



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

FRECUENCIA Y ASIMETRÍA EN EL
DESPLAZAMIENTO DE INTERFASES
FLUIDAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
I N G E N I E R O Q U Í M I C O
P R E S E N T A:
GABRIEL GALLEGOS DIÉZ BARROSO



MÉXICO, D.F.

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

PRESIDENTE	Profesor:	Jesús Gracia Fadrique
VOCAL	Profesor:	María Eugenia Herminia Costas Basín
SECRETARIO	Profesor:	Eugenia Corvera Poiré
1º SUPLENTE	Profesor:	Ma. Guadalupe Lemus Barajas
2º SUPLENTE	Profesor:	Gerardo Omar Hernández Segura

Este trabajo fue desarrollado en:

Departamento de Física y Química Teórica. Facultad de Química.

ASESOR DEL TEMA: Eugenia Corvera Poiré

SUSTENTANTE: Gabriel Gallegos Diez Barroso

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Dra. Eugenia Corvera Poiré por invitarme a su grupo de trabajo y haber invertido tanto tiempo en mi formación académica y personal a lo largo de la licenciatura. Por ser una gran maestra de vida.

Agradezco a CONACYT, proyecto 83149, por la beca de tesis de licenciatura.

Agradezco a DGAPA por la beca otorgada a través del proyecto DGAPA IN 101907.

Agradezco a la División de Fluidos y Plasmas de la Sociedad Mexicana de Física por las facilidades para acudir a los Seminarios Enzo Levi 2008, 2009 y 2010.

Gracias

A mis padres, Yolanda y Jesús que han sido amor, enseñanza, apoyo incondicional, compañía y todo aquello que un hijo desea. Por andar el camino juntos...

A mis hermanos Constanza, Octavio, Juan Carlos, Mariana, Mónica, Jorge, Edgar, Alejandro por compartir la vida en todo momento.

A mi familia, a los primos, los tíos, los abuelos por siempre estar al pendiente del otro y hacer de alguna manera posible la convivencia entre todos.

A todos en Teórica: Rodrigo, Joaquín, Aimee, Marcos, Marquillo, Luis, Jesús, por tener siempre disposición a cualquier llamado de auxilio en los vericuetos computacionales. Aimee, gracias por tener paciencia y aguantar desvelos para lograr esta tesis.

A Arlen por ser compañera de vida, por las cosas que hemos compartido y las que nos quedan por compartir, por la paciencia y la furia de todos los días.

A la vida.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	8
2. Antecedentes	14
2.1. Dedos viscosos	14
2.2. Formulación macroscópica	16
2.2.1. Problema de fronteras libres	19
2.3. Análisis de estabilidad lineal	19
2.4. Modelos mesoscópicos	22
2.5. Inestabilidades laterales de los dedos viscosos	23
2.5.1. Perturbaciones temporales variando la frecuencia incidente, estudios numéricos	24
2.5.2. Perturbaciones temporales variando la frecuencia incidente, estudios experimentales	27
2.5.3. Perturbaciones temporales variando el grado de asimetría, estudios numéricos	30
3. Modelo mesoscópico	35
4. Resultados	41
4.1. Análisis de frecuencia de las inestabilidades laterales	42
4.2. Ancho promedio del dedo	55
4.2.1. Ancho promedio del dedo como función de la frecuencia incidente	57
4.2.2. Ancho promedio del dedo como función del parámetro del grado de asimetría de la señal incidente	60
5. Conclusiones	65

A. Selección de frecuencias dominantes	67
Referencias	68

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Patrones en la naturaleza.	8
1.2. Patrones de dedos viscosos.	9
2.1. Esquema de la celda de Hele-Shaw.	14
2.2. Etapas de formación del dedo de Saffman-Taylor.	15
2.3. Relación de dispersión.	21
2.4. Diferentes curvas para la relación de dispersión.	22
2.5. Condición dinámica de frontera y dedo con inestabilidades laterales.	25
2.6. Frecuencia de respuesta cerca de la punta del dedo.	26
2.7. Análisis de frecuencia de ω_{L_2}	27
2.8. Gradientes de presión experimentales.	28
2.9. Análisis de frecuencia.	29
2.10. Análisis del ancho promedio del dedo.	30
2.11. Condiciones dinámicas de frontera asimétricas.	32
2.12. Frecuencias de respuesta vs $\frac{T_1}{T_{Total}}$	33
2.13. Ancho del dedo promedio v.s $\frac{T_1}{T_{Total}}$	34
3.1. Perfil de equilibrio del parámetro de orden.	36
3.2. Configuración inicial.	39
4.1. Frecuencia de respuesta medida lejos de la punta del dedo, ω_{L_2} , como función del parámetro del grado de asimetría, $\frac{T_1}{T_{Total}}$, y de la frecuencia incidente en la condición dinámica de frontera ω_o	43
4.2. Frecuencias de respuesta dominantes, como función de la frecuencia incidente.	45
4.3. Distribución de frecuencias en la zona de selección.	46
4.4. Moda, promedio y desviación estándar v.s. $\frac{T_1}{T_{Total}}$ en la zona lejana a la punta del dedo.	47
4.5. Frecuencia de respuesta con dos zonas de transición.	48

4.6. Selección de modos para la respuesta con dos zonas de transición.	49
4.7. Frecuencia de respuesta medida cerca de la punta del dedo, ω_{L_1} , como función del parámetro del grado de asimetría, $\frac{T_1}{T_{Total}}$, y de la frecuencia incidente ω_o	50
4.8. Frecuencia de respuesta, ω_{L_1} , como función de la frecuencia incidente, ω_o	51
4.9. Frecuencias de respuesta para diferentes valores del grado de asimetría.	52
4.10. Distribución de frecuencias de respuesta de la zona lineal v.s. $\frac{T_1}{T_{Total}}$	53
4.11. Distribución de frecuencias de respuesta en la zona de selección.	54
4.12. Moda, promedio y desviación estándar como función del parámetro que mide el grado de asimetría en la zona cercana a la punta del dedo.	55
4.13. $\lambda_{L_1}(\omega_o, \frac{T_1}{T_{Total}})$	56
4.14. $\lambda_{L_2}(\omega_o, \frac{T_1}{T_{Total}})$	57
4.15. Ancho promedio, λ_{L_1} , como función de la frecuencia incidente, ω_o	58
4.16. Ancho promedio del dedo, λ_{L_2} , como función de la frecuencia incidente, ω_o	59
4.17. Ancho promedio del dedo λ_{L_2} como función de la frecuencia incidente ω_o en la zona de selección.	60
4.18. Ancho promedio del dedo como función de $\frac{T_1}{T_{Total}}$ a bajas frecuencias.	61
4.19. Ancho promedio del dedo como función del parámetro del grado de asimetría en la zona de selección	62
4.20. Promedio y desviación estándar de $\bar{\lambda}$ en la zona de selección.	63
4.21. Incremento porcentual de $\bar{\lambda}$ como función de $\frac{T_1}{T_{Total}}$	64
A.1. Señal incidente de la condición dinámica de frontera	67
A.2. Respuesta temporal del ancho medido cerca de la punta del dedo	68
A.3. Respuesta temporal del ancho medido lejos de la punta del dedo	68

INTRODUCCIÓN

La formación de patrones en la naturaleza es un fenómeno que podemos observar en las figuras formadas por nubes en el cielo, rayas en la piel de las cebras, copos de nieve, corales, las dunas de los desiertos, etc. Los ejemplos antes mencionados tienen su origen en distintos fenómenos, sin embargo, todos ellos involucran una interfase cuya dinámica ha determinado la forma que podemos observar [1]. En la (fig. 1.1) se muestran ejemplos de formación de patrones en la naturaleza.

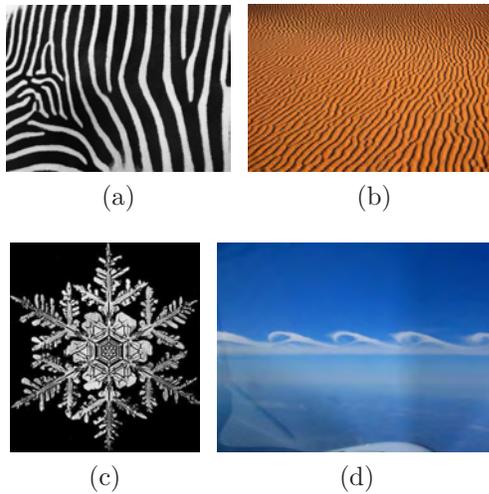


Figura 1.1: Patrones en la naturaleza.

Los ejemplos en estas cuatro imágenes tienen su origen en diferentes fenómenos. (a) Las líneas de una cebra tienen su origen en la inestabilidad de Turing. (b) Los patrones que se encuentran en las dunas de los desiertos se deben a un fenómeno complejo de transporte de sedimentos [2]. (c) La forma de los copos de nieve está gobernada por fenómenos de difusión. (d) Las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz se forman a causa de la vorticidad ocasionada por la diferencia de velocidades en el viento a diferentes alturas en la atmósfera.

El estudio de estas formas lo lleva a cabo una rama de la ciencia llamada *morfogénesis* y su objetivo es entender los fenómenos que determinan los patrones que se encuentran en la naturaleza.

En este trabajo se ha estudiado un fenómeno físico que se presenta cuando dos fluidos inmiscibles y de viscosidades muy diferentes son puestos en movimiento en un medio confinado. Cuando el fluido poco viscoso desplaza al fluido viscoso se forman estructuras conocidas como dedos viscosos. Dependiendo de la geometría del sistema, este fenómeno dará lugar a diferentes patrones (fig.1.2).

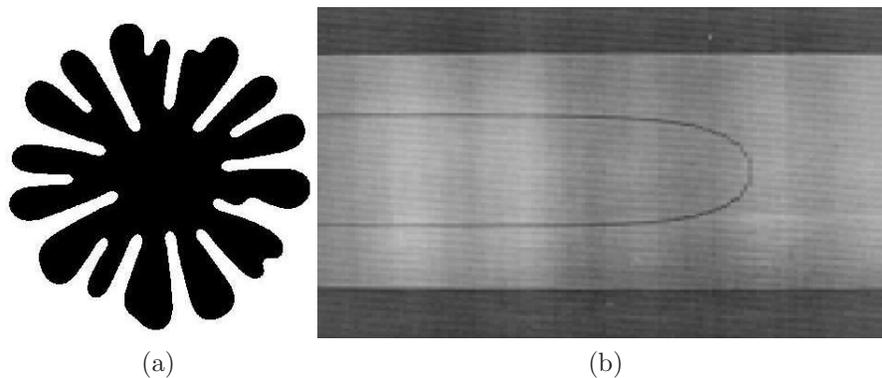


Figura 1.2: Patrones de dedos viscosos.

(a) Formación de dedos viscosos en una geometría circular, tomada de [3]. Para tener esta geometría el fluido poco viscoso se debe inyectar perpendicularmente a las placas que confinan el fluido viscoso. (b) Dedo viscoso formado cuando el aire es inyectado desde un costado del canal que confina al fluido viscoso, tomada de [4].

Si se desplaza un fluido de alta viscosidad con uno de baja viscosidad en una celda de Hele-Shaw rectangular¹, inyectando el fluido de baja viscosidad desde un extremo de la

¹La celda de Hele-Shaw rectangular consiste en un par de placas paralelas que forman un canal cuasi bidimensional.

celda, que ha sido llenada previamente con el fluido de alta viscosidad, las estructuras que se forman inicialmente son dedos que compiten. Eventualmente se alcanza un estado estacionario que se caracteriza por tener un ancho que ocupa una fracción superior a la mitad del ancho del canal. A la forma de este estado estacionario se le conoce como dedo de Saffman-Taylor.

Los dedos de Saffman-Taylor se pueden estudiar mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, que gobiernan la dinámica de fluidos desde una perspectiva macroscópica. Esta vía de estudio involucra problemas numéricos para el rastreo de la interfase debido a que es un problema de *fronteras libres*. Una alternativa al uso de ecuaciones macroscópicas son los modelos mesoscópicos llamados modelos de campo² cuyas ecuaciones son consistentes con las de la hidrodinámica.

La importancia de conocer la dinámica de los dedos viscosos radica no sólo en que matemáticamente es un arquetipo en el área de morfogénesis, sino en sus innumerables aplicaciones a problemas reales, notablemente al desplazamiento de fluidos en medios porosos [5]. Durante la recuperación secundaria de petróleo, se inyecta un fluido como gas o agua para que la presión ejercida por estos fluidos lleve el crudo a la superficie. El desplazamiento de petróleo por otro fluido dentro de los yacimientos da lugar a la formación de dedos viscosos. Además las ecuaciones que describen el problema del dedo de Saffman Taylor son muy similares a las que describen el desplazamiento de fluidos en medios porosos, razón por la cual, el entendimiento del problema de Saffman Taylor puede tener

²Del inglés *phase field model*. Estos modelos no solamente son consistentes con las ecuaciones de la hidrodinámica, funcionan para modelar cualquier cambio de fase. Esto involucra un parámetro de orden ya sea, densidad, viscosidad, temperatura, etc. que varía de forma continua a través del espacio, eliminando condiciones a la frontera abruptas en las interfases

aplicaciones a muchos problemas reales. La cantidad de fluido viscoso desplazado en el problema de Saffman-Taylor es mayor cuanto mayor sea el ancho del dedo viscoso formado. Para aumentar la cantidad desplazada de fluido viscoso, sería necesario aumentar el ancho del dedo. En este marco se sitúa el presente trabajo.

Se sabe que los dedos de Saffman-Taylor presentan una inestabilidad lateral cuando un gradiente de presión constante es sustituido por una señal periódica. En este sentido se han hecho estudios tanto numéricos [6, 7] como experimentales [8]. La inestabilidad lateral causa fluctuaciones laterales en el ancho del dedo que pueden también generarse con ruido estático³. Esto ha sido estudiado tanto numérica [9] como experimentalmente [10]. Los resultados de los trabajos realizados con anterioridad demuestran que una manera de obtener dedos más anchos es generar inestabilidades laterales.

Para generar las inestabilidades laterales de una manera controlada en los trabajos mencionados, se introdujeron perturbaciones dinámicas en el gradiente de presión. Los trabajos numéricos impusieron oscilaciones alrededor de un valor promedio. En [6] se trabajó con dos tipos de variaciones en la señal de presión. La primera fue una señal cosenoidal, la segunda, ruido temporal, ambas alrededor del mismo valor de presión. Las inestabilidades laterales generadas en ambos casos fueron de amplitud y número de onda pequeños. La señal cosenoidal da lugar a inestabilidades estrictamente periódicas que sufren un proceso de selección a medida que se propagan lejos de la punta del dedo. El ruido temporal da lugar a fluctuaciones laterales no periódicas, a pesar de esto, también se observó el proceso de selección como en el caso periódico⁴. En el trabajo experimental [8], en el que

³Este tipo de ruido se logra poniendo *obstáculos* o *surcos* en la celda.

⁴El proceso de selección se lleva a cabo en la frecuencia de estas oscilaciones laterales. El dedo de Saffman-

se introdujo una señal periódica en el gradiente de presión para generar la inestabilidad lateral, las fluctuaciones obtenidas, al igual que en los estudios numéricos, son de longitud de onda larga y de amplitud pequeña. A frecuencias bajas la frecuencia de respuesta de las inestabilidades crece conforme la frecuencia incidente crece. A frecuencias altas la respuesta del sistema es casi independiente de la frecuencia incidente. Los resultados del estudio experimental coinciden en buena medida con los resultados observados en el trabajo numérico. Ninguno de los dos trabajos mencionados, reporta un incremento significativo en el ancho del dedo de Saffman-Taylor.

Recientemente se realizó un estudio numérico [7] que impone una señal asimétrica en el gradiente de presión con la forma de una función escalón, que mantiene fija la frecuencia incidente y modifica el grado de asimetría de la señal. La asimetría temporal en la señal incidente permite obtener un aumento significativo en el ancho del dedo conforme el grado de asimetría crece.

Los resultados obtenidos en el trabajo con funciones asimétricas, sientan las bases para el presente estudio numérico, en el que se explora el sistema variando tanto la frecuencia incidente como el grado de asimetría de la señal. La forma del gradiente de presión incidente es también una función escalón. El trabajo se realiza mediante el uso de un modelo de campo.

Para explicar en detalle el problema de Saffman-Taylor, en el segundo capítulo se habla acerca de los dedos viscosos en la sección 2.1, en la sección 2.2 se expone la formulación Taylor es un amplificador selectivo de ruido.

macroscópica y se hace patente el problema de fronteras libres, en la sección 2.3 se habla brevemente del análisis de estabilidad lineal que muestra el origen físico de los dedos viscosos. En la sección 2.4 se hace una breve introducción a los modelos mesoscópicos. Finalmente, en la sección 2.5 se hace un recuento de algunos resultados de las inestabilidades laterales que se han obtenido con anterioridad.

El tercer capítulo expone el modelo de campo que se utilizó en este trabajo para analizar la respuesta de un dedo de Saffman-Taylor ante un gradiente de presión oscilatorio y asimétrico.

En el cuarto capítulo se exponen los resultados de la integración numérica del modelo mesoscópico. La presentación de los resultados se divide en dos, en la sección 4.1 se hace un análisis de frecuencias en las dos coordenadas de estudio ω_o y T_1 . En la sección 4.2 se analizan los anchos promedio del dedo debidos a las inestabilidades laterales.

Finalmente en el quinto capítulo se exponen las conclusiones de este trabajo.

ANTECEDENTES

2.1. Dedos viscosos

Los dedos viscosos son estructuras que se forman cuando un par de fluidos inmiscibles y de viscosidades diferentes son puestos en movimiento en una celda de Hele-Shaw. La celda es un canal cuasibidimensional formado por un par de placas paralelas de largo L y ancho W separadas entre sí por un espacio b . El espacio de separación b es mucho menor que sus dimensiones L y W (fig.2.1).

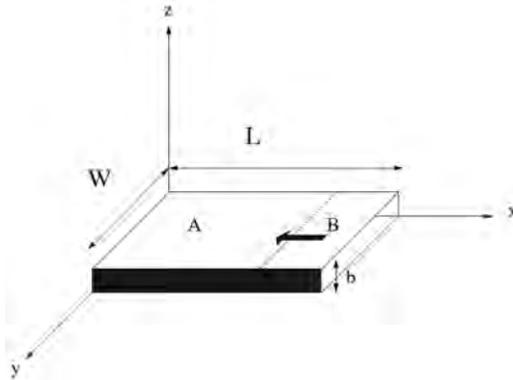


Figura 2.1: Esquema de la celda de Hele-Shaw.

Para generar la inestabilidad deseada, el fluido viscoso A debe ser desplazado por el fluido poco viscoso B . La dirección del flujo está indicada por la flecha en el plano de la cara superior de la celda de Hele-Shaw.

La celda se llena con un fluido viscoso, el cual se desplaza con un fluido de menor viscosidad. La interfase plana fluido-fluido es inestable. Esto significa que pequeñas perturbaciones crecen en el tiempo sin que la tensión superficial sea suficiente para restablecer la forma plana. Los modos¹ que componen a la interfase perturbada compiten entre sí (fig. 2.2a). El fluido poco viscoso penetra al fluido viscoso y se forman varios dedos viscosos, que también compiten entre sí (fig. 2.2b). La etapa de competencia entre dedos finaliza cuando un solo dedo alcanza el estado estacionario. Éste se llama dedo de Saffman-Taylor. Está caracterizado por tener una velocidad en la punta U y un ancho de dedo λW constantes (fig. 2.2c). λ es una fracción del ancho del canal W .

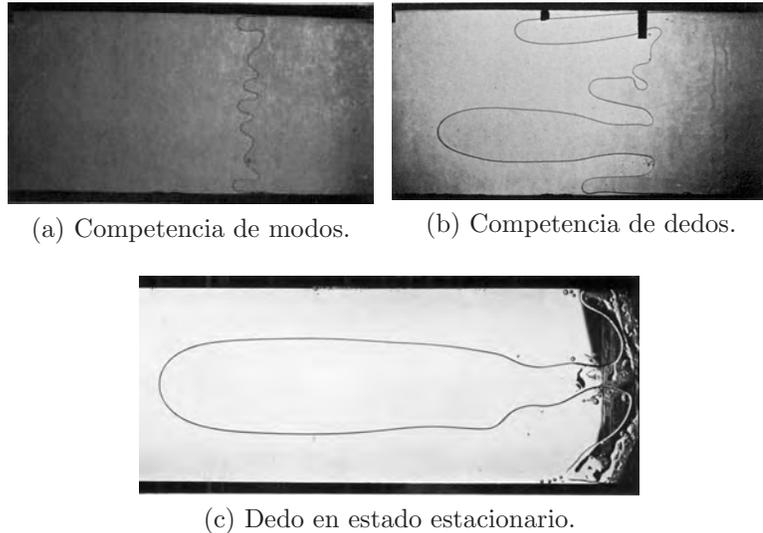


Figura 2.2: Etapas de formación del dedo de Saffman-Taylor. Tomada de [5]

¹El modo, se refiere en este texto a la longitud de onda de las perturbaciones que desestabilizan a la interfase.

2.2. Formulación macroscópica

El fenómeno de los dedos viscosos se puede estudiar utilizando la formulación macroscópica mediante las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan la dinámica de los fluidos. A continuación se plantean las ecuaciones de Navier-Stokes para el problema de dedos viscosos en una celda de Hele-Shaw. Debido a la geometría cuasi-bidimensional del problema se acostumbra promediar las ecuaciones resultantes en la sección transversal a la dirección del flujo.

La ecuación de la hidrodinámica para el balance de momento de un fluido viscoso bajo el régimen de flujo laminar en estado estacionario se puede escribir como

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2}, \quad (2.1)$$

en donde p es la presión, η la viscosidad y v_x es la velocidad del flujo en dirección x que depende únicamente de la coordenada z , perpendicular a las placas. Para resolver esta ecuación se establecen dos condiciones de frontera en las paredes de la celda.

$$v_x(z = 0) = 0$$

$$v_x(z = b) = 0.$$

La ecuación resultante es conocida como el perfil de Poiseuille

$$v_x(z) = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} z \left(\frac{z}{2} - \frac{b}{2} \right).$$

Si promediamos el perfil en el área de la sección transversal se obtiene

$$\langle v_x \rangle = \int_0^b v_x(z) dz = -\frac{b^2}{12\eta} \frac{dp}{dx}.$$

Este resultado podría obtenerse para cualquier dirección arbitraria de flujo en el plano xy por lo que podemos escribir

$$\langle \vec{v} \rangle = -K \nabla p, \quad (2.2)$$

en donde $K = \frac{b^2}{12\eta}$. Este término es conocido como permeabilidad del sistema y es una medida de la facilidad con la que pueden desplazarse los fluidos en la celda. La ecuación 2.2 es conocida como la Ley de Darcy que establece que la velocidad del flujo es proporcional al gradiente de presión. Si el fluido en cuestión es incompresible la ecuación de continuidad es

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.3)$$

Si el lado izquierdo de la ecuación 2.3 se promedia en la dirección z , tenemos,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle &= \frac{1}{b} \int_0^b \nabla \cdot \vec{v} dz = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b} \int_0^b v_x(z) dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{b} \int_0^b v_y(z) dz \right] \\ &= \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial y} = \nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por lo que la ecuación 2.3 promediada en la dirección z es

$$\nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0 \quad (2.5)$$

De las ecuaciones 2.2 y 2.5 se puede obtener fácilmente la ecuación de Laplace para la presión. Esta ecuación gobierna la dinámica en el seno de cada una de las fases

$$\nabla^2 p = 0. \quad (2.6)$$

Para completar el sistema de ecuaciones hay que considerar las condiciones de frontera entre los fluidos. La primera es una condición de equilibrio termodinámico local,

$$\Delta p = -\gamma\kappa, \quad (2.7)$$

en donde γ es la tensión interfacial fluido-fluido y κ es la curvatura local de la interfase, $\Delta p = p_2 - p_1$ es la caída de presión en la interfase. La segunda es una condición de continuidad, ésta se establece igualando las velocidades normales a la interfase

$$\vec{v}_1 \cdot \hat{n}|_{int} = \vec{v}_2 \cdot \hat{n}|_{int} = v_n \quad (2.8)$$

en donde v_1 y v_2 son las velocidades de los fluidos en la interfase, $\hat{n}|_{int}$ es el vector unitario normal a la interfase y v_n es la velocidad de la línea matemática que forma la interfase.

La formación de los dedos de Saffman-Taylor ocurre en un régimen de alto contraste de viscosidades, esto ocurre cuando $\eta_2 \gg \eta_1$; donde el fluido 1 (poco viscoso), desplaza al fluido 2 (viscoso). En este régimen la ecuación 2.2 para el fluido 1 es $\nabla p_1 = 0$, esto nos dice que en cualquier punto de la región ocupada por el fluido poco viscoso la presión será la misma. La ecuación 2.8 se reduce en este caso a

$$v_2 \cdot \hat{n}|_{int} = v_n \quad (2.9)$$

Por lo que las ecuaciones que gobiernan la dinámica del fluido viscoso son 2.6, 2.7 y 2.9.

2.2.1. Problema de fronteras libres

En la sección anterior se planteó el problema de los dedos viscosos en una celda de Hele-Shaw utilizando las ecuaciones de Navier-Stokes. Para conocer la forma de los dedos viscosos se debe conocer la dinámica de la interfase fluido-fluido. Para esto, se debe resolver la ecuación 2.6, que gobierna la dinámica de bulto del fluido viscoso sujeta a las condiciones de frontera 2.7 y 2.9. La condición de frontera de equilibrio termodinámico local (2.7) está escrita en términos de la curvatura de la interfase, esto supone conocer la forma de la interfase para poder establecer la condición de frontera que es necesaria para determinar la posición de la misma. Esto es conocido como problema de fronteras libres. Esta es la razón por la cual, la posición de la interfase no puede ser conocida a cualquier tiempo de manera analítica.

2.3. Análisis de estabilidad lineal

La dinámica de la interfase a tiempos cortos se puede conocer haciendo un análisis de estabilidad lineal. En este análisis la forma inicial de la interfase es conocida y a partir de ésta se puede seguir la interfase a lo largo del tiempo.

Este análisis fue hecho por primera vez por Mullins y Sekerka [11]. Como resultado del mismo se obtiene la relación de dispersión.

La relación de dispersión es una ecuación que relaciona la rapidez de crecimiento de una perturbación con su longitud de onda. Uno puede perturbar la interfase plana con un coseno de modo que la interfase a tiempos cortos tenga la siguiente forma

$$y(t) = y_0 + \delta_0 e^{\omega t} \cos(kx),$$

en donde $\delta_0 e^{\omega t}$ es la amplitud del coseno y k es el número de onda. Si ω tiene signo positivo la amplitud crecerá. Por el contrario, si es de signo negativo la amplitud de la perturbación decrecerá conforme pasa el tiempo. Para obtener la relación de dispersión se resuelven las ecuaciones de movimiento para una interfase plana. Después se introduce la perturbación y se escriben las condiciones de frontera para la interfase perturbada. Al hacer esto se obtiene un sistema de ecuaciones que al resolverse da como resultado la relación de dispersión.

Para el caso de una interfase formada por un par de fluidos inmiscibles con alto contraste de viscosidades la relación de dispersión tiene la siguiente forma:

$$\omega(k) = v_0 k - \frac{b^2}{12\eta} \gamma k^3 \quad (2.10)$$

En la ecuación 2.10 se puede observar que existen efectos que compiten. La velocidad tiene un efecto de desestabilización, mientras que la tensión interfacial uno de estabilizar a la interfase.

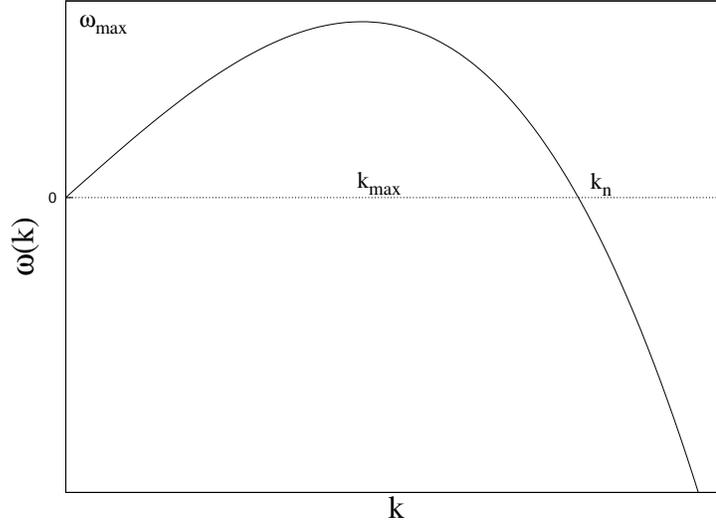


Figura 2.3: Relación de dispersión.

En la figura 2.3 se presenta una gráfica típica de la relación de dispersión. Donde $k_{max} = \sqrt{\frac{4v_o\eta}{\gamma b^2}}$ es el modo que crece más rápidamente; $k_n = \sqrt{\frac{12v_o\eta}{\gamma b^2}}$ es el modo de estabilidad neutra, a la derecha de este valor se puede observar que $\omega(k)$ es negativa y a la izquierda de k_n , $\omega(k)$ es positiva. De esta manera, dadas la velocidad, la tensión interfacial, la viscosidad y las dimensiones de la celda, se puede conocer la razón de crecimiento para cualquier número de onda k . A saber, existen tres posibles respuestas del sistema:

- a. Caso de estabilidad neutra, para el que la perturbación inicial es constante en el tiempo.
- b. Modo inestable, con $k < k_n$, para el que la amplitud del modo crece en el tiempo.
- c. Modo estable, con $k > k_n$, para el que la amplitud del modo decrece en el tiempo.

A continuación presentamos la gráfica (fig. 2.4) en donde se muestra cómo al variar la velocidad y la tensión interfacial, se puede variar la zona de modos estables e inestables.

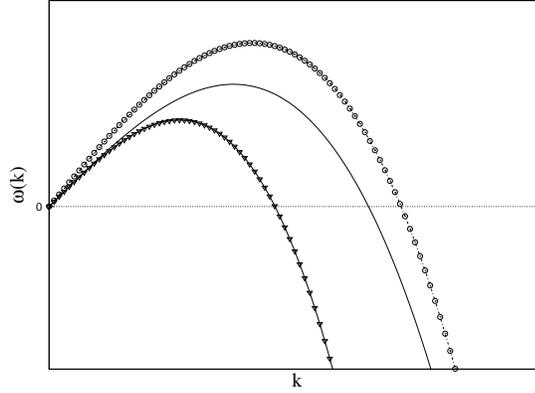


Figura 2.4: Diferentes curvas para la relación de dispersión.

En esta gráfica se varían parámetros de velocidad y de tensión interfacial. La curva con la línea continua es la referencia $\omega(k) = v_o k - \frac{b^2 \gamma}{12 \eta} k^3$. La curva con círculos tiene v_o mayor que la referencia, por otro lado la curva con triángulos invertidos tiene $\frac{b^2 \gamma}{12 \eta}$ mayor que la curva de referencia.

2.4. Modelos mesoscópicos

Los modelos mesoscópicos han surgido como una alternativa al problema de fronteras libres. En la formulación macroscópica la interfase fluido-fluido es concebida como un límite infinitamente pequeño. Los modelos mesoscópicos definen a la interfase como una región continua definida por un parámetro de orden. El parámetro de orden es una cantidad que varía continuamente en el espacio con dos valores bien definidos para los bultos de las fases y la transición entre una fase y otra es suave en el espacio.

La ecuación de movimiento del modelo mesoscópico se escribe a partir de un funcional de energía libre para el parámetro de orden. En general, esta ecuación está acoplada a un potencial dinámico y de ahí se obtienen un par de ecuaciones diferenciales que se pueden integrar en el tiempo. Esta ecuación se conoce como ecuación de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo.

En la literatura existe un modelo mesoscópico para el desplazamiento de fluidos con viscosidades arbitrarias [12, 13] y un modelo específicamente desarrollado para el régimen de alto contraste de viscosidades [14]. Éste último consiste en una ecuación diferencial escrita para un parámetro de orden, con una condición de frontera para el parámetro de orden que mantiene al sistema fuera de equilibrio.

Para validar el modelo se hace un desarrollo asintótico en el límite cuando ϵ tiende a cero. De este desarrollo se obtienen identificaciones entre los parámetros mesoscópicos y los macroscópicos.

2.5. Inestabilidades laterales de los dedos viscosos

Los dedos de Saffman-Taylor presentan inestabilidades laterales si se altera al sistema con perturbaciones estáticas o dinámicas. Las perturbaciones estáticas son aquellas intrínsecas al canal de flujo como surcos, obstáculos o algún tipo de patrón o grabado en las paredes de la celda de Hele-Shaw. Las perturbaciones dinámicas son aquellas que varían en el tiempo, por ejemplo, un gradiente de presión dependiente del tiempo. Estas inestabilidades laterales han sido analizadas numérica [6] y experimentalmente [8]. La concordancia de los resultados ha validado el modelo de campo utilizado en los estudios numéricos.

Para describir de una mejor manera los resultados tanto numéricos como experimentales hablaremos de dos cantidades con unidades de frecuencia, que son características del dedo de Saffman-Taylor en estado estacionario. La primera de ellas está determinada por

la velocidad lejos de la punta del dedo y el ancho del canal,

$$\nu_{\infty} = \frac{V_{\infty}}{W},$$

la segunda de ellas está definida como

$$\nu_{dedo} = \frac{U}{\lambda W} = \frac{V_{\infty}}{\lambda^2 W},$$

en donde U es la velocidad en la punta del dedo y λW es el ancho del dedo. La segunda igualdad se obtiene por conservación de masa ya que $\lambda U = V_{\infty}$.

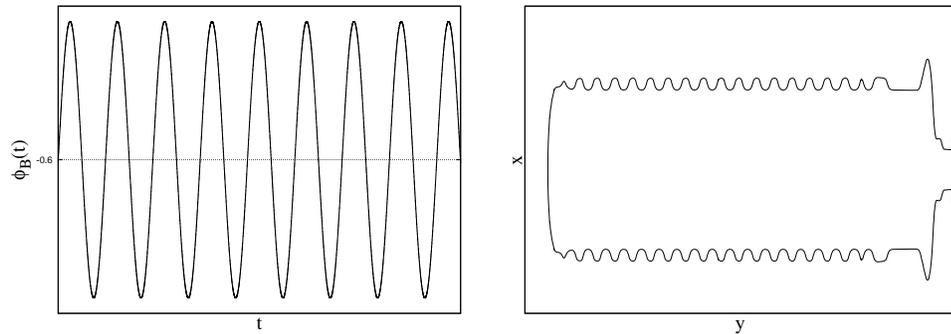
Al variar el gradiente de presión se generan inestabilidades laterales, entonces λ deja de tener un valor constante en el tiempo. En este caso, no se puede hablar de un solo valor de ν_{dedo} sino de un rango de valores para la frecuencia característica del dedo.

2.5.1. Perturbaciones temporales variando la frecuencia incidente, estudios numéricos

Las perturbaciones temporales que se han estudiado en trabajos numéricos [6, 15] sustituyen el gradiente de presión constante por uno que varía en el tiempo.

El primer estudio numérico [15] propone un gradiente de presión de la forma $p(t) = p_o + \delta \cos(\omega t)$ que oscila alrededor de p_o . En éste se hizo un barrido en la frecuencia incidente para la condición de frontera en el parámetro de orden. Las inestabilidades laterales

se midieron cerca y lejos de la punta del dedo. En (fig.2.5a) se muestra la variación de la condición de frontera para el parámetro de orden como función del tiempo y en (fig. 2.5b) se muestra el dedo de Saffman-Taylor con las inestabilidades laterales generadas por la variación de $\phi_B(t)$.



(a) Condición de frontera oscilatoria para el parámetro de orden. (b) Inestabilidades laterales en el dedo viscoso.

Figura 2.5: Condición dinámica de frontera y dedo con inestabilidades laterales.

Al analizar las inestabilidades laterales cerca de la punta del dedo se observa que tienen una frecuencia de respuesta ω_{L_1} igual a la frecuencia incidente ω_o (fig. 2.6).

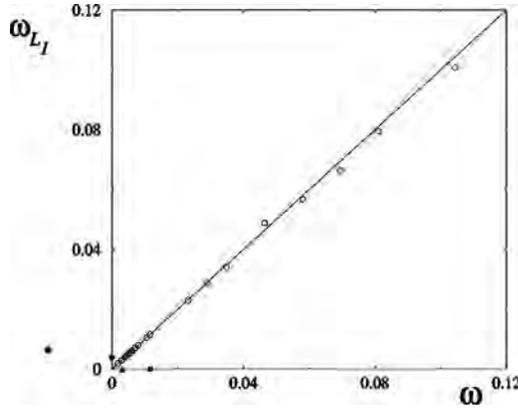
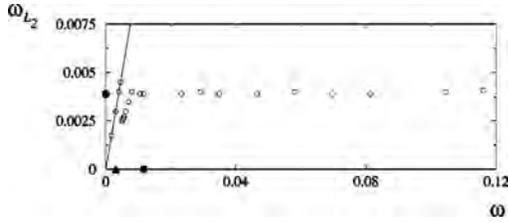


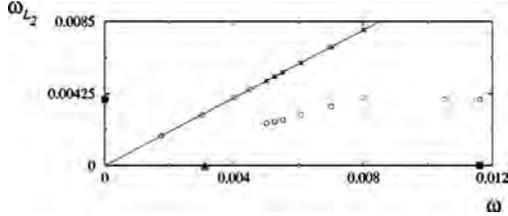
Figura 2.6: Frecuencia de respuesta cerca de la punta del dedo. Tomada de [15]
 La frecuencia de respuesta en la zona cercana a la punta es igual a la frecuencia incidente. La línea continua en la gráfica tiene pendiente $m = 1$. Los valores obtenidos de la integración numérica se muestran con círculos abiertos.

El análisis de la frecuencia de respuesta medida lejos de la punta del dedo ω_{L_2} , muestra que existen tres zonas claramente diferenciables (fig. 2.7). La primera es la zona lineal en donde $\omega_{L_2} = \omega_o$, la segunda es llamada zona de transición, en donde la frecuencia de respuesta es la mitad de la frecuencia incidente, $\omega_{L_2} = \frac{1}{2}\omega_o$ y la tercera es la zona de selección. En ésta última, la frecuencia de respuesta es independiente de la frecuencia incidente. Cada una de las zonas tiene un rango de frecuencias incidentes bien definido.

También se analizó el ancho promedio del dedo, λ_{L_1} , medido cerca de la punta y el ancho promedio del dedo, λ_{L_2} , medido lejos de la punta como función de la frecuencia incidente. Las variaciones en ambos casos respecto al valor del ancho del dedo en estado estacionario, son tan pequeñas, que no se puede distinguir si son debidas al efecto de la frecuencia o a la precisión del método numérico [15].



(a) ω_{L_2} en todo el barrido de frecuencias.



(b) Detalle de las zonas lineal y de transición.

Figura 2.7: Análisis de frecuencia de ω_{L_2} . Tomada de [15]

- (a) La respuesta del sistema medida lejos de la punta del dedo depende de la frecuencia incidente. A bajas frecuencias el sistema responde con la misma frecuencia de la señal incidente, conforme la frecuencia aumenta, la respuesta del sistema decae a la mitad de la frecuencia incidente, finalmente hay una zona donde la frecuencia de respuesta es independiente de la frecuencia incidente, a ésta última se le llama frecuencia de selección.
- (b) Para mostrar que en la zona de transición la frecuencia de respuesta es la mitad de la frecuencia incidente se grafica con cruces el doble de la frecuencia de respuesta en esta zona y se observa que en todos los casos cae en la línea continua con pendiente $m = 1$. En ambas gráficas se marcan con un triángulo y un cuadrado en negro las frecuencias características ω_∞ y ω_{dedo} respectivamente sobre el eje de las abscisas. En el eje de las ordenadas el valor de la frecuencia de selección está indicado por un círculo negro.

2.5.2. Perturbaciones temporales variando la frecuencia incidente, estudios experimentales

Los estudios experimentales fueron realizados en una celda de Hele-Shaw variando la frecuencia de un gradiente de presión oscilatorio en el tiempo. El experimento consiste en llenar la celda con aceite para posteriormente desplazarlo con aire. La variación del

gradiente de presión fue creada mediante una bomba² diseñada para producir una señal periódica (fig. 2.8).

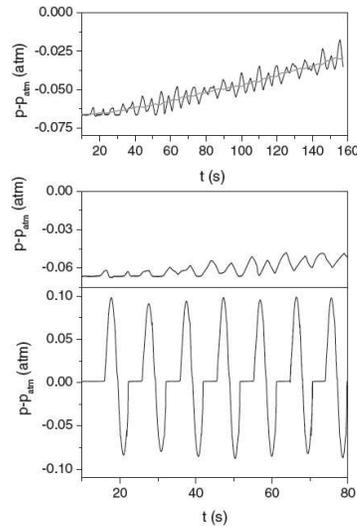


Figura 2.8: Gradientes de presión experimentales. Tomada de [8]

En la gráfica de abajo se muestra la señal de presión de aire a la entrada de la celda. La señal de la presión es periódica que se aproxima a una señal sinusoidal. La gráfica de en medio muestra la presión a la salida de la celda, se puede ver que esta señal también es periódica. La gráfica de arriba muestra la señal a la salida de la celda en un rango de tiempo mayor.

Al igual que en los estudios hechos con el modelo de campo, se hizo un análisis de frecuencia (fig. 2.9). Los resultados muestran dos zonas de respuesta. A bajas frecuencias incidentes, la frecuencia de respuesta aumenta monótonamente conforme aumenta la frecuencia incidente. A diferencia de los resultados en los estudios numéricos únicamente a muy bajas frecuencias incidentes, ν_{in} , la frecuencia de respuesta, ν_{out} , el igual a ν_{in} . Conforme ν_{in} crece la frecuencia de respuesta se desvía de una respuesta lineal y la pendiente

²La bomba consiste en un pistón cuya frecuencia se puede ajustar en el rango 0-1 Hz.

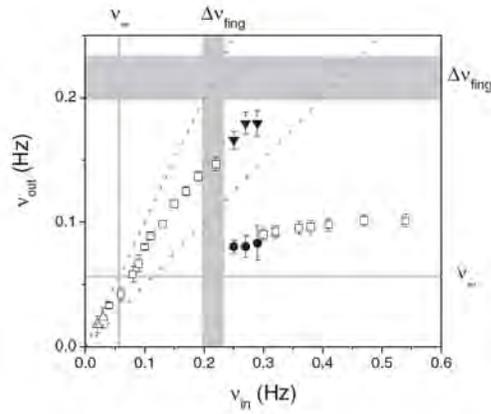


Figura 2.9: Análisis de frecuencia. Tomada de [8]

Las dos líneas punteadas se grafican como referencia y corresponden a $\nu_{out} = \nu_{in}$ y $\nu_{out} = \frac{1}{2}\nu_{in}$. Los valores en barras grises corresponden al rango de frecuencias características del dedo $\Delta\nu_{fing}$ y las dos líneas grises corresponden a ν_{∞} .

de la frecuencia de respuesta decae monótonamente. Para frecuencias incidentes mayores al rango de valores de la frecuencia característica del dedo, la frecuencia de respuesta es prácticamente independiente de ν_{in} .(fig. 2.9), lo que indica que experimentalmente también se encuentra una zona de selección.

El ancho promedio del dedo también se estudió como función de la frecuencia incidente del gradiente de presión, ν_{in} . Se calculó el ancho promedio del dedo λ para cada frecuencia incidente así como su desviación estándar δ_{λ} (fig. 2.10). Se observó que tanto λ como δ_{λ} tienen una relación no monótona como función de ν_{in} . La desviación estándar presenta un máximo en $\nu_{in} = \nu_{\infty}$. En la zona de selección ($\nu_{in} > \nu_{fing}$) la desviación estándar es pequeña y se acerca a una constante conforme la frecuencia incidente crece (fig. 2.10).

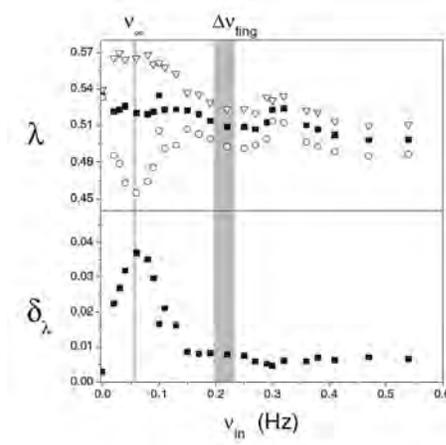


Figura 2.10: Análisis del ancho promedio del dedo. Tomada de [8]

En la gráfica de arriba los puntos marcados con los símbolos en ∇ y \circ son los valores máximos y mínimos del ancho del dedo respectivamente, los cuadrados sólidos indican el valor promedio del ancho del dedo. ν_∞ y $\Delta\nu_{fing}$ se colocaron como referencia. En la gráfica de abajo se muestran las fluctuaciones del ancho del dedo. En la zona de bajas frecuencias ($\nu_{in} < \nu_{fing}$) las fluctuaciones tienen un comportamiento no monótono con un máximo alrededor de ν_∞ . En la zona de selección las fluctuaciones son pequeñas y casi independientes de la frecuencia incidente.

2.5.3. Perturbaciones temporales variando el grado de asimetría, estudios numéricos

Un segundo estudio numérico [7] propone un gradiente de presión periódico con forma de una función escalón. Dicha función es asimétrica y su valor oscila alrededor de un valor promedio, que es el mismo que para la perturbación cosenoidal. En este trabajo la frecuencia se fijó en $\omega = 0.01$ y se modificó el parámetro del grado de asimetría³.

Es sabido que las asimetrías exaltan las no linealidades de las ecuaciones. Nuestro problema contiene no linealidades de una forma que no es evidente a primera vista de las

³El parámetro del grado de asimetría, es el tiempo que la función pasa por encima del valor promedio. A este valor se le denomina T_1 . Cuando $\frac{T_1}{T_{Total}} = 0.5$ la señal es simétrica.

ecuaciones de la formulación macroscópica. Para el estado estacionario, las ecuaciones de la formulación macroscópica, pueden ser transformadas mediante técnicas de mapeo conforme a dos ecuaciones integrodiferenciales, no lineales, acopladas, para la forma del dedo y la velocidad del mismo. La solución de estas ecuaciones establece una relación no lineal entre el ancho del dedo y la velocidad lejos de la punta, en el bulto del fluido viscoso [7]. Dado que la velocidad en el bulto del fluido viscoso es directamente proporcional al gradiente de presión, se puede concluir que existe una relación no lineal entre el ancho del dedo y el gradiente de presión que mueve al sistema.

Al introducir una función asimétrica de $\phi_B(t)$ como condición dinámica de frontera, se espera que la respuesta en las inestabilidades laterales sea diferente a aquella de cuando se impone una forma simétrica de $\phi_B(t)$ como condición de frontera.

El rango de variación del parámetro de asimetría, T_1 , está limitado por la estabilidad numérica del modelo⁴. Para que el valor promedio de la función escalón se mantenga, el área bajo la curva por encima del valor promedio de ϕ_B , $A = T_1\phi_{B1}$, debe ser igual al área por debajo del mismo $A = T'_1\phi_{B2}$ (fig. 2.11). El periodo $T = T_1 + T'_1$ se mantiene constante. El valor de ϕ_{B1} se mantiene constante para toda T_1 por lo que ϕ_{B2} depende de T_1 como $\phi_{B2} = \frac{T_1}{T-T_1}\phi_{B1}$.

⁴Para que la integración numérica sea estable el parámetro de orden en la frontera debe mantenerse en el siguiente rango $-0.5 \geq \phi_B(t) \geq -1$.

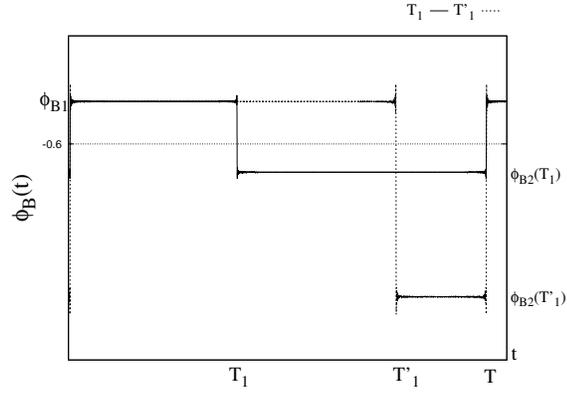


Figura 2.11: Condiciones dinámicas de frontera asimétricas.

El periodo T tanto en la línea punteada como en la línea continua es el mismo. La línea continua tiene un periodo T_1 menor que la línea punteada T'_1 .

Las frecuencias de la inestabilidad lateral medidas en la zona cercana ω_{L_1} y lejana ω_{L_2} a la punta del dedo fueron analizadas variando el parámetro del grado de asimetría, T_1 .

En el análisis de frecuencias se utilizó la transformada de Fourier del ancho del dedo como función del tiempo para encontrar la frecuencia de respuesta dominante para cada valor de T_1 . Se encontró que en la zona cercana a la punta del dedo, la frecuencia de respuesta del sistema es igual a la frecuencia incidente para fracciones $\frac{T_1}{T_{Total}}$ menores de 0.5538 (fig. 2.12). Para este valor existe una biestabilidad de frecuencias, esto sucede cuando la magnitud de los picos encontrados en el dominio de Fourier tienen prácticamente el mismo valor.

La frecuencia de respuesta es igual a la frecuencia incidente para valores pequeños de T_1 , para valores grandes de T_1 la frecuencia de respuesta es mucho menor. Lejos de la punta del dedo la frecuencia de respuesta es casi independiente a T_1 (fig. 2.12)

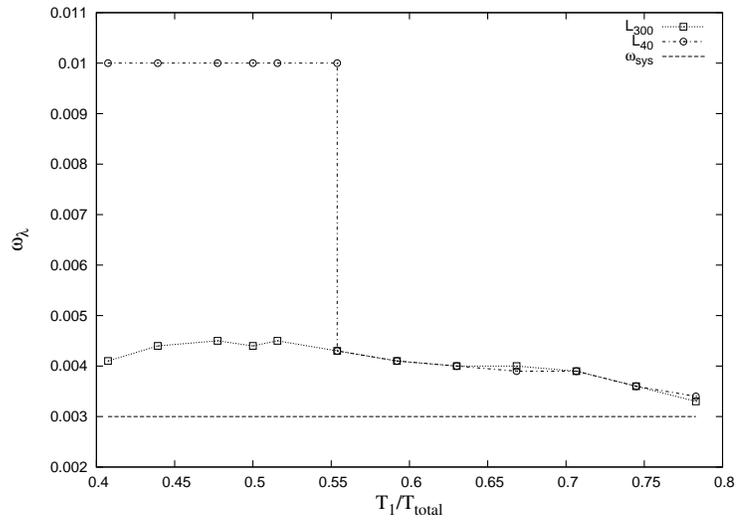


Figura 2.12: Frecuencias de respuesta vs $\frac{T_1}{T_{Total}}$ Tomada de [7]
 La línea constante $\omega_{\lambda_1} = 0.003$ es la frecuencia característica del sistema lejos de la punta del dedo, ω_{∞} . Los cuadros son las frecuencias de respuesta de la inestabilidad lateral lejos de la punta del dedo y los valores en círculos son las frecuencias de respuesta medidos cerca de la punta del dedo.

El resultado más importante de este trabajo fue el obtenido para el ancho promedio del dedo tanto cerca de la punta del dedo λ_{L_1} como lejos de la misma λ_{L_2} . En ambos casos se observó que el ancho promedio del dedo crece conforme T_1 crece. El ancho promedio máximo fue de 4.1% por encima del ancho obtenido con la señal simétrica y de 4.6% mayor que el ancho del dedo estacionario (fig. 2.13).

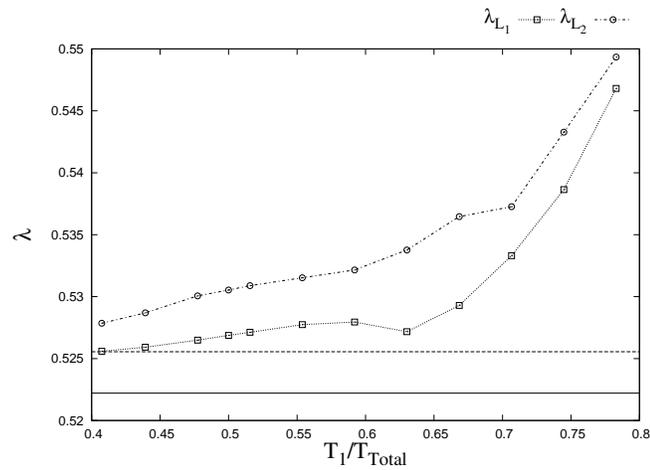


Figura 2.13: Ancho del dedo promedio v.s. $\frac{T_1}{T_{Total}}$. Tomada de [7]
 El ancho promedio en el cuerpo del dedo λ_{L_2} en todos los casos es más grande que en la zona cercana a la punta del dedo λ_{L_1} . El ancho promedio máximo se obtiene para el valor más alto de T_1 explorado. La línea continua es el valor del ancho del estado estacionario. La línea punteada indica el valor del ancho promedio del dedo obtenido con la perturbación simétrica cosenoidal.

MODELO MESOSCÓPICO

El modelo de campo que se utilizó en este trabajo está compuesto por una ecuación de movimiento escrita para un parámetro de orden, ϕ , conocida como Modelo B según la clasificación de Halperin y Hohenberg [16], más una condición dinámica que mantiene al sistema fuera de equilibrio y en un estado no estacionario. La ecuación que gobierna la dinámica de la interfase es:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla \cdot M\nabla\mu(\phi) \quad (3.1)$$

en donde M es un parámetro relacionado con la permeabilidad del sistema y $\mu(\phi)$ es el potencial químico que tiene la forma:

$$\mu(\phi) = \mu_B(\phi) - \epsilon^2\nabla^2\phi \quad (3.2)$$

con

$$\mu_B(\phi) = \frac{1}{\phi_{eq}^2}\phi^3 - \phi. \quad (3.3)$$

El parámetro ϵ en la ecuación 3.2 está relacionado con el ancho de la interfase. En la ecuación 3.2 $\mu_B(\phi)$ es el potencial químico en el bulto de las fases y ϕ_{eq} es el valor de equilibrio del parámetro de orden.

En equilibrio, una solución a la ecuación 3.1 es la siguiente expresión,

$$\phi = \phi_{eq} \tanh\left(\frac{y}{\sqrt{2\epsilon}}\right). \quad (3.4)$$

Esta expresión da un perfil del parámetro de orden que se muestra en la gráfica (fig.3.1). En esta ecuación los valores de $y = \pm\infty$ corresponden a los valores de equilibrio en el bulto de las fases, $\phi = \pm\phi_{eq}$. Para esta solución $\mu(\phi) = 0$.

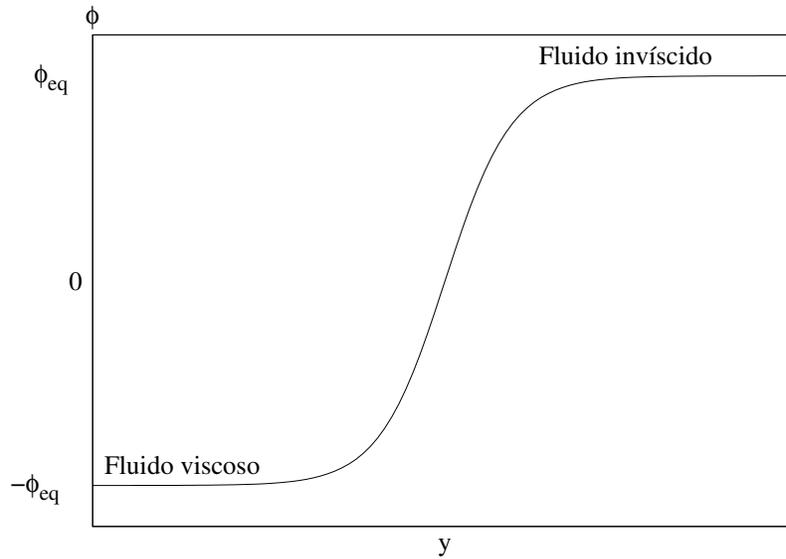


Figura 3.1: Perfil de equilibrio del parámetro de orden.

El parámetro de orden varía suavemente entre una fase y otra, la interfase del sistema se fija arbitrariamente en $\phi = 0$, para toda $\phi > 0$ se tiene el fluido inviscido, de viscosidad nula, y para toda $\phi < 0$ el fluido viscoso.

La legitimidad del modelo se establece al recuperar las ecuaciones macroscópicas de la ecuación 3.1, esto se logra por medio de un desarrollo asintótico en el límite en que $\epsilon \rightarrow 0$. Recordemos que este parámetro es proporcional al ancho de la interfase, si éste tiende a cero, entonces la interfase corresponde a una interfase bien definida. En ese caso la ecuación de movimiento en la región de transición debe reducirse a las condiciones de

frontera macroscópicas en la interfase fluido-fluido ecuaciones 2.7 y 2.9. En las regiones de bulto de los fluidos, donde $\phi = \pm\phi_{eq}$, la ecuación 3.1 debe reducirse a la ecuación 2.6. Esto se logra haciendo las siguientes identificaciones entre los parámetros mesoscópicos y macroscópicos:

$$p = \phi_{eq}\mu_1 \quad (3.5)$$

$$K = -\frac{M_2}{2\phi_{eq}^2} \quad (3.6)$$

$$\gamma = \frac{\gamma'}{2\phi_{eq}} \quad (3.7)$$

donde μ_1 es el potencial químico, M_2 es un parámetro proporcional a la permeabilidad del fluido viscoso y γ' es un parámetro relacionado con el ancho de la interfase dado por

$$\gamma' = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial\phi_o}{\partial\omega} \right)^2 d\omega,$$

p es la presión, K es la permeabilidad del sistema y γ es la tensión interfacial entre los dos fluidos. Es importante apuntar que es en el régimen de alto contraste viscoso donde se obtienen estos resultados.

La ecuación 3.5 relaciona la presión con el parámetro de orden, ϕ , mediante el potencial químico, $\mu(\phi)$. De esta relación se puede concluir que imponer una condición de frontera que tenga variaciones espaciales en el parámetro de orden, lo cual implica un gradiente en el potencial químico, equivale a imponer un gradiente de presión.

Para introducir la dinámica al sistema se establece una condición de frontera al fijar el valor del parámetro de orden en el bulto del fluido viscoso

$$\phi = \phi_B(t); (x, y) \in B \quad (3.8)$$

en donde la región B corresponde a la región de bulto del fluido viscoso.

La integración numérica de la ecuación 3.1 se lleva a cabo partiendo de una configuración de ϕ que describe una interfase perturbada en un sistema de dimensiones $nx \times ny$. La condición inicial se impone conforme las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \phi = \phi_{eq} \quad & \text{si} \begin{cases} 1 \leq x \leq nx, \\ y_p \leq y \leq ny \end{cases} \\ \\ \phi = \frac{\phi_{Bo} + \phi_{eq}}{y_p^* - y_p - \Delta y} (y - y_p + 1) - \phi_{eq} \quad & \text{si} \begin{cases} 1 \leq x \leq nx, \\ y_p^* - \Delta y - 1 \leq y \leq y_p - 1 \end{cases} \\ \\ \phi = \phi_{Bo} \quad & \text{si} \begin{cases} 1 \leq x \leq nx, \\ 1 \leq y \leq y_p^* - \Delta y - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde y_p^* es la posición más avanzada de la interfase perturbada, ϕ_{B_0} es el valor del parámetro de orden en el seno de la fase viscosa que mantiene al sistema fuera de equilibrio. Δy es una distancia arbitraria, a partir de la cual se impone el valor ϕ_{B_0} . Esta condición inicial, define el campo del parámetro de orden con dos fases, una positiva, correspondiente al fluido invíscido y otra negativa, que corresponde al fluido viscoso.

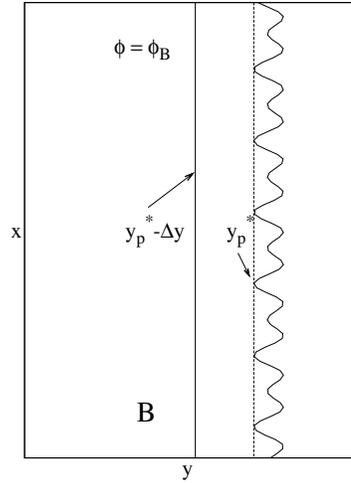


Figura 3.2: Configuración inicial.

La línea curva corresponde a la interfase inicial perturbada, y_p , la línea punteada corresponde a la posición más avanzada de la interfase, y_p^* . La línea recta continua, $y_p^* - \Delta y$, marca el límite donde el parámetro de orden toma un valor constante $\phi = \phi_B$, que es toda la región a la izquierda de esa línea, en este trabajo la denominamos región B .

A lo largo de la integración, se determina la posición de la interfase, se encuentra el punto más avanzado de la misma y_p^{*k} , se redefine la región B y el valor del parámetro de orden en esta región. Se avanza un paso de tiempo en la integración y se calcula y_p^{*k+1} . Conforme la interfase avanza, la región B también se desplaza, manteniendo el sistema fuera de equilibrio.

Para imponer un gradiente dinámico en el modelo, la condición dinámica de frontera debe contener un término constante para llegar a la formación de un dedo en estado estacionario, una vez logrado dicho estado, se le superpone una dinámica a través de una dependencia temporal $h(t)$. La condición dinámica de frontera se impone en la región B como sigue:

$$\phi_B(t) = \begin{cases} \phi_{B_o} & \text{si } t \leq t_{ee} \\ \phi_{B_o} + h(t) & \text{si } t > t_{ee} \end{cases} \quad (3.10)$$

en donde t_{ee} es el tiempo al cual el dedo ha alcanzado el estado estacionario

RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en este trabajo, producto de integraciones numéricas del Modelo B con condiciones dinámicas de frontera en el parámetro de orden. Las condiciones de frontera fueron establecidas como consecuencia de los resultados de los trabajos expuestos en la sección 2.5.3. La forma de la condición de frontera dependiente del tiempo $\phi_B(t)$ es la función escalón utilizada en [7]. En este trabajo además de variar el parámetro del grado de asimetría $\frac{T_1}{T_{Total}}$, se hizo un barrido en la frecuencia incidente ω_o .

Para seguir la evolución de las inestabilidades estudiadas se midió el ancho del dedo como función del tiempo a dos distancias de la punta. La distancia L_1 *cerca* de la punta se fijó en cuarenta unidades de red, ya que ésta es la menor distancia a la que se puede medir el ancho sin tener efectos de la curvatura de la punta del dedo. La distancia L_2 , *lejos* de la punta, se fijó en trescientas unidades de red donde el periodo de la inestabilidad lateral hubo alcanzado un valor constante. El ancho del dedo, λW , se reporta como una fracción del ancho del canal W . Al medir el ancho del dedo como función del tiempo a las distancias L_1 y L_2 se obtuvieron dos señales de respuesta del sistema $\lambda_{L_1}(t)$, $\lambda_{L_2}(t)$. El estudio de la inestabilidad lateral se hizo mediante estas señales.

Se encontró que la saturación en frecuencia de la inestabilidad lateral depende de las características de la condición dinámica de frontera ω_o y $\frac{T_1}{T_{Total}}$.

Los resultados de la frecuencia de respuesta del sistema se presentan en la sección 4.1, los resultados del ancho promedio del dedo se presentan en la sección 4.2 que se divide en la respuesta del ancho promedio como función de la frecuencia incidente en 4.2.1 y como función del parámetro del grado de asimetría en la sección 4.2.2

4.1. Análisis de frecuencia de las inestabilidades laterales

En esta sección se analiza cómo cambia la frecuencia de respuesta de las oscilaciones laterales en las dos coordenadas de estudio; como función de la frecuencia y del grado de asimetría de la señal incidente.

Para cada par $(\omega_o, \frac{T_1}{T_{Total}})$ en la condición dinámica de frontera el sistema responde con periodos y amplitudes distintos en la señal del ancho del dedo $\lambda(t)$. La oscilación lateral del dedo está compuesta de varias frecuencias. Con el fin de estudiar las frecuencias de respuesta, la señal temporal del ancho del dedo se pasó al dominio de frecuencias mediante la transformada de Fourier. Una vez en el dominio de frecuencias es muy fácil saber qué frecuencias participan en $\lambda(t)$ y cuál es la frecuencia de respuesta dominante¹. En aquellos casos donde la señal tiene una frecuencia de respuesta dominante evidente, ésta fue calculada con el inverso del periodo de la oscilación lateral. En el apéndice A se muestra en detalle cómo se escogen las frecuencias de respuesta dominantes en este trabajo.

¹En el dominio de Fourier la señal transformada presenta una serie de picos en los valores de las frecuencias que componen la señal temporal.

El análisis presentado se divide en dos zonas, primero se presentan las frecuencias de respuesta dominantes medidas *lejos* de la punta del dedo y posteriormente las medidas *cerca* de la punta del dedo.

a. Zona lejana a la punta del dedo

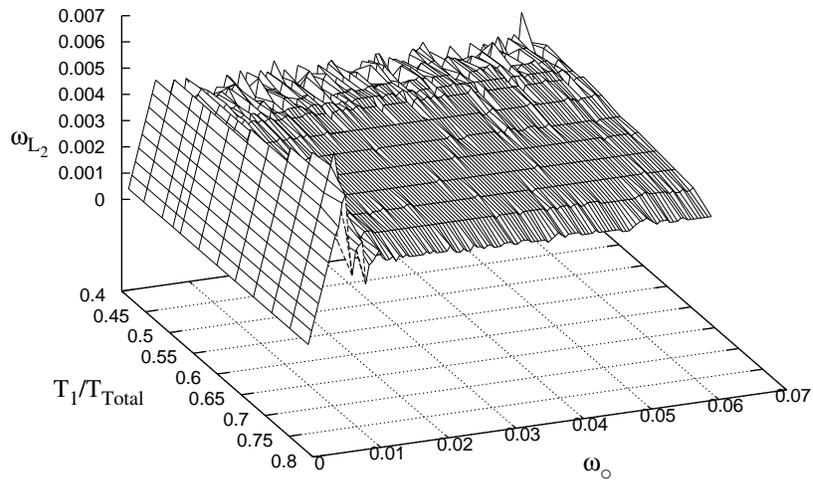


Figura 4.1: Frecuencia de respuesta medida lejos de la punta del dedo, ω_{L_2} , como función del parámetro del grado de asimetría, $\frac{T_1}{T_{Total}}$, y de la frecuencia incidente en la condición dinámica de frontera ω_o .

La figura 4.1 presenta el comportamiento global de la frecuencia de respuesta dominante del sistema medida lejos de la punta del dedo como función de los dos parámetros que se varían en este trabajo. En la gráfica se puede apreciar que a bajas frecuencias incidentes, ω_o , la frecuencia de respuesta del sistema, ω_{L_2} , crece

linealmente con la frecuencia incidente, ω_o , y que a altas frecuencias incidentes, ω_o , la frecuencia de respuesta, ω_{L_2} , es prácticamente independiente de la frecuencia incidente. Por otro lado, puede observarse que este comportamiento es cualitativamente el mismo para casi todos los valores estudiados del parámetro del grado de asimetría.

Se hizo un análisis de frecuencia en la zona lejana a la punta, que se basa en las frecuencias dominantes como función de ω_o y $\frac{T_1}{T_{Total}}$. En la gráfica (fig. 4.2) se muestra la frecuencia de respuesta del sistema como función de la frecuencia incidente para los diferentes valores del parámetro del grado de asimetría. Se encontró que al igual que en [6], *lejos* de la punta del dedo existen tres zonas de respuesta del sistema bien definidas, la zona lineal, la zona de transición y la zona de selección. Además, los dominios de las tres zonas prácticamente no cambian con los distintos valores de $\frac{T_1}{T_{Total}}$.

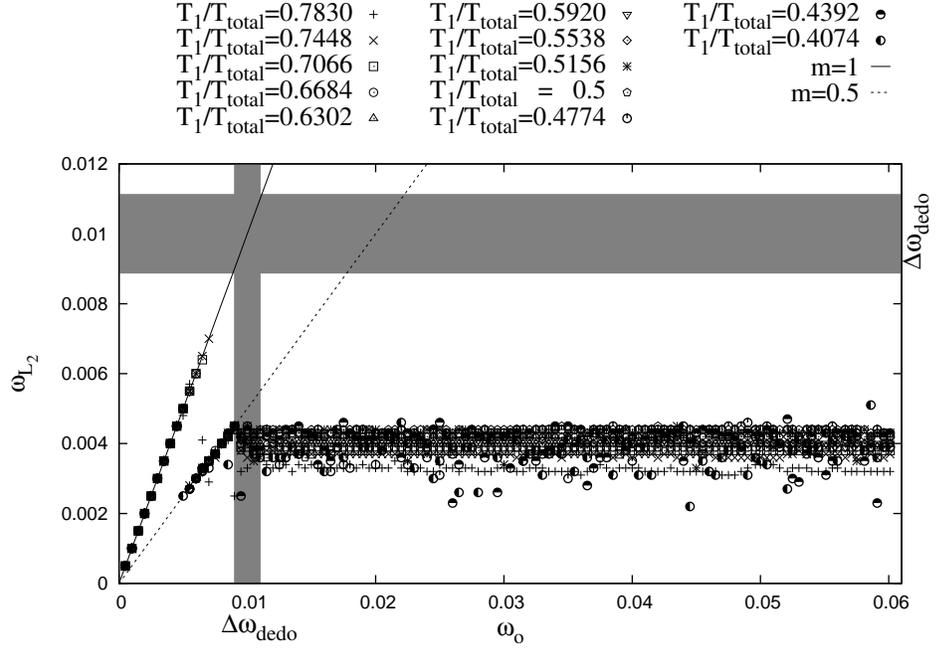


Figura 4.2: Frecuencias de respuesta dominantes, como función de la frecuencia incidente. Las tres zonas se pueden observar con claridad. La zona de respuesta lineal se ubica en el rango donde $\omega_{L_2} = \omega_o$, en la zona de transición $\omega_{L_2} = \frac{1}{2}\omega_o$ y la zona de selección se encuentra a frecuencias mayores que la franja $\Delta\omega_{dedo}$.

El análisis de frecuencias en la zona de selección consistió en hacer una distribución de frecuencias de respuesta, ω_{L_2} , para cada valor de $\frac{T_1}{T_{total}}$. En la gráfica (fig. 4.3) se presentan estas distribuciones.

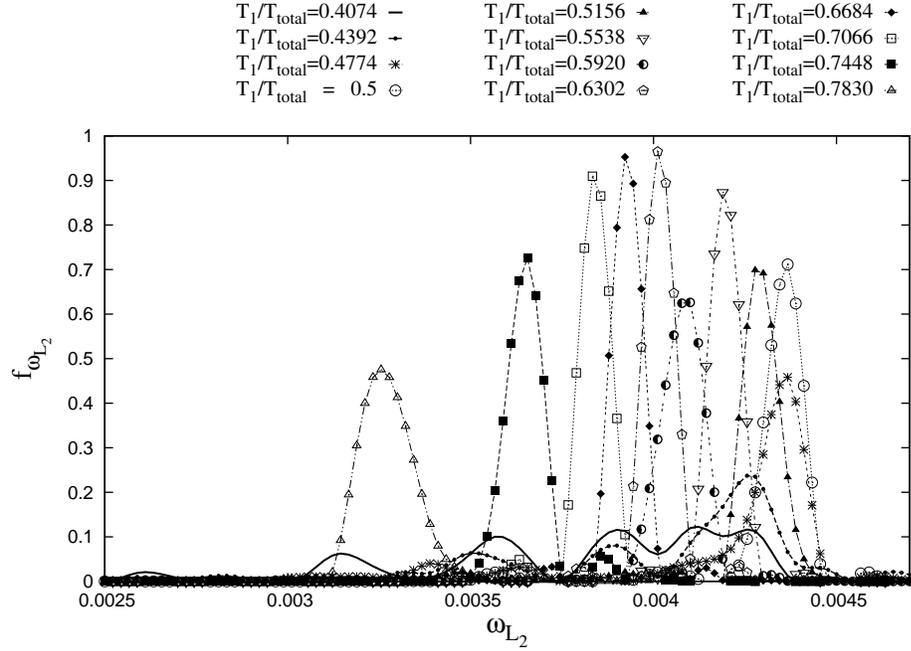


Figura 4.3: Distribución de frecuencias en la zona de selección. La distribución de frecuencias en esta gráfica está normalizada, $f_{\omega_{L_2}} = \frac{N_i}{N_{Total}}$.

La moda de las distintas distribuciones, ω_{maxL_2} , presenta un máximo cuando no hay asimetría ($\frac{T_1}{T_{Total}} = 0.5$) y tiende a disminuir conforme $\frac{T_1}{T_{Total}}$ aumenta, mientras la dispersión de los datos decrece. Para apreciar mejor esta información se presentan las tendencias tanto del promedio como de la moda de las distintas distribuciones como función del parámetro del grado de asimetría. La desviación estándar se calculó, en cada caso, para saber que tan precisa es la selección de frecuencia (fig. 4.4).

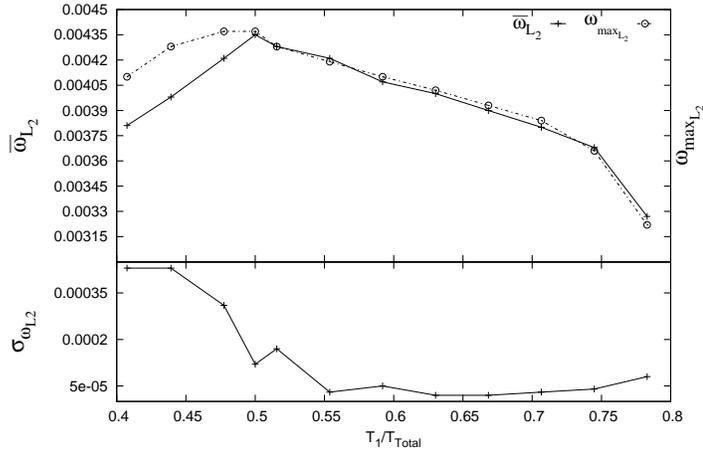


Figura 4.4: Moda, promedio y desviación estándar como función del parámetro que mide el grado de asimetría, en la zona lejana a la punta del dedo. Arriba comparación de la moda, ω_{maxL_2} , y del promedio, $\overline{\omega}_{L_2}$, como función de $\frac{T_1}{T_{Total}}$ en la zona de selección. Abajo la desviación estándar como función del parámetro del grado de asimetría.

Para el valor más alto del parámetro del grado de asimetría se encontró que existe una segunda zona de transición en donde la frecuencia de respuesta del sistema es un tercio de la frecuencia incidente de $\phi_B(t)$ (fig. 4.5). La dos zonas de transición se pueden explicar mediante argumentos de estabilidad en los que la tensión superficial tiende a suprimir modos de longitud de onda pequeños.

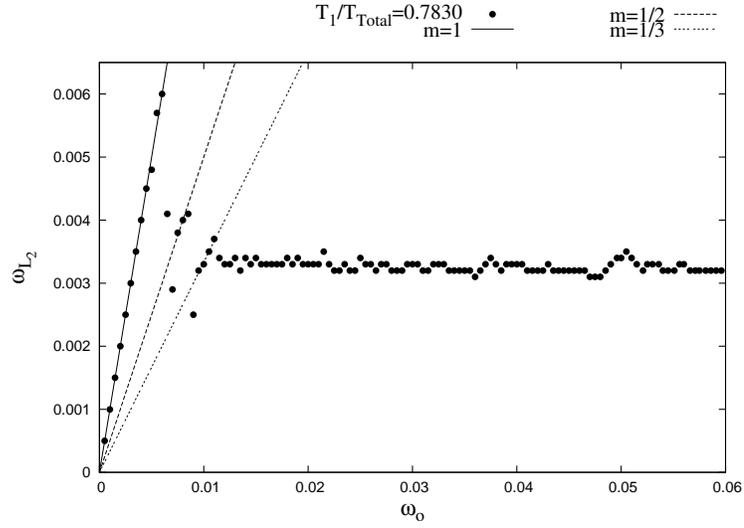


Figura 4.5: Frecuencia de respuesta con dos zonas de transición.

En esta gráfica se muestra que para cierto valor del grado de asimetría se tiene la zona de respuesta lineal en donde $\omega_{L_2} = \omega_o$, dos zonas de transición; la primera con $\omega_{L_2} = \frac{1}{2}\omega_o$, la segunda con $\omega_{L_2} = \frac{1}{3}\omega_o$ y la zona de selección.

En la gráfica (fig.4.6) se muestra la manera en que la inestabilidad lateral se propaga a lo largo del dedo para dar la respuesta lineal $\omega_{L_2} = \omega_o$ en (fig.4.6a), en la gráfica (fig.4.6b) se presenta la evolución en la primera zona de transición en donde $\omega_{L_2} = \frac{1}{2}\omega_o$ y por último en la gráfica (fig.4.6c) se da cuenta de la segunda zona de transición $\omega_{L_2} = \frac{1}{3}\omega_o$, esta última gráfica no es tan ilustrativa debido a que el sistema suprime un modo muy cerca de la punta del dedo, esto no permite ver con claridad las dos etapas de supresión.

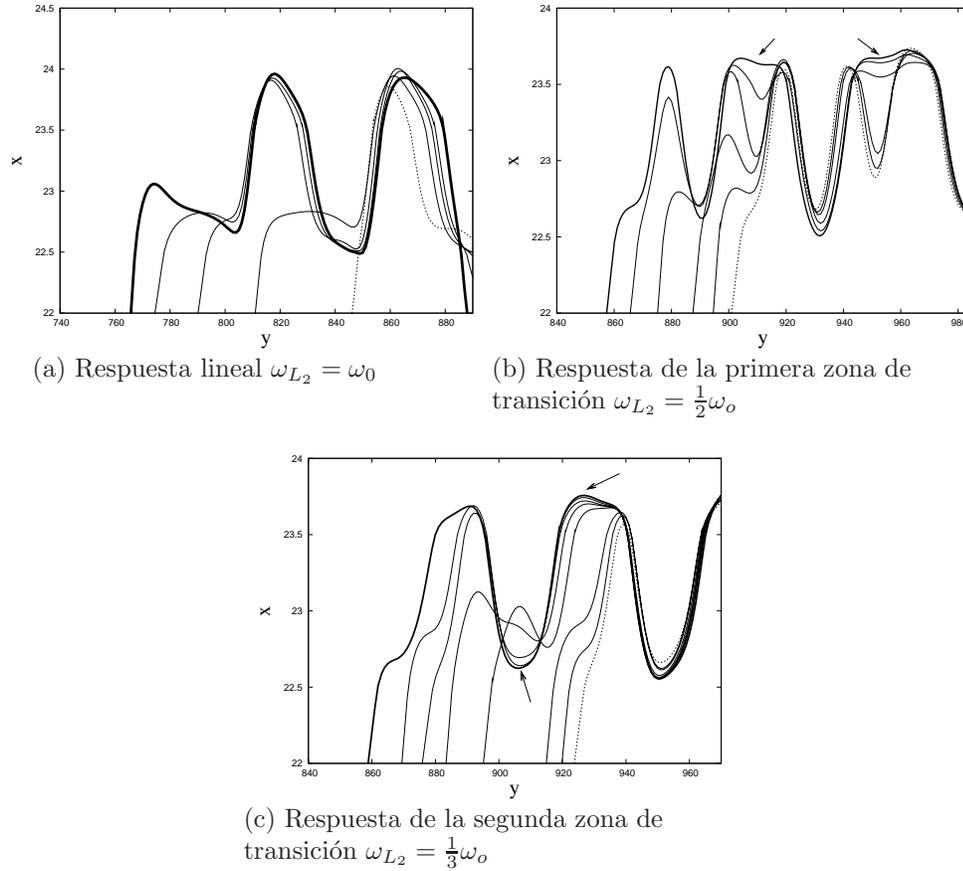


Figura 4.6: Selección de modos para la respuesta con dos zonas de transición. En todas las gráficas la interfase inicial está marcada en línea punteada mientras que la interfase final esta marcada con una línea continua más gruesa. Las líneas continuas delgadas son los pasos intermedios. (a) Respuesta lineal con pendiente $m = 1$, el sistema no suprime ninguna de las fluctuaciones que se generan en la punta del dedo. (b) Se puede observar con claridad como el sistema suprime uno de cada dos modos, *juntando* un par de máximos. (c) Respuesta en donde el sistema suprime dos de cada tres modulaciones, una de las fluctuaciones suprimidas es evidente mientras que la otra no se puede apreciar con claridad debido a que esta supresión tiene lugar en un máximo de la inestabilidad lateral. Las flechas indican dónde se suprimen las modulaciones.

b. Zona cercana a la punta del dedo.

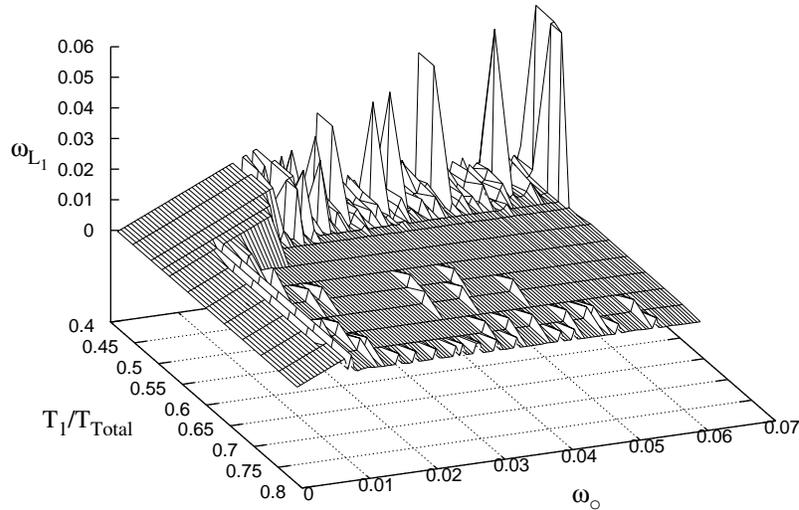


Figura 4.7: Frecuencia de respuesta medida cerca de la punta del dedo, ω_{L_1} , como función del parámetro del grado de asimetría, $\frac{T_1}{T_{Total}}$, y de la frecuencia incidente ω_o .

La figura 4.7 presenta el comportamiento global de la frecuencia de respuesta como función de las dos coordenadas de estudio. Se observa que al igual que en la frecuencia de respuesta medida lejos de la punta del dedo (figura 4.1), existe una dependencia lineal con la frecuencia incidente, ω_o , a valores bajos de la frecuencia incidente. Por otro lado para valores del parámetro del grado de asimetría mayores a 0.5 existe una zona de selección a valores altos de la frecuencia incidente. A valores bajos del parámetro $\frac{T_1}{T_{Total}}$ parecen coexistir la respuesta lineal y la zona de selección para valores altos de la frecuencia incidente.

En la zona cercana a la punta del dedo, la frecuencia de respuesta dominante de la inestabilidad lateral se divide fundamentalmente en respuesta lineal, $\omega_{L_1} = \omega_o$ y en una zona de selección en donde la frecuencia de respuesta es independiente de la frecuencia incidente. La gráfica (fig. 4.8) muestra todas las curvas de frecuencia de respuesta dominantes, ω_{L_1} , como función de la señal incidente.

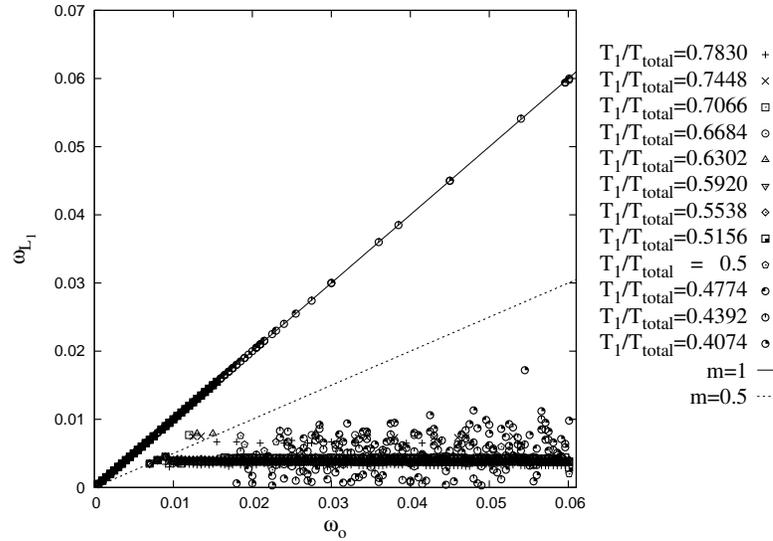


Figura 4.8: Frecuencia de respuesta, ω_{L_1} , como función de la frecuencia incidente, ω_o . Se presentan todas las frecuencias de respuesta para los distintos valores de $\frac{T_1}{T_{Total}}$. En esta gráfica se pueden apreciar tanto respuesta lineal como la zona de selección.

La respuesta lineal de la inestabilidad lateral tiende a disminuir conforme $\frac{T_1}{T_{Total}}$ aumenta. Para mostrar esta tendencia se presentan las gráficas (fig. 4.9) de las curvas de la frecuencia de respuesta para diferentes valores del parámetro del grado de asimetría.

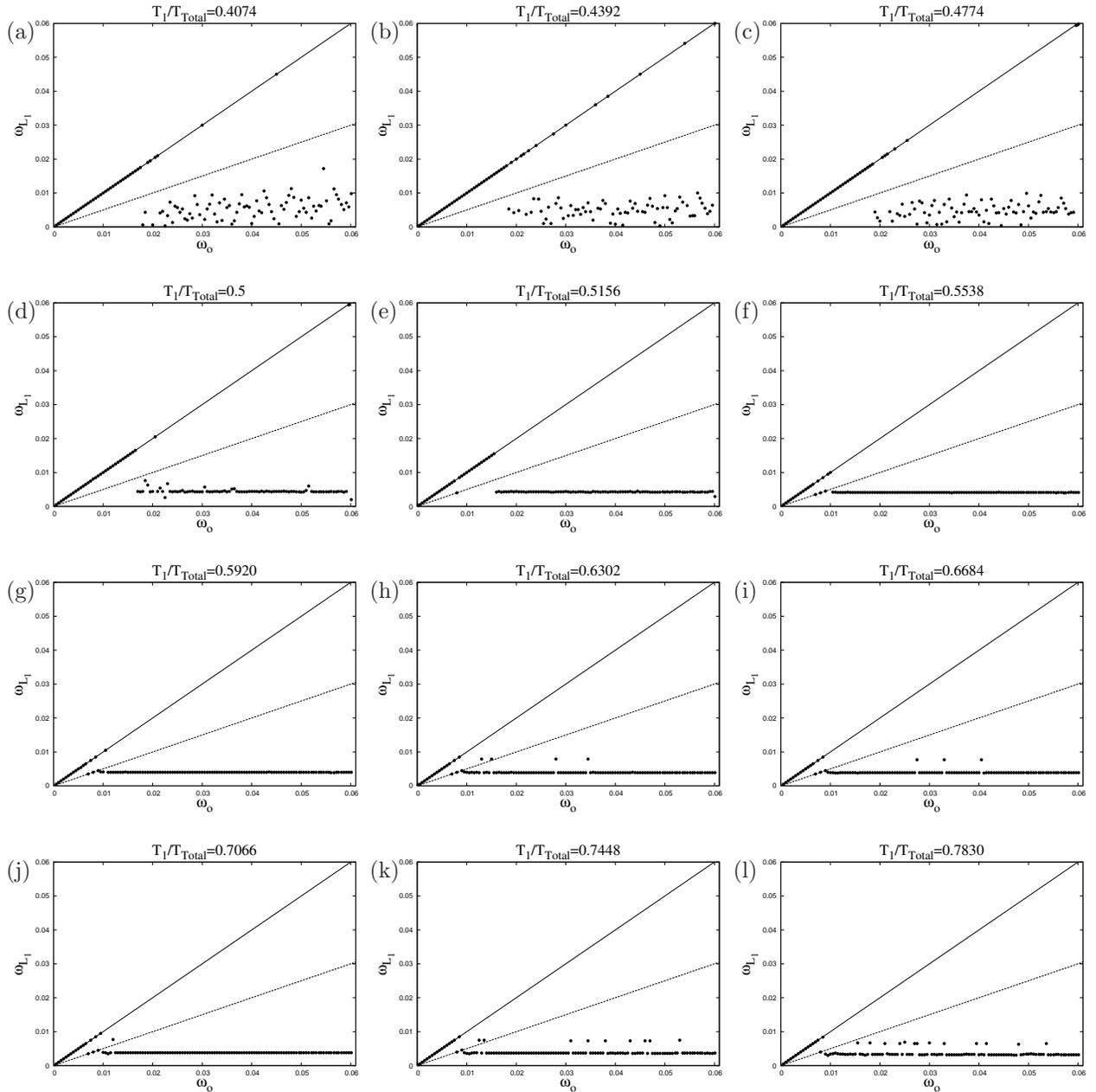


Figura 4.9: Frecuencias de respuesta para diferentes valores del grado de asimetría.

En esta gráfica se observa que la cantidad de frecuencias de respuesta que caen en la línea recta con pendiente $m = 1$ disminuye conforme aumenta $\frac{T_1}{T_{Total}}$. En la zona de selección se puede observar que conforme aumenta el valor del parámetro del grado de asimetría las respuestas que coinciden con los armónicos de la frecuencia de selección aumentan, además la dispersión de los datos decrece conforme el parámetro del grado de asimetría aumenta.

Para cuantificar la atenuación de la respuesta lineal, con el aumento del parámetro del grado de asimetría, $\frac{T_1}{T_{Total}}$, se hizo una distribución de las frecuencias de respuesta lineal (fig. 4.10).

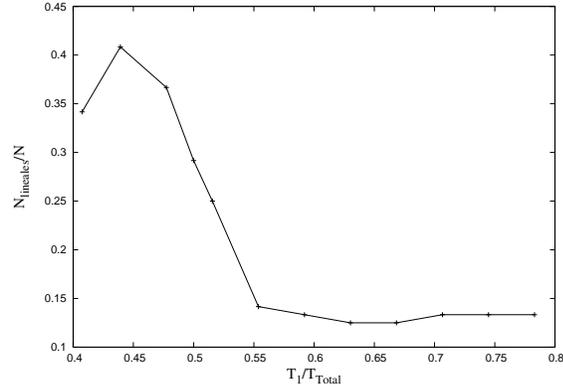


Figura 4.10: Distribución de frecuencias de respuesta de la zona lineal v.s. $\frac{T_1}{T_{Total}}$.

Los casos de respuesta lineal de ω_{L_1} decrecen conforme $\frac{T_1}{T_{Total}}$ aumenta, con un máximo en $\frac{T_1}{T_{Total}} = 0.4392$. Donde $N_{lineales}/N$ es la relación de el número de casos con respuesta lineal $m = 1$ sobre el número de casos totales.

Para comprender el comportamiento de la zona de selección de ω_{L_1} se hizo una distribución de los valores de frecuencia de respuesta y se obtuvo el promedio para cada $\frac{T_1}{T_{Total}}$ para así poder determinar con mayor precisión el valor de la frecuencia de selección. La desviación estándar se calculó para conocer la dispersión de los datos.

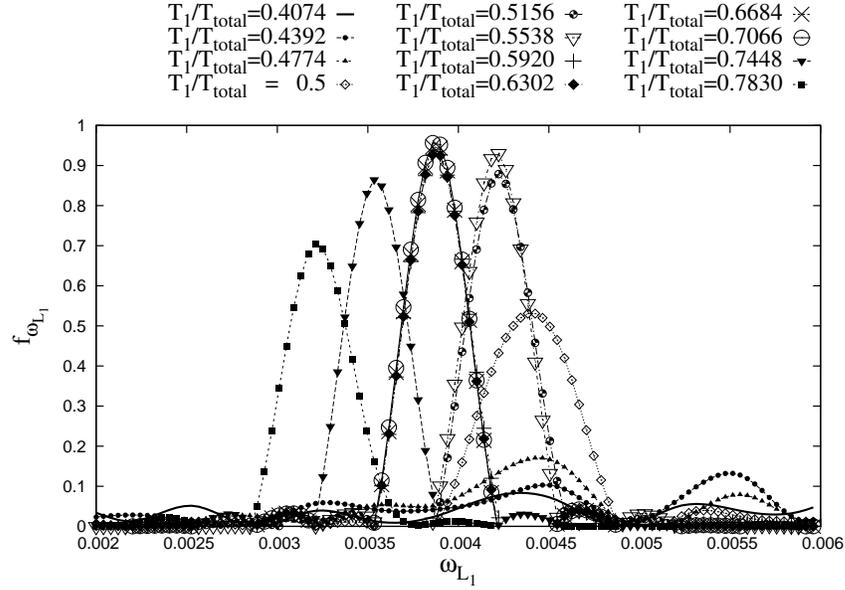


Figura 4.11: Distribución de frecuencias de respuesta en la zona de selección. La distribución de frecuencias en esta gráfica está normalizada, $f_{\omega_{L_1}} = \frac{N_i}{N_{Total}}$.

En la gráfica (fig.4.11) se aprecia que conforme $\frac{T_1}{T_{Total}}$ aumenta, la moda de cada distribución disminuye. Se hizo el promedio numérico de las frecuencias de respuesta en la zona de selección para cada $\frac{T_1}{T_{Total}}$ y coincide a *grosso modo* con la moda de cada distribución. La desviación estándar presenta un máximo, pero para la mayor parte de los valores de $\frac{T_1}{T_{Total}}$ disminuye conforme crece el grado de asimetría y se mantiene uniforme a partir de $\frac{T_1}{T_{Total}} = 0.5538$ (fig. 4.12).

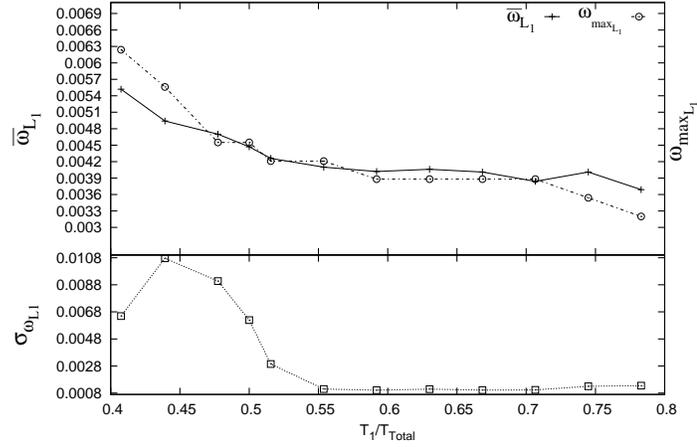


Figura 4.12: Moda, promedio y desviación estándar como función del parámetro que mide el grado de asimetría en la zona cercana a la punta del dedo. Arriba se encuentra la comparación de la moda, $\omega_{max_{L_1}}$, y del promedio, $\overline{\omega}_{L_1}$, como función de $\frac{T_1}{T_{Total}}$ en la zona de selección. Abajo la desviación estándar como función del parámetro del grado de asimetría.

4.2. Ancho promedio del dedo

Con el fin de tener el valor del ancho promedio del dedo para cada ω_o y $\frac{T_1}{T_{Total}}$, se calculó el promedio temporal de las señales $\lambda_{L_1}(t)$ y $\lambda_{L_2}(t)$. Estos promedios se reportan como λ_{L_1} y λ_{L_2} . A continuación se presentan un par de gráficas que describen el comportamiento global de la inestabilidad lateral del dedo. El ancho promedio del dedo, tanto cerca como lejos de la punta, se presenta como una fracción del ancho del canal.

La figura 4.13 muestra el ancho promedio del dedo cerca de la punta, λ_{L_1} . De la figura se observa que para cualquier valor de la frecuencia incidente, el ancho promedio del dedo aumenta conforme el parámetro del grado de asimetría, $\frac{T_1}{T_{Total}}$, crece. Por otro lado, para

cada valor del parámetro del grado de asimetría, el ancho promedio del dedo a frecuencias altas es casi independiente de la frecuencia incidente.

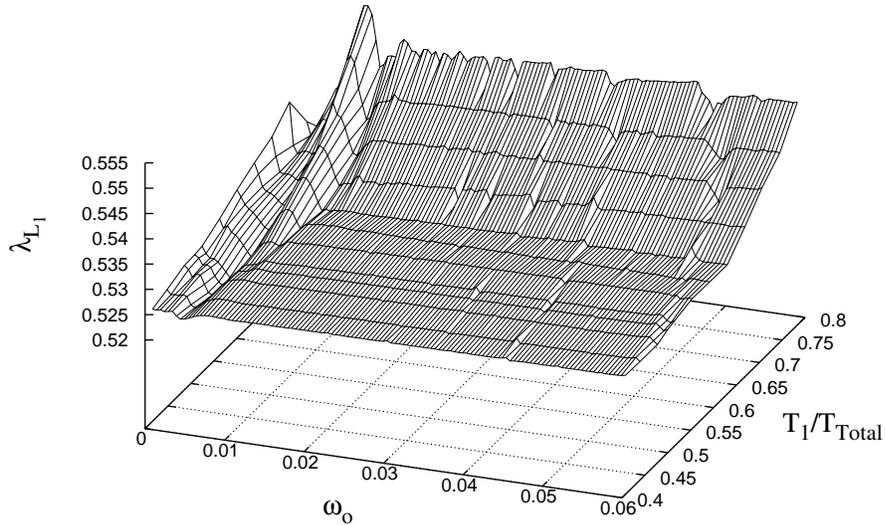


Figura 4.13: $\lambda_{L_1}(\omega_o, \frac{T_1}{T_{Total}})$

Ancho promedio del dedo como función de la señal incidente y del parámetro del grado de asimetría medido cerca de la punta del dedo.

La figura 4.14 muestra el ancho promedio del dedo medido lejos de la punta. Éste tiende a crecer conforme el parámetro del grado de asimetría crece. A frecuencias altas, el ancho promedio del dedo es casi independiente del valor de la frecuencia incidente, ω_o . Se puede observar que para valores de frecuencia incidente bajos y valores del parámetro del grado de asimetría altos, existe un comportamiento anómalo del ancho promedio del dedo, en donde el valor de λ_{L_2} es mucho más pequeño que para el resto del espectro de parámetros estudiado.

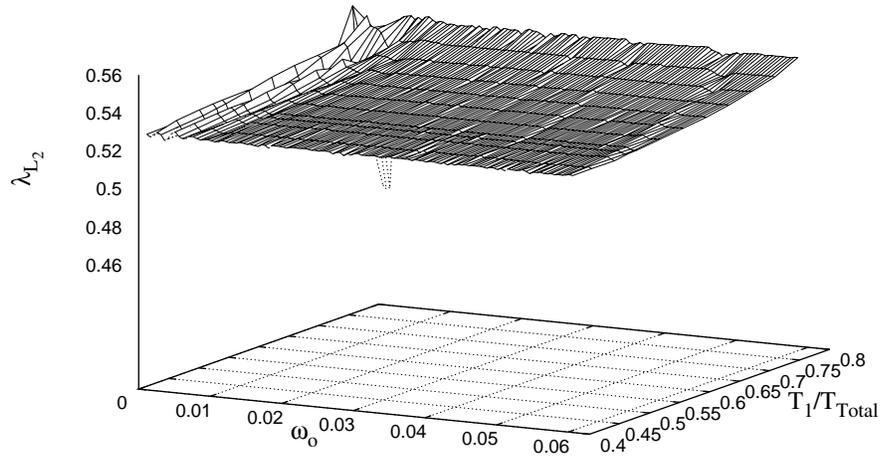


Figura 4.14: $\lambda_{L_2}(\omega_0, \frac{T_1}{T_{Total}})$
 Ancho promedio del dedo como función de la señal incidente y del parámetro del grado de asimetría medido en el cuerpo del dedo.

4.2.1. Ancho promedio del dedo como función de la frecuencia incidente

a. Cerca de la punta del dedo

El ancho promedio del dedo λ_{L_1} tiene una variación importante en las zonas lineal y de transición². Las fluctuaciones de los valores del ancho promedio están asociadas al cambio en la condición dinámica de frontera en el parámetro de orden. En la gráfica (fig. 4.15) se puede observar que al aumentar $\frac{T_1}{T_{Total}}$ las fluctuaciones en estas zonas son cada vez mayores. En la zona de selección el ancho promedio del dedo es

²Las zonas mencionadas fueron definidas en el análisis de frecuencias. La delimitación de las zonas está dada por la respuesta $\omega_{L_2}(\omega_0)$.

prácticamente independiente de la frecuencia incidente. Además es evidente que el ancho del dedo crece conforme aumenta el valor del parámetro de asimetría.

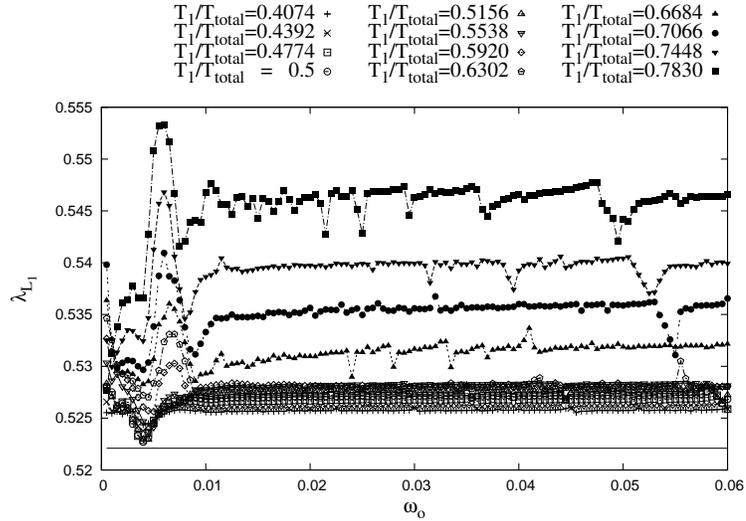


Figura 4.15: Ancho promedio, λ_{L_1} , como función de la frecuencia incidente, ω_o . El ancho promedio del dedo aumenta conforme aumenta el parámetro del grado de asimetría $\frac{T_1}{T_{Total}}$. Se puede observar con claridad cómo las curvas correspondientes a $\frac{T_1}{T_{Total}}$ más grande tienen un valor mayor de λ_{L_1} . La línea continua es el valor del ancho del dedo en estado estacionario.

b. Zona lejana a la punta del dedo.

La gráfica (fig. 4.16) muestra que al igual que en la zona cercana a la punta, el ancho promedio medido lejos de la punta del dedo, λ_{L_2} , tiene fluctuaciones importantes tanto en la zona lineal como en la de transición, una vez en la zona de selección se presentan valores prácticamente constantes de λ_{L_2} para los diferentes valores de la frecuencia incidente. El ancho promedio del dedo crece con el aumento del valor de $\frac{T_1}{T_{Total}}$.

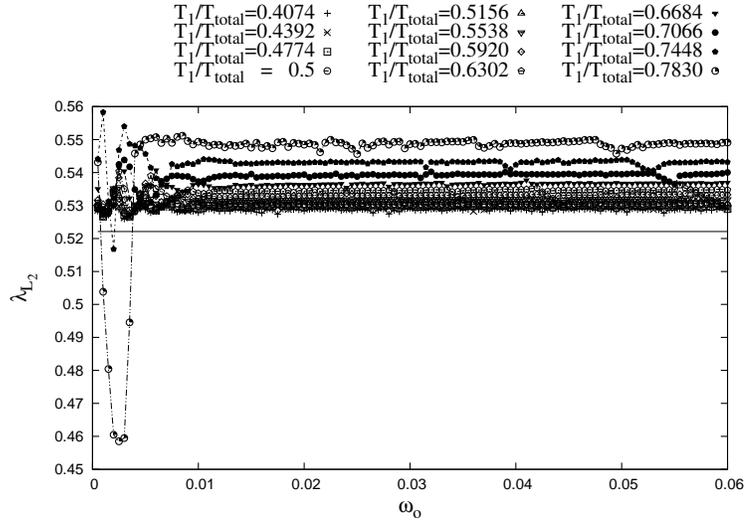


Figura 4.16: Ancho promedio del dedo, λ_{L_2} , como función de la frecuencia incidente, ω_0 .

El ancho promedio del dedo aumenta conforme aumenta el parámetro del grado de asimetría $\frac{T_1}{T_{Total}}$. La línea continua es el valor del ancho del dedo en estado estacionario.

El mínimo que se observa en la curva $\frac{T_1}{T_{Total}} = 0.7830$ a frecuencias bajas en la gráfica (fig.4.16) evita que se pueda apreciar el efecto del aumento del parámetro del grado de asimetría en el ancho promedio del dedo. Con el propósito de percibir dicho efecto se presenta la gráfica (fig. 4.17) donde sólo se considera la zona de selección.

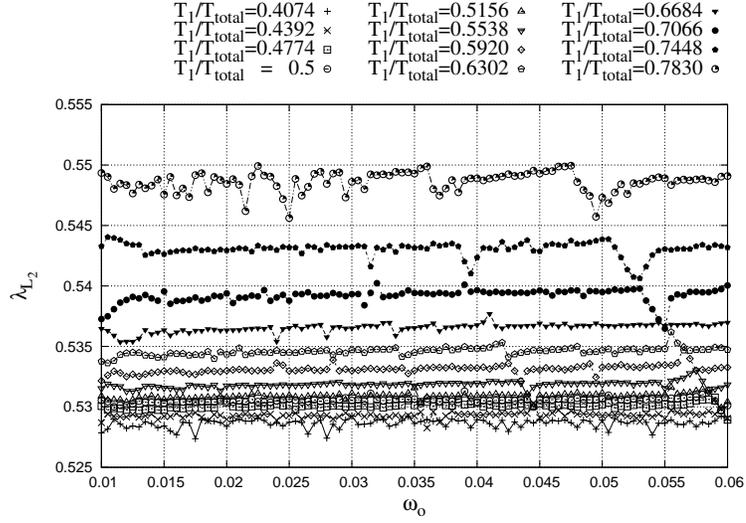


Figura 4.17: Ancho promedio del dedo λ_{L_2} como función de la frecuencia incidente ω_o en la zona de selección.

4.2.2. Ancho promedio del dedo como función del parámetro del grado de asimetría de la señal incidente

El aumento en el ancho promedio del dedo es más significativo cuando varía el parámetro del grado de asimetría. Los resultados del ancho promedio del dedo se presentan por separado para altas y bajas frecuencias incidentes³.

En la zona de bajas frecuencias existe un crecimiento en el ancho promedio del dedo conforme $\frac{T_1}{T_{total}}$ aumenta. La siguiente gráfica (fig.4.18) presenta la respuesta del ancho promedio como función del parámetro del grado de asimetría.

³La zona de bajas frecuencias corresponde tanto a la zona de respuesta lineal como a la de transición en el análisis de la frecuencia de respuesta ω_{L_2} , mientras que la zona de frecuencias altas corresponde a la de selección.

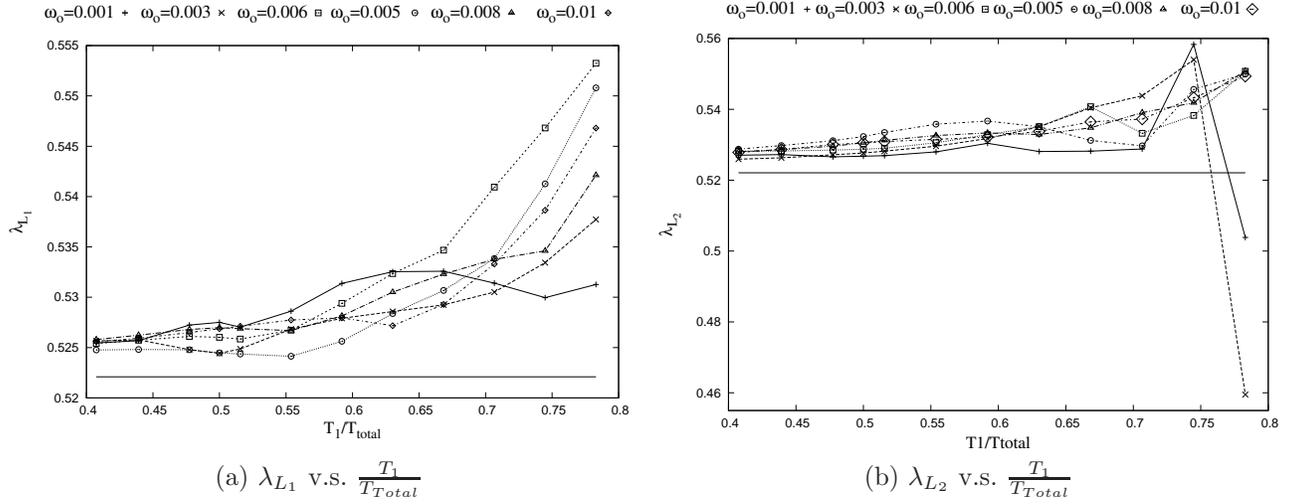


Figura 4.18: Ancho promedio del dedo como función de $\frac{T_1}{T_{Total}}$ a bajas frecuencias.

(a) Se puede observar que, en general, cerca de la punta del dedo, el valor del ancho promedio crece conforme aumenta $\frac{T_1}{T_{Total}}$, excepto para $\omega_o = 0.001$. En (b) se presenta el comportamiento del ancho promedio del dedo en la zona lejana a la punta, λ_{L_2} . En esta zona también hay un aumento de λ_{L_2} conforme $\frac{T_1}{T_{Total}}$ crece y existe un máximo absoluto para el ancho que corresponde al valor de $\omega_o = 0.001$ y $\frac{T_1}{T_{Total}} = 0.7448$. La línea continua señala el valor del ancho del dedo en estado estacionario.

En la zona de frecuencias altas existe una relación de crecimiento tanto en λ_{L_1} (fig. 4.19a), como en λ_{L_2} (fig. 4.19b), con respecto al parámetro del grado de asimetría. Es importante señalar que el ancho del dedo en esta zona ya no depende en gran medida de la frecuencia incidente. La variación de λ_{L_1} y λ_{L_2} depende principalmente del valor del parámetro del grado de asimetría.

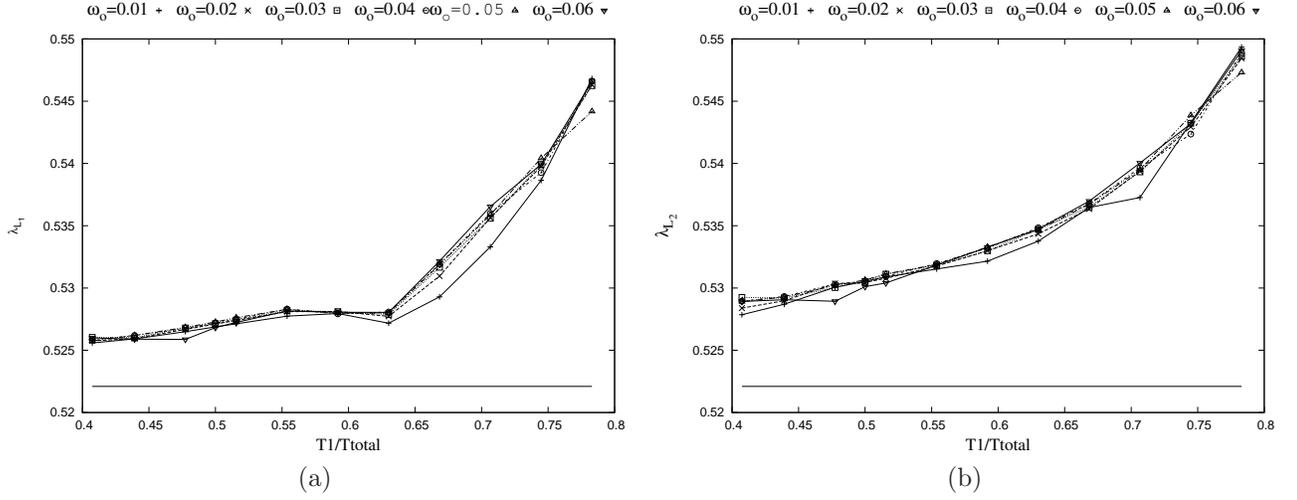


Figura 4.19: Ancho promedio del dedo como función del parámetro del grado de asimetría en la zona de selección. (a) λ_{L_1} como función de $\frac{T_1}{T_{Total}}$. (b) λ_{L_2} como función de $\frac{T_1}{T_{Total}}$. Debido a que el comportamiento del ancho promedio del dedo en la zona de selección casi no cambia, sólo se incluyeron las curvas correspondientes a algunos valores de la frecuencia incidente. La línea continua es el valor del ancho del dedo en estado estacionario.

Se calculó el promedio en frecuencia, $\bar{\lambda}$, y la desviación estandar de los valores del ancho promedio para cada $\frac{T_1}{T_{Total}}$. $\bar{\lambda}$ es el promedio en frecuencia de la zona de selección para cada valor del parámetro del grado de asimetría, *i.e.*,

$$\bar{\lambda}_{L_1, L_2} = \langle \lambda_{L_1, L_2} \rangle_{\omega_0},$$

en donde λ_{L_1, L_2} es el promedio de la señal temporal, en donde λ_{L_1} se refiere a ancho cerca de la punta del dedo y λ_{L_2} se refiere a ancho lejos de la punta del dedo. El rango de las frecuencias consideradas en este promedio es $0.01 < \omega_0 \leq 0.06$, es decir, la zona de selección.

Se confirmó que el ancho promedio en la zona de selección crece conforme la asimetría del parámetro de orden aumenta. Este resultado se observa tanto en la zona cercana a la punta del dedo como en la lejana. (fig. 4.20).

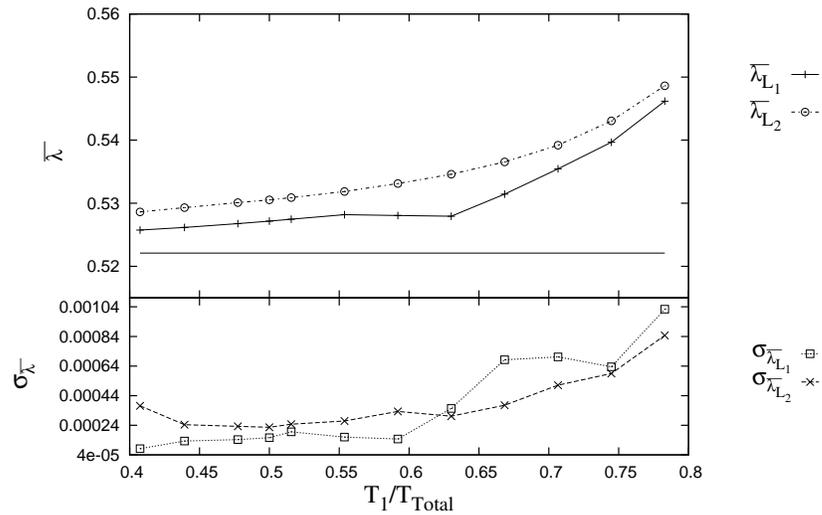


Figura 4.20: Promedio y desviación estándar de $\bar{\lambda}$ en la zona de selección. Arriba se muestra el comportamiento general del ancho promedio del dedo en la zona de selección. Abajo se grafica la desviación estandar de los anchos promedio de la zona de selección. La línea continua es el valor del ancho del dedo en estado estacionario.

En la gráfica (fig. 4.20) se puede observar que en la zona de selección el ancho promedio del dedo aumenta en las dos distancias de medición L_1 y L_2 . La desviación estándar del ancho promedio, cerca y lejos de la punta del dedo incrementa notablemente conforme $\frac{T_1}{T_{Total}}$ aumenta.

En la zona de selección el ancho promedio del dedo aumenta de manera monótona tanto en la zona cercana como en la zona lejana a la punta del dedo. En la gráfica (fig. 4.21) se

muestra el incremento porcentual del ancho promedio del dedo con respecto al valor de estado estacionario para cada valor del parámetro del grado de asimetría, esto es,

$$I(\%) = \frac{\bar{\lambda} - \lambda_{E.E}}{\lambda_{E.E}},$$

en donde $I(\%)$ es el incremento porcentual del ancho del dedo, $\lambda_{E.E}$ es el ancho del dedo en estado estacionario y $\bar{\lambda}$ es el promedio en frecuencia en la zona de selección.

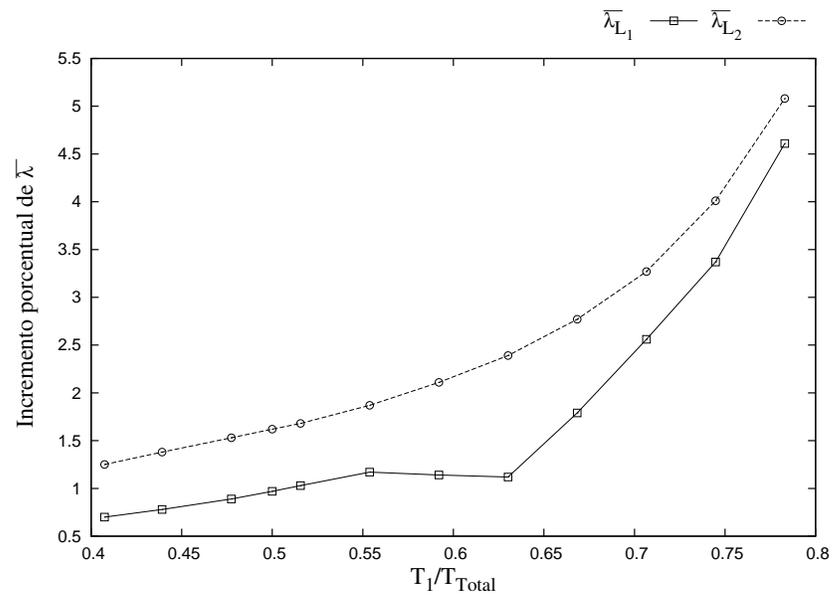


Figura 4.21: Incremento porcentual de $\bar{\lambda}$ como función de $\frac{T_1}{T_{Total}}$.

CONCLUSIONES

La frecuencia de respuesta medida lejos de la punta del dedo presenta, al igual que en el caso de la señal oscilatoria senosoidal [15], tres zonas de respuesta como función de la frecuencia incidente, ω_o : zona lineal, zona de transición y zona de selección. Los dominios de estas zonas son invariantes ante el valor del parámetro del grado de asimetría $\frac{T_1}{T_{Total}}$.

La frecuencia de respuesta medida en la zona cercana a la punta del dedo, a diferencia de [15], tiene dos comportamientos como función de la frecuencia incidente; una zona de respuesta lineal a frecuencias bajas y una zona de selección a frecuencias altas. Conforme el parámetro del grado de asimetría aumenta, la cantidad de frecuencias de respuesta lineales disminuye.

A frecuencias bajas, se encontró un máximo en el ancho promedio del cuerpo del dedo con un valor de $\lambda_{L_2} = 0.5583$ con $\omega_o = 0.001$ y $\frac{T_1}{T_{Total}} = 0.7448$. Esto representa un aumento de 6.48 % con respecto al valor de estado estacionario. Este resultado es significativo ya que el ancho del dedo está reportado como una fracción del ancho del canal. Debido a que la cantidad del fluido desplazado está íntimamente ligada al ancho del dedo en un medio confinado, esto también significa un mayor porcentaje de volumen desplazado y por tanto un mejor vaciado del canal.

También, a bajas frecuencias, se encontró un mínimo en el ancho promedio del dedo para $\frac{T_1}{T_{Total}} = 0.7830$. Este valor es incluso menor al ancho del dedo en estado estacionario. Para efectos del desplazamiento de crudo, este resultado es importante ya que se encuentran condiciones del gradiente de presión para los cuales el efecto de la señal oscilatoria y asimétrica no es el deseado.

Se encontró que, de manera general, el ancho promedio en el cuerpo del dedo crece al imponer un gradiente de presión asimétrico. Además, en la zona de selección, que es la zona de altas frecuencias, este incremento es mayor conforme aumenta el grado de asimetría del gradiente de presión.

La relación entre el valor del ancho promedio del dedo y el parámetro del grado de asimetría en la zona de selección es prácticamente independiente de la frecuencia incidente, es decir, un gradiente de presión con el menor valor de ω_o de la zona de selección dará lugar a un dedo con el mismo ancho promedio que aquél con un mayor valor de ω_o . La implicación tecnológica de este resultado es que al elegir el menor valor de ω_o que cae en esta zona se tendrá un ahorro en el costo energético del desplazamiento del fluido viscoso.

SELECCIÓN DE FRECUENCIAS DOMINANTES

El estudio de frecuencias en este trabajo se hizo mediante la transformada de Fourier. La señal de la condición dinámica de frontera en $\phi_B(t)$ se transformó al espacio de frecuencias, en la gráfica (fig.A.1) se muestra la señal temporal y la transformada de la misma.

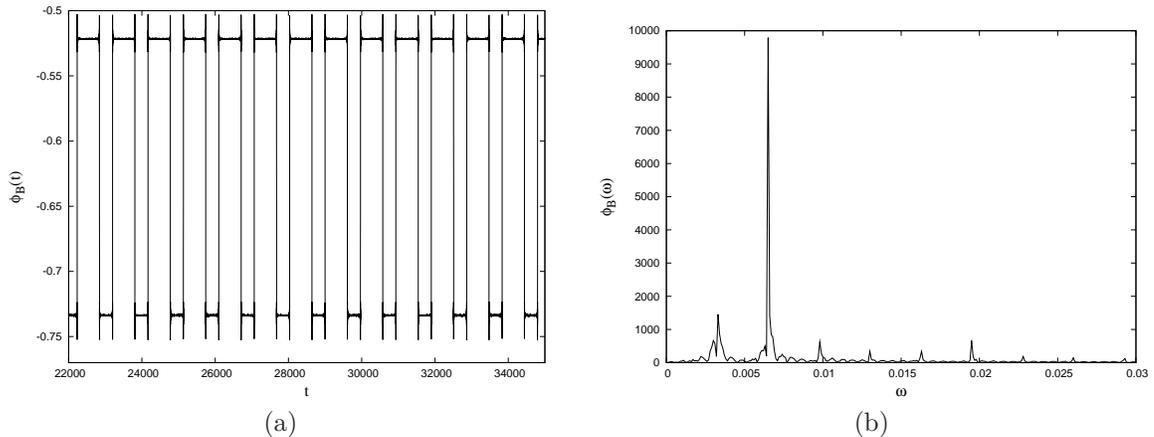


Figura A.1: Señal incidente de la condición dinámica de frontera
(a) Señal temporal de la condición dinámica de frontera. (b) La transformada de la señal.

Una vez en el dominio de las frecuencias se puede observar con claridad cual es la frecuencia dominante en la condición dinámica de frontera. El mismo procedimiento se repite para el ancho del dedo medido cerca de la punta del dedo (fig.A.2) y para el ancho del dedo medido lejos de la punta del dedo (fig.A.3)

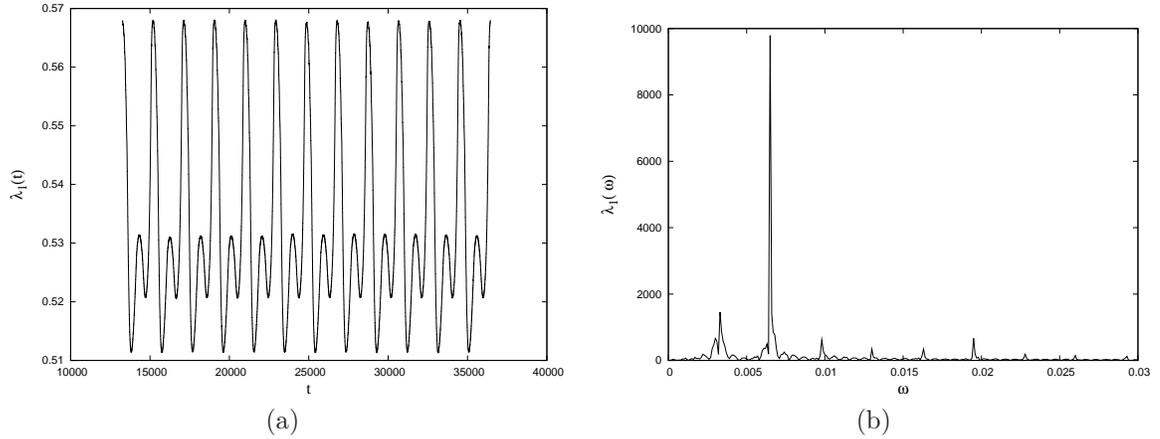


Figura A.2: Respuesta temporal del ancho medido cerca de la punta del dedo
 (a) Señal temporal de la inestabilidad lateral. (b) Transformada de la inestabilidad lateral

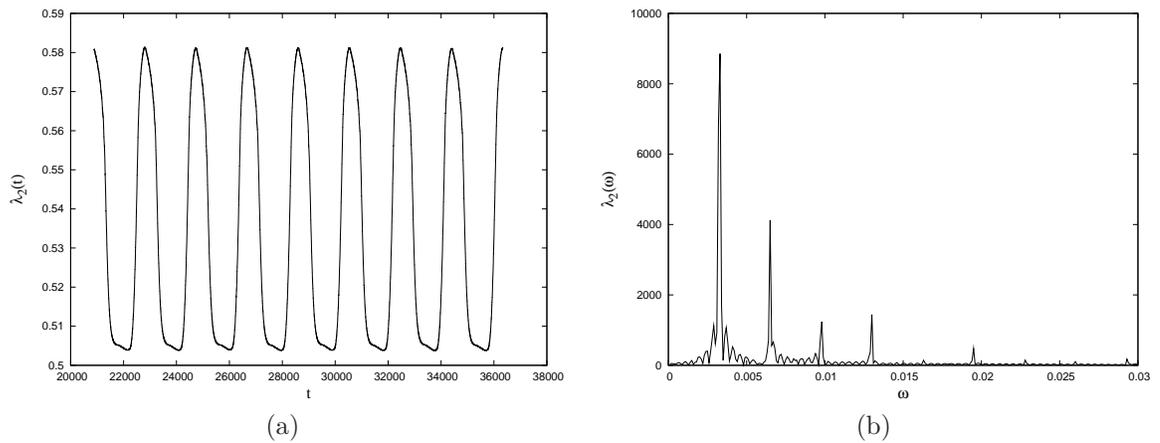


Figura A.3: Respuesta temporal del ancho medido lejos de la punta del dedo
 (a) Señal temporal de la inestabilidad temporal. (b) Transformada de la inestabilidad lateral

Las señales transformadas permiten ver con facilidad cuales son las frecuencias que componen la señal de respuesta y cuál es frecuencia dominante, ésta corresponde al pico de mayor magnitud. De esta manera se hicieron las gráficas para el análisis de frecuencias en la mayoría de los casos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M.C. Cross, P.C. Hohenberg. *Rev.Mod.Phys*, **65**, 851, (1993).
- [2] R.C. Ewing, G. Kocurek. *Geomorphology*, 114:175, 2010.
- [3] Matthew Evan Thrasher. *Geometry and dynamics of fluid-fluid interfaces*. University of Texas, 2007.
- [4] Anke Lindner. *L'instabilité de Saffman-Taylor dans les fluides complexes: relation entre les propriétés rhéologiques*. Tesis de Doctorado. Universidad de París, París, 2000.
- [5] P.G. Saffman, Geoffrey Taylor. *Proc.R.Soc.Lond.A*, **245** 312, (1958).
- [6] R. Ledesma-Aguilar, M. Quevedo-Reyes, E. Corvera Poiré, A.Hernández-Machado. *Phys.Rev.E*, **71** 016312, (2005).
- [7] Aimee Torres Rojas. *Gradientes de presión asimétricos en el desplazamiento de fluidos viscosos*. Tesis de Licenciatura. UNAM, México, 2009.
- [8] M. Torralba, J.Ortín, A. Hernández-Machado, E. Corvera Poiré. *Phys.Rev. E*, **77** 036207, (2008).

- [9] M. Quevedo-Reyes, A. Hernández-Machado, and E. Corvera Poiré. *Phys.Rev.E*, **73** 066308, (2006).
- [10] M. Torralba, J. Ortín, A. Hernández-Machado and E. Corvera Poiré. *Phys.Rev.E*, **73** 046302, (2006).
- [11] W.W. Mullins and R.F. Sekerka. *J. Appl. Phys.*, **34** 323, (1963).
- [12] R. Folch, J. Casademunt, A. Hernández-Machado, L. Ramírez-Piscina. *Phys. Rev. E*, **60** 1724, 1999.
- [13] R. Folch, J. Casademunt, A. Hernández-Machado, L. Ramírez-Piscina. *Phys. Rev. E*, **60** 1734, (1999).
- [14] A.Hernández-Machado, A.M. Lacasta, E.Mayoral, E.Corvera Poiré. *Phys. Rev. E*, **68** 046310, (2003).
- [15] Rodrigo Ledesma Aguilar. *Interfases en sistemas dependientes de la frecuencia. Tesis de Licenciatura*. UNAM, México, 2009.
- [16] P.C Halperin and B.I Hohenberg. *Rev. Mod. Phys.*, **49** 435, (1977).