UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL AXIOMA DE ANTIFUNDACIÓN. UN ACERCAMIENTO A LOS CONJUNTOS NO BIEN FUNDADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

BERENICE MARTÍNEZ BARONA

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO

2011

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Martínez
   Barona
   Berenice
   55 95 52 95
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   301502609

2. Datos del tutor
   M. en C.
   Rafael
   Rojas
   Barbachano

3. Datos sinodal 1
   Dr.
   José Alfredo
   Amor
   Y Montaño

4. Datos sinodal 2
   Dr.
   Carlos
   Torres
   Alcaraz

5. Datos sinodal 3
   Dr
   Ángel
   Tamariz
   Mascarúa

6. Datos sinodal 4
   M. en C.
   Manuel Gerardo
   Zorrilla
   Noriega

7. Datos del trabajo escrito
   El axioma de antifundación.
   Un acercamiento a los conjuntos no bien fundados
   107 p
   2011

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La noción de conjunto es tan común que cualquiera pensaría ser capaz de dar una definición exacta, pero seguramente al hacerlo se de cuenta que no es tan sencillo. En matemáticas, una definición formal llevó tiempo y más de un problema. Históricamente se ha considerado a Cantor como el primero en desarrollar, de manera formal, la teoría de los conjuntos. En esta teoría se define a un conjunto como una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento. Sin embargo, una vez planteada la teoría, no tardaron en aparecer contradicciones. El mismo Cantor y más tarde Cesare Burali-Forti, encontraron un problema con el conjunto de todos los ordinales, conocido como la paradoja de Burali-Forti. Aunque al mismo tiempo habían definiciones alternativas de conjunto, como es el caso de la definición dada por Gottlob Frege, éstas también caían en contradicciones, como sucedió con la paradoja de Russell en 1901, la cual hizo evidente la necesidad de replantear o cambiar ciertos aspectos de estas teorías. Dicha paradoja fungió como motor para el análisis sobre la relación de pertenencia entre conjuntos, cosa que se había dejado de lado hasta entonces. En particular, llevó a la pregunta de la posibilidad de la existencia de un conjunto que se tuviera a él mismo como elemento.

A partir de todo esto surge la importancia de la axiomatización de la teoría, buscando evitar paradojas o contradicciones. En 1908 Zermelo empieza con los primeros intentos por formalizar la teoría, dejando de lado la posibilidad de la autoreferencia, a pesar de que ésta no era la causa de la paradoja de Russell.

En 1917 Dimitri Mirimanoff formuló una distinción fundamental entre conjuntos bien fundados y no bien fundados, incluso dio una noción de isomorfismo entre conjuntos, posiblemente, no bien fundados. Sin embargo no postuló ningún axioma sobre conjuntos no bien fundados, ni sobre conjuntos bien fundados. Fue hasta 1925 que von Neumann formula por vez primera, de manera explícita, un axioma expresando que todos los conjuntos son bien fundados. Sin embargo en 1929 reformula dicho axioma el cual resulta ser esencialmente el mismo que el presentado por Zermelo en 1930, que es justamente el axioma de buena fundación conocido actualmente. La teoría axiomática planteada por Zermelo tiene como idea subyacente la jerarquía acumulativa de los conjuntos, la cual se basa en la construcción de un conjunto a partir de sus elementos, los cuales, por tanto, deben tenerse definidos de antemano. No es posible entonces considerar una sucesión infinita de conjuntos que consista en un conjunto, un elemento de dicho conjunto, un elemento del elemento, un elemento del elemento del elemento y así sucesivamente.

Alrededor de 1950, de manera separada, tanto Ernst Specker como Paul Bernays probaron la independencia relativa del axioma de buena fundación, de manera que éste resulta ser un axioma restrictivo puesto que es equivalente a que todos los conjuntos sean bien fundados a pesar de que, de no ser así, no se cae en contradicción alguna. Pareciera entonces que lo que llevó a dicha restricción fue, por un lado la construcción tan sencilla y hasta cierto punto natural por su consistencia con la idea intuitiva de la formación física de un conjunto, y por el otro, el hecho de que dentro de las matemáticas sólo fuera necesario considerar conjuntos bien fundados.

A partir de 1960 comienzan a haber distintos axiomas que permiten la existencia de conjuntos no bien fundados, algunos de los cuales utilizaban la técnica de construcción de modelos iniciada por Bernays y Specker[1].

Buscando una simplificación al modelar en la teoría de los conjuntos, situaciones circulares en ciencias de la computación, Peter Aczel da una negación del axioma de buena fundación, el axioma llamado axioma de antifundación, o AFA, el cual permite, de manera ingeniosa y sencilla, la construcción y por lo mismo, la existencia de conjuntos no bien fundados. El objetivo principal de este trabajo es el de presentar de la manera más clara posible, las construcciones hechas por Aczel. En la primera parte se introducen las nociones necesarias para enunciar el axioma de antifundación. Así mismo, luego de enunciarlo y habiendo construido, a partir de éste, conjuntos no bien fundados, veremos algunas de sus características más importantes.

En la segunda parte probaremos la consistencia relativa de $ZFC^- + AFA$, es decir, la consistencia de la teoría formada a partir de los axiomas de

[1] En el apéndice E se da una breve semblanza sobre otras negaciones del axioma de buena fundación.

ZFC sin el axioma de buena fundación, asumiendo la consistencia de ZFC[2]. Con la intención de que este trabajo sea lo más autocontenido posible, hemos incluido un apéndice con los requerimientos mínimos sobre teoría de modelos y pruebas de consistencia dentro de la teoría de los conjuntos.

En la tercera parte se expone una forma alternativa de abordar a los conjuntos no bien fundados (esta vez dentro de un universo con urielementos) utilizando un axioma llamado Lema de solución. Veremos también su relación con AFA. Dentro del mismo se enuncia una nueva axiomática, consistente con la de ZFC, que permita la posibilidad de que un conjunto tenga como elemento a un urielemento, es decir, a un objeto que no es un conjunto.

Por último, en el capítulo cinco presentamos una aplicación del lema de solución en teoría de juegos, resolviendo lo que se conoce como la paradoja del Hiperjuego. Tanto en esta parte como en el resto del trabajo, se presentan los elementos necesarios para que la lectura sea lo más sencilla y clara posible, sin embargo se espera que el lector tenga conocimientos previos en la teoría de los conjuntos y en la lógica matemática.

[2] En el apéndice A se enuncian los axiomas que conforman la teoría de ZFC.

Capítulo 2

Axioma de antifundación

En esta primera parte se busca desarrollar el axioma de antifundación, así como algunos de los principales conceptos que se requieren para enunciarlo, de acuerdo con la construcción de Peter Aczel, en la cual con ayuda de gráficas, resulta claro cómo dicho axioma garantiza la existencia de conjuntos no bien fundados.
Recordemos que la axiomática de Zermelo Fraenkel[1] tiene como idea subyacente a la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados. Ésta parte de la idea intuitiva de la construcción de los conjuntos a partir de sus elementos, de manera que para construir un conjunto, es necesario "tener"de antemano a sus elementos. Así, en la jerarquía acumulativa se parte de una colección (posiblemente vacía) de objetos que no son conjuntos ni clases, a los cuales llamamos urielementos, y mediante un proceso iterativo se van construyendo los conjuntos. Esta jerarquía acumulativa consta de estratos cuyos elementos son construidos en un estrato inferior. En el primero se encuentran únicamente todos los urielementos, en el siguiente están todas las colecciones posibles de urielementos y así sucesivamente de manera que si E es un estrato cualquiera entonces éste consta de todas las colecciones de objetos que se pueden formar con los elementos de los estratos anteriores. De esta manera los conjuntos que resultan de este proceso tienen un principio respecto a la relación de pertenencia, es decir, se trata de conjuntos bien fundados. Buscando entonces formar conjuntos no bien fundados debemos también tener una nueva idea de cómo construir los conjuntos.

[1]Ver apéndice A.

2.1. Gráficas y conjuntos

Como mencionamos, para poder enunciar el axioma de anifundación utilizaremos gráficas, en particular gráficas dirigidas, llamadas digráficas, de manera que podamos relacionar adecuadamente un conjunto con una gráfica. Para esto, a cada vértice de la gráfica se le asocia un conjunto y si un conjunto y es elemento de un conjunto x, entonces se les une por medio de una flecha de x a y, es decir, $y \leftarrow x$ si $y \in x$. Por ejemplo, de acuerdo con la definición de Von Neumann, en la cual un natural es el conjunto de naturales anteriores, consideremos los primeros cuatro números naturales $0 = \phi$, $1 = \{\phi\}$, $2 = \{\phi, \{\phi\}\}$, $3 = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ a los cuales podemos asociarles las gráficas de la figura 2.1. Un conjunto puede ser representado

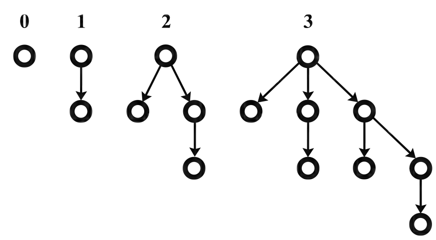

Figura 2.1: Diagramas correspondientes a las gráficas del 0, 1, 2 y 3, respectivamente.

de más de una forma; por ejemplo, en las gráficas anteriores vemos que en el caso del 2, el 0 está representado en dos vértices y en la gráfica de 3, el 0 está representado 4 veces y el 1 dos. Podemos entonces eliminar vértices de manera que cada conjunto esté representado por un solo vértice de la gráfica manteniendo las aristas correspondientes. De este modo las siguientes gráficas son también una representación de los conjuntos 2 y 3 respectivamente: ¿Cuál es entonces la gráfica de un conjunto? Una gráfica es una pareja or-

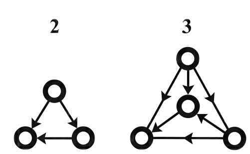

Figura 2.2: Otras pinturas de 2 y 3 respectivamente.

denada $g = (v_g, r_g)$ donde $v_g \in V$ y $r_g \subseteq v_g \times v_g$. A los elementos de v_g les llamaremos vértices y a los elementos de r_g aristas. Si $(a', a) \in r_g$ entonces escribiremos $a' \leftarrow a$, y diremos que a' es un hijo de a. A la pareja ordenada

$(a', a) \in r_g$ le llamaremos arista (como es una pareja ordenada utilizamos flechas con las cuales se distingue el orden). Entonces podemos denotar a la gráfica como $g = (v_g, \leftarrow)$.
Un camino es una cadena, finita o infinita de vértices unidos por aristas. De tal manera que los vértices $x_0, x_1, x_2, ...$ forman un camino si $... \leftarrow x_2 \leftarrow x_1 \leftarrow x_0$. Formalmente, un camino es una sucesión $\langle x_i \rangle_I$ en v_g tal que $I \in \omega^+$ y:

$$\forall m \in \omega [x_{m^+} \in \langle x_i \rangle \Rightarrow x_{m^+} \leftarrow x_m].$$

Sea g una gráfica, denotaremos con T_g el conjunto de todos sus caminos posibles, es decir, $T_g = \{t \mid t \text{ es un camino en } g\}$. Por ejemplo, $t_0 = \phi$ es un camino, el camino vacío, para cualquier gráfica. Si consideramos una gráfica que conste de sólo un vértice, $g_1 = (\{p\}, \phi)$ entonces los únicos caminos posibles son el camino vacío, y el camino $t_{p_1} = \langle p \rangle$ [Figura 2.3]. ¿Cuáles son entonces los caminos posibles si a esta última gráfica le agregamos la arista (p, p)? [Figura 2.3]. Es decir, consideremos ahora la gráfica $g_2 = \big(\{p\}, \{(p, p)\}\big)$, en la cual $t_{p_0} = \phi$ y t_{p_1} son caminos. De hecho, t_{p_0} y t_{p_1} (para toda $p \in v_g$) serán siempre caminos en una gráfica; es por esto que los llamaremos caminos triviales de la gráfica g_1 (con p, cualquier vértice de ésta). Además, $t_{p_2} = \langle p, p \rangle$ y $t_{p_3} = \langle p, p, p \rangle$ son también caminos. De manera que, si generalizamos estos dos últimos casos se llega a que todos los caminos posibles de g_2 son t_{p_0}, $t_{p_\omega} = \langle p \rangle_\omega$ y $t_{p_n} = \langle p \rangle_1^n$ para toda $n \in \omega - \{0\}$. De acuerdo con lo anterior, dada una gráfica g, denotaremos con T_g^p a todos los caminos posibles en una gráfica, que empiezan en p. Otros ejemplos pueden

Figura 2.3: $g_1 = (\{p\}, \leftarrow_g)$ y $g_2 = (\{p\}, \leftarrow_{g'})$.

ser, $g_3 = \big(\{p, q\}, \{(q, p)\}\big)$ y $g_4 = \big(\{p, q\}, \{(q, p), (p, q)\}\big)$.
En g_3 podemos ver que los cuatro caminos posibles son t_{p_0}, t_{p_1}, t_{q_1} y el camino $t_{pq} = \langle p, q \rangle$.

En el caso de g_4, al g_3 ser una subgráfica de g_4, es decir, $g_3 \subseteq g_4$ y $\leftarrow_{g_r} \subseteq \leftarrow_{g_4}$, se tienen los caminos de g_3,
$t_{qp} = \langle q, p \rangle$, y los demás caminos posibles son un caso parecido al que teníamos en g_2 sólo que esta vez pueden empezar en p o en q y ser tan grandes como se quiera. Por ejemplo, de manera general definamos la sucesión con términos en $\{p, q\}$, $\langle x_i \rangle_I$ con $I \in \omega^+$ como sigue:

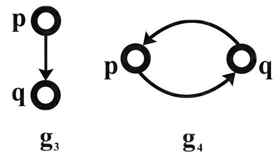

Figura 2.4: $g_3 = \big(\{p,q\}, \leftarrow_{g_3}\big)$ y $g_4 = \big(\{p,q\}, \leftarrow_{g_4}\big)$

$$x_0 = p$$
y

$$x_{n^+} = \begin{cases} p & \text{si } x_n = q \\ q & \text{si } x_n = p \end{cases}$$

Análogamente se pueden construir los caminos empezando en q.

Llamaremos ciclo a un camino cerrado, es decir, sea $t \in T_g$, $t = \{x_i\}_I$ es cerrado si y sólo si existe $m \in I$ tal que $m \neq 0$ y $x_m = x_0$. Obsérvese que los ciclos pueden ser vistos como caminos infinitos.

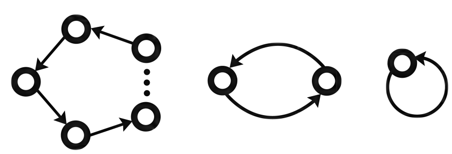

Figura 2.5: Ejemplos de ciclos.

Una vez establecida la definición de gráfica es preciso ver cuál es su relación con los conjuntos o más bien, cómo podemos relacionarlos, así como se hizo en un principio con los primeros cuatro números naturales. Para esto necesitamos primero definir un concepto fundamental, el de decoración.

Se le llama decoración de una gráfica a una asignación de un conjunto a cada vértice de ésta; de tal manera que los elementos del conjunto asignado a un vértice coinciden con los asignados a los hijos de dicho vértice. Es decir, una decoración, d, de una gráfica es una función $d : v_g \longrightarrow V$ de tal manera que $d(x) = \{d(q) \mid q \leftarrow x\}$ para toda $x \in v_g$. De este modo la imagen de v_g bajo cualquier decoración d es siempre un conjunto; ¿ dada una gráfica g, $d[v_g]$ es justamente el conjunto asociado a ésta? Regresemos a la gráfica $g = (\{a,b\}, \{(b,a)\})$. Anteriormente le habíamos asignado el número natural

1, visto de manera conjuntista ya que, dada cualquier decoración d de g,

$$\begin{aligned} d(a) &= 1 \\ d(b) &= 0. \end{aligned}$$

Pero de este modo no obtenemos lo deseado puesto que $d[v_g] = 2$. Sin embargo la imagen de a bajo d es justamente el conjunto que queríamos relacionar con la gráfica. Si procedemos de este mismo modo con las demás gráficas de la figura 2.1 llegamos a un caso similar, en donde hay un vértice cuya imagen bajo d es justamente el número natural deseado, a pesar de que $d[v_g]$ no lo es. Definimos entonces una gráfica punteada, g_p, como una gráfica con un vértice distinguido p, al cual llamaremos la cabeza de la gráfica. Formalmente, una gráfica g_p es una gráfica punteada si y solamente si $g_p = (v_g, \leftarrow, p)$ donde $g = (v_g, \leftarrow)$ es una gráfica y $p \in v_g$.
El objetivo aquí es señalar el vértice, digamos x_0, cuya imagen bajo la decoración sea justamente el conjunto que se busca representar con la gráfica. Fijándonos en la definición de decoración vemos que los elementos de la imagen de x_0 bajo d corresponden a los conjuntos asignados a los hijos de x_0 y así sucesivamente. Ahora tiene sentido preguntarnos si hay un camino finito $x_n \leftarrow ... \leftarrow x_1 \leftarrow x_0$ de x_0 a cualquier vértice x_n de la gráfica. Esto nos lleva a la siguiente definición.
Una gráfica punteada g_p es accesible (gpa) si y sólo si $\forall a \in v_g$ existen $n \in \omega$ y $t = \{x_i\}_0^n \in T_g^p$ con $x_n = a$.
Si dicho camino siempre es único se dice que la gpa es un árbol y la cabeza p es su raíz.
Por ejemplo, $h_0 = (\{0\}, \phi, 0)$, $h_1 = (\{0,1\}, \in, 1)$, $h_2 = (\{0,1,2\}, \in, 2)$ y $h_3 = (\{0,1,2,3\}, \in, 3)$ son todas gráficas punteadas accesibles. Nótese que, por dar un ejemplo, $h_2' = \big(\{0,1,2\}, \in, 1)$ no lo es.

Por comodidad, en general, en los diagramas la cabeza estará siempre situada hasta arriba de la gráfica, de manera que se distinga del resto de los vértices.

Una gpa g_p es pintura de un conjunto si existe una decoración de g_p en la cual el conjunto es asignado a la cabeza. Es decir, g_p es pintura del conjunto a si y sólo si existe una decoración d tal que $d(p) = a$. Al conjunto a le llamaremos el valor de d.

Es clara ahora la importancia de los conceptos de decoración y pintura, ya que es así como relacionamos las gráficas con los conjuntos; pero entonces resulta natural preguntarse si siempre podremos representar un conjunto mediante una gráfica, es decir, ¿qué conjuntos tienen pintura? –Y resulta que todos los conjuntos. Para probar este hecho es necesario antes el siguiente lema, que nos permite construir una gráfica, pintura de un conjunto dado, de manera análoga a como lo hicimos en un principio con los primeros números naturales.

Definición 2.1.1. *La clausura transitiva de un conjunto a, en símbolos $ct(a)$, se define por recursión sobre n de la siguiente manera*[2]*:*

- $\cup^0 a = a$
- $\cup^{n^+} a = \cup(\cup^n a)$
- $ct(a) = \cup\{\cup^n a \mid n \in \omega\}$.

Lema 2.1.2. *$x \in ct(\{a\})$ si y sólo si existe una sucesión finita $\langle a_0, a_1, ..., a_n\rangle$, con $n \neq 0$ tal que:*

(i) $a_0 = a,\ a_n = x$ *y*

(ii) $\forall i \in n(a_{i^+} \in a_i)$.

Demostración. Sea $x \in ct(a)$. Procedamos por inducción. Si $x \in \cup^0 a$, entonces basta con considerar $a_1 = x$ para obtener lo deseado. Supongamos válido para n y sea $x \in \cup^{n^+} a$. Entonces, $x \in y \in \cup^n a$, para algún $y \in \cup^n a$. De acuerdo con la hipótesis de inducción existe una sucesión $\langle a_0 = a, ..., a_{n-1}, a_n = y\rangle$ tal que $\forall i \in n(a_{i^+} \in a_i)$. Basta entonces con tomar $a_{n^+} = x$ para concluir que $\forall i \in n^+(a_{i^+} \in a_i)$. Para la otra implicación, dada $\langle a_o = a, ..., a_{n^+}\rangle$, con $(a_{i^+} \in a_i)$ para toda $i < n$, es fácil ver, utilizando inducción, que $a_i \in a \subset ct(a)$ para toda $i \leq n$. □

Definición 2.1.3. *Decimos que una gráfica g es canónica si y sólo si existe un conjunto a tal que $g = (ct(\{a\}), \in_{ct(\{a\})})$*[3]*.*

Proposición 2.1.4. *Todo conjunto tiene una pintura.*

Demostración. Para esto asociaremos a todo conjunto con su pintura canónica.
Sea a un conjunto, consideremos la gráfica $\hat{g} = (ct(\{a\}), \in_{ct(\{a\})})$. Utilizando el lema anterior es fácil ver que $\hat{g}_a = \big(ct(\{a\}), \leftarrow, a\big)$ es una gráfica punteada accesible con cabeza a y donde la identidad en $\hat{g}_a$, es decoración de la gráfica. Llamaremos a $\hat{g}_a$ la pintura canónica del conjunto a. □

[2] La clausura transitiva resulta ser el menor conjunto transitivo (con respecto a la pertenencia) que contiene a a.

[3] Nótese que $ct(\{a\}) = ct(a) \cup \{a\}$.

De acuerdo con lo anterior, dada una gráfica canónica g, Id_g será siempre una decoración de g. De hecho podemos afirmar más.

Proposición 2.1.5. *Sea g_p una gpa. La función identidad en g_p es decoración de g si y sólo si g_p es una gráfica canónica.*

Demostración. Con base en lo anterior, únicamente hace falta demostrar que si la función identidad de una *gpa* es decoración de la misma, entonces dicha *gpa* es una gráfica canónica. Sean $g_p = (g, \leftarrow, p)$ y $x \in g$. De acuerdo con la hipótesis: $Id_g(x) = \{Id_g(y) \mid y \leftarrow x\}$, es decir: $x = \{y \mid y \leftarrow x\}$. De modo que para cualquier $x \in g$, $\{y \mid y \leftarrow x\} = \{z \mid z \in x\}$. Como g_p es una *gpa*, entonces $x \in g$ si y sólo si existen $n \in \omega$ y $\{x_i\}_i^n \in T_g^p$ con $x_n = x$; donde, para cada i $x_{i^+} \leftarrow x_i$ si y sólo si $x_{i^+} \in x_i$. Por lo tanto $x \in ct(\{p\})$, en consecuencia, $g = ct(\{p\})$ y $\leftarrow = \in_{ct(\{p\})}$, concluyendo con esto lo deseado. □

La pintura construida en la prueba de la proposición 2.1.4 es del tipo de las pinturas representadas en la Figura 2.2. Recordemos que en dicho caso construimos otra pintura del conjunto, de manera general se tiene lo siguiente:

Proposición 2.1.6. *Para toda gpa g_p existe un árbol g_T tal que si g_p es pintura de un conjunto a, entonces también lo es g_T.*

Demostración. Sea $g_p = (v_g, \leftarrow, p)$ pintura de un conjunto a, considérese la gráfica que tiene como vértices a todos los caminos finitos que empiezan en la cabeza y cuyas aristas son de la forma $\big(\langle a_{n^+}, a_n, ..., p\rangle, \langle\, a_n, ..., p\rangle\big)$. Es decir, considérese la gráfica $g_T = (v_{g_T}, \leftarrow', t_{p_1})$ tal que:

(i) $v_{g_T} = \{t \in T_g^p \mid t = \langle x_i\rangle_{i=1}^m$ para algún $m \in \omega\}$.

(ii) para cualesquiera $t = \langle x_i\rangle_0^n$ y $s = \langle y_i\rangle_0^m$ en v_{g_T}, $t \leftarrow' s$ si y sólo si $n = m^+$ y$\forall i \leq m(x_i = y_i)$.

Primero veamos que la gráfica g_T, así descrita, es una gráfica punteada accesible. Sea $s = \langle x_i\rangle_o^n \in v_{g_T}$. Queremos ver que existe un camino de p a s en g_T. Pero claramente el camino buscado es
$\langle\langle p\rangle, \langle p, x_1\rangle, \langle p, x_1, x_2\rangle, ..., \langle p, x_1, ..., x_n\rangle\rangle = \langle\langle p\rangle, \langle p, x_1\rangle, \langle p, x_1, x_2\rangle, ..., s\rangle$. Para ver que es pintura del mismo conjunto sólo es preciso notar que toda decoración de g_p induce una decoración en g_T. Para esto, sea d una decoración de g_p tal que $d(p) = a$, y considérese una función d' que asocie cada

vértice s en g_T, con el valor asignado bajo d, al último elemento del camino; es decir, $\forall s = \langle x_i \rangle_0^n \in v_{g_T}$ $(d'(s) = d(x_n))$. Veamos entonces que d' es una decoración de g_T.

$$\begin{aligned} d'(s) &= d(x_n) \\ &= \{d(y) \mid y \leftarrow x_n\}. \end{aligned}$$

Luego, es fácil ver que y es un hijo en de x_n en g_p si y sólo si $\langle p, x_1, ..., x_n, y \rangle$, es un camino en g_p, para algunas x_i. De modo que,

$$\begin{aligned} d'(s) &= \{d(y) \mid y \leftarrow x_n\} \\ &= \{d(z_{n+1}) \mid \langle z_i \rangle_0^{n+1} \leftarrow' s\} \\ &= \{d'(t) \mid t \leftarrow' s\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto d' es decoración de g_T, y como $d'(t_{p_1}) = a$ entonces ambas gráficas son pintura del conjunto a.

Para ver que g_T es un árbol sólo hace falta notar que cada vértice de ésta es hijo de a lo más otro vértice. Sean $t = \langle p, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n^+} \rangle$ y s, vértices de g_T tales que $t \leftarrow' s$, de acuerdo con la definición de dicha gráfica, $s = \langle p, x_1, ..., x_n \rangle$. De manera que, de existir un padre de t en g_T, éste es único. Concluimos finalmente que g_T es un árbol. $\square$

Regresando a los ejemplos antes vistos, preguntémonos si sólo hay una forma de decorar las gráficas punteadas accesibles. En particular, consideremos la gpa de la figura 2.6.

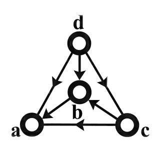

Figura 2.6: $g = \big(\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}\big)$

En ella, el vértice a no tiene hijos; por lo tanto, en una decoración sólo se le puede asignar el conjunto ϕ; el vértice b consta únicamente de un hijo, a, es decir que el conjunto asignado a b tiene como único elemento el vacío, por lo que a b debe asignársele el conjunto $1 = \{\phi\}$. Análogamente, a c sólo se le puede asignar el conjunto $2 = \{\phi, \{\phi\}\}$, y por último, a d debe asignársele el conjunto $3 = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$. Tenemos finalmente una pintura del conjunto $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$. Claramente, dicha unicidad está basada en el hecho de que estamos trabajando en ZF sin urielementos o átomos[4], ya que en dicho caso, para cualquier d, decoración de la gpa antes mencionada, como a no tiene hijos entonces puede asignársele cualquier urielemento, es decir, $d(a) = x$ para alguna $x \in A \bigcup \{\phi\}$, donde A es el conjunto de urielementos considerado. En esta primera parte trabajaremos en un universo sin urielementos aunque más adelante nos serán de utilidad, por lo que habrá que hacer algunos ajustes. Pero mientras no se indique lo contrario, trabajaremos sin urielementos. Notemos que hemos vuelto a recurrir a ejemplos de pinturas de números naturales pero ¿podremos afirmarlo también para diferentes pinturas? Más adelante resolveremos esta pregunta.

Hasta ahora hemos visto que todos los conjuntos tienen pintura pero, dada cualquier gráfica ¿es posible asociarle un conjunto, de acuerdo con nuestra noción?, dicho de otra forma, ¿todas las gráficas tienen decoración? Para responder esta pregunta, al menos parcialmente, recordemos algunos conceptos y resultados importantes así como una noción nueva.
Una relación r bien funda a un conjunto a si y sólo si

$$\forall b \subseteq a\big[b \neq \phi \longrightarrow \exists x \in b \forall y \in b \neg(yrx)\big].$$

Es decir, r bien funda a a si y sólo si todo subconjunto no vacío de a tiene un elemento r-minimal.

Definición 2.1.7. *Un conjunto a es bien fundado*[5] *si y sólo si $a \in BF$.*

Lema 2.1.8. *$a \in BF$ si y sólo si $\in$ bien funda a $ct(a)$.*

La prueba puede revisarse en el apéndice B. Observemos que, en virtud del lema 2.1.8, ABF es equivalente a $V = BF$.

Lema 2.1.9. *Sea a un conjunto y $r \subseteq a \times a$; entonces:*

1. *Si r bien funda al conjunto a, entonces no hay una sucesión finita de elementos de a, digamos $\langle a_0, a_1, ..., a_{n+1}\rangle$ tales que $a_1 r a_0$, $a_2 r a_1$, ... , $a_{n+1} r a_n$, $a_0 r a_{n+1}$.*

2. *Si a es un conjunto bien fundado y g_a su pintura canónica, entonces no existe una sucesión infinita $\{x_i\}_{i\in\omega}$ de elementos de $ct(\{a\})$, tal que $x_0 \in v_{g_a}$ y $...x_{n^+} \leftarrow x_n \leftarrow ... \leftarrow x_1 \leftarrow x_0$.*

Definición 2.1.10. *Sea $g = (v_g, \leftarrow)$ una gráfica; decimos que g es una gráfica bien fundada si y sólo si $\leftarrow$ bien funda a v_g.*

[4]Más adelante se abundará al respecto (Ver página 51).
[5]Apéndice B

Como consecuencia del lema 2.1.9 se tiene que si $g = (v_g, \leftarrow)$ es una gráfica bien fundada, entonces no hay ni ciclos ni caminos infinitos (como todo ciclo es un camino infinito basta entonces con decir que no se tienen caminos infinitos). Con el axioma de elección se prueba el regreso del segundo inciso del lema 2.1.9; es decir, que si una gráfica no tiene caminos infinitos entonces es una gráfica bien fundada. Dos casos particulares son el que no exista $q \in v_g$ tal que $q \leftarrow q$ ni tampoco $p, q \in v_g$, tales que $p \leftarrow q$ y $q \leftarrow p$. Como es posible ver, si tenemos una pintura de un conjunto bien fundado entonces no puede haber ciclos. Es decir, que en ZF toda pintura tendrá dichas características.

También es posible ver que toda *gpa* bien fundada sólo va a tener una posible cabeza, es decir, sólo existe un vértice, la cabeza dada, a partir del cual se puede acceder, por medio de un camino, a cualquier otro vértice de la gráfica. Para esto pensemos en una gpa g_p y supongamos lo contrario, es decir, que tiene un vértice p' tal que $\forall x \in v_{g_p}$ existen $n \in \omega$ y $t \in T_g^{p'}$ con $t(n) = x$. En particular, existen $t, t' \in T_g$ y $n, m \in \omega$ tales que $t(o) = p'$, $t(n) = p$, $t'(0) = p$ y $t'(m) = p'$, es decir, hay un ciclo en g_p, lo cual es imposible puesto que partimos del supuesto de que g_p es bien fundada. De manera general, una relacional R en una clase P bien funda a P si y sólo si todo subconjunto no vacío de P tiene un elemento R-minimal y $x_R = \{z \in P \mid zRx\}$ es un conjunto para toda x en P. En dicho caso diremos que R es bien fundada en P.

Recordemos también que una relacional R en P es extensional si para cualesquiera dos elementos distintos x, y de P, $x_R \neq y_R$. Siguiendo con esta idea, extendamos esta noción a gráficas.

Definición 2.1.11. *Una gráfica g es extensional si y sólo si para cualesquiera dos vértices de g, si tienen exactamente los mismos hijos, entonces son iguales.*

Es decir, dados dos vértices distintos, hay un tercero que es hijo de uno pero no lo es del otro. Por ejemplo, de acuerdo con el axioma de extensionalidad, la pintura canónica de cualquier conjunto es extensional.

Con todas estas herramientas es posible enunciar la siguiente proposición, sin embargo la prueba se encuentra en el apéndice C.

Teorema 2.1.12 (Colapso de Mostowski)**.** *Si R es una relacional bien fundada en una clase P, entonces hay una clase transitiva M y una funcional suprayectiva π entre P, R y $M, \in$. Si además R es extensional entonces π es un isomorfismo y, tanto la clase M como el isomorfismo π son únicos.*

De éste se obtiene de manera inmediata el siguiente corolario que responde, parcialmente, nuestra pregunta.

Corolario 2.1.13. *Toda gráfica bien fundada tiene una única decoración y ésta es de conjuntos bien fundados. Si además dicha gráfica es extensional entonces la decoración es un isomorfismo.*

Demostración. Sea g una gráfica bien fundada, entonces, como $\leftarrow$ es una relación bien fundada en g, el teorema de recursión para relaciones bien fundadas (C.0.11) garantiza la existencia de una única función $d(x)$ que puede ser definida en términos de los $d(z)$ tales que z es hijo de x. Así, la función d se define de la siguiente manera:

$$d(x) = \{d(z) \mid z \leftarrow x\} \quad \forall x \in v_g. \tag{2.1}$$

Veamos que d toma valores en BF. Dados x un vértice de g y b un subconjunto no vacío de $d(x)$, y sea b' el subconjunto del conjunto de hijos de x en g, tal que $b = \{d(z) \mid z \in b'\}$. Como $b \neq \phi$, también lo es b'. Admeás al g ser una gráfica bien fundada, existe $y' \in b'$ tal que $\forall u \in b'(u \not\leftarrow y')$. Entonces tomamos $y = d(y')$, con lo cual concluimos que $\in$ bien funda a $d(x)$, es decir,

$$\forall b \subseteq d(x)[b \neq \phi \longrightarrow \exists y \in b(\forall z \in b(z \notin y))].$$

Por lo tanto, en virtud del lema 2.1.8, $d(x) \in BF$. El resto de la prueba es análoga a la prueba del teorema del Colapso de Mostowski, motivo por el cual se omite. □

Corolario 2.1.14. *Toda gpa bien fundada es pintura de un único conjunto, el cual es también bien fundado.*

Demostración. Sea g_p una gpa bien fundada, entonces, de acuerdo con el Colapso de Mostowski existe una única decoración d tal que g_p es pintura del conjunto $a = d(p)$. De manera que no es posible la existencia de un conjunto b (distinto de a) del cual g_p sea también pintura, por lo tanto g_p es pintura de un único conjunto. El hecho de que el conjunto sea bien fundado también es consecuencia directa de la proposición 2.1.13. □

Proposición 2.1.15. *Un conjunto es bien fundado si y sólo si existe una gpa bien fundada, que es pintura de dicho conjunto.*

Demostración. Sea a un conjunto bien fundado, de manera que $\in$ bien funda a $ct(a)$ [Lema 2.1.8] y en consecuencia $\in$ bien funda a $ct(\{a\})$. Por lo tanto si consideramos la pintura canónica del conjunto a tal como se definió en la proposición 2.1.4, ésta resulta ser una gráfica bien fundada y pintura del conjunto deseado. La otra parte de la afirmación es una consecuencia directa del corolario 2.1.14. Por lo tanto podemos afirmar que todo conjunto bien fundado tiene una pintura bien fundada. □

Aquí surge una nueva pregunta: ¿todas las pinturas de un conjunto bien fundado serán también bien fundadas?

Proposición 2.1.16. *Sea a un conjunto y g_p una pintura de éste, así*

$$(g_p, \leftarrow) \in COBF^6 \Leftrightarrow a \in BF.$$

Demostración. La ida se obtiene de 2.1.14. Para el regreso hay que probar que $\leftarrow$ bien funda a g_p. Recordemos que todo elemento de un conjunto bien fundado también lo es. Sea entonces a un conjunto bien fundado y g_p una pintura de éste. Consideremos $X \subseteq g_p$, $X \neq \phi$ y fijémonos en la imagen de X bajo d, $d[X]$. Por lo mencionado anteriormente, $d[X]$ tiene un minimal, sea éste $d(q)$; entonces q será el minimal de X, de lo contrario, si suponemos que existe $z \in X$ tal que $z \leftarrow q$ entonces $d(z) \in d(q)$ contradiciendo el hecho de que $d(q)$ era minimal. Por lo tanto $\leftarrow$ bien funda a g_p. □

Hasta ahora sólo hemos garantizado, como corolario del Colapso de Mostowski, que toda gráfica bien fundada tiene una única decoración. Pero, ¿qué se puede decir del resto de las gráficas? Tomemos el siguiente axioma:
AFA$_\exists$ *Toda gráfica tiene al menos una decoración.*

¿Qué sucede entonces, en $ZF^- + AFA_\exists$?[7] En dicho caso, la gráfica $g_p = (\{p\}, \{(p,p)\}, p)$ tiene (al menos) una decoración d tal que $d(p) = \{d(x) \mid x \leftarrow p\} = \{d(p)\}$ [Figura 2.7]. Entonces existe un conjunto a testigo de ello ($a = \{a\}$) negando así el axioma de buena fundación. ¿Habrá otro conjunto b tal que $b = \{b\}$? Hasta ahora el criterio de igualdad entre conjuntos es ZF_1 de modo que dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos pero ¿qué sucede con a y b? Si utilizamos este criterio tenemos que $a = b$ si y sólo si $a = b$, lo cual no soluciona el problema. Por ejemplo, en la gráfica $g_q = \big(\{p,q\}, \{(p,q),(q,p)\}, q\big)$ [Figura 2.7] nos enfrentamos a un caso similar. Sean $a, b \in V$ tales que $a = \{b\}$ y $b = \{a\}$, ¿existen otros

[6] Recordemos que, $\langle a, r\rangle \in COBF$ si y sólo si

- $a \in V$,
- $r \subseteq a \times a$ y
- r bien funda a a.

[7] En el apéndice A se aclara la notación empleada.

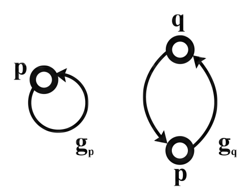

Figura 2.7: Pintura de $\Omega = \{\Omega\}$

dos conjuntos c y d tales que $c = \{d\}$ y $d = \{c\}$? Consideremos entonces el siguiente axioma:

El Axioma de Antifundación[AFA] *Toda gráfica tiene una única decoración.*

Tomando en cuenta los ejemplos antes mencionados, vemos que AFA garantiza la existencia de conjuntos no bien fundados; luego, al agregar que la decoración es única, se abre camino hacia una caracterización que permite identificar cuándo dos conjuntos no bien fundados son iguales.

Volviendo al primer ejemplo, $g_p = \left(\{p\}, \{(p,p)\}, p\right)$, supongamos que existen dos conjuntos (distintos) a y b tales que $a = \{a\}$ y $b = \{b\}$. Como g_p es pintura de ambos, entonces existen decoraciones d_a y d_b tales que $d_a(p) = a$ y $d_b(p) = b$, pero de acuerdo con AFA dicha decoración es única. Por lo tanto, el conjunto $a = \{a\}$, al cual denotaremos porΩ , es único. Sin embargo, sin AFA, éste es un ejemplo de que la conversa de la proposición 2.1.6 no es necesariamente válida, en el sentido que si consideramos $g_T = (\omega, \{(n^+, n) \mid n \in \omega\}, 0)$, claramente si g_p es pintura de un conjunto a, también g_T lo es, mientras que si consideramos el conjunto $a = \{b\}$ con $a \neq b$ y $b = \{a\}$, g_T es pintura de a pero g_p no lo es. Claro que para asumir la existencia de un conjunto con dichas características necesitamos un axioma que lo garantice.

De manera general se afirma lo siguiente, que responde la pregunta que nos habíamos planteado en la página 13.

Proposición 2.1.17 (AFA)**.** *Toda gpa es pintura de un único conjunto.*

La demostración de este hecho es análoga a la del corolario 2.1.14 sólo que en este caso se sigue de AFA.

En cuanto al segundo ejemplo, bajo un razonamiento análogo se tiene que los conjuntos a y b tales que $a = \{b\}$ y $b = \{a\}$ son únicos. Más aún, sea d la decoración de g_q; entonces:

$$\begin{aligned} d(p) &= \{d(x) \mid x \leftarrow p\} \\ &= \{d(q)\} \text{ y} \\ d(q) &= \{d(p)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(p) = \{\{d(p)\}\}$. De modo que g_q es también pintura de Ω.
Si observamos las gráficas representadas en Figura 2.8 es fácil ver que todas ellas son pinturas de Ω, lo cual nos lleva a la siguiente caracterización.

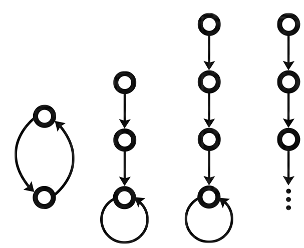

Figura 2.8: Pinturas deΩ

Proposición 2.1.18 (AFA)**.** *Una gpa es pintura de Ω si y sólo si todo vértice de la gpa tiene (al menos) un hijo.*

Demostración. Supóngase que se tiene una gpa, pintura de Ω con cabeza a. Sea d la decoración tal que $d(a) = \Omega$. Luego, sea b un vértice de dicha pintura, entonces existe un camino $b = a_n \leftarrow ... \leftarrow a_0 = a$ de modo que $d(b) = d(a_n) \in ... \in d(a_1) \in d(a_0) = d(a) = \Omega$ y al Ω tener como único elemento a Ω se concluye $d(b) = \Omega$. Ahora, como$\Omega \neq \phi$ entonces b tiene (al menos) un hijo. Por lo tanto, todo vértice de la gpa tiene un hijo. Por otro lado, dada una gpa donde todos sus vértices tienen un hijo, es fácil ver que la función $d : v_g \longrightarrow V$ tal que $d(a) = \Omega$ para toda $a \in v_g$ es en efecto decoración, puesto que, si $a \in v_g$ entonces $\{d(x) \mid x \leftarrow a\} \neq \phi$ y $\{d(x) \mid x \leftarrow a\} = \{\Omega\} = \Omega$. $\square$

Hasta ahora hemos construido únicamente un conjunto no bien fundado, al cual llamamos Ω. Pero ¿cuántos más habrá?, ¿qué tanto está aumentando nuestro nuevo universo de conjuntos?

Considérese la gpa $g_p = \big(\{p, q, r\}, \{(q, p), (r, p), (r, r)\}, p\big)$ y, asumiendo AFA, sea d su decoración, de tal manera que g_p resulta ser pintura del conjunto $0^{\#} = \{0, \Omega\}$ [Figura 2.9], debido a que:

$$\begin{aligned} d(q) &= 0 \\ d(r) &= \Omega \\ d(p) &= \{d(q), d(r)\} \\ &= \{0, \Omega\}. \end{aligned}$$

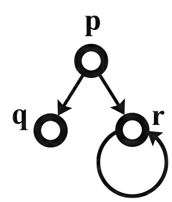

Figura 2.9: Pintura del conjunto $0^{\#} = \{0, \Omega\}$.

Así construimos nuestro segundo conjunto no bien fundado. Luego, como sabemos que todo conjunto tiene una pintura; sea a un conjunto cuya pintura canónica es g_a. De manera que la gráfica g_p, representada en la figura 2.10, resulta ser pintura del único conjunto $a^{\#}$ tal que $a^{\#} = \{a, \Omega\}$.

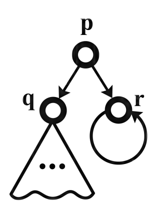

Figura 2.10: Pintura del conjunto $a^{\#} = \{a, \Omega\}$

Prosiguiendo de este modo, podemos afirmar que a partir de cualquier conjunto a podemos construir el conjunto no bien fundado, $a^{\#}$, concluyendo así que la clase que consta de todos los conjuntos no bien fundados es propia. En el caso particular en que $a = \Omega$, $\Omega^{\#} = \{\Omega, \Omega\} = \{\Omega\} = \Omega$.

Como vimos, el axioma de antifundación niega el axioma de buena fundación, pero podemos decir más. Es claro que AFA es equivalente a la conjunción de las siguientes dos afirmaciones:

$AFA_{\exists}$: Toda gráfica tiene al menos una decoración.
$AFA_{!}$: Toda gráfica tiene a lo más una decoración.

De modo que la afirmación anterior queda formalizada en la proposición enunciada a continuación.

Proposición 2.1.19. *El axioma de buena fundación (ABF*[8]*) implica:*

1. *$AFA_!$ y*
2. *la negación de $AFA_\exists$.*

Demostración.

1. Sea g una una gráfica con dos decoraciones d_1 y d_2. En virtud de la proposición 2.1.16 se tiene que $(g, \leftarrow) \in COBF$; de manera que, de a cuerdo con el Colapso de Mostowski, g tiene una única decoración. Concluyendo así que, de existir una decoración, ésta es única.
2. Para este inciso basta tan sólo considerar la gráfica $g = (\{\phi\}, \{(\phi,\phi)\})$. Puesto que, de existir una decoración d, el conjunto $d(\phi)$ contradiría a ABF.

□

2.2. Sistemas y clases

Ahora extendamos la noción de gráfica de manera que la colección de vértices pueda ser no sólo un conjunto sino también una clase.
Es importante mencionar que los únicos objetos de la teoría ZFC son los conjuntos, sin embargo al ser más fácil manipular clases que fórmulas, introducimos de manera un poco informal la noción de clase. Si $\varphi(x, p_1, ..., p_n)$ es una fórmula, donde p_i es un parámetro para toda i (la fórmula puede no tener parámetros), se dice que $C = \{x \mid \varphi(x, p_1, ..., p_2)\}$ es una clase. De manera que los elementos de la clase C son todos los conjuntos x que satisfacen $\varphi(x, p_1, ..., p_n)$, es decir $x \in C$ si y sólo si $\varphi(x, p_1, ..., p_n)$. La igualdad entre clases, así como la contención, la intersección, unión y diferencia se definen de manera natural[9]. Una vez dicho esto nos tomamos la libertad de utilizar la notación anterior dando por sentado la teoría que la sustenta.

Definición 2.2.1. *Un sistema es una clase M de vértices junto con una clase de aristas que consiste de parejas ordenadas de vértices.*
Análogamente a como habíamos estado trabajando con las gráficas, utilizaremos M para referirnos al sistema y escribiremos $b \leftarrow a$ si (b, a) es una

[8] Apéndice A
[9] Esto puede verse con más detalle en [7].

arista de M. Un sistema M debe satisfacer la condición de que por cada vértice a la colección $a_M = \{b \in M \mid b \leftarrow a\}$ de hijos de a forma un conjunto. Formalmente:
$M, \leftarrow$ *es un sistema si y sólo si:*

(i) M *es una clase no vacía,*

(ii) $\leftarrow \subseteq M \times M$ *y*

(iii) La relacional $\leftarrow$ *es izquierda limitada.*

También extenderemos la noción de decoración, de manera que D *es una decoración del sistema* M *si y sólo si:*

(i) $D : M \longrightarrow V$.

(ii) $\forall a \in M\, [D(a) = \{D(b) \mid b \leftarrow a\}]$.

Un ejemplo de un sistema que no es una gráfica (ya que la colección de vértices no es un conjunto) es la clase propia $BF, \leftarrow$ donde para cualesquiera a, b elementos de BF, $b \leftarrow a$ si y sólo si $b \in a$.

Antes de continuar introduzcamos un nuevo concepto que, en adelante, nos será de mucha utilidad. Sea $M, \leftarrow$ un sistema. Para cada a elemento de M definimos una gpa que denotaremos M_a tomando como vértices de dicha gráfica todos los vértices de M para los cuales hay un camino en M desde a y tomando como aristas aquellas que en M conectan dos vértices de M_a. Como la colección de hijos de cualquier vértice de M es un conjunto es fácil ver que M_a también lo es. A esta gráfica le llamaremos subgráfica de M generada por a. En particular, si se trata de una gráfica g entonces la subgráfica de g generada por a se denotará como g_a.

Definición 2.2.2. *Sea* M *un sistema y* $a \in M$*; entonces la subgráfica de* M *generada por* a*,* M_a*, queda descrita de la siguiente manera:*
$M_a = \big(ct_{\leftarrow}(\{a\}), \leftarrow_a, a\big)$ *donde* $\leftarrow_a = \leftarrow\restriction_{ct_{\leftarrow}(\{a\})}$ *y* $ct_{\leftarrow}(\{a\})$ *se define recursivamente como*[10]*:*

$$\begin{aligned} f(0) &= \{a\}, \\ f(n^+) &= \{z \mid \exists x \in f(n)\, (z \in x_M)\}, \\ ct_{\leftarrow}(\{a\}) &= \bigcup_{n \in \omega} f(n). \end{aligned}$$

[10]Para esto se utiliza el hecho de que la relacional $\leftarrow$ es izquierda limitada.

Generalmente se denotará por M_a pero, por ejemplo, en el caso de que se desee la sugráfica de M_a generada por b, escribiremos $(M_a)_b$; la cual resulta igual a la subgráfica del sistema original M generada por b. En particular, si g_p es una gráfica punteada accesible y q un vértice de ésta, la subgráfica de g_p generada por q es $(g_p)_q = (\{x \mid x \in v_g \wedge x \in ct_{\leftarrow}(\{g\})\}, \leftarrow\restriction_{ct_{\leftarrow}(\{g\})}, q)$, de manera que $(g_p)_q = g_q$.
Además, dado un sistema M y una decoración, d, de dicho sistema, definimos $d_a = d \restriction_{ct_{\leftarrow}(\{a\})}$; la cual, claramente, resulta ser una decoración de M_a[11].

Proposición 2.2.3. *AFA es equivalente a "Todo sistema tiene una única decoración".*

Esto nos recuerda la equivalencia entre el Axioma de Buena Fundación para conjuntos y el Axioma de Buena Fundación para clases en ZF.

Demostración. Sea a un vértice de M. Luego, por AFA sabemos que para cualquier a en M, M_a tiene una única decoración que denotaremos por d_a, resultando M_a pintura del conjunto $d_a(a)$.
Definamos $D : M \longrightarrow V$ de la siguiente manera: $\forall a \in M[D(a) = d_a(a)]$.
Queremos ver que D así definida es decoración del sistema M. Observemos que si x es un hijo de a en M, todo vértice de M_x lo es también de M_a; y d_a restringida a M_x, es una decoración de M_x; y, al ésta ser única $[AFA]$, $x \leftarrow a$ en M implica que $d_a(x) = d_x(x) = D(x)$, de manera que para cada $a \in M$:

$$\begin{aligned} D(a) &= d_a(a) \\ &= \{d_a(x) \mid x \leftarrow_a a\} \\ &= \{d_a(x) \mid x \leftarrow a \text{ en } M\} \\ &= \{D(x) \mid x \leftarrow a\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto D es decoración de M.
Para probar la unicidad veamos que toda decoración D del sistema debe ser también decoración de cada M_a, bajo la restricción. Sea D una decoración de M; entonces:

$$\begin{aligned} D(a) &= \{D(x) \mid x \leftarrow a \text{ en } M\} \\ &= \{D(x) \mid x \leftarrow_a a\}. \end{aligned}$$

Por lo que D restringida a M_a es también decoración de M_a y como, asumiendo AFA, ésta es única, $D(a) = d_a(a)$. Por lo tanto la decoración del

[11] La notación en este caso es análoga a la utilizada anteriormente para las subgráficas de un sistema.

sistema es única. El regreso es directo ya que es claro que toda gráfica es sistema. □

2.3. Bisimulaciones

Anteriormente se comentó que el axioma de antifundación consta de dos partes, la de existencia, y una segunda que conduce a una caracterización que permite identificar cuándo dos conjuntos no bien fundados son iguales. Esto es muy importante ya que para hacer esto en ZF utilizamos el axioma de extensionalidad. De manera que dos conjunos son iguales si tienen los mismos elementos; lo cual tiene sentido para todos los conjuntos bien fundados –que en ZF son todos los conjuntos. Pero, ¿qué pasa por ejemplo con el conjunto $x = \{x\}$? Como hemos visto, en este caso el axioma de extensionalidad no es suficiente, mientras que AFA nos asegura que sólo hay un conjunto, llamado Ω, solución de la ecuación anterior. En esta sección llegaremos a dicha caracterización, de manera que sea posible identificar cuándo dos conjuntos son iguales, independientemente de si son o no, bien fundados.

Definición 2.3.1. *Decimos que dos conjuntos, a, b, son equipintables o gráficamente equivalentes, en símbolos $a \equiv b$, si y sólo si hay una gpa que es pintura de ambos conjuntos.*

Con la siguiente proposición vemos porqué es tan importante este nuevo concepto.

Proposición 2.3.2. *$AFA_!$ es equivalente a $\forall a, b \in V\ [a \equiv b \Rightarrow a = b]$.*

Demostración. Probemos primero que para que $AFA_!$ sea verdadero debe cumplirse también que para cualesquiera dos conjuntos, si son equipintables, entonces son iguales. Sea g_p pintura de dos conjuntos a y b. Entonces existen dos decoraciones d_1 y d_2 de g_p tales que $d_1(p) = a$ y $d_2(p) = b$. De acuerdo con $AFA_!$, la decoración es única, de modo que los conjuntos resultan ser iguales. Por lo tanto, bajo la suposición de $AFA_!$, una gpa es a lo más pintura de un conjunto.
Ahora probemos la suficiencia, es decir supongamos que si dos conjuntos son equipintables, entonces son iguales, y veamos que se cumple $AFA_!$. Esta prueba la haremos por contrapositiva. Sea g una gráfica con dos decoraciones d y d'; de modo que $d(x) \neq d'(x)$ para algún vértice x de g. Si consideramos la subgráfica g_x, ésta resulta ser una gpa y pintura de dos conjuntos, a saber, $d_x(x)$ y $d'_x(x)$, contradiciendo la hipótesis inicial. Por lo tanto g tiene a lo más una decoración. □

Encaminándonos hacia el principal concepto de esta sección, pensemos en una relacional que, por decirlo de algún modo, se "hereda"a los hijos, es decir, que si dos vértices están relacionados entonces, para cada uno de ellos, cualquiera de sus hijos estará relacionado con algún hijo del otro vértice. Para formalizar la idea utilizaremos la siguiente definición.

Definición 2.3.3. *Sea M un sistema y $R \subseteq M \times M$. La relacional $R^+ \subseteq M \times M$, está dada por:*
para cualesquiera $a, b \in M$,

$$aR^+b \Leftrightarrow \big[\forall x \in a_M \, \exists y \in b_M \, [xRy] \, \wedge \, \forall y \in b_M \, \exists x \in a_M \, [xRy]\big].$$

Con esto llegamos finalmente a la siguiente definición.

Definición 2.3.4. *Sea M un sistema. R es bisimulación en M si y sólo si $R \subseteq M \times M \quad y \quad R \subseteq R^+$.*

Diremos que una bisimulación R en un sistema M es pequeña si R es un conjunto.
El concepto de bisimulación proviene de un uso anterior de esta noción en ciencias de la computación, donde está relacionada con una pareja de procesos cada uno de los cuales puede simular el comportamiento del otro.

Ahora pensemos por ejemplo, en las gráficas de la figura 2.8, como éstas son todas pintura de Ω nos gustaría relacionarlas de alguna manera, pero, aunque pareciera pertinente pensar en el concepto de isomorfismo éste resulta no ser útil, ya que, las gráficas tendrían un mismo número de vértices, lo cual no sucede.

Lo que sí podemos afirmar es que si dos gpas bien fundadas son isomorfas, entonces son pinturas de un mismo conjunto. Para esto pensemos en dos gpas bien fundadas g_p y h_q, y en θ el isomorfismo entre éstas. De manera que $\forall a, b \in g_p(b \leftarrow_p a \Leftrightarrow \theta(b) \leftarrow_q \theta(b))$. Luego, de acuerdo con el Colapso de Mostowski, existe una única decoración de h_q, digamos d, la cual determina una decoración d', de g_p. Para ver esto considérese $\forall x \in g_p(d'(x) = d(\theta(x)))$. Es fácil ver que d' así definida es decoración de g_p, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} d'(p) &= d(\theta(p)) \\ &= d(q). \end{aligned}$$

Por lo tanto g_p y h_q son pinturas de un mismo conjunto. Nótese que aquí estamos asumiendo que $\theta(p) = q'$ y esto lo hacemos con base en la observación hecha en la página 14. Obsérvese también que la prueba se basa en el Colapso de Mostowski y el hecho de que la cabeza de una gpa va a dar, bajo el isomorfismo, a la cabeza de la otra gpa. Así, si generalizamos a gpas, no necesariamente bien fundadas, pareciera que bajo la suposición de AFA podríamos afirmar lo mismo, sin embargo tenemos el problema de que no necesariamente la cabeza de una gpa, bajo el isomorfismo dado, cae en la cabeza de la otra gpa. Ilustremos esto mediante el siguiente ejemplo. Considérense las gpas bien fundadas isomorfas todas entre sí[12], g_p, $g'_{p'}$, h_q y

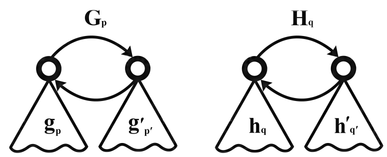

Figura 2.11:

$h'_{q'}$, con θ_1, el isomorfismo entre g_p y $h'_{q'}$, y θ_2 el isomorfismo entre h_q y $g'_{p'}$. Considérense también las gpas G_p y H_q como se muestran en la figura 2.11. Así, la función $\theta : G_p \longrightarrow H_q$ definida como, para toda $x \in G_p$:

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) & \text{si } x \in g_p, \\ \theta_2(x) & \text{si } x \in g'_{p'}. \end{cases}$$

es claramente un isomorfismo entre G_p y H_q y $\theta(p) = q'$. Sin embargo, sí hay un isomorfismo que corresponde adecuadamente las cabezas, de manera que, como el isomorfismo con el cual trabajaremos será del segundo tipo, ajustaremos la noción de isomorfismo entre gpas con la siguiente definición.

Definición 2.3.5. *Dos gpas g_p y h_q son isomorfas, en símbolos $g_p \simeq h_q$, si y sólo si existe un homomorfismo biyectivo θ, entre ellas tal que $\theta(p) = q$.*

Veamos algunos ejemplos de bisimulación que nos ayudarán a entender la importancia de esta noción.

Ejemplo 2.3.6. *Sea M un sistema. Las siguientes relacionales son bisimulaciones en M:*

- $R = \phi$, ya que $a\phi^+b \Leftrightarrow$ ninguno tiene hijos.

[12]Para facilitar el ejemplo, los conjuntos de vértices correspondientes son todos disjuntos entre sí.

- $R = Id_M$.
  Prueba: Para cualesquiera $a, b \in M$,
  $a =^+ b \Leftrightarrow \forall x \in a_M \exists y \in b_M(x = y) \wedge \forall y \in b_M \exists x \in a_M(x = y)$ $\Leftrightarrow a_M = b_M$.
  Por lo tanto, si $a = b$ entonces $a =^+ b$. Con lo cual afirmamos que tener los mismos elementos es una bisimulación.

- $R = \{(a, b) \mid a_M = b_M\}$.
  Prueba: Sean $(a, b) \in R$ entonces $a_M = b_M$ por lo que
  $\forall x \in a_M \exists y \in b_M[xRy]$
  a saber, $y = x$. Análogamente $\forall y \in b_M \exists x \in a_M[xRy]$. Por lo tanto $(a, b) \in R^+$. De modo que tener los mismos hijos es también una bisimulación.

- $aRb \Leftrightarrow M_a \simeq M_b$.
  Prueba: Sean $a, b \in M$ tales que $M_a \simeq M_b$ bajo el isomorfismo θ. Luego, sean también $x \in a_M$ y $y = \theta(x)$. Como M_a y M_b son isomorfas bajo θ, $\theta(a) = b$. Luego, al θ ser monótona, y $x \in a_M$, entonces $\theta(x) \leftarrow \theta(a) = b$. Y como, claramente, $M_x \simeq M_y$, se tiene que $\forall x \in a_M \exists y \in b_M[M_x \simeq M_y]$. Bajo un razonamiento análogo vemos que $\forall y \in b_M \exists x \in a_M[M_x \simeq M_y]$; por lo tanto R es bisimulación en M.

- En general, $R = M \times M$ no es bisimulación.
  Prueba: Supongamos que R es bisimulación en M, entonces cualquier par de vértices están relacionados. Luego, tomemos dos vértices a y b de M. Como partimos del hecho de que R es bisimulación entonces cualquier hijo de a está relacionado con algún hijo de b, por lo que que si a tiene un hijo, b debe también tener al menos un hijo, los cuales estarán R-relacionados, de modo que estos a su vez debieran tener al menos un hijo y así sucesivamente. Es decir, M sería un sistema en el cual todos sus vértices tuvieran al menos un hijo. Por otro lado, si suponemos que a no tiene hijos, entonces b tampoco tendría. Más aún, si consideramos un sistema en el cual ninguno de sus vértices tiene hijos u otro en el que todo vértice tiene al menos un hijo, en ambos sistemas la relacional $R = M \times M$ es bisimulación. Concluimos finalmente que R es bisimulación en M si y solamente si o todo vértice de M tiene al menos un hijo o ningún vértice tiene hijos.
  Como consecuencia se tiene que en toda pintura de Ω, la relacional R antes descrita es bisimulación [2.1.18].

Proposición 2.3.7. *La relacional* $\equiv$ *es una bisimulación en* $V, \in$.

Intuitivamente esta afirmación es clara ya que si dos conjuntos a y b son equipintables, como a cada vértice de su pintura se le está asignando un conjunto, se espera que cada elemento del conjunto a sea equipintable con un elemento de b, a saber, aquel que tiene asignado el mismo vértice.

Demostración. Sean $a, b \in V$ tales que $a \equiv b$, entonces existen una gpa $g_p = (v_g, \leftarrow, p)$ y decoraciones d_1 y d_2 de g_p tales que $d_1(p) = a$ y $d_2(p) = b$. Queremos ver que $a \equiv^+ b$. Notemos que en este caso $a_V = a$. Por lo tanto, sea $x \in a_V$ entonces $x \in a = d_1(p) = \{d_1(x) \mid x \leftarrow p\}$ por lo que $x = d_1(q)$ para algún hijo q de p. Luego, sea $y = d_2(q)$ y consideremos la subgráfica de g_p generada por q, g_q. Claramente g_q es pintura de $(d_1)_q(q) = x$ y $(d_2)_q(q) = y$ [ver página 21]. Por lo tanto x y y son equipintables. Es decir, que si $a \equiv b$ entonces $\forall x \in a_V \exists y \in b_V\ [x \equiv y]$. Y bajo un razonamiento análogo se tiene que $\forall y \in b_V \exists x \in a_V\ [x \equiv y]$. Por lo tanto si $a \equiv b$ entonces $a \equiv^+ b$. □

En la definición 2.3.1 la idea era relacionar conjuntos que tuvieran una pintura en común, ahora lo que queremos es ver la relación que hay entre las gráficas que son pintura de un mismo conjunto.

Definición 2.3.8. *Dos gráficas g_p y h_q son equivalentes bajo bisimulación o simplemente bisimilares, si existe una relacional $R \subseteq g_p \times h_q$ que actúa como una bisimulación, es decir:*

1. *pRq y*
2. *si aRb entonces $\forall x \in a_{g_p} \exists y \in b_{h_q}\ [xRy]$ y $\forall y \in b_{h_q} \exists x \in a_{g_p}\ [xRy]$.*

En este caso diremos que R es una bisimulación entre g_p y h_q.

Como es posible notar, todo recae en el concepto de bisimulación dado anteriormente. Sólo que en este caso falta ver, dadas dos gráficas bisimilares, M_p y N_q, cuál es el sistema M' tal que $M'_p = M_p$ y $M'_q = N_q$.
Si M_p y N_q son ajenas, basta con tomar $M' = (M_p \cup N_q, \leftarrow_p \cup \leftarrow_q)$. En caso de no serlo se considera $M' = M_p + N_q, \leftarrow'$[13] y donde, para cualesquiera $a, b \in M'$:
$a \leftarrow' b \Leftrightarrow (a = (x, 0), b = (y, 0) \wedge x \leftarrow_p y) \vee (a = (x, 1), b = (y, 1) \wedge x \leftarrow_q y)$.
Luego se define $R' \subseteq M' \times M'$ como:

$$\forall a, b \in M'(aR'b \Leftrightarrow (a = (x, 0), b = (y, 1) \wedge xRy)).$$

[13]La unión ajena se define como: $\forall a, b \in V(a + b = (a \times \{0\}) \cup (b \times \{1\}))$.

Finalmente, es cuestión de rutina verificar que R' así definida es una bisimulación en M' y que para cualquier $(x, y) \in M_p \times N_q$, $(x, y) \in R$ si y sólo si sus representantes en M', digamos a y b, están R'-relacionados.
Siguiendo con esta idea damos la siguiente definición.

Definición 2.3.9. *Diremos que dos conjuntos son bisimilares si y sólo si sus gráficas canónicas son bisimilares.*

Ahora veamos un poco cómo es el operador $()^+$ y qué propiedades tienen las bisimulaciones en un sistema.

Proposición 2.3.10. *Sea M un sistema. El operador $()^+$ es monótono respecto a la contención, es decir, si $R \subseteq S \subseteq M \times M$ entonces $R^+ \subseteq S^+$.*

Demostración. $(a, b) \in R^+$ si y sólo si
$\forall x \in a_M \exists y \in b_M\ [xRy]$ y $\forall y \in b_M \exists x \in a_M\ [xRy]$. Luego, como $R \subseteq S$ entonces $\forall x \in a_M \exists y \in b_M\ [xSy]$ y $\forall y \in b_M \exists x \in a_M\ [xSy]$; lo cual sucede si y sólo si $(a, b) \in S^+$. □

Proposición 2.3.11. *Si R es una bisimulación en M entonces R^+ también lo es.*

Demostración. R es una bisimulación en M si y sólo si $R \subseteq R^+$, de modo que, utilizando la proposición anterior, $R^+ \subseteq (R^+)^+$. □

En general un sistema va a tener muchas bisimulaciones pero se puede decir más.

Proposición 2.3.12. *La unión arbitraria de bisimulaciones pequeñas es bisimulación.*

Demostración. Sea $R = \bigcup_{i \in I} \{r_i \mid r_i \text{ es bisimulación pequeña en } M\}$. Veamos que ésta es, en efecto, bisimulación en M. Sean $a, b \in M$ tales que aRb entonces existe $r_i \subseteq R$ tal que ar_ib. Luego, de acuerdo con la monotonía de $()^+$, $r_i^+ \subseteq R^+$ y, al ser r_i bisimulación, $r_i \subseteq r_i^+$, de modo que $r_i \subseteq R^+$, concluyendo así que aR^+b. □

Es natural preguntarse entonces, si existe a caso una bisimulación mayor. Anteriormente vimos que el total no es bisimulación, pero resulta que la unión de todas las bisimulaciones pequeñas en un sistema M sí lo es.

Proposición 2.3.13. *Para cualquier sistema M hay una única bisimulación máxima $\equiv_M$. Es decir:*

(I) $\equiv_M$ *es una bisimulación en* M*.*

(II) Si R *es una bisimulación en* M *entonces para cualesquiera* $a, b \in M$*, si* aRb *entonces* $a \equiv_M b$*.*

Demostración. Sea M un sistema. Definimos $\equiv_M$ de la siguiente manera: $\equiv_M = \cup\{r \mid r$ es bisimulación pequeña en $M\}$. La cual, de acuerdo con la proposición anterior, es bisimulación. Veamos ahora que es máxima. Sea R una bisimulación en M y sean $(a, b) \in M$ tales que aRb, lo que queremos es que $a \equiv_M b$. Consideremos $r = R \cap (M_a \times M_b)$ y veamos que ésta es una bisimulación. Sean $c, d \in M$ tales que crd y $z \in c_M$, como crd entonces cRd, $c \in M_a$ y $d \in M_b$, lo cual implica que $\exists w \in d_M$ tal que zRw, y al ser z un vértice de M_a y w de M_b, entonces zrw. Bajo el mismo razonamiento obtenemos que $\forall w \in d_M \exists z \in c_M (zrw)$. Por lo tanto, r es bisimulación. Más aún, al M_a y M_b ser conjuntos, r es pequeña; y como $a \in M_a$, $b \in M_b$ y además sabemos que aRb, entonces $(a, b) \in r$, concluyendo finalmente que $a \equiv_M b$. □

Proposición 2.3.14. *La relacional* $\equiv$ *es la bisimulación máxima en* V*.*

Demostración. Anteriormente vimos que $\equiv$ es bisimulación en V (proposición 2.3.7) por lo tanto sólo hace falta probar que toda bisimulación en V está contenida en $\equiv$. Sea R una bisimulación en V y sea $(a, b) \in R$. Definamos el sistema $M = R, \leftarrow$ de modo que los vértices de M sean las parejas ordenadas (x, y) que son elementos de R y las aristas de M definidas de la siguiente manera:
$\forall (x, y)(w, z) \in R\, [(w, z) \leftarrow (x, y) \Leftrightarrow w \in x \wedge z \in y]$. Para ver que M así definido es un sistema hace falta notar que la relacional $\leftarrow$ es izquierda limitada, lo cual es fácil de ver ya que $\forall (x, y) \in M\, [(x, y)_M \subseteq x \times y]$. Ahora, consideremos las siguientes funcionales:

$$D_1 : M \longrightarrow V \qquad\qquad D_2 : M \longrightarrow V$$
$$\forall (x, y) \in M\, [D_1((x, y)) = x] \qquad\qquad \forall (x, y) \in M\, [D_2((x, y)) = y].$$

Veamos que D_1 y D_2 son decoraciones de M, es decir, que
$\forall (x, y) \in M\, [D_i((x, y)) = \{D_i((w, z)) \mid (w, z) \leftarrow (x, y)\}]$ para $i \in \{1, 2\}$.
Empecemos con la funcional D_1. Como $D_1((x, y)) = x$ entonces basta con probar que $x = \{u \mid \exists (w, z) \in M\, [D_1((w, z)) = u \wedge (w, z) \leftarrow (x, y)]\}$. Esto lo haremos por doble contención.
Sea $w \in x$, como xRy y $R \subseteq R^+$ entonces wRz para algún $z \in y$. De modo

que $D_1((w,z)) = w$ y $(w,z) \leftarrow (x,y)$. Con esto tenemos la contención deseada. Ahora, sea $u \in \{u \mid \exists (w,z) \in M\ [D_1((w,z)) = u \wedge (w,z) \leftarrow (x,y)]\}$ y sea (w,z) testigo de ello, entonces $D_1((w,z)) = u$ y $(w,z) \leftarrow (x,y)$, pero por la definición de D_1, concluimos que $u = w$; y de acuerdo con la definición de $\leftarrow$ en M se tiene finalmente que $u \in x$. De manera análoga se prueba que D_2 es decoración de M. Por último, considerando la subgráfica $M_{(a,b)}$ con las decoraciones $(D_1)_{(a,b)}$ y $(D_2)_{(a,b)}$, se obtiene $a \equiv b$. □

A partir de las observaciones hechas en la página 27 y de este último resultado se puede ver la importancia de la noción de bisimulación, ya que lo que nos revela la proposición anterior es que dos conjuntos son bisimilares si y sólo si existe una gráfica que es pintura de ambos.

Lema 2.3.15. *Sea M un sistema.*

(I) Id_M es bisimulación en M y $\forall a,b \in M\ [a =^+ b \Leftrightarrow a_M = b_M]$.

(II) Si R es bisimulación en M, R^{-1} también lo es, y $(R^{-1})^+ = (R^+)^{-1}$.

(III) Si R y S son bisimulaciones en M, entonces $S \circ R$ también lo es y $S^+ \circ R^+ \subseteq (S \circ R)^+$.

Demostración. (I) Anteriormente, en el ejemplo 2.3.6 se probó que Id_M es bisimulación y bajo un razonamiento análogo al hecho en la prueba de dicho ejemplo, es fácil ver la segunda parte de la afirmación.

(II) Si R es bisimulación en M entonces es fácil probar que R^{-1} también lo es, ya que $bR^{-1}a$ si y sólo si aRb. Veamos entonces la segunda parte de la afirmación.
$(b,a) \in (R^{-1})^+ \Leftrightarrow \forall x \in a_M \exists y \in b_M [yR^{-1}x] \wedge \forall y \in b_M \exists x \in a_M [yR^{-1}x]$
$\Leftrightarrow \forall x \in a_M \exists y \in b_M [xRy] \wedge \forall y \in b_M \exists x \in a_M [xRy]$
$\Leftrightarrow (a,b) \in R^+ \Leftrightarrow (b,a) \in (R^+)^{-1}$.

(III) Sean S, R bisimulaciones en M y sea $(a,c) \in S \circ R$ entonces $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in S$ para alguna $b \in Dom\ S \cap Im\ R$. Como R y S son bisimulaciones, entonces:
$\forall x \in a_M \exists y \in b_M [xRy] \wedge \forall y \in b_M \exists x \in a_M [xRy]$ y $\forall y \in b_M \exists z \in c_M [ySz] \wedge \forall z \in c_M \exists y \in b_M [ySz]$. Entonces $\forall x \in a_M \exists z \in c_M [(xRy) \wedge (ySz)]$ para algún hijo y de b; y $\forall z \in c_M \exists x \in a_M [(xRy) \wedge (ySz)]$ con $y \in b_M$, es decir, $(a,c) \in (S \circ R)^+$. Por lo tanto $(S \circ R)$ es bisimulación en M.
Ahora veamos que $S^+ \circ R^+ \subseteq (S \circ R)^+$. Sea $(a,c) \in S^+ \circ R^+$ entonces

$\exists b \in Dom\ S^+ \cap Im\ R^+$ tal que $(a,b) \in R^+$ y $(b,c) \in S^+$. Bajo un razonamiento análogo, se tiene que $\forall x \in a_M \exists y \in b_M \exists z \in c_M[xRy \wedge ySz]$ y $\forall z \in c_M \exists y \in b_M \exists x \in a_M[zSy \wedge xRy]$. De modo que $\forall x \in a_M \exists z \in c_M[(x,z) \in S \circ R]$ y $\forall z \in c_M \exists x \in a_M[(x,z) \in S \circ R]$. Concluimos finalmente que $(a,c) \in (S \circ R)^+$.

□

Proposición 2.3.16. *En todo sistema M, la bisimulación $\equiv_M$ es una relacional de equivalencia.*

□

La demostración se obtiene del lema anterior.

Proposición 2.3.17. *Sea M un sistema y considérese la relacional $\equiv_M$ entonces $\equiv_M^+ = \equiv_M$.*

Demostración. Como $\equiv_M$ es bisimulación en M entonces $\equiv_M^+$ también lo es y como $\equiv_M$ es la bisimulación máxima entonces $\equiv_M^+ \subseteq \equiv_M$. Ahora, como $\equiv_M$ es bisimulación en M entonces $\equiv_M \subseteq \equiv_M^+$, concluyendo así que $\equiv_M^+ = \equiv_M$. □

Definición 2.3.18. *Un sistema M es Extensional (EXT) si y sólo si*

$$\forall a, b \in M\ [a_M = b_M \Rightarrow a = b].$$

Y es Fuertemente Extensional (FEX) si y sólo si

$$\forall a, b \in M\ [a \equiv_M b \Rightarrow a = b].$$

Obsérvese que del tercer inciso del ejemplo 2.3.6 se tiene como consecuencia que todo sistema fuertemente extensional es extensional. Nótese también que el sistema $V, \in$ es extensional $[ZF_1]$.
En un principio mencionamos que considerando AFA se puede encontrar una caracterización que permita identificar cuándo dos conjuntos son iguales y vimos que ésta se desprende de la unicidad de la decoración asociada a una gráfica. Veamos entonces que con la siguiente proposición, consecuencia de las proposiciones 2.3.2 y 2.3.14, se tiene la caracterización deseada.

Proposición 2.3.19. *$AFA_!$ es equivalente a V es Fuertemente Extensional.*

□

Es así como finalmente podemos garantizar, con el siguiente resultado, que en $ZF^- + AFA$ es posible determinar, aun en esos casos como los vistos en la página 17, cuándo dos conjuntos son iguales. Esto es ya que, de acuerdo con AFA, la identidad es la mayor bisimulación.

Corolario 2.3.20 (AFA). *Dos conjuntos son iguales si y sólo si son equipintables.*

□

Una vez visto que para dos conjuntos ser iguales es suficiente y necesario que haya una gráfica pintura de ambos, nos surge nuevamente la pregunta planteada anteriormente: ¿qué sucede con las gráficas que resultan ser pintura de un mismo conjunto?

Proposición 2.3.21 (AFA). *Sean M_p y N_q dos gráficas con decoraciones d_1 y d_2, respectivamente. d_1 y d_2 tienen el mismo valor si y solamente si M_p y N_q son bisimilares.*

Demostración. Supongamos que $d_1(p) = d_2(q)$ y definamos la siguiente relación $R = \{(x, y) \in M_p \times N_q \mid d_1(x) = d_2(y)\}$. Veamos que R es bisimulación entre M_p y N_q. Claramente pRq. Ahora, supongamos que aRb y sea $x \in a_M$. De acuerdo con la definición, $aRb \Leftrightarrow d_1(a) = d_2(b) \Leftrightarrow \{d_1(x) \mid x \in a_{M_p}\} = \{d_2(y) \mid y \in b_{N_q}\}$, de modo que debe existir y, un hijo de b, tal que $d_1(x) = d_2(y)$. Análogamente se tiene que $\forall y \in b_{M_q} \exists x \in a_{M_p}(d_1(x) = d_2(y))$. Por lo tanto R es bisimulación entre M_p y N_q.
Para el regreso, sea $R \subseteq M_p \times N_q$ la bisimulación entre M_p y N_q. Definamos $\leftarrow = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in R \times R \mid a_1 \leftarrow_p b_1 \wedge a_2 \leftarrow_q b_2\}$. Considérese entonces la gráfica $g = (R, \leftarrow)$ y d_p y d_q las decoraciones de M_p y N_q respectivamente (Nótese que sólo es necesario AFA en esta parte de la demostración). Definamos las siguientes dos funciones:
$\forall (a_1, a_2) \in R[\ D_1((a_1, a_2)) = d_p(a_1),\ D_2((a_1, a_2)) = d_q(a_2)]$.
Veamos que éstas resultan ser decoraciones de g.
$D_1((a_1, a_2)) = d_p(a_1) = \{d_p(b_1) \mid b_1 \leftarrow_p a_1\} = \{D_1(b_1, b_2) \mid b_1 \leftarrow_p a_1 \wedge b_2 \leftarrow_q a_2 \wedge (b_1, b_2) \in R\} = \{D_1(b_1, b_2) \mid (b_1, b_2) \leftarrow (a_1, a_2)\}$. Análogamente para D_2. De manera que D_1 y D_2 son decoraciones de g; pero de acuerdo con AFA, $D_1 = D_2$. Por lo tanto $d_p(p) = D_1((p, q)) = D_2((p, q)) = d_q(q)$; es decir, d_p y d_q tienen el mismo valor. □

Por lo tanto, asumiendo AFA, dos gráficas son bisimilares si y sólo si son pintura de un mismo conjunto. Y, pensando en las gráficas canónicas, de acuerdo con esta última proposición, dos conjuntos son iguales si y sólo si son bisimilares. Vemos con esto una vez más la importancia de las bisimulaciones.

Por ejemplo, las gráficas $g = (\omega, \{(n^+, n) \mid n \in \omega\}, 0)$ y $h = (\omega, \{(n, m) \mid n > m\}, 0)$ son bisimilares [proposiciones 2.1.18 y 2.3.21].

2.4. N-decoraciones

En esta sección definiremos y desarrollaremos un concepto que es de suma importancia para la construcción de un modelo de $ZFC^- + AFA$. Dicho concepto es una generalización de la noción de decoraciones. Con una decoración lo que se hizo fue relacionar gráficas con conjuntos de manera que tuvieran un mismo esquema. Sin embargo, esta vez relacionaremos subgráficas de un sistema con subgráficas de otro sistema de modo que ambas gráficas tengan una misma estructura.

Definición 2.4.1. *Sean $M, \leftarrow_M$ y $N, \leftarrow_N$ sistemas. Diremos que D es una N-decoración de M si y sólo si $D : M \longrightarrow N$ es una funcional tal que $\forall a \in M[(D(a))_N = \{D(b) \mid b \in a_M\}]$.*

De modo que si $a, b \in M$ y $b \leftarrow_M a$ entonces $D(b) \leftarrow_N D(a)$, es decir, D manda los hijos de a en M en los hijos de $D(a)$ en N. Afirmamos entonces que $\forall a, b \in M[b \leftarrow_M a \Rightarrow D(b) \leftarrow_N D(a)]$. ¿Podremos asegurar también el regreso? Para responder esto pensemos en un conjunto cualquiera a y en su pintura canónica g_a; sabemos entonces que existe una gráfica $g_{a'}$ que es un árbol y pintura de a. Se puede plantear fácilmente una D, decoración de $g_{a'}$, que no cumpla lo que queríamos. Por ejemplo, considérese g_2 la gráfica canónica del número natural 2 y $g_{2'}$ su árbol asociado. Para ilustrar esto y ahorrarnos pasos utilizaremos la figura 2.12. Vemos entonces que $D(c')$ es un hijo de $D(2')$ en g_2 pero c' no lo es de $2'$ en $g_{2'}$. Por lo tanto no siempre podremos afirmar que $\forall a, b \in M[D(b) \leftarrow_N D(a) \Rightarrow b \leftarrow_M a]$.

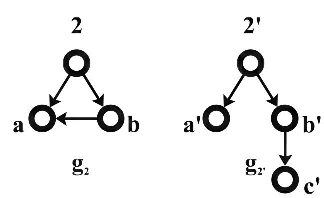

Figura 2.12: Considere $D : g_{2'} \to g_2$ como: $D(2') = 2$, $D(a') = a$, $D(b') = b$ y $D(c') = a$.

Como es posible ver, podemos eliminar el problema si tomamos D inyectiva. Ya que si $D(b) \leftarrow_N D(a)$ entonces $D(b) \in \{D(x) \mid x \in a_M\}$; luego, como D es inyectiva entonces $\nexists x \neq b(D(x) = D(b))$ por lo tanto $b \in a_M$. De modo que, si D es una N-decoración inyectiva de M entonces D es un homomorfismo puesto que: $\forall a, b \in M[b \leftarrow_M a \Leftrightarrow D(b) \leftarrow_N D(a)]$. Más aun, si D es biyectiva, se trata de un isomorfismo entre sistemas.

A pesar de que es suficiente con que la N-decoración sea inyectiva para asegurar que es un homomorfismo, no es necesario. Para ilustrar esto se tienen las dos gráficas siguientes (figura 2.13), donde la N-decoración está indicada con flechas de otro color.

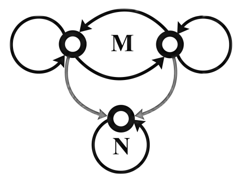

Figura 2.13: Ejemplo de dos gráficas homomorfas entre las cuales no existe un isomorfismo.

Obsérvese también que si consideramos un sistema $M, \leftarrow$ y el sistema $V, \in$ entonces una V-decoración es simplemente una decoración como se definió en un principio ya que $(D(a))_V = D(a)$.

Vimos que una N-decoración de M inyectiva es un homomorfismo de M en N pero podemos decir más.

Proposición 2.4.2. *Sea $H : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de M en N, entonces:*

1. $\forall a \in M[\{H(b) \mid b \in a_M\} \subseteq (H(a))_N]$,

2. *Si H es suprayectiva entonces* $\forall a \in M[(H(a))_N \subseteq \{H(b) \mid b \in a_M\}]$,

Demostración. Como H es un homomorfismo entonces $\forall a, b \in M[b \leftarrow_M a \Leftrightarrow H(a) \leftarrow_N H(b)]$.

1. Sea $a \in M$ y sea $H(b) \in \{H(x) \mid x \in a_M\}$, entonces existe x tal que $H(b) = H(x)$ y $x \in a_M$; esto último implica que $H(x) \leftarrow_N H(a)$. Por lo tanto $H(b) \in (H(a))_N$.

2. Sea $z \in H(a)_N$, entonces $z \in N$ y, al ser H suprayectiva, existe $b \in M$ tal que $(z = H(b))$, de tal modo, $H(b) \leftarrow_N H(a)$ y, al ser H un homomorfismo, $b \in a_M$. Por lo tanto $z \in \{H(b) \mid b \in a_M\}$.

$\square$

De los incisos 1. y 2. se tiene que si H es un homomorfismo suprayectivo de M en N entonces H es una N-decoración de M.

Corolario 2.4.3. *Sea $D : M \longrightarrow N$. D es una N-decoración biyectiva de M si y sólo si D es un isomorfismo entre M y N.*

$\square$

Proposición 2.4.4. *Sean D_1 una N'-decoración de M y D_2 una N-decoración de N', entonces $D_2 \circ D_1$ es una N-decoración de M.*

Demostración. Sea $a \in M$, entonces

$$\begin{aligned} (D_2 \circ D_1(a))_N &= (D_2(D_1(a)))_N \\ &= \{D_2(x) \mid x \in D_1(a)_{N'}\} \text{ por } D_2 \text{ ser } N\text{-decoración de } N'. \end{aligned}$$

Luego, como $(D_1(a))_{N'} = \{D_1(b) \mid b \in a_M\}$, y $x \in D_1(a)_{N'} \Leftrightarrow \exists b \in a_M(x = D_1(b))$, entonces:
$\{D_2(x) \mid x \in D_1(a)_{N'}\} = \{D_2(D_1(b)) \mid b \in a_M\} = \{D_2 \circ D_1(b) \mid b \in a_M\}$. $\square$

Definición 2.4.5. *Sean D_1, D_2 N-decoraciones de M, y R y S relacionales en M y N respectivamente. Definimos las relacionales $R' = (D_1 \times D_2)R$ y $S' = (D_1 \times D_2)^{-1}S$, donde*

$$(D_1 \times D_2)R = \{(D_1(a_1), D_2(a_2)) \mid a_1 R a_2\} \text{ y}$$
$$(D_1 \times D_2)^{-1}S = \{(a_1, a_2) \in M \times M \mid (D_1(a_1))S(D_2(a_2))\}.$$

En el caso particular de que tanto R como S sean bisimulacions en M y N respectivamente, obtenemos el siguiente resultado, con el cual es posible ver cómo las N-decoraciones permiten heredar la estructura de M a N de modo que una bisimulación en M de alguna manera se preserve en N.

Proposición 2.4.6. *Sean D_1, D_2 N-decoraciones de M.*

(i) Si R es bisimulación en M entonces $R' = (D_1 \times D_2)R$, es bisimulación de N.

(ii) Si S es bisimulación en N entonces $S' = (D_1 \times D_2)^{-1}S$ es bisimulación en M.

Demostración. (i) Sean $b_1, b_2 \in N$ tales que $b_1 R' b_2$ entonces $D_1(a_1) = b_1, D_2(a_2) = b_2$ y $a_1 R a_2$ para algunos $a_1, a_2 \in M$. Sea $b_1' \in {b_1}_N$, como ${b_1}_N = (D_1(a_1))_N$ y $(D_1(a_1))_N = \{D_1(b) \mid b \in {a_1}_M\}$ entonces $b_1' = D(a_1')$ para algún hijo a_1' de ${a_1}_M$. Luego, como R es bisimulación en M entonces $a_1' R a_2'$ para alguna $a_2' \in {a_2}_M$, por lo tanto, de acuerdo con la definición de R', $D_1(a_1') R' D_2(a_2')$. Sea $b_2' = D_2(a_2')$ entonces, con base en la definición de D_2, $b'_2 \in \{D_2(b) \mid b \in a_{2_M}\} = (D_2(a_2))_N = b_{2_N}$. Teniendo así que $\forall b_1, b_2 \in N$ si $b_1 R' b_2$ entonces $\forall b'_1 \in b_{1_N} \exists b'_2 \in b_{2_M}[b'_1 R' b'_2]$. De manera análoga se obtiene que para cualquier $b'_2 \in b_{2_N}$ existe un $b'_1 \in b_{1_N}$ tales que están R'-relacionados. Por lo tanto R' es bisimulación en N.

(ii) Esta demostración es análoga a la del inciso anterior.

□

Con el siguiente corolario es más fácil ver cómo es que se preservan las estructuras con las N-decoraciones.

Corolario 2.4.7. *Sean N y M dos sistemas y D_1 y D_2 N-decoraciones de M. Entonces, para cualesquiera $a, b \in M$:*

1. $a \equiv_M b \Leftrightarrow D_1(a) \equiv_N D_2(b)$,
2. $D_1(a) \equiv_N D_2(a)$,
3. $D_1(a) = D_2(b) \Rightarrow a \equiv_M b$.

Demostración. 1. Éste es un resultado inmediato de la proposición anterior, al asegurar que tanto $(D_1 \times D_2) \equiv_M$ como $(D_1 \times D_2)^{-1} \equiv_M$ son bisimulaciones en M y N respectivamente.

2. Como $a \equiv_M a$ para cualquier vértice a de M [2.3.6] entonces, de acuerdo con el inciso anterior, podemos concluir la afirmación deseada.

3. Esta prueba es también muy sencilla ya que, $\forall a, b \in M[(D_1(a) = D_1(b)) \Rightarrow D_1(a) \equiv_N D_2(b) \Rightarrow a \equiv_M b]$ [2.3.6 e inciso *1.*].

□

Lema 2.4.8. *Sea R una bisimulación en M y M_0 el sistema cuyos vértices son las parejas ordenadas pertenecientes a la relación R con: $(b', a') \leftarrow_{M_0} (b, a) \Leftrightarrow b' \leftarrow_M b \wedge a' \leftarrow_M a$. Y sean $D_1, D_2 : M_0 \longrightarrow M$ definidas como:*

$$\forall (b, a) \in M_0\ [D_1((b, a)) = b] \qquad \forall (b, a) \in M_0\ [D_2((b, a)) = a].$$

Entonces D_1 y D_2 son M-decoraciones de M_0.

La demostración es análoga a la hecha en la prueba de la proposición 2.3.14, de hecho se trata de una generalización.

□

Definición 2.4.9. *Sea M un sistema. Diremos que a y b en M son M-pintables si y sólo si existen g_p una gpa y M-decoraciones d_1 y d_2, de g_p, tales que $d_1(p) = a$ y $d_2(p) = b$.*

Con base en este nuevo concepto podemos hacer una generalización de la proposición 2.3.14.

Proposición 2.4.10. *Sea M un sistema. Para cualesquiera a y b en M, $a \equiv_M b$ si y sólo si a y b son M-pintables.*

Demostración. Consideremos el sistema M_0 como en el lema 2.4.8 con respecto a la bisimulación $\equiv_M$ y D_1, D_2 las M-decoraciones también definidas en dicho lema. Luego, sean $a, b \in M$ tales que $a \equiv_M b$, entonces la gráfica $M_{0_{(a,b)}}$ es una M-pintura de a y b, por lo tanto a y b son M-pintables.
Para el regreso, sean a y b M-pintables, de manera que existen una gpa g_p y M-decoraciones d_1 y d_2 tales que $d_1(p) = a$ y $d_2(p) = b$. Y, de acuerdo con el corolario 2.4.7, $d_1(p) \equiv_M d_2(p)$ de manera que $a \equiv_M b$. □

Tenemos ahora la siguiente proposición, que de alguna manera engloba estos últimos resultados.

Proposición 2.4.11. *Sea M un sistema.*
M es FEX si y sólo si para cada sistema N hay a lo más una M-decoración.

Demostración. Sean M un sistema FEX y D_1, D_2 M-decoraciones en un sistema N. De acuerdo con el corolario 2.4.7 $\forall a \in N[D_1(a) \equiv_M D_2(a)]$ y al M ser FEX, $\forall a \in N[D_1(a) \equiv_M D_2(a) \Rightarrow D_1(a) = D_2(a)]$, concluyendo que, de tener una M-decoración, ésta es única.
Sea M un sistema y supongamos que para cada sistema N hay a lo más una M-decoración. Luego, sean $a, b \in M$ tales que $a \equiv_M b$; existen entonces g_p y M-decoraciones D_1 y D_2 de g_p tales que $D_1(p) = a$ y $D_2(p) = b$ [2.4.10]; de manera que, de acuerdo con la hipótesis $D_1(p) = D_2(p)$, por lo tanto M es FEX. □

Si nos fijamos en la demostración anterior podemos ver que si en lugar de N ser un sistema lo restringimos a gráficas la demostración sería la misma (tanto en la primera como en la segunda implicación). De este modo podemos también afirmar que: *Un sistema M es FEX si y sólo si para cada gráfica g hay a lo más una M-decoración.*

2.5. Cociente

En esta sección trabajaremos con un concepto que será de mucha importancia para probar la consistencia de la teoría que hemos desarrollado a lo largo de este trabajo, es decir, la teoría a partir de $ZF^{-} + AFA$.
Supongamos que tenemos un sistema M y R una relacional de equivalencia en él. Nos gustaría definir entonces el cociente de M módulo R, es decir, la colección M/R formada por todas las clases de equivalencia de M con respecto a R.

$M/R = \{x/R \mid x \in M\}$, donde x/R es la clase de equivalencia de x.

Pero aquí hay un problema y éste es que la clase de equivalencia de x podría ser propia, caso en el cual no es posible definir así el cociente.
Pensemos en un conjunto a y en $\sim$ una relación de equivalencia en éste y definamos la siguiente función:

$$\pi : a \longrightarrow a/\sim$$
$$\forall x \in a(\pi(x) = x/\sim).$$

Es claro que π es suprayectiva y que para cualesquiera x y y elementos de a, $x \sim y$ si y sólo si $\pi(x) = \pi(y)$.
Con base en esto definimos el cociente de una clase módulo una relacional de equivalencia del siguiente modo.

Definición 2.5.1. *Sea M una clase y R una relacional de equivalencia en M. π es una funcional cociente de M si y sólo si:*

(I) π es una funcional con dominio M y

(II) $\forall a, b \in M\ [aRb \Leftrightarrow \pi(a) = \pi(b)]$.

A la imagen de π se le llama cociente de M módulo R con respecto a π.

En el caso particular en el cual M es un sistema, dada una funcional cociente π, de M, es posible darle a $M' = \pi[M]$, estructura de sistema, de modo que éste se comporte de manera natural. Para esto, definamos el sistema $M', \leftarrow_{\pi}$ asociado al cociente de M módulo R con respecto a π, donde la relacional $\leftarrow_{\pi} \subseteq M' \times M'$ queda descrita por:

$$\forall a', b' \in M'[b' \leftarrow_{\pi} a' \Leftrightarrow \exists a, b \in M(\pi(a) = a' \wedge \pi(b) = b' \wedge b \leftarrow a)].$$

Esto nos permite, dados un sistema M y una funcional cociente π en éste, referirnos al sistema $M', \leftarrow_{\pi}$, como el cociente de M módulo R (con respecto a π). Veamos cómo se comporta π y qué propiedades tiene $M', \leftarrow_{\pi}$.

Proposición 2.5.2. *Si R es una bisimulación de equivalencia en el sistema M y $M', \leftarrow_\pi$ un cociente de M módulo R, entonces π es una M'-decoración de M.*

Demostración. Sea $a \in M$ queremos probar que $\pi(a)_{M'} = \{\pi(b) \mid b \in a_M\}$. Hagámoslo por doble contención.

$\subseteq$) Sea $b' \in (\pi(a))_{M'}$ entonces, de acuerdo con la definición, existen $b_1, b_2 \in M$ tales que $(\pi(b_1) = b')$, $(\pi(b_2) = \pi(a))$ y $(b_1 \leftarrow_M b_2)$; además, $\pi(b_2) = \pi(a)$ si y sólo si $b_2 Ra$. Luego, como R es bisimulación en M entonces para todo $x \in {b_2}_M$, en particular para b_1, existe $b \in a_M$ tal que $b_1 Rb$; sea b testigo de ello, entonces $\pi(b_1) = \pi(b)$. Por lo tanto $b' = \pi(b)$ y $b \in a_M$ es decir, $b' \in \{\pi(b) \mid b \in a_M\}$.

$\supseteq$) Esta contención es inmediata.

$\square$

Con esto, y el corolario 2.4.7, obtenemos un resultado sencillo pero deseable, que nos muestra cómo el cociente preserva la estructura del sistema original.

Proposición 2.5.3. *Sean R una bisimulación de equivalencia en el sistema M y $M', \leftarrow_\pi$ un cociente de M módulo R. Entonces, $\forall a, b \in M[a \equiv_M b \Leftrightarrow \pi(a) \equiv_{M'} \pi(b)]$.*

Una vez dada la definición anterior surge la pregunta de si, dados cualquier sistema M y una relacional de equivalencia R en éste, existirá un cociente. Y resulta que la existencia de un cociente a partir de una relacional de equivalencia no se puede probar en ZF^- con la lógica subyacente a la teoría de los conjuntos (lógica de primer orden). Más adelante veremos cómo resolver este problema y hasta qué punto es posible una solución. Por ahora sólo probaremos que, de existir un cociente, éste es único salvo isomorfismo.

Proposición 2.5.4. *Sean M un sistema y R una relacional de equivalencia en él. Cualesquiera dos cocientes de M módulo R, son isomorfos.*

Demostración. Sean $M, \leftarrow$ un sistema, R una bisimulación de equivalencia en él y $M', \leftarrow_{\pi_1}$ y $M'', \leftarrow_{\pi_2}$ cocientes de M módulo R. Queremos probar que hay un isomorfismo entre ellos. Definamos $F : M' \longrightarrow M''$ de la siguiente manera:
$F = \{(a', a'') \in M' \times M'' \mid \exists a \in M(\pi_1(a) = a' \wedge \pi_2(a) = a'')\}$.
Primero veamos que F es una funcional inyectiva. Sean $(a', a''), (b', b'') \in F$

de manera que $\pi_1(a) = a'$, $\pi_2(a) = a''$, $\pi_1(b) = b'$ y $\pi_2(b) = b''$, para algunos vértices a y b de M. De modo que, $a' = b' \Leftrightarrow \pi_1(a) = \pi_1(b)$ y, de acuerdo con la definición de cociente, $\pi_1(a) = \pi_1(b) \Leftrightarrow aRb$, luego, como $M'', \leftarrow_{\pi_2}$ también es cociente entonces
$aRb \Leftrightarrow \pi_2(a) = \pi_2(b)$. Por lo tanto $a' = b' \Leftrightarrow a'' = b''$, concluyendo así que F es una funcional inyectiva. Falta probar que $Im(F) = M''$ y $Dom(F) = M'$. Para ver que $Im(F) = M''$, sea $a'' \in M''$, como π_2 es suprayectiva entonces existe $a \in M$ tal que $\pi_2(a) = a''$, considérese $a' = \pi_1(a)$, de modo que $(a', a'') \in F$. Análogamente para ver que $Dom(F) = M'$ tomemos $a' \in M'$; como π_1 es sobreyectiva entonces existe $a \in M$ tal que $\pi_1(a) = a'$ por lo que basta con considerar $a'' = \pi_2(a)$ para concluir que $(a', a'') \in F$. Por lo tanto $Dom(F) = M'$ e $Im(F) = M''$.

Ahora veamos que F es homomorfismo, es decir: dados $a', b' \in M'$ queremos probar que $b' \leftarrow_{\pi_1} a'$ si y sólo si $F(b') \leftarrow_{\pi_2} F(a')$. Sean $F(a'), F(b') \in M''$, de manera que existen $a, b \in M$ tales que
$\pi_1(a) = a' \wedge \pi_2(a) = F(a')$ y $\pi_1(b) = b' \wedge \pi_2(b) = F(b')$. Por lo que
$b' \leftarrow_{\pi_1} a' \Leftrightarrow \pi_1(b) \leftarrow_{\pi_1} \pi_1(a)$ y, de acuerdo con la definición de $\leftarrow_{\pi_1}$, esto último sucede si y sólo si existen a_1 y b_1 en M tales que $\pi_1(a_1) = \pi_1(a) \wedge \pi_1(b_1) = \pi_1(b) \wedge b_1 \leftarrow_M a_1$; si y sólo si existen a_1 y b_1 en M tales que $a_1Ra \wedge b_1Rb \wedge b_1 \leftarrow_M a_1$. Así mismo, como π_2 también es funcional cociente de M módulo R, la última afirmación se cumple si y sólo si existen a_1 y b_1 en M tales que $\pi_2(a_1) = \pi_2(a) \wedge \pi_2(b_1) = \pi_2(b) \wedge b_1 \leftarrow_M a_1]$; si y sólo si existen a_1 y b_1 en M tales que $\pi_2(a_1) = F(a') \wedge \pi_2(b_1) = F(b') \wedge b_1 \leftarrow_M a_1$ si y sólo si $F(b') \leftarrow_{\pi_2} F(a')$.
Por lo tanto F es homomorfismo. Concluyendo que F es un isomorfismo entre $M', \leftarrow_{\pi_1}$ y $M'', \leftarrow_{\pi_2}$. □

Debido a esta proposición, a partir de aquí nos referiremos a un cociente de M módulo R como "el cociente"de M módulo R.
A partir de cualquier relacional de equivalencia en un sistema hemos definido al cociente de dicho sistema módulo la relacional dada. En el caso de los sistemas nos preguntamos cómo será el cociente módulo una bisimulación de equivalencia, en particular quisiéramos ver qué sucede cuando se trata de la bisimulación máxima del sistema dado. Y resulta que en dicho caso el cociente es un sistema fuertemente extensional. Pero podemos afirmar aún más.

Proposición 2.5.5. *Sean R una bisimulación de equivalencia sobre M y $M', \leftarrow_\pi$ el cociente de M módulo R. Así,*

$$M' \textit{ es } FEX \textit{ si y sólo si } R = \equiv_M.$$

Demostración. Primero veamos que si M' es FEX entonces la bisimulación R es la bisimulación máxima en M. Para esto supongamos que M' es FEX. Sabemos que $R \subseteq \equiv_M$, falta probar que $\equiv_M \subseteq R$. Sean $a, b \in M$ tales que $a \equiv_M b$, de manera que $\pi(a) \equiv_{M'} \pi(b)$ [2.5.3], lo cual implica, al M' ser FEX, que $\pi(a) = \pi(b)$; entonces, de acuerdo con la definición de π, aRb; por lo tanto $\equiv_M = R$.
Probemos la segunda implicación. Supongamos que $M', \leftarrow_\pi$ es el cociente de M módulo $\equiv_M$ y consideremos $a', b' \in M'$ tales que $a' \equiv_{M'} b'$, queremos probar que $a' = b'$. Como π es suprayectiva entonces existen a y b en M tales que $\pi(a) = a'$ y $\pi(b) = b'$, lo cual implica que $a \equiv_M b$ [2.5.3]; por lo tanto, $\pi(a) = \pi(b)$. □

Es por esto que, dado un sistema M, diremos que M' es el cociente fuertemente extensional de M si y sólo si es el cociente de M módulo la bisimulación máxima en dicho sistema.

Regresemos al problema planteado al principio de esta sección, el de demostrar la existencia de un cociente módulo una relacional de equivalencia. Como ya vimos, dicho cociente no puede ser la colección de clases de equivalencia. Queda entonces la opción de tomar un representante de cada una de las clases, de manera que M' sea la colección de todos los representantes y π la funcional que manda a todo elemento de M al representante de su clase. Es claro que la funcional π que acabamos de describir cumple con las condiciones de la definición 2.5.1, sin embargo esto sigue siendo un problema ya que pueden tratarse de clases propias, por lo cual necesitaríamos del principio conocido como Axioma de Elección Global[14]. De manera que, en general, dada una clase M y una relacional de equivalencia R en ésta, no podremos obtener un cociente. No obstante, dado un sistema M, utilizando su bisimulación máxima será posible, como veremos a continuación, probar la existencia de su cociente con base en la jerarquía acumulativa. Más aún, como dicho cociente es con base en su bisimulación máxima, entonces será fuertemente extensional [2.5.5].

Proposición 2.5.6. *Todo sistema $M \subseteq BF$ tiene un cociente fuertemente extensional.*

Demostración. Lo que buscamos es una funcional π, suprayectiva, con dominio M tal que:

$$\forall x, y \in M(x \equiv_M y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y)). \tag{2.2}$$

[14]Éste es una extensión del Axioma de Elección para clases.

Si M es un conjunto, la construcción es sencilla; los elementos de M' serán las clases de equivalencia de M bajo $\equiv_M$, y π una funcional que mande a cada elemento de M a su clase de equivalencia.
El problema llega cuando M es una clase propia y alguna de las clases de equivalencia también lo es. Para evitar dicho problema, definamos la funcional π como sigue:

$$\forall a \in M(\pi(a) = \{b \in BF_\alpha \mid a \equiv_M b\}),$$

donde α es el menor ordinal que hace que dicho conjunto sea no vacío. Es decir, la clase de equivalencia es un subconjunto del menor estrato en la jerarquía acumulativa, que hace al conjunto anteriormente definido no vacío. Se sigue entonces, tanto de esta definición como de la de BF, que π satisface (2.2). De manera que π es una funcional cociente de M y $M' = \pi[M]$ el cociente de M módulo $\equiv_M$.
El hecho de que dicho cociente sea extensional se obtiene de manera inmediata de la proposición 2.5.5.

$\square$

Por último tenemos un resultado que utilizaremos en el siguiente capítulo, al cual podemos relacionarlo con la proposición 2.4.11.

Proposición 2.5.7. *Sea $M \subseteq BF$ un sistema.*

M es FEX si y sólo si para cada sistema M', cualquier M'-decoración de M es inyectiva.

Demostración. Sean M FEX, M' un sistema y D una M'-decoración de M, queremos ver que D es inyectiva; para esto, sean $a, b \in M$ tales que $D(a) = D(b)$. De acuerdo con el corolario 2.4.7 $a \equiv_M b$, de manera que, al M ser FEX, $a = b$, probando con esto la inyectividad de D.
Para la otra implicación considere M un sistema tal que para cada sistema M', cualquier M'-decoración de M es inyectiva, queremos ver que M es FEX. Sean $a, b \in M$ tales que $a \equiv_M b$ y $M', \leftarrow_\pi$ el cociente fuertemente extensional de M. De manera que $\forall a, b \in M(a \equiv_M b \Leftrightarrow \pi(a) = \pi(b))$; por otro lado, al π ser una M'-decoración de M [2.5.2], de acuerdo con la hipótesis, π es inyectiva, concluyendo de este modo que M es FEX. $\square$

Capítulo 3

Consistencia de $ZFC^- + AFA$

El principal objetivo de este capítulo es probar la consistencia de $ZFC^- + AFA$; para esto necesitamos dar un modelo de dicho conjunto de axiomas. Sin embargo, de acuerdo con el segundo teorema de incompletud de Gödel, no es posible probar la consistencia de ZFC, ZFC^- o alguna teoría semejante, bajo un argumento formalizable dentro de la misma. No obstante, la teoría desarrollada a partir de la axiomática ZF es intuitivamente correcta, por lo que se asume su consistencia. Se dice que $ZFC^- + AFA$ es consistente relativo a ZFC si la consistencia de ZFC implica la consistencia de $ZFC^- + AFA$. De modo que, partiendo de la hipótesis de que ZFC es consistente se prueba que $ZFC^- + AFA$ también lo es; tratándose de este modo de una consistencia relativa a ZFC.

Para probar la consistencia de $ZFC^- + AFA$ utilizaremos el metatorema fundamental de pruebas relativas de consistencia para modelos internos de la teoría de los conjuntos, el cual afirma que si tenemos dos conjuntos Σy Γ de enunciados de la teoría de los conjuntos y suponiendo que para alguna clase M, podemos probar desde Σ que M es distinto del vacío y que M es modelo deΓ , entonces si Σ es consistente, Γ también lo es. En el apéndice D puede verse con más detalle este metateorema así como un pequeño repaso sobre modelos.

Lo que se hará en este capítulo será demostrar, a partir de ZFC, la existencia de una clase no vacía, que es modelo de $ZFC^- + AFA$. De manera que en este capítulo trabajaremos con ZFC, de manera que todos los conjuntos son bien fundados, en consecuencia las últimas dos proposiciones del capítulo anterior son válidas para cualquier sistema, es decir.

Proposición 3.0.8. *Todo sistema M tiene un cociente fuertemente extensional.*

Proposición 3.0.9. *Sea M un sistema.*

M es FEX si y sólo si para cada sistema M', cualquier M'-decoración de M es inyectiva.

Para ello comencemos con el siguiente concepto.

Definición 3.0.10. *N es un sistema completo si y sólo si cualquier gráfica tiene una única N-decoración.*

En particular podemos afirmar lo siguiente.

Proposición 3.0.11. *AFA es equivalente a que el sistema $V, \in$ sea completo.*

Notemos que, de acuerdo con la proposición 2.4.11, todo sistema completo es fuertemente extensional. Así mismo, si N es FEX y toda gráfica tiene al menos una N-decoración, entonces N es completa.

Construyamos un sistema completo, para ello consideremos a GPA, la clase de todas las gpas. Definimos el sistema $GPA, \leftarrow_G$ donde para cualesquiera $g_a, h_b \in GPA$, $h_b \leftarrow_G g_a$ si y sólo si $b \leftarrow_g a$ y $(g_a)_b = h_b$. Y $\mathcal{A}, \leftarrow_{\pi_\mathcal{A}}$ el cociente fuertemente extensional de GPA.

Proposición 3.0.12. *Para cada sistema M hay una única $\mathcal{A}$-decoración.*

Demostración. Es fácil ver que la funcional $D : M \longrightarrow GPA$ definida como $\forall a \in M(D(a) = M_a)$, es una GPA-decoración de M, ya que para cualquier a en M, de acuerdo con la definición del sistema GPA:

$$\begin{aligned} D(a)_{GPA} &= (M_a)_{GPA} \\ &= \{M_b \mid b \in a_M\} \\ &= \{D(b) \mid b \in a_M\}. \end{aligned}$$

Ahora, si consideramos $\pi_\mathcal{A} \circ D$ obtenemos una $\mathcal{A}$-decoración de M [proposición 2.4.4]; la cual es única ya que $\mathcal{A}$ es FEX [2.4.11]. Con esto se garantiza la unicidad de D. □

En particular, para cada gráfica hay una única $\mathcal{A}$-decoración, garantizando la siguiente afirmación.

Corolario 3.0.13. *$\mathcal{A}$ es completo.*

□

Con esto podemos hacer una caracterización que nos permita entender mejor cómo es un sistema completo y la importancia de $\mathcal{A}$.

Proposición 3.0.14. *Para cualquier sistema M las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Para todo sistema M' hay una única M-decoración de M'.*

2. *M es completo.*

3. *$M \simeq \mathcal{A}$.*

Demostración. Claramente *1.* implica *2.*. Veamos ahora que *2.* implica *3.*. Para esto, sea $D_{\mathcal{A}} : M \longrightarrow \mathcal{A}$ la única $\mathcal{A}$-decoración de M [3.0.12]. Como M es FEX, entonces $D_{\mathcal{A}}$ es inyectiva [3.0.9]. Probemos ahora que $D_{\mathcal{A}}$ es sobre. Tómese $a \in \mathcal{A}$, de modo tal que $\mathcal{A}_a$ es una gpa con una única M-decoración d. Así, $D = D_{\mathcal{A}} \circ d$ es una $\mathcal{A}$-decoración de $\mathcal{A}_a$ [2.4.4]. Por otro lado, como es fácil ver, la función identidad en $\mathcal{A}_a$ es también una $\mathcal{A}$-decoración. Pero, al $\mathcal{A}$ ser FEX, $D_{\mathcal{A}} \circ d$ debe ser justamente la identidad [2.4.11]. De manera que $D_{\mathcal{A}}$ tiene inversa derecha, con lo cual aseguramos que es sobreyectiva. Así, al $D_{\mathcal{A}}$ ser biyectiva, de acuerdo con el corolario 2.4.3, es isomorfismo entre M y $\mathcal{A}$.
Por último, podemos afirmar que *3.* implica *1.* ya que se trata de una consecuencia directa de la proposición 3.0.12. □

Ahora definamos otro tipo de sistemas que también son muy importantes para este capítulo.

Definición 3.0.15. *Un sistema M es saturado si y sólo si para cualquier subconjunto $x \subseteq M$, hay un único $a \in M$ tal que $x = a_M$.*

Por ejemplo, el sistema $V, \in$ es saturado. De hecho, para cualquier clase M que satisfaga $M = \wp(M)$, $M, \in$ es un sistema saturado. Por ejemplo, el sistema $BF, \in$ lo es. Aún más, la clase BF resulta ser la clase más pequeña con dicha propiedad, mientras que V es la mayor.
Sea M un sistema saturado, para cualquier subconjunto x de M existe un único $a \in M$ tal que $x = a_M$; denotaremos con x^M a dicho elemento.

Proposición 3.0.16. *Todo sistema completo es saturado.*

Demostración. Sean M un sistema completo y x un subconjunto de M. Definamos g como la gráfica que consta únicamente de todas las subgráficas de M generadas por los elementos de x, es decir, $g = (\cup\{M_y \mid y \in x\}, \cup\{\leftarrow_{M_y} \mid y \in x\})$. Luego, extendamos dicha gráfica a la gpa h_p donde ésta consiste en agregarle un vértice p (que no esté en M), cuyos hijos sean únicamente todos los elementos de x, de tal manera que:

$$h_p = (g \cup \{p\}, \leftarrow_g \cup \{x \times \{p\}\}, p).$$

Al M ser completo, existe una única M-decoración de h_p, digamos d. Nótese que la restricción de d a g, $d' = d\restriction_g$, es una M-decoración de g y como la identidad en g también lo es, d' resulta ser la identidad. De manera que:

$$\begin{aligned} d(p)_M &= \{d(y) \mid y \leftarrow_{h_p} p\} \\ &= \{d'(y) \mid y \in x\} \\ &= \{y \mid y \in x\} \\ &= x. \end{aligned}$$

Y como d es única, entonces existe un único $a = d(p)$, tal que $a_M = x$. $\square$

Dado un sistema M podemos dar una interpretación del lenguaje de la teoría de los conjuntos, es decir, una función interpretación que determine una estructura con universo M. Denotemos con I a nuestra función interpretación, de manera que $dom(I) = \rho = \{\in\}$ e $I(\in) = \in_M$, es decir, el símbolo de predicado $\in$ es interpretado como $\in_M$, donde ésta está definida del siguiente modo: para cualesquiera $a, b \in M$,

$$b \in_M a \Leftrightarrow b \in a_M.$$

Bajo esta interpretación podemos asegurar lo siguiente.

Proposición 3.0.17. *[Teorema de Rieger](AC) Todo sistema saturado es modelo de ZFC^-.*

Demostración. Sea M un sistema saturado. Escribiremos $\mathfrak{M}$ para referirnos a la estructura $M, \in_M$.
Veamos que ésta satisface todos los axiomas de ZFC^-.

ZF_1. Axioma de extensionalidad.
Sean $a, b \in M$ tales que

$$\mathfrak{M} \models \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b).$$

De acuerdo con la interpretación bajo la cual estamos trabajando, esto significa que $\forall x \in M(x \in a_M \leftrightarrow x \in b_M)$, de modo que $a_M = b_M$. Por otro lado tenemos que $(a_M)^M = a$ y $(b_M)^M = b$, por lo tanto, $(a_M)^M = (b_M)^M$. Teniendo así que:

$$\mathfrak{M} \models \forall a \forall b(\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b).$$

ZF_2. Axioma de existencia.
Como M es saturado y $\phi \subseteq M$, entonces basta con tomar ϕ^M para concluir que:

$$\mathfrak{M} \vDash \exists x \forall y (y \notin x).$$

ZF_3. Axioma del par.
Sean $a, b \in M$, como $\{a, b\} \subseteq M$, si consideramos al conjunto $c = \{a, b\}^M$, se tiene que $c_M = (\{a, b\}^M)_M = \{a, b\}$. Por lo cual se tiene que:

$$\mathfrak{M} \vDash \forall a \forall b \exists c [\forall x (x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))].$$

ZF_4. Axioma de la unión.
Sea $a \in M$ y considérese $b = \{x \mid x \in y_M \text{ para algún } y \in a_M\}$, de modo tal que si tomamos $c = b^M$, $x \in c_M$ si y sólo si existe $y \in a_M$ tal que $x \in y_M$, por lo tanto:

$$\mathfrak{M} \vDash \forall a \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow \exists y (y \in a \wedge x \in y)).$$

ZF_5. Axioma del conjunto potencia.
Sea $a \in M$, $c = \{z^M \mid \forall y \in z (y \in a_M)\} \subseteq M$ y $b = c^M$; así, $b_M = c$, por lo tanto $\forall x (x \in b_M \leftrightarrow \forall y \in x_M (y \in a_M))$. Por lo tanto:

$$\mathfrak{M} \vDash \forall a \exists b \forall x (x \in b \leftrightarrow \forall y \in x (y \in a)).$$

ZF_6. Esquema de comprensión.
Sea $a \in M$ y $\varphi(x)$ una fórmula en la cual x ocurre libre. Consideremos $b = \{x \in a_M \mid \mathfrak{M} \vDash \varphi(x)\}^M$, de manera que $x \in b_M$ si y sólo si $x \in a_M$ y $\mathfrak{M} \vDash \varphi(x)$, es decir,

$$\mathfrak{M} \vDash \forall a \exists b \forall x (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)).$$

ZF_7. Axioma del infinito.
Definamos

$$\begin{aligned} a_0 &= \phi^M \text{ y, para toda } n \in \omega \\ a_{n^+} &= ((a_n)_M \cup \{a_n\})^M. \end{aligned}$$

Así, $\{a_i \mid i \in \omega\} \subset M$, de manera que si consideramos el conjuto $a = \{a_i \mid i \in \omega\}^M$ se tiene que $a_0 \in a$ y que para cualquier $x \in a_M$, $(x \cup \{x\})^{(M)} = (x_M \cup \{x\})^M \in a_M$, donde $(x \cup \{x\})^(M)$ es el vértice de M que representa a $x \cup \{x\}$. Por lo tanto:

$$\mathfrak{M} \vDash \exists a(\phi \in a \wedge \forall x \in a(x \cup \{x\} \in a)).$$

ZF_8. Esquema de reemplazo.
Sea $a \in M$ y $\varphi(x, y)$ una fórmula con al menos x y y libres, y supóngase que:

$$\mathfrak{M} \vDash \forall x \exists y \forall z(\varphi(x, y) \wedge (\varphi(x, z) \rightarrow y = z)).$$

Es decir, $\forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M(\mathfrak{M} \vDash \varphi(x, y) \wedge \mathfrak{M} \vDash (\varphi(x, z) \rightarrow y = z))$. De manera que, sea a un vértice de M; se tiene entonces que $\forall x \in a_M \exists! y \in M$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \varphi(x, y)$. Y, de acuerdo con el axioma de reemplazo, existe un conjunto c tal que $\forall y(y \in c \leftrightarrow \exists x \in a_M \wedge \mathfrak{M} \vDash \varphi(x, y))$. Así, si consideramos $b = (c \cap M)^M$, obtenemos finalmente:

$$\mathfrak{M} \vDash \forall x \exists y \forall z[\varphi(x, y) \wedge (\varphi(x, z) \rightarrow y = z)] \rightarrow (\forall a \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge \varphi(x, y)))).$$

AC. Axioma de elección.
Sea $a \in M$ tal que

$$\mathfrak{M} \vDash \forall x \in a \exists y \in x \wedge \forall z, w \in a(\exists u(u \in z \wedge u \in w) \rightarrow z = w).$$

Esto en virtud de que $(x \cap c)^{(M)} = (x_M \cap c_M)^M = \{x_c\}^M = (\{x_c\})^{(M)}$. Es decir, $\forall x \in a_M(x_M \neq \phi)$ y para cualesquiera $x_1, x_2 \in a_M(\exists u(u \in x_{1M} \wedge u \in x_{2M}) \rightarrow x_1 = x_2)$. De manera que el conjunto $\{x_M \mid x \in a_M\}$ es un conjunto no vacío de elementos ajenos dos a dos. Así, de acuerdo con el axioma de elección, existe un conjunto b tal que para cualquier x_M, con $x \in a_M$, $x_M \cap b = \{c_x\}$ para algún vértice c_x. Basta entonces con considerar $c = \{c_x \mid x \in a_M\}^M$ para concluir que:

$$\mathfrak{M} \vDash \forall a[(\phi \notin a \wedge \forall z, w \in a(\exists u(u \in z \wedge u \in w) \rightarrow z = w)) \rightarrow \exists c \forall x \in a \exists c_x(x \cap c = \{c_x\})].$$

Por lo tanto, todo sistema saturado es modelo de ZFC^{-}. □

Estamos finalmente en posición de concluir el objetivo principal de este capítulo.

Proposición 3.0.18. *Todo sistema completo es modelo de AFA.*

Demostración. Sea M un sistema completo. Y definamos, para cualesquiera $a, b \in M$, $(a,b)^{(M)} = \{\{a\}^M, \{a,b\}^M\}^M$, el único vértice en M que representa a la pareja ordenada (a, b) estándar. Como se vio en un principio, una gráfica es un par ordenado que consiste de un conjunto y de una relación binaria en él. Así, si $\mathfrak{M}$ es como en la proposición anterior, se tiene que para cualquier $c \in M$, $\mathfrak{M} \vDash$ "c es una gráfica"si y sólo si existen $a, b \in M$ tales que $c = (a,b)^{(M)}$ y $\mathfrak{M} \vDash$ "b es una relación binaria en a", es decir, $b_M \subseteq \{(y,x)^{(M)} \mid x, y \in a_M\}$. A partir de esto definimos la gráfica g que tiene como vértices los elementos de a_M y cuyas aristas son justamente las parejas ordenadas (y, x) tales que $(y,x)^{(M)} \in b_M$. Luego, al M ser completo, g tiene una única M-decoración, digamos d, tal que para toda $x \in a_M$:

$$\begin{aligned} d(x)_M &= \{d(y) \mid y \in x_g\} \\ &= \{d(y) \mid (y,x)^{(M)} \in b_M\}. \end{aligned}$$

Notemos que $\{(x, d(x))^{(M)} \mid x \in a_M\} \subseteq M$, podemos considerar entonces $D = \{(x, d(x))^{(M)} \mid x \in a_M\}^M$. De modo que D es el único vértice de M cuyos hijos son exactamente las "parejas ordenadas"$(x, d(x))$. Por lo tanto:

$$M \vDash \text{"}D \text{ es la única decoración de la gráfica } c\text{"}.$$

Esto prueba que M es un modelo de AFA. □

Proposición 3.0.19. *Todo sistema completo es, bajo la interpretación dada anteriormente un modelo de $ZFC^- + AFA$.*

□

Se mostró entonces que $\mathcal{A}$ es no vacío, en consecuencia, de acuerdo con el metateorema D.0.17, $ZFC^- + AFA$ es consistente relativamente a ZFC; y $\mathcal{A}$ es testigo de ello. Por último, veamos un resultado sobre ABF.

Proposición 3.0.20. *Sea M un sistema saturado. M es modelo de ABF si y sólo si $\leftarrow$ bien funda a M.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que M es modelo de ABF, lo cual significa que $\forall a \in M[a_M \neq \phi \to \exists m(m \in a_M \wedge \forall y(y \in m_M \to y \notin a_M))]$. Probemos entonces que $\leftarrow$ bien funda a M (extendiendo la noción a clases). Sea $a \subseteq M$ y $a \neq \phi$, entonces, como M es saturado, existe $b \in M$ tal que $a = b_M$. Por otro lado, como M es modelo de ABF y $b_M \neq \phi$, entonces existe $m \in b_M$ tal que $\forall y(y \in m_M \to y \notin b_M)$. Como $m \in b_M$ entonces $m \in a$, y para cualquier $y \in a(y \notin m_M)$, por lo tanto $\leftarrow$ bien funda a M.
$\Leftarrow$] Ahora supongamos que $\leftarrow$ bien funda a M y sea $a \in M$ tal que $a_M \neq \phi$,

entonces, de acuerdo con la hipótesis, $\exists x \in a_M \forall y \in a_M (y \notin x_M)$. Por lo tanto M es modelo de ABF.

$\square$

Capítulo 4

Solución de ecuaciones

En esta parte del trabajo veremos otra forma de obtener conjuntos no bien fundados, con el objetivo de poder modelar con éstos, un cierto tipo de juego que veremos en el siguiente capítulo. Para esto buscamos obtener solución a sistemas de ecuaciones del siguiente tipo:

$$\left.\begin{aligned} x &= \{q, y\} \\ y &= \{z\} \\ z &= \{r, x\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (\star)$$

Es decir, ver si existen tres conjuntos a, b y c que satisfagan $(\star)$. Para el desarrollo de este capítulo consideraremos un universo formado a partir de una colección de urielementos, los cuales son objetos que no son conjuntos y que no tienen elementos[1] lo cual nos facilitará el trabajo, cosa que será evidente más adelante. En el caso anterior tanto q como r son tomados como urielementos, de modo que hallar una solución del sistema $(\star)$ consiste en encontrar un conjunto $a = \{q, \{\{r, a\}\}\}$.

Antes de pensar sobre las nociones de sistemas de ecuaciones y sus soluciones, necesitamos dar una axiomática, congruente con ZFC^-, que permita utilizar urielementos para la construcción de conjuntos.

4.1. Conjuntos considerando urielementos

Consideremos entonces una clase propia de urielementos. Se considerará también un axioma que nos garantice la existencia de una cantidad

[1] Es importante mencionar que en este trabajo, por comodidad, hacemos una distinción entre el concepto de átomo y el de urielemento.

suficiente de urielementos, esto ya que facilita el trabajo. La clase propia de todos los urielementos la denotaremos por $\mathcal{U} = \{x \mid \mathcal{U}(x)\}$, donde $\mathcal{U}$ es un símbolo de relación unitaria tal que $\mathcal{U}(x)$ si y sólo si x es un urielemento. Así, en este nuevo universo, que formalizaremos en seguida, existen conjuntos que tienen como elementos urielementos o cuyos elementos tienen urielementos, etc. Definimos entonces el soporte de un conjunto para indicar cuáles son los urielementos involucrados en éste.

Definición 4.1.1. *Para todo conjunto a,*

$$soporte(a) = \{x \mid x \in ct(a) \wedge \mathcal{U}(x)\}.$$

De modo que un conjunto a es puro si y solamente si su soporte es el conjunto vacío.

Como mencionamos anteriormente, al partir de una colección de urielementos es necesario considerar una nueva axiomática. De esta manera, la teoría de los conjuntos considerando una colección de urielementos $\mathcal{U}$, queda descrita por los siguientes axiomas:

ZF$_0^u$. Axioma de Urielementos. $\forall p \forall q[\mathcal{U}(p) \rightarrow (q \notin p)]$.

ZF$_1^u$. Axioma de Extensionalidad. $\forall a \forall b[\neg\mathcal{U}(a) \wedge \neg\mathcal{U}(b) \rightarrow (\forall p(p \in a \leftrightarrow p \in b) \rightarrow a = b)]$.

ZF$_3^u$. Axioma del Par. $\forall p \forall q \exists a[\forall r(r \in a \leftrightarrow (r = p \vee r = q))]$.

ZF$_4^u$. Axioma de la Unión. $\forall p \exists b(\neg\mathcal{U}(b) \wedge (\forall q(q \in b \leftrightarrow \exists w(w \in p \wedge q \in w))))$. Nótese que este axioma garantiza la existencia del conjunto vacío puesto que si se toma $p \in \mathcal{U}$, entonces existe un conjunto b donde $q \in b$ si y sólo si $\exists w(w \in p \wedge q \in w)$ pero p no tiene elementos, por lo tanto $b = \phi$.

ZF$_5^u$. Axioma del conjunto Potencia. $\forall a \exists b[b \notin \mathcal{U} \wedge \forall q(q \in b \leftrightarrow q \subseteq a)]$.

ZF$_6^u$. Esquema de Comprensión. Sea φ una fórmula en la cual p ocurre libre, entonces $\forall a \exists b(b \notin \mathcal{U} \wedge \forall p(p \in b \leftrightarrow p \in a \wedge \varphi(p)))$.

ZF$_7^u$. Axioma del Infinito. $\exists a(\phi \in a \wedge \forall p(p \in a \rightarrow p \cup \{p\} \in a))$.

ZF$_8^u$. Esquema de Remplazo. Sea φ una fórmula con al menos p y q libres, entonces $\forall p \exists q \forall r[\varphi(p,q) \wedge (\varphi(p,r) \rightarrow q = r)] \rightarrow \forall a \exists b \forall r[r \in b \leftrightarrow \exists p[p \in a \wedge \varphi(p,r)]]$.

AC$_u$. Axioma de Elección. $\forall a[(\phi \notin a \wedge \forall p, q \in a(\exists u(u \in p \wedge u \in p) \rightarrow p = q)) \rightarrow \exists c \forall s \in a \exists r(s \cap c = \{r\})]$.

Denotaremos por ZFC_u^- a la teoría formada a partir de los axiomas anteriores.

Bajo esta nueva axiomatización se tiene que x es un conjunto si y solamente si $\neg\mathcal{U}(x)$. Para todo $A \subseteq \mathcal{U}$ definimos el universo de todos los conjuntos formados a partir de ZFC_u^- partiendo de la colección de urielementos A, como la clase $V[A] = \{a \mid a \notin \mathcal{U} \wedge \mathit{soporte}(a) \subseteq A\}$. Si $A = \phi$ entonces $V[A]$ es la clase de todos los conjuntos puros (formados a partir de ZFC^-). Notemos que en este nuevo universo no hay urielementos, es decir, los urielementos no son conjuntos pero estos últimos sí pueden tener como elementos a urielementos: $V[A] \cap A = \phi$. De esta manera, $V[\mathcal{U}]$ resulta ser la clase propia de todos los conjuntos cuya existencia se justifica en ZCF_u^-. Sin embargo en este capítulo, de acuerdo con la notación, $V = V[\mathcal{U}]$ ya que estamos trabajando ZFC_u^-, pero, en caso de ser necesaria la distinción, recurriremos a la notación $V[\mathcal{U}]$.

Para simplificar la notación, denotaremos por V_A a la clase propia $V[A]$.

Buscando facilitar el trabajo queremos poder asociar a cada elemento x de un conjunto dado b con un urielemento q_x de modo tal que, para cualquier par de elementos distintos de b, digamos x, y; $q_x \neq q_y$. Pero esto no podemos asegurarlo en ZFC_u^- por lo que resulta necesario postular un nuevo axioma.
Axioma de Plenitud$[AP]$ *Para todo conjunto b existe una función inyectiva $f : b \rightarrow \mathcal{U}$ cuya imagen $f[b]$ es ajena a b.*

Si además se busca que cada elemento de b esté asociado con un urielemento completamente nuevo, en el sentido de que no sea elemento de b ni aparezca en ninguno de sus elementos, entonces basta con aplicar el axioma ya no a b sino a $\mathit{soporte}(b)$. Pero como en muchas ocaciones estaremos trabajando con clases propias, de hecho definimos operaciones entre clases propias, entonces necesitamos garantizar una colección mayor de urielementos.
Axioma de Plenitud Fuerte$[AP_f]$ *Hay una operación $\mathcal{N}(a, b)$ tal que:*

a) Para todo conjunto a y todo $b \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{N}(a, b) \in \mathcal{U} - b$ y

b) Para cualesquiera dos conjuntos $a \neq c$ y todo $b \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{N}(a, b) \neq \mathcal{N}(c, b)$.

De modo que esta operación garantiza que para cualquier subconjunto b de $\mathcal{U}$, habrá un urielemento nuevo (que no pertenece a b) y que para un b fijo, la operación de dar un nuevo urielemento es inyectiva, de manera que la colección $\{\mathcal{N}(a, b) \mid a \in V[\mathcal{U}]\}$ es una clase propia contenida en $\mathcal{U} - b$.

Como el axioma garantiza la existencia de una operación definible entonces debe considerarse $\mathcal{N}$ como un nuevo símbolo de función en el lenguaje de nuestra teoría de los conjuntos.

Si consideramos V_A, con $A \subseteq \mathcal{U}$, ésta resulta ser una clase propia que satisface los axiomas de ZFC_u^-. Sin embargo, para que V_A satisfaga también AP_f, A no puede ser un conjunto. Esto ya que, como ya vimos, el axioma de Plenitud Fuerte afirma la existencia de una clase propia de urielementos. De hecho, ni siquiera el axioma de plenitud en su forma más débil es consistente en dicho caso. Para ver esto último, sea A un conjunto no vacío de urielementos; podemos entonces aplicar AP_f a A mismo, llegando a que $f[A] \cap A = \phi$, lo cual no es posible en V_A. Denotaremos con $ZFC\mathcal{U}^-$ a $ZFC_u^- + AP_f$. Al trabajar con urielementos es necesario hacer ciertas aclaraciones o modificaciones a los conceptos que se tenían en ZFC^- para evitar caer en contradiccciones, tal es el caso de la noción de transitividad. En ZF teníamos que un conjunto a es transitivo si y sólo si $\forall x \forall y(x \in a \wedge y \in x \rightarrow y \in a)$. Pero como un conjunto puede tener como elementos urielementos, de hecho para todo conjunto a $soporte(a) \subseteq ct(a)$; entonces hacemos la distinción, de manera que una *clase C es transitiva en conjuntos si y sólo si* $\forall b, d(b \notin \mathcal{U} \wedge d \notin \mathcal{U} \rightarrow (b \in d \wedge d \in C \rightarrow b \in C))$. Por ejemplo, cada clase V_A es transitiva en conjuntos. Sin embargo, sea $p \in A$, entonces $\{p\} \in V_A$ y $p \in \{p\}$ pero $p \notin V_A$ por lo tanto V_A es transitiva en su sentido usual únicamente si $A = \phi$.

A lo largo del trabajo iremos adaptando los conceptos según se vaya necesitando.

4.2. Lema de solución simple y AFA

Una vez hechas las aclaraciones y formalizaciones hasta ahora necesarias para trabajar con urielementos, regresamos al interés principal del capítulo, el de hallar solución a sistemas de ecuaciones. Para esto nos olvidamos por un momento de AFA (axioma que se planteó únicamente para un universo sin urielementos). Entonces, ¿podemos garantizar la existencia de una solución del sistema $(\star)$? Como es posible observar, hemos hecho una pequeña trampa al omitir el axioma de buena fundación en su versión con urielementos (ABF_u)[2]. Y esto se hizo pensando en el caso análogo visto en el capítulo anterior. De tal suerte que lo que se busca es extender el universo de manera que en el nuevo exista la solución, no sólo a los sistemas de ecuaciones que sí tenían solución en $ZFC\mathcal{U}^- + ABF_u$ sino que también puedan tener

[2] $ABF_u : \forall a[a \neq \phi \wedge \neg\mathcal{U}(a) \rightarrow \exists m(m \in a \wedge \forall y(y \in m \rightarrow y \notin a))]$.

solución sistemas de ecuaciones como ($\star$). Esto ocurriría del mismo modo que al pasar de los naturales a los enteros, de los enteros a los racionales, de los racionales a los reales y de los reales a los complejos, se van obteniendo solución a ecuaciones que en el universo anterior no tenían. Para esto consideraremos el axioma conocido como lema de solución, el cual afirma que todo sistema tiene una única solución. Pero antes de definir lo que entenderemos por ecuación, sistema de ecuaciones y solución de un sistema de ecuaciones, es necesario mencionar dos hechos importantes. El primero es que no todo lo que intuitivamente pareciera ser una ecuación puede serlo en el sentido que buscamos puesto que, por ejemplo, la ecuación (en el sentido usual) $x = \wp(x)$, de acuerdo con el teorema de Cantor, no tiene solución por lo que el lema de solución no sería válido. El segundo es que se busca que los axiomas de la teoría de los conjuntos únicamente estén en términos de conjuntos y relaciones entre estos, que puedan ser definidas en términos de conjuntos en $ZFC\mathcal{U}^-$.

Consideremos nuevamente el sistema ($\star$), sólo que esta vez tanto q como r puedan ser conjuntos o urielementos. Como q y r no van a variar y de alguna manera los otros tres conjuntos están formados a partir de éstos, entonces les llamaremos átomos del sistema de ecuaciones ($\star$) y denotaremos con A al conjunto que consta únicamente de todos los átomos del sistema, en este caso $A = \{q, r\}$. Los elementos x, y y z son las indeterminadas del sistema y X denotará al conjunto que consta justamente de éstas. De este modo podemos ver a un sistema de ecuaciones como una función e con dominio $X = \{x, y, z\}$ que mande a cada indeterminada al lado derecho de la ecuación planteada para ello, es decir, en nuestro ejemplo:

$$e(x) = \{q, y\},\ e(y) = \{z\},\ e(z) = \{r, x\}.$$

Así como e, la solución puede ser vista como una función s con dominio X y que a cada indeterminada $x \in X$ le asocie un conjunto s_x. De tal manera que $s_x = \{q, s_y\}$, $s_y = s_z$ y $s_z = \{r, s_x\}$. Como tanto q como r son conjuntos o urielementos dados, entonces estos no están en el dominio de s. Así, $\forall x \in X(s_x = \{s_w \mid w \in e(x) \cap X\} \cup \{w \mid w \in e(x) \cap A\})$. Una vez planteada la idea podemos formalizarla como sigue.

Definición 4.2.1. *Un sistema simple de ecuaciones es una terna $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ que consiste en un conjunto $X \subseteq \mathcal{U}$, un conjunto A ajeno a X, cuyos elementos pueden ser tanto conjuntos como urielementos, y una función $e : X \longrightarrow \wp(X \cup A)$.* A X le llamaremos el conjunto de indeterminadas de $\mathcal{E}$ y a A el conjunto de átomos. Y denotaremos con e_x al conjunto $e(x)$.

Definición 4.2.2. *Sea $\mathcal{E}$ un sistema simple de ecuaciones. Una solución de $\mathcal{E}$ es una función $s : X \longrightarrow V$ que satisface:*

$$s_x = \{s_y \mid y \in b_x\} \cup c_x \textit{ para toda } x \in X$$

donde $b_x = e_x \cap X$ y $c_x = e_x \cap A$.

Notemos que una sola ecuación es un sistema; también, es posible tener $X = \phi$, un sistema simple de ecuaciones sin indeterminadas cuya solución es la función vacía. Y es posible además, tener $e_x = \phi$ en cualquier sistema. Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x &= \{q, y\} \\ y &= \{p, q, z\} \\ z &= \{x, y\} \end{aligned}$$

donde $x, y, z \in X$ y $p, q \in A$. Así, $e_x = \{q, y\}$, $e_y = \{p, q, z\}$, $e_z = \{x, y\}$, $b_x = \{y\}$, $c_x = \{q\}$, por lo que $s_x = \{s_y\} \cup \{q\} = \{s_y, q\}$. Análogamente $s_y = \{p, q, s_z\}$ y $s_z = \{s_x, s_y\}$.

Ahora sí podemos enunciar un axioma que permita garantizar la existencia, para cualquier sistema simple de ecuaciones, de alguna solución.

Lema de solución simple [ℓss] *Todo sistema simple de ecuaciones tiene una única solución.*

Éste es otro axioma que garantiza la existencia de conjuntos no bien fundados, como es el caso de los dos ejemplos anteriores, sólo que en este caso pueden haber conjuntos con urielementos como elementos. Más adelante veremos su relación con los conjuntos no bien fundados obtenidos a partir de $ZFC^- + AFA$. De acuerdo con las definiciones anteriores, definimos el conjunto solución de un sistema simple de ecuaciones $\mathcal{E}$ como:

$$S_{\mathcal{E}} = \{s_x \mid x \in X \wedge s \text{ es solución de } \mathcal{E}\} = s[X].$$

En caso de trabajar con ℓss, dado un sistema $\mathcal{E}$, el conjunto solución es simplemente $S_{\mathcal{E}} = \{s_x \mid x \in X\}$, donde s es la única solución de $\mathcal{E}$. Definimos también a la colección de todos los conjuntos que forman parte de un conjunto solución de algún sistema simple de ecuaciones, con A como conjunto de átomos, del siguiente modo:

$$\mathbb{S}[A] = \cup\{S_{\mathcal{E}} \mid \mathcal{E} \text{ es un sistema simple de ecuaciones con átomos en } A\}.$$

Probemos ahora que dado un sistema simple de ecuaciones cuyos átomos son todos urielementos, entonces en los elementos del conjunto solución, los únicos urielementos que entran en juego son aquellos que pertenecen a A. Para ello primero veamos lo siguiente.

Lema 4.2.3. *Sea* $A \subseteq \mathcal{U}$ *y* $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ *un sistema simple de ecuaciones. Entonces el conjunto solución de* $\mathcal{E}$ *es transitivo en conjuntos.*

Demostración. Si $\mathcal{E}$ no tiene solución, la afirmación se obtiene de manera inmediata. Supongamos lo contrario. Sean $S_{\mathcal{E}}$ el conjunto solución de $\mathcal{E}$, y a y d dos conjuntos tales que $a \in d \in S_{\mathcal{E}}$. Como $d \in S_{\mathcal{E}}$, entonces existe un $x \in X$ tal que $d = s_x = \{s_y \mid y \in b_x\} \cup c_x$, para alguna solución s de $\mathcal{E}$. Luego, al $a \in d$ y a ser conjunto, entonces existe $y \in b_x$ tal que $a = s_y$. Por lo tanto $a \in S_{\mathcal{E}}$. □

Probemos ahora que los únicos urielementos que entran en juego en un sistema simple de ecuaciones son los que pertenecen a A.

Proposición 4.2.4. *Para todo* $A \subseteq \mathcal{U}$, $\mathbb{S}[A] \subseteq V_A$.

Demostración. De acuerdo con la definición, todo elemento de $\mathbb{S}[A]$ es un conjunto, por lo que únicamente hace falta probar que dado un sistema simple de ecuaciones $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ cuyos átomos son urielementos y s una solución de $\mathcal{E}$, entonces para cualquier $x \in X$, $soporte(s_x) \subseteq A$. Sean entonces $\mathcal{E}$ un sistema con dichas características, y $x \in X$; de acuerdo con el lema 4.2.3, $S_{\mathcal{E}} \cup A$ es transitivo y $s_x \in S_{\mathcal{E}} \cup A$. Por otro lado sabemos que la clausura transitiva de s_x es el menor conjunto transitivo que contiene a s_x, por lo tanto $ct(s_x) \subseteq S_{\mathcal{E}} \cup A$. Nótese que ningún elemento de $S_{\mathcal{E}}$ es urielemento, de manera que $ct(s_x) \cap \mathcal{U} \subseteq (S_{\mathcal{E}} \cup A) \cap \mathcal{U} = A$. Por lo tanto, $s_x \in V_A$. En caso de que $\mathcal{E}$ no tenga solución, la afirmación es inmediata ya que $\mathbb{S}[A] = \phi \subseteq V_A$. □

Resulta natural preguntarse si la otra contención también es cierta, es decir, si dado cualquier conjunto, éste puede ser obtenido como parte de una solución a un sistema simple de ecuaciones. Para responder esta pregunta hagamos primero una generalización del concepto de sistema simple de ecuaciones. En efecto, si nos fijamos en lo que hemos hecho, no es necesaria la condición de que los elementos del conjunto de indeterminadas de un sistema de ecuaciones sean urielementos. Aunque en muchos casos es más fácil trabajar considerándolos así, también veremos que este otro tipo de ecuaciones nos permiten llegar a resultados muy importantes.

Diremos que una terna $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ es un sistema simple generalizado de ecuaciones si y sólo si X y A son dos conjuntos ajenos entre sí y $e : X \longrightarrow \wp(X \cup A)$ como se definió anteriormente. También nos referiremos a los átomos, indeterminadas y solución de sistemas como antes. A pesar de que pareciera ser necesaria una generalización del lema de solución, en realidad veremos, con el siguiente resultado, que no es así, además de que es posible garantizar que dado un sistema simple de ecuaciones generalizado, siempre podremos "descomponerlo"en un sistema simple de ecuaciones.

Lema 4.2.5. *Dado un sistema simple generalizado $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$, con al menos una solución s, existe un sistema simple de ecuaciones $\mathcal{E}' = \langle X', A, e'\rangle$ con el mismo conjunto de átomos, tal que $S_{\mathcal{E}} = S_{\mathcal{E}'}$.*

Demostración. Lo que buscamos es reemplazar X con un conjunto de urielementos. Ahora, no podemos utilizar ningún conjunto viejo de urielementos puesto que X debe ser ajeno a A. Sin embargo, de acuerdo con el axioma de plenitud fuerte sabemos que para cada $x \in X$, existe un $u_x = \mathcal{N}(x, A) \in \mathcal{U} - A$. Sea $X' = \{u_x \mid x \in X\}$. Entonces $X' \subseteq \mathcal{U}$ y $X' \cap A = \phi$. Sea así, $\mathcal{E}'$ el sistema simple de ecuaciones $\langle X', A, e'\rangle$, donde para toda $u_x \in X'$

$$e'(u_x) = \{u_z \mid z \in e_x \cap X\} \cup (e_x \cap A). \tag{4.1}$$

Definimos $s' : X' \longrightarrow V[\mathcal{U}]$ como $s'(u_x) = s_x$ para toda $u_x \in X'$. Veamos que s' es solución de $\mathcal{E}'$. En virtud de la definición tenemos que: $s'(u_x) = s_x = \{s_y \mid y \in e_x \cap X\} \cup (e_x \cap A)$.
De acuerdo con 4.1:

1. $\{u_y \mid y \in e_x \cap X\} = e'_{u_x} \cap X'$ y
2. $e_x \cap A = e'_{u_x} \cap A$.

De manera que para cualquier $x \in X$

$$\begin{aligned} s'(u_x) = s_x &= \{s(y) \mid y \in e_x \cap X\} \cup (e_x \cap A) \\ &= \{s'(u_y) \mid y \in e_x \cap X\} \cup (e_x \cap A) \\ &= \{s(z) \mid z \in b_x\} \cup c_x \\ &= \{s'(u_y) \mid u_y \in e'(u_x) \cap X\} \cup (e'(u_x) \cap A). \end{aligned}$$

Por lo tanto la función s definida anteriormente es solución del sistema $\mathcal{E}'$. En consecuencia, $S_{\mathcal{E}'} = \mathcal{E}$.

□

Proposición 4.2.6 (ℓss)**.** *Todo sistema simple generalizado $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ tiene una única solución.*

Demostración. En virtud del lema 4.2.5 y con base en su demostración, es fácil probar que existe una única solución del sistema generalizado $\mathcal{E}$, bajo la asunción de ℓss ya que cualquier solución del sistema $\mathcal{E}$ induce una solución del sistema simple de ecuaciones $\mathcal{E}'$ asociado. □

El resultado anterior muestra la equivalencia entre ℓss y la siguiente afirmación.

Lema generalizado de solución simple [ℓs] *Todo sistema simple generalizado tiene una única solución.*

Regresemos a la pregunta de cuándo un conjunto puede pertenecer al conjunto solución de un sistema de ecuaciones.

Definición 4.2.7. *Sea a un conjunto. Llamaremos sistema canónico de ecuaciones de a al sistema simple generalizado de ecuaciones $\mathcal{E}_a = \langle X, A, e\rangle$ donde $A = soporte(a)$, $X = ct(\{a\}) - A$ y donde, para toda $x \in X$, $e_x = x$.*

Nótese que la función identidad en X es solución del sistema canónico de ecuaciones de a. Para ver esto basta con ver que para cualquier $x \in X$, $x = (x \cap X) \cup (x \cap A)$. Como consecuencia de esta observación se tiene lo siguiente.

Proposición 4.2.8. *Para todo $A \subseteq \mathcal{U}$, $V_A \subseteq \mathbb{S}[A]$.*

Demostración. Lo que se desea es, dado un conjunto a cuyo soporte está contenido en A, entonces hay un sistema simple generalizado de ecuaciones $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ tal que $a \in S_{\mathcal{E}}$. Sea $a \in V_A$, consideremos al sistema canónico de ecuaciones, $\mathcal{E}_a$. Mencionamos que la función identidad en X es solución de $\mathcal{E}_a$; lo cual garantiza que $a \in S_{\mathcal{E}_a}$. Además, de acuerdo con la proposición 4.2.5 hay un sistema simple de ecuaciones $\mathcal{E}'$ con los mismos átomos que $\mathcal{E}_a$ tal que $S_{\mathcal{E}_a} = S_{\mathcal{E}'}$. Por lo tanto $a \in \mathbb{S}[A]$. □

De este modo, de acuerdo con las proposiciones 4.2.4 y 4.2.8 obtenemos lo siguiente.

Corolario 4.2.9. *Para cualquier $A \subseteq \mathcal{U}$, $V_A = \mathbb{S}[A]$.*

Es decir, cualquier conjunto a tal que $soporte(a) \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$, pertenece al conjunto solución de un sistema con conjunto de átomos A y viceversa.

Una vez visto que a partir de $ZFC\mathcal{U}^-$ es posible construir conjuntos no bien fundados, nos preguntamos entonces si el universo formado a partir de $ZFC\mathcal{U}^- + \ell s$ es el mismo universo que el formado a partir de $ZFC^- + AFA$. Como con AFA trabajamos en un universo sin urielementos, es necesario ajustar los conceptos, permitiendo que en las decoraciones haya urielementos en juego. Pero antes veamos qué sucede si en los sistemas de ecuaciones no trabajamos con átomos.

Proposición 4.2.10. *En $ZFC\mathcal{U}^-$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo sistema simple de ecuaciones, sin átomos $\langle X, \phi, e\rangle$ tiene una única solución.*

2. *Toda gráfica tiene una única decoración.*

Es preciso mencionar que la gráfica g es un conjunto bajo los axiomas $ZFC\mathcal{U}^-$, es decir que $soporte(g) \subseteq \mathcal{U}$. Sin embargo, utilizando la definición de decoración para gráficas que hasta ahora tenemos, resulta que en cualquier gráfica, toda decoración de ésta manda a todo urielemento al conjunto vacío. Por lo que considerando AFA, sólo podremos asegurar la existencia de conjuntos no bien fundados sin urielementos presentes. Es por esto que, en este caso, $A = \phi$; de lo contrario habría problemas.

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Sea $(g, \leftarrow)$ una gráfica. Considérese el sistema $\mathcal{E}_g = \langle X_g, \phi, e\rangle$ donde $X_g = \{x_a \in \mathcal{U} \mid x_a = \mathcal{N}(a,\phi) \text{ para algún } a \in g\}$ y $e : X_g \longrightarrow \wp(X_g)$ está definida como $\forall x_a \in X_g(e_{x_a} = \{x_b \mid b \leftarrow a\})$. Veamos que una solución s de $\mathcal{E}_g$ determina una decoración d de g, para esto definamos d como sigue: $\forall a \in g \; d(a) = s_{x_a}$, de acuerdo con la definición,

$$\begin{aligned} s_{x_a} &= \{s(x_b) \mid x_b \in b_{x_a}\} \cup c_{x_a} \\ &= \{s_{x_b} \mid x_b \in e_{x_a}\} \\ &= \{s_{x_b} \mid b \leftarrow a\}. \end{aligned}$$

por lo tanto d es decoración de g. Del mismo modo se tiene que toda decoración de g determina una solución de $\mathcal{E}_g$, definiendo, dada una decoración d de g, la solución s de $\mathcal{E}_g$ del siguiente modo:
$\forall x_a \in X_g(s_{x_a} = d(a))$. Luego, de acuerdo con la definición:

$$\begin{aligned} d(a) &= \{d(b) \mid b \leftarrow a\} \\ &= \{s_{x_b} \mid b \leftarrow a\} \\ &= \{s_{x_b} \mid x_b \in e_{x_a}\}. \end{aligned}$$

Y, al $c_{x_a} = \phi$, entonces $s_{x_a} = \{s_{x_b} \mid x_b \in b_{x_a}\} \cup c_{x_a}$, por lo tanto, como la hipótesis afirma que $\mathcal{E}_g$ tiene una única solución, es posible asegurar la existencia y unicidad de la decoración de g.

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $\mathcal{E} = \langle X, \phi, e\rangle$ un sistema simple de ecuaciones; definamos $g = (X, \leftarrow)$ donde $\forall x, y \in X(y \leftarrow x \Leftrightarrow y \in e_x)$. De manera que bajo un razonamiento análogo al anterior, las soluciones de $\mathcal{E}$ son las mismas que las decoraciones de g. Concluimos así lo deseado.

□

Nótese que podemos hacer esta misma afirmación para sistemas simples generalizados de ecuaciones. La demostración en este caso sería más sencilla ya que basta con considerar $\mathcal{E}_g = \langle v_g, \phi, e\rangle$, donde $e : v_g \longrightarrow \wp(v_g)$ y para cualquier $a \in v_g$, $e_a = \{b \mid b \leftarrow a\}$. Como se mencionó anteriormente, es necesario extender la noción de gráfica y por lo mismo de decoración, de tal forma que permita la existencia de conjuntos no bien fundados con urielementos.

Sea g una gráfica y $A \subseteq \mathcal{U}$. Un rotulador en A de g es una asignación de un elemento de A o del conjunto vacío a cada vértice sin hijos de g. Es decir, un rotulador es una función $r : sh_g \longrightarrow A \cup \{\phi\}$, donde $sh_g = \{a \in v_g \mid \neg \exists x \in v_g(x \leftarrow a)\}$. Siguiendo con lo anterior, a los elementos de A les llamamos átomos (la distinción entre ambas nociones se da de acuerdo al contexto).

Definición 4.2.11. *Un rotulador en A ($\subseteq \mathcal{U}$) de un sistema M es una funcional, r, que asigna a todos los vértices sin hijos de M, con un elemento de A (es decir, un átomo) o con el conjunto vacío.*

Es decir, si a es un vértice sin hijos de M entonces $r(a) \in A \cup \{\phi\}$. Denotaremos a dicho sistema con M,r y diremos que M es un sistema marcado relativo a r, o simplemente que es un sistema marcado.

Definición 4.2.12. *Sea g una gráfica, (g, r) es una gráfica marcada relativa a r, si r es un rotulador en A de g.*

Extendamos también la noción de decoración; una decoración de (g, r) es una función $d : v_g \longrightarrow V_A \cup A$ definida de la siguiente manera:

$$d(x) = \begin{cases} r(x) & \text{si } x \in sh_g, \\ \{d(y) \mid y \leftarrow x\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, si tomamos $A = \phi$, la decoración es congruente con nuestra primera definición de decoración.

Una vez definido lo que es una decoración de una gráfica marcada veamos que la noción de pintura es la misma. Por ejemplo, si consideramos a g como la gráfica de la figura 2.9 y $r : \{q\} \rightarrow A$ definida como $r(q) = a$ con $a \in \mathcal{U}$; entonces la gráfica marcada (g, r) es pintura del conjunto $a^{\#} = \{a, \Omega\}$[3]. Aunque aquí ya estamos suponiendo que dicha decoración existe.

[3]Nótese que $a^{\#}$ no es el mismo conjunto que habíamos definido anteriormente puesto que esta vez a es un urielemento.

Postulemos entonces el análogo al axioma de antifundación sólo que esta vez considerando urielementos.
AFA$_r$ *Toda gráfica marcada tiene una única decoración.*

Extendamos también la noción de equipintabilidad:
$\forall a \forall b[a \equiv_r b \leftrightarrow a$ y b son equipintables mediante una gráfica marcada relativa a r].
De manera que la igualdad entre conjuntos en $ZFC\mathcal{U}^- + AFA_r$, que denotaremos como $ZFC\mathcal{U}A_r$, queda caracterizada por:

$$\forall a \forall b(a = b \leftrightarrow a \equiv_r b).$$

Generalizando esta nueva noción de gráficas a sistemas obtenemos lo siguiente.

Proposición 4.2.13 (AFA_r)**.** *Todo sistema marcado tiene una única decoración.*

Demostración. La prueba es análoga a la hecha en la proposición 2.2.3. Sea M, r un sistema marcado y sea a un vértice del sistema, entonces consideremos la subgráfica M_a generada por a. Como M_a es una gráfica, en este caso una gráfica marcada, y r restringida a M_a es claramente un rotulador de ésta, al cual denotaremos por r_a, entonces M_a, r_a tiene una única decoración que llamaremos d_a (AFA_r). Definimos entonces d en M como $d(a) = d_a(a)$ $\forall a \in M$. Se prueba entonces que d es la única decoración de M, r. Primero notemos que si $a \in dom(r)$ entonces M_a consta únicamente del vértice a y $d(a) = d_a(a) = r_a(a) = r(a)$. Para el resto de los vértices el razonamiento es nuevamente el mismo al hecho en la proposición 2.2.3. Sea $a \in M$, $a \notin dom(r)$ entonces

$$\begin{aligned} d(a) &= d_a(a) = \{d_a(x) \mid x \leftarrow a\} \\ &= \{d(x) \mid x \leftarrow a\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto d es decoración de M, r. Podemos también afirmar la unicidad ya que cualquier decoración de M, r determina una decoración en M_a, r_a, y esto sucede para todo vértice a del sistema. □

La noción de rotulador nos permite trabajar con gráficas de manera que el universo resultante sea un universo de conjuntos, bien y no bien fundados, con urielementos, pero, ¿será esto suficiente para demostrar que AFA_r asegura la existencia de conjuntos como el ya tan mencionado $a = \{q, \{\{r, a\}\}\}$ donde q y r son urielementos? A pesar de que la respuesta es positiva, la prueba puede complicarse, por lo que es preciso extender aún más la noción de decoración y de rotulador, de manera que sea posible asociarle, a cualquier vértice, un urielemento o un conjunto con urielementos.

Definición 4.2.14. *Sea $A \subseteq \mathcal{U}$. Un sistema etiquetado $M, \leftarrow, \hat{e}$ sobre A, es una terna tal que $M, \leftarrow$ es un sistema y $\hat{e}$ una funcional de M a $\wp(A)$.*

Denotaremos a dicho sistema únicamente como $M, \hat{e}$.

Definición 4.2.15. *Una decoración de un sistema $M, \hat{e}$ etiquetado sobre A es una funcional $d : M \to V_A$ tal que para toda $x \in M$*

$$d(x) = \{d(y) \mid y \leftarrow x\} \cup \hat{e}(x).$$

Aquí hay que tener cuidado puesto que no debe confundirse el etiquetamiento con el nombre de un vértice. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 4.1 con el etiquetamiento $\hat{e}$ descrito, a, b, c no son etiquetas sino que son simplemente los vértices; mientras que $\{q\}$, ϕ y $\{r\}$ son etiquetas de a, b y c respectivamente.

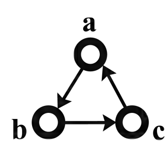

Figura 4.1: Considere $\hat{e}(a) = \{q\}$, $\hat{e}(b) = \phi$, $\hat{e}(c) = \{r\}$.

De este modo la decoración queda dada por:
$d(c) = \{d(a), r\}$, $d(b) = \{\{d(a), r\}\}$ y $d(a) = \{q, \{\{d(a), r\}\}\}$.

Proposición 4.2.16 (AFA_r)**.** *Todo sistema etiquetado tiene una única decoración.*

Demostración. Sea M, e un sistema etiquetado sobre A. Definamos un nuevo sistema marcado M', r como sigue:
$M' = \{(1, x) \mid x \in M\} \cup \{(2, y) \mid y \in V_A \cup A\}$, las aristas de M' quedan descritas por:

- $(1, y) \leftarrow' (1, x)$ si $y \leftarrow x$,
- $(2, y) \leftarrow' (1, x)$ si $y \in \hat{e}(x)$ y
- $(2, z) \leftarrow' (2, y)$ si $z \in y$.

Y el rotulador r definido como:

$$r(1,x) = \phi \text{ si } x \in sh_M,$$
$$r(2,y) = y \text{ si } y \in A \cup \{\phi\}.$$

De acuerdo con la proposición 4.2.13, M' tiene una única decoración, digamos d'. De manera que, para toda $a \in A$: $d'(2,a) = r(2,a) = a$;
para toda $x \in M$: $d'(1,x) = \{d'(1,y) \mid y \leftarrow x\} \cup \{d'(2,z) \mid z \in \hat{e}(x)\}$;
y para toda $a \in V_A$: $d'(2,a) = \{d'(2,z) \mid z \in a\}$.

Sea M_{V_A} el sistema marcado canónico de $V_A \cup A$ con la función identidad como rotulador. La funcional f definida como $f(a) = d'(2,a)$ es una decoración de éste, ya que, para toda $a \in V_A \cup A$:

$f(a) = d'(2,a) = \{d'(2,z) \mid z \in a\}$ Pero como la función identidad es también decoración del sistema, de acuerdo con AFA, f resulta ser la función identidad, por lo que $d'(2,a) = a$, para cualquier $a \in V_A \cup A$.
Así, la funcional d definida como $d(x) = d(1,x)$ es decoración del sistema $M, \hat{e}$ ya que:

$$\begin{aligned} d(x) &= d'(1,x) \\ &= \{d'(1,y) \mid y \leftarrow x\} \cup \{d'(2,z) \mid z \in \hat{e}(x)\} \\ &= \{d(y) \mid y \leftarrow x\} \cup \{z \mid z \in \hat{e}(x)\} \\ &= \{d(y) \mid y \leftarrow x\} \cup \hat{e}(x). \end{aligned}$$

Para probar la unicidad veamos que toda decoración de $M, \hat{e}$ induce una decoración de M', r. Sea f una decoración de $M, \hat{e}$; la funcional f' definida como:
$f'(1,x) = f(x) \quad \forall x \in M$,
$f'(2,a) = a \quad \forall a \in V_A \cup A$;
es también decoración de M'; y, de acuerdo con la proposición 4.2.13, $f' = d'$. De manera que, para todo vértice x del sistema M, $f(x) = f'(1,x) = d'(1,x) = d(x)$; concluyendo finalmente que la decoración es única. $\square$

En consecuencia, AFA_r garantiza la existencia del conjunto $a = \{q, \{\{r,q\}\}\}$ (ver figura 4.1). Extendamos también, en nuestro nuevo universo, la noción de bisimulación.

Definición 4.2.17. *Sea $M, \hat{e}$ un sistema etiquetado sobre A. La relacional $R \subseteq M \times M$ es bisimulación en M si y sólo si: Si $(a,b) \in R$ entonces*

1. $\forall x \in a_M \exists y \in b_M (xRy) \wedge \forall y \in b_M \exists x \in a_M (xRy)$ *y*
2. $\hat{e}(a) = \hat{e}(b)$.

Finalmente llegamos a uno de los resultados más importantes de este capítulo, el cual resuelve la duda que se tenía sobre los universos obtenidos bajo AFA y bajo ℓs respectivamente.

Proposición 4.2.18. *Sea $A \subseteq \mathcal{U}$. En $ZFC\mathcal{U}^-$ las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo sistema simple de ecuaciones $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ tiene una única solución.*

2. *Toda gráfica etiquetada sobre A tiene una única decoración.*

Demostración. La prueba es esencialmente la misma que la de la proposición 4.2.10, sólo hay que extender las construcciones anteriores a gráficas etiquetadas. Para probar que 1. implica 2., sea $g = (g, \leftarrow, \hat{e})$ una gráfica, el sistema $\mathcal{E}_g = (X_g, A, e)$ que construiremos consta de X_g como se definió anteriormente, $A = soporte(g)$ y $e : X \longrightarrow \wp(X \cup A)$ definida del siguiente modo: $\forall x_a \in X_g(e_{x_a} = \{x_b \mid b \leftarrow a\} \cup \hat{e}(a))$. Por otro lado, para probar que 2. implica 1., sea $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ un sistema simple de ecuaciones, al considerar $g_{\mathcal{E}}$ como antes, sólo que esta vez la etiquetamos con $\hat{e} : X \longrightarrow \wp(A)$ tal que para cualquier $x \in X$, $\hat{e}(x) = e_x \cap A$, entonces obtenemos lo desdeado. $\square$

El resultado anterior resuelve la duda planteada sobre los universos construidos en $ZFC\mathcal{U}^-$ al considerar ℓs y AFA respectivamente; a pesar de que en este caso estamos considerando gráficas con urielementos y muchos de nuestros resultados obtenidos en gráficas y sistemas se hicieron únicamente pensando en una teoría sin urielementos, sin embargo este último resultado nos da una pauta para la generalización. De hecho, el lema de solución es otra forma de enunciar el axioma de antifundación.

4.3. Bisimulaciones

Recordemos que un concepto muy importante, al trabajar con el axioma de antifundación, fue el de bisimulación. Éste es entonces uno de los conceptos que tenemos que adaptar al trabajar con urielementos, además de que queremos ver cómo se traduce esta noción a sistemas de ecuaciones, ya que, análogamente al caso de gráficas, dos ecuaciones distintas pueden tener una misma solución. Veamos entonces la relación que hay entre los sistemas de ecuaciones que tienen una misma solución, relación que será suficiente para determinar que cualesquiera dos sistemas de ecuaciones que guardan esa relación entre sí, tienen la misma solución. Se tiene pues, lo mismo que sucedía en gráficas. Como estamos trabajando con urielementos y ya habíamos visto que $\mathbb{S}[A] \subseteq V_A$, es importante que los átomos de cada sistema sean los mismos.

Definición 4.3.1. *Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ y sean $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ y $\mathcal{E}' = \langle X', A, e'\rangle$ dos sistemas simples generalizados. Una relación $R \subseteq X \times X'$ es una bisimulación entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ si y sólo si, si xRx' entonces:*

a) $\forall y \in e_x \cap X \exists y' \in e'_{x'} \cap X'$ *tal que* yRy',

b) $\forall y' \in e'_{x'} \cap X' \exists y \in e_x \cap X$ *tal que* yRy' *y*

c) $e_x \cap A = e_{x'} \cap A'$.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son bisimilares si hay una bisimulación entre ellos, en símbolos $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$, tal que:

a) $\forall x \in X \exists x' \in X'$ tal que xRx' y

b) $\forall x' \in X' \exists x \in X$ tal que xRx'.

Se tiene entonces el siguiente resultado, análogo al del primer capítulo.

Proposición 4.3.2 (ℓs)**.** *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ sistemas simples generalizados con el mismo conjunto de átomos, $A \subseteq \mathcal{U}$. $S_{\mathcal{E}} = S'_{\mathcal{E}'}$ si y solamente si $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$.*

Demostración. Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ dos sistemas tales que $S_{\mathcal{E}} = S_{\mathcal{E}'}$, donde s y s' son las soluciones de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ respectivamente. Definimos entonces la relación $R \subseteq X \times X'$ como sigue:

$$\forall (x, x') \in X \times X' (xRx' \leftrightarrow s(x) = s'(x')).$$

Veamos que dicha relación R es bisimulación entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$. Sean $(x, x') \in R$ y $y \in e_x \cap X$. De manera que $s(x) = s'(x')$ y

$$\begin{aligned} s(y) &\in \{s(z) \mid z \in e_x \cap X\} \cup (e_x \cap A) \\ &= s(x) = s'(x') \\ &= \{s'(z') \mid z' \in e'_{x'} \cap X'\} \cup (e'_{x'} \cap A), \end{aligned} \tag{4.2}$$

por lo que existe $y' \in e'_{x'} \cap X'$ tal que $s(y) = s'(y')$, es decir yRy'. Análogamente se prueba la segunda condición de bisimulación entre sistemas de ecuaciones. En la misma ecuación 4.2 se ve claramente que $e_x \cap A = e'_{x'}$. Por lo tanto, R así definida es una bisimulación entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$. Probemos ahora que $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$. Sea $x \in X$, entonces $s(x) \in \{s_x \mid x \in X\} = S_{\mathcal{E}} = S'_{\mathcal{E}'} = \{s'_{x'} \mid x' \in X\}$, de manera que existe $x' \in X'$ tal que $s(x) = s'(x')$, es decir, xRx'. Análogamente para $x' \in X'$. Con lo cual tenemos que $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$.

Para la conversa, supongamos que $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$, y sea R una bisimulación testigo de ello. La prueba se basa en el hecho de que, xRx' implica que $s_x = s'_{x'}$. Ya que, una vez probado eso, sea $a \in S_{\mathcal{E}}$, entonces $a = s_x$ para alguna $x \in X$. Y como $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son R-bisimilares, entonces existe $x' \in X'$ tal que xRx'. Entonces, bajo la suposición anterior $(s(x) = s'(x'))$ $a = s(x) = s'(x') \in S'_{\mathcal{E}'}$, con lo cual tendríamos que $S_{\mathcal{E}} \subseteq S'_{\mathcal{E}'}$; y la otra contención se prueba en el mismo sentido. Veamos entonces que, xRx' implica $s(x) = s'(x')$. Para esto construimos otro sistema simple generalizado $\mathcal{E}^*$ con el mismo conjunto de átomos y donde $X^* = R$ y $\forall(x, x') \in X^*$

$$e^*(x, x') = \{(y, y') \in X^* \mid y \in e_x \wedge y' \in e'_{x'}\} \cup (A \cap e_x).$$

La idea de esta demostración ya la hemos utilizado pero en gráficas.

Sean s_1 y s_2 de X^* en $V[\mathcal{U}]$, las funciones: $s_1(x, x') = s(x)$ y $s_2(x, x') = s'(x')$. Utilizando el hecho de que R es una bisimulación entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$, veremos que tanto s_1 como s_2 son soluciones de $\mathcal{E}^*$. Probaremos únicamente que s_1 es solución de $\mathcal{E}^*$ ya que la prueba de que s_2 también lo es, es prácticamente la misma. Entonces queremos probar que:

$$s_1(x, x') = \{s_1(y, y') \mid (y, y') \in e^*(x, x') \cap X^*\} \cup (e^*(x, x') \cap A). \tag{4.3}$$

Haremos esto por doble contención. Primero, sea $a \in s_1(x, x') = s_x = \{s_y \mid y \in e_x \cap X\} \cup (e_x \cap A)$, es decir, existe $y \in e_x \cap X$ tal que $s_y = a$ o $a \in e_x \cap A$. En el primer caso, como xRx', existe $y' \in e'_{x'} \cap X'$ tal que yRy', por lo que $(y, y') \in e^*(x, x')$ y $a \in e^*(x, x') \cap A$. Luego, como $s_1(x, x') = s_y = a$, entonces, en cualquier caso, a pertenece al lado derecho de la ecuación 4.3. Para la otra contención, sea z en el lado derecho de 4.3. Nuevamente tenemos dos casos. Si $z \in e^*(x, x') \cap A$ entonces $z \in A \cap e_x$, por lo que $z \in s_x = s_1(x, x')$. Supongamos que $z = s_1(y, y') = s_y$ para algún $(y, y') \in e^*(x, x') \cap X^*$, entonces $y \in e_x$ y $y' \in e'_{x'}$. De manera que $s_1(y, y') \in s_x$.

Con esto hemos demostrado que tanto s_1 como s_2 son soluciones de $\mathcal{E}^*$, y, de acuerdo con ℓs, $s_1 = s_2$, es decir, $\forall(x, x') \in R(s_x = s'_{x'})$. Con lo cual concluimos la prueba. $\square$

Anteriormente definimos qué significaba que dos conjuntos fueran bisimilares, esto lo hicimos pensando en un universo sin urielementos [2.3.9]. De acuerdo con lo hecho hasta este momento, tendremos la misma definición, sólo que esta vez pensando en gráficas marcadas. Como más adelante utilizaremos este concepto, lo definimos explícitamente.

Definición 4.3.3. *Una relación binaria en conjuntos R es una bisimulación en conjuntos si y sólo si, si aRb entonces las siguientes condiciones se cumplen:*

(1) para cualquier conjunto $c \in a$ existe un conjunto $d \in b$ tal que cRd,

(2) para cualquier conjunto $d \in b$ existe un conjunto $c \in a$ tal que cRd y

(3) $a \cap \mathcal{U} = b \cap \mathcal{U}$.

Decimos que dos conjuntos a y b son bisimilares si hay una bisimulación en conjuntos, R, tal que aRb.

Con esto obtenemos un resultado análogo a 2.3.21, resultado de suma importancia cuando se trabaja con conjuntos no bien fundados, como es nuestro caso.

Proposición 4.3.4. *[Extensión Fuerte](ℓss) Sea I la relación identidad en conjuntos. I es la mayor bisimulación en conjuntos. Es decir,*

a) I es una bisimulación en conjuntos.

b) Si R es una bisimulación en conjuntos, entonces, si aRb entonces $a = b$.

La demostración es prácticamente la misma que la hecha en 2.3.21, sólo que en este caso tenemos que considerar urielementos, sin embargo esto no va a ser ningún problema ya que, de acuerdo con la definición de bisimulación, para cualesquiera dos conjuntos a y b, si aRb, entonces $a \cap \mathcal{U} = b \cap \mathcal{U}$. Además, en 2.3.21 se utiliza AFA, motivo por el cual, para poder afirmar la proposición 4.3.4 es necesario pedir ℓss, esto en virtud de la proposición 4.2.18.

4.4. Lema de solución

Regresemos a los sistemas de ecuaciones y al primer problema planteado en este capítulo, el de encontrar solución a la ecuación $x = \{q, \{\{r, x\}\}\}$. Utilizando gráficas ya vimos una solución al problema, sin embargo, de acuerdo con nuestra definición de ecuación tenemos que considerar el sistema de ecuaciones ($\star$), para, utilizando el lema de solución simple, encontrar solución a dicho sistema. Buscando simplificar el trabajo quisiéramos poder dar solución a la ecuación que se planteó en un principio, sin necesidad de descomponerla en el sistema simple de ecuaciones. Es por esto que recurrimos al siguiente tipo de ecuaciones, que, a pesar de restringir el conjunto de átomos a urielementos, nos dan más libertad, pero manteniendo la esencia que se planteó en un principio acerca de las ecuaciones.

Definición 4.4.1. *Un sistema generalizado de ecuaciones es una terna* $\mathcal{E} = \langle X, A, e\rangle$ *que consiste en un conjunto* $X \subseteq \mathcal{U}$*, un conjunto* $A \subseteq \mathcal{U}$ *ajeno a* X *y una función* $e : X \longrightarrow V[X \cup A]$.

Podemos notar dos aspectos importantes de este nuevo tipo de ecuaciones. El primero es que, al e tomar valores en $V[X \cup A]$, no pueden haber átomos (urielementos en general), del lado derecho de la ecuación, lo cual es deseable puesto que nuestras soluciones son únicamente conjuntos y no se quieren ecuaciones del tipo $x = x$ ya que éstas no tienen una única solución. Sin embargo, permite del lado derecho de la ecuación, cualquier conjunto cuyo soporte está contenido en $X \cup A$.

La restricción en la definición de un sistema generalizado de ecuaciones de que X sea un conjunto de urielementos es crucial, lo cual veremos más adelante.

El problema central al generalizar el Lema de solución simple, es el de definir lo que significa que una función s sea solución de un sistema generalizado de ecuaciones. Intuitivamente buscamos una solución en el mismo sentido que antes, es decir, que s sea una solución si asigna a cada $z \in X$ un conjunto s_z de tal forma que s_z es el resultado de substituir, en cada ocurrencia de una indeterminada x en cualquier elemento de la clausura transitiva de e_z, el valor de s_x. Pero primero debemos probar que dicho proceso de substitución está bien definido.

Definición 4.4.2. *Una substitución es una función s cuyo dominio es un conjunto de urielementos. Un operador de substitución es un operador sub cuyo dominio consiste en una clase de parejas* $\langle s, b\rangle$ *donde s es una substitución y* $b \in \mathcal{U} \cup V[\mathcal{U}]$*, tal que las siguientes condiciones se cumplen:*

1) *Si* $x \in dom(s)$*, entonces* $sub(s, x) = s_x$.

2) *Si* $x \in \mathcal{U} - dom(s)$*, entonces* $sub(s, x) = x$.

3) *Para cualquier conjunto b,* $sub(s, b) = \{sub(s, p) \mid p \in b\}$.

Como es posible observar, *sub* trabaja de manera "recursiva", substituyendo en los elementos de b y acumulando los resultados. Pero ésta no es una recursión ordinaria puesto que no hay "caso base". Si sólo consideráramos la posibilidad de b ser un conjunto bien fundado, no habría dificultad en probar que $sub(s,b)$ existe y es única. La prueba sería simplemente un caso del principio de definición recursiva en conjuntos bien fundados. Sin embargo, no estamos haciendo dicha restricción, así que es necesario justificar la definición de modo distinto. Haciendo notar la analogía llamaremos a los puntos (1)-(3) anteriores las condiciones correcursivas para *sub*. Veamos entonces que en efecto este operador $sub(s,b)$ que leeremos como "el resultado de substituir s_x por x en b", está bien definido. Antes veamos un ejemplo que muestra el por qué del requerimiento de que el dominio X de un sistema generalizado sea un conjunto de urielementos.

Ejemplo 4.4.3. *Sea $x = \phi$, $y = \{\phi\}$, $X = \{x, y\}$ y s definida en X, tal que $s(x) = y$ y $s(y) = y$. Consideremos entonces qué sucede si tratamos de calcular $sub(s, \{\phi\})$. Por un lado, como $y \in dom(s)$,*
$sub(s, y) = s_y = y = \{\phi\}$, y por el otro

$$\begin{aligned} sub(s,y) &= \{sub(s,p) \mid p \in y\} \\ &= \{sub(s,\phi)\}. \end{aligned}$$

Y nuevamente, como $x = \phi$ está en el dominio de s, $sub(s,\phi) = s_x = y$, por lo tanto $sub(s, y) = \{y\}$, sin embargo $\{\phi\} \neq \{\{\phi\}\}$.

Ahora sí, probemos la existencia y unicidad de *sub*.

Proposición 4.4.4 (ℓs). *Hay un único operador $sub(s,b)$ que cumple las condiciones de correcursión de substitución y que está definida para todas las parejas $\langle s, b\rangle$ tales que $dom(s) \subseteq \mathcal{U}$ y $b \in \mathcal{U} \cup V[\mathcal{U}]$.*

Demostración. Definimos "$sub(s,b) = c$" si s es una función cuyo dominio es un conjunto de urielementos y se satisface alguna de las siguientes tres condiciones:

I) $b \in dom(s)$ y $c = s_b$,

II) $b \in \mathcal{U} - dom(s)$ y $c = b$, o

III) $b \in V[\mathcal{U}]$ y se cumple lo siguiente:

Sea $X = (ct(\{b\} \cup rang(s))) - \mathcal{U}$, y sea $A = (ct(\{b\} \cup rang(s))) \cap \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{E}' = (X, A, e')$ el sistema simple generalizado dado por: $e'_z = \{s_x \mid x \in z \cap dom(s)\} \cup \{x \mid x \in z \cap (A - dom(s))\} \cup (z \cap X)$. Sea *sol* la solución de $\mathcal{E}'$. Entonces $c = sol(b)$.

Para probar que la definición de *sub* funciona, necesitamos ver que *sub* tiene el dominio deseado (lo cual es inmediato) y que satisface las ecuaciones de correcursión. Es claro que esta definición satisface las condiciones (1) y (2) de correcursión. Verifiquemos entonces que también cumple la tercera condición. Para esto, denotaremos con $\mathcal{E}_b$ y sol_b al sistema de ecuaciones de b descrito como $\mathcal{E}'$ en (III) y su solución, respectivamente. De esta manera, para otro conjunto b', $sub(s, b')$ estará determinado por otro sistema $\mathcal{E}_{b'}$ vía su solución $sol_{b'}$. Nótese que si $b' \in b - \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{E}_{b'}$ es un subsistema[4] de $\mathcal{E}_b$. Entonces,

$$sol_{b'}(b') = sol_b(b') \in sol_b(b) \text{ (para esto se utiliza también el hecho de que } b' \text{ pertenece a } e'_b \text{ de } \mathcal{E}'.)$$

Así,

$$\begin{aligned} sub(s,b) &= sol_b(b) \\ &= \{s_x \mid x \in (b \cap dom(s))\} \cup \{x \mid x \in b \cap (A - dom(s))\} \\ &\quad \cup \{sub(s,b') \mid b' \in b - A\}. \end{aligned}$$

Si $x \in b \cap dom(s)$, entonces $sub(s,x) = s_x$;
y si $x \in b \cap (A - dom(s)) \subseteq \mathcal{U} - dom(s)$, entonces $sub(s,x) = x$. Por lo tanto, $sub(s,b) = \{sub(s,p) \mid p \in b\}$. Lo cual es justamente lo que (3), de la correcursión, requiere.

Veamos ahora qué sucede con la unicidad. Supongamos que sub' también cumple las condiciones de correcursión y que se definió para todas las parejas $\langle s, b\rangle$. Fijemos s y sea R la siguiente relación en conjuntos y urielementos:

$$R = \{(sub(s,b), sub'(s,b)) \mid b \in \mathcal{U} \cup V[\mathcal{U}]\}.$$

Afirmamos que la restricción de R a los elementos tales que b es un conjunto es una bisimulación en conjuntos. Tomemos una pareja $(sub(s,b), sub'(s,b)) \in R$ y verifiquemos las condiciones.

Supongamos que $z \in \mathcal{U} \cap sub(s,b)$. Entonces, como b es un conjunto, $z = sub(s,x)$ para algún $x \in b \cap \mathcal{U}$; y $z = sub(s,x) = sub'(s,x)$, de manera que $z \in sub'(s,b)$. La otra parte, en el caso de urielementos es análoga (el caso en que $z \in sub'(s,b) \cap \mathcal{U}$). Ahora pensemos en los conjuntos involucrados en $sub(s,b)$. Sea $c \in sub(s,b) - \mathcal{U}$, entonces, como b es un conjunto, c es de la forma $sub(s,p)$ para algún $p \in b$. Y $(sub(s,p), sub'(s,p))$ es una pareja de conjuntos en R. Por lo tanto, para todo conjunto b, $sub(s,b) = sub'(s,b)$ [Proposición 4.3.4]. Para urielementos la afirmación se sigue de manera inmediata de la definición. □

[4] $\langle X', A', e'\rangle$ es subsistema de $\langle, X, A, e\rangle$ si y sólo si $X' \subseteq X$, $A' \subseteq A$ y $\forall x \in X'(e'(x) = e(x) \cap (x' \cup A'))$.

Una vez que hemos visto que la operación de substitución antes mencionada está bien definida, estamos en posición de definir también lo que significa que s sea una solución de un sistema generalizado de ecuaciones.

Definición 4.4.5. *Sea $\mathcal{E} = (X, A, e)$ un sistema generalizado de ecuaciones. Una solución de $\mathcal{E}$ es una función s con dominio X tal que para toda $x \in X$*

$$s_x = sub(s, e_x).$$

Veamos entonces la relación que hay entre los sistemas simples generalizados de ecuaciones y los sistemas generalizados.

Lema 4.4.6. *(ℓs) Sea $\mathcal{E} = (X, A, e)$ un sistema generalizado de ecuaciones. Hay un sistema simple generalizado $\mathcal{E}^b = (Y, A, e')$ con $X \subseteq Y$ tal que se cumple lo siguiente:*

1. *Si s es una solución de $\mathcal{E}$, entonces s extiende a una solución s' de $\mathcal{E}^b$. (Nótese que s' es necesariamente única, siendo una solución de $\mathcal{E}^b$).*

2. *Si s' es una solución de $\mathcal{E}^b$ y $s = s' \restriction_X$, entonces s es una solución de $\mathcal{E}$.*

En particular, hay una correspondencia uno a uno entre las soluciones de $\mathcal{E}$ y las de $\mathcal{E}^b$.

Demostración. Sea $Y = (X \cup \bigcup_{x \in X} ct(e_x)) - A$. Para $x \in X$, definimos $e'_x = e_x$. Como $e'_x \in \wp(Y \cup A)$, puesto que $ct(e_x) \subset Y \cup A$, entonces e'_x sí es una ecuación válida en $\mathcal{E}^b$. Además para toda $y \in Y - X$ $(\subseteq Y \cup A)$ definimos $e'_y = y$. Esto nos genera un sistema simple generalizado de ecuaciones. Veamos entonces que esta construcción cumple las afirmaciones hechas respecto a las soluciones. Para esto, sea s una solución de $\mathcal{E}$. Definimos una función s' en Y como: $s'_y = sub(s, y)$. Así, de acuerdo con las definiciones del operador de substitución y de Y, tenemos lo siguiente:

1. Si $x \in X$, entonces $s'_x = sub(s, x) = s_x$.

2. $\forall a \in A$, $sub(s, a) = a$.

3. $\forall y \in Y - X$, $s'_y = sub(s, y) = \{sub(s, z) \mid z \in y\}$.

Como consecuencia de (1) y (2) tenemos que s' extiende a s en X y que: Para toda $x \in X$:

$$
\begin{aligned}
s'_x &= s_x \\
&= sub(s, e_x) \\
&= \{sub(s,z) \mid z \in e_x\} \\
&= \{sub(s,z) \mid z \in e_x \cap (YX)\} \cup \{sub(s,z) \mid z \in e_x \cap X\} \\
&\quad \cup \{sub(s,z) \mid z \in e_x \cap A\} \\
&= \{sub(s,z) \mid z \in e_x \cap (Y - X)\} \cup \{s'_z \mid z \in e_x \cap X\} \\
&\quad \cup (e_x \cap A) \\
&= \{s'_z \mid z \in e'_x \cap (Y - X)\} \cup \{s'_z \mid z \in e'_x \cap X\} \cup (e_x \cap A) \\
&= \{s'_z \mid z \in (e'_x \cap Y)\} \cup (e'_x \cap A).
\end{aligned}
$$

Y como consecuencia de (3) se tiene que, para toda $y \in Y - X$,

$$
\begin{aligned}
s'_y &= \{sub(s,z) \mid z \in y\} \\
&= \{sub(s,z) \mid z \in e'_y\} \\
&= \{sub(s,z) \mid z \in e'_y \cap Y\} \cup (e'_y \cap A) \\
&= \{s'_z \mid z \in e'_y \cap Y\} \cup (e'_y \cap A).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para toda $y \in Y$, $s'_y = \{s'_z \mid z \in e'_y \cap Y\} \cup (e'_y \cap A)$. Con esto probamos que s' es solución de $\mathcal{E}^b$. Probemos ahora el segundo punto de la proposición. Sea s' una solución de $\mathcal{E}^b$ y sea $s = s' \restriction_x$. Queremos ver que s es solución del sistema original $\mathcal{E}$. Antes, afirmamos que $\forall y \in Y(s'_y = sub(s,y))$. Para esto, sea $R = \{(s'_y, sub(s,y)) \mid y \in Y\}$. Veamos que la restricción de R a los elementos de Y tales que, tanto s'_y como $sub(s,y)$ son conjuntos, es una bisimulación en conjuntos. Supongamos que $(s'_y, sub(s,y)) \in R$. Demostremos las tres condiciones de bisimulación. Primero veamos que $s'_y \cap \mathcal{U} = sub(s,y) \cap \mathcal{U}$. Sea $z \in (s'_y \cap \mathcal{U})$, de acuerdo con la definición de sistema simple de ecuaciones generalizado, $z \in e'_y \cap A$; y como $dom(s) = X$ y $X \cap A = \phi$, entonces $z = sub(s,z)$. Si $y \in Y - X$, entonces $z \in y \cap A$, ya que $e'_y = y$, por lo tanto $z = sub(s,z) \in sub(s,y)$. El caso $y \in \mathcal{U}$ es fácil, supongamos entonces $y \in Y - X$.

Ahora, sean $z \in sub(s,y) \cap \mathcal{U}$ y $w \in y$ tal que $sub(s,w) = z \in \mathcal{U}$. Como s es una función cuyos valores son conjuntos, entonces $w \notin X$, de lo contrario $s_w = sub(s,w) = z \in \mathcal{U}$; de manera que $w \in A$, en consecuencia $z = sub(s,w) = w$. Así, $z \in y \cap A$, y como $y \in Y - X$, entonces $e'_y = y$, y en consecuencia $z \in e'_y \cap A$, por lo tanto $z \in s'_y$. Nuevamente el caso $y \in \mathcal{U}$ es sencillo.

Falta ver las otras dos condiciones. Sea c un conjunto tal que $c \in s'_y$, entonces existe $z \in e'_y \cap Y$ tal que $c = s'_z$. Por lo tanto $(c, sub(s,z)) \in R$. Por último, sea $z \in sub(s,y) - \mathcal{U}$ y sea $w \in y$ tal que $z = sub(s,w)$; $w \notin A$ ya que de lo contrario $z \in A$, y si $w \in X$, entonces $z = s_w = s'_w \in s'_y$. Si $w \notin \mathcal{U}$, como Y es transitivo en conjuntos, $w \in Y$, de manera que $w \in y \cap Y = e'_y \cap Y$. Por lo tanto, en cualquier caso, $(z, s'_w) \in R$. Con lo cual concluimos que $s'_y = sub(s,y)$ para toda y en Y [4.3.4]. Para terminar la demostración hace falta únicamente probar que $\forall x \in X(sub(s,x) = sub(s,e_x))$. De acuerdo con la definición,

$$\begin{aligned} s_x = s'_x &= \{s'_z \mid z \in (e'_x \cap Y)\} \cup (e'_x \cap A) \\ &= \{sub(s,z) \mid z \in (e_x \cap Y)\} \cup (e_x \cap A) \\ &= \{sub(s,z) \mid z \in (e_x \cap Y)\} \cup \{sub(s,z) \mid z \in (e_x \cap A)\} \\ &= \{sub(s,z) \mid z \in e_x\} \\ &= sub(s,e_x). \end{aligned}$$

□

Ahora sí, estamos en posición de enunciar el Lema de solución en su forma general, al cual denotaremos con LS.

Proposición 4.4.7. *[Lema de solución](ℓss) Todo sistema generalizado de ecuaciones $\mathcal{E}$, tiene una única solución.*

Demostración. La existencia y unicidad se obtienen como resultado del lema anterior y del lema simple de solución. □

Todo esto nos lleva a la siguiente afirmación.

Proposición 4.4.8. *ℓss es equivalente (en $ZFCU^-$) al lema de solución.*

Demostración. La primera implicación se obtiene de manera inmediata de la proposición 4.4.7. Para el regreso, sea $\mathcal{E} = \langle X, A, e \rangle$ un sistema simple generalizado de ecuaciones. Sean $A' = soporte(A)$, $X' = \{\mathcal{N}(x, A') \mid x \in X\}$ y $e' : X' \longrightarrow V[X' \cup A']$ definida como $e'_y = (e_x \cap A) \cup \{\mathcal{N}(z, A') \mid z \in (e_x \cap X)\}$, para toda $y \in X'$.

Consideremos entonces al sistema generalizado $\mathcal{E}' = \langle X', A', e' \rangle$. De acuerdo con el lema de solución, $\mathcal{E}'$ tiene una única solución, digamos s'. Notemos que, como $s : X' \longrightarrow V[\mathcal{U}]$ y $X' \cap A = \phi$, entonces $sub(s,a) = a$

para toda $a \in A$. De manera que, para toda $x \in X$,

$$\begin{aligned}
s'(\mathcal{N}(x, A')) &= sub(s', e'_y) \text{ con } y \in \mathcal{N}(x, A'), \\
&= \{sub(s', w) \mid w \in e'_y\}, \\
&= \{sub(s', w) \mid w \in (e_x \cap A) \cup \{\mathcal{N}\,(z, A') \mid z \in (e_x \cap X)\} \\
&= \{sub(s', w) \mid w = \mathcal{N}(z, A') \text{ p.a } z \in (e_x \cap X)\} \cup \{sub(s', w) \mid w \in (e_x \cap A)\} \\
&= \{s'(\mathcal{N}(z, A')) \mid z \in (e_x \cap X)\} \cup \{w \mid w \in (e_x \cap A)\} \\
&= \{s'(\mathcal{N}(z, A')) \mid z \in (e_x \cap X)\} \cup (e_x \cap A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función s definida como $s(x) = s'(\mathcal{N}(x, A'))$, para toda $x \in X$, es una solución de $\mathcal{E}$. Luego de esto es fácil observar que cualqueir solución s' de $\mathcal{E}'$ infiere una solución de $\mathcal{E}$, con lo cual concluimos la prueba. $\square$

Capítulo 5

La paradoja del Hiperjuego

Uno de los alcances que tiene el axioma de antifundación es el de dar solución a lo que se conoce como la paradoja del hiperjuego, atribuida a William Zwicker. La paradoja consiste en un juego de dos jugadores, digamos I y II. De manera general, en un juego de dos jugadores, éstos se van alternando el turno, empezando siempre con el jugador I; luego, de acuerdo con las distintas jugadas que se hayan realizado a lo largo del juego, el siguiente jugador tiene un conjunto de movimientos permitidos y así sucesivamente hasta que alguno de los jugadores no tenga ningún movimiento posible, en este caso se da por finalizado el juego y se designa ganador al otro jugador.

Sin embargo hay juegos que pueden seguir indefinidamente si no se establecen reglas específicas que lo eviten, como es el caso de las damas. Cuando en un juego no hay jugadas válidas infinitas se dice que es bien fundado, o lo que es lo mismo, si cualquier jugada válida del juego tiene un fin, se trata entonces de un juego bien fundado.

Algunos juegos son en realidad una familia de juegos, como es el caso del Superjuego. Éste consiste en dos jugadores, I y II; el primero elige un juego $\mathcal{J}$ y a partir de ahí se comienza a jugar dicho juego de manera que II toma en éste nuevo el papel del jugador uno y viceversa. El Superjuego no es bien fundado puesto que I puede elegir al comienzo un juego que no lo sea. ¿Qué pasa entonces si restringimos el primer movimiento de manera que I pueda únicamente elegir juegos bien fundados? A este nuevo juego se le llama Hiperjuego. Notemos que si I siempre elige un juego bien fundado, entonces el Hiperjuego resulta serlo también. Es entonces posible que I elija, en un comienzo, el Hiperjuego mismo; en cuyo caso II podría repetir la elección, y si se continuara así tendríamos una jugada infinita, llegando con esto a lo paradójico del Hiperjuego.

Formalicemos lo que hemos planteado hasta ahora. Veamos entonces cómo modelar juegos, para esto primero es importante mencionar que los juegos que estamos considerando son todos de dos jugadores, en los cuales se cuenta con toda la información necesaria, en cualquier estado del juego, para realizar el siguiente movimiento. De manera que no se consideran factores externos como lo son tratos hechos antes de jugar, y la habilidad de algunos jugadores para apostar o mentir.

5.1. Modelando juegos

Para dar un modelo adecuado a nuestra noción de juego, pensaremos a una jugada de un juego como una sucesión de movimientos de un conjunto $\mathcal{M}$ de posibles movimientos. También queremos modelar el hecho de que en cualquier etapa del juego (con excepción de la primera jugada) los posibles movimientos dependen de los previamente realizados a lo largo del juego. Sea $\mathcal{M}$ un conjunto de movimientos y, de acuerdo con nuestra notación, $\mathcal{M}^{<\omega}$ el conjunto de sucesiones finitas de elementos de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^{\leq\omega}$ el conjunto de sucesiones finitas e infinitas de elementos de $\mathcal{M}$. De manera que una jugada es un elemento de $\mathcal{M}^{\leq\omega}$. Por ejemplo, si consideramos la función vacía, ésta es una jugada, no necesariamente válida, en cualquier juego, a la cual denotaremos con el símbolo ϵ, para hacer énfasis en que se trata de una jugada. Hay dos partes muy importantes que tenemos que considerar al modelar los juegos. Uno es el hecho de que todo juego tiene reglas y el otro consiste en poder determinar el ganador de cada jugada del juego.

Primero definimos el tamaño de una jugada cualquiera, $tm(j)$, como el número de términos en la sucesión si j es una sucesión finita, o ω si es infinita. Por ejemplo, $tm(\epsilon) = 0$. Si $n \in \omega$ y $n \leq tm(j)$ entonces definimos el n-ésimo movimiento de j, en símbolos $mov(j, n)$, como el n-ésimo término de j. De manera que para cualquier $n \leq tm(j)$, $mov(j, n) \in \mathcal{M}$. También, dada $n \leq tm(j)$, definimos el truncamiento de j a partir de n, en símbolos $tr(j, n)$, como la jugada obtenida al eliminar todos los elementos de la sucesión posteriores al n-ésimo término. Por ejemplo, $tr(j, 0) = \epsilon$. Finalmente, diremos que una jugada j' extiende a una jugada j si y sólo si $j = tr(j', tm(j))$. Por cuestiones prácticas, dada una jugada finita j y un movimiento m, denotaremos con $j^\frown m$ a la jugada que consta de todos los movimientos de j y que termina en m, es decir, si $j = \langle j_1, j_2, ..., j_n\rangle$ entonces $j^\frown m = \langle j_1, j_2, ..., j_n, m\rangle$.

Definición 5.1.1. *Una regla en $\mathcal{M}$ es una función $\mathcal{R}$ cuyo dominio es un subconjunto no vacío de $\mathcal{M}^{<\omega}$, de manera que a cada elemento de éste lo* *manda a un subconjunto de $\mathcal{M}$; y tal que* $\forall j, m[(j \in dom(\mathcal{R}) \wedge m \in \mathcal{R}(j)) \Leftrightarrow j^\frown m \in dom(\mathcal{R})]$.

A los elementos de $dom(\mathcal{R})$ se les llama jugadas finitas legales. Dada una jugada j, los elementos de $\mathcal{R}(j)$ se les llama los movimientos permitidos luego de j. Si j es una jugada legal y no hay más jugadas legales luego de j, es decir $\mathcal{R}(j) = \phi$, entonces se dice que j es una jugada terminal. De este modo, si $\mathcal{R}$ es una regla en $\mathcal{M}$, entonces para todas las jugadas finitas j y todos los movimientos m, j es una jugada legal y m es permitida luego de j si y sólo si $j^\frown m$ es una jugada legal.

Una jugada (finita o infinita) $j \in \mathcal{M}^{\leq\omega}$ es legal de acuerdo con la regla $\mathcal{R}$ si y sólo si para cualquier $n \in \omega$, $mov(j, n+1) \in \mathcal{R}(tr(j, n))$. De acuerdo con lo anterior podemos ver un juego legal infinito $\langle m_1, m_2, ...\rangle$ como sigue:

I	II
$m_1 \in \mathcal{R}(\epsilon)$	
	$m_2 \in \mathcal{R}(\langle m_1\rangle)$
$m_3 \in \mathcal{R}(\langle m_1, m_2\rangle)$	
	$m_4 \in \mathcal{R}(\langle m_1, m_2, m_3\rangle)$
$\vdots$	$\vdots$

Con esto ya podemos definir qué es un juego, y determinar, dada una jugada, quién es el ganador. Supongamos que tenemos una regla $\mathcal{R}$ en un conjunto $\mathcal{M}$ de movimientos. Si j es una jugada terminal en el juego, significa que el jugador que tiene el turno no tiene ya posibilidades. En tal caso declaramos a dicho jugador el perdedor. En otras palabras, si $\mathcal{R}(j) = \phi$ y j tiene un número impar (par) de términos, entonces el jugador I (II) es el ganador. De manera que j es una jugada ganadora para I (para II, respectivamente). Pero ¿qué sucede en caso de que la jugada sea infinita? ¿quién resultará ganador? Se necesita entonces definir de manera arbitraria quién es el ganador de la jugada planteada.

Definición 5.1.2. *Un juego es una terna $\mathcal{J} = \langle \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G}\rangle$, tal que $\mathcal{R}$ es una regla en $\mathcal{M}$ y $\mathcal{G}$ un subconjunto de las jugadas infinitas legales de $\mathcal{R}$.*

Dado dicho juego, definimos el conjunto $\mathcal{G}_I$ de jugadas ganadoras para I como el conjunto de jugadas finitas (legales) en las que I resulta ganador, junto con todas las jugadas de $\mathcal{G}$. Y definimos $\mathcal{G}_{II}$ como el conjunto de jugadas finitas ganadoras para II, junto con todas las jugadas legales infinitas que no están en $\mathcal{G}$. Consideremos el siguiente ejemplo, el juego de la Pertenencia. Dado un conjunto a definimos el juego de la Pertenencia, $\mathcal{J}_a$

como sigue. El jugador I comienza eligiendo un elemento m_1 del conjunto a, luego el jugador II debe elegir un conjunto $m_2 \in m_1$ y así sucesivamente. Resulta ganador el jugador que logre que el otro no pueda seguir. Pensemos por ejemplo en el conjunto $a = \{0, 1, a\}$. Una jugada ganadora para I sería elegir en el primer movimiento 0, de manera que II ya no fuese capaz de elegir un elemento de dicho conjunto. Sin embargo, podría escoger 1 o a y luego darle oportunidad al jugador II de elegir 0, lo que terminaría siendo una jugada ganadora para II. En caso de que I elija a y II haga lo mismo y así sucesivamente ¿quién ganaría? Para responder esta pregunta debiéramos decidirlo antes y ponerlo como una regla más. Como sucede con el ajedrez, donde cualquier jugada infinita es una jugada ganadora para el jugador II. En este caso vemos que $\mathcal{J}_a = \langle \{0, 1, a\}, \mathcal{R}, \mathcal{G}_I \rangle$, donde, para cualquier jugada $j = \langle w_1, w_2, ..., w_k \rangle$, $\mathcal{R}(\langle w_1, w_2, ..., w_k \rangle) = w_k$ y $\mathcal{G}_I$ es el conjunto de jugadas legales en las cuales para algún n, $mov(j, 2n)$ es o vacío o un urielemento.
Las siguientes son nociones importantes, una de las cuales ya habíamos mencionado en un principio pero que, una vez definido qué es un juego, ya podemos hacerlo formalmente.

Definición 5.1.3. *Un juego $\mathcal{J}$ es bien fundado si toda jugada legal es finita. $\mathcal{J}$ es abierto si para cualquier jugada infinita ganadora, j', para I hay un segmento inicial finito j de j' tal que toda extensión infinita legal de j es una jugada ganadora para I; $\mathcal{J}$ es cerrado si para cualquier jugada legal infinita j' ganadora para II hay un segmento inicial j de j' tal que toda extensión infinita legal de j es una jugada ganadora para II.*

Nótese que los juegos bien fundados son tanto abiertos como cerrados. Nótese también que el juego de la Pertenencia $\mathcal{J}_a$ es bien fundado si y sólo si a es un conjunto bien fundado.

Proposición 5.1.4. *La colección de todos los juegos bien fundados no es un conjunto. Por lo tanto no existe el conjunto de todos los juegos.*

Demostración. Si $a \neq b$ entonces $\mathcal{J}_a \neq \mathcal{J}_b$. Y, como la colección de conjuntos bien fundados es una clase propia, entonces hay una clase propia de juegos bien fundados. □

Queremos también poder modelar, para cualquier juego, las nociones de estrategia y de estrategia ganadora. De manera intuitiva una estrategia de un jugador le permite, en cualquier punto del juego, saber cuál será su próximo movimiento. Entonces, a partir de las jugadas realizadas a lo largo del juego él debe saber cuál será su siguiente movimiento de acuerdo a su estrategia. Es por esto que podemos ver a las estrategias como funciones;

y a las estrategias ganadoras de un jugador cualquiera como aquellas que, de seguirla efectivamente, sin importar cuáles sean los movimientos del otro jugador, el de la estrategia gana.

Definición 5.1.5. *Sea* $\mathcal{J} = (\mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G}_I)$ *un juego.*

1. *Una estrategia* σ *de I (de II) en* $\mathcal{J}$ *es una función de las jugadas legales finitas de longitud par (impar) a* $\mathcal{M}$*.*

2. *Si* σ *es una estrategia de I, entonces una jugada* j *es jugada de acuerdo con* σ *si en cualquier estado del juego los movimientos de I están dados por* σ*, es decir, si para cualquier impar* $2n+1 \leq tm(j)$, $\sigma(tr(j, 2n)) = mov(j, 2n+1)$*. Si* σ *es una estrategia de II, entonces* j *es jugada de acuerdo con* σ *si para cualquier entero par* $2n+2 \leq tm(j)$, $\sigma(tr(j, 2n+1)) = mov(j, 2n+2)$*.*

3. *Una estrategia* σ *de I (o de II) es una estrategia ganadora si cualquier jugada llevada a cabo de acuerdo con* σ *es una jugada ganadora para I (para II, respectivamente).*

4. *Un juego* $\mathcal{J}$ *está determinado si alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora.*

Nótese que no es posible que ambos jugadores tengan estrategia ganadora en un juego. Esto es fácil de verse ya que $\mathcal{G}_I \cap \mathcal{G}_{II} = \phi$. Veamos ahora un resultado importante para la teoría de los juegos de dos jugadores.

Proposición 5.1.6 (Teorema de Gale-Stewart)**.** *Cualquier juego abierto está determinado.*

Demostración. Sea $\mathcal{J}$ un juego abierto y supongamos que I no tiene una estrategia ganadora, entonces encontraremos una para II. La manera en que debe actuar II es defensivamente, lo cual consiste en evitar en cualquier punto del juego, caer en una posición en la cual I tenga una estrategia ganadora. Aunque es una estrategia muy básica, en el caso de juegos abiertos, como veremos a continuación, es una jugada ganadora efectiva para II, claro que bajo la suposición de que I no tenga una estrategia ganadora. Veamos primero que siempre es posible llevar a cabo dicha estrategia. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, dada una jugada finita j de un juego $\mathcal{J}$ dado, supongamos que II sigue teniendo movimientos posibles y que sin importar qué movimiento $m \in \mathcal{R}(j)$ realice II, I tiene una estrategia ganadora σ_m. Pero de ser así, I tendría en la posición $tm(j)$ una estrategia ganadora que consistiría en jugar σ_m siempre que II juegue m, lo cual es contrario a la estrategia de II. Y de ser así, bajo este razonamiento regresaríamos hasta el punto de partida, pero como I no tiene una estrategia ganadora al principio del juego, entonces II siempre podrá realizar un movimiento de manera que I no tenga estrategia ganadora.

Ahora veamos que la estrategia antes planteada es una estrategia ganadora para II. Para esto, sea j una jugada realizada de acuerdo con la estrategia antes planteada y supongamos también que j resulta ser una jugada ganadora para I. Como $\mathcal{J}$ es un juego abierto, entonces existe $n \in \omega$ tal que en el estado n del juego, está asegurado el triunfo de I, de manera que en dicho punto del juego I tiene una estrategia ganadora que consiste en realizar cualquier movimiento válido, lo cual contradice la hipótesis inicial. $\square$

Como tanto todo juego bien fundado como todo juego $\mathcal{J}_a$ (para cualquier conjunto a) son abiertos, entonces están determinados. Por otro lado veamos que a partir de un juego $\mathcal{J}$ cerrado podemos definir un juego $\mathcal{J}'$ abierto del siguiente modo. $\mathcal{J}'$ consiste prácticamente en el mismo juego que $\mathcal{J}$ con excepción de que las posiciones que cuentan como jugadas ganadoras para I en $\mathcal{J}'$ son justamente las jugadas ganadoras de II en $\mathcal{J}$. Por lo que $\mathcal{J}'$ es abierto, por lo mismo está determinado. Más aún, si uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora en $\mathcal{J}'$, el otro lo tendrá en $\mathcal{J}$, de manera que $\mathcal{J}$ está determinado, con lo cual podemos concluir lo siguiente.

Proposición 5.1.7. *Todo juego cerrado está determinado.*

Hemos visto entonces que cualquier juego abierto o cerrado está determinado sin embargo no sólo estos lo están. Todavía más, asumiendo el axioma de elección podemos construir juegos que no están determinados. Sin embargo esto no lo haremos en este trabajo[1].

5.2. Resolución de la paradoja del Hiperjuego

Una vez hecha toda esta introducción contamos con todo lo necesario para poder resolver la paradoja del hiperjuego. El razonamiento utilizado por Zwicker para resolver la paradoja del Hiperjuego consiste en el resultado obtenido en la proposición 5.1.4 ya que él plantea que el problema del Hiperjuego radica en el hecho de que la colección de juegos bien fundados no forma un conjunto, entonces tampoco lo es la colección de posibles primeros movimientos del Hiperjuego. O, como él lo dijo, "El Hiperjuego no existe,

[1]En caso de que se desee revisar dicha afirmación, se puede consultar [7].

así que ni siquiera pensar en jugarlo". Sin embargo, a pesar de que su razonamiento es correcto, no resuelve el problema inmerso en el razonamiento de la paradoja.

Como no podemos partir del conjunto de todos los juegos bien fundados puesto que ya vimos que éste no es un conjunto, pensamos en una colección menor que sí lo sea y en la posibilidad de que dentro de dicho conjunto está el Hiperjuego (que conste de elegir únicamente de entre un subconjunto de juegos bien fundados).

Lo que haremos para resolver el problema será examinar dos construcciones que, además de funcionar para lo que buscamos, tienen propiedades muy interesantes. En ambas construcciones pasamos de un conjunto S de juegos a uno más grande. Ya que lo que buscamos es pasar de un conjunto de juegos S a un juego S' cuyo primer movimiento sea cualquiera de los juegos bien fundados de S; y si S' es bien fundado, entonces S' puede ser un primer movimiento de él mismo. Al primer juego construido se le llama "Superjuego". En la construcción el primer movimiento del nuevo juego tendrá que ser uno de los juegos de S, pero es necesario que no sea un conjunto bien fundado. En la segunda construcción el primer movimiento puede ser el hiperjuego mismo, pero sin preguntarnos al definir el juego, si el hiperjuego es bien fundado o no lo es. A esta segunda construcción se le llama Hiperjuego.

Construcción del Superjuego

Sea S un conjunto de juegos, el Superjuego sobre S, en símbolos S^+, está definido informalmente como mencionamos en un principio en la introducción de esta sección. El jugador I elige un juego de S y a partir del segundo movimiento se comienza a jugar el juego elegido por I. Así, de acuerdo con lo que hemos visto hasta ahora, podemos concluir lo siguiente.

Proposición 5.2.1. *Sea S un conjunto de juegos.*

1. *Si S es un conjunto de juegos bien fundados, entonces S^+ es un juego bien fundado.*

2. *Si S es un conjunto de juegos bien fundados, entonces S^+ no pertenece a S.*

Como una consecuencia de este resultado obtenemos una prueba alterna de que no hay un conjunto de juegos bien fundados. Para ello, supongamos lo contrario y sea S dicho conjunto, entonces S^+ sería un juego bien fundado que no estaría en S.

Construcción del Hiperjuego

La idea intuitiva del Hiperjuego la mencionamos al principio de esta sección. Sólo aclararemos la notación que utilizamos. Dado un conjunto S de juegos, el Hiperjuego S^* es aquel en que los primeros movimientos posibles para I son cualquier juego en S o S^* mismo y a partir de ahí se comienza jugando el juego elegido. El jugador I gana si la jugada considerada a partir del segundo movimiento cuenta con un triunfo para II en el juego elegido en el primer movimiento. Luego, si I elige S^* entonces el jugador II toma el papel que I tenía en un principio. Si II elige algún juego $\mathcal{J} \in S$, entonces el resto es una jugada $j \in \mathcal{J}$. En este caso, I gana el juego inicial S^* si y sólo si I gana j considerada como jugada en $\mathcal{J}$. Pero como en este caso es posible que II elija S^* mismo, y esto puede suceder sucesivamente sin parar, en este caso se considera a II el ganador de todo el juego.

Ahora veamos que con lo que hemos hecho hasta ahora es posible modelar, dado un conjunto de juegos bien fundados, S, el Hiperjuego S^*.

Proposición 5.2.2. *(LS) Para cualquier conjunto S de juegos bien fundados, el juego S^* está bien definido.*

Demostración. Para la demostración de esta proposición utilizamos el lema de solución. Para facilitarnos el trabajo denotaremos con $\mathcal{J} = \langle \mathcal{M}_{\mathcal{J}}, \mathcal{R}_{\mathcal{J}}, G_I^{\mathcal{J}} \rangle$ a cualquier juego $\mathcal{J} \in S$. Sean x, y, z y w urielementos que no pertenecen a $soporte(S)$. Consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \langle y, z, w \rangle \\ y &= M \\ z &= R \\ w &= G. \end{aligned}$$

En seguida especificamos quiénes son M, R y G. La idea es que la solución s del sistema nos determine el juego S^* que estamos buscando.

Sea $M = S \cup \{x\} \cup \bigcup_{\mathcal{J}} \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$. Esta construcción dispondrá que todos los movimientos de S^* provengan de $sub(s, M)$. R es la función definida en un subconjunto de $M^{<\omega}$ como sigue: Para cada $p \in M^{<\omega}$, si $p = \epsilon$, o $p = \langle x, x, x, ..., x \rangle$, entonces $R(p) = S \cup \{x\}$. Si hay un juego $\mathcal{J} \in S$ y una jugada legal finita q de $\mathcal{J}$ tal que $p = \langle \mathcal{J}, q \rangle$ o $p = \langle x, x, ..., x, \mathcal{J}, q \rangle$, entonces $R(p) = R_{\mathcal{J}}(q)$. De otro modo $p \notin dom(R)$. Finalmente, G consiste en esas jugadas $p \in M^{\leq\omega}$ tales que para algún $\mathcal{J} \in S$, sucede uno u otro:

i) $p = \langle x, x, ..., x, \mathcal{J}, q\rangle$, con la longitud de la sucesión de x algún número par (posiblemente 0) y q un triunfo para II en $\mathcal{J}$

ii) $p = \langle x, x, ..., x, \mathcal{J}, q\rangle$, con la longitud de la sucesión de x algún número impar y q un triunfo para I en $\mathcal{J}$.

Sea s una solución para el sistema de ecuaciones antes descrito. Entonces s_x es un juego al cual llamaremos S^*. Falta revisar que en efecto éste satisface las condiciones del hiperjuego. Para esto, nótese que la jugada infinita $\langle S^*, S^*, ...\rangle$ no está en $sub(s, w)$. Nótese también que S^* no es un juego bien fundado. De manera que $S^* \notin S$. Esto implica que la jugada infinita de S^* no es un triunfo para I. □

Proposición 5.2.3. *Sea S cualquier conjunto de juegos bien fundados. S^* no es bien fundado, así que $S^* \notin S$.*

Demostración. Vimos que la sucesión $\langle S^*, S^*, ...\rangle$ es una jugada legal en S^*. Ningún segmento inicial de ésta es una jugada ganadora para ninguno de los dos jugadores. De esto se sigue que S^* no es bien fundado, por lo que $S^* \notin S$. □

En la descripción informal del hiperjuego hay cierta ambigüedad entre la construcción de S^+ y la construcción de S^*. Supongamos que S es un conjunto de juegos bien fundados. Si por el hiperjuego en S nos referimos a S^+, entonces el hiperjuego es en efecto bien fundado. Pero no está en S, así que no es un primer movimiento legal de él mismo. Por otro lado, si por el hiperjuego en S nos referimos a S^*, entonces el hiperjuego no está bien fundado pero es un primer movimiento legal de él mismo.

Apéndice A

Los axiomas de ZFC

En este apartado enlistamos los axiomas que conforman la teoría ZFC.

ZF$_1$. Axioma de extensionalidad. $\forall a \forall b(\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b)$.

ZF$_2$. Axioma de existencia o del conjunto vacío. $\exists x \forall y(y \notin x)$.

ABF. Axioma de buena fundación.
$\forall a[a \neq \phi \rightarrow \exists m(m \in a \wedge \forall y(y \in m \rightarrow y \notin a))]$.

ZF$_3$. Axioma del par. $\forall a \forall b \exists c[\forall x(x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))]$.

ZF$_4$. Axioma de la unión. $\forall a \exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow \exists y(y \in a \wedge x \in y))$.

ZF$_5$. Axioma del conjunto potencia. $\forall a \exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow \forall y \in x(y \in a))$. Dado un conjunto a, denotaremos con $\wp(a)$ al conjunto b con la propiedad anterior.

ZF$_6$. Esquema de comprensión. Para toda fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de ZF que no tenga libre la variable b, se tiene que

$$\forall a \exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)).$$

ZF$_7$. Axioma del infinito. $\exists a(\phi \in a \wedge \forall x \in a(x \cup \{x\} \in a))$.

ZF$_8$. Esquema de remplazo. Para toda fórmula φ con al menos x, y libres, se tiene que
$\forall x \exists y \forall z[\varphi(x, y) \wedge (\varphi(x, z) \rightarrow y = z)] \rightarrow (\forall a \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge \varphi(x, y))))$.

AC. Axioma de elección.
$\forall a[(\phi \notin a \wedge \forall z, w \in a(\exists u(u \in z \wedge u \in w) \to z = w)) \to \exists c \forall x \in a \exists b(x \cap c = \{b\})]$.

Con ZFC denotaremos a la teoría formada a partir de los axiomas anteriores, con ZF a la teoría formada de estos mismos con excepción del axioma de elección. Siguiendo esta misma idea, ZFC^- y ZF^- denotan a las teorías antes mencionadas, respectivamente, sin el axioma de buena fundación.

Apéndice B

Conjuntos bien fundados

Una forma de entender mejor qué es un conjunto bien fundado, y su diferencia con los no bien fundados, es analizando cómo se construyen. Veamos entonces la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados.

$BF(X)$, el universo de los conjuntos bien fundados formados a partir de la colección de urielementos X, es construido mediante un proceso iterativo del siguiente modo. En el primer estrato, $BF_0(X)$, están todos los elementos de X. Luego, si $BF_a(X)$ es un estrato cualquiera, entonces el siguiente estrato consta únicamente de todos los urielementos junto con todas las colecciones posibles de objetos que aparecen en el estrato anterior. Nótese que si un objeto aparece en un estrato entonces también lo hará en todos los estratos posteriores; de ahí el nombre de "acumulativa". Es preciso mencionar que la colección de urielementos X puede ser una clase propia.

Así, todos los conjuntos construidos de este modo tendrán un principio o un "fondo"con respecto a la relación de pertenencia. Y son precisamente estos los conjuntos bien fundados.

De este modo definiremos a $BF(X)$, la clase de todos los conjuntos bien fundados a partir de X, como sigue.

Definición B.0.4. *Por recursión transitiva, definimos $BF_\alpha(X)$, con α un ordinal, como:*

$$\begin{aligned} BF_0(X) &= X \\ BF_{n^+}(X) &= \wp(BF_n(X)) \cup X \\ BF_\alpha(X) &= \bigcup_{\beta<\alpha} BF_\beta(X) \ \textit{si } \alpha \textit{ es límite.} \end{aligned}$$

De manera que $BF(X) = \bigcup\{BF_\alpha(X) \mid \alpha \in ORD\}$. En el caso en el cual se trabaje sin urielementos escribiremos simplemente BF.

De este modo, un conjunto será bien fundado si y solamente si pertenece a algún estrato de la jerarquía acumulativa, es decir, si y solamente si pertenece a BF. De acuerdo con esta construcción es fácil probar que para cualquier ordinal α, BF_α, es transitivo y $BF_\beta \subset BF_\alpha$ para toda $\beta < \alpha$. Enunciamos también los siguientes lemas, para recordar las propiedades de BF. Sin embargo, manteniendo el objetivo principal de este trabajo hemos omitido las pruebas de los mismos las cuales pueden consultarse en [8].

Lema B.0.5. *Si $x, y \in BF$, entonces $\cup x, \wp(x)$, $\{x\}$, $x \times y$, $x \cup y$, $x \cap y$ y $\{x, y\}$ pertenecen todos a BF.*

Lema B.0.6. *$\forall x(x \in BF \Leftrightarrow x \subset BF)$.*

Es decir, todo elemento de un conjunto bien fundado es a su vez un conjunto bien fundado.

Lema B.0.7. *Si $a \in BF$, entonces $\in$ bien funda a a.*

La conversa de este lema no es necesariamente cierta. Sean a y b dos conjuntos distintos tales que $a = \{b\}$ y $b = \{a\}$. Entonces, $\in$ bien funda a a pero claramente $a \notin BF$.

Lema B.0.8. *Si a es un conjunto transitivo y $\in$ bien funda a a, entonces $a \in BF$.*

Todas estas propiedades nos llevan a lo siguiente.

Lema B.0.9. *Sea a un conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $a \in BF$.

(ii) $ct(a) \in BF$.

(iii) $\in$ *bien funda a* $ct(a)$.

Demostración. Primero probemos que (i) implica (ii). Sea $a \in BF$, por inducción sobre n y de acuerdo con el lema B.0.5, $\cup^n a \in BF$ para todo $n \in \omega$. De manera que, de acuerdo con el lema B.0.6, $\cup^n a \subset BF$, para todo $n \in \omega$, por lo tanto $ct(a) \subset BF$ y por lo mismo $ct(a) \in BF$. El lema B.0.7 afirma que (ii) implica (iii). Por último, Veamos que (iii) implica (i), para esto, supongamos que $\in$ bien funda a $ct(a)$, de manera que, de acuerdo con el lema B.0.8, $ct(a) \in BF$, en consecuencia $a \subset ct(a) \subset BF$. Por lo tanto, $a \in BF$. $\square$

De acuerdo con el lema anterior, recordemos que el axioma de buena fundación,

ABF $\forall a[a \neq \phi \rightarrow \exists m(m \in a \wedge \forall y(y \in m \rightarrow y \notin a))]$,

que es igual a afirmar que todo conjunto no vacío tiene un elemento minimal con respecto a la relación de pertenencia, equivale a la asunción de que $V = BF$, es decir, el axioma de buena fundación es equivalente a la afirmación de que todos los conjuntos son bien fundados.

Resulta entonces que este axioma es restrictivo puesto que, como se ve en este trabajo, ZFC^{-} es consistente tanto con ABF como con AFA, axioma que implica la negación de ABF. De manera que ABF restringe el universo de los conjuntos a conjuntos bien fundados.

Apéndice C

Demostración del Teorema del Colapso de Mostowski

Antes de empezar la prueba del Teorema del Colapso de Mostowski recordemos la generalización del método de inducción transfinita para una clase transitiva arbitraria (no necesariamente un ordinal).

Teorema C.0.10 ($\in$-Inducción)**.** *Sean M una clase transitiva y φ una propiedad. Supóngase también que:*

(i) $\varphi(\phi)$ *y*

(ii) *si $x \in M$ y $\varphi(z)$ para cualquier $z \in x$, entonces $\varphi(x)$.*
Entonces toda $x \in M$ tiene la propiedad φ.

[Ver [7]]

Teorema C.0.11 (Recursión BF)**.** *Sea R una relacional bien fundada en la clase P y G una funcional en $P \times V$. Entonces, existe una única funcional F en P tal que: $F(x) = G(x, F\restriction_{x_R})$ para toda x en P.*

[Ver [7]]

Lema C.0.12. *Si R es una relacional que bien funda a una clase P, entonces toda clase distinta del vacío, $C \subset P$ tiene un elemento R-minimal.*

Demostración. Basta con probar que existe $x \in C$ tal que $x_R \cap C = \phi$. Sea $y \in C$ tal que $y_R \cap C \neq \phi$. Y sean $y_0 = y_R$, $y_{n^+} = \cup\{z_R \mid z \in y_n\}$ para toda $n \in \omega$; y definamos $ct_R(y) = \bigcup_{n\in\omega} y_n$. Sea entonces $X = ct_R(y) \cap C$, de manera que X tiene un elemento R-minimal. Y como cualquier elemento R-minimal de X es un elemento R-minimal de C, entonces podemos dar por concluida la prueba. $\square$

Proposición C.0.13. *Sean M_1, M_2 dos clases transitivas y π un isomorfismo de $M_1, \in$ sobre $M_2, \in$. Entonces, $M_1 = M_2$ y $\pi(u) = u$ para toda $u \in M_1$.*

Demostración. Demostraremos, por $\in -$inducción, que $\pi(x) = x$ para toda $x \in M_1$. Supongamos que $\pi(z) = z$ para toda $z \in x$ y que $y = \pi(x)$. Veamos entonces que $y = x$, lo cual haremos por doble contención. Como para toda $z \in x$, $z = \pi(z) \in \pi(x) = y$, entonces $x \subset y$. Por otro lado, sea $z \in y$. Como $y \in M_2$ y M_2 es transitiva, entonces $z \in M_2$, de manera que $\pi(w) = z \in y = \pi(x)$ para alguna $w \in M_1$, en consecuencia $w \in x$, y de acuerdo con la hipótesis $z = \pi(w) = w$, con lo cual concluimos que $\pi(x) = x$ para toda $x \in M_1$ y $M_1 = M_2$. □

Teorema del Colapso de Mostowski
Si R es una relacional bien fundada en una clase P, entonces hay una clase transitiva M y una funcional suprayectiva π entre P, R y $M, \in$. Si además R es extensional entonces π es un isomorfimo y, tanto la clase M como el isomorfismo π son únicos.

Demostración. Sea R una relacional que bien funda a P, utilizando el teorema C.0.11 definimos la funcional π en P del siguiente modo:
$\pi(x) = \{\pi(y) \mid yRx\}$ para toda x en P.

La imagen de π bajo P, a la cual denotaremos con M, se le llama el Colapso de Mostowski. La transitividad de M se sigue entonces de la definición de π, con lo cual hemos probado la primera parte.

Supongamos ahora que además R es extensional. Queremos probar que π es inyectiva, para esto supongamos lo contrario y sea x $R-$minimal de la clase $\{x \in P \mid \exists y \in P(x \neq y \wedge \pi(x) = \pi(y))\}$ [lema C.0.12], y tomemos $y \neq x$ tal que $\pi(x) = \pi(y)$. Entonces, para cualquier z en P tal que zRx, existe $w \in P$ tal que wRy y $\pi(z) = \pi(w)$, y de acuerdo con la minimalidad de x, $z = w$, de modo que zRy. De manera análoga para toda $z \in P$ tal que zRy se tiene que zRx. De manera que $\forall z \in P(zRx \leftrightarrow zRy)$, y como R es extensional, $x = y$, por lo tanto π es inyectiva.

Es fácil ver que para cualesquiera $x, y \in P$, $xRy \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y)$. La primera implicación se obtiene de manera directa de la definición de π. Por otro lado, si $\pi(x) \in \pi(y)$, entonces $\pi(x) = \pi(z)$ para algún zRy. De esta manera, de acuerdo con la inyectividad de π, xRy.

Por último probemos la unicidad de π y de M. Sean π_1, π_2 dos isomorfismo de P a M_1 y M_2, respectivamente, entonces $\pi_2\pi_1^{-1}$ es un isomorfismo entre M_1 y M_2, y de acuerdo con la proposición anterior, $\pi_2\pi_1^{-1}$ es la función identidad y $M_1 = M_2$. Con lo cual concluimos la prueba. □

Apéndice D

Modelos internos de la teoría de los conjuntos

En este apéndice hacemos un pequeño repaso sobre modelos, el necesario para el desarrollo del capítulo 3.
Un tipo ρ es un conjunto de símbolos de relación, de función y de símbolos de constante.

Definición D.0.14. *Una $\rho-$estructura es un par $\mathfrak{A} = <A, I>$, donde A es una clase no vacía e I es una funcional de interpretación que a cada símbolo de relación n-ario R, de ρ, le asigna un subconjunto de A^n, el cual denotaremos con $R^{\mathfrak{A}}$; a cada símbolo de función m-ario f, le asigna una función $f^{\mathfrak{A}} : A^m \longrightarrow A$; y a cada símbolo de constante c, le asigna un elemento de A, que denotaremos con $c^{\mathfrak{A}}$.*

Sean $\mathfrak{L}$ el lenguaje correspondiente a ρ, φ una fórmula de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$ una $\rho-$estructura y $s : VAR \longrightarrow A$ una función del conjunto de todas las variables, en el universo A de $\mathfrak{A}$. De manera informal definimos satisfacibilidad en estructuras de la siguiente manera. $\mathfrak{A}$ satisface φ con s, en símbolos $\mathfrak{A} \vDash \varphi[s]$, si y sólo si la traducción de φ determinada por $\mathfrak{A}$, $\varphi^{\mathfrak{A}}$, donde la variable x se traduce como $s(x)$ en cualquier lugar en que ocurre libre, es verdadera[1]. En particular si σ es un enunciado, es decir, una fórmula en la cual ninguna variable ocurre libre, entonces se escribe simplemente $\mathfrak{A} \vDash \varphi$.
Sea φ una fórmula, si $\mathfrak{A}$ satisface φ con toda función s de VAR en A, se dice que φ es verdadera en $\mathfrak{A}$ o que $\mathfrak{A}$ es modelo de φ y se escribe $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Así $\mathfrak{A}$ es modelo de un conjunto Σ de fórmulas si y sólo si $\mathfrak{A}$ es un modelo de todas los elementos de Σ.

[1]Para una definición formal revisar [5].

Para alcanzar el objetivo principal de este apartado, trabajaremos en el lenguaje de la teoría de los conjuntos, $\mathfrak{L}_{\in}$, que consta únicamente del símbolo de relación $\in$. Recordemos que las fórmulas de la teoría de los conjuntos están construidas a partir de las fórmulas atómicas $x \in y$ y $x = y$ utilizando los símbolos lógicos de conjunción, negación y el cuantificador $\exists$; de tal modo que los modelos de ZFC están dados por una clase no vacía M y una relacional E en él que interprete a $\in$. Es decir, dado un conjunto$\Sigma \subseteq \mathfrak{L}_{\in}^{0}$[2], la $\in$-estructura $\mathfrak{M} = M, E$ es modelo de Σ si y sólo si $\mathfrak{M} \models \Sigma$ y $E = \in^{\mathfrak{M}}$. De acuerdo con lo anterior, definamos recursivamente, desde el metalenguaje, la relativización de una fórmula en $\mathfrak{L}_{\in}$, φ a M, E, que no es más que su interpretación.

Definición D.0.15. *Sean M una clase no vacía, E una relacional sobre M y φ una fórmula en $\mathfrak{L}_{\in}$. La relativización de φ a M, E, denotada con $\varphi^{M,E}$, queda descrita como sigue:*

1. *Sean $x, y \in VAR$:*
   a) $(x \in y)^{M,E} \Leftrightarrow (xEy)$.
   b) $(x = y)^{M,E} \Leftrightarrow (x = y)$.
2. *Sean ψ,$\chi \in FOR_{\in}$ y $x \in VAR$:*
   a) $(\neg\psi)^{M,E} \Leftrightarrow \neg(\psi^{M,E})$.
   b) $(\psi \wedge \chi)^{M,E} \Leftrightarrow \psi^{M,E} \wedge \chi^{M,E}$.
   c) $(\exists x\psi)^{M,E} \Leftrightarrow \exists x[s \in M \wedge (\psi)^{M,E}]$.

Definición D.0.16. *Sean $\Sigma \cup \Gamma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathfrak{L}_{\in}^{0}$.*

- *Si $\Sigma \vdash \sigma^{M,E}$ diremos que σ es verdadera en M, E según Σ o que M, E es modelo de σ, según Σ.*
- *Si todos los enunciados de Γ son verdaderos en M, E, según Σ diremos que M, E es modelo de Γ según Σ y lo denotaremos con $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$.*

Metateorema D.0.17 (Metateorema Fundamental de pruebas relativas de consistencia para modelos internos de la Teoría de los conjuntos)**.** *Sean $\Sigma, \Gamma \subseteq \mathfrak{L}_{\in}^{0}$. Si*

a) $\Sigma \vdash \exists x(x \in M)$ *y*

[2]Donde $\mathfrak{L}_{\in}^{n}$ es el conjunto de fórmulas de $\mathfrak{L}_{\in}$ con n variables libres, de modo que $\mathfrak{L}_{\in}^{0}$ es el conjunto de enunciados de $\mathfrak{L}_{\in}$.

b) $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$,

entonces, la consistencia de Σ *implica la consistencia de* Γ.

Demostración. Sean $\Sigma, \Gamma \subseteq \mathfrak{L}^0_\in$ y supongamos que Σ es consistente, de manera que tiene un $\in$-modelo, es decir, existe una $\in$-estructura $\mathfrak{A} = A, \in^{\mathfrak{A}}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$. Para ver que Γ es consistente basta con probar que tiene un modelo.
Definamos una subclase de A y una relacional en ésta del siguiente modo:

- $$B = \{b \in A \mid \mathfrak{A} \vDash x \in M[b]\} \tag{D.1}$$

- Sean $x, y \in VAR$, para cualesquiera $b_0, b_1 \in B$,

$$b_0 s b_1 \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash (xEy)[b_0, b_1]. \tag{D.2}$$

Nótese que $B \neq \phi$ ya que, de acuerdo con la hipótesis inicial, $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$ y $\Sigma \vdash \exists x(x \in M)$, de modo tal que $\mathfrak{A} \vDash \exists x(x \in M)$. Así, si consideramos $\mathfrak{B} = B, s$, donde $\in^{\mathfrak{B}} = s$, afirmamos que $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$. Para esto se prueba primero un hecho aún más fuerte.

Lema D.0.18. *Para toda* $\varphi \in FORM_\in$[3] *se tiene que: para toda* $t \in {}^\omega B$, $\mathfrak{A} \vDash \varphi^{M,E}[t] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi[t]$.

Demostración. Esta prueba la haremos por inducción sobre la formación de fórmulas. Sean $x, y \in VAR$ y $b_0, b_1 \in B$. De modo que:

a) De acuerdo con la definición de relativización, $\mathfrak{A} \vDash (x \in y)^{M,E}[b_0, b_1]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash (xEy)[b_0, b_1]$, lo cual a su vez ocurre si y sólo si $b_0 s b_1$ [D.2]; y, con base en la noción de verdad de Tarski[4], tenemos que esto último sucede si y sólo si $\mathfrak{B} \vDash (x \in y)[b_0, b_1]$.

b) Anólogamente, de acuerdo con la definición de relativización $\mathfrak{A} \vDash (x = y)^{M,E}[b_0, b_1]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash (x = y)[b_0, b_1]$, lo cual ocurre si y sólo si $b_0 = b_1$ [Tarski] y una vez más, con base en la noción de verdad de Tarski, esto último sucede si y sólo si $\mathfrak{B} \vDash (x = y)[b_1, b_2]$.

Con esto hemos probado que todas las fórmulas atómicas satisfacen que para toda $t \in {}^\omega B$

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi^{M,E}[t] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi[t]. \tag{D.3}$$

[3] Donde $FORM_\in$ es el conjunto de fórmulas de $\mathfrak{L}_\in$.

[4] Véase [6].

Ahora, sean ψ,$\chi \in FOR_\in$ que satisfacen D.3 queremos probar que también lo hacen $\neg\psi$,$\psi \wedge \chi$ y $\exists x\psi$, de modo tal que inductivamente podamos concluir lo deseado. Para esto, sean $v_i \in VAR$ y $t \in {}^\omega B$, así:

a) De acuerdo con la definición de relativización, $\mathfrak{A} \vDash (\neg\psi)^{M,E}[t]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \neg(\psi^{M,E})[t]$, lo cual ocurre si y sólo si $\mathfrak{A} \nvDash \psi^{M,E}[t]$ [Tarski], y de acuerdo con la hipótesis de inducción (D.3), esto sucede si y sólo si $\mathfrak{B} \nvDash \psi[t]$, lo cual a su vez ocurre, con base en la noción de verdad de Tarski, si y sólo si $\mathfrak{B} \vDash \neg\psi[t]$.

b) De acuerdo con la definición de relativización $\mathfrak{A} \vDash (\psi \wedge \chi)^{M,E}[t]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash (\psi^{M,E} \wedge \chi^{M,E})[t]$, lo cual ocurre si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \psi^{M,E}[t]$ y $\mathfrak{A} \vDash \chi^{M,E}[t]$ [Tarski], esto sucede si y sólo si $\mathfrak{B} \vDash \psi[t]$ y $\mathfrak{B} \vDash \chi[t]$ [D.3], lo cual a su vez ocurre si y sólo si $\mathfrak{B} \vDash (\psi \wedge \chi)[t]$ [Tarski].

Y por último,

c) De acuerdo con la definición, $\mathfrak{A} \vDash (\exists v_i\psi)^{M,E}[t]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \vDash \exists v_i\big[v_i \in M \wedge \psi^{M,E})\big][t]$, lo cual ocurre si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \big[v_i \in M \wedge \psi^{M,E}\big][t(i/a)]$ [Tarski], esto sucede si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash v_i \in M[t(i/a)]$ y $\mathfrak{A} \vDash \psi^{M,E}[t(i/a)]$ [Tarski], lo cual a su vez ocurre si y sólo si existe $b \in B$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \psi[t(i/a)]$ [D.1 y D.3], y esto sucede si y sólo si $\mathfrak{B} \vDash \exists v_i\psi[t]$ [Tarski].

$\square$

Como consecuencia tenemos que, en particular para enunciados, se cumple la afirmación anterior.

Corolario D.0.19. *Para todo $\sigma \in \mathfrak{L}^0_\in$ se tiene que:*

$$\mathfrak{A} \vDash \sigma^{M,E} \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \vDash \sigma.$$

$\square$

Regresemos a la demostración de la proposición D.0.17. Como$\Sigma\ \vdash \Gamma^{M,E}$ y $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$, entonces, para todo enunciado $\sigma \in \Gamma$, $\mathfrak{A} \vDash \sigma^{M,E}$. Luego, de acuerdo con el corolario anterior, para todo enunciado $\sigma \in \Gamma$, $\mathfrak{B} \vDash \sigma$; es decir $\mathfrak{B}$ es modelo deΓ . Lo cual garantiza la consistencia deΓ. $\square$

Apéndice E

Algunas variantes de AFA

El objetivo principal de este apartado es mostrar, de manera un poco intuitiva y sin ahondar en la teoría, tres variantes de AFA. La razón de la existencia de más de un axioma de antifundación es el hecho de que hay más de un criterio de igualdad entre conjuntos no bien fundados. La primera variante mencionada, atribuida a Maurice Boffa, quien la desarrolló por primera vez entre los 1960's y principios de los 1970's, consiste en mantener como único criterio de igualdad entre conjuntos, aun tratándose de conjuntos no bien fundados, el criterio de extensionalidad de ZFC. El axioma de antifundación que resulta de esto es lo que Aczel llama $BAFA$. Las otras dos variantes usan un criterio más fuerte que el de extensionalidad, como criterio de igualdad entre conjuntos. La primera de éstas, en orden de mención, inspirada en Finsler (1926), utiliza como criterio que dos conjuntos son iguales si son isomorfos en un sentido adecuado. Al axioma de antifundación desarrollado a partir de dicho criterio se le conoce como $FAFA$. El segundo, es el axioma de antifundación $SAFA$, desarrollado a partir del criterio de Dana Scott, quien da una noción alternativa de isomorfismo entre conjuntos. Las versiones que veremos a grosso modo de los axiomas antes mencionados, es la versión en gráficas, adaptación hecha por Aczel.

Un concepto muy importante para el desarrollo de este capítulo es el siguiente.

Definición E.0.20. *Una gráfica g_p es llamada pintura exacta del conjunto a si y sólo si hay una decoración inyectiva d de g_p tal que $d(p) = a$.*

Por ejemplo, en la figura 2.1 la pintura del número 3 no es exacta, mientras que en la figura 2.2, la pintura del 3 sí lo es. Como es fácil ver, todo conjunto tiene, salvo isomorfismo, exactamente una pintura exacta. Esto motiva a pensar únicamente en este tipo de gráficas, aquellas que son pinturas exactas de algún conjunto. Busquemos entonces cómo caracterizar las gráficas que son pinturas exactas.

Si consideramos la gráfica de la figuara E.1, vemos que ésta es una gpa extensional y es pintura de un conjunto $a = \{b, c\}$, donde $b = \{b\}$ y $c = \{c\}$. Con lo que hemos visto en este trabajo, no dudaríamos en declarar que $b = c = \Omega$. Sin embargo, en $ZFC^{-}+BAFA$, cualquier gpa extensional puede ser una pintura exacta; así que en particular la gráfica antes mencionada, es una pintura exacta de un conjunto $a = \{b, c\}$, donde $b \neq c$.

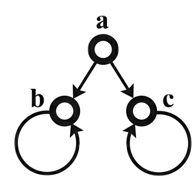

Figura E.1:

Antes de enunciar $BAFA$, veamos lo siguiente, lo cual nos ayudará a entender dicho axioma. Denotaremos con V_{za} a la subgráfica del sistema $V, \in$ cuyos vértices son todos los elementos de a y todas las aristas de V que haya entre dichos vértices, es decir, $V_{za} = (a, \in_a)$. Nótese que V_{za} es extensional siempre y cuando a sea un conjunto transitivo. Recordemos que la motivación principal fue la de encontrar una caracterización sobre las pinturas exactas. Así, sea BA_1 el siguiente axioma:

"Toda gráfica extensional es isomorfa a V_{za} para algún conjunto transitivo a."

Éste nos garantiza la existencia de un conjunto a, como el que le asociamos a la gráfica representada en E.1. Respecto a la caracterización de las pinturas exactas tenemos el siguiente resultado.

Proposición E.0.21. BA_1 *es equivalente a: "Una gpa es pintura exacta si y sólo si es extensional".*

Ponemos la prueba con el objetivo de que sea más claro el axioma.

Demostración. Supongamos cierto BA_1. Nótese que toda gpa pintura exacta, de acuerdo con el axioma de extensionalidad, es extensional. Sea entonces g_a una gpa extensional; BA_1 asegura la existencia de un conjunto transitivo

c y $b \in c$ tales que $g_a \cong (V_{zc})_b \cong V_b$. De manera que g_a es una pintura exacta, con f, el isomorfismo entre g_a y V_B, como testigo de ello.

Veamos ahora la conversa. Sea g una gráfica extensional. Hay dos casos. Primero supongamos que para algún vértice a de g, $a_g = g$. Entonces g_a es una gpa extensional que contiene a todos los vértices de g. Luego, de acuerdo con la hipótesis, g_a es pintura exacta, de manera que $g_a \cong V_c$, para algún conjunto c. Y como $a_g = g$, c debe ser transitivo y además $c \in c$, por lo que $g \cong V_{zc}$. Ahora supongamos que para cualquier vértice a de g, $a_g \neq g$. De manera que podemos considerar una gpa g'_ν, que consiste en añadir un nuevo vértice ν a g y el conjunto $\leftarrow' = \{(a,\nu) \mid a \in g\}$ de nuevas aristas. Como g'_ν es extensional, es pintura exacta; de manera que $g'_\nu \cong V_c$ para algún conjunto c. Además, si a es un hijo de ν en g', entonces $a_g \subseteq \nu_g$, de manera que c debe ser un conjunto transitivo y $g \cong V_{za}$. □

Sólo nos falta dar una definición antes de poder enunciar $BAFA$.

Definición E.0.22. *Un sistema M es un subsistema transitivo de M' si y sólo si $M \subseteq M'$ y $x_{M'} = x_M$ para cualquier $x \in M$.*

Formulemos entonces lo que Aczel llama el axioma de antifundación de Boffa, $BAFA$, el cual es una versión más fuerte de BA_1.

BAFA *Toda decoración inyectiva de una subgráfica transitiva de una gráfica extensional puede ser extendida a una decoración inyectiva de la gráfica original.*

Regresando a la primera gráfica mencionada en este apéndice, es fácil ver que en $ZFC^- + BAFA$ la colección $\{a \mid a = \{a\}\}$ es una clase propia. De hecho, para cualquier gráfica extensional g, hay una clase propia de conjuntos que son pinturas de g.

Por otro lado, en 1926 Finsler presentó tres axiomas sobre un universo que consistía de una colección de objetos llamados conjuntos y una relación binaria $\in$ entre ellos. sus axiomas fueron los siguientes:

I. $\in$ es decidible.

II. Conjuntos isomorfos son iguales.

III. El universo forma un sistema, el cual no puede ser extendido sin violar los primeros dos axiomas.

A pesar de que esto no puede ser visto como axiomatización de la teoría de los conjuntos, la idea de aderir a ZFC^- una versión formalizada del axioma II. fue de Aczel. La cual presentaremos a continuación.

Pareciera que la forma correcta de expresar la noción de isomorfismo de Finsler en un sistema M, es la de tomar $a, b \in M$ isomorfos si las gpas M_a y M_b son gráficas isomorfas. De tal modo que M es un modelo de II. si y sólo si M es $\cong$-extensional; es decir, $M_a \cong M_b \Rightarrow a = b$.

Sin embargo, si consideramos la gráfica g como en la figura E.2, clara-

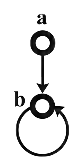

Figura E.2:

mente $g_a \ncong g_b$, pero $a_g = \{b\} = b_g$. De manera que g es $\cong$-extensional, pero no es extensional. Es por esto que Aczel hace una construcción alterna para seguir con la idea de Finsler. Ésta consiste en lo siguiente. Sea M un sistema. Si $a \in M$, considérese la gpa $(M_a)^*$ que consiste en los vértices y aristas de M_a que están en trayectorias que empiezan desde algún hijo de a, junto con un nuevo vértice $*$ y el conjunto de nuevas aristas $A^* = \{(x, *) \mid x \in a_M\}$. Y donde $*$ es la cabeza de $(M_a)^*$. Se dice que $a, b \in M$ son Finsler isomorfas si $(M_a)^* \cong (M_b)^*$. Volviendo al ejemplo, vemos que la figuara E.3 representa

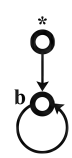

Figura E.3:

tanto a $(M_a)^*$ como a $(M_b)^*$; con lo cual concluimos que $a = b$.

De manera general, si $a_M = b_M$, entonces $(M_a)^* = (M_b)^*$, por lo tanto $(M_a)^* \cong (M_b)^*$. Sea entonces $\cong^*$ la relación en GPA[1] definida como:

$$g_a \cong^* g'_{a'} \Leftrightarrow (g_a)^* \cong (g'_{a'})^*.$$

Un sistema M es Finsler extensional si es $\cong^*$-extensional; es decir, $M_a \cong^* M_b \Rightarrow a = b$.

Estos sistemas, los Finsler extensionales, funcionan como modelos del axioma II. Enunciaremos $FAFA$ como lo que en realidad es una equivalencia

[1] Véase la página 44

del mismo, sin embargo parece más accesible e intuitivo, sobre todo, ya que no hemos ahondado demasiado en el tema.

FAFA *Una gpa es una pintura exacta si y sólo si es Finsler extensional.* De manera que, regresando a la gráfica representada en la figura E.1, en $ZFC^- + FAFA$, $B = C$.

Por último presentamos $SAFA$. En 1960 Scott dio un modelo de ZFC^- con conjuntos no bien fundados construido a partir de árboles irredundantes. Scott define un árbol redundante si tiene un automorfismo que permite intercambiar dos vértices (automorfismo propio). De este modo, un árbol es irredundante si no es redundante; en tal caso diremos que el árbol es rígido. Cabe mencionar que Scott no formuló dicha noción de árbol en términos de gráficas sino en términos de conjuntos parcialmente ordenados con un mayor elemento tal que el conjunto de elementos mayor que cualquier elemento dado de forma una cadena finita en virtud del orden. De manera que cualquier árbol, T, en el sentido visto en este trabajo, determina un conjunto con dichas características, si definimos el orden $\leq$, de manera que $\forall a, b \in T$, $b \leq a$ si y sólo si hay un camino finito de a a b en T. Asimismo, todo árbol, en el sentido de Scott, induce un árbol en el sentido de este trabajo.

Regresemos entonces a la noción de Scott en gráficas, y veamos la siguiente caracterización sobre árboles redundantes que dio Scott: "Un árbol T es redundante si y sólo si hay un vértice c de T y diferentes vértices $a, b \in c_T$ tales que $T_a \cong T_b$."La idea de Scott es utilizar árboles rígidos para representar la estructura de conjuntos. Así, una gpa es Scott extensional si y sólo si es un árbol rígido. Estamos ahora en posición de enunciar el axioma de antifundación de Scott, aunque nuevamente utilizaremos una equivalencia.

SAFA *Una gpa es una pintura exacta si y sólo si es Scott extensional.*

Vemos entonces que $SAFA$ también implica que $B = C$ en nuestro ejemplo inicial. Sin embargo, hay diferencias entre $SAFA$ y $FAFA$. Por ejemplo, considérese la gráfica g representada en la figura E.4. Como es

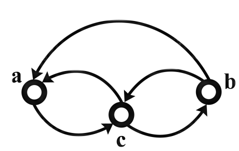

Figura E.4:

posible observar, g puede ser vista como una gpa con cabeza a, b o c.

Además, g es extensional y rígida. Si pensamos en $(g_a)^T$, el árbol que consiste en "desenvolver"g_a [véase 2.1.6], obtenemos una gráfica como la que se muestra en la figura E.5. Donde los vértices del árbol están etiquetados

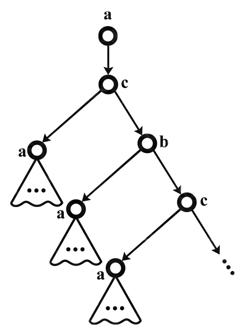

Figura E.5:

con los nombres de los vértices correspondientes en g. Es claro entonces que $(g_b)^T \cong (g_c)^T$, de manera que g no es Scott extensional. Entonces, en $ZFC^- + SAFA$ b y c tienen que ser decorados con el mismo conjunto, de manera que g debe ser o una pintura no exacta de dos conjuntos distintos A y B tales que $A = \{B\}$ y $B = \{A, B\}$, o una pintura no exacta de Ω. Por otro lado, g es $\cong^*$-extensional, de manera que en $ZFC^- + FAFA$, hay una única decoración inyectiva que asigna cada uno de los conjuntos distintos A, B y C a los vértices a, b y c, de manera que $A = \{C\}$, $C = \{A, B\}$ y $B = \{A, C\}$. Por último, en $ZFC^- + AFA$, g tiene una única decoración, la cual asigna el conjunto Ω a cada vértice de g.

Cada uno de los axiomas de antifundación planteados en este trabajo, AFA, $BAFA$, $FAFA$ y $SAFA$, pueden agregarse a la teoría ZFC^-, de manera consistente (bajo la suposición de la consistencia de ZFC^-), consiguiendo universos de la teoría de los conjuntos donde haya conjuntos no bien fundados. Sin embargo, los cuatro axiomas son independientes, es decir, ninguno de ellos puede ser probado en ZFC^- a partir de algún otro.

Bibliografía

[1] Aczel Peter, *Non-Well-Founded Sets*, CSLI Lecture Notes, Vol.14, CSLI Publications, Standford, California, 1988.

[2] Barwise J. and J. Etchemendy, *The Liar*, Oxford University Press, London, 1987.

[3] Barwise Jon and Lawrence Moss, *Vicious Circles: On the Mathematics os Non-Wellfounded Phenomena* CSLI Lecture Notes, No. 60, Stanford, California 1996.

[4] Devlin Keith, *The Joy of Sets*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[5] Enderton Herbert B., *Una introducción matemática a la lógica*, México: UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas, 2004.

[6] Hodges Wilfrid, *Model Theory*, Cambridge University Press, 1993.

[7] Jech Thomas, *Set Theory*, Springer, Germany, 2003.

[8] Kunen Kenneth, *Set theory. An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, 1995.

[9] Rieger Adam, *An Argument for Finsler-Aczel Set Theory*, Mind, vol. 109, Oxford Journals, pp. 241-253, 2000.