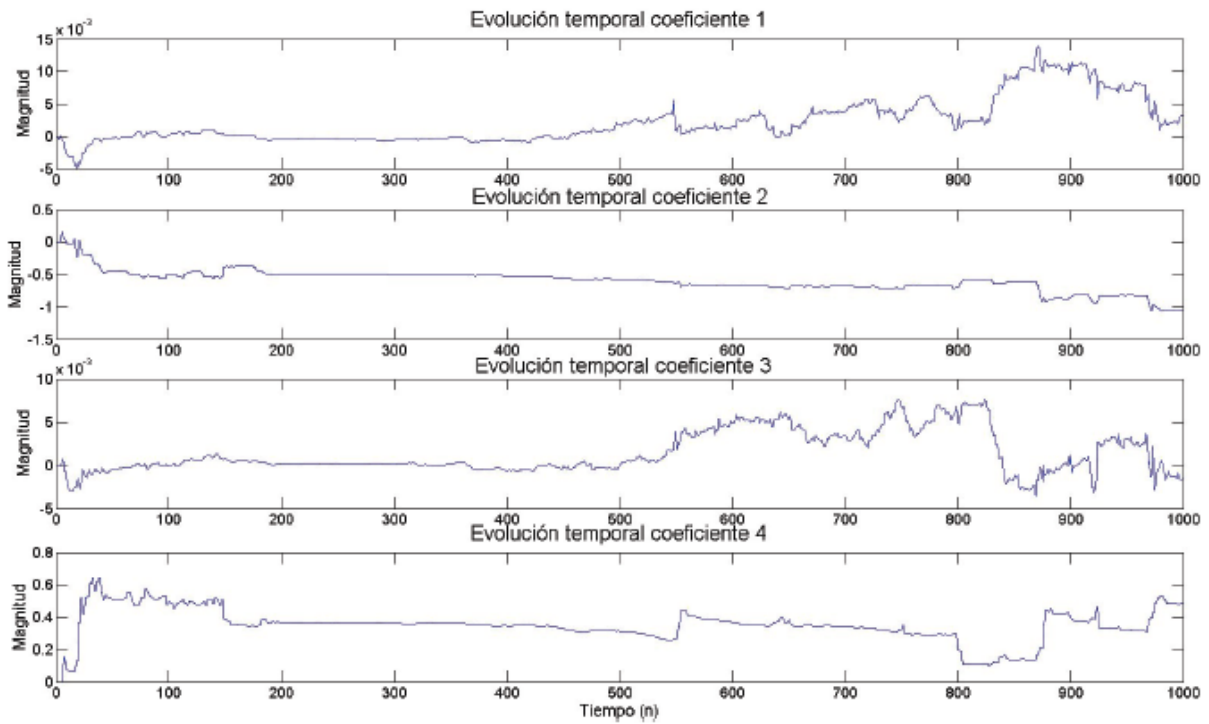
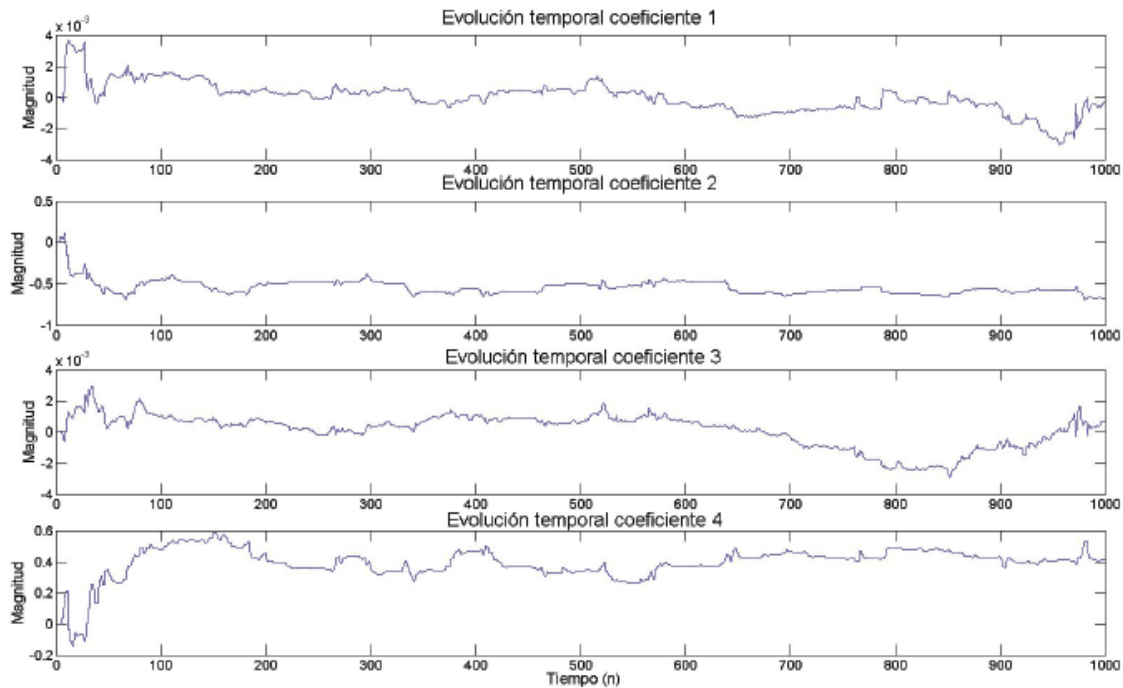
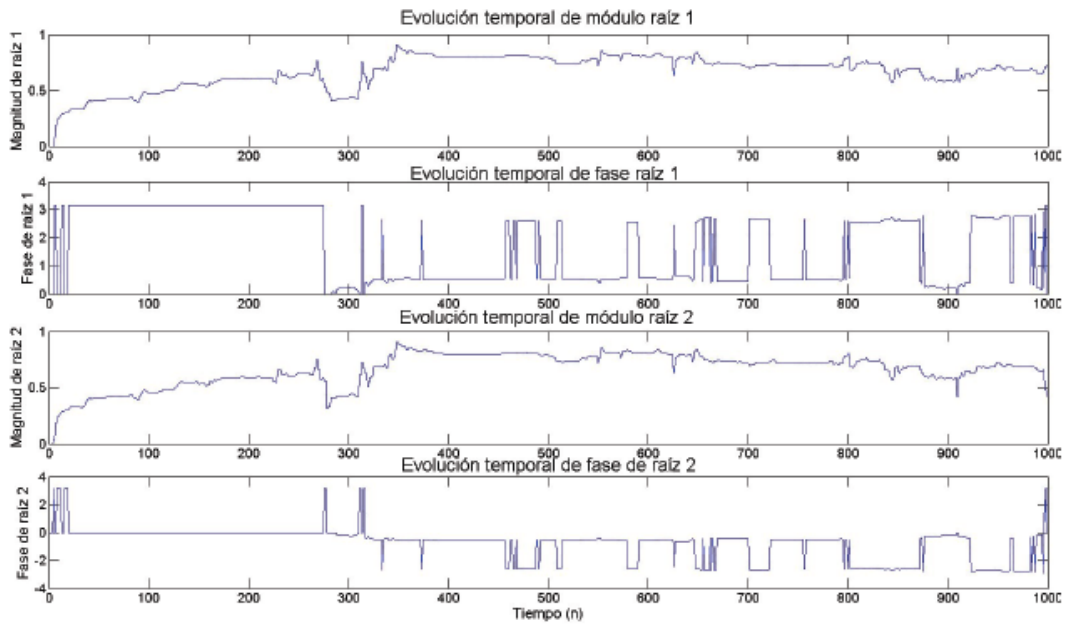


Figura 8.31: Evolución temporal de cada coeficiente de la señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps.

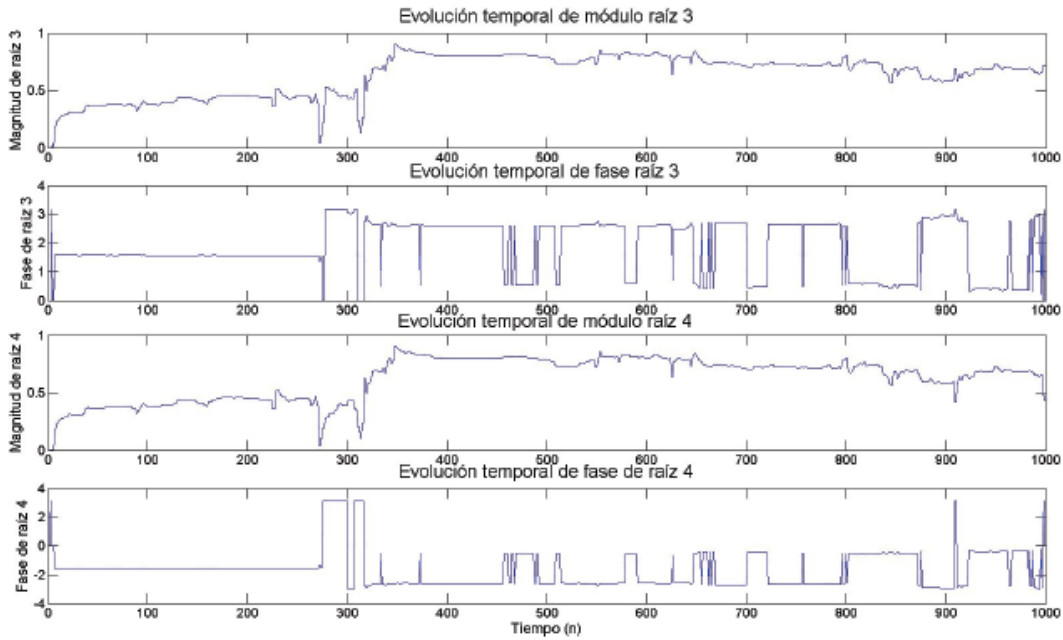


**Figura 8.32:** Evolución temporal de cada coeficiente de la señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.

Podemos observar que los coeficientes número 1 y 3 varían en menor grado que los otros dos coeficientes restante, y se encuentran en un orden de magnitud ( $10^{-3}$ ) mucho menor que el de los otros dos coeficientes ( $10^{-1}$ ), por lo que los coeficientes 2 y 4 aportan una mejor idea de la evolución temporal de la señal. Otra forma de observar el comportamiento de la estructura del filtro adaptable es obteniendo las raíces asociadas al polinomio que generan los coeficientes, y dado que se tiene un orden 4 se obtienen 4 raíces, que en general son números complejos, por lo que a continuación se muestra la evolución temporal del módulo y fase de las 4 raíces para cada uno de los movimientos de la señal mioeléctrica. Estos datos, debido a la estructura del filtro adaptable, también son indicativos de las forma del PSD en cada instante de tiempo, donde los valores máximos corresponde a la fase de la raíces, por lo otro enfoque es monitorear el comportamiento de las raíces y observar las frecuencias donde tengo valores máximos.



**Figura 8.33:** Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 1 y 2 de la señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps.



**Figura 8.34:** Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 3 y 4 de la señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps.

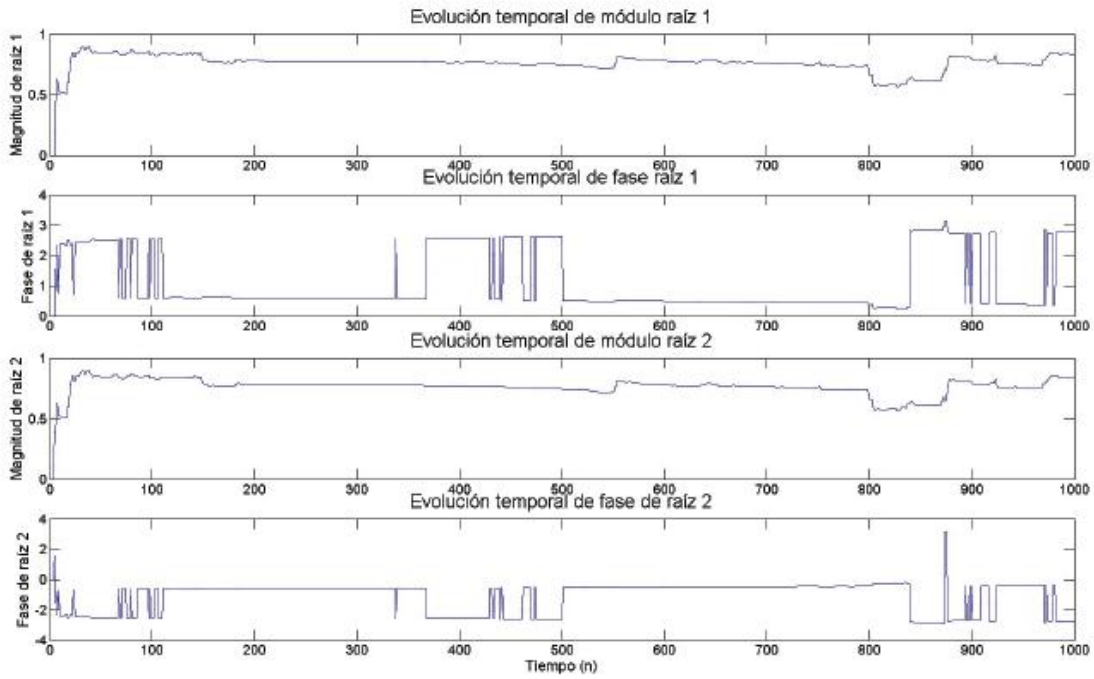


Figura 8.35: Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 1 y 2 de la señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps.

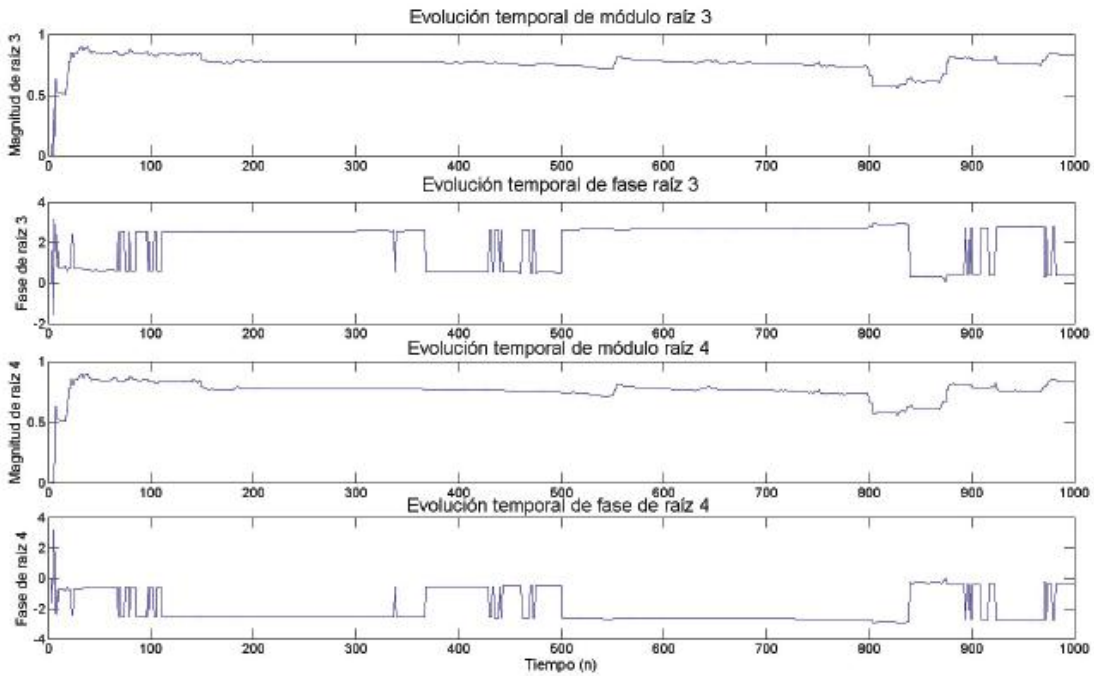
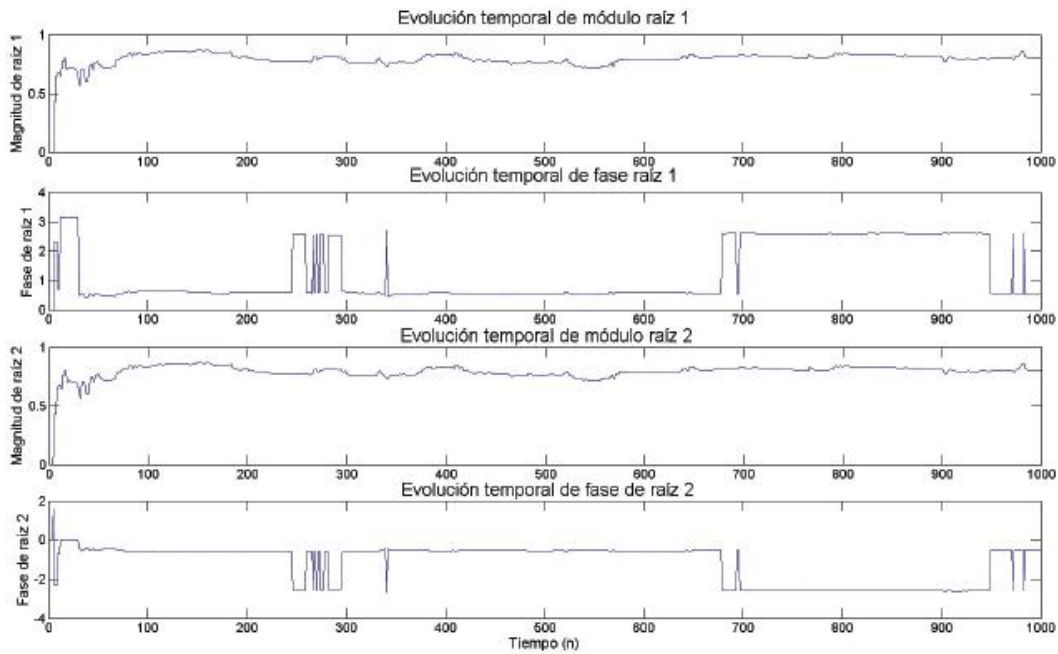
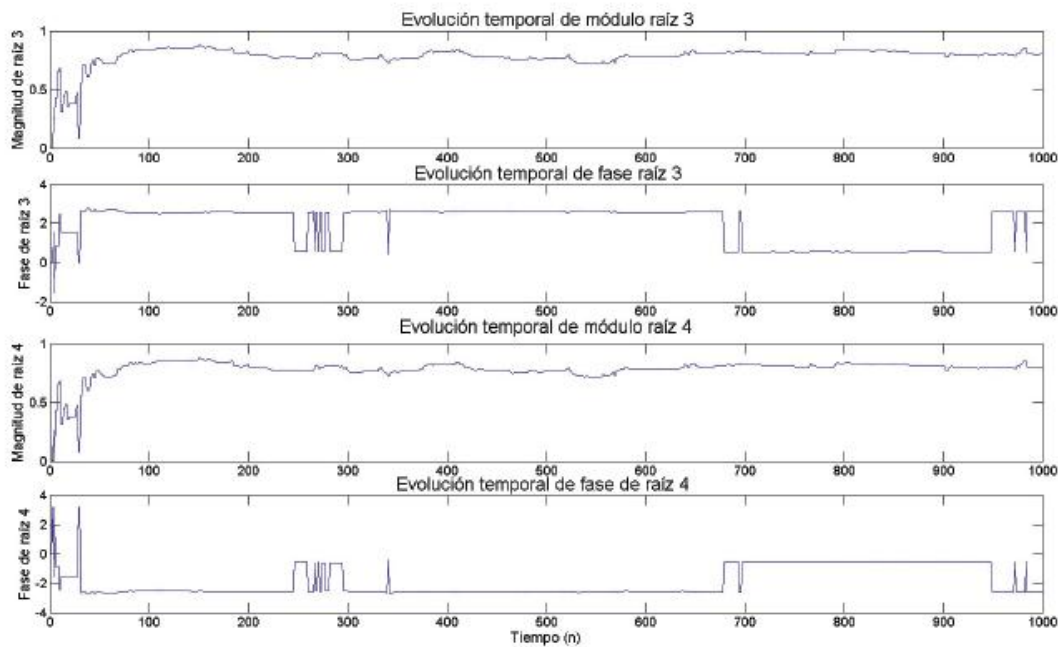


Figura 8.36: Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 3 y 4 de la señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps.



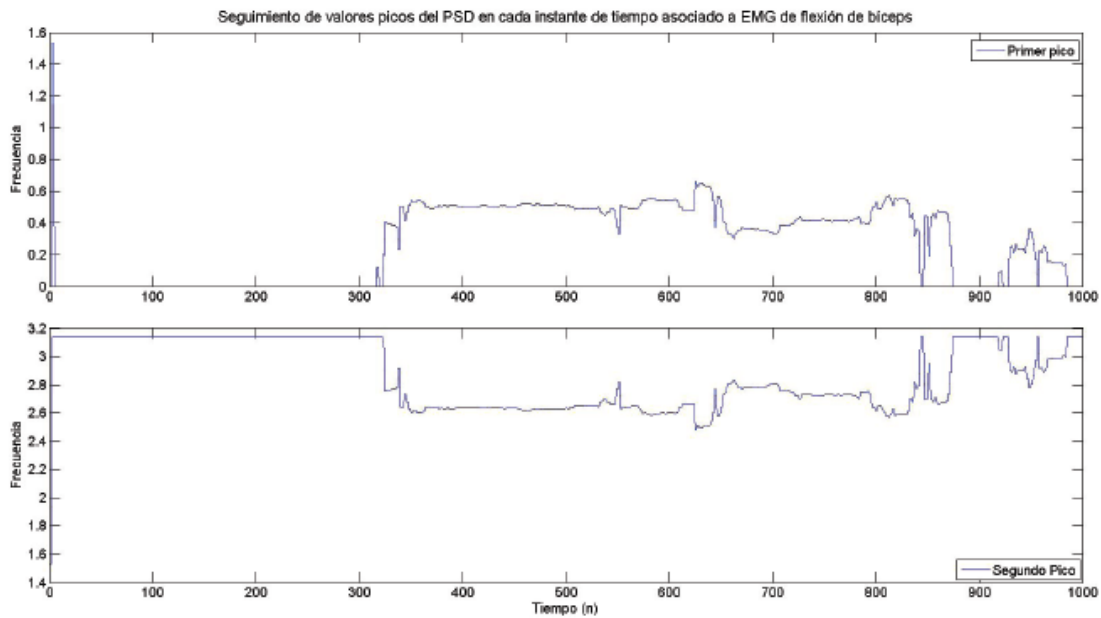
**Figura 8.37:** Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 1 y 2 de la señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.



**Figura 8.38:** Evolución temporal del módulo y fase para la raíz 3 y 4 de la señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.

Observamos que se tienen son dos pares de raíces complejas conjugadas, lo cual es acorde con lo esperado si observamos el PSD generado al analizar cada una de las realizaciones de la señal mioeléctrica. Esta es otra de las formas en la cual se puede ir monitoreando el comportamiento de la estructura del filtro adaptable y que puede servir para controlar la prótesis. Al observar las señales reales obtenidas experimentalmente es de mayor facilidad monitorear solo los 2 coeficientes que poseen mayor sensibilidad que 4 pares de datos (módulos y fase) de las raíces, sin embargo, es posible que en otras señales mioeléctricas provenientes de diferentes grupos musculares sea de mayor utilidad monitorear solo el modulo y/o la fase, por lo que se presentan estas formas de presentar la estructura adaptable pensando que ciertas señales se beneficiaran de alguno de los enfoques.

Como mencionamos previamente otro valor que es adecuado monitorear son los valores máximos que se generan en cada instante de tiempo en el PSD, para el conjunto de señales mioeléctricas analizadas podemos observar 2 zonas que bosquejan la forma del mismo, observándose 2 valores máximos, uno en cada zona. A continuación se grafican las posiciones frecuenciales de cada uno de estos máximos con respecto al tiempo:



**Figura 8.39:** Evolución temporal de valores máximos característicos de señal mioeléctrica asociada a flexión de bíceps.

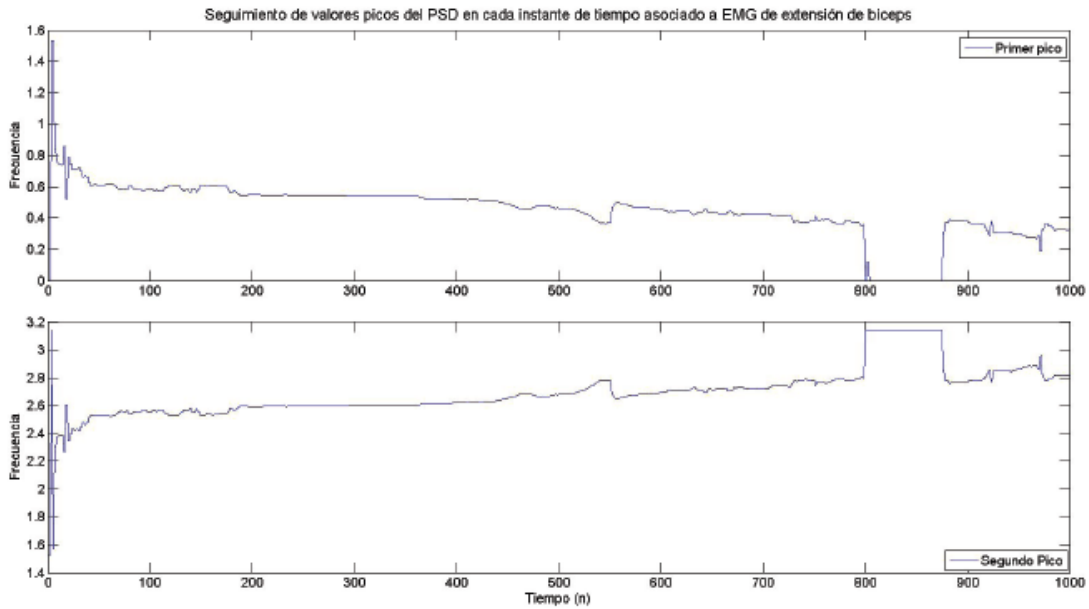


Figura 8.40: Evolución temporal de valores máximos característicos de señal mioeléctrica asociada a extensión de bíceps.

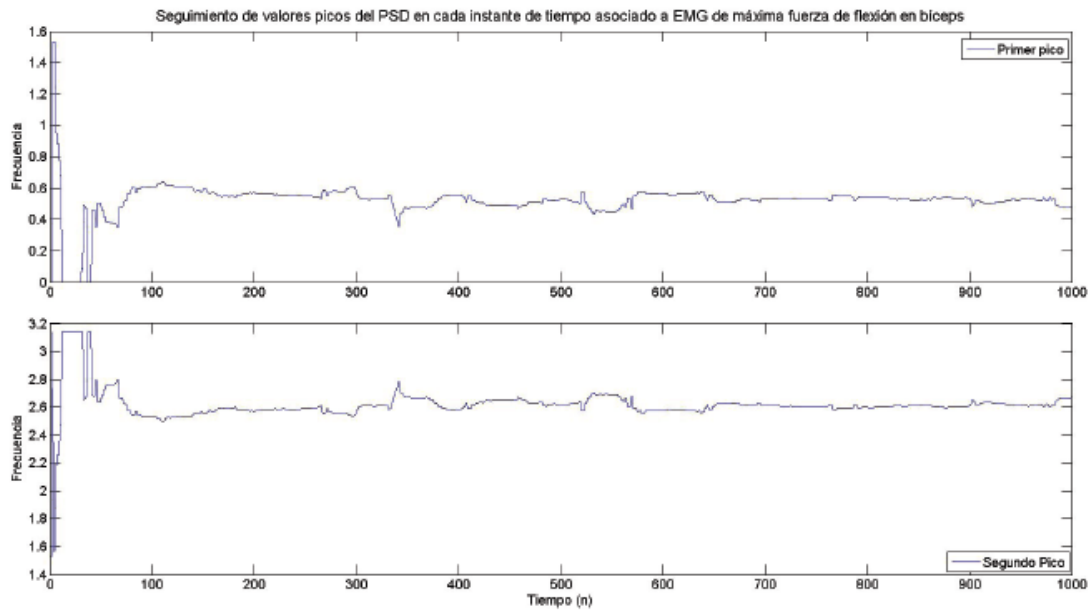


Figura 8.41: Evolución temporal de valores máximos característicos de señal mioeléctrica asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps.

Los parámetros previamente mencionados son obtenidos de estimar la estructura adaptable y se han presentado algunas de las formas en las que los podemos representar y son éstos los que definen las características de la señal mioeléctrica a cada instante de tiempo. El algoritmo involucrado para la



estimación de los coeficientes del filtro aporta además una medida del cambio en los mismos, hemos elegido el parámetro y para determinar el momento en que es necesario aplicar el PCA para evaluar la información recibida en ese instante de tiempo. Haciendo uso de los coeficientes (ya sea en la forma del polinomio característico o sus raíces) es posible estimar el contenido y la forma del PSD, dentro del cual monitorear los valores máximos y su localización frecuencial pueden ser de utilidad para controlar la prótesis.

## 8.4. Aplicación del análisis de componentes principales

Consideremos la situación en la cual se tiene una variedad de mediciones obtenidas de diferentes áreas asociadas a músculos involucrados en la realización de un movimiento en particular y partiendo de la premisa de que se ha establecido un margen que permite decidir si es necesario aplicar o no la estrategia de PCA. Estas mediciones pueden corresponder a un conjunto de parámetros correspondientes a cada área del músculo (o a cada músculo individual) y a cada instante de tiempo. Si es necesario reducir la cantidad a un cierto número de parámetros que la etapa de control puede manejar o se desea eliminar la redundancia de los datos se aplicará la técnica propuesta de PCA.

Así, es posible generar una serie de datos por unidad temporal contenidos en una matriz y aplicar la estrategia de PCA, las variables que contenga esta matriz pueden derivarse de las características obtenidas de procesar la señal mioeléctrica, en este documento se propondrán algunas de las variables que se pueden obtener y cuya información se considera de utilidad para la etapa de control, sin embargo si posteriormente la parte encargada del control considera que otras variables deben ser consideradas la estrategia de PCA se aplicaría de la misma manera. Las variables propuestas involucran potencias energéticas de la señal, bandas de frecuencia donde se concentre el mayor contenido energético y coeficientes asociados al modelo AR. Esta estrategia puede extenderse a reducir una matriz que contenga matrices individuales de datos asociados a diferentes músculos.

Apliquemos esta idea a nuestras señales mioeléctricas reales, para esto consideremos dos de las señales reales obtenidas, seleccionemos un instante de tiempo sobre el cual se desea reducir la dimensión de los datos calculados y que se enviarán a la etapa de control. Por lo que en ese instante de tiempo tendremos un juego de parámetros AR y una PSD por cada señal. En cada uno de los dos PSD se calculará las bandas de frecuencia donde concentra la mayor energía, así como el valor de la potencia (área bajo la curva de PSD entre esas bandas), en este caso se usará una técnica de integración numérica trapezoidal con el fin de ilustrar esta propuesta (teniendo en cuenta que es posible utilizar otra estrategia de mejor desempeño para determinar la integral).

Tomemos el instante de tiempo correspondiente a la muestra número 400 de la dos señales mioeléctricas asociada a la flexión y extensión de bíceps, al aplicar la estrategia de filtrado adaptable obtenemos un juego de parámetros AR para cada señal en ese instante de tiempo, los cuales corresponden a:

Para flexión de bíceps:

$$a_1 = -0.0005011, a_2 = -0.0.6187937, a_3 = 0.0017394, a_4 = 0.4093477 \quad (8.4.1)$$

Para extensión de bíceps:

$$a_1 = -0.0006433, a_2 = -0.5204451, a_3 = -0.0006316, a_4 = -0.3455264$$

Y con cada uno de estos juegos de parámetros se puede obtener una PSD:

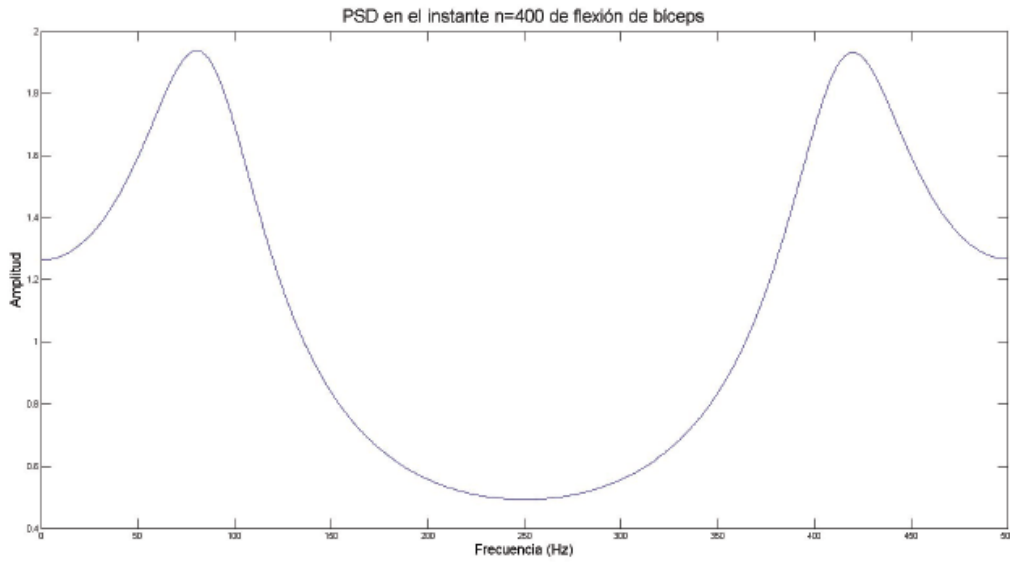


Figura 8.42: PSD en el instante n=400 de flexión de bíceps

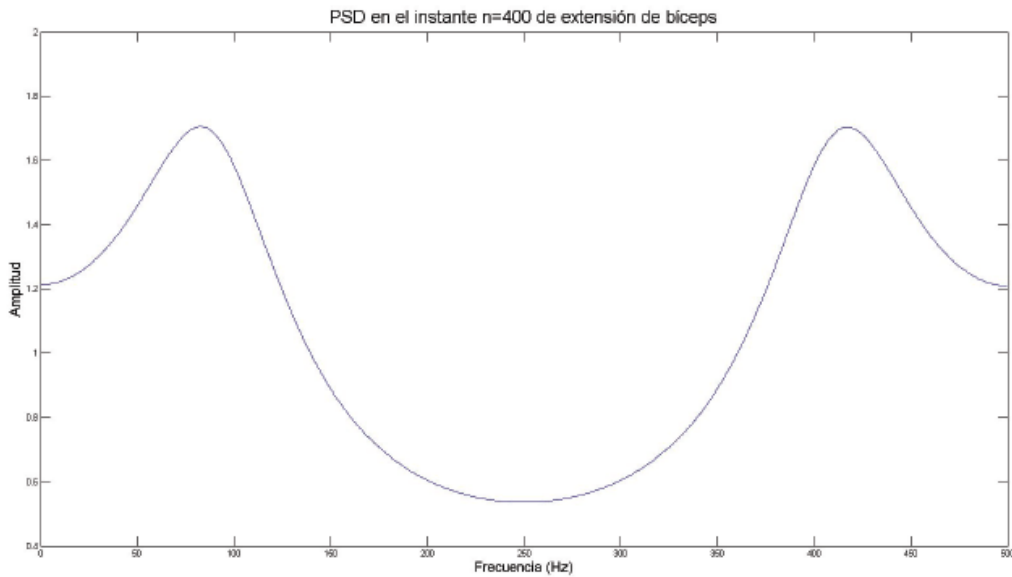


Figura 8.43: PSD en el instante n=400 de extensión de bíceps

Podemos determinar el área bajo la curva de los PDS usando el método trapezoidal, obteniéndose  $557.2013 \frac{\text{ampl}}{\text{freq}}$  y  $540.3908 \frac{\text{ampl}}{\text{freq}}$ . También podemos obtener bandas de frecuencias donde se concentran porcentajes energéticos considerables, construyamos una tabla donde observemos este efecto:

Frecuencia central (Hz)	Ancho de banda (Hz)	Porcentaje de energía contenido (%)
80.56640625	10	3.38
80.56640625	20	6.71
80.56640625	30	9.94
80.56640625	40	13.04
80.56640625	50	15.98
80.56640625	60	18.77
80.56640625	70	21.40
80.56640625	80	23.89
80.56640625	90	26.24
80.56640625	100	28.48
419.921875	10	3.37
419.921875	20	6.69
419.921875	30	9.92
419.921875	40	13.01
419.921875	50	15.95
419.921875	60	18.73
419.921875	70	21.37
419.921875	80	23.85
419.921875	90	26.21
419.921875	100	28.45

**Cuadro 8.2:** *Distribución energética en bandas de frecuencia para flexión de bíceps*

Frecuencia central (Hz)	Ancho de banda (Hz)	Porcentaje de energía contenido (%)
82.51953125	10	2.98
82.51953125	20	5.93
82.51953125	30	8.82
82.51953125	40	11.62
82.51953125	50	14.32
82.51953125	60	16.92
82.51953125	70	19.40
82.51953125	80	21.77
82.51953125	90	24.04
82.51953125	100	26.22
416.9921875	10	2.97
416.9921875	20	5.92
416.9921875	30	8.81
416.9921875	40	11.60
416.9921875	50	14.30
416.9921875	60	16.89
416.9921875	70	19.37
416.9921875	80	21.74
416.9921875	90	24.00
416.9921875	100	26.17

**Cuadro 8.3:** *Distribución energética en bandas de frecuencia para extensión de bíceps*

Armados ahora con los datos calculados, construyamos la matriz a la cual le aplicaremos la estrategia de componentes principales. La estructura de esta matriz que denominaremos  $X$  será la siguiente:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,N} \\ a_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,N} \\ a_{3,1} & x_{3,2} & \dots & x_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \dots & a_{M,N} \\ f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,N} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \dots & f_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{S,1} & f_{S,2} & \dots & f_{S,N} \\ E_{1,1} & E_{1,2} & \dots & E_{1,N} \\ e_{1,1} & e_{1,2} & \dots & e_{1,N} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \dots & e_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{T,1} & e_{T,2} & \dots & e_{T,N} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_N] \quad (8.4.2)$$

Donde para cada uno de los  $N$  vectores  $\mathbf{x}$  asociados a cada señal mioeléctrica de músculos diferentes (o diferentes zonas del mismo músculo)  $M$  coeficientes AR (en nuestro caso  $M = 4$ ),  $S$  frecuencias centrales de importancia energética (en nuestro caso elegiremos  $S = 1$  y usaremos la primer frecuencia central donde se tiene el valor máximo del PSD), el valor  $E$  que especifica la energía total del PSD y  $T$  porcentajes energéticos asociados a diferentes anchos de banda. Por lo que nuestra matriz es la siguiente:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.000501170140511019 & -0.00064334614867852 \\ -0.618793701630267 & -0.520445104208355 \\ 0.00173947012853142 & -0.000631687654845171 \\ 0.409347788256978 & 0.345526467883462 \\ 80.56640625 & 82.51953125 \\ 557.201349060029 & 540.390832535142 \\ 3.38565361922549 & 2.98249854343683 \\ 6.71690245109936 & 5.93246224520323 \\ 9.94736024354275 & 8.82077655812457 \\ 13.0439164101057 & 11.6243402822534 \\ 15.9880696459082 & 14.3273373533538 \\ 18.7740730701482 & 16.9211779730733 \\ 21.4055521642314 & 19.4034842661539 \\ 23.8920496674521 & 21.7766302718933 \\ 26.2462595081168 & 24.0462598503323 \\ 28.482124722712 & 26.2200279548859 \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] \quad (8.4.3)$$

Al aplicar la técnica de componentes principales encontramos que en el primer vector asociado al primer componente principal se tiene acumulada alrededor de 99% de la energía asociada a cada valor propio del correspondiente a cada componente principal, por lo que obtendremos una buena representación de los datos con un solo vector obtenido al proyectar los datos originales en el primer vector asociado al primer

componente principal:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -69.8500745793581 \\ -70.6557501547604 \\ -69.8484593800507 \\ -69.3148943442213 \\ 45.4379583959271 \\ 706.356329884491 \\ -65.3426576355658 \\ -60.8977408583378 \\ -56.5680743323788 \\ -52.3935038104485 \\ -48.3983202152743 \\ -44.5926310384003 \\ -40.9754929093608 \\ -37.5384071056529 \\ -34.2683362489938 \\ -31.1499456676145 \end{bmatrix} \tag{8.4.4}$$

Observemos en las siguientes gráficas el conjunto de datos originales y el nuevo conjunto de datos obtenido del PCA:

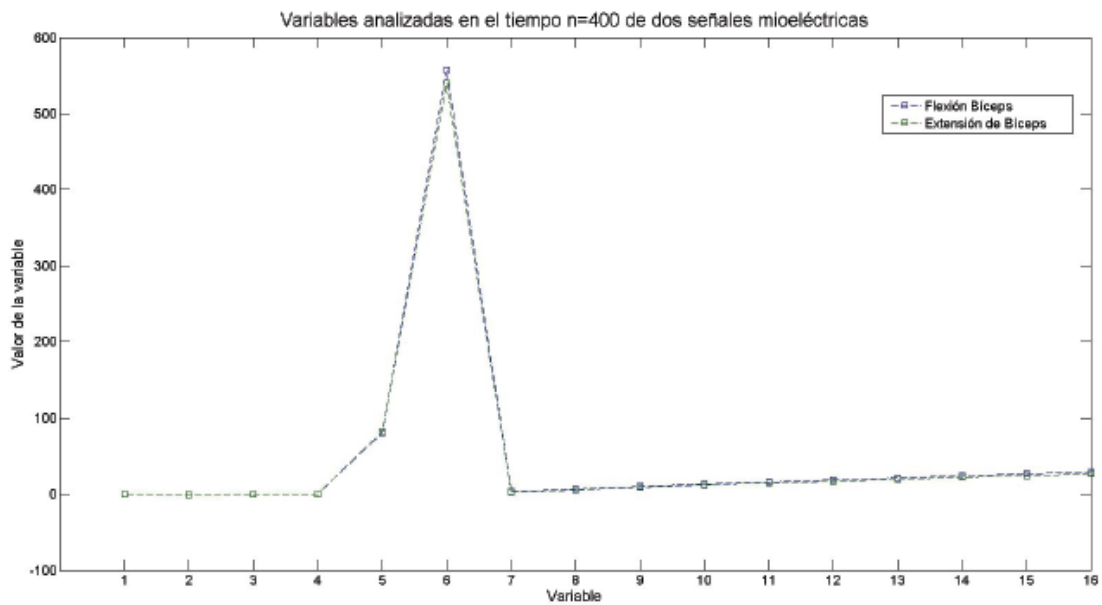
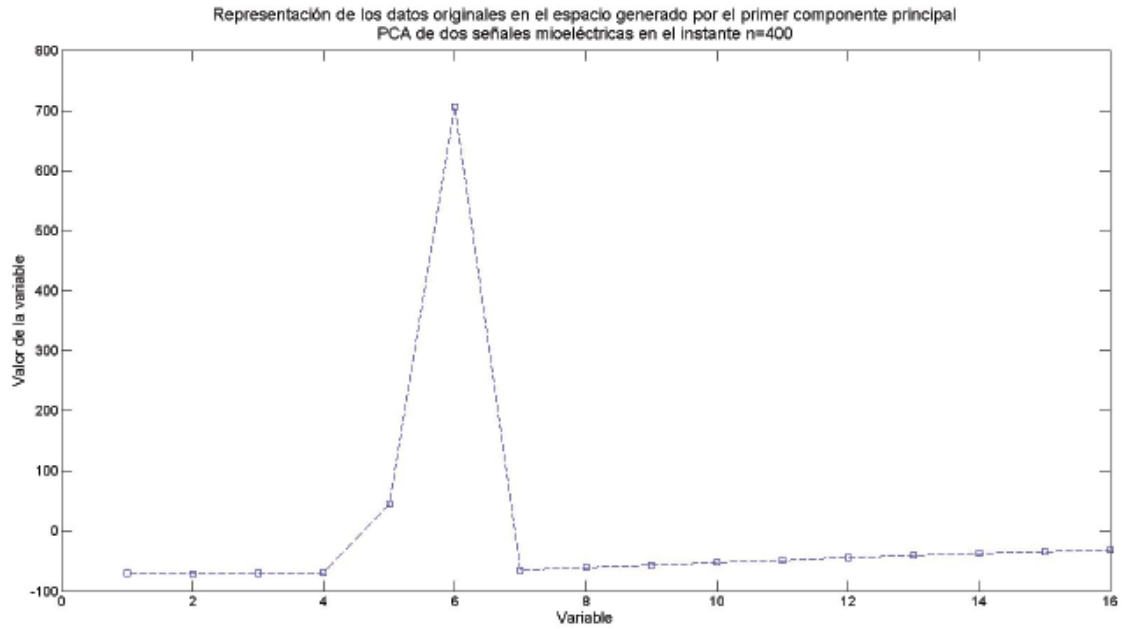


Figura 8.44: Datos originales para cada señal mioeléctrica en el instante  $n=400$ .



**Figura 8.45:** Datos obtenidos representados en el espacio asociado al primer componente principal.

En este caso se pudo eliminar una dimensión de la matriz de datos y efectivamente reducir el número de datos (y reducir el consumo de espacio de almacenamiento) en el sistema de procesamiento. Esta misma estrategia podrá utilizarse para reducir datos de información proveniente en cada instante de tiempo de señales mioeléctricas de músculos diferentes o de diferentes zonas del mismo músculo. En la matriz de datos es posible introducir aun mas variables que las mostradas en el ejemplo, haciendo del PCA una estrategia adecuada si trabajos posteriores recomiendan monitorear otras variables obtenidas de la señal mioeléctrica.

El ejemplo previo, las diferentes presentaciones de la estructura del filtro adaptable, la variación presente en los parámetros que es necesario monitorear para decidir si se lleva a cabo la estrategia de PCA es la manera que se propone utilizar para ofrecer e interpretar la información que se enviará la etapa de control del sistema protésico.

## Capítulo 9

# Conclusiones y perspectivas

En este capítulo final de la tesis se presentan las conclusiones de aplicar las técnicas de procesamiento descritas previamente a las señales reales y finalmente se establece un panorama de los diversos trabajos y perspectivas que se pueden desprender de la tesis para darle continuidad a esta investigación.

### 9.1. Conclusiones

En la estructura del presente documento encontramos dos áreas de la ingeniería que se encuentran aparentemente aisladas (la mecánica y el procesamiento de señales), las cuales se unen con otras áreas, no solo de la ingeniería, cuando se desarrollan sistemas protésicos. En la parte de la dinámica y del modelado mecánico de la prótesis se siguió un procedimiento para calcular la cinemática del mecanismo asociado a la prótesis para posteriormente derivar las ecuaciones del modelo, esta parte se ha realizado de una manera detallada para facilitar su seguimiento considerando que es una propuesta valiosa para un mecanismo que hará la función de la prótesis en el cual se pueden aplicar diversas estrategias de control el cual se verá beneficiado de la información aportada por la parte de procesamiento de señales. Esta parte culmina con la obtención de ecuaciones que modelan el comportamiento del mecanismo dada una trayectoria y relacionando los pares necesarios para alcanzarla.

Dentro del procesamiento de señales se ha tratado la forma y las estrategias asociadas con la tarea de extraer información de la señal mioeléctrica basados en un enfoque de un sistema adaptable, cuyos parámetros calculados a cada instante de tiempo permiten obtener información de la señal, además de que permiten detectar cambios en la señal mioeléctrica. Utilizando los parámetros encontrados en los algoritmos utilizados se intenta relacionar un comportamiento observado en el miembro superior gracias a la aplicación de las herramientas seleccionadas a señales obtenidas de 3 movimientos de miembro superior. Se han analizado algunas de las formas de interpretar la información que aportan los coeficientes, su presentación individual (presentado en la forma en la que evoluciona temporalmente cada parámetro), o en conjunto (obteniendo módulo y fase de las raíces asociadas a la estructura del filtro adaptable). Se observó el comportamiento de un parámetro ( $\gamma$ ) de gran utilidad presente el algoritmo del filtrado adaptable que permite establecer un margen fuera del cual considero que la señal ha sufrido un cambio que es necesario cuantificar. Finalmente se ha propuesto un enfoque de PCA para reducir redundancia existente entre un conjunto de datos, los cuales se presentan en forma de parámetros del sistema adaptable y datos obtenidos de ellos.

Observamos que las consideraciones sobre la señal mioeléctrica sobre su estacionariedad son adecuadas en movimientos de corta duración como los analizados, observándose que la PSD durante la actividad muscular es poco variante con el tiempo, sin embargo existe referencias sobre la no estacionariedad en movimientos de larga duración [33] asociados a pruebas de fatiga muscular, por lo que se considera que un modelo adaptable como el abordado es un enfoque que permitirá analizar esta situación.

Como se puede observar, la selección de orden en todos los casos es 4, lo cual es un indicativo del número de parámetros de que puede enviar como información a la etapa de control. Considerando que las señales reales utilizadas provienen del mismo músculo y basados en el hecho de que son las mismas fibras moleculares las que actúan es de esperarse que el orden haya sido el mismo, sin embargo es posible que cada músculo (y entre los mismos músculos pero de diferentes individuos) exista un orden diferente. Haciendo uso de las herramientas propuestas es posible determinarlos para cada uno de los músculos que se involucrarán en el control de la prótesis, por lo que debe realizarse el mismo procedimiento para establecer el orden del modelo en cada músculo.

Las densidades espectrales de potencias estimadas en cada instante de tiempo pueden permitir realizar diagramas multidimensionales donde diferentes músculos relacionados al llevarse a cabo cierto movimiento asociado a la prótesis se traduzcan como reglas a seguir del controlador, es posible que se puedan establecer regiones dentro de ese espacio multidimensional dentro de las cuales se esté llevando a cabo cierto movimiento en la prótesis. Más aún, y debido a que hay indicativos [11] que concluyen que conforme el músculo residual de una amputación se va degradando, la amplitud de la señal mioeléctrica se ve alterada en mayor medida que el contenido frecuencial asociado a las fibras musculares. Así, y partiendo de la premisa de que las frecuencias de funcionamiento de las fibras musculares guardan una relación directa con el contenido frecuencial de la señal mioeléctrica, es posible que un análisis frecuencial sea más adecuado al tratar señales mioeléctricas. Observamos que las estructuras de los estimados del PSD arrojadas por la estructura del filtro adaptable son consistentes con los PSD por ventana generados por los métodos no paramétricos.

Basados en esto se propone utilizar los coeficientes de una estructura de filtro adaptable como datos representativos de la señal mioeléctrica, con los cuales es posible estimar su densidad espectral de potencias, y en base a esta extraer valores energéticos y bandas de frecuencia asociados. Finalmente se propone reducir la cantidad de datos usando una técnica de análisis de componentes principales. Estos datos se enviarán a la etapa de control como medida de la actividad muscular. Además es posible ir observando el grado de estacionariedad que mantiene la señal (usando el parámetro  $\gamma$ ), en cuyo caso se puede establecer un margen dentro del cual se considere como estacionaria y solo realizar el análisis de componentes principales cuando se detecte una no estacionariedad dentro de la señal (cambio de modelo y por ende de los coeficientes asociados). Finalmente proponemos monitorear el comportamiento del cambio de modelo observando las pendientes generadas fuera del margen propuesto del parámetro  $\gamma$  para detectar cambios en el movimiento del miembro superior.

Los contenidos energéticos y las correspondientes bandas de frecuencias donde se localicen aportarán a la etapa de control una medida directa de la actividad muscular y se pueden utilizar como una variable que varía directamente con el movimiento a realizar de la prótesis. Reducir la redundancia entre información proveniente de diferentes músculos (o de un solo músculo) puede ser necesaria debido al hardware de procesamiento que sea utilizado, donde es necesario enfrentar problemas asociados con límite de memoria física, restricciones en la cantidad de datos a procesar y velocidad de procesamiento, por lo que utilizar una estrategia de PCA como la propuesta es de gran utilidad al lidiar con problemas de esta índole.



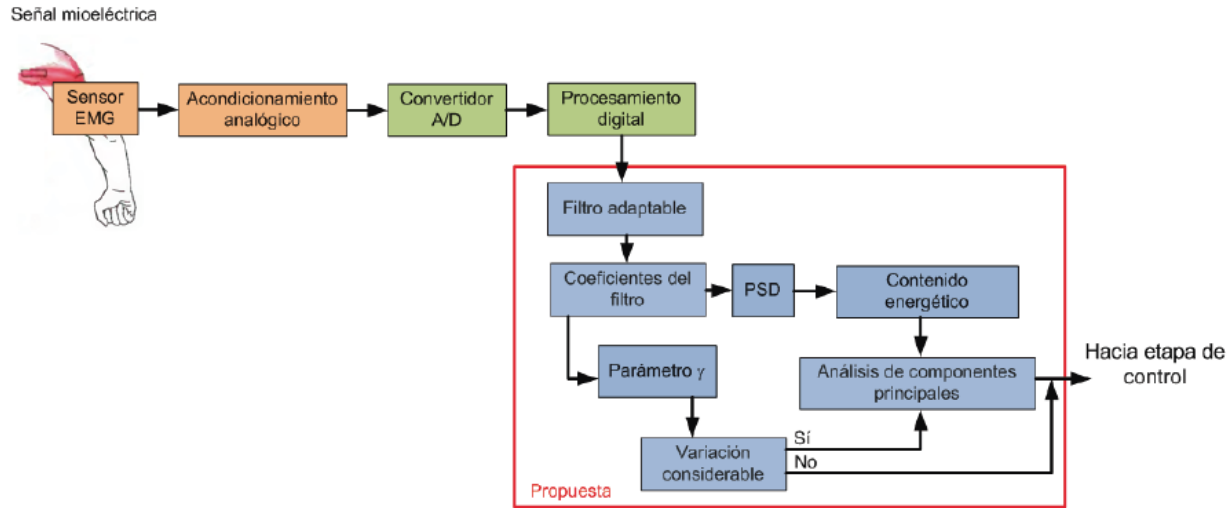


Figura 9.1: Propuesta resultado del trabajo de tesis

## 9.2. Trabajo a futuro y perspectivas

Como parte final de esta tesis presentamos una serie de tópicos en los cuales es posible trabajar a futuro para darle continuidad a la investigación y representan una serie de ideas sobre las líneas de investigación que se pueden derivar del presente trabajo, aunque pueden existir más de estas propuestas aquí se presentan las que se consideran de mayor impacto dentro del desarrollo de prótesis.

### 9.2.1. Relación con variables mecánicas

Como siguiente paso se propone realizar una serie de experimentos utilizando movimientos de miembro superior en los cuales se tenga información acerca de la posición angular del brazo, velocidad y aceleración y fuerza durante la realización del movimiento e ir monitoreando la señal mioeléctrica durante el mismo, para buscar relaciones entre los parámetros obtenidos de procesar la señal mioeléctrica (haciendo uso de las estrategias propuestas en este documento) y las características dinámicas del movimiento. Estas relaciones proporcionar información que permitan mejorar el control de la prótesis.

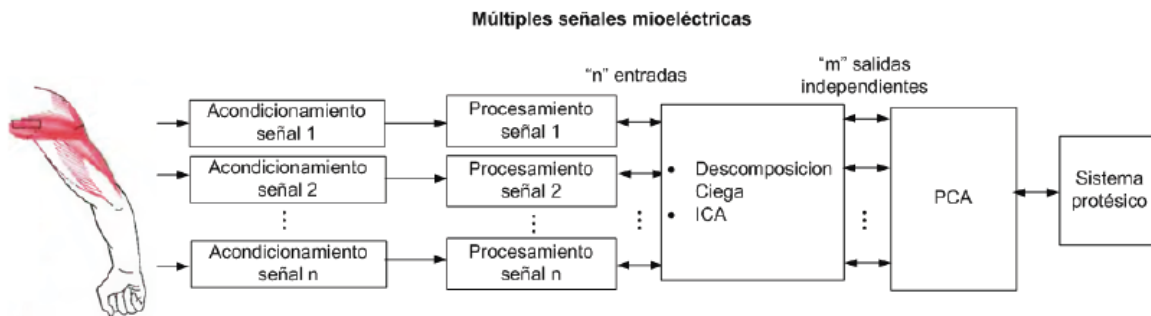
### 9.2.2. Versiones rápidas del algoritmos de filtrado RLS

Existen diferentes versiones rápidas del algoritmo RLS propuesto que son más atractivas desde el punto de implementación en arquitecturas de DSPs debido a que requieren menor número de cálculos (y por ende menor tiempo de cálculo) para obtener los mismos resultados del algoritmo RLS y son más susceptibles de ser utilizados aplicaciones en tiempo real. La implementación de estos algoritmos en estructuras de longitud de palabra de tamaño reducido y punto fijo poseen problemas inherentes a la inestabilidad numérica asociada a truncamientos y errores numéricos, por lo que es posible trabajar sobre esta línea de investigación si se desea implementar estos algoritmos y afrontar estos problemas de inestabilidad numérica dentro del hardware de procesamiento contenido en la prótesis.

### 9.2.3. Descomposición ciega e ICA

Como se ha descrito, al obtener varios juegos de parámetros correspondientes a cada una de las señales provenientes de diferentes músculos es posible reducir el número de dimensiones del conjunto de datos (reducir posibles datos redundantes) mediante la técnica de análisis de componentes principales (PCA). Sin embargo, las señales mioeléctricas son muy sensibles a la variación de la posición donde se encuentre el electrodo por lo que es necesario reducir los cambio de posición cuando se esté utilizando la prótesis, más aún, si la prótesis se remueve (lo cual es frecuente debido a que, en general,

las prótesis se remueven por las noches) y aunado con el hecho de que las dimensiones del miembro residual son cambiantes debido a la variabilidad de la masa muscular hacen casi imposible que los electrodos siempre permanezcan en la misma posición. Usar una técnica de descomposición ciega o una estrategia de análisis de componentes independientes (ICA) permiten extraer señales que poseen cierto grado de independencia las cuales se detectan mezcladas en cada uno de los sensores disponibles, por lo que una variación en la posición en que se coloca la prótesis (y por ende los sensores) no afectará el desempeño del sistema protésico debido a que es posible extraer señales independientes (asociadas a las señales detectadas en cada músculo independiente) las cuales posteriormente se alimentan a las herramientas del procesamiento de señales utilizadas. La desventaja de usar estos métodos radica en que los conceptos utilizados para definir la independencia de las señales provienen de la geometría diferencial, por lo que es necesario adentrarse en este tópico y además de que los algoritmos asociados son computacionalmente más demandantes por lo que habría de evaluarse si son susceptibles de ser implementados en sistemas en tiempo real (como es una prótesis).



**Figura 9.2:** *Descomposición ciega e ICA*

Diagrama de bloques del procesamiento de múltiples señales mioeléctricas usando técnicas de descomposición ciega o ICA.

#### 9.2.4. Distribuciones tiempo-frecuencia y wavelets

Otro de los trabajos a futuro es utilizar estimados de la densidad espectral para señales que son altamente no estacionarias, en esta parte se propone comparar diferentes clases de distribuciones tiempo-frecuencia y elegir un grupo que sea adecuado de utilizar al tratar señales mioeléctricas. También es posible utilizar el enfoque que provee el uso de wavelets. Al usar este tipo de estrategias será posible mejorar la resolución del contenido frecuencial y mejorar la estimación del mismo con lo que será posible mejorar el desempeño de la prótesis. Se podrá observar de manera más precisa la evolución temporal de las frecuencias presentes en la señal mioeléctrica.

#### 9.2.5. Estrategias de control del modelo dinámico propuesto

El modelo dinámico y el conjunto de ecuaciones que lo definen representan al sistema protésico como una planta susceptible de ser controlada. Así, es posible utilizar los diferentes enfoques de control existentes para abordar el problema del control de la prótesis y establecer técnicas de control cuyo desempeño sea aceptable para esta aplicación y cuya demanda computacional sea tal que se puedan implementar en un microprocesador que trabaje en tiempo real como lo demanda la aplicación de una prótesis. Otro posible trabajo relacionado con el modelo es compararlo con los modelos derivados del uso de paquetes de CAD/CAM que basados en un modelo CAD de un mecanismo arrojan un modelo dinámico del sistema.

## Apéndice A

# Identidades algebraicas

En este apéndice demostraremos la siguiente igualdad algebraica que permitirá reducir una serie de expresiones (3.3.23) a (3.3.27) que aparecen en la parte del modelado usando Euler-Lagrange, así demostraremos el siguiente par de ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left( \dot{\mathbf{N}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{q}} = \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{N}}^T \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.0.1})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^T \left( \mathbf{N} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \ddot{\mathbf{q}} = \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{N}^T \right) \ddot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.0.2})$$

Donde  $\mathbf{N}$  es simétrica, es decir,  $\mathbf{N} = \mathbf{N}^T$ , lo cual se comprueba de la siguiente manera:

$$\mathbf{N} = m_1 \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2^T \mathbf{J}_{G1} \mathbf{M}_2 \quad (\text{A.0.3})$$

$$\mathbf{N}^T = \left( m \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 \right)^T + \left( \mathbf{M}_2^T \mathbf{J}_{G1} \mathbf{M}_2 \right)^T \quad (\text{A.0.4})$$

$$= m \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2^T \mathbf{J}_{G1}^T \mathbf{M}_2 \quad (\text{A.0.5})$$

Si se tiene que  $\mathbf{J}_{G1} = \mathbf{J}_{G1}^T$  se tiene:

$$\mathbf{N}^T = m \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2^T \mathbf{J}_{G1} \mathbf{M}_2 = \mathbf{N}_1 \quad (\text{A.0.6})$$

## Apéndice B

# Programas

### B.1. Programa de ventaneo en MATLAB

A continuación se presenta la función programada en MATLAB para dividir a la señal  $x$  en trozos haciendo uso de una ventana rectangular de tamaño  $n$  con traslape  $t$ . La función regresa la matriz  $X$  que contiene en cada columna la ventana y el entero positivo  $NV$  que especifica el número de ventanas obtenidas.

```
function [X NV]= ventaneor(x,n,t)

%ventaneor Genera una matriz donde cada fila representa una ventana de
%          tamao "n" con traslape "t" de las partes que componen una
%          seal "x"
%-----

%USO: X = ventaneo(x,n,t)
%-----+

M=length(x);
c=0;
vi=0;
while(1)
if(vi+1>M),break,end
for i=0:1:n-1
    if(vi+i+1<=M)
        X(i+1,c+1)=x(vi+i+1);
    else
        X(i+1,c+1)=0;
    end
end
vi=vi+n-t;
c=c+1;
[m,NV] = size(X);
end
end
```

## B.2. Programa de ecuaciones en diferencias en MATLAB

A continuación se presenta la función programada en MATLAB para dividir a la señal  $x$  en trozos haciendo uso de una ventana rectangular de tamaño  $n$  con traslape  $t$ . La función regresa la matriz  $X$  que contiene en cada columna la ventana y el entero positivo  $NV$  que especifica el número de ventanas obtenidas.

```
function [X NV]= ventaneor(x,n,t)

%ventaneor Genera una matriz donde cada fila representa una ventana de
%          tamao "n" con traslape "t" de las partes que componen una
%          seal "x"
%-----

%USO: X = ventaneo(x,n,t)
%-----+

M=length(x);
c=0;
vi=0;
while(1)
if(vi+1>M),break,end
for i=0:1:n-1
    if(vi+i+1<=M)
        X(i+1,c+1)=x(vi+i+1);
    else
        X(i+1,c+1)=0;
    end
end
vi=vi+n-t;
c=c+1;
[m,NV] = size(X);
end
end
```

## B.3. Programa estimar el orden del modelo AR en cada ventana

La función programada en MATLAB estima el orden del modelo AR para cada ventana, por lo que divide a la señal  $x$  en trozos haciendo uso del programa de ventaneo, posteriormente calcula los coeficientes AR para cada ventana y la varianza del error, con la cual se calculan los criterio FPE y AIC y se selecciona el orden que los minimize, esta operación la realiza para cada ventana.

```
function [X,NV,F,G,Ff,Gf,If,Ig,c,g,If1,Ig1,h,w,AA,AB] = ORDvent1(x,n,t,ord,l)

ventanas=length(n);
traslapes=length(t);

for jj=1:ventanas

    for jjj=1:traslapes

[X NV]= ventaneor(x,n(jj),t(jjj));
        n1=n(jj);
```

```

for j=0:ord
for i=1:NV
    %[c,g(j+1,i)] = lpc(X(:,i),j);
    [c,g] = lpc(X(:,i),j);
    g=(g*(n1-1))/n1;
    F(j+1,i)=(n1+j)/(n1-j)*g;
    G(j+1,i)=n1*log(g)+(2*j);

end

for i=1:NV

[Ff(j+1),If(i)]=min(F(:,i));
[Gf(j+1),Ig(i)]=min(G(:,i));
If1=If-1;
Ig1=Ig-1;

end

AA(jjj,:)=If1;
AB(jjj,:)=Ig1;

for i=1:NV

[c,g] = lpc(X(:,i),If1(i));
[h(:,i),w] = freqz(1,c,1);

end

end

end

end

end

end

```

#### B.4. Programa estimar la densidad espectral de potencias instantánea

Esta función programada en MATLAB estima la evolución temporal de la densidad espectral de potencias basados en una matriz  $A$  que contiene los diferentes coeficientes del model AR asociados a cada instante de tiempo.

```

function F=ARfreq(A,n)

[l,m]=size(A);
p(1)=1;

```

```

for j=1:m
for k=1:l
    p(k+1)=A(k,j);

end
[F(:,j),w] = freqz([1],p,n);

end

imagesc([1],w,10*log10((abs(F)).^2));title('PSD Instantneo'),ylabel('Frecuencia'),xlabel('Tiempo (n)')
end

```

### B.5. Programa estimar el orden del modelo AR usando la varianza del error del algoritmo RLS

Esta función programada en MATLAB grafica el comportamiento de los criterios FPE y AIC usando la salida del filtro de error basado en la estructura del filtro adaptable propuesto.

```

function [D,E,F,G] = optorden(y,ulto,lambda,n,delta)

l=length(y);

for i=1:ulto
    [a1,A1,error] = RLSest(y,i,lambda,n,delta);

    %pe=(sum(error.^2));

    D(i)=((l+i)/(l-i))*(var(error,1));
    E(i)=l*log(var(error,1))+2*i);

    %D(i)=((l+i)/(l-i))*(pe);
    %E(i)=l*log(pe)+2*i);

    [a2,g] = lpc(y,i);

    F(i)=((l+i)/(l-i))*g;
    G(i)=l*log(g)+2*i);

end

figure; plot(D); title('Seleccin de rden criterio FPE'),ylabel('FPE'),xlabel('rden'); grid on;
figure; plot(E); title('Seleccin de rden criterio AIC'),ylabel('AIC'),xlabel('rden'); grid on;

figure; plot(F); title('Seleccin de rden criterio FPE LPC MATLAB'),ylabel('FPE'),xlabel('rden')
figure; plot(G); title('Seleccin de rden criterio AIC LPC MATLAB'),ylabel('AIC'),xlabel('rden')

```

```
end
```

## B.6. Programa estimar coeficientes del filtro adaptable usando el algoritmo RLS

Esta función programada en MATLAB estima los coeficientes por unidad de tiempo usando el algoritmo RLS.

```
function [a,A,error,aux] = RLSest(u,M,lambda,n,delta)
```

```
w=zeros(M,1);
```

```
p=(1/delta).*eye(M,M);
```

```
for j=1:n
```

```
for i=1:M
```

```
if j-i>0
```

```
U(i)=u(j-i);
```

```
else U(i)=0;
```

```
end
```

```
end
```

```
pi=p*transpose(U);
```

```
k=(pi)/(lambda+(U*pi));
```

```
aux(j)=(transpose(w)*transpose(U));
```

```
e=u(j)-(transpose(w)*transpose(U));
```

```
w=w+(k*e);
```

```
p=((1/lambda)*p)-((1/lambda)*k*U*p);
```

```
A(:,j)=w;
```

```
error(j)=e;
```

```
end
```

```
a=-w;
```

```
end
```

## B.7. Programa estimar coeficientes del filtro adaptable usando el algoritmo RLS versión rápida (Cioffi y Kailath)

Esta función programada en MATLAB estima los coeficientes por unidad de tiempo usando el algoritmo rápido RLS 6.3.



```

function [A,gama] = ftf(y,p,delta,lambda,t)

alfapf=delta;

alfapb=(lambda.^(-p))*delta;

gamap=1;

gama1=1;

Ap=zeros(p,1);

Bp=zeros(p,1);

Hp=zeros(p,1);

Kp=zeros(p,1);

for n=1:t

    [Y1 Y2 Y]=tap(y,n,p);

    epf=y(n)+transpose(Ap)*Y;

    A(:,n)=Ap;

    Ap=Ap+(Kp*epf);

    epsilonpf=epf*gamap;

    alfapf=(lambda*alfapf)+(epsilonpf*epf);

    %gamaplus=gamap-(epsilonpf*alfapf*epsilonpf);
    gamaplus=gamap-(epsilonpf*(alfapf.^(-1))*epsilonpf);

    Kplus=[0;Kp]-([1; Ap]*((alfapf.^(-1))*epsilonpf));

    mu=Kplus(p+1);

    Mp=Kplus(1:p);

    %epb=-lambda*alfapb*mu*gamaplus;
    %epb=-lambda*(alfapf.^(-1))*mu*gamaplus;
    epb=-lambda*alfapb*mu*(gamaplus.^(-1));

    gama(n)=gamap;

    gamap=gamaplus/(1+(epb*mu));

    epsilonpb=epb*gamap;

    alfapb=(lambda*alfapb)+(epsilonpb*epb);

```

```

    Kp=(Mp-(Bp*mu))/(1+(epb*mu));

    Bp=Bp+Kp*epb;

end

end

```

## B.8. Programa para generar proceso AR

Esta función programada en MATLAB genera un proceso AR usando como entrada una matriz  $A$  que contiene los coeficientes a cada instante de tiempo, se calcula el proceso mediante la ecuación en diferencias.

```

function xe = generadorar(A,v1)

[l,m]=size(A);

%v=wgn(m,1,0);
%v1=v-mean(v);
xe=zeros(1,l);

for j=1:m

% y0=[...y(-4),y(-3),y(-2),y(-1)]
for k=1:l

    if j-k<=0
        y0(k)=0;

    else

        y0(k)=xe(j-k);

    end

end

xe(j)=ecendif(v1(j),[1 transpose(A(:,j))],1,fliplr(y0),[0]);

end

xe;

end

```

## Apéndice C

# Circuito utilizado para obtener señales mioeléctricas

### C.1. Diagramas y lista de componentes del circuito de adquisición de señales mioeléctricas

A continuación se muestra el circuito electrónico usado para la adquisición de señales mioeléctricas a las cuales se le aplican las estrategias de procesamiento seleccionadas [9].

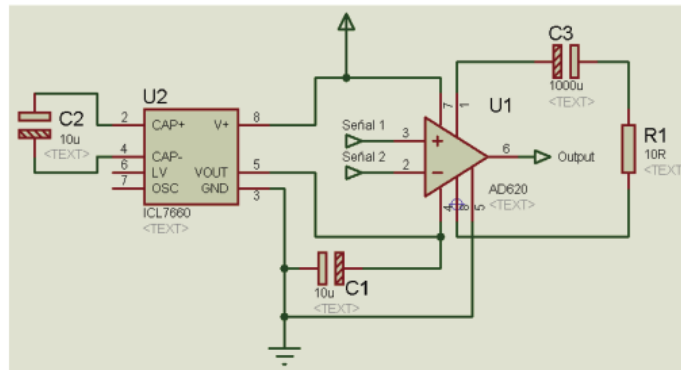


Diagrama de conexiones.

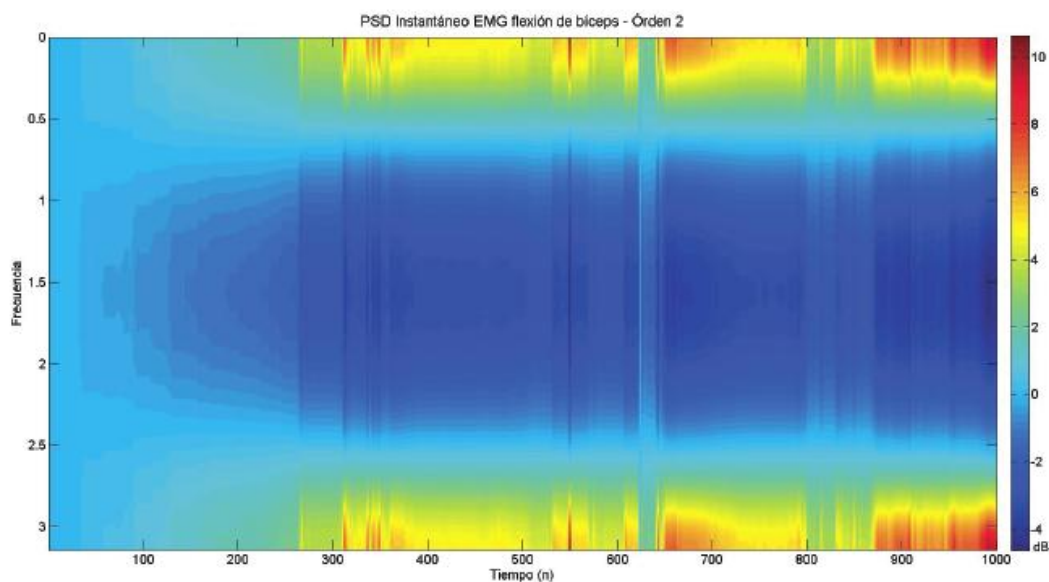
Componente	Descripción
U1	AD620 Amplificador instrumental
U2	ICL7660/2 Convertidor de voltaje
C1	Capacitor electrolítico 10μF a 50V
C2	Capacitor electrolítico 10μF a 50V
C3	Capacitor electrolítico 1000μF a 25V
R1	Resistor de 10Ω a 0.25W

Figura C.1: Circuito de adquisición de señales mioeléctricas

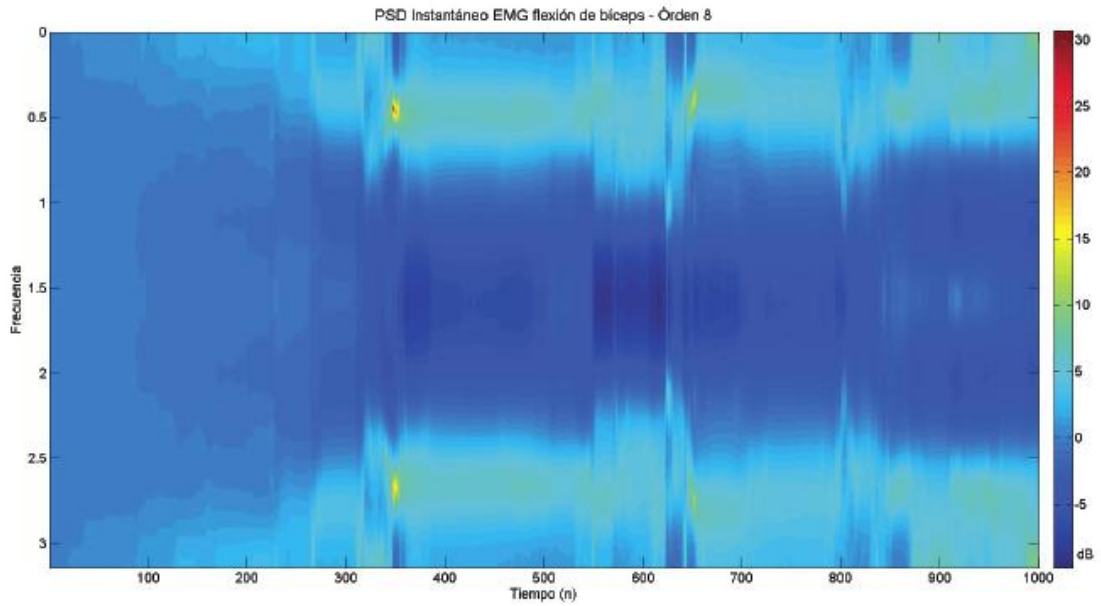
## Apéndice D

# PSDs de orden 2 y 8 del filtro RLS de las señales EMG

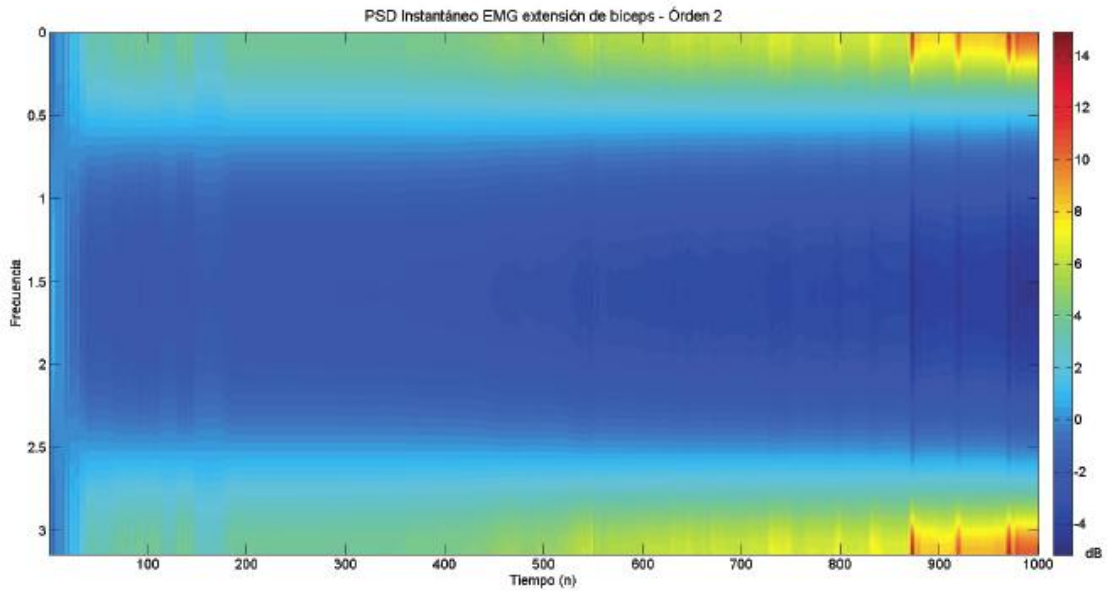
Evolución temporal de las señales mioeléctricas para un orden 2 y 8



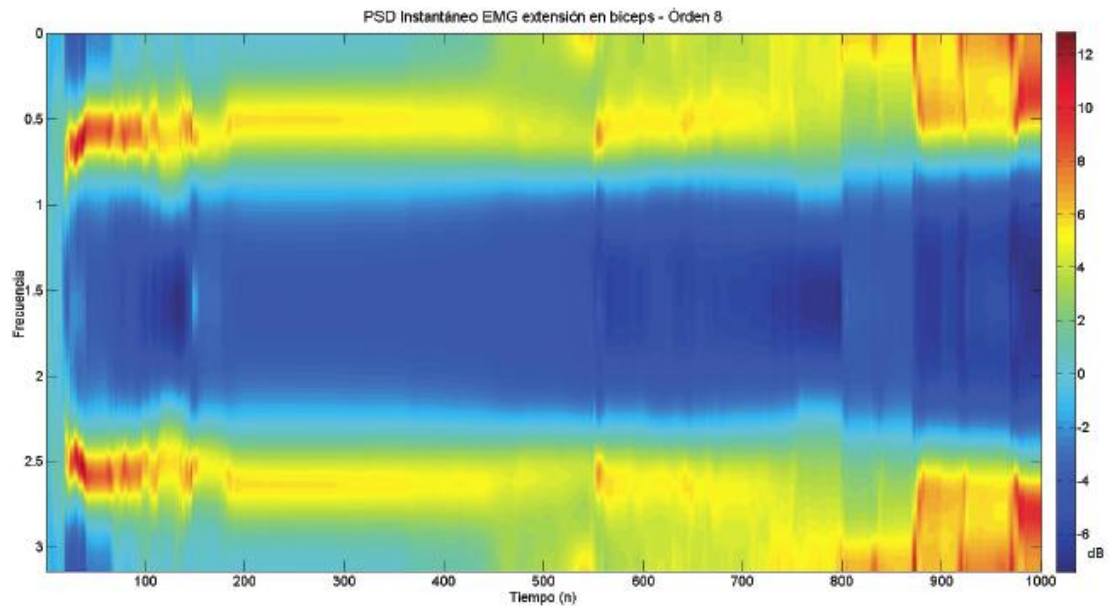
**Figura D.1:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 2)



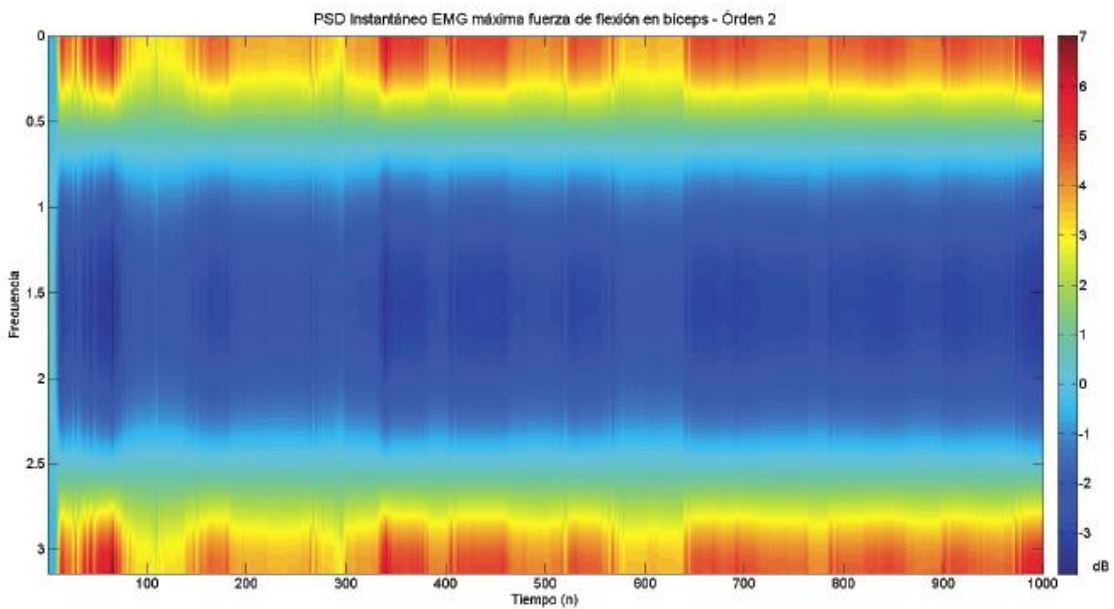
**Figura D.2:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 8)



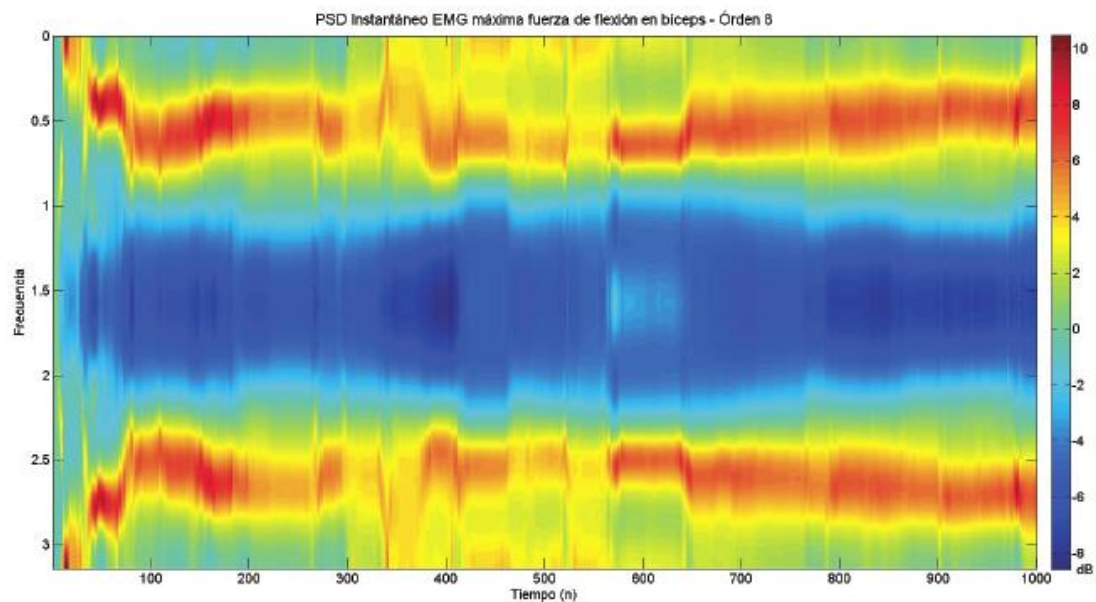
**Figura D.3:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 2)



**Figura D.4:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a extensión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 8)



**Figura D.5:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 2)



**Figura D.6:** Evolución temporal de densidades espectrales de potencias estimadas de señal EMG asociada a máxima fuerza de flexión de bíceps (RLS-factor de memoria de 0.99, orden 8)

## Bibliografía

- [1] [http://biomed.brown.edu/courses/bi108/bi108\\_2003\\_groups/hand\\_prosthetics/history.html](http://biomed.brown.edu/courses/bi108/bi108_2003_groups/hand_prosthetics/history.html).
- [2] <http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/discapacidad.aspx?tema=p>.
- [3] [http://www.mathworks.com/company/newsletters/news\\_notes/2009/jhu-model-based-design.html](http://www.mathworks.com/company/newsletters/news_notes/2009/jhu-model-based-design.html).
- [4] <http://www.rompglobal.org/prosthetics101.php#3>.
- [5] <http://www.touchbionics.com/i-limb>.
- [6] <http://www.waramps.ca/nac/terms/faqamp.html>.
- [7] Akaike. Statistical predictor identification. *Ann. Inst. Statist. Math*, 22:203–217, 1970.
- [8] Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC19:716–723, 1974.
- [9] Argüelles Morales Enrique and Juárez Mendoza Ana Marissa. *Diseño de un entrenador mioeléctrico*. Trabajo de Tesis UNAM.
- [10] Cioffi and Kailath. Fast, fixed order, least squares algorithms for adaptive filtering. *Proc. ICASSP 83*, 1983.
- [11] Cota and Espinosa. *Prototipo de Prótesis Mioeléctrica con Control Proporcional de Miembro Apendicular Superior para Amputados por Traumatismo con Muñón Largo de Antebrazo de dos Grados de Libertad*. Trabajo de tesis UPIITA-IPN, 2006.
- [12] Carlo J. de Luca. Physiology and mathematics of myoelectric signals. *IEEE Transactions on biomedical engineering*, BME-26(6), 1979.
- [13] Flores Itzel and Juárez Ana. *Diseño de prótesis mecatrónica de mano*. Trabajo de tesis UNAM, 2007.
- [14] Donald T. Greenwood. *Principles of Dynamics*. Prentice Hall, 2 edition, 1987.
- [15] Guyton and Hall. *Tratado de fisiología médica*. Mc. Graw Hill, 10 edition, 2001.
- [16] Monson H. Hayes. *Statistical digital signal processing and modeling*. John Wiley & Sons, 2 edition, 1996.
- [17] Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 4 edition, 2002.
- [18] Galindo Salinas Hector. *Estudio e implantacion de algoritmos de filtrado adaptable en aritmetica de punto fijo*. Trabajo de Tesis UNAM.
- [19] Hogan and Mann. Myoelectric signal processing: Optimal estimation applied to electromyography-part 1: Derivation of the optimal myoprocessor. *IEEE Transactions on biomedical engineering*, BME-27(7), 1980.



- [20] Hyvärinen, Karhunen, and Oja. *Independent Component Analysis*. John Wiley & Sons, 2 edition, 2001.
- [21] Francisco Cuenca Jimenez. *Apuntes de dinámica espacial*. UNAM.
- [22] Kaiser, Kadefors, and et al. Myoelectric signals for prosthesis control. *Medicinsk Teknik/Medico Teknik*, 1, 1968.
- [23] Steven M. Kay. *Modern spectral estimation: Theory and application*. Prentice Hall, 1988.
- [24] Steven M. Kay. *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB*. Springer, 2005.
- [25] Knaflitz and Balestra. Computer analysis of the myoelectric signal. *IEEE Micro*, 1991.
- [26] A. Papoulis. *Probability, random variables and stochastic processes*. Mc. Graw Hill, 3 edition, 1991.
- [27] Parker and Stuller. Signal processing for the multistate myoelectric channel. *Proc. IEEE*, 65, 1977.
- [28] B. Porat. *Digital processing of random signals*. Prentice Hall, 1994.
- [29] Proakis and Manolakis. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. Pearson education, 3 edition, 1995.
- [30] Alcantara Silva Rogelio. *Implantation d'algorithmes rapides sur des processeurs de traitement du signal*. Ecole Nationale superieure des telecommunications, 1986.
- [31] Spong and Hutchinson. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & sons, 1 edition, 2005.
- [32] Stone. *Independent Component Analysis: A Tutorial Introduction*. The MIT Press, 1 edition, 2004.
- [33] Stulen and de Luca. Frequency parameters of the myoelectric signal as a measure of muscle conduction velocity. *IEEE Transactions on biomedical engineering*, BME-28(7), 1981.
- [34] Charles C. Thomas. *The Control of Upper-Extremity Prostheses and Orthosis*. Springfield, 1987.
- [35] Trebes and Uribe. *Prótesis del miembro superior. Entrenamiento fisioterápico del amputado*. Ediciones Toray, 10 edition, 1973.
- [36] Ulrych and Ooe. Autoregressive and mixed autoregressive-moving average models and spectra. *Non-linear methods of spectral Analysis*, Springer Verlag, 1979.

# Index

ADP, 20  
AIC, 108  
AR, 102  
ATP, 18

CDMIT, 12

DARPA, 14  
DSP, 15

EMG, 20

FPE, 107

GDL, 14

KLT, 128

Levinson-Durbin, 105  
LTI, 89, 92

ME, 20

PDF, 108  
PSD, 95

RLS, 117

WSS, 91

世の中は何にたとへん

山彦のこたふる

聲の空しきがごと

良寛

*"¿Nuestra vida en este mundo  
a que debo compararla?  
Es como un eco que resuena entre las montañas  
y se pierde en la inmensidad del cielo"*

-Monje Ryokan