



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Química

Estudio de la dinámica de un fluido de Maxwell entre placas paralelas

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniera Química

presenta

Emma del Carmen González González

México, D.F.

2011





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado

Presidente	Dr. Rafael Herrera Nájera
Vocal	Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos
Secretario	Dr. Luis Medina Torres
1 ^{er} suplente	M. Ricardo Martínez Galicia
2 ^{do} suplente	M. José Esteban López Aguilar

Sitio donde se desarrolló el tema

Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Química, UNAM

Asesor del tema

Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

Sustentante

Emma del Carmen González González

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mis padres y hermano, esta tesis no podría haberse escrito sin su apoyo, son la pieza fundamental de mi vida.

Estoy especialmente agradecida con la Dra. Ma. Eugenia Costas Basín, por su confianza y orientación durante mi estancia en la Universidad, gracias por convertirse en mi inspiración.

Estoy en deuda con mi tutor Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos, por haber sido 1+1+2+3 veces mi profesor, por enseñarme que en cada fenómeno físico siempre hay algo que aprender y analizar, que aún cocinar un huevo puede ser tan complejo como describir la difusión de masa en un placa. Gracias por hacer lo que sabe hacer tan bien.

A Marcela Hernández, Anahí Duque, Adriana Blancas, Laura Blancas, Yumiko García y César Álvarez por su cariño y amistad durante los últimos años.

También gracias al jurado en general por sus revisiones y asesorías, indispensables para la culminación de este trabajo.

Finalmente a Cristóbal por ser mi apoyo profesional y personal. Gracias por el regalo de tu compañía.

*A mis padres y hermano
porque en silencio se los
prometí.*

Con cariño para Cristóbal

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE CONTENIDO	I
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	II
NOMENCLATURA	IV
1. Introducción	1
2. Objetivo	3
3. Antecedentes	4
4. Planteamiento del problema	14
5. Solución del problema	22
6. Primer caso límite $h \rightarrow \infty$	41
Primer problema de Stokes	
7. Segundo caso límite $\lambda \rightarrow 0$	44
Fluido newtoniano	
8. Tercer caso límite $h \rightarrow \infty$	50
Régimen estacionario	
9. Análisis	51
10. Conclusiones	65
11. Referencias	67
12. Apéndices	69

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1	Flujo cortante simple	4
Ilustración 2	Dependencia de la viscosidad respecto a Wi	6
Ilustración 3	Representación esquemática del problema, condiciones iniciales/frontera y restricciones	14
Ilustración 4	Representación del problema con el nuevo sistema de coordenadas	32
Ilustración 5	Primer problema de Stokes	41
Ilustración 6	Valores n que dependen de la parte real respecto a λ	54
Ilustración 7	Perfil de velocidad obtenido por Hayat et al. [1]	55
Ilustración 8	Comparación entre el modelo de Hayat et al. y el propuesto	56
Ilustración 9	Variación del modelo de Maxwell con el tiempo	57
Ilustración 10	Variación del modelo de Maxwell a diferentes tiempos de relajación	58
Ilustración 11	Variación del modelo de Maxwell a diferentes tiempos de relajación (detalle)	58
Ilustración 12	Perfiles de velocidad para los modelos de Maxwell y Newton a diferentes tiempos	60
Ilustración 13	Comparación entre el modelo a régimen estacionario y el modelo de Maxwell	61
Ilustración 14	Comparación del esfuerzo de corte τ_{xy} en $y=0$ del modelo de Newton vs Modelo de Maxwell	61

Ilustración 15 Comparación del esfuerzo de corte τ_{xy} en $z=0$ del modelo de Newton vs Modelo de Maxwell 62

Ilustración 16 Perfil de velocidad del modelo newtoniano a $t=10$, $t=50$, $t=100$ y $t=1000$ 63

NOMENCLATURA

a	Variable compuesta asociada a un límite de integración ver (3.38)
d	Distancia entre las paredes laterales del canal [L]
D	Rapidez de difusión rotacional [1/T]
G	Módulo elástico del material [M/LT ²]
h	Mitad de la distancia entre las paredes laterales del canal [L]
I	Matriz identidad [1]
$k_{1n,2n}$	Variable compuesta ver ec. (3.26) o (3.35)
L	Unidad de longitud
L	Gradiente de velocidad [1/T]
M	Unidad de masa
N	Variable compuesta ver ec. (3.46)
p	Presión [M/LT ²]
Q	Flujo volumétrico [L ³ /T]
$r_{1N,2N}$	Variable compuesta ver ec. (3.46)
$r_{3,4}$	Variable compuesta ver ec. (4.3)
t	Tiempo [T]
T	Unidad de tiempo
T	Tensor de esfuerzos [M/LT ²]
\bar{V}	Vector velocidad [L/T]
V	Valor de la velocidad de la placa inferior [L/T]
V_i	Componente i del vector velocidad [L/T]
V_{sn}	Valor n de la velocidad en el espacio de Fourier

V_{xn}	Valor n del componente x del vector velocidad en el espacio real
V^h	Solución homogénea de la velocidad en espacio de Fourier
V^p	Solución particular de la velocidad en espacio de Fourier
Wi	Número de Wissenberg [1]
α_n	Variable compuesta ver ec. (3.28)
β	Variable compuesta ver ec. (3.9)
$\dot{\gamma}$	Rapidez de corte o rapidez de deformación [1/T]
γ_n	Variable compuesta ver ec. (3.46)
$\dot{\gamma}_{xy}$	Componente xy del tensor rapidez de deformación [1/T]
γ_{xy}	Componente xy del tensor de deformación [1]
η	Viscosidad relativa [M/LT]
λ	Tiempo de relajación [T]
μ	Viscosidad [M/LT]
μ_n	Variable compuesta ver ec. (3.41)
ν	Viscosidad cinemática [L ² /T]
ρ	Densidad [M/L ³]
τ	Variable muda de integración relacionada al tiempo ver ec. (3.49)
τ_{ij}	Componente ij del tensor de esfuerzos de corte [M/LT ²]
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de esfuerzos de corte [M/LT ²]
φ	Variable compuesta ver ec. (3.9)
ω	Variable compuesta ver ec. (4.3)
$\frac{D}{D}$	Derivada material
$\frac{\partial}{\partial}$	Derivada parcial

$\frac{\delta}{\delta}$ Derivada convectiva superior o derivada de Oldroy

∇ Gradiente [1/L]

$()^T$ Matriz transpuesta

Con barra superior indica tensor de primer orden (vector)

En **negritas** indica tensor de segundo orden (matriz)

Introducción

El empleo de las ecuaciones de Navier–Stokes para describir el flujo de fluidos viscosos es abundante en la literatura, además la experiencia ha demostrado que el modelo de fluido newtoniano provee una buena aproximación en la mayoría de las condiciones de flujo para gases y líquidos de moléculas pequeñas, como el agua.

Sin embargo, existe una amplia gama de materiales cuyo comportamiento como fluidos no satisface las suposiciones de un fluido newtoniano. Estos materiales incluyen a muchos fluidos poliméricos, suspensiones, fluidos multifásicos, líquidos que contienen tensoactivos que tiendan a formar estructuras micelares y muchos otros. Estos materiales que exhiben propiedades macroscópicas más complejas han sido agrupados e históricamente conocidos como fluidos *no newtonianos*.

Los fluidos no newtonianos son bastante comunes, especialmente en aplicaciones de Ingeniería Química, por lo que su estudio es de interés para ampliar su comprensión y lograr un tratamiento adecuado.

A pesar de que es posible encontrar ciertas características similares entre los fluidos no newtonianos, no existe un modelo general que sea capaz de describirlos, como consecuencia existen distintas ecuaciones constitutivas dependiendo del tipo de fluido a describir.

Entre los diferentes tipos fluidos no newtonianos, los fluidos viscoelásticos han recibido especial atención, particularmente por su importancia industrial. Para este tipo de fluidos uno de los modelos más simples sugeridos es el de Maxwell. Este modelo fue elaborado por J. C. Maxwell en 1867 y fue el primer intento de

obtener una ecuación constitutiva para materiales con comportamientos viscosos y elásticos [3].

Aún cuando el modelo del fluido de Maxwell es un modelo lineal y por ello los problemas que lo involucran se podrían considerar sencillos –en comparación a otros modelos–, pocas geometrías y distribuciones de velocidad han sido resueltas de manera analítica [1, 5 y 6], lo que probablemente se deba al aumento de complejidad en las ecuaciones de flujo.

En este trabajo se estudia el flujo de un fluido de Maxwell convectivo en un canal de anchura finita con frontera inferior móvil y paredes laterales estáticas. Cabe mencionar que un trabajo similar fue desarrollado por T. Hayat *et al.* (2008, [1]), en el cual se presentan resultados interesantes pero no de un carácter general, es decir existe cierto intervalo para el cual las ecuaciones propuestas no son válidas, con esto en mente se elaboró una solución general. El desarrollo de dicho modelo es el objetivo de este trabajo.

Objetivo

Desarrollar un modelo general que permita describir la dinámica de un fluido de Maxwell convectivo entre dos placas paralelas de longitud infinita una de ellas en movimiento a velocidad constante y, limitado por paredes perpendiculares que se mantienen estáticas.

Además de analizar el modelo, se verifica su validez al reducirlo a casos más simples (casos límite) con soluciones conocidas.

Por último se analiza el perfil de velocidades y el esfuerzo cortante.

Antecedentes

Fluidos no newtonianos

Los fluidos no newtonianos son bastante comunes, especialmente en aplicaciones de ingeniería química, por lo que resulta útil discutir qué es responsable de su desviación del comportamiento newtoniano.

Los fluidos newtonianos presentan una marcada aleatoriedad en sus movimientos internos, los cuales aun a temperaturas moderadas son lo suficientemente vigorosos. De manera que superan cualquier tendencia de las fuerzas asociadas con el flujo a producir un estado de configuración molecular que difiera significativamente del estado isotrópico de equilibrio estadístico. En los fluidos no newtonianos esto no ocurre, es decir el flujo si altera su configuración intermolecular [2].

Con el fin de entender mejor este fenómeno se ilustrará con un ejemplo. Se considera un fluido, constituido por partículas del mismo tipo con forma de varas flexibles, sometido a un flujo cortante simple (ver ilustración 1).

$$\bar{V}^* = \dot{\gamma} y \hat{i}, \quad \dot{\gamma} = \text{rapidez de corte}$$

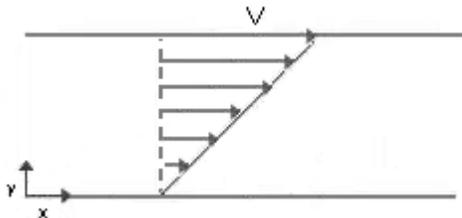


Ilustración 1 Flujo cortante simple

* Las cantidades con barra superior son tensores de primer orden (vectores). Las cantidades en **negritas** indican tensor de segundo orden (matrices)

Cuando una de estas partículas es sometida a un flujo de este tipo, tiende a rotar. Suponiendo que sólo hay rotación en el plano del flujo (plano $x-y$) el conjunto de varas o partículas tenderá a rotar de manera no uniforme, unas en dirección y (perpendicular al flujo) y otras orientadas respecto al eje x (paralelas al flujo). Tal que, las partículas orientadas de manera perpendicular al flujo tenderán a rotar más rápidamente que aquellas alineadas en la dirección del flujo. Aún cuando la partícula siga rotando de manera indefinida, pasará más tiempo en las posiciones alineadas al flujo ya que éstas presentan menor oposición a fluir. También existirá movimiento browniano –rotación por difusión–, y éste tenderá a mantener la distribución de manera aleatoria (estado de equilibrio). Como resultado, la distribución de orientaciones será una consecuencia de la competencia entre la tendencia a orientar las partículas en la dirección del flujo y la tendencia de la difusión browniana a mantener una distribución aleatoria. La fuerza del efecto del flujo será claramente proporcional a la rapidez de corte, mientras que al proceso de difusión lo caracterizará la rapidez de difusión rotacional D . Ambas cantidades tienen unidades del inverso del tiempo. La rapidez de difusión rotacional D da una medida de la escala temporal requerida por un sistema, con una distribución inicial de orientaciones aleatorias, para regresar al estado de equilibrio por medio movimientos brownianos en ausencia de flujo convectivo.

La magnitud de las desviaciones del estado de equilibrio inducidas por el flujo depende de la relación adimensional:

$$Wi = \frac{\dot{\gamma}}{D} = \lambda \dot{\gamma} \quad (1.1)$$

conocida como el número de Weissenberg, donde $\dot{\gamma}$ es la rapidez de corte o rapidez de deformación y λ es el tiempo de relajación.

El Wi también puede ser considerado como una medida de la importancia relativa entre los esfuerzos tangenciales y los normales [10].

Como es de esperarse, algunas propiedades macroscópicas dependerán de la distribución de las orientaciones moleculares y ésta cambiará en presencia del flujo, así que propiedades de flujo (como la viscosidad) tendrán diferentes valores a diferentes velocidades de corte.

Si la velocidad de corte es lo suficientemente grande como para que la magnitud del Wi sea del orden de la unidad o mayor, la tendencia a alinear las partículas en la dirección del flujo aumentará, entonces para un mismo esfuerzo de corte el fluido presentará una menor resistencia al flujo es decir disminuirá su viscosidad. En este caso se tiene una función viscosidad que varía respecto a $\dot{\gamma}$ y que se le conoce como viscosidad aparente, (ver ilustración 2).

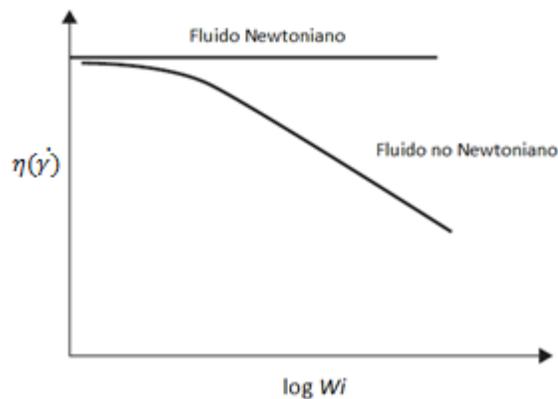


Ilustración 2 Dependencia de la viscosidad respecto a Wi [2].

Una diferencia entre los fluidos newtonianos y los no newtonianos es el cambio en el orden de magnitud de las difusividades D . En el caso de una suspensión coloidal es del orden de segundos o decenas de segundos, para moléculas pequeñas como el agua suele ser de fracciones de microsegundo o incluso más pequeñas [2].

Es importante mencionar que no es apropiado describir a un fluido en particular como newtoniano o no newtoniano sin antes considerar las condiciones de flujo, pues claramente puede ser posible que en condiciones especialmente severas de flujo con alta rapidez de corte un líquido de moléculas pequeñas exhiba un comportamiento no newtoniano, o bien que un líquido polimérico con un $Wi \ll 1$ pueda ser aproximado como un fluido newtoniano. El comportamiento depende del tipo de fluido así como de las condiciones de flujo.

Una característica común de los llamados fluidos no newtonianos es que al ser perturbados de su condición inicial, requieren de un tiempo relativamente largo para regresar a ese estado inicial, es decir pasan por un proceso de relajación. Los fluidos que presentan este comportamiento se conocen como fluidos viscoelásticos.

Para este tipo de fluidos uno de los modelos más simples sugeridos es el de Maxwell.

Fluido de Maxwell y fluido convectivo de Maxwell

El modelo de Maxwell fue elaborado por J. C. Maxwell en 1867 y fue el primer intento de obtener una ecuación constitutiva para materiales con comportamientos viscosos y elásticos [3]:

$$\tau_{xy} + \lambda \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \mu \dot{\gamma}_{xy}, \quad (1.2 a)$$

donde τ_{xy} es el componente xy del tensor de esfuerzos de corte, λ es el tiempo de relajación, μ es la viscosidad del material y $\dot{\gamma}_{xy}$ es el componente xy del tensor de rapidez de deformación.

La ecuación (1.2 a) puede ser escrita de forma integral

$$\tau_{xy} = \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\mu}{\lambda} e^{-\left(\frac{t-t'}{\lambda}\right)} \right\} \dot{\gamma}_{xy} dt', \quad (1.2 b)$$

La función entre corchetes se conoce como el *módulo de relajación*. Cuando se escribe en esta forma, el modelo de Maxwell indica que el esfuerzo de corte al tiempo presente t depende de la rapidez de deformación al tiempo t tanto como de la rapidez de deformación de todos los tiempos pasados t' , pero esa dependencia va multiplicada por un factor de peso (módulo de relajación) el cual decae exponencialmente cuando se retrocede en el tiempo. Tal que esta forma de la ecuación de Maxwell contiene la noción de memoria perdida, es decir el fluido recuerda bien lo que le pasó en momentos pasados recientes pero tiene un recuerdo confuso de lo que le pasó en momentos lejanos al presente [3].

En estado estacionario la ecuación (1.2 a) se simplifica al modelo newtoniano que describe a fluidos viscosos

$$\tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}_{xy}, \quad (1.3)$$

mientras que para cambios repentinos en el esfuerzo de corte el término dominante en la parte izquierda de la ecuación (1.2 a) es la derivada, al integrar la ecuación respecto al tiempo y considerando que

$$\lambda = \frac{\mu}{G} \quad (1.4)$$

se obtiene el modelo de Hooke para materiales elásticos

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad (1.5)$$

donde G es el módulo elástico del material y γ_{xy} es el componente xy del tensor de deformación. El tensor rapidez de deformación y el de deformación están relacionados por [3]

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \quad (1.6)$$

Una forma de generalizar la ecuación (1.2 a) es expresarla en forma tensorial

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = 2\mu \mathbf{D} \quad (1.7)$$

$$\text{con } \mathbf{D} = 2\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{2}[\nabla \bar{\mathbf{V}} + (\nabla \bar{\mathbf{V}})^T]$$

La ecuación (1.7) es conocida como el modelo simple de Maxwell [3], la cual es una ecuación diferencial lineal que sirve para describir los fenómenos viscoelásticos de algunos materiales bajo ciertas restricciones, como deformaciones pequeñas.

Cuando el fluido sufre deformaciones “grandes” se presentan fenómenos viscoelásticos no lineales, los cuales no se pueden describir mediante un modelo lineal. Tal vez la forma más simple de combinar la dependencia temporal y la no linealidad del esfuerzo de corte sea incorporando un término no lineal en el modelo simple de Maxwell. Esto se ha conseguido al reemplazar la derivada parcial respecto al tiempo por la derivada convectiva superior o derivada de Oldroyd [4]:

$$\frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} = \frac{D \boldsymbol{\tau}}{Dt} - (\nabla \bar{\mathbf{V}})^T \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \bar{\mathbf{V}}) \quad (1.8)$$

donde el primer término del lado derecho es la derivada material y se define como

$$\frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla\boldsymbol{\tau} \quad (1.9)$$

Nótese que los términos no lineales en la ecuación (1.8) son $(\nabla\bar{\mathbf{V}})^T \cdot \boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla\bar{\mathbf{V}})$.

Al realizar este cambio en el modelo simple de Maxwell se tiene

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \frac{\delta\boldsymbol{\tau}}{\delta t} = 2\mu\mathbf{D} \quad (1.10)$$

que es el modelo convectivo de Maxwell [4]. Éste modelo se utilizará en el presente trabajo, pues introduce aspectos no lineales en sus ecuaciones lo cuáles son comunes en fluidos viscoelásticos.

Al realizar un balance de cantidad de movimiento del sistema en estudio con la ecuación constitutiva del modelo convectivo de Maxwell (1.10) se obtiene una ecuación diferencial parcial de segundo orden, lineal homogénea y de coeficientes constantes, que se propone resolver mediante transformadas de Fourier y variación de parámetros. Por lo que resulta pertinente hacer una pequeña mención de esta técnica matemática.

Transformadas de Fourier

Las transformaciones integrales, especialmente las de Laplace y Fourier, son técnicas bien conocidas para la resolución de problemas en sistemas lineales. Paralelamente se ocupan las transformaciones como una herramienta matemática o física para convertir el problema en uno que pueda resolverse más fácilmente. Las transformadas de Fourier juegan un rol importante en la teoría de

varias ramas de la ciencia. Pero aun cuando pueden ser consideradas solamente como funciones matemáticas, también asumen un significado físico al analizar las funciones de las cuales se derivan: son una herramienta para simplificar problemas pero al resolverlos ayudan a que ciertas observaciones experimentales hagan sentido.

Las transformadas de Fourier fueron propuestas por Jean Baptiste Joseph Fourier en 1807, cuando encontró la forma de resolver una ecuación que describía la conducción de calor en sólidos – misma que él había propuesto años atrás. Aún cuando ésta técnica matemática no fue aceptada con agrado entre sus contemporáneos, actualmente es una de las técnicas más recurrentes para la resolución de problemas [11].

La transformada de Fourier se define como

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\xi y} dy \quad (1.11)$$

y la antitransformada es

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-i\xi y} d\xi \quad (1.12)$$

Considerando que

$$e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x) \quad (1.13)$$

la ecuaciones (1.11) y (1.12) pueden ser descompuestas en una parte seno y otra coseno, y dependiendo de la naturaleza del problema se puede hacer uso de

una sola de estas partes. En este trabajo se manejarán sólo las transformadas de tipo seno.

La transformada de Fourier tipo seno se define como

$$\mathcal{F}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(y) \text{sen}(\xi y) dy \quad (1.14)$$

y la antitransformada es

$$f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{F}(\xi) \text{sen}(\xi y) d\xi \quad (1.15)$$

Al definir (1.14) y (1.15) se puede demostrar que la transformada de Fourier tipo seno de una segunda derivada es

$$\mathcal{F}^{(2)}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi f(0) - \xi^2 \mathcal{F}(\xi) \quad (1.16)$$

Las transformaciones integrales descritas con anterioridad son aplicables para variables con un intervalo infinito.

Mientras la definición de la transformada de Fourier tipo seno carece de un límite superior finito la transformada de Fourier tipo seno finita si lo tiene, esta característica es determinante y va de la mano con los límites de la variable a la cual se le quiera aplicar la transformación, *i.e.* para variables con límites infinitos se empleará la transformada de Fourier tipo seno y para variables con límites finitos se empleará la transformada de Fourier finita tipo seno.

La transformada de Fourier finita tipo seno se define como

$$\mathcal{F}(n) = \int_0^d f(z) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{d}\right) dz \quad (1.17)$$

y la antitransformada como

$$f(z) = \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \quad (1.18)$$

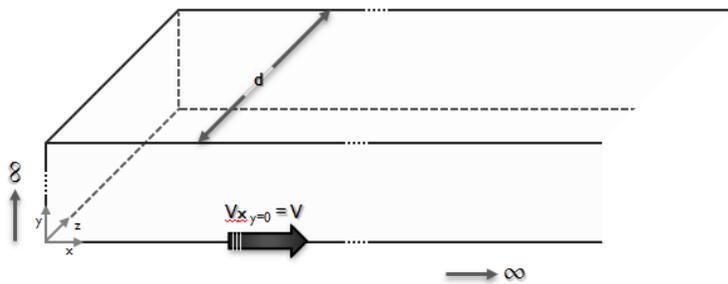
Considerando (1.17) la transformada de Fourier finita tipo seno para una segunda derivada es

$$\mathcal{F}^{(2)}(n) = \frac{n\pi}{d} [(-1)^{n+1} f(d) + f(0)] - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \mathcal{F}(n) \quad (1.19)$$

Para una explicación más amplia acerca de las transformadas de Fourier así como para la demostración de las ecuaciones contenidas en esta sección ver la referencia [9].

Planteamiento del problema

En este trabajo se analiza el flujo de un fluido de Maxwell convectivo incompresible en un canal de longitud infinita con frontera inferior móvil, a velocidad constante V , y de altura infinita [1].



Condiciones iniciales

$$V_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} = 0, \quad t = 0, \quad y > 0, \quad z \in (0, d)$$

$$\tau(y, z, 0) = 0$$

Condiciones a la frontera

$$V_x(0, z, t) = V, \quad t > 0 \quad \text{y} \quad 0 < z < d$$

$$V_x(y, 0, t) = V_x(y, d, t) = 0, \quad y, t > 0$$

$$V_x \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V_x}{\partial t} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad y \rightarrow \infty$$

Restricciones

Fluido incompresible

No existe gradiente de presión

Ilustración 3 Representación esquemática del problema, condiciones iniciales/frontera y restricciones.

Se considera que sólo hay velocidad en la dirección de flujo

$$\vec{V} = (V_x, 0, 0) = V\hat{i} \tag{2.1}$$

La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0 \tag{2.2}$$

Y en este caso se reduce a

$$\frac{\partial \rho V_x}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

Como es un fluido incompresible su densidad será constante (traza $\mathbf{D} = 0$ y $\rho = cte$)

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

se tiene que

$$V_x \neq V_x(x) \quad \therefore \quad V_x = V_x(y, z, t) \quad (2.5)$$

Ésta ecuación satisface la condición de incompresibilidad.

Para obtener la distribución de velocidades es necesario hacer un balance diferencial de momentum del sistema, con esto en mente se planteará el tensor de esfuerzos de Cauchy \mathbf{T} para el fluido de Maxwell

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.6)$$

Para obtener $\boldsymbol{\tau}$ primero se escribirá la ecuación (1.10) para el problema en estudio.

Considerando lo anterior, el gradiente de velocidad es

$$\mathbf{L} = \nabla \bar{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Al ser $\boldsymbol{\tau}$ un tensor de segundo orden

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad \gamma \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(y, z, t) \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \bar{V} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \\ \tau_{yy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \\ \tau_{zy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$(\nabla \bar{V})^T \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$(\nabla \bar{V})^T \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial V_x}{\partial z} & \tau_{yy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial V_x}{\partial z} & \tau_{yz} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

El término $\bar{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}$ de la ecuación (1.9) se escribe en notación de índices como $V_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k}$, considerando lo anterior la ecuación (1.10) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \lambda V_x \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \lambda V_y \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \\ & \lambda V_z \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \tau_{yx} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial V_x}{\partial z} & \tau_{yy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial V_x}{\partial z} & \tau_{yz} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \\ & \lambda \begin{pmatrix} \tau_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \\ \tau_{yy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \\ \tau_{zy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12) \end{aligned}$$

Con las ecuaciones (2.1) y (2.8) la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \\
 & - \lambda \begin{pmatrix} \tau_{yx} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial V_x}{\partial z} & \tau_{yy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial V_x}{\partial z} & \tau_{yz} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & - \lambda \begin{pmatrix} \tau_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \\ \tau_{yy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \\ \tau_{zy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Con el fin de simplificar más la ecuación anterior se hará un análisis por componente matricial; para ello se toma en cuenta que

$$\boldsymbol{\tau}(y, z, 0) = \mathbf{0} \tag{2.14}$$

Para el componente [1,1] de (2.13)

$$\tau_{xx} + \lambda \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} - \tau_{yx} \frac{\partial V_x}{\partial y} - \tau_{zx} \frac{\partial V_x}{\partial z} - \tau_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} - \tau_{xz} \frac{\partial V_x}{\partial z} \right] = 0 \tag{2.15}$$

por la simetría del tensor de esfuerzos

$$\frac{\partial}{\partial t} \tau_{xx} + \frac{1}{\lambda} \tau_{xx} = 2\tau_{yx} \frac{\partial V_x}{\partial y} + 2\tau_{zx} \frac{\partial V_x}{\partial z} \tag{2.16}$$

Para el componente [2,2]

$$\tau_{yy} + \lambda \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

O bien

$$\frac{d\tau_{yy}}{dt} + \frac{1}{\lambda} \tau_{yy} = 0 \quad (2.18)$$

Que es una ecuación diferencial lineal ordinaria, homogénea y de primer orden, cuya solución es

$$\tau_{yy} = C e^{-\lambda t} \quad (2.19)$$

que debe cumplir con la condición (2.14) por tanto

$$\tau_{yy} = 0 \quad (2.20)$$

Nótese que el análisis de τ_{yy} es equivalente para $\tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zz}$ por lo que

$$\tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.21)$$

Siguiendo el análisis, para el componente [1,2] de (2.13)

$$\tau_{xy} + \lambda \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} - \lambda \tau_{yy} \frac{\partial V_x}{\partial y} - \lambda \tau_{zy} \frac{\partial V_x}{\partial z} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (2.22)$$

que se simplifica a

$$\tau_{xy} + \lambda \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (2.23)$$

Un caso similar se tiene para los componentes restantes

$$\tau_{yx} + \lambda \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (2.24)$$

$$\tau_{xz} + \lambda \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad (2.25)$$

$$\tau_{zx} + \lambda \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad (2.26)$$

Concluyendo que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ y } \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2.27)$$

Las ecuaciones (2.23) y (2.25) se pueden reescribir como

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{xy} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (2.28)$$

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{xz} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad (2.29)$$

Para el problema planteado el balance diferencial de momentum en la dirección de flujo \hat{i} y en ausencia de un gradiente de presión p es

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} + \rho \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.30)$$

Combinando (2.30) con (2.1), (2.5) y (2.8) se llega a

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.31)$$

Al multiplicar por $(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t})$

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.32)$$

Al eliminar τ_{xy} y τ_{xz} combinando (2.28), (2.29) y (2.30) se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden, lineal homogénea y de coeficientes constantes

$$\lambda \frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} + \frac{\partial V_x}{\partial t} = v \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}, \quad v = \frac{\mu}{\rho}, \quad y \cap t > 0, \quad z \in (0, d) \quad (2.33)$$

que es la ecuación resultante del balance diferencial de momentum del sistema en la dirección del flujo.

Las condiciones iniciales y de frontera correspondientes a este problema son

$$V_x = 0 \quad \frac{\partial V_x}{\partial t} = 0, \quad t = 0, \quad y > 0, \quad z \in (0, d) \quad (2.34)$$

$$V_x(0, z, t) = V, \quad t > 0 \cap 0 < z < d \quad (2.35)$$

y

$$V_x(y, 0, t) = V_x(y, d, t) = 0, \quad y \cap t > 0 \quad (2.36)$$

Además de las condiciones

$$V_x \rightarrow 0 \cap \frac{\partial V_x}{\partial t} \rightarrow 0 \text{ si } y \rightarrow \infty \quad (2.37)$$

que también deben ser cumplidas

La ecuación (2.33) se debe resolver a fin de obtener la distribución de velocidad del problema $(V_x(y, z, t))$, la ecuación resultante debe cumplir con las condiciones iniciales y de frontera anteriormente planteadas. Hacer esto nos permitirá describir la dinámica de un fluido de Maxwell convectivo en la geometría descrita al inicio de esta sección.

Solución del problema

En esta sección se obtendrá la distribución de velocidades $V_x(y, z, t)$ al resolver la ecuación (2.33), con $V_x(y, z, t)$ se obtendrá el esfuerzo cortante y el flujo volumétrico. Al conocer estas tres funciones se podrá describir satisfactoriamente la dinámica de un fluido de Maxwell convectivo en la geometría descrita anteriormente.

Transformación del problema al espacio de Fourier

Con la finalidad de resolver la ecuación (2.33) de manera tal que satisfaga las condiciones propuestas se hará uso de una transformada de Fourier finita tipo seno sobre la variable z y una transformada de Fourier seno para y , ver introducción ecs. (1.14) a (1.19).

Para z

$$\mathcal{F}\{V_x(y, z, t)\} = V_{xn}(y, t) = \int_0^d V_x(y, z, t) \text{sen}(\lambda_n z) dz, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{d} \quad (3.1)$$

Aplicando la transformada a (2.33) se obtiene

$$\lambda \frac{\partial^2 V_{xn}}{\partial t^2} + \frac{\partial V_{xn}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_{xn}}{\partial y^2} + \nu \{\lambda_n [(-1)^{n+1} V_x(y, d, t) + V_x(y, 0, t)] - \lambda_n^2 V_{xn}\} \quad (3.2)$$

Para y

$$\mathcal{F}_s\{V_{xn}(y, t)\} = V_{sn}(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty V_{xn}(y, t) \text{sen}(\xi y) dy \quad (3.3)$$

Aplicando a (3.2)

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial^2 V_{sn}(\xi, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V_{sn}(\xi, t)}{\partial t} \\ = v \left[\xi \sqrt{\frac{2}{\pi}} V_{xn}(0, t) - \xi^2 V_{sn}(\xi, t) \right] + v \{ \lambda_n [(-1)^{n+1} V_s(\xi, d, t) + V_s(\xi, 0, t)] - \lambda_n^2 V_{sn}(\xi, t) \} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para evaluar $V_{xn}(0, t)$ se debe transformar la condición referida en (2.35)

$$\mathcal{F}\{V\} = \int_0^d V \operatorname{sen}(\lambda_n z) dz = -\frac{V}{\lambda_n} \cos(\lambda_n z) \Big|_0^d - \frac{V}{\lambda_n} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{V}{\lambda_n} [1 - (-1)^n] \quad (3.5)$$

$$V_{xn}(0, t) = \frac{V}{\lambda_n} [1 - (-1)^n] \quad (3.6)$$

Para $V_s(\xi, d, t) \cap V_s(\xi, 0, t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{V_s(y, d, t)\} = \mathcal{F}\{0\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty 0 \operatorname{sen}(\xi y) dy = 0, \\ \mathcal{F}\{V_s(y, 0, t)\} = \mathcal{F}\{0\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty 0 \operatorname{sen}(\xi y) dy = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Con (3.6) y (3.7) se puede hacer más manejable la ecuación (3.4)

$$\lambda \frac{\partial^2 V_{sn}(\xi, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V_{sn}(\xi, t)}{\partial t} = \xi v \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{V}{\lambda_n} [1 - (-1)^n] \right] - v V_{sn}(\xi, t) [\xi^2 + \lambda_n^2] \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea

$$\frac{d^2 V_{sn}}{dt^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{dV_{sn}}{dt} + \varphi V_{sn}(\xi, t) = \beta, \quad \varphi = \frac{\nu}{\lambda} [\xi^2 + \lambda_n^2], \quad \beta = \xi \nu V \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{\lambda \lambda_n} \right]} \quad (3.9)$$

Esta ecuación se puede resolver por el método de variación de parámetros

Solución por variación de parámetros

Para resolver la ecuación (3.9) se debe primero resolver la ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{d^2 V_{sn}^h}{dt^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{dV_{sn}^h}{dt} + \frac{\nu}{\lambda} [\xi^2 + \lambda_n^2] V_{sn}^h(\xi, t) = 0 \quad (3.10)$$

cuya ecuación auxiliar es

$$D^2 + \frac{1}{\lambda} D + \frac{\nu}{\lambda} [\xi^2 + \lambda_n^2] = 0 \quad (3.11)$$

con solución

$$D = \frac{-\frac{1}{\lambda} \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - 4 \frac{\nu}{\lambda} [\xi^2 + \lambda_n^2]}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\nu\lambda[\xi^2 + \lambda_n^2]}}{2\lambda} \quad (3.12)$$

Como el radicando puede ser real e imaginario

$$0 < 4\nu\lambda(\xi^2 + \lambda_n^2) \leq 1 \text{ y } 1 < 4\nu\lambda(\xi^2 + \lambda_n^2) < \infty \quad (3.13)$$

la ecuación (3.9) tendrá una solución por intervalos, por lo que se resolverá primero considerando el caso de raíces reales y después el caso de raíces complejas conjugadas.

Raíces reales → paso 1

Encontrar la solución para la ecuación diferencial (3.10), que es

$$V_{sn}^h = C_1 V_{sn}^1 + C_2 V_{sn}^2 = C_1 e^{k_{1n}t} + C_2 e^{k_{2n}t} \quad (3.14)$$

$$k_{1n,2n} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2 \varphi}}{2\lambda} \quad (3.15)$$

Raíces reales → paso 2

Cálculo de la solución particular.

Se propone una solución de la forma

$$V_{sn} = V_{sn}^h + V_{sn}^p \quad (3.16)$$

donde V_{sn}^p es la solución particular del problema y está dada por

$$V_{sn}^p = V_{sn}^1 u_n(\xi, t) + V_{sn}^2 v_n(\xi, t) \quad (3.17)$$

Donde $u_n(\xi, t)$ es

$$u_n(\xi, t) = -\frac{1}{k_{2n} - k_{1n}} \int \beta e^{-k_{1n}t} dt = \frac{\beta}{k_{1n}(k_{2n} - k_{1n})} e^{-k_{1n}t} \quad (3.18)$$

Y $v_n(\xi, t)$ es

$$v_n(\xi, t) = \frac{1}{k_{2n} - k_{1n}} \int \beta e^{-k_{2n}t} dt = \frac{-\beta}{k_{2n}(k_{2n} - k_{1n})} e^{-k_{2n}t} \quad (3.19)$$

Considerando (3.17), (3.18) y (3.19) se llega a

$$V_{sn}^p = e^{k_{1n}t} \frac{\beta}{k_{1n}(k_{2n} - k_{1n})} e^{-k_{1n}t} - e^{k_{2n}t} \frac{\beta}{k_{2n}(k_{2n} - k_{1n})} e^{-k_{2n}t} \quad (3.20)$$

Simplificando

$$V_{sn}^p = \frac{\beta}{k_{1n}(k_{2n}-k_{1n})} - \frac{\beta}{k_{2n}(k_{2n}-k_{1n})} \quad (3.21)$$

$$V_{sn}^p = \frac{\beta k_{2n}}{k_{1n}k_{2n}(k_{2n}-k_{1n})} - \frac{\beta k_{1n}}{k_{2n}k_{1n}(k_{2n}-k_{1n})} = \frac{\beta(k_{2n}-k_{1n})}{k_{1n}k_{2n}(k_{2n}-k_{1n})} \quad (3.22)$$

se llega a

$$V_{sn}^p = \frac{\beta}{k_{1n}k_{2n}} \quad (3.23)$$

Raíces reales → paso 3

Cálculo de la solución general

Al combinar las ecuaciones (3.14), (3.16) y (3.23)

$$V_{sn} = \frac{\beta}{k_{1n}k_{2n}} + C_1 e^{k_{1n}t} + C_2 e^{k_{2n}t} \quad (3.24)$$

Para el cálculo de las constantes se consideran las condiciones

$$V_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} = 0, \quad t = 0, \quad y > 0, \quad z \in (0, d) \quad (2.34)$$

se llega a

$$V_{sn} = \frac{\beta}{k_{1n}k_{2n}} \left[1 - \frac{k_{2n}e^{k_{1n}t} - k_{1n}e^{k_{2n}t}}{k_{2n}-k_{1n}} \right] \quad (3.25)$$

Teniendo como solución

$$V_{sn} = V\xi \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n(\xi^2 + \lambda_n^2)} \right]} \left\{ 1 - \frac{k_{2n}e^{k_{1n}t} - k_{1n}e^{k_{2n}t}}{k_{2n} - k_{1n}} \right\} \quad (3.26)$$

$$k_{1n,2n} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2\varphi}}{2\lambda}$$

En el siguiente desarrollo se repetirá el análisis para el caso en que la solución de la ecuación diferencial homogénea son raíces complejas conjugadas

Raíces complejas conjugadas → paso 1

Encontrar la solución para la ecuación diferencial (3.10), que es

$$V_{sn}^h = C_1 V_{1sn}^h + C_2 V_{2sn}^h = C_1 e^{-t/2\lambda} \text{sen}(\alpha_n t) + C_2 e^{-t/2\lambda} \text{cos}(\alpha_n t) \quad (3.27)$$

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{4\nu\lambda(\xi^2 + \lambda_n^2) - 1}}{2\lambda} \quad (3.28)$$

Raíces complejas conjugadas → paso 2

Cálculo de la solución particular.

La solución a la que se llegará será homóloga a la ecuación (3.16) cuya solución particular será como (3.17), pero con diferentes formas para $u_n(\xi, t)$ y $v_n(\xi, t)$

$$u_n(\xi, t) = \frac{\beta}{\alpha_n} \int e^{t/2\lambda} \text{cos}(\alpha_n t) dt \quad (3.29)$$

Considerando la ecuación A.4 (ver apéndice A) se llega a

$$u_n(\xi, t) = \frac{\beta}{\alpha_n} e^{t/2\lambda} \left(\frac{\frac{1}{2\lambda} \text{cos}(\alpha_n t) + \alpha_n \text{sen}(\alpha_n t)}{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \alpha_n^2} \right) \quad (3.30)$$

$$v_n(\xi, t) = \frac{-\beta}{\alpha_n} \int e^{-t/2\lambda} \text{sen}(\alpha_n t) dt$$

Considerando la ecuación A.3 (ver apéndice A) se llega a

$$v_n(\xi, t) = \frac{-\beta}{\alpha_n} e^{t/2\lambda} \left(\frac{\frac{1}{2\lambda} \text{sen}(\alpha_n t) - \alpha_n \text{cos}(\alpha_n t)}{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \alpha_n^2} \right)$$

De manera que la solución particular es

$$V_{sn}^p = \frac{\beta}{\alpha_n} e^{\frac{t}{2\lambda}} e^{-\frac{t}{2\lambda}} \text{sen}(\alpha_n t) \left(\frac{\frac{\text{cos}(\alpha_n t)}{2\lambda} + \alpha_n \text{sen}(\alpha_n t)}{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \alpha_n^2} \right) - \frac{\beta}{\alpha_n} e^{\frac{t}{2\lambda}} e^{-\frac{t}{2\lambda}} \text{cos}(\alpha_n t) \left(\frac{\frac{\text{sen}(\alpha_n t)}{2\lambda} - \alpha_n \text{cos}(\alpha_n t)}{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \alpha_n^2} \right) \quad (3.31)$$

simplificando

$$V_{sn}^p = \frac{\beta}{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \alpha_n^2} = \frac{\beta}{\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{4\nu\lambda(\xi^2 + \lambda_n^2) - 1}{4\lambda^2}} = \frac{\lambda\beta}{\nu(\xi^2 + \lambda_n^2)} = \frac{\beta}{\varphi} \quad (3.32)$$

Paso 3

Cálculo de la solución general

Al combinar las ecuaciones (3.16), (3.27) y (3.32)

$$V_{sn} = \frac{\beta}{\varphi} + C_1 e^{-t/2\lambda} \text{sen}(\alpha_n t) + C_2 e^{-t/2\lambda} \text{cos}(\alpha_n t) \quad (3.33)$$

Evaluando las condiciones iniciales (ver ec. 2.34) se obtiene

$$V_{sn} = \frac{\beta}{\varphi} \left[1 - \frac{1}{2\lambda\alpha_n} e^{-t/2\lambda} \text{sen}(\alpha_n t) - e^{-t/2\lambda} \text{cos}(\alpha_n t) \right] \quad (3.34)$$

Antitransformada del problema

Con las ecuaciones (3.26) y (3.34) se puede construir la solución general de la ecuación (3.9), la cual es

$$V_{sn} = \begin{cases} V\xi \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[\frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n(\xi^2 + \lambda_n^2)} \right]} \left\{ 1 - \frac{k_{2n}e^{k_{1n}t} - k_{1n}e^{k_{2n}t}}{k_{2n} - k_{1n}} \right\}, & 0 < 4\nu\lambda(\xi^2 + \lambda_n^2) < 1 \\ V\xi \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[\frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n(\xi^2 + \lambda_n^2)} \right]} \left[1 - \frac{1}{2\lambda\alpha_n} e^{-t/2\lambda} \text{sen}(\alpha_n t) - e^{-t/2\lambda} \text{cos}(\alpha_n t) \right] & 1 < 4\nu\lambda(\xi^2 + \lambda_n^2) < \infty \end{cases}$$

$$k_{1n,2n} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\nu\lambda[\xi^2 + \lambda_n^2]}}{2\lambda} \quad \alpha_n = \frac{\sqrt{4\nu\lambda[\xi^2 + \lambda_n^2] - 1}}{2\lambda} \quad (3.35)$$

Esta solución es válida en el espacio de Fourier, pero para que tenga sentido físico en el espacio real es necesario aplicar las antitransformadas correspondientes (ver introducción):

Antitransformada $\xi \rightarrow y$

$$V_{xn} = V \frac{2 [1 - (-1)^n]}{\pi \lambda_n} \int_0^\infty \frac{\xi}{(\xi^2 + \lambda_n^2)} \text{sen}(\xi y) d\xi - V \frac{2 [1 - (-1)^n]}{\pi \lambda_n} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \text{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \lambda_n^2} \frac{k_{2n}e^{k_{1n}t} - k_{1n}e^{k_{2n}t}}{k_{2n} - k_{1n}} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^\infty \left[\frac{\text{sen}(\alpha_n t)}{2\lambda\alpha_n} + \text{cos}(\alpha_n t) \right] \frac{\xi \text{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \lambda_n^2} d\xi \right\} \quad (3.36)$$

ver ecuación A.1 del apéndice A

$$V_{xn} = V \frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n} e^{-\lambda_n y} - V \frac{2 [1 - (-1)^n]}{\pi \lambda_n} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \text{sen}(\xi y) k_{2n} e^{k_{1n} t} - k_{1n} e^{k_{2n} t}}{\xi^2 + \lambda_n^2} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^\infty \left[\frac{\text{sen}(\alpha_n t)}{2\lambda \alpha_n} + \cos(\alpha_n t) \right] \frac{\xi \text{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \lambda_n^2} d\xi \right\} \quad (3.37)$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{4\nu\lambda} - \lambda_n^2} \quad (3.38)$$

Antitransformada $n \rightarrow z$

$$V_x = \frac{2V}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{d}\right) e^{-\lambda_n y} - \frac{4V}{d \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \left\{ \int_0^a \frac{\xi \text{sen}(\xi y) k_{2n} e^{k_{1n} t} - k_{1n} e^{k_{2n} t}}{\xi^2 + \lambda_n^2} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^\infty \left[\frac{\text{sen}(\alpha_n t)}{2\lambda \alpha_n} + \cos(\alpha_n t) \right] \frac{\xi \text{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \lambda_n^2} d\xi \right\} \quad (3.39)$$

Análisis de $[1 - (-1)^n]$

Impares

Pares

$$n = 1 \rightarrow [1 - (-1)^n] = 2$$

$$n = 2 \rightarrow [1 - (-1)^n] = 0$$

$$n = 3 \rightarrow [1 - (-1)^n] = 2$$

$$n = 4 \rightarrow [1 - (-1)^n] = 0$$

considerando esto la ecuación (3.39) se puede expresar como

$$V_x = \frac{4V}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_N y}}{\lambda_N} \text{sen}(\lambda_N z) - \frac{8V}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\lambda_N z)}{\lambda_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \text{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \lambda_n^2} \frac{k_{2n} e^{k_{1n} t} - k_{1n} e^{k_{2n} t}}{k_{2n} - k_{1n}} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\text{sen}(\alpha_n t)}{2\lambda \alpha_n} + \cos(\alpha_n t) \right] \frac{\xi \text{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \lambda_n^2} d\xi \right\} \quad (3.40)$$

$$N = 2n - 1$$

Con la finalidad de simplificar el análisis se propone un cambio de coordenadas tal que $z = z^* + h$ con $h = d/2$, para observar cómo afecta este cambio se analizará sólo el primer sumando de (3.40), pues el desarrollo será igual de válido para toda la ecuación.

$$\frac{4V}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_N y}}{\lambda_N} \text{sen}(\lambda_N z) = \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_N y}}{\mu_N} \text{sen}[\mu_N (z^* + h)], \quad \mu_N = \frac{(2n - 1)\pi}{2h} \quad (3.41)$$

de manera esquemática

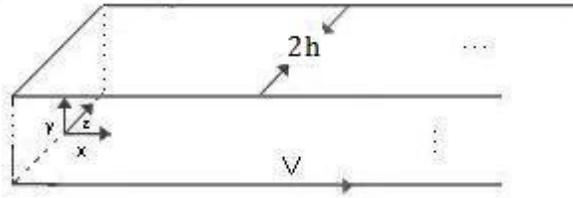


Ilustración 4 Representación del problema con el nuevo sistema de coordenadas

Las funciones seno y coseno son funciones que presentan la misma forma sinusoidal sólo desfasada por un factor de $\pi/2$ es decir $\text{sen}(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. Con esto en mente, se nota que la función $\text{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2h}(z^* + h)\right]$ puede ser sustituida por una función coseno siempre y cuando se conozca el factor de desplazamiento. Para encontrar dicha cantidad es necesario hacer un análisis físico del problema.

Con el nuevo eje coordenado $-h \leq z \leq h$ y $V_x(y, -z^*, t) = V_x(y, z^*, t)$ se tiene un problema simétrico respecto al eje z, además las funciones seno y coseno están desfasadas por un factor de $-\mu_N h$

$$z^* = 0 \text{ y } n = 1 \rightarrow \text{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2h}(z^* + h)\right] = 1 \quad (3.42)$$

$$z^* = 0 \text{ y } n = 1 \rightarrow \text{cos}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2h}(z^* + h - h)\right] = 1 \quad (3.43)$$

Pero (3.42) y (3.43) también son función de n

$$z^* = 0 \rightarrow \text{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2h} (z^* + h) \right] = (-1)^{n+1} \rightarrow \text{cos} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2h} (z^* + h - h) \right] = 1 \text{ para todo } n \quad (3.44)$$

considerando esto se propone

$$\text{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2h} (z^* + h) \right] = (-1)^{n+1} \text{cos} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2h} (z^*) \right] \quad (3.45)$$

Obviando el uso del asterisco en la variable z , la ecuación (3.40) toma la siguiente forma

$$V_x = \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \text{cos}[\mu_N z]}{\mu_N} e^{-\mu_N y} - \frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \text{cos}[\mu_N z]}{\mu_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \text{sen}(\xi y) r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \text{cos}(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \text{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\}, \quad (3.46)$$

$$N = 2n - 1$$

$$\text{donde } r_{1N,2N} = \left[-1 \pm \sqrt{1 - 4\nu\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)} \right] / 2\lambda \text{ y } \gamma_n = \sqrt{4\nu\lambda(\xi^2 + \mu_N^2) - 1} / 2\lambda$$

La ecuación (3.46) es la distribución de velocidad del problema planteado.

Además de la distribución de velocidad resulta de interés calcular el esfuerzo de corte en la base, es decir $\tau_w(z, t) = \tau_{xy}(0, z, t)$, que puede ser calculado a partir de (2.24)

$$\frac{d\tau_{xy}}{dt} + \frac{1}{\lambda}\tau_{xy} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.47)$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\tau_{xy} = e^{-t/\lambda} \int_0^t \frac{\mu}{\lambda} e^{\tau/\lambda} \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{y=0} d\tau + \tau_{xy} \Big|_{t=0} \quad (3.48)$$

Considerando (2.14)

$$\tau_{xy} = e^{-t/\lambda} \int_0^t \frac{\mu}{\lambda} e^{\tau/\lambda} \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{y=0} d\tau \quad (3.49)$$

Para poder resolver la integral de la ecuación (3.49) es necesario calcular la derivada de la velocidad respecto a y

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{2V}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(\mu_N z)}{\mu_N} e^{-\mu_N y} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(\mu_N z)}{\mu_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\} \right\} \quad (3.50)$$

La primera suma de la ecuación anterior se puede simplificar a

$$\frac{2V}{h} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(\mu_N z)}{\mu_N} e^{-\mu_N y} = -\frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} \quad (3.51)$$

mientras que la segunda suma de la ec (3.50) se puede expresar como

$$-\frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\} \quad (3.52)$$

Para evaluar la derivada en (3.52) se utiliza la ecuación (A.2) conocida como la regla de Leibnitz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\} \\ = \int_0^a \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi + \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \end{aligned} \quad (3.53)$$

Con (3.51), (3.52) y (3.53) la ecuación (3.50) se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} \\ - \frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi + \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Como siguiente paso es necesario realizar la integral $\int_0^t \frac{\mu}{\lambda} e^{\tau/\lambda} \left. \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|_{y=0} d\tau$, pero como la integral de una suma es la suma de las integrales se integrará por separado los sumandos de la ec. anterior esto simplifica el análisis. El primer sumando es la integral de la ec. (3.51)

$$-\frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\mu}{\lambda} e^{\tau/\lambda} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} d\tau = -\frac{2V\mu}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} (e^{t/\lambda} - 1) \quad (3.55)$$

el segundo se expresa como

$$-\frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \int_0^a \int_0^t \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_N^2)} \frac{r_{2N} e^{r_{1N}\tau} - r_{1N} e^{r_{2N}\tau}}{r_{2N} - r_{1N}} \frac{\mu}{\lambda} e^{\tau/\lambda} d\tau d\xi \quad (3.56)$$

Al integrar respecto a τ

$$-\frac{4V\mu}{\pi h \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \int_0^a \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_N^2)} \frac{r_{2N} \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda}\right) e^{(r_{1N} + \frac{1}{\lambda})\tau} - r_{1N} \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda}\right) e^{(r_{2N} + \frac{1}{\lambda})\tau}}{(r_{2N} - r_{1N}) \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda}\right) \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda}\right)} \Bigg|_0^t d\xi \quad (3.57)$$

Análisis de:

$$\left. \frac{r_{2N} \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{(r_{1N} + \frac{1}{\lambda})\tau} - r_{1N} \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{(r_{2N} + \frac{1}{\lambda})\tau}}{(r_{2N} - r_{1N}) \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda} \right) \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda} \right)} \right|_0 \quad (3.58)$$

Cuando $\tau = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{r_{2N} \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda} \right) - r_{1N} \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda} \right)}{(r_{2N} - r_{1N}) \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda} \right) \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda} \right)} \\ &= \frac{\left[2 + 2\sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)} - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2) \right]}{4\lambda^2} + \frac{\left[2 - 2\sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)} - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2) \right]}{4\lambda^2} - \frac{4\sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)}}{4\lambda^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Cuando $\tau = t$

$$\frac{r_{2N} \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{(r_{1N} + \frac{1}{\lambda})t} - r_{1N} \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{(r_{2N} + \frac{1}{\lambda})t}}{(r_{2N} - r_{1N}) \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda} \right) \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda} \right)} = e^{t/\lambda} \frac{\frac{[-4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)]}{4\lambda^2} e^{r_{1N}t} - \frac{[-4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)]}{4\lambda^2} e^{r_{2N}t}}{(r_{2N} - r_{1N}) \frac{[4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)]}{4\lambda^2}} \quad (3.60)$$

simplificando

$$\frac{r_{2N} \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{(r_{1N} + \frac{1}{\lambda})t} - r_{1N} \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{(r_{2N} + \frac{1}{\lambda})t}}{(r_{2N} - r_{1N}) \left(r_{1N} + \frac{1}{\lambda} \right) \left(r_{2N} + \frac{1}{\lambda} \right)} = -e^{t/\lambda} \frac{e^{r_{1N}t} - e^{r_{2N}t}}{(r_{2N} - r_{1N})} \quad (3.61)$$

La integral de tercer sumando es

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \int_a^{\infty} \int_0^t \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \left[\frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\mu}{\lambda} e^{\tau/\lambda} d\tau d\xi \\
 & = -\frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \int_a^{\infty} e^{\frac{\tau}{2\lambda}} \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{\text{sen}(\gamma_n \tau)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n \tau) \right] - \gamma_n \left[\frac{\cos(\gamma_n \tau)}{2\lambda \gamma_n} - \text{sen}(\gamma_n \tau) \right] \Bigg|_0^t \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Análisis de:

$$e^{\tau/2\lambda} \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{\text{sen}(\gamma_n \tau)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n \tau) \right] - \gamma_n \left[\frac{\cos(\gamma_n \tau)}{2\lambda \gamma_n} - \text{sen}(\gamma_n \tau) \right] \Bigg|_0^t = e^{\tau/2\lambda} \frac{\frac{\text{sen}(\gamma_n \tau)}{2\lambda} + 2\lambda \gamma_n^2 \text{sen}(\gamma_n \tau)}{2\lambda \gamma_n \left(\frac{1}{4\lambda^2} + \gamma_n^2 \right)} \Bigg|_0^t \tag{3.63}$$

Cuando $\tau = t$

$$e^{\frac{t}{2\lambda}} \frac{\frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda} + 2\lambda \gamma_n^2 \text{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n \left(\frac{1}{4\lambda^2} + \gamma_n^2 \right)} = e^{\frac{t}{2\lambda}} \frac{\frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda} + \frac{4\lambda \gamma_n (\xi^2 + \mu_n^2)}{2\lambda} \text{sen}(\gamma_n t) - \frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda}}{2\lambda \gamma_n \left(\frac{1}{4\lambda^2} + \gamma_n^2 \right)} = e^{\frac{t}{2\lambda}} \frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{\gamma_n} \tag{3.64}$$

Cuando $\tau = 0$

$$e^{\frac{t}{2\lambda}} \frac{\frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda} + 2\lambda\gamma_n^2 \text{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda\gamma_n \left(\frac{1}{4\lambda^2} + \gamma_n^2\right)} = 0 \quad (3.65)$$

Combinando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y, z, t) = & -\frac{2V\mu}{h} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} \\ & - \frac{4V\mu}{\pi h \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_N^2)} \frac{e^{r_{2N} t} - e^{r_{1N} t}}{(r_{2N} - r_{1N})} d\xi + \int_a^{\infty} \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_N^2)} e^{\frac{-t}{2\lambda}} \frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{\gamma_n} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

que es el esfuerzo de corte τ_{xy} .

El flujo volumétrico a través del plano normal al flujo está dado por

$$Q = Q(t) = \int_0^{\infty} \int_{-h}^h V(y, z, t) dz dy \quad (3.67)$$

sustituyendo (3.46)

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-h}^h \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} e^{-\mu_N y} dz dy \\
&\quad - \frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-h}^h \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y) r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\} dz dy
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \frac{4V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu_N y}}{\mu_N^2} dy \\
&\quad - \frac{8V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^a \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu_N^2} \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y) r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{\xi^2 + \mu_n^2} dy d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu_N^2} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} dy d\xi \right\}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Después de simplificar se obtiene

$$Q(t) = \frac{4V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^3} - \frac{8V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^a \frac{1}{\mu_N^2} \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y) r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{\xi^2 + \mu_n^2} dy d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_0^{\infty} \int_a^{\infty} \frac{1}{\mu_N^2} \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] d\xi dy \right\} \tag{3.70}$$

Primer caso límite $h \rightarrow \infty$

PRIMER PROBLEMA DE STOKES

El primer problema de Stokes [ref. 5,6 y 8] describe a un fluido sobre un plano infinito inicialmente en reposo, el cual repentinamente se pone en movimiento a velocidad constante V , ver ilustración 5.

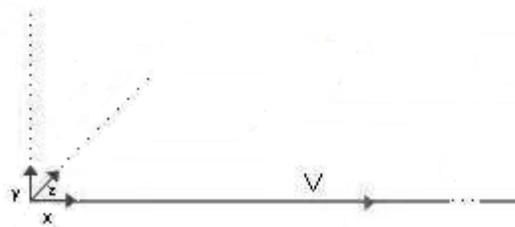


Ilustración 5 Primer problema de Stokes

Nótese que en este sistema las coordenadas x y z ($-\infty < x, z < \infty$) son infinitas, mientras que la y no lo es ($0 \leq y < \infty$). Así que, en comparación con la geometría del problema de este trabajo (ilustración 4), la única diferencia está en el eje z , donde se tienen paredes de altura infinita cada una ubicada de manera equidistante a una distancia h del origen. De manera que la distribución de velocidades V_x del primer problema de Stokes para el fluido de Maxwell convectivo puede ser obtenido a partir de la ecuación (3.46), al calcular el límite cuando $h \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
V_x(y, t) = & \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\frac{(2n-1)\pi}{2h}} e^{-\mu_N y} \\
& - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\frac{(2n-1)\pi}{2h}} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
V_x(y, t) = & \lim_{h \rightarrow \infty} 4V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{(2n-1)\pi} e^{-\mu_N y} \\
& - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{8V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{(2n-1)\pi} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Considerando la ecuación (A.5) se obtiene

$$V_x(y, t) = V - \frac{2V}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{v\lambda}}} \frac{\operatorname{sen}(\xi y)}{\xi} \frac{r_4 e^{r_3 t} - r_3 e^{r_4 t}}{r_4 - r_3} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_{\frac{1}{2\sqrt{v\lambda}}}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{2\lambda \omega} + \cos(\omega t) \right] \frac{\operatorname{sen}(\xi y)}{\xi} d\xi \right\} \tag{4.3}$$

donde $r_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4v\lambda\xi^2}}{2\lambda}$ y $\omega = \frac{\sqrt{4v\lambda\xi^2 - 1}}{2\lambda}$, esta expresión también se obtiene en [1], [5] y [6]

Para este caso obtiene también el esfuerzo de corte.

A partir de la ecuación (3.66)

$$\begin{aligned} \tau(y, t) = & - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{2V\mu}{h} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} \\ & - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{4V\mu}{\pi h \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_N^2)} \frac{e^{r_{2N} t} - e^{r_{1N} t}}{(r_{2N} - r_{1N})} d\xi + \int_a^{\infty} \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_N^2)} e^{\frac{-t}{2\lambda}} \frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{\gamma_n} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\tau(y, t) = - \frac{2V\mu}{\pi \lambda} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{v\lambda}}} \cos(\xi y) \frac{e^{r_4 t} - e^{r_3 t}}{(r_4 - r_3)} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_{\frac{1}{2\sqrt{v\lambda}}}^{\infty} \cos(\xi y) \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\xi \right\} \quad (4.5)$$

Segundo caso límite $\lambda \rightarrow 0$

FLUIDO NEWTONIANO

Tal como se mencionó en los antecedentes (ec. 1.3) a partir del modelo de Maxwell es posible obtener el modelo del fluido newtoniano, al extrapolar esa idea se intuye que del perfil de velocidades para el modelo de Maxwell será posible llegar al perfil para el fluido de Newton. Cuando $\lambda \rightarrow 0$ el modelo de Maxwell se simplifica al modelo newtoniano. Lo que de modo simple significa que el modelo a describir responde de manera inmediata a cualquier perturbación que se le aplique.

$$V_x(y, z, t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} e^{-\mu_N y} - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\} \quad (5.1)$$

Análisis de:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} \quad (5.2)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{-1 - \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)}}{2\lambda} e^{r_{1n} t} - \frac{-1 + \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)}}{2\lambda} e^{r_{2n} t}}{\frac{-1 - \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)}}{2\lambda} - \frac{-1 + \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)}}{2\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\left[-1 - \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)} \right] e^{r_{1n} t} + \left[1 - \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)} \right] e^{r_{2n} t}}{-2\sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)}} \quad (5.3)$$

Simplificando

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{r_{2n}e^{r_{1n}t} - r_{1n}e^{r_{2n}t}}{r_{2n} - r_{1n}} = \frac{-2e^{-v(\xi^2 + \mu_N^2)t} + 0e^{r_{2n}t}}{-2} = e^{-v(\xi^2 + \mu_N^2)t} \quad (5.4)$$

resultado que se obtiene al hacer uso de la regla de L'Hôpital para calcular el límite:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} r_{1N} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{-1 - \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2)}}{2\lambda} \right] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu_N^2))^{-\frac{1}{2}}[-4v(\xi^2 + \mu_N^2)]}{2} = -v(\xi^2 + \mu_N^2) \quad (5.5)$$

Análisis del límite de integración a (ec. 3.38)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{4v\lambda} - \mu_n^2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{4v\lambda} - \left[\frac{(2n-1)\pi}{2h} \right]^2} = \infty \quad (5.6)$$

Con lo anterior la ecuación (5.1) adquiere la siguiente forma

$$V_x(y, z, t) = \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} e^{-\mu_N y} - \frac{4V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \int_0^{\infty} \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} e^{-v(\xi^2 + \mu_N^2)t} d\xi \quad (5.7)$$

La integral en (5.7) se puede resolver de manera analítica (ver A.7)

$$V_x(y, z, t) = \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} e^{-\mu_N y} - \frac{V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left[e^{-\mu_N y} \operatorname{cfer} \left(\mu_N \sqrt{vt} - \frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) - e^{\mu_N y} \operatorname{cfer} \left(\mu_N \sqrt{vt} + \frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) \right] \quad (5.8)$$

Mediante un análisis similar se puede demostrar que τ (ec. 3.66) adquiere la siguiente forma cuando $\lambda \rightarrow 0$

$$\tau(y, z, t) = -\frac{2V\mu}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} - \frac{4V\mu}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_N^2)} e^{-v(\xi^2 + \mu_N^2)t} d\xi \quad (5.9)$$

$$\tau(y, z, t) = -\frac{2V\mu}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} - \frac{4V\mu}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left[\int_0^{\infty} \cos(\xi y) e^{-vt(\xi^2 + \mu_N^2)} d\xi - \int_0^{\infty} \frac{\mu_N^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_N^2)} e^{-vt(\xi^2 + \mu_N^2)} d\xi \right] \quad (5.10)$$

Para la solución de las dos integrales se utilizaron las ecuaciones A.8 y A.9 del apéndice A

$$\tau(y, z, t) = -\frac{2V\mu}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} - \frac{4V\mu}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(\mu_N z)}{\mu_N} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{vt}} e^{-\left(\frac{y^2}{4vt} + vt\mu_N^2\right)} - \frac{\pi\mu_N}{4} \left[e^{-\mu_N y} \operatorname{cfer} \left(\mu_N \sqrt{vt} - \frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) + e^{\mu_N y} \operatorname{cfer} \left(\mu_N \sqrt{vt} + \frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) \right] \right] \quad (5.11)$$

Al simplificar (5.11)

$$\tau = -\frac{2V\mu}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} - \frac{2V\mu}{h\sqrt{\pi vt}} e^{-\frac{y^2}{4vt}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(\mu_N z)}{\mu_N} e^{-vt\mu_N^2} + \frac{V\mu}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) \left[e^{-\mu_N y} cfer\left(\mu_N \sqrt{vt} - \frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) + e^{\mu_N y} cfer\left(\mu_N \sqrt{vt} + \frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) \right] \quad (5.12)$$

Para el flujo volumétrico, a partir de (3.70), se tiene que

$$Q(t) = \frac{4V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^3} - \frac{8V}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} e^{-v(\xi^2 + \mu_n^2)t} d\xi dy \quad (5.13)$$

La integral respecto a ξ se puede evaluar a partir de (A.6)

$$Q(t) = \frac{4V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^3} - \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^2} \int_0^{\infty} \left[e^{-\mu_N y} cfer\left(\mu_N \sqrt{vt} - \frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) - e^{\mu_N y} cfer\left(\mu_N \sqrt{vt} + \frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) \right] dy \quad (5.14)$$

Análisis de

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu_N y} cfer\left(\mu_N \sqrt{vt} - \frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) dy \quad (5.15)$$

Se propone cambiar de variable

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu_N y} cfer\left(\mu_N \sqrt{vt} - \frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) dy = \int_{-\mu_N \sqrt{vt}}^{\infty} e^{-2(\mu_N^2 vt + u \mu_N \sqrt{vt})} cfer(-u) 2\sqrt{vt} du = e^{-2\mu_N^2 vt} \int_{-\mu_N \sqrt{vt}}^{\infty} e^{-2u \mu_N \sqrt{vt}} cfer(-u) 2\sqrt{vt} du \quad (5.16)$$

donde u se define como

$$-u = \mu_N \sqrt{vt} - \frac{y}{2\sqrt{vt}} \quad (5.17)$$

con la ecuación (A.9) la ec. (5.16) se puede expresar en dos integrales con soluciones conocidas

$$e^{-2\mu_N^2 vt} \int_{-\mu_N \sqrt{vt}}^{\infty} e^{-2u\mu_N \sqrt{vt}} cfer(-u) 2\sqrt{vt} du = 2e^{-2\mu_N^2 vt} \int_{-\mu_N \sqrt{vt}}^{\infty} e^{-2u\mu_N \sqrt{vt}} 2\sqrt{vt} du - 2e^{-2\mu_N^2 vt} \int_{-\mu_N \sqrt{vt}}^{\infty} e^{-2u\mu_N \sqrt{vt}} cfer(u) \sqrt{vt} du \quad (5.18)$$

Considerando (A.10) la integral puede ser evaluada dando como resultado

$$\frac{2\sqrt{vt}}{\mu_N \sqrt{vt}} - \frac{2\sqrt{vt} e^{-2\mu_N^2 vt}}{2\mu_N \sqrt{vt}} [e^{2\mu_N^2 vt} cfer(-\mu_N \sqrt{vt}) - e^{\mu_N^2 vt} cfer(-\mu_N \sqrt{vt} + \mu_N \sqrt{vt})] = \frac{2}{\mu_N} - \frac{cfer(-\mu_N \sqrt{vt})}{\mu_N} = \frac{2}{\mu_N} - \frac{2}{\mu_N} + \frac{cfer(\mu_N \sqrt{vt})}{\mu_N} \quad (5.19)$$

Análisis de

$$\int_0^{\infty} e^{\mu_N y} cfer\left(\mu_N \sqrt{vt} + \frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) dy = \int_{\mu_N \sqrt{vt}}^{\infty} e^{2(-\mu_N^2 vt + u\mu_N \sqrt{vt})} cfer(u) 2\sqrt{vt} du = e^{-2\mu_N^2 vt} \int_{\mu_N \sqrt{vt}}^{\infty} e^{2u\mu_N \sqrt{vt}} cfer(u) 2\sqrt{vt} du \quad (5.20)$$

donde u se define como

$$u = \mu_N \sqrt{vt} + \frac{y}{2\sqrt{vt}} \quad (5.21)$$

Considerando (A.11) la integral de (5.20) es

$$e^{-2\mu_N^2 vt} \int_{\mu_N \sqrt{vt}}^{\infty} e^{2u\mu_N \sqrt{vt}} cfer(u) 2\sqrt{vt} du = \frac{e^{-2\mu_N^2 vt}}{\mu_N} [-e^{2\mu_N^2 vt} cfer(\mu_N \sqrt{vt}) + e^{\mu_N^2 vt} cfer(\mu_N \sqrt{vt} - \mu_N \sqrt{vt})] = -\frac{cfer(\mu_N \sqrt{vt})}{\mu_N} \quad (5.22)$$

Con las ecuaciones anteriores el flujo volumétrico es

$$Q(t) = \frac{4V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^3} - \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^2} \left[\frac{cfer(\mu_N \sqrt{vt})}{\mu_N} + \frac{cfer(\mu_N \sqrt{vt})}{\mu_N} \right] = \frac{4V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^3} - \frac{4V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cfer(\mu_N \sqrt{vt})}{\mu_N^3} \quad (5.23)$$

Simplificando

$$Q(t) = \frac{4V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^3} [1 - cfer(\mu_N \sqrt{vt})] \quad (5.24)$$

Las expresiones (5.8), (5.12) y (5.24) fueron obtenidas en [7] como caso límite de un fluido de segundo grado. Cuando $h \rightarrow \infty$, $V_x(y, z, t)$ y $\tau(y, z, t)$ tienden a las soluciones clásicas correspondientes al primer problema de Stokes para un fluido newtoniano (ecs. de Navier-Stokes) [8] .

$$V_x(y, t) = cfer\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) \quad (5.25)$$

$$\tau(t) = -\frac{V\mu}{\sqrt{\pi vt}} \quad (5.26)$$

Tercer caso límite $t \rightarrow \infty$

FLUJO A RÉGIMEN ESTACIONARIO

Las soluciones obtenidas para el fluido de Maxwell [ecs. (3.46), (3.66), (3.70)] y el fluido Newtoniano [ecs. (5.8), (5.12), (5.14)] tienden a las mismas expresiones cuando $t \rightarrow \infty$ las cuales son:

$$V_x = \frac{2V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} e^{-\mu_N y} \quad (6.1)$$

$$\tau_{xy}(y, z, t) = -\frac{2V\mu}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} \quad (6.2)$$

$$Q(t) = \frac{4V}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_N^3} \quad (6.3)$$

Esto se observa claramente en las gráficas de la siguiente sección.

Análisis

Soluciones adimensionales

En esta sección se hace uso de varias de las ecuaciones obtenidas en apartados anteriores. Con el objetivo de mostrar resultados más generales se ocupará una versión adimensional de dichas ecuaciones.

Perfil de velocidad adimensional a partir de la ecuación (3.46), modelo de Maxwell convectivo

$$V_x = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} e^{-\mu_N y} - \frac{4}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi + e^{-t/2\lambda} \int_a^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{2\lambda \gamma_n} + \cos(\gamma_n t) \right] \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} d\xi \right\}, \quad (7.1)$$

que resulta de multiplicar la ecuación (3.46) por $\frac{1}{V}$.

Esfuerzo de corte adimensional a partir de la ecuación (3.66), modelo de Maxwell convectivo

$$\tau(y, z, t) = -2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} - \frac{4}{\pi \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left\{ \int_0^a \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_n^2)} \frac{e^{r_{2n} t} - e^{r_{1n} t}}{(r_{2n} - r_{1n})} d\xi + \int_a^{\infty} \frac{\xi^2 \cos(\xi y)}{(\xi^2 + \mu_n^2)} e^{\frac{-t}{2\lambda}} \frac{\operatorname{sen}(\gamma_n t)}{\gamma_n} d\xi \right\} \quad (7.2)$$

que resulta de multiplicar la ecuación (3.66) por $\frac{h}{V\mu}$ que es el inverso de la fuerza viscosa.

Y para el caso de fluido newtoniano

$$V_x(y, z, t) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} e^{-\mu_N y} - \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \left[e^{-\mu_N y} \operatorname{cfer} \left(\mu_N \sqrt{vt} - \frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) - e^{\mu_N y} \operatorname{cfer} \left(\mu_N \sqrt{vt} + \frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) \right] \quad (7.3)$$

$$\tau = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) e^{-\mu_N y} - \frac{2}{\sqrt{\pi vt}} e^{-\frac{y^2}{4vt}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(\mu_N z)}{\mu_N} e^{-vt \mu_N^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_N z) \left[e^{-\mu_N y} \operatorname{cfer} \left(\mu_N \sqrt{vt} - \frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) + e^{\mu_N y} \operatorname{cfer} \left(\mu_N \sqrt{vt} + \frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) \right] \quad (7.4)$$

Perfiles de velocidad

Las evaluaciones de los modelos y ecuaciones a analizar se hicieron en su totalidad con el programa *Wolfram Mathematica V 7.0 MR*, en el Anexo B se muestran las programaciones de los distintos modelos.

Modelo de Hayat et al. [1]

En esta sección se muestran las diferencias entre el modelo obtenido por Hayat et al. [1] y el desarrollado en este trabajo.

El perfil de velocidad propuesto por Hayat et al. [1] es

$$V_x = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} e^{-\mu_N y} - \frac{4}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos[\mu_N z]}{\mu_N} \int_0^{\infty} \frac{\xi \operatorname{sen}(\xi y)}{\xi^2 + \mu_n^2} \frac{r_{2n} e^{r_{1n} t} - r_{1n} e^{r_{2n} t}}{r_{2n} - r_{1n}} d\xi, \quad (7.5)$$

$N = 2n - 1$

donde μ_N y $r_{1N,2N}$ están definidos de la misma forma que en (3.41) y (3.46) . En la ecuación (7.5) la variable de integración ξ tiene un dominio de 0 a ∞ , pero si

$$\xi > \sqrt{\frac{1}{4\nu\lambda} - \mu_n^2} \quad (7.6)$$

las raíces $r_{1N,2N}$ adquieren valores complejos y por tanto la solución propuesta pierde validez.

El perfil de velocidades propuesto en este trabajo (ec. 3.46) no muestra este problema ya que en una misma ecuación se tiene la solución para raíces complejas y reales, sin presentar incongruencias o cantidades complejas.

Una de las diferencias entre (7.5) y (3.46) es la existencia de la variable a , ver (3.38), la cual divide las regiones de integración de la solución para raíces complejas y reales. La importancia de la solución propuesta tiene una relación directa con la variable a . Al definir a como

$$a = \sqrt{\frac{1}{4\nu\lambda} - \left(\frac{(2n-1)\pi}{2h}\right)^2} \quad (7.7)$$

esta tiende a cero conforme aumenta n , es decir a n grandes la respuesta del fluido de Maxwell dependerá sólo o en su mayoría de la segunda integral de (3.46) que es la parte omitida en el modelo de Hayat et al [1].

Además se sabe que entre más grande sea λ mayor diferencia habrá entre el modelo de Maxwell y el de Newton, en la ilustración 6 se muestran los n valores necesarios a una λ dada para que a tienda a cero, y se observa que a mayor λ la respuesta del fluido de Maxwell dependerá más de la segunda integral de (3.46), por lo que entre más importantes sean los fenómenos viscoelásticos la ecuación propuesta por Hayat et al. [1] menos podrá describirlos, ec. (7.5).

$$h = 1, \nu = 0.001146$$

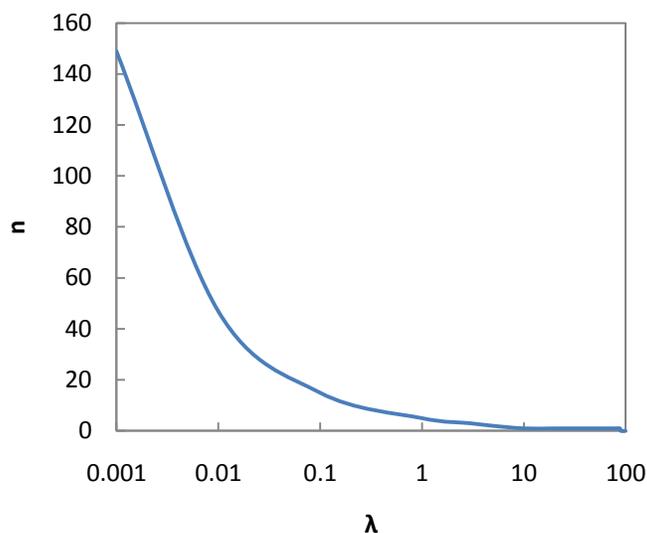


Ilustración 6 Valores n que dependen de la parte real respecto a λ

La ilustración 7 es una reproducción de la fig. 1 de [1] donde se muestra una representación del modelo de Hayat *et al* a diferentes tiempos. El perfil a tiempo 0.01 y 10 así como el modelo estacionario no son mostrados en [1], pero como se verá una de las consecuencias de omitir la solución asociada a las raíces complejas es el predecir velocidades negativas.

Además, la ec. (7.5) a las condiciones sugeridas en [1] es igual al modelo de Newton a partir de $t \sim 10$, así que cualquier curva mostrada en [1] ya no muestra un comportamiento inherente del modelo de Maxwell.

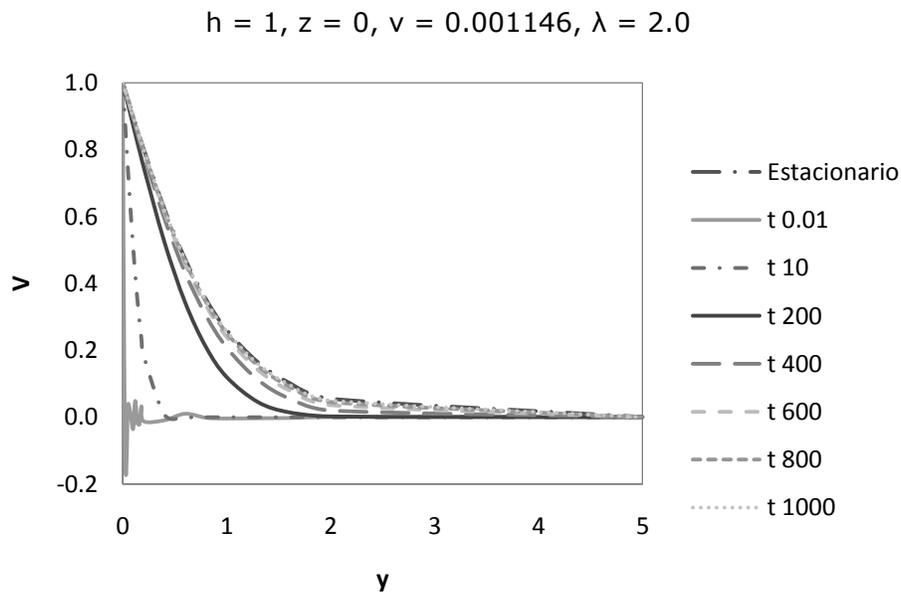


Ilustración 7 Perfil de velocidad obtenido por Hayat et al. [1]

Al iniciar este trabajo se pensaba que el modelo a obtener (7.1) sería sólo una corrección sutil de (7.5). Sin embargo, como se puede ver en la ilustración 8 el modelo de Hayat, en comparación con el de Maxwell y Newton, muestra un perfil incongruente a tiempos bajos y a tiempos altos ya no interesa pues los tres modelos tienden a la misma solución.

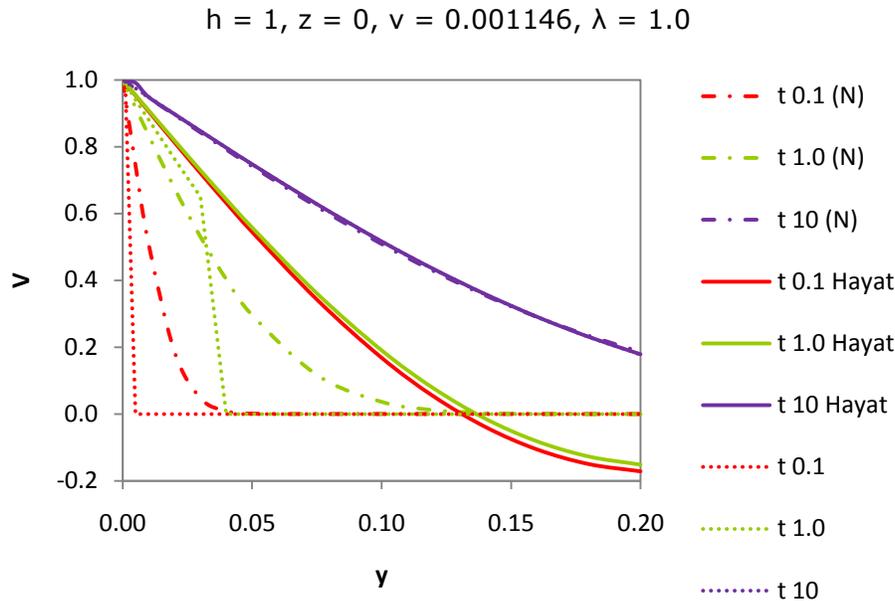


Ilustración 8 Comparación entre el modelo de Hayat et al. y el propuesto.

Una vez mostrado lo diferente que es el modelo (7.1) frente a (7.5), se continuará el análisis del modelo de Maxwell convectivo (7.1).

Modelo de Maxwell convectivo

En la ilustración 9 se muestra el comportamiento de un fluido de Maxwell descrito por la ecuación (7.1) a diferentes tiempos y a una z fija. Se nota que a tiempos bajos el fluido muestra una tendencia a permanecer en reposo. Mientras unas zonas ya están en movimiento hay otras que aún están inmóviles sin responder a la una perturbación en $y = 0$.

Al aumentar el tiempo a una misma y la velocidad aumentará hasta llegar a un valor límite dado por el estado estacionario. Los análisis a z fija se harán a $z = 0$ puesto que ahí se tiene la velocidad máxima.

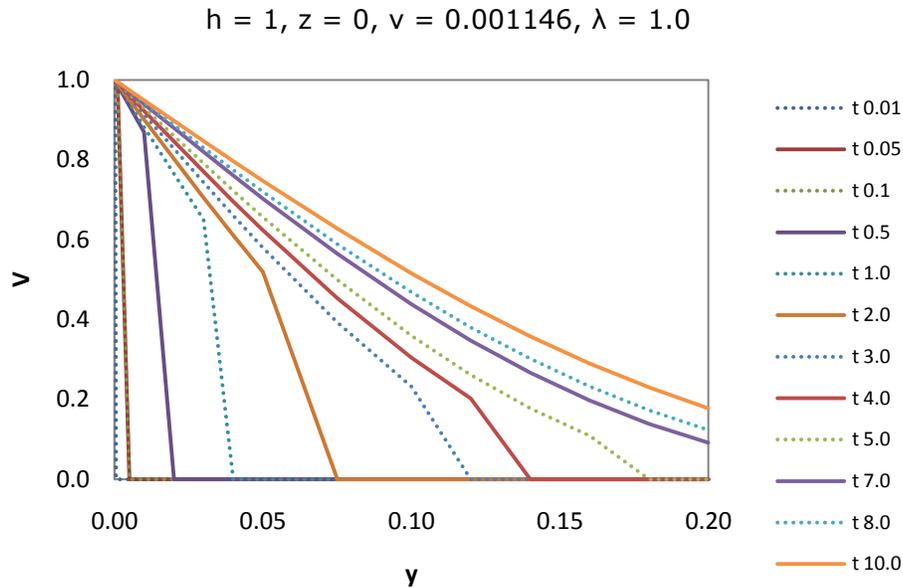


Ilustración 9 Variación del modelo de Maxwell con el tiempo

La dependencia del modelo de Maxwell respecto al tiempo de relajación λ se muestra en la ilustración 10. A mayor λ se incrementa la tendencia a permanecer en reposo, i.e. menos responde el sistema a una misma perturbación, esto se ve confirmado en la ilustración 11 que muestra la diferencia en tiempo necesaria para que $\lambda=1$ y $\lambda=100$ iguallen el comportamiento del fluido newtoniano: al incrementar el tiempo de relajación se necesita más tiempo para empatar el modelo newtoniano con el de Maxwell.

En las ilustraciones 9, 10 y 11 se observan discontinuidades en los valores de la velocidad. Esto ocurre cuando, para determinado sistema y condiciones de flujo, el tiempo de relajación del sistema es de un orden similar al tiempo característico del proceso [12]. De manera tal que el frente de velocidad describe la velocidad finita con la que se van propagando los procesos de cambio, desde la superficie donde se origina la perturbación ($y=0$) hasta el interior del medio ($y>0$), este concepto se introduce en el modelo de Maxwell convectivo vía la derivada convectiva del tensor de esfuerzos y la consideración de un tiempo de relajación.

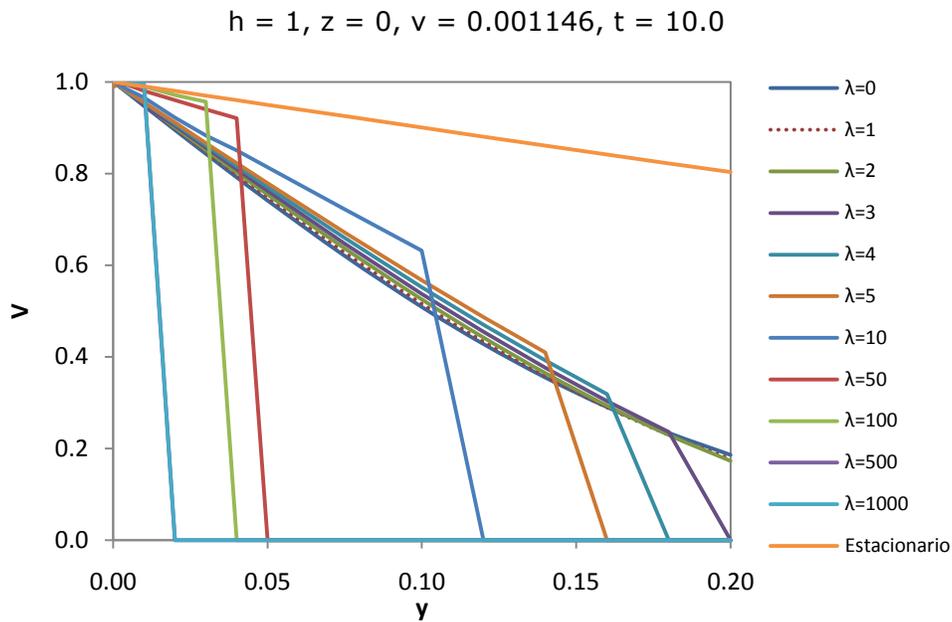


Ilustración 10 Variación del modelo de Maxwell a diferentes tiempos de relajación

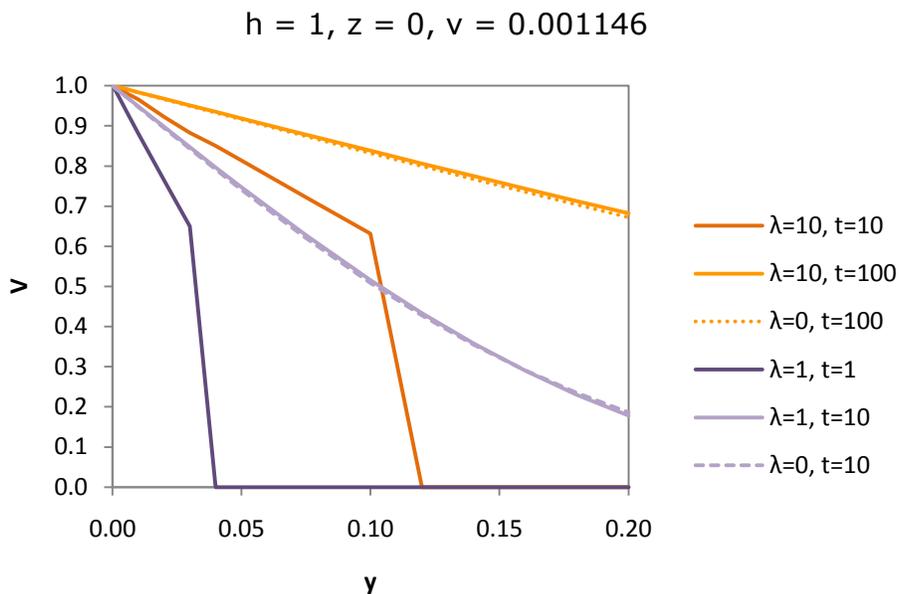


Ilustración 11 Variación del modelo de Maxwell a diferentes tiempos de relajación

En la ilustración 10 los perfiles de velocidad cambian respecto al tiempo de relajación λ . Considerando que el tiempo de relajación cambia con la naturaleza del fluido y que está relacionado con la facilidad de perturbación de la distribución de orientaciones de las partículas del fluido (ver antecedentes), para

$\lambda \rightarrow \infty$ la distribución de orientaciones se verá afectada por el flujo mientras que para $\lambda \rightarrow 0$ la distribución de orientaciones permanecerá tal como antes de iniciar el movimiento, ver ec. (1.1). Usualmente $\lambda \rightarrow \infty$ están relacionadas con fluidos de partículas grandes (polímeros) y mientras que $\lambda \rightarrow 0$ con fluidos de partículas pequeñas (agua), pero hay que considerar que las condiciones de flujo también pueden alterar la respuesta del fluido.

Lo anterior es cierto a tiempos bajos ya que cuando el tiempo tiende a infinito ambos tipos de respuesta tienden al modelo estacionario, el cual bien se podría ver como una especie de estado de equilibrio del sistema.

Como se observa en las ilustraciones anteriores el modelo desarrollado en este trabajo describe el comportamiento clásico de un fluido de Maxwell convectivo o de una ecuación hiperbólica, el cual predice un cambio abrupto en la velocidad que se propaga como un frente ocasionando una marcada discontinuidad en los valores de la velocidad, que se atenúa cuando $t \rightarrow \infty$ o $\lambda \rightarrow 0$, ver ilustraciones 10 y 11.

Modelo de Maxwell convectivo y modelo de Newton

Al graficar los perfiles de velocidad obtenidos para el modelo de Maxwell (7.1) y de Newton (7.3) se obtienen las ilustraciones 11 y 12.

Dentro de la teoría clásica de transporte se toma como cierta la hipótesis del medio continuo: las diferencias interfaciales de distintas propiedades son manejables, pero no las diferencias puntuales dentro de un mismo medio. De manera física esta aproximación es correcta si el tiempo de relajación del sistema es varios órdenes menor que el tiempo característico del proceso [12] y [13].

Si la aproximación del medio continuo se satisface, el sistema puede ser descrito por las ecuaciones clásicas de transporte (modelo de Newton / ecuación clásica de difusión) y de acuerdo a este modelo los efectos de cualquier perturbación se

propagan de manera instantánea en el medio. Tal como se observa en la ilustración 12, el perfil de velocidades del modelo newtoniano muestra aún a tiempos bajos ya un impacto en el valor de la velocidad, $V \neq 0$ a $y > 0$.

Pero si la aproximación del medio continuo no es aplicable, *i.e.* si la velocidad de propagación de los procesos a microescala es del orden de la velocidad de respuesta del sistema a perturbaciones externas entonces se debe considerar la existencia de un tiempo de relajación del medio. La representación de un sistema de este tipo se observa en lo perfiles de velocidad del modelo de Maxwell, ilustración 12.

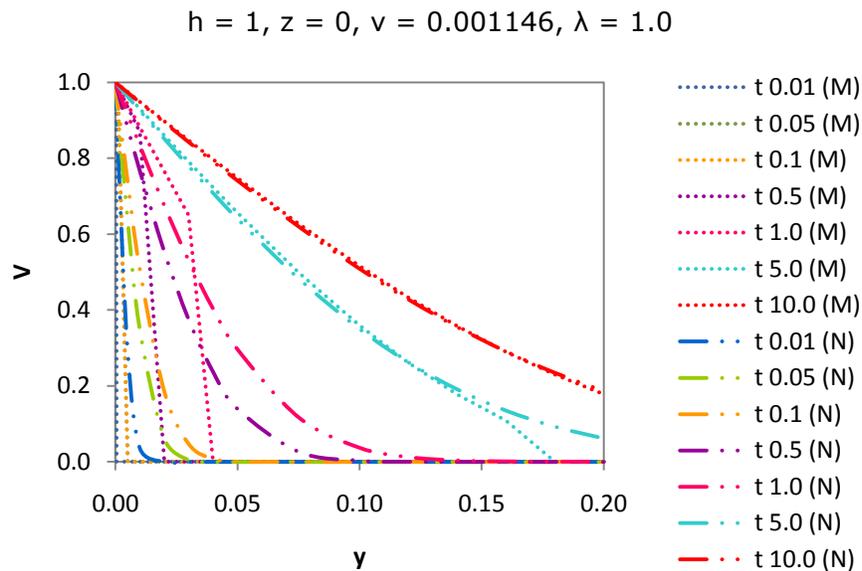


Ilustración 12 Perfiles de velocidad para los modelos de Maxwell y Newton a diferentes tiempos

En la ilustración 12 se nota que las mayores diferencias entre ambos modelos se dan a tiempos pequeños, presentando el modelo convectivo de Maxwell una cierta demora en la respuesta respecto al modelo de Newton. Pero cuando t aumenta ambos modelos ya se superponen, y como se observa en la ilustración

13, al tiempo en que ocurre eso la respuesta de ambos modelos dista mucho de ser la del régimen estacionario.

$$h = 1, z = 0, \nu = 0.001146, \lambda = 1.0$$

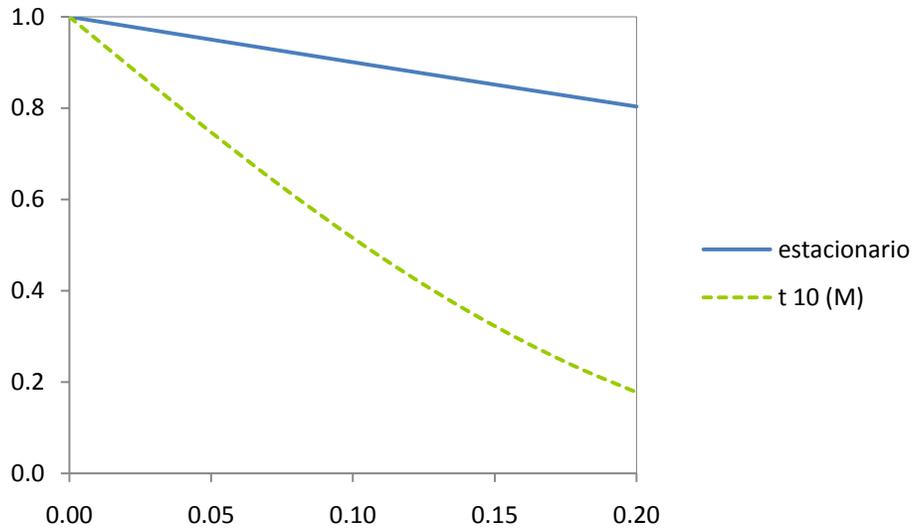


Ilustración 13 Comparación entre el modelo a régimen estacionario y el modelo de Maxwell

En el esfuerzo de corte también se observan las tendencias esperadas

$$h = 1, \gamma = 0, \nu = 0.001146, \lambda = 1.0$$

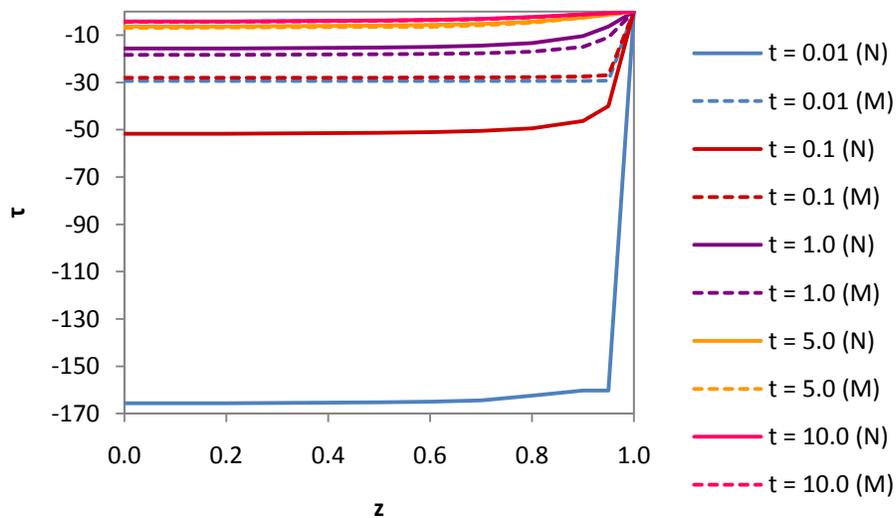


Ilustración 14 Comparación del esfuerzo de corte τ_{xy} en $\gamma=0$ del modelo de Newton vs Modelo de Maxwell

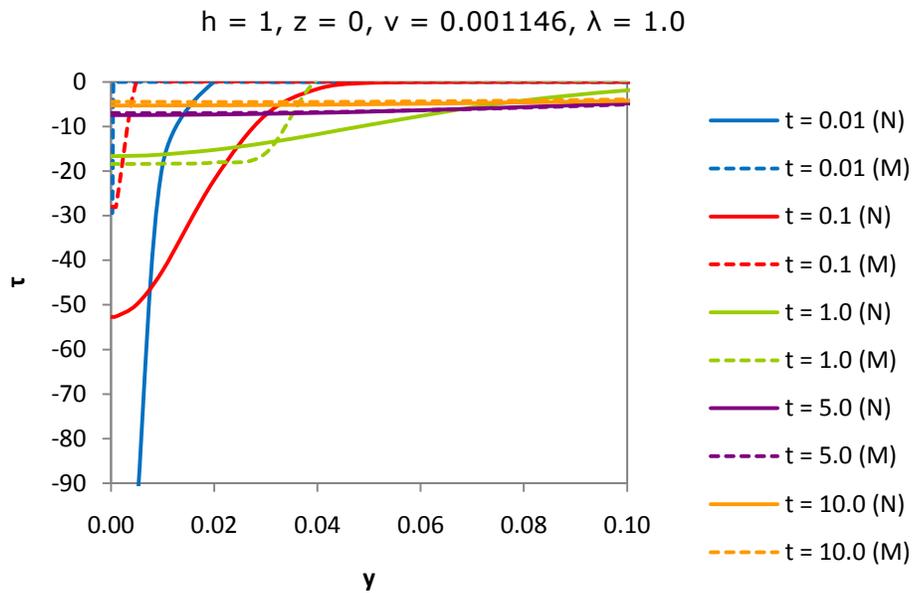


Ilustración 15 Comparación del esfuerzo de corte τ_{xy} en $z=0$ del modelo de Newton vs Modelo de Maxwell

La forma gráfica de los modelos obtenidos (7.1, 7.3) es muy similar, la única diferencia entre ellos es el tiempo de respuesta. Considerando esto se analizará la tendencia del modelo del fluido newtoniano sabiendo que la del modelo de Maxwell será similar.

Modelo de Newton

A tiempos cercanos a cero el perfil de velocidades se asemeja a un plano en $y = 0$ que se extiende desde $V_x = 0$ hasta $V_x = V$, a tiempos mayores el plano se extenderá como una lámina sobre y hasta llegar al estado estacionario. Cuando $z \rightarrow +1$ y -1 la velocidad desciende abruptamente a cero por adherencia, pero cuando $y \rightarrow \infty$ las curvas a y fija son más suavizadas. Mientras que a $y \rightarrow \infty$ $V \rightarrow 0$.

En el caso del fluido de Maxwell los perfiles a tiempos bajos tendrán en general velocidades más bajas que el de Newton para toda y , esto se observa claramente en las ilustraciones 11, 13 y 14, pero las tendencias serán las mismas para ambos tipos de fluidos.

$$V = 10, h = 1, \nu = 0.001146, \lambda = 0.01$$

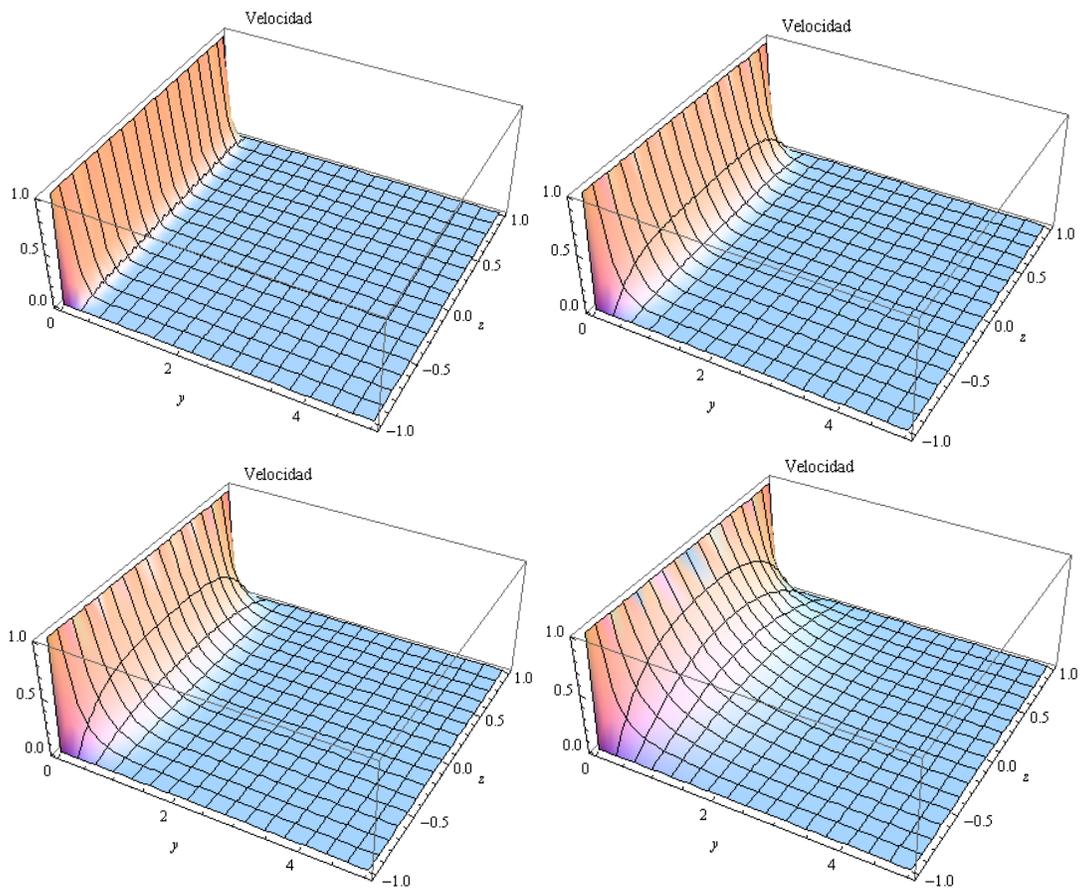


Ilustración 16 Perfil de velocidad del modelo newtoniano a $t=10$, $t=50$, $t=100$ y $t=1000$

En las gráficas de la ilustración 16, se puede observar como el modelo obtenido cumple las cuatro condiciones a la frontera (ver ilustración 6) inicialmente

planteadas. Además se observa claramente que es un problema simétrico respecto a z .

Conclusiones

El modelo desarrollado en este trabajo permite describir la dinámica de un fluido de Maxwell convectivo en un canal con frontera inferior móvil y de altura infinita.

Al ser comparado el modelo de T. Hayat *et al.* (2008 ref. [1]) con el obtenido en este trabajo, el presente modelo muestra mejor correlación con el comportamiento propio de un fluido de Maxwell.

Asimismo se logró demostrar porqué era importante obtener una solución general, y como la inclusión de la solución de raíces complejas puede describir fenómenos viscoelásticos significativos.

En cuanto a la comprobación del modelo vía casos límite con soluciones conocidas, éste fue congruente ya que los tres casos límite

- ✓ Primer problema de Stokes $h \rightarrow \infty$
- ✓ Fluido Newtoniano $\lambda \rightarrow 0$
- ✓ Estado estacionario $t \rightarrow \infty$

se pudieron obtener a partir del modelo general.

Los perfiles de velocidad y de esfuerzo de corte obtenidos con el modelo de Maxwell en comparación con los de Newton mostraron el comportamiento esperado tanto a bajos valores de t , y , z y λ como a altos, i.e. el modelo de Maxwell mostró un retraso en la respuesta respecto al modelo Newtoniano.

La diferencia entre el modelo de Newton y el de Maxwell es la inclusión del término $\lambda \delta\tau/\delta t$ en la ecuación constitutiva (ec 1.10) lo cual cambia el tipo de ecuación diferencial de parabólica a hiperbólica (ec 2.32) y modifica el perfil de velocidades obtenido, prediciendo así que la perturbación existente en $y = 0$ se propague con una velocidad finita en el medio.

Con esto en mente se puede intuir que la inclusión de más términos de este tipo es equivalente a describir un proceso de multietapas de relajación con más de un frente de velocidad en el perfil resultante.

Aun cuando en este trabajo solo se tuvo un acercamiento teórico al comportamiento de un fluido viscoelástico, se espera que este modelo, de ser probado alguna vez de manera experimental, reproduzca de manera congruente a un fluido real.

De tratar de hacerlo se debe considerar un fluido tal que tenga viscosidad y densidad aproximadamente constantes en el intervalo de medición, que se pueda describir con un solo tiempo de relajación y valor aproximado de $\lambda \sim 0.1$ s, como algunas soluciones de tensoactivos, ver ref. [14]. La geometría puede ser un canal cerrado o abierto tal que la altura del canal sea mayor que el valor de y en estado estacionario al cual $\frac{V_x}{V} \sim 0.04$, ver ref. [8] pág. 266.

Referencias

1. Hayat T., Fetecau C., Abbas Z. y Ali N., *Flow of a Maxwell fluid between two side walls due to a suddenly moved plate*, Nonlinear analysis: Real world applications, Vol. 9 (2008) 2288 – 2295.
2. Gary Leal L., *Advanced transport phenomena: Fluid mechanics and convective transport phenomena*, tercera edición. Ed. Marcel Dekker Inc., EUA, 2007.
3. Bird Byron R., Armstrong Robert C., Hassager Ole., *Dynamics of polymeric liquids, vol. 1 Fluid Mechanics*, segunda edición, Ed. John Wiley & sons, EUA, 1987.
4. Macosko Christopher W., *Rheology: principles, measurements and applications*, Ed. Wiley -VCH, EUA, 1994.
5. Fetecau C., Fetecau C., *The first problem of Stokes for an Oldroyd-B fluid*, *Int. J. Non-linear*, Vol. 38 (2003) 1539–1544.
6. Fetecau C., Fetecau C., *A new exact solution for the flow of a Maxwell fluid past an infinite plate*, *Int. J. Non-linear*, Vol. 38 (2003) 423-427.
7. Fetecau C., Hayat T. , Fetecau Corina, *Unsteady flow of a second grade fluid between two side walls perpendicular to a plate*, Nonlinear analysis: Real world applications, Vol. 9 (2008) 1236 – 1252

8. Currie G. I., *Fundamental mechanics of fluids*, tercera edición, Ed. Marcel Dekker, EUA, 2003.
9. Sneddon I.N., *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1951.
10. Astarita, *Principles of Non Newtonian fluid mechanics*, McGraw-Hill Book Company, UK, 1974.
11. Bracewell, R.N., *The Fourier transform*, *Sci. Am.*, Vol. 260 (1989) 62-69.
12. Sobolev, S. L., *Local non-equilibrium transport models*, *Physics – Uspekhi* Vol. 40 (10), (1997) 1043-1053.
13. Zhong-Shan Deng, Jing Liu, *Non-fourier heat conduction effect on prediction of temperature transients and thermal stress in skin cryopreservation*, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 26 (2003) 779–798.
14. Penfield, K., *A look behind the salt curve: the link between Rheology, Structure and Salt content in shampoo formulations*, *IFSCC Magazine*, Vol. 8 (2005) 115-120.

Apéndice A

Ecuaciones auxiliares

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi}{(\xi^2 + \lambda_n^2)} \text{sen}(\xi y) d\xi = \frac{\pi}{2} e^{-\lambda_n y} \quad (\text{A.1})$$

Regla de Leibnitz

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(\xi, t, y) d\xi + f(\beta, t, y) \frac{d\beta}{dy} - f(\alpha, t, y) \frac{d\alpha}{dy} \quad (\text{A.2})$$

$$\int e^{a\tau} \text{sen}(b\tau) d\tau = \frac{e^{a\tau} (a \text{sen}(b\tau) - b \cos(b\tau))}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\int e^{a\tau} \cos(b\tau) d\tau = \frac{e^{a\tau} (a \cos(b\tau) + b \text{sen}(b\tau))}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{A.5})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi \text{sen}(y\xi)}{\xi^2 + b^2} e^{-a(\xi^2 + b^2)} d\xi = \frac{\pi}{4} \left[e^{-by} \text{cfer} \left(b\sqrt{a} - \frac{y}{2\sqrt{a}} \right) - e^{by} \text{cfer} \left(b\sqrt{a} + \frac{y}{2\sqrt{a}} \right) \right], \quad \text{Re}(a) > 0 \cap \text{Re}(b) \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\int_0^{\infty} \cos(y\xi) e^{-a(\xi^2 + b^2)} d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\left(\frac{y^2}{4a} + ab^2\right)}, \quad \text{Re}(a) > 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{b^2 \cos(y\xi)}{\xi^2 + b^2} e^{-a(\xi^2 + b^2)} d\xi = \frac{\pi b}{4} \left[\begin{array}{l} e^{-by} \text{cfer} \left(b\sqrt{a} - \frac{y}{2\sqrt{a}} \right) \\ + e^{by} \text{cfer} \left(b\sqrt{a} + \frac{y}{2\sqrt{a}} \right) \end{array} \right], \quad \text{Re}(a) > 0 \text{Re}(b) \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\int_c^{\infty} \text{cfer}(bx) e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \left[e^{-ac} \text{cfer}(bc) - e^{\frac{a^2}{4b^2}} \text{cfer} \left(bc + \frac{a}{2b} \right) \right] \quad (\text{A.9})$$

$$\int_c^{\infty} \text{cfer}(bx) e^{ax} dx = \frac{1}{a} \left[-e^{ac} \text{cfer}(bc) + e^{\frac{a^2}{4b^2}} \text{cfer} \left(bc - \frac{a}{2b} \right) \right] \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Programaciones en *Wolfram Mathematica V 7.0 MR*

■ Modelo de Maxwell / Velocidad (7.1) / variables: y, t.

```

m = 0;
h = 1;
v = 0.0011457;
λ = 1.0;
Do[
Print["tiempo = ", t];
Do[
MV[0] = 0; MC[0] = 0;
Do[
μ =  $\frac{(2 m - 1) \text{Pi}}{2 h}$ ;
If[ $\mu^2 < \frac{1}{4 v \lambda}$ , a =  $\sqrt{\frac{1}{4 v \lambda} - \mu^2}$ ;
MV[m] = N[ $\frac{-4}{\text{Pi} h} \frac{((-1)^{(m+1)}) * \text{Cos}[\mu * \pi]}{\mu} \text{NIntegrate}\left[\frac{\xi \text{Sin}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2} \left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} e^{\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda}\right) t} - \frac{-1 + \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} e^{\left(\frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda}\right) t} \right) / \left( \left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) - \left( \frac{-1 + \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) \right)$ , {ξ, 0, a}]] +
N[ $\frac{-4}{\text{Pi} h} \frac{((-1)^{(m+1)}) \text{Cos}[\mu \pi]}{\mu} e^{\frac{-t}{2 \lambda}} \text{NIntegrate}\left[\frac{\xi \text{Sin}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2} \left( \frac{\text{Sin}\left[\frac{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}}{2 \lambda} t\right]}{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}} + \text{Cos}\left[\frac{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}}{2 \lambda} t\right] \right)$ , {ξ, a, 10 000 000 000}, Method -> {GlobalAdaptive, MaxErrorIncreases -> 10 000}, MaxRecursion -> 100]],
MV[m] = N[ $\frac{-4}{\text{Pi} h} \frac{((-1)^{(m+1)}) \text{Cos}[\mu \pi]}{\mu} e^{\frac{-t}{2 \lambda}} \text{NIntegrate}\left[\frac{\xi \text{Sin}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2} \left( \frac{\text{Sin}\left[\frac{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}}{2 \lambda} t\right]}{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}} + \text{Cos}\left[\frac{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}}{2 \lambda} t\right] \right)$ , {ξ, 0, 10 000 000 000}, Method -> {GlobalAdaptive, MaxErrorIncreases -> 10 000}, MaxRecursion -> 100]]];
MC[m] = MC[m - 1] + MV[m];
If[Abs[MC[m] - MC[m - 1]] < 0.000001, Print["MC", m, "=", MC[m]]; k = m; Break[], Print["MC", m, "=", MC[m]]; k = m; {m, 10 000}]
Print[k]; TMC[y] = MC[k]; Estacionario =  $\frac{2}{h} \sum_{n=1}^{20000} \frac{(-1)^{n+1} \text{Cos}\left[\left(\frac{(2 n - 1) \text{Pi}}{2 h}\right) \pi\right]}{\left(\frac{(2 n - 1) \text{Pi}}{2 h}\right)} e^{-\left(\frac{(2 n - 1) \text{Pi}}{2 h}\right) y}$ ;
Print["Estacionario", "=", Estacionario]; Maxwell[y] = Estacionario - TMC[y]; Print["Maxwell_", y, "=", Maxwell[y]];
{y, {0.0001, 0.0003, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.075, 0.1, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2, 0.5, 1.0, 5.0}}, {t, {0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 7.0, 8.0, 10.0}}]

```

Modelo de Maxwell / Velocidad (7.1) / variables: λ , y .

```

m = 0;
h = 1;
v = 0.0011457;
t = 10.0;
Do[
Print["lambda = ",  $\lambda$ ];
Do[
MV[0] = 0; MC[0] = 0;
Do[

$$\mu = \frac{(2m - 1) \pi}{2h};$$

If[ $\mu^2 < \frac{1}{4v\lambda}$ ,

$$a = \sqrt{\frac{1}{4v\lambda} - \mu^2};$$


$$MV[m] = N\left[\frac{-4}{\pi h} \frac{((-1)^{(m+1)}) \cdot \text{Cos}[\mu \cdot \pi]}{\mu} \text{NIntegrate}\left[\frac{\xi \text{Sin}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2} \left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)}}{2\lambda} e^{\left(\frac{-1 - \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)}}{2\lambda}\right) t} - \frac{-1 + \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)}}{2\lambda} e^{\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)}}{2\lambda}\right) t} \right) / \left( \left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)}}{2\lambda} \right) - \left( \frac{-1 + \sqrt{1 - 4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)}}{2\lambda} \right) \right), \{\xi, 0, a\} \right] +$$


$$N\left[\frac{-4}{\pi h} \frac{((-1)^{(m+1)}) \text{Cos}[\mu \pi]}{\mu} e^{\frac{-h}{2\lambda}} \text{NIntegrate}\left[\frac{\xi \text{Sin}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2} \left( \frac{\text{Sin}\left[\frac{\sqrt{4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)} - 1}{2\lambda} t\right]}{\sqrt{4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)} - 1} + \text{Cos}\left[\frac{\sqrt{4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)} - 1}{2\lambda} t\right] \right), \{\xi, a, 1000000000\}, \text{Method} \rightarrow \{\text{GlobalAdaptive}, \text{MaxErrorIncreases} \rightarrow 10000\}, \text{MaxRecursion} \rightarrow 100\right],$$


$$MV[m] = N\left[\frac{-4}{\pi h} \frac{((-1)^{(m+1)}) \text{Cos}[\mu \pi]}{\mu} e^{\frac{-h}{2\lambda}} \text{NIntegrate}\left[\frac{\xi \text{Sin}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2} \left( \frac{\text{Sin}\left[\frac{\sqrt{4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)} - 1}{2\lambda} t\right]}{\sqrt{4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)} - 1} + \text{Cos}\left[\frac{\sqrt{4v\lambda(\xi^2 + \mu^2)} - 1}{2\lambda} t\right] \right), \{\xi, 0, 1000000000\}, \text{Method} \rightarrow \{\text{GlobalAdaptive}, \text{MaxErrorIncreases} \rightarrow 10000\}, \text{MaxRecursion} \rightarrow 100\right];$$

MC[m] = MC[m - 1] + MV[m]; If[Abs[MC[m] - MC[m - 1]] < 0.000000001, Print["MC", m, "=", MC[m]]; k = m; Break[], Print["MC", m, "=", MC[m]]; k = m; {m, 10000}];
Print[k]; TMC[y] = MC[k]; Estacionario =  $\frac{2}{h} \sum_{n=1}^{50000} \frac{(-1)^{n+1} \text{Cos}\left[\left(\frac{(2n-1)\pi}{2h}\right) \pi\right]}{\left(\frac{(2n-1)\pi}{2h}\right)} e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2h}\right) y};$ 
Print["Estacionario", "=", Estacionario]; Maxwell[y] = Estacionario + TMC[y]; Print["Maxwell_", y, "=", Maxwell[y]];
{y, {0.0001, 0.0003, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.075, 0.1, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2, 0.5, 1.0, 5.0}}, { $\lambda$ , {0.5, 1.0, 5.0, 50.0, 100.0, 500.0, 1000.0}}]

```

■ Modelo de Maxwell / Esfuerzo de corte (7.2) / variables: z, t.

```

y = 0;
h = 1;
v = 0.0011457;
λ = 1.0;
Do[
  Print["tiempo = ", t];
  Do[
    MV[0] = 0; MTC[0] = 0;

  Do[
    μ = (2 m - 1) Pi / (2 h);
    If[μ² < 1 / (4 v λ), a = √(1 / (4 v λ) - μ²);

    MT2[m] = N[(-4 / (Pi λ)) * ((-1)^(m-1) Cos[(2 m - 1) Pi z / (2 h)]) * NIntegrate[ξ² Cos[ξ y] / (ξ² + μ²) * (e^((-1 - √(1 - 4 v λ (ξ² + μ²)) t) / (2 λ)) - e^((-1 + √(1 - 4 v λ (ξ² + μ²)) t) / (2 λ))) / ((-1 - √(1 - 4 v λ (ξ² + μ²)) / (2 λ)) - (-1 + √(1 - 4 v λ (ξ² + μ²)) / (2 λ))), {ξ, 0, a}]] +

    N[(-4 / (Pi λ)) * ((-1)^(m-1) Cos[(2 m - 1) Pi z / (2 h)]) * (e^(-t / (2 λ))) * NIntegrate[ξ² Cos[ξ y] / (ξ² + μ²) * (Sin[√(4 v λ (ξ² + μ²) - 1) t] / (2 λ)) / √(4 v λ (ξ² + μ²) - 1)], {ξ, a, 10000000}, Method -> {GlobalAdaptive, MaxErrorIncreases -> 10000}, MaxRecursion -> 100]],

    MT2[m] = N[(-4 / (Pi λ)) * ((-1)^(m-1) Cos[(2 m - 1) Pi z / (2 h)]) * (e^(-t / (2 λ))) * NIntegrate[ξ² Cos[ξ y] / (ξ² + μ²) * (Sin[√(4 v λ (ξ² + μ²) - 1) t] / (2 λ)) / √(4 v λ (ξ² + μ²) - 1)], {ξ, 0, 10000000}, Method -> {GlobalAdaptive, MaxErrorIncreases -> 10000}, MaxRecursion -> 100]]]]

  MTC[m] = MTC[m - 1] + MT2[m];
  If[Abs[MTC[m] - MTC[m - 1]] < 0.000001, Print["MTC", m, " = ", MTC[m]]; k = m; Break[], Print["MTC", m, " = ", MTC[m]]; k = m; , {m, 10000}]

Print[k]; TMTC[z] = MTC[k]; MT1[z] = N[-2 (1 - e^(-t/λ)) ∑_{n=1}^{80000} (-1)^(n-1) Cos[(2 n - 1) Pi z / (2 h)] e^(-(2 n - 1) Pi y / (2 h))];

Print["MT1_", z, " = ", MT1[z]]; Maxwellesf[z] = MT1[z] + TMTC[z]; Print["Maxwell_esf_", z, " = ", Maxwellesf[z]];
{z, {0.0, 0.0001, 0.0003, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.075, 0.1, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2, 0.5, 1.0}}], {t, {0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 7.0, 10.0}}]

```

■ Modelo de Maxwell / Esfuerzo de corte (7.2) / variables: y , t .

```

y = 0;
h = 1;
v = 0.0011457;
λ = 1.0;
Do[
Print["tiempo = ", t];
Do[
MTC[0] = 0; MTC[0] = 0;

Do[
μ =  $\frac{(2 m - 1) \text{Pi}}{2 h}$ ;
If[ $\mu^2 < \frac{1}{4 v \lambda}$ , a =  $\sqrt{\frac{1}{4 v \lambda} - \mu^2}$ ;

MT2[m] = N[ $\frac{-4}{\text{Pi} \lambda} \frac{(-1)^{m+1} \text{Cos}\left[\left(\frac{(2 m - 1) \text{Pi}}{2 h}\right) y\right]}{\frac{(2 m - 1) \text{Pi}}{2 h}}$  NIntegrate[ $\frac{\xi^2 \text{Cos}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2} \left( e^{\left(\frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda}\right) t} - e^{\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda}\right) t} \right) / \left( \left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) - \left( \frac{-1 + \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) \right)$ , {ξ, 0, a}]] +

N[ $\frac{-4}{\text{Pi} \lambda} \frac{(-1)^{m+1} \text{Cos}\left[\left(\frac{(2 m - 1) \text{Pi}}{2 h}\right) y\right]}{\frac{(2 m - 1) \text{Pi}}{2 h}} \left( e^{\frac{-t}{2 \lambda}} \right)$  NIntegrate[ $\frac{\xi^2 \text{Cos}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2} \frac{\text{Sin}\left[\frac{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}}{2 \lambda} t\right]}{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}}$ , {ξ, a, 10000 000}, Method -> {GlobalAdaptive, MaxErrorIncreases -> 10000}, MaxRecursion -> 100]],

MT2[m] = N[ $\frac{-4}{\text{Pi} \lambda} \frac{(-1)^{m+1} \text{Cos}\left[\left(\frac{(2 m - 1) \text{Pi}}{2 h}\right) y\right]}{\frac{(2 m - 1) \text{Pi}}{2 h}} \left( e^{\frac{-t}{2 \lambda}} \right)$  NIntegrate[ $\frac{\xi^2 \text{Cos}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2} \frac{\text{Sin}\left[\frac{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}}{2 \lambda} t\right]}{\sqrt{4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2) - 1}}$ , {ξ, 0, 10000 000}, Method -> {GlobalAdaptive, MaxErrorIncreases -> 10000}, MaxRecursion -> 100]]]]

MTC[m] = MTC[m - 1] + MT2[m];
If[Abs[MTC[m] - MTC[m - 1]] < 0.000001, Print["MTC", m, "=", MTC[m]]; k = m; Break[], Print["MTC", m, "=", MTC[m]]; k = m; , {m, 10000}]

Print[k]; TMTC[y] = MTC[k]; MT1[y] = N[-2 (1 - e(-t/λ))  $\sum_{n=1}^{80000} (-1)^{n+1} \text{Cos}\left[\left(\frac{(2 n - 1) \text{Pi}}{2 h}\right) y\right] e^{-\left(\frac{(2 n - 1) \text{Pi}}{2 h}\right) y}$ ];

Print["MT1_", y, "=", MT1[y]]; Maxwellief[y] = MT1[y] - TMTC[y]; Print["Maxwell_esf_y_", y, "=", Maxwellief[y]];
{y, {0.0001, 0.0003, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.075, 0.1, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2, 0.5, 1.0, 5.0}}, {t, {0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 7.0, 10.0}}]

```

■ Modelo de Hayat / Velocidad (7.5) / variables: y, t.

```

n = 0;
h = 1;
v = 0.0011457;
λ = 0.02;
Do[
  Print["tiempo = ", t];
  Do[
    MV[0] = 0;
    MC[0] = 0;
    Do[
      μ =  $\frac{(2 m - 1) \text{Pi}}{2 h}$ ;
      If[μ² <  $\frac{1}{4 v \lambda}$ ,
        a =  $\sqrt{\frac{1}{4 v \lambda} - \mu^2}$ ;
        MV[m] = N[ $\frac{-4}{\text{Pi} h} \frac{((-1)^{(m+1)} + \text{Cos}[\mu * \pi])}{\mu}$  NIntegrate[ $\frac{\xi \text{Sin}[\xi y]}{\xi^2 + \mu^2}$ 
           $\left( \left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) e^{\left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) t} - \left( \frac{-1 + \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) e^{\left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) t} \right)$  /
           $\left( \left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) - \left( \frac{-1 + \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) \right)$ , {ξ, 0, a}],
           $\left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) e^{\left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) t} - \left( \frac{-1 + \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) e^{\left( \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 v \lambda (\xi^2 + \mu^2)}}{2 \lambda} \right) t}$ 
        ];
      MV[m] = 0];
    MC[m] = MC[m - 1] + MV[m];
    If[Abs[MC[m] - MC[m - 1]] < 0.000001, Print["MC", m, " = ", MC[m]]; k = m; Break[], Print["MC", m, " = ", MC[m]]; k = m; , {m, 10000}]
  Print[k];
  TMC[y] = MC[k];
  Estacionario =  $\frac{2}{h} \sum_{n=1}^{50000} \frac{(-1)^{n+1} \text{Cos}\left[\left(\frac{(2n-1)\text{Pi}}{2h}\right) \pi\right]}{\frac{(2n-1)\text{Pi}}{2h}} e^{-\left(\frac{(2n-1)\text{Pi}}{2h}\right) y}$ ;
  Print["Estacionario", " = ", Estacionario];
  Maxwell[y] = Estacionario + TMC[y];
  Print["Maxwell_", y, " = ", Maxwell[y]]; , {y, {0.0001, 0.0003, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.075, 0.1, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.3, 1.6, 2.0, 5.0}}]
, {t, {0.01, 10.0, 200, 400, 600, 800, 1000}}]

```

■ Modelo de Newton / Velocidad (7.3) / variables: y, t.

```

h = 1;
v = 0.0011457;
V = 1;
z = 0;
Do[
Print["tiempo = ", t];
Do[
k =  $\frac{(2 m - 1) \text{ Pi}}{2 h}$ ;
newton[y] =  $\frac{2}{h} \sum_{n=1}^{50000} \frac{(-1)^{n+1} \text{ Cos}[k z]}{k} e^{-k y} - \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{50000} \frac{(-1)^{n+1} \text{ Cos}[k z]}{k} \left( e^{-k y} \text{ Erfc}\left[k \sqrt{v t} - \frac{y}{2 \sqrt{v t}}\right] - e^{k y} \text{ Erfc}\left[k \sqrt{v t} + \frac{y}{2 \sqrt{v t}}\right] \right)$ ; Print["Newton ", y, " = ", newton[y]];
{y, {0.0001, 0.0003, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.075, 0.1, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2, 0.5, 1.0, 5.0}}]; {t, {0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 5.0, 10.0}}]

```

■ Modelo de Newton / Velocidad (7.3) / variables: y, t. (Gráfica 3D)

```

h = 1;
v = 0.0011457;
k =  $\frac{(2 m - 1) \text{ Pi}}{2 h}$ ;
t = 50.0;

P[y_, z_] =  $\frac{2}{h} \sum_{n=1}^{1000} \frac{(-1)^{n+1} \text{ Cos}[k z]}{k} e^{-k y} - \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{1000} \frac{(-1)^{n+1} \text{ Cos}[k z]}{k} \left( e^{-k y} \text{ Erfc}\left[k \sqrt{v t} - \frac{y}{2 \sqrt{v t}}\right] - e^{k y} \text{ Erfc}\left[k \sqrt{v t} + \frac{y}{2 \sqrt{v t}}\right] \right)$ ;

Plot3D[P[y, z], {y, 0, 1.0}, {z, -1, 1}, AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> Velocidad, PlotRange -> {-0.02, 1.01}]

```

■ Flujo estacionario / Velocidad (6.1) / variables: y, z.

$$h = 1;$$
$$k = \frac{(2m-1)\pi}{2h};$$
$$\text{estacionario}[y, z] = N \left[\frac{2}{h} \sum_{n=1}^{2000} \frac{(-1)^{n+1} \cos[kz]}{k} e^{-ky} \right];$$
$$\text{estacionario}[0.01, 0]$$