



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**

---

---

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA  
CENTRO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**MODOS DE OSCILACIÓN DE TOROS DE  
ACRECIÓN EN TORNO A AGUJEROS NEGROS**

**T E S I S**

PRESENTADA POR:

**JOSÉ LUIS AVENDAÑO NANDEZ**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**MAESTRO EN CIENCIAS**  
**(ASTRONOMÍA)**

TUTOR:

**DR. WILLIAM HENRY LEE ALARDIN**



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F.  
NOVIEMBRE DEL 2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Jurado asignado:*

Presidente: Dr. Edmundo Moreno Díaz  
Primer vocal: Dr. Dany Pierre Page Rollinet  
Secretario: Dr. Yair Emmanuel Krongold Herrera  
Segundo vocal: Dr. William Henry Lee Alardin  
Tercer vocal: Dra. Adriana Gazol Patiño

# Agradecimientos

Primero que nada, quiero expresar una gran admiración y agradecimiento al Dr. William Lee, por su paciencia, sus consejos, sus explicaciones y esas grandes charlas que tuvimos acerca de este proyecto. Le agradezco que me haya dado la oportunidad de trabajar con él por cuatro semestres y medio. Muchas Gracias, William.

Le agradezco a los miembros de mi comité tutor, Alan Watson, Yair Krongold y William Lee, por todos sus consejos en las reuniones de comité, además de estar presentes cuando yo necesité de ellos.

Quiero agradecerle a Juan Carlos Degollado por aceptar trabajar conmigo durante este proyecto. También quiero agradecerle a mis compañeros de la maestría, Roberto Figuera, Alejandra Jiménez, Aurora Hernández, Carlos Guerrero, Federico Ortíz, Omar Díaz y Leticia Rivera, por su paciencia y sus enseñanzas durante nuestra estancia en esta institución.

Quiero agradecerle a Erika Muñoz y a Roberto Figuera por haber debatido conmigo en varios aspectos de la física y por sus consejos a lo largo del desarrollo de este proyecto.

Le quiero agradecer al Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme dado la oportunidad de estudiar en esta institución. También quiero agradecerle a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA-UNAM) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haberme apoyado económicamente a lo largo de este proyecto de investigación.

Quiero agradecerle a Eva Nandez Antonio, mi madre, por haberme apoyado tanto económicamente como psicológicamente a lo largo de este proyecto de investigación. Le quiero dar las gracias a Citlalli Avendaño Nandez, mi hermana, por sus consejos y sus enseñanzas.

Por último quiero agradecerle a Alberto Avendaño Nandez, mi hermano, por haberme enseñado lo importante que es luchar en la vida para poder realizar nuestros deseos.

*A mi madre Eva Nandez,  
a Citlalli Avendaño mi hermana,  
a Alberto Avendaño mi hermano,  
y a la memoria de mi abuelita, Amelia Antonio†.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>14</b>
1.1. Objetivos	26
1.1.1. General	26
1.1.2. Específicos	26
1.2. Hipótesis	27
<b>2. Hidrodinámica</b>	<b>28</b>
2.1. Física	28
2.1.1. Ecuación de continuidad	29
2.1.2. Ecuación de Euler	30
2.1.3. Ecuación de la conservación de energía	34
2.1.4. Ecuación de estado	38
2.2. Numérica	40
2.2.1. Hidrodinámica lagrangiana	40
2.2.2. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)	41
2.2.3. Discretización	43
<b>3. Discos de acreción</b>	<b>47</b>
3.1. Importancia de la rotación	47
3.1.1. Acreción de Bondi	47
3.2. Discos delgados	53
3.2.1. Estructura radial del disco en estado estacionario	54
3.3. Discos gruesos	60
3.3.1. Toro estático rotando	62
<b>4. Potenciales gravitacionales</b>	<b>65</b>
4.1. Potencial de Newton	65
4.1.1. Momento angular kepleriano	69

4.2. Métrica de Schwarzschild . . . . .	69
4.2.1. Movimiento de una partícula de prueba . . . . .	71
4.3. Métrica de Kerr . . . . .	77
4.4. Modificación al potencial de Newton . . . . .	83
4.4.1. Momento angular kepleriano . . . . .	85
4.4.2. Paczyński-Wiita contra Schwarzschild . . . . .	85
4.5. Frecuencia epicíclica . . . . .	90
4.5.1. Teoría newtoniana y pseudo newtoniana . . . . .	90
4.5.2. Relatividad general . . . . .	92
<b>5. Resultados</b>	<b>96</b>
5.1. Condiciones iniciales . . . . .	97
5.2. Oscilaciones y su análisis . . . . .	98
5.2.1. Resultados para el potencial de Newton . . . . .	105
5.2.2. Resultados para el potencial de Artemova . . . . .	107
5.2.3. Resultados para la distribución de momento angular como ley de potencia en el radio . . . . .	109
5.2.4. Resultados para la distribución de momento angular propuesta por Qian <i>et al.</i> (2009) . . . . .	119
5.2.5. Interpretación . . . . .	138
<b>6. Discusión y conclusiones</b>	<b>145</b>
<b>A. Tensores</b>	<b>150</b>
A.0.6. Adición y sustracción de tensores . . . . .	152
A.0.7. Convención para la suma . . . . .	152
A.0.8. Simetría y antisimetría . . . . .	153
<b>B. Conceptos de relatividad general</b>	<b>154</b>
<b>C. Partícula libre en un campo gravitacional</b>	<b>159</b>
<b>D. Conceptos de termodinámica</b>	<b>163</b>

# Índice de figuras

1.1. Dos posibles modos de transferencia de masa en binarias de rayos X. En la figura de arriba se observa que la primaria se encuentra dentro del lóbulo de Roche pero pierde masa por medio de vientos estelares. En la figura de abajo la primaria se ha expandido, y comienza a llenar su lóbulo de Roche. Figura tomada de [70]. . . . .	18
1.2. Equipotenciales de $\phi_{gc} = cte$ utilizando la gravitación Newtoniana + el potencial centrífugo en el plano orbital de la estrella binaria para órbita circular. La equipotencial más interna en la figura es el lóbulo de Roche para cada estrella. El potencial $\phi_{gc}$ tiene puntos localmente estacionarios ( $\nabla\phi_{gc} = 0$ ), llamados <i>puntos de Lagrange</i> , ubicados en $L_j$ . Para el caso mostrado aquí, la proporción de masa es $q = M/m = 10$ , donde $M$ es la masa del estrella primaria y $m$ la masa de la estrella compacta. . . . .	20
1.3. Figura que esquematiza diferentes agujeros negros con sus discos de acreción y sus compañeras en la Galaxia. La distancia entre el Sol y Mercurio (0.4 AU) es mostrada en la parte superior de la figura. Figura proporcionada por J. Orosz.	21
1.4. Espectro de frecuencias calculado de dos observaciones con las que fueron detectadas la QPO 450 Hz reportada por Strohmayer <i>et al.</i> 2001 y la QPO 300 Hz reportada por Remillard <i>et al.</i> 1999. . . . .	24



- 3.1. Gráfica para un gas adiabático esféricamente simétrico en un campo gravitacional de una estrella. Para  $v < 0$ , las soluciones son flujos de acreción, mientras que para  $v > 0$  éstas son vientos o “brisas”. En este caso  $\gamma = 4/3$ . Las líneas gruesas son las llamadas soluciones *transónicas*, ya que son una transición entre el flujo sub- y supersónico en  $r_s$ ;  $r_s$  es conocido como el punto sónico para estas soluciones. Las líneas punteadas representan el flujo sub- y supersónico en cualquier punto. Las líneas discontinuas no cubren todo el rango en  $r$  y son bi-valuadas en el sentido en que hay dos soluciones posibles para  $v^2$  en  $r$ . Se excluyen estas por lo antes mencionado, sin embargo podrían representar partes de una solución si existen choques en el gas. . . . . 50
- 4.1. La curva punteada superior corresponde al potencial repulsivo centrífugo, mientras que la inferior corresponde al potencial gravitacional. La curva sólida es la suma de éstas. . . . . 66
- 4.2. Equipotenciales para un momento angular constante usando el potencial de Newton. . . . . 68
- 4.3. Gráfica del perfil del potencial efectivo para una partícula con masa en reposo orbitando un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M$ . Las tres líneas horizontales son marcadas por diferentes valores de  $\hat{E}^2$  correspondientes a órbitas (1) de captura, (2) no ligadas y (3) ligadas. Véase el texto para mayor información. . . . . 75
- 4.4. Gráfica del potencial efectivo para partículas con masa con diferentes valores para el momento angular específico  $\hat{l}$  orbitando a un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M$ . Los puntos en la gráfica están ubicados en el fondo del potencial, es decir, son los radios de las órbitas circulares estables. Vemos de la gráfica que sólo existen órbitas para  $\hat{l}/(r_g c) > 1.732 = \sqrt{3}$ . . . . . 78
- 4.5. Gráfica comparativa entre el potencial de Schwarzschild y el propuesto por Paczyński-Wiita. Las líneas marcadas con  $S$  corresponden al potencial de Schwarzschild mientras que las marcadas con  $PW$  corresponden al de Paczyński-Wiita. Las líneas sólidas corresponden a la órbita marginalmente ligada,  $r_{mb}$  y las líneas punteadas corresponden a la órbita marginalmente estable,  $r_{ms}$ . El valor del momento angular para la órbita marginalmente ligada para la métrica de Schwarzschild y para el potencial de Paczyński-Wiita es  $l_{mb} = 2r_g c$ . El valor del momento angular para la órbita marginalmente estable para la métrica de Schwarzschild es  $l_{ms} = 0.866025l_{mb}$  mientras que para el potencial de Paczyński-Wiita es  $l_{ms} = 0.918558l_{mb}$ . . . . . 87

- 4.6. Gráfica comparativa entre los momentos angulares keplerianos obtenidos con métrica de Schwarzschild, potencial de Paczyński-Wiita y potencial de Newton. La línea sólida corresponde al momento angular kepleriano obtenido con Schwarzschild. La línea punteada corresponde al momento angular kepleriano obtenido con el potencial de Paczyński-Wiita. La línea discontinua corresponde al momento angular kepleriano obtenido con el potencial de Newton. Vemos que tanto la línea punteada como la sólida tienen una forma muy similar, que difiere cuantitativamente del caso newtoniano. . . . . 88
- 4.7. Gráfica de la sección meridional de las superficies equipotenciales  $W(r, z) = cte$  para el potencial de Paczyński-Wiita, para el caso en que  $l = l_{ms} = 2r_g c$ . La línea gruesa corresponde al valor inicial  $W_0 = 0.0$  que sería el límite en que una partícula permanece ligada. La línea discontinua y la línea punteada corresponden a  $W = 0.025$  y  $W = -0.025$ , respectivamente. Los otros dos valores mostrados en la gráfica corresponden a un toro grande ( $W_0 = -0.05$ ) y a un toro mediano ( $W_0 = -0.075$ ) en extensión. . . . . 89
- 4.8. Gráfica comparativa entre las frecuencias epicíclicas de Schwarzschild, Paczyński-Wiita y Newton. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica obtenida mediante la métrica de Schwarzschild. La línea punteada representa la frecuencia epicíclica del potencial de Paczyński-Wiita. La línea discontinua representa la frecuencia epicíclica obtenida mediante el potencial de Newton. . . . . 94
- 5.1. Transformada rápida de Fourier para la energía total del disco con una distribución de momento angular constante. El pico más grande corresponde a la frecuencia de perturbación,  $\kappa_{pert} = 200$  Hz. El otro pico prominente en cada serie de tiempo corresponde a la frecuencia fundamental del toro. La línea sólida corresponde al toro grande con  $f = 0.85$ . La línea punteada corresponde al toro intermedio con  $f = 0.9$  y la línea discontinua corresponde al toro pequeño con  $f = 0.99$ . . . . . 100
- 5.2. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular constante con el potencial de Paczyński-Wiita. . . . . 101

- 5.3. Distribución de momento angular constante y ley de potencia en el radio con el potencial de Paczyński-Wiita. La línea sólida es la curva descrita por la ecuación (4.96) para  $M_{an} = 2.5M_{\odot}$ . La línea punteada representa a la distribución de momento angular constante, que es  $l_k(r_0 = 4.25r_g)$ . La línea discontinua representa la distribución de momento angular en ley de potencia en el radio con  $\alpha = 0.1$ . . . . . 103
- 5.4. Frecuencia epicíclica con el potencial de Paczyński-Wiita. La línea sólida es la curva que describe la ecuación (4.108) para  $M_{an} = 2.5M_{\odot}$ . El punto mostrado corresponde a la evaluación de la ecuación (4.108) en  $r = r_0$ , es decir,  $\kappa_*(r = r_0 = 4.25r_g) = 425.94$  Hz. . . . . 104
- 5.5. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular constante con el potencial de Newton. . . . . 106
- 5.6. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular constante con el potencial de Artemova *et al.* para  $a = 0.5(r_g c/2)$ . . . . . 108
- 5.7. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular constante con el potencial de Artemova *et al.* para  $a = 0.9(r_g c/2)$ . . . . . 110
- 5.8. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular en ley de potencias en el radio con el potencial de Newton. . . . . 112
- 5.9. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular en ley de potencias en el radio con el potencial de Paczyński-Wiita. . . . . 114
- 5.10. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular en ley de potencias en el radio con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . . . . . 115

5.11. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular en ley de potencias en el radio con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . . . . . 117

5.12. Gráfica que esquematiza cómo decrece monotónicamente la frecuencia del modo fundamental,  $\kappa_r$ , conforme  $f$  decrece también (es decir se aumenta el tamaño del toro). La frecuencia fundamental parte de la frecuencia epicíclica,  $\kappa_*$ , encontrada analíticamente. Para este caso la frecuencia epicíclica es 425.94 Hz para  $r = r_0 = 4.25r_g$ . El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica analítica mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ . La línea sólida representa a las frecuencias del modo fundamental con un momento angular como ley de potencia en el radio [ $l(r) \propto r^{0.1}$ ] mientras que la línea punteada representa a las frecuencias del modo fundamental con un momento angular constante (véase la figura 5.4). Se puede apreciar que la línea sólida decae más rápidamente que la línea punteada. . . . . 118

5.13. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.0$  con el potencial de Newton. . . . . 120

5.14. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.0$  con el potencial de Paczyński-Wiita. . . . 122

5.15. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.0$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . . . . . 124

5.16. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.0$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . . . . . 125

- 5.17. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Newton. . . . . 127
- 5.18. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Paczyński-Wiita. . . . 129
- 5.19. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . . . . . 130
- 5.20. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . . . . . 132
- 5.21. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.0$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Newton. . . . . 134
- 5.22. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.0$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Paczyński-Wiita. . . . 135
- 5.23. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.0$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . . . . . 137
- 5.24. Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.0$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . . . . . 139

5.25. Gráfica que esquematiza la variación de las frecuencias del modo fundamental con respecto al factor de llenado  $f$  usando el potencial de Newton con todas las distribuciones de momento angular usadas en este proyecto. El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica analítica (525 Hz) mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ . . . . . 141

5.26. Gráfica que esquematiza la variación de las frecuencias del modo fundamental con respecto al factor de llenado  $f$  usando el potencial de Paczyński-Wiita con todas las distribuciones de momento angular usadas en este proyecto. El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica analítica (425.94 Hz) mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ . . . . . 142

5.27. Gráfica que esquematiza la variación de las frecuencias del modo fundamental con respecto al factor de llenado  $f$  usando el potencial de Artemova *et al.* con parámetro de Kerr,  $a = 0.5(cr_g/2)$ , con todas las distribuciones de momento angular usadas en este proyecto. El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica analítica (493 Hz) mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ . . . . . 143

5.28. Gráfica que esquematiza la variación de las frecuencias del modo fundamental con respecto al factor de llenado  $f$  usando el potencial de Artemova *et al.* con parámetro de Kerr,  $a = 0.9(cr_g/2)$ , con todas las distribuciones de momento angular usadas en este proyecto. El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica analítica (520 Hz) mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ . . . . . 144

6.1. Gráficas que esquematizan la dependencia de la frecuencia del modo fundamental con respecto al parámetro de Kerr,  $a$ , en unidades de  $r_gc/2$ . Los puntos circulares son las frecuencias del modo fundamental encontradas con las simulaciones hechas en el presente trabajo para toros intermedios y pequeños, es decir,  $f = 0.9$  y  $f = 0.99$ , respectivamente. Los puntos marcados con un asterisco en las curvas corresponden al modo fundamental observado en 425 Hz, suponiendo que la masa del agujero fuera  $M = 2.5M_\odot$ . La figura en la parte *superior* corresponde a un disco intermedio mientras que la *inferior* a un disco pequeño. . . . . 148

# Índice de tablas

5.1. Modelos para disco de diferentes tamaños en un potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco $r_{in}$ , el radio externo $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco, $r_0$ o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia $\kappa_r$ de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . .	104
5.2. Modelos para disco de diferentes tamaños en un potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco $r_{in}$ , el radio externo $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco, $r_0$ o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia $\kappa_r$ de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . .	105
5.3. Modelos para disco de diferentes tamaños en el potencial de Artemova <i>et al.</i> (1996) para un parámetro de Kerr, $a = 0.5(cr_g/2)$ . Se muestra el radio interno del disco $r_{in}$ , el radio externo $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco, $r_0$ o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia $\kappa_r$ de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . .	107
5.4. Modelos para disco de diferentes tamaños en el potencial de Artemova <i>et al.</i> (1996) para un parámetro de Kerr, $a = 0.9(cr_g/2)$ . Se muestra el radio interno del disco $r_{in}$ , el radio externo $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco, $r_0$ o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia $\kappa_r$ de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . .	109
5.5. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco $r_{in}$ , el radio externo $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco, $r_0$ o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia $\kappa_r$ de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . .	111

5.6. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . 113

5.7. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 116

5.8. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 116

5.9. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 119

5.10. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . 121

5.11. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 123



- 5.12. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 126
- 5.13. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 126
- 5.14. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . 128
- 5.15. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 131
- 5.16. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 131
- 5.17. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 133

5.18. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 136

5.19. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 136

5.20. Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima. . . . . 138

# Abstract

It presents simulations of toroidal structures rotating around a black hole from a pseudo-Newtonian frame, we neglected self-gravity of tori, and those with axisymmetric symmetry. Thick discs ( $r \sim h$ ) and thin discs ( $r \ll h$ ) have been considered, they are constructed with different rotation laws as well as with different gravitational potentials that will simulate the effects of strong gravity produced by the central mass. The gravitational potentials used are: Artemova *et al.*, Paczyński-Wiita, and Newton. Angular momentum distributions used in this project are: (i) constant angular momentum, (ii) power law in radius, (iii) and those distributions given by Qian *et al.* (2009), which provide more general distributions on radio and polar angle.

After setting the initial conditions, we generate the fluid elements which will simulate the torus with the Monte Carlo method for generating the random numbers, this method allows us to create a distribution of  $N$  particles with a toroidal profile in the plane  $r, z$ . The particles that fall into this profile correspond to the elements of the fluid of the simulation. These elements are dynamically relaxed with a damping term introduced in the equations of motion in order to get the equilibrium of the distribution (as close as possible).

To obtain the strongest response in the radial oscillations, it applied a periodic perturbation in the radial direction. This perturbative force generates radial oscillations, which can be analyzed by Fourier analysis by extracting the main frequencies in the accretion disc.

In these simulations, it focused on purely dynamic oscillations in the disc. It kept the entropy and the internal energy of gas constants, hence the polytropic equation of the gas is not altered. The codes used calculate different hydrodynamic variables of the system, such as the maximum density (the density of the system at  $r = r_0$ ) and the total energy as functions of time. These data are analyzed by applying the Fourier transform in order to observe the behavior of the spectrum, and to measure the frequency of the accretion disc.

# Resumen

Se presentan simulaciones de estructuras toroidales rotando alrededor de un agujero negro desde un enfoque pseudo-newtoniano, despreciando la auto gravedad de los discos de acreción, y estos con simetría rotacional. Se han considerado discos gruesos ( $r \sim h$ ) y delgados ( $r \ll h$ ) construidos con distintas leyes de rotación, así como con distintos potenciales gravitacionales que simularan los efectos de la fuerte gravedad producidos por la masa central. Los potenciales gravitacionales usados son los de Artemova *et al.*, Paczyński-Wiita, y Newton. Las distribuciones de momento angular usadas en este proyecto son: (i) momento angular constante, (ii) ley de potencias en el radio, y (iii) aquellas dadas por Qian *et al.* (2009), que contemplan distribuciones más generales en radio y ángulo polar.

Una vez fijadas las condiciones iniciales, generamos los elementos del fluido que simularán al toro con el método de Monte Carlo para generar los numeros aleatorios, esto nos permite crear una distribución de  $N$  partículas con un perfil toroidal en el plano  $r, z$ . Las partículas que caen dentro de este perfil toroidal corresponden a los elementos del fluido de la simulación. Estos elementos son relajados dinámicamente con un término de amortiguamiento introducido en las ecuaciones de movimiento con el objeto de obtener el equilibrio (lo más cercano posible) de la distribución.

Para poder obtener la respuesta más fuerte en las oscilaciones radiales, se procedió a aplicar una perturbación periódica en la dirección radial. Esta fuerza perturbativa induce oscilaciones radiales, las cuales pueden ser analizadas mediante el análisis de Fourier extrayendo las frecuencias principales de cada disco de acreción.

En estas simulaciones nos enfocamos en las oscilaciones puramente dinámicas del disco, manteniendo a la entropía y a la energía interna del gas constantes, por lo que no se altera la ecuación politrópica del gas. El código utilizado calcula distintas variable hidrodinámicas del sistema, como son la densidad máxima y la energía total como funciones del tiempo. Estos datos son analizados aplicandoles la transformada de Fourier para observar el comportamiento del espectro de frecuencias y saber a qué frecuencia oscila el disco de acreción.

# Capítulo 1

## Introducción

Desde el descubrimiento de los rayos X en fuentes fuera del Sistema Solar en 1962 (Giacconi *et al.* 1962), el fenómeno de acreción en objetos compactos en la Galaxia han ofrecido perspectivas únicas dentro de la astrofísica de las etapas finales de la evolución estelar y de la física de la materia en condiciones físicamente extremas. Desde este descubrimiento, un nuevo fenómeno fue detectado, las pulsaciones periódicas en la curva de luz de rayos X en las estrellas de neutrones (Giacconi *et al.* 1971). Las masas de los objetos compactos fueron medidas en varios sistemas, proporcionando la evidencia más fuerte para la existencia de agujeros negros en el universo (McClintock y Remillard 1986).

El proceso de acreción ocurre cuando gas o materia cae (se acreta) hacia un objeto gravitacional compacto y se acumula sobre el mismo. Esto sucede sobre cualquier objeto gravitacional, sin embargo el proceso de acreción es mucho más eficiente cuando el objeto gravitacional central posee una gran energía de amarre ( $\propto M^2/R$ ), es decir, cuando éste es más compacto ( $\propto M/R$ ).

Para entender de manera simple el mecanismo mediante el cual se extrae energía debida a los procesos de acreción, consideremos el siguiente ejemplo. Suponiendo que se tiene acreción de materia hacia una estrella de masa  $M_*$  y radio  $R_*$ , si la materia acreta libremente sobre la superficie de la estrella desde infinito, entonces la energía cinética que adquiere la materia se incrementa a medida que su energía potencial se vuelve más negativa, es decir, cuando la distancia al centro de la estrella disminuye. En el caso de que un protón con masa  $m_p$  cae libremente desde infinito, la energía cinética está dada por

$$\frac{1}{2}m_p v^2 = \frac{GM_* m_p}{r}, \quad (1.1)$$

en donde  $r$  es la coordenada radial medida desde el centro de la estrella y  $v$  es la velocidad de caída libre. Cuando el gas que cae alcanza el radio de la estrella  $r = R_*$  entonces es

desacelerado violentamente, ya que la partícula choca con la superficie de la estrella. De esta manera toda la energía cinética tiene que ser emitida en forma de radiación (que llega a ser hasta radiación de rayos-X en el caso de acreción de gas sobre estrellas de neutrones o agujeros negros).

Si la *tasa de acreción* (razón de cambio de la masa por unidad de tiempo que es acreta hacia el objeto central) está dada por  $\dot{m}$ , entonces la tasa de disipación de energía cinética en la superficie de la estrella está dada por  $\dot{m}v^2/2$ . De esta manera, la luminosidad de la fuente  $L_{\text{acc}}$  está dada por

$$L_{\text{acc}} = \frac{1}{2}\dot{m}v^2 = \frac{GM_*\dot{m}}{R_*} = \frac{1}{2}\dot{m}c^2 \left( \frac{r_g}{R} \right) \quad (1.2)$$

en donde  $r_g = 2GM_*/c^2$  es el *radio de Schwarzschild*<sup>1</sup> y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. De la ecuación anterior se sigue que la luminosidad puede escribirse como

$$L = \xi \dot{m}c^2, \quad (1.3)$$

en donde  $\xi$  es el *factor de eficiencia* de conversión de energía en reposo (de la masa acreta hacia la estrella) en radiación. Con el simple análisis expuesto anteriormente, obtenemos que  $\xi \approx r_g/2R_*$ . En otras palabras, el factor de eficiencia de conversión de energía es mayor para objetos de menor radio como las estrellas de neutrones. En el caso de enanas blancas ( $M_* \sim M_\odot$  y  $R_* \sim 10^9$  cm)  $\xi \approx 3 \times 10^{-4}$  y en el caso de estrellas de neutrones ( $M_* \sim M_\odot$  y  $R_* \sim 10^5$  cm)  $\xi \approx 0.1$ . Para dar una idea de lo grande que es este factor de conversión de energía, considere el caso de la reacción nuclear p-p en donde se convierte hidrógeno a helio. En este caso  $\xi \approx 7 \times 10^{-3}$ . De aquí se ve que el fenómeno de acreción hacia una estrella de neutrones es aproximadamente un orden de magnitud más eficiente en comparación con la generación de energía nuclear. Para el caso de un agujero negro,  $R_* = r_g$ , entonces  $\xi \approx 0.5$  que es un factor de conversión aún más grande que el estimado para el caso de una estrella de neutrones.

### Breve descripción de un agujero negro

En astrofísica, un agujero negro está descrito por la relatividad general mediante dos números, su masa  $M$  y su momento angular específico o espín  $a = J/cM$ , donde  $J$  es el momento angular del agujero negro y  $c$  es la velocidad de la luz. El valor del espín es convenientemente expresado en términos de un parámetro adimensional<sup>2</sup>,  $a_* = a/r_g$ . El valor de

<sup>1</sup>Es la frontera a la cual un agujero negro ya no se comunica con el universo exterior.

<sup>2</sup>El parámetro,  $a_*$ , es adimensional cuando se mide a  $r_g$  y  $a$  en unidades de  $M$ , es decir, cuando las unidades son geometrizadas.

$a_*$  puede estar entre 0, para un agujero negro de Schwarzschild, y 1 para un agujero de Kerr rotando maximamente. Una propiedad del agujero negro es su horizonte de eventos, la superficie no material que limita a la región interior del espacio tiempo de éste con el universo exterior, es decir, es el punto donde se pierde la comunicación con el universo exterior. El horizonte de eventos, la existencia de una órbita circular marginalmente estable (ISCO<sup>3</sup>), y otras características que serán discutidas más adelante (véase el capítulo 4) son propiedades que describen a un agujero negro. El radio del horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild ( $a_* = 0$ ) es  $r_S = r_g = 30 \text{ Km}(M/10M_\odot)$ , la ISCO está ubicada en  $r_{ISCO} = 3r_g$ , y la frecuencia orbital máxima correspondiente es  $\nu_{ISCO} = 220 \text{ Hz}(M/10M_\odot)^{-1}$ . Para un agujero negro de Kerr extremo ( $a_* = 1$ ), los radios del horizonte de eventos y de la ISCO son idénticos,  $r_K = r_{ISCO} = r_g/2$ , y la frecuencia orbital máxima es  $\nu_{ISCO} = 1615 \text{ Hz}(M/10M_\odot)^{-1}$ .

### Espectro emitido

Se puede estimar el orden de magnitud de la energía emitida por la acreción hacia un objeto compacto. El espectro continuo de la radiación emitida por una temperatura  $T_{\text{rad}}$  definida como la energía de un fotón,  $h\bar{\nu}$ , es del orden de  $kT_{\text{rad}}$ , entonces,  $T_{\text{rad}} = h\bar{\nu}/k$ , donde  $h = 6.6261 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  y  $k = 1.3806 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  son las constantes de Planck y Boltzmann, respectivamente. Para una luminosidad de acreción  $L_{\text{acc}}$  de una fuente de radio  $R_*$ , se define la temperatura de cuerpo negro  $T_{bb}$  como la temperatura de la fuente que tendría si radiara como cuerpo negro:

$$T_{bb} = \left( \frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R_*^2 \sigma} \right)^{1/4}, \quad (1.4)$$

donde  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  es la constante de Stefan-Boltzmann. Finalmente, se define a  $T_{th}$  como la temperatura a la que estaría la materia acretada si toda su energía potencial (gravitacional) fuera convertida en energía térmica. Para un par protón-electrón acretados, la energía potencial liberada es  $GM_*(m_p + m_e)/R_* \simeq GM_*m_p/R_*$  y la energía térmica es  $2 \times \frac{3}{2}kT$ ; entonces

$$T_{th} = \frac{GM_*m_p}{3kR_*}. \quad (1.5)$$

Se espera que la temperatura de radiación esté entre la temperatura térmica y la de cuerpo negro, puesto que el sistema no puede radiar menos que un cuerpo negro ni más que si convirtiera en energía térmica toda la energía de la materia acretada, entonces

$$T_{bb} \lesssim T_{\text{rad}} \lesssim T_{th}. \quad (1.6)$$

---

<sup>3</sup>Innermost stable circular orbit.

Note que esta estimación supone que el material se puede caracterizar por una sólo temperatura. Ahora se puede estimar el rango espectral para distintos casos. Para una estrella de neutrones de una masa solar, el límite superior (1.5) da  $T_{th} \simeq 5.5 \times 10^{11}$  K, o, en términos de energía,  $kT_{th} \simeq 50$  MeV. Para el límite inferior,  $T_{bb}$ , se necesita tener una idea de la luminosidad de acreción; se puede tomar un valor típico de  $\sim 10^{36}$  erg s<sup>-1</sup> para  $\xi \simeq 0.1$  y una tasa de acreción de  $10^{16}$  gr s<sup>-1</sup>, con lo que  $T_{bb} \simeq 10^7$  K o  $kT_{bb} \simeq 1$  KeV, y entonces se espera que las energías de los fotones emitidos como resultado de acretar hacia una estrella de neutrones estén en el intervalo

$$1 \text{ KeV} \lesssim h\bar{\nu} \lesssim 50 \text{ MeV}.$$

Para un agujero negro se obtiene un resultado similar ( $1 \text{ KeV} \lesssim h\bar{\nu} \lesssim 150 \text{ MeV}$ ). Entonces se puede esperar que los sistemas más luminosos sean los que acretan masa hacia una estrella de neutrones o un agujero negro, que van desde los rayos X medios hasta los duros y posiblemente como fuentes de rayos  $\gamma$ . Observacionalmente, estas fuentes fueron descubiertas por el primer satélite de rayos X<sup>4</sup>.

Es posible realizar el mismo cálculo para una enana blanca tomando que  $L_{acc} \sim 10^{36}$  erg s<sup>-1</sup>,  $M = M_{\odot}$  y  $R_{*} = 5 \times 10^8$  cm, entonces

$$6 \text{ eV} \lesssim h\bar{\nu} \lesssim 100 \text{ KeV}.$$

Consecuentemente, la acreción hacia una enana blanca deberá ser una fuente visible en el óptico, ultravioleta y posiblemente en rayos X.

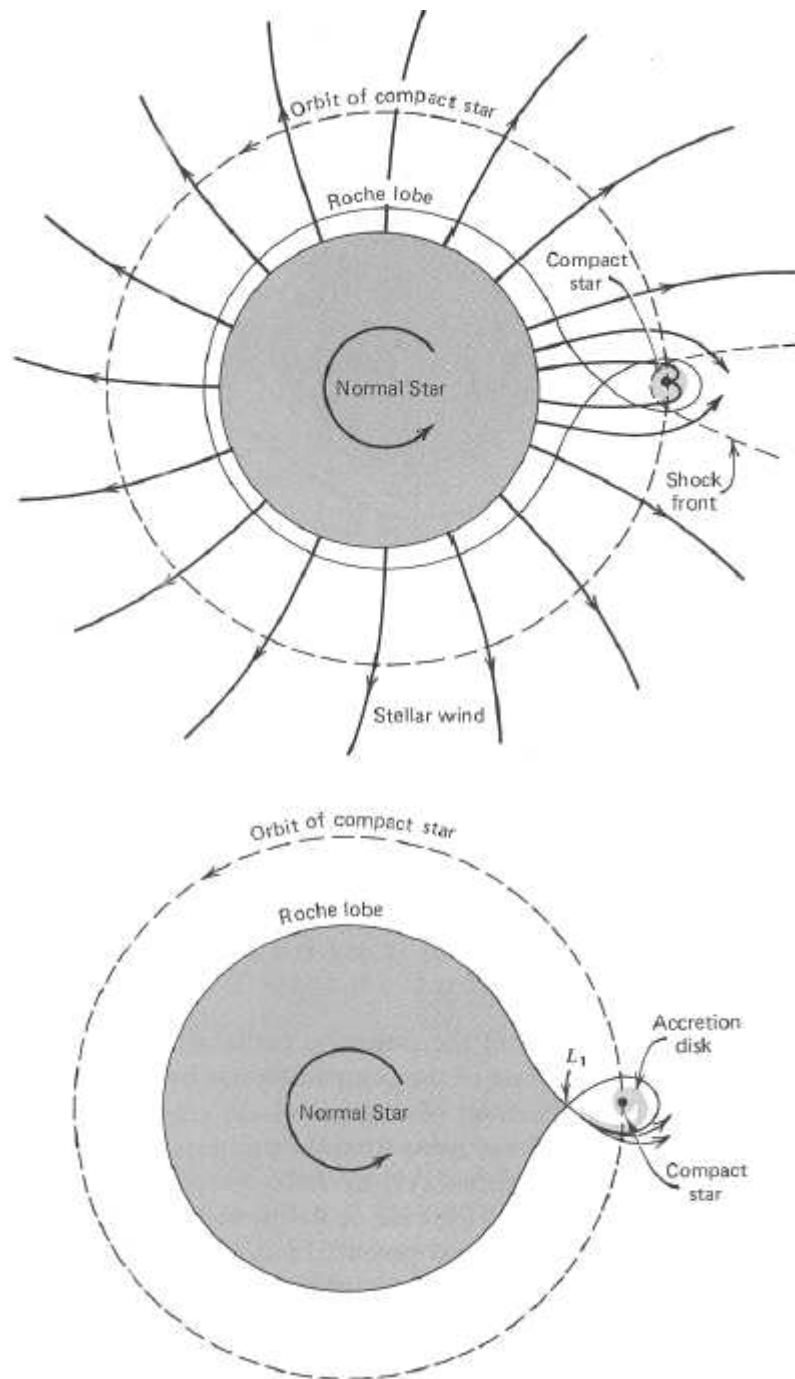
## Rayos X en sistemas binarios

Sí un objeto compacto en un sistema binario está acretando materia durante un periodo duradero o no depende del modo en que le es transferida la materia. Es posible encontrar la relación entre la masa del objeto compacto y la de la estrella compañera, al igual que su separación orbital. Por ejemplo, en el caso de una estrella de neutrones (con una masa  $\sim 1.4$ - $2.0 M_{\odot}$ ), la transferencia de masa es estable en el punto lagrangiano interno cuando la compañera llena su lóbulo de Roche<sup>5</sup> y tiene una masa más pequeña que la estrella de neutrones. En dichos sistemas la masa es llevada por pérdida de momento angular debida a la radiación gravitacional (para pequeñas masas y separaciones orbitales) o por la evolución de la estrella compañera. Estas fuentes son significativamente más brillantes en rayos X que en el óptico. Sistemas binarios de agujeros negros o estrellas de neutrones con compañeras

<sup>4</sup>En 1970 la NASA lanzó el primer satélite que captaba imágenes en rayos X y su nombre fue Uhuru.

<sup>5</sup>El punto interno de Lagrange y el lóbulo de Roche serán definidos más adelante en esta misma sección.





**Figura 1.1:** Dos posibles modos de transferencia de masa en binarias de rayos X. En la figura de arriba se observa que la primaria se encuentra dentro del lóbulo de Roche pero pierde masa por medio de vientos estelares. En la figura de abajo la primaria se ha expandido, y comienza a llenar su lóbulo de Roche. Figura tomada de [70].

de baja masa son llamadas binarias de rayos X de baja masa (LMXBs<sup>6</sup>).

Un objeto compacto puede también acretar materia de su estrella compañera sin haber llenado su lóbulo de Roche, puede ser que la estrella primaria esté perdiendo masa en forma de vientos estelares. Para que este proceso ocurra, la estrella compañera tiene que ser masiva ( $\geq 10 M_{\odot}$ ), para que ésta pueda producir un viento fuerte. Estos sistemas son llamados binarias de rayos X de alta masa (HMXBs<sup>7</sup>).

Por lo anterior, podemos decir que los procesos de transferencia de masa de la primaria al objeto compacto toman dos diferentes caminos: por el lóbulo de Roche o por un viento estelar (véase la figura 1.1). En el caso del lóbulo de Roche, el material fluye lentamente sobre un punto silla del potencial gravitacional entre las dos estrellas y rápidamente es capturado por el objeto compacto. A este punto silla también se le llama punto interno de Lagrange  $L_1$  (véase la figura 1.2). A esta equipotencial comúnmente se le llama lóbulo de Roche. En este escenario, el plasma capturado tendrá suficiente momento angular para poder formar un disco de acreción alrededor del objeto compacto. Para el caso de acreción por medio de un viento estelar, una pequeña parte del plasma expulsado de la primaria es gravitacionalmente capturado por el objeto compacto. El gas capturado tiene algo de momento angular con respecto al objeto compacto, pero no lo suficiente para formar un disco de acreción. En este caso la acreción es más o menos *esférica* o *acreción de Bondi* (véase el capítulo 3).

### Acreeción sobre objetos compactos en binarias de rayos X

Uno de los principales motivos para estudiar binarias de rayos X es que la acreción hacia agujeros negros y estrellas de neutrones nos suministra una única ventana de la física en gravedad fuerte y materia densa. En la figura 1.3 se esquematiza a los 20 agujeros negros en la Galaxia como fuentes de rayos X. Su diversidad es evidente: hay sistemas de periodos largos conteniendo a supergigantes calientes y frías, y varios sistemas compactos conteniendo estrellas K<sup>8</sup> como secundarias.

La binaria de rayos X se forma cuando cualquiera de los dos procesos mencionados anteriormente sucede (llenado del lóbulo de Roche o vientos estelares). En ambos casos, el destino de la masa transferida depende de la cantidad de momento angular que posee el gas, del proceso físico por el cual pierde momento angular, y, lo más importante, el proceso de radiación por el cual se enfría.

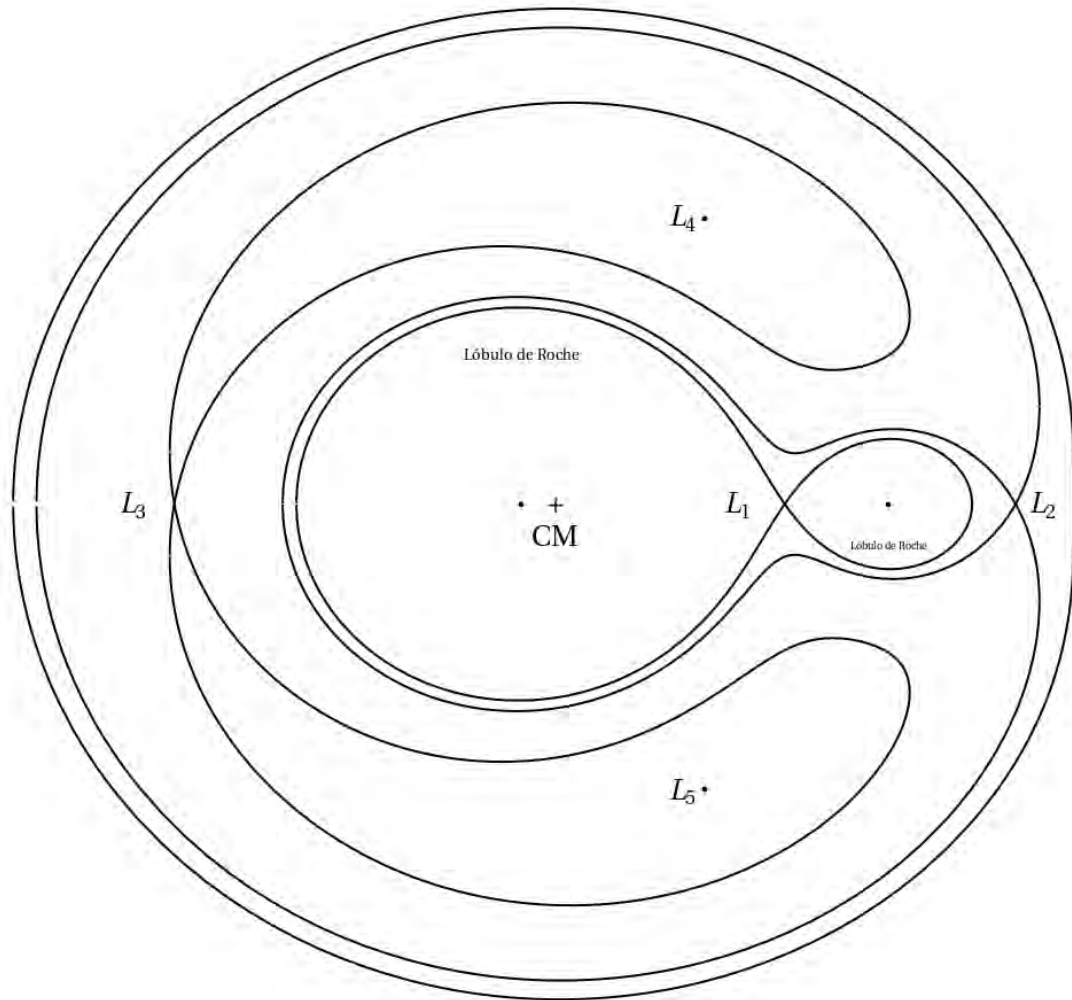
A inicios de los años 1970's y durante las dos décadas subsecuentes, muchos de los modelos de flujos de acreción sobre estrellas de neutrones y agujeros negros estuvieron basados

---

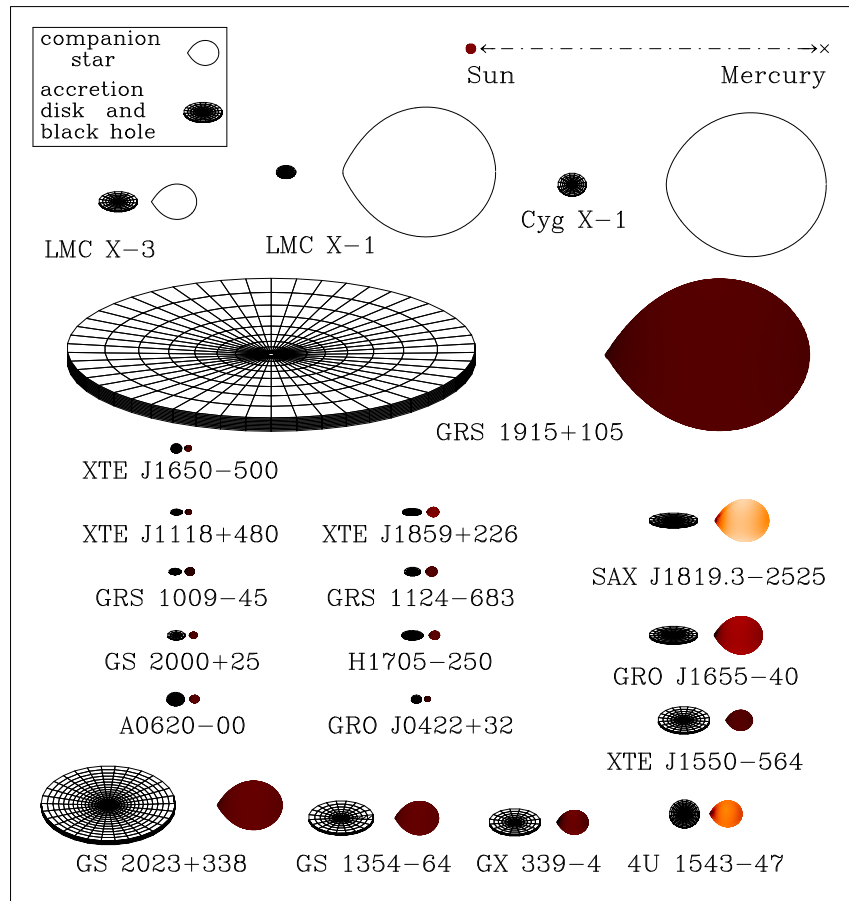
<sup>6</sup>Low-mass X-ray binaries.

<sup>7</sup>High-mass X-ray binaries.

<sup>8</sup>Una estrella K, es una estrella naranja-amarilla, con temperatura superficial de 4000 K. Espectro dominado por líneas de metales. Líneas de H $\alpha$  insignificantes. CaI 422.7 nm claramente visible.



**Figura 1.2:** Equipotenciales de  $\phi_{gc} = cte$  utilizando la gravitación Newtoniana + el potencial centrífugo en el plano orbital de la estrella binaria para órbita circular. La equipotencial más interna en la figura es el lóbulo de Roche para cada estrella. El potencial  $\phi_{gc}$  tiene puntos localmente estacionarios ( $\nabla\phi_{gc} = 0$ ), llamados *puntos de Lagrange*, ubicados en  $L_j$ . Para el caso mostrado aquí, la proporción de masa es  $q = M/m = 10$ , donde  $M$  es la masa de la estrella primaria y  $m$  la masa de la estrella compacta.



**Figura 1.3:** Figura que esquematiza diferentes agujeros negros con sus discos de acreción y sus compañeras en la Galaxia. La distancia entre el Sol y Mercurio (0.4 AU) es mostrada en la parte superior de la figura. Figura proporcionada por J. Orosz.

en dos suposiciones restrictivas. Primero, se supuso que los flujos de acreción transportaban momento angular con tasas altas a través de un proceso no especificado, típicamente proporcional a la presión (Shakura y Sunyaev 1973; a estas soluciones también se les llaman discos  $\alpha$ , nombrados por la constante de proporcionalidad usada). Segundo, se supuso que los procesos de radiación eran muy eficientes, por lo que los resultados de flujo de acreción fueron relativamente fríos, y con forma de discos de acreción delgados. Los cálculos realizados con la primera de las suposiciones anteriores mostraron la ineficiencia de la viscosidad microscópica para explicar las altas tasas de acreción de masa en las fuentes observadas. La segunda suposición, por otro lado, fue relajada en varios estudios pero los resultados obtenidos fueron inestables, aunque existen casos en los que es posible remover la inestabilidad, por ejemplo usando el mecanismo de enfriamiento de emisión de cuerpo negro para un plasma ópticamente grueso (Piran *et al.* 1978).

Durante la década pasada, los modelos teóricos de flujos de acreción sobre objetos compactos llegaron a ser más sofisticados y diversos a causa de dos desarrollos importantes. El primero fue la identificación de la inestabilidad magnetohidrodinámica en flujos rotando diferencialmente [la inestabilidad magneto-rotacional; Balbus y Hawley (1991) y (1998)], que permite sembrar un campo magnético infinitesimal en el flujo para obtener un mejoramiento de las simulaciones. Esto fue demostrado para obtener una turbulencia magnetohidrodinámica completamente desarrollada y proporcionar un mecanismo eficiente de transporte de momento angular. El segundo desarrollo fue el descubrimiento de un flujo de acreción estable pero ineficiente. En esta solución, los electrones y los iones tienen temperaturas diferentes y altas, el disco de acreción es geoméricamente grueso, y mucha de su energía potencial no es radiada fuera del disco sino que es adveccionada hacia el objeto compacto; estas soluciones son llamadas flujos de acreción dominados por advección (ADAFs<sup>9</sup>).

El ingrediente final en los modelos de flujos de acreción sobre objetos compactos fue la interacción de los flujos con el objeto mismo. Esta es la región en el flujo de acreción donde mucha de la radiación de alta energía es producida y por lo tanto es elegida como prueba de las observaciones de los telescopios de rayos X y rayos  $\gamma$ . La interacción depende del tipo de objeto compacto, agujero negro o estrella de neutrones, y para esta última, sí la estrella de neutrones es fuertemente o débilmente magnética.

Las observaciones de binarias de rayos X muestran una variabilidad considerable sobre una amplia gama de escalas de tiempo en todas las longitudes de onda, pero es mayor en rayos X. La rápida variación de los flujos de acreción internos es estocástica, y más eficientemente detallada usando técnicas estadísticas. El análisis de Fourier es una herramienta muy útil, y la única que usamos en este trabajo en forma importante.

---

<sup>9</sup>Advection-dominated accretion flows

## Análisis de Fourier

El espectro de potencia de Fourier<sup>10</sup> de la serie de tiempo<sup>11</sup> del flujo de rayos X proporciona una estimación de la variación de la energía como función de la frecuencia de Fourier,  $\nu$ , en términos de la *densidad de potencia*  $P_\nu(\nu)$  (transformada de Fourier). Las estructuras extensas en el espectro son llamadas *ruido*. El ruido en el espectro de potencia se puede aproximar por una ley de potencia  $P_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ . El índice en la ley de potencia (de pendiente logarítmica)  $\alpha$  está típicamente entre 0 y 2. El ruido  $1/\nu$ <sup>12</sup> tiene  $\alpha = 1$ , y el ruido blanco<sup>13</sup> es constante ( $\alpha = 0$ ). El ruido rojo es un término usado para cualquier tipo de ruido que decrezca  $P_\nu$  con  $\nu$  con potencias  $\alpha \geq 2$ . Por otro lado, también es posible observar picos en un espectro de potencias. Una oscilación cuasi periódica (QPO<sup>14</sup>) es un pico de amplitud finita en el espectro de potencias.

Las oscilaciones cuasi periódicas en binarias de rayos X son importantes para el estudio de acreción sobre agujeros negros. Estas están asociadas con estados no térmicos del disco. Las QPOs juegan un importante papel en varias áreas de la ciencia, como examinar las regiones de campo fuerte y la definición de los procesos físicos que distinguen los estados responsables de los rayos X. Siguiendo la literatura, se divide a las QPOs en dos grupos: (i) baja frecuencia, y (ii) alta frecuencia. Las oscilaciones cuasi periódicas de baja frecuencia (LFQPOs<sup>15</sup>) corresponden a un intervalo de 0.1-30 Hz. Estas oscilaciones han sido detectadas en una o más ocasiones para 14 de los 18 agujeros negros considerados en la Tabla 4.2 de McClintock y Remillard (2006). Las oscilaciones cuasi periódicas de alta frecuencia (HFQPOs<sup>16</sup>) corresponden a un intervalo de 40-450 Hz. Estas han sido detectadas en cuatro fuentes de la Tabla 4.2 de McClintock y Remillard (2006). En la figura 1.4 se muestra la QPO 300 Hz detectada con flujo en rayos X para el sistema GROJ1655-40 que contiene un candidato a agujero negro (figura 1.3). Esta fue detectada por Remillard *et al.* (1999). Más tarde fue detectada la QPO 450 Hz por Strohmayer *et al.* (2001). Abramowicz y Kluźniak (2001), descubrieron que la QPO 450 Hz guarda una proporción 3:2 con la ya antes conocida QPO 300 Hz en la misma fuente. Si el origen de las HFQPO en sistemas que contienen un candidato a agujero negro es una resonancia entre los movimientos orbital y epicíclico de la materia

<sup>10</sup>El espectro de potencia de Fourier es una función real positiva de una variable real de frecuencia asociada a un proceso estocástico, o a una función determinista en el tiempo.

<sup>11</sup>Una serie de tiempo es una secuencia de puntos de datos medidos en momentos sucesivos espaciados a intervalos de tiempo uniforme.

<sup>12</sup>El ruido rosa o ruido  $1/\nu$  es una señal en donde la potencia de densidad espectral es inversamente proporcional a la frecuencia.

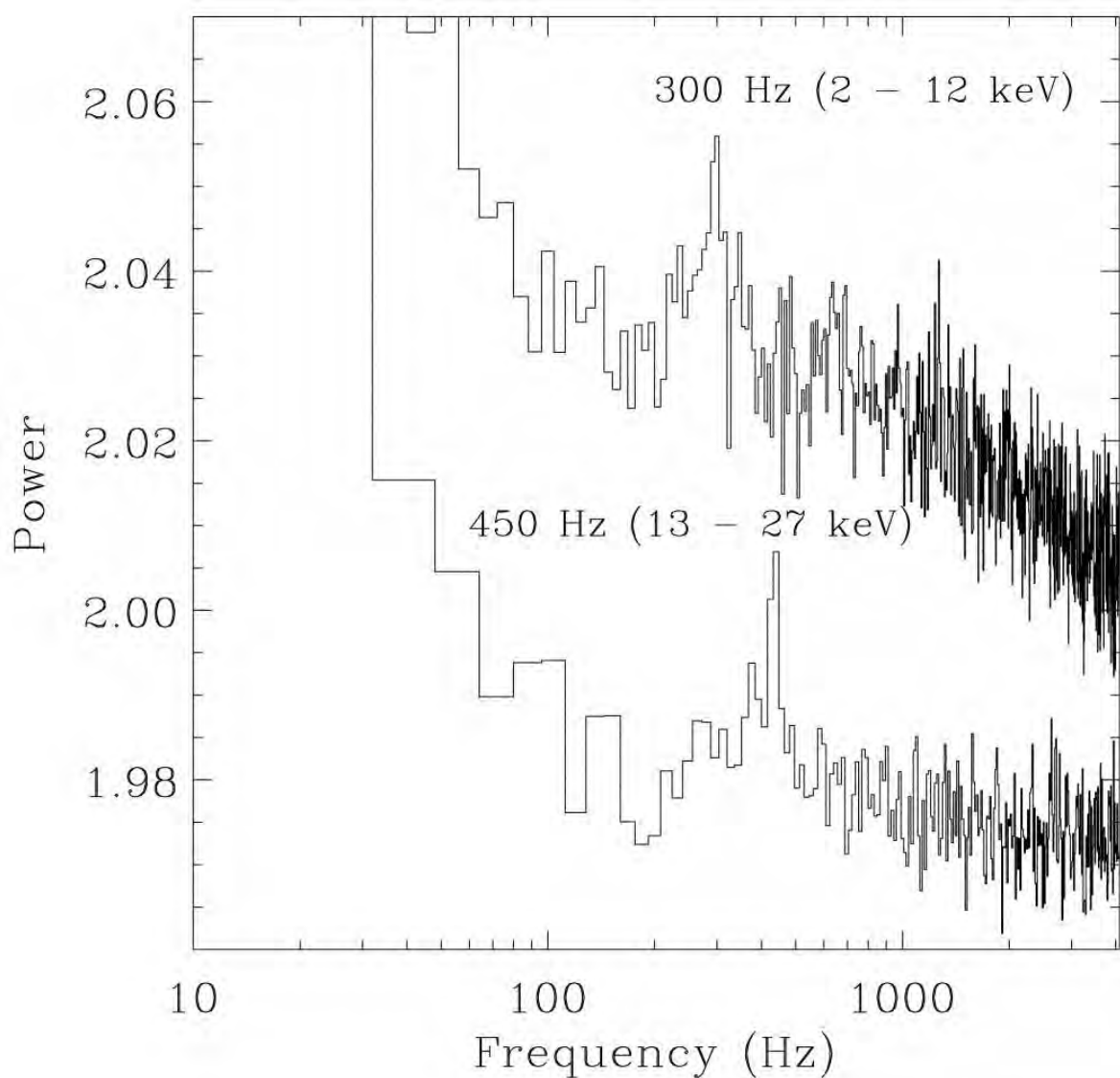
<sup>13</sup>El ruido blanco es una señal estocástica que se caracteriza porque sus valores de señal en dos instantes de tiempo diferentes no guardan correlación estadística.

<sup>14</sup>Quasi-periodic oscillations

<sup>15</sup>Low frequency quasi-periodic oscillations.

<sup>16</sup>High frequency quasi-periodic oscillations.

en acreción, ellos sugieren que el momento angular del agujero negro puede ser determinado conociendo su masa. Ellos encontraron que el momento angular (sin dimensiones) está en el intervalo  $0.2 < a_* < 0.67$  si la masa está en el intervalo (correspondiente)  $5.5 - 7.9M_{\odot}$ .



**Figura 1.4:** Espectro de frecuencias calculado de dos observaciones con las que fueron detectadas la QPO 450 Hz reportada por Strohmayer *et al.* 2001 y la QPO 300 Hz reportada por Remillard *et al.* 1999.

Para poder realizar el análisis de Fourier es necesario contar con una serie de tiempo, que nos de información del disco de acreción, esta puede ser la energía total del sistema o cualquier otra variable dependiente del tiempo. Series de tiempo sintéticas, es decir, obtenidas de simulaciones pueden reproducir propiedades del sistema. Para el presente trabajo, se usa

la transformada de Fourier para encontrar la frecuencia natural a la que oscilan los discos de acreción construidos con las condiciones que serán expuestas más adelante.

### Colapso Gravitacional

Se sabe que las enanas blancas y las estrellas de neutrones tienen una masa máxima posible <sup>17</sup>. ¿Qué pasa cuando esa masa es excedida? ¿Cuál es el destino de el núcleo de una estrella masiva colapsando, si la masa de su núcleo es tan grande que forma una estrella de neutrones? La respuesta, de acuerdo a la relatividad general, es que nada puede detener el colapso. Como el colapso continúa, el campo gravitacional cerca del objeto se vuelve cada vez más fuerte, entonces nada puede escapar del objeto al espacio, ni siquiera la luz, entonces decimos que un agujero negro ha nacido.

Un agujero negro está definido como una región en el espacio-tiempo que no puede comunicarse con el universo exterior. A la frontera de ésta se le llama superficie del agujero negro u *horizonte de eventos*.

Históricamente, el significado del momento angular para la acreción en un sistema binario fue primero enfatizado por Prendergast y Burbidge (1968). Ellos construyeron modelos de un disco de acreción en torno a un sistema binario compuesto por enanas blancas. Subsecuentemente, Shakura (1972), Pringle y Rees (1972), Shakura y Sunyaev (1973), y Novikov y Thorne (1973) construyeron modelos de discos de acreción newtonianos para flujo en estrellas de neutrones y agujeros negros. Novikov y Thorne (1973) consideraron los efectos de la relatividad general sobre la parte interna del disco de acreción. Lynden-Bell (1969) fue el primero en proponer que los núcleos de las galaxias podrían tener un agujero negro supermasivo envuelto por discos de acreción gaseosos.

Los cálculos de un flujo de acreción en torno a una estrella compacta y la radiación emitida son, en general, muy complicados. Suponiendo que el camino libre medio efectivo para un gas de partículas colisionando es suficientemente corto para que el flujo sea *hidrodinámico* en la naturaleza. Primero se tiene que determinar el flujo geométrico; en general, si el gas posee momento angular intrínseco, el flujo será en dos- o tres- dimensiones. En un caso más simple, la acreción puede ser esférica, por ejemplo, donde no hay movimiento del gas lejos de una estrella compacta estacionaria; o un disco, con un flujo axisimétrico del gas con un momento angular intrínseco. Segundo, se tienen que enumerar los mecanismos de enfriamiento y calentamiento dominantes que caracterizan a la acreción. Tercero, hay que determinar el posible dominio del campo magnético en el plasma. Cuarto, el efecto de la presión de radiación debe

---

<sup>17</sup>La masa límite es llamado el *límite de Chandrasekhar* y representa la masa máxima posible para una enana blanca ( $M_{Ch} \approx 1.44M_{\odot}$ ). Si la masa de la enana blanca sigue colapsando, ésta producirá una estrella de neutrones. El límite de masa es determinado por el *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* que es  $M_{max} \lesssim 3.0M_{\odot}$ .



ser propiamente tomado en cuenta. Quinto, se debe entender las condiciones de frontera del flujo, tanto lejos del objeto, donde el gas se une al medio interestelar como en la superficie del agujero, donde el gas se sumerge dentro de éste. Entonces para en el caso general de acreción, uno debe resolver las ecuaciones con dependencia temporal, multidimensionales, relativistas, magneto-hidrodinámicas y la transferencia radiativa acoplada.

En el capítulo 2 se da una breve descripción de las ecuaciones que describen la dinámica de un gas, en el aspecto físico y en el aspecto numérico. En el capítulo 3 se describe la estructura de los discos de acreción mediante la física y las ecuaciones que describen el movimiento del disco, así como el efecto de la rotación del gas hacia un agujero negro. En el capítulo 4 se proponen los distintos potenciales pseudo-newtonianos que se usaron para las simulaciones así como sus momentos angulares correspondientes a cada potencial, las métricas para agujeros negros rotando (Kerr) y no rotando (Schwarzschild). En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos a través de gráficas y tablas además de las condiciones iniciales usadas para las simulaciones. Finalmente, se dan las conclusiones y las posibles utilidades del presente trabajo para trabajos futuros.

## 1.1. Objetivos

### 1.1.1. General

Analizar las oscilaciones en discos de acreción gruesos y semidelgados ante perturbaciones impulsivas y periódicas utilizando diferentes momentos angulares para el agujero negro con el potencial de Artemova *et al.* (1996), y además diferentes momentos angulares dentro del disco de acreción en torno a agujeros negros.

### 1.1.2. Específicos

- Analizar los modos de oscilación de toros de acreción en torno a un agujero negro. Estos toros tendrán distintas energías iniciales así como distintas distribuciones de momento angular, como son: (i) constante, (ii) ley de potencias en el radio, y (iii) aquellas dadas por Qian *et al.* (2009), que contemplan distribuciones más generales en radio y ángulo polar.
- Resolver la dependencia temporal usando un toro estático axisimétrico como condición inicial en coordenadas cilíndricas con distintos potenciales gravitacionales pseudo-relativistas (por lo que no se usa la relatividad general), bajo las suposiciones de que el agujero negro no tiene campo magnético, el disco no es auto-gravitante, la fuerza

viscosa en el disco es despreciable y que las partículas en el disco experimentan un proceso adiabático.

- Analizar el comportamiento de los discos de acreción desde un enfoque dinámico, es decir, sin tomar en cuenta la disipación de energía y tomando sólo los efectos dinámicos que ocurren en el disco.

## **1.2. Hipótesis**

Es posible analizar y comparar los espectros de frecuencias generados para distintos tamaños de discos de acreción con distintos momentos angulares para distintos potenciales gravitacionales (pseudo-newtonianos) con las frecuencias observadas en binarias de rayos X de baja masa.

# Capítulo 2

## Hidrodinámica

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) constituye lo que se denomina *hidrodinámica*. Como los fenómenos considerados en la hidrodinámica son macroscópicos, un fluido se considera como un medio continuo y esto significa que siempre se supone que cualquier elemento del fluido es suficientemente grande para contener un número muy elevado de moléculas. De acuerdo con ello, cuando se habla de elementos de volumen infinitamente pequeños, siempre se quiere hacer referencia a aquellos que son físicamente infinitamente pequeños, es decir, muy pequeños en comparación con el volumen del cuerpo o sistema en consideración, pero grandes comparados con las distancias entre las moléculas.

La descripción matemática del estudio del estado de un fluido móvil se efectúa con funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$  y de dos magnitudes termodinámicas cualesquiera que pertenezcan al fluido, por ejemplo, la presión  $P(x, y, z, t)$  y la densidad  $\rho(x, y, z, t)$ . Como es bien conocido, todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de dos cualesquiera de ellas junto con la ecuación de estado; de aquí que si se tienen cinco magnitudes determinadas, tres componentes de la velocidad, la presión y la densidad, queda totalmente determinado el estado del fluido en movimiento. En general, todas estas magnitudes son funciones de la posición y del tiempo.

### 2.1. Física

Las ecuaciones que describen el flujo del fluido se pueden representar matemáticamente por medio de la conservación de las leyes físicas:

- La masa del fluido se conserva (Ecuación de continuidad).
- El cambio del momento es igual a la suma de las fuerzas sobre una partícula del fluido (Ecuación de Euler).

- El cambio de la energía es igual a la adición de calor y al trabajo realizado sobre una partícula del fluido (Ecuación de conservación de la energía).

### 2.1.1. Ecuación de continuidad

Consideremos un cierto volumen  $V_0$  del espacio. La masa contenida en este volumen es  $\int \rho dV$ , siendo  $\rho$  la densidad del fluido y realizándose la integración respecto al volumen  $V_0$ . La masa del fluido que circula por unidad de tiempo a través de un elemento  $d\vec{S}$  de la superficie que limita a este volumen es  $\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ . Entonces,  $\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$  es positivo si el fluido está saliendo del volumen y negativo si el flujo es hacia el interior del mismo. La masa total de fluido que sale del volumen  $V_0$  por unidad de tiempo es, por consiguiente,

$$\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

en donde la integración se extiende a la totalidad de la superficie cerrada. Ahora, se puede escribir la disminución de la masa del fluido en el volumen  $V_0$  por unidad de tiempo, como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \int \rho dV \right).$$

Igualando las expresiones anteriores, tenemos

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \int \rho dV \right) = \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (2.1)$$

La integral de superficie puede transformarse mediante el teorema de la divergencia en una integral de volumen:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \int \rho dV \right) = \int \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV. \quad (2.2)$$

Así pues, como no estamos integrando con respecto al tiempo, entonces la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera,

$$\int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0. \quad (2.3)$$

Como la ecuación anterior debe ser válida para cualquier volumen, el integrando debe anularse, es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.4)$$

Esta es la denominada *ecuación de continuidad*.

### 2.1.2. Ecuación de Euler

Consideremos cierto volumen del fluido. La fuerza total que actúa sobre el mismo despreciando esfuerzos viscosos es igual a la integral

$$-\oint P d\vec{S},$$

de la presión, extendida a la superficie que limita el volumen. Transformándola en una integral de volumen, tenemos

$$-\oint P d\vec{S} = -\int \nabla P dV.$$

Podemos decir que sobre la unidad de volumen del fluido actúa una fuerza  $-\nabla P$ . Entonces por la segunda ley de Newton podemos igualar la fuerza  $-\nabla P$  al producto de la masa por unidad de volumen ( $\rho$ ) por la aceleración  $d\vec{v}/dt$ :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P. \quad (2.5)$$

La derivada  $d\vec{v}/dt$  que se escribió en la ecuación anterior, designa la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio (descripción lagrangiana). Esta derivada se puede expresar en función de magnitudes que se refieran a punto fijos en el espacio (descripción euleriana). Usando la diferencial exacta (véase por ejemplo [22]) tenemos que

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz \\ &= \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) dt + dx \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \\ &= \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) dt + \left( dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} \\ &= \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) dt + (d\vec{r} \cdot \nabla) \vec{v}. \end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados por  $dt$ , obtenemos

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (2.6)$$

Sustituyendo lo anterior a la ecuación (2.5), tenemos que

$$\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho}. \quad (2.7)$$

Esta es la ecuación requerida del movimiento del fluido. Fue obtenida por primera vez por L. Euler en 1755. Se denomina *ecuación de Euler* y es una de las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica.

Note que se puede tener fuerzas externas que actúan sobre el fluido. Se distinguen dos tipos de fuerzas sobre las partículas del fluido:

- Fuerzas superficiales
  - Fuerzas de presión.
  - Fuerzas viscosas.
- Fuerza de volumen
  - Fuerza gravitacional.
  - Fuerza centrífuga.
  - Fuerza de Coriolis.
  - Fuerza electromagnética.

Si tenemos una fuerza externa al fluido, entonces a la ecuación (2.5) se le puede sumar la fuerza al segundo miembro, de modo que la ecuación (2.7) toma la forma

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\vec{f}}{\rho}, \quad (2.8)$$

donde  $\vec{f}$  toma los valores de las fuerzas externas.

### Línea de corriente

Estas líneas tienen la propiedad de que la tangente a ellas en cualquier punto indica la dirección de la velocidad en dicho punto; quedan determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (2.9)$$

En el caso de un flujo estacionario las líneas de corriente no varían con el tiempo, coincidiendo con las trayectorias de las partículas fluidas. En el flujo no estacionario deja de cumplirse esta coincidencia. Las tangentes a las líneas de corriente dan las direcciones de las velocidades de las partículas fluidas en diversos puntos del espacio en un instante dado, mientras que las tangentes a las trayectorias indican las velocidades de las partículas del fluido dadas en distintos instantes de tiempo.

### Flujo de impulso

El impulso por unidad de volumen es  $\rho \vec{v}$ . Se puede determinar su variación respecto al tiempo,  $\partial(\rho \vec{v})/\partial t$ . Para ello se puede utilizar la notación tensorial<sup>1</sup>. Entonces se tiene que

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i. \quad (2.10)$$

Se puede escribir la ecuación (2.4) como,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k},$$

y la ecuación (2.7) en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i},$$

sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la ecuación (2.10), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}, \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Podemos escribir el primer término del lado derecho de la igualdad anterior como

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial P}{\partial x_k}$$

donde  $\delta_{ik}$  es el tensor unidad, es decir, el tensor con componentes que son la unidad con  $i = k$  y cero para  $i \neq k$ . Entonces obtenemos que

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.11)$$

donde

$$\tau_{ik} = \delta_{ik} P + \rho v_i v_k, \quad (2.12)$$

se denomina tensor de densidad de flujo de impulso o tensor de energía-momento.

<sup>1</sup>Los índices latinos  $i, k, \dots$ , toman los valores de 1, 2, 3, correspondientes a las componentes de los vectores y tensores a lo largo de los ejes  $x, y, z$ , respectivamente en coordenadas cartesianas.

### Fluidos viscosos

El flujo de impulso dado por la ecuación (2.11) representa una transferencia de impulso completamente reversible debida simplemente al transporte mecánico de las distintas partículas de fluido de un lugar a otro y a las fuerzas de presión que actúan en dicho fluido. La viscosidad (rozamiento interno) se debe a una transferencia de impulso, irreversible, de unos puntos en donde la velocidad es grande a otros puntos donde la velocidad es pequeña.

La ecuación de movimiento de un fluido viscoso puede, por consiguiente, obtenerse sumando al flujo de impulso “ideal” (2.11) un término  $-\sigma'_{ik}$  que es la transferencia de impulso “viscoso” irreversible en el fluido. Así pues, se puede escribir el tensor densidad de flujo del impulso en el caso de un fluido viscoso en la forma

$$\tau_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k.$$

El tensor

$$\sigma_{ik} = \sigma'_{ik} - P\delta_{ik},$$

se denomina *tensor de esfuerzos* y  $\sigma'_{ik}$  es el *tensor de esfuerzos de la viscosidad*.

Puede establecerse la forma general del tensor  $\sigma'_{ik}$  del modo siguiente. En un fluido se presentan procesos de rozamiento interno únicamente en el caso en que las distintas partículas del fluido se muevan con velocidades diferentes, de modo que exista un movimiento relativo entre las distintas partes del fluido. De aquí que  $\sigma'_{ik}$  dependa de las derivadas espaciales de la velocidad. Si los gradientes de velocidad son pequeños, podemos suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. Con la misma aproximación, puede suponerse que  $\sigma'_{ik}$  es una función lineal de las derivadas  $\partial v_i / \partial x_k$ . No pueden existir términos en  $\sigma'_{ik}$  independientes de  $\partial v_i / \partial x_k$ , puesto que  $\sigma'_{ik}$  debe anularse para  $v = cte$ ,  $\sigma'_{ik}$  debe también anularse cuando el fluido completo está en rotación uniforme, puesto que en dicho movimiento no se produce ningún rozamiento interno en el fluido. En el caso de rotación uniforme con velocidad angular  $\vec{\Omega}$ , la velocidad  $\vec{v}$  es igual al producto vectorial  $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ . Las sumas

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (2.13)$$

son combinaciones lineales de las derivadas  $\partial v_i / \partial x_k$ , y se anulan cuando  $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ . De aquí que  $\sigma'_{ik}$  deberá contener exactamente estas combinaciones simétricas de las derivadas



$\partial v_i / \partial x_k$ . El tensor más general de rango dos que satisface las condiciones anteriores es

$$\sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (2.14)$$

Las constantes  $\eta$  y  $\zeta$  se denominan *coeficientes de viscosidad*<sup>2</sup>, ambas son positivas. Este tensor también es simétrico, ya que si cambiamos los índices  $ik$  por  $ki$  el tensor mantiene la misma forma (véase apéndice A).

### 2.1.3. Ecuación de la conservación de energía

Escojamos un elemento de volumen cualquiera fijo en el espacio y veamos como varía con el tiempo la energía del fluido contenido dentro de este elemento de volumen. La energía por unidad de volumen del fluido es

$$E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u, \quad (2.15)$$

en donde el primer término es la energía cinética y el segundo la energía interna, siendo  $u$  la energía interna por unidad de masa, que en general depende de la temperatura del gas  $T$ . La variación de  $E$  está dada por

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right).$$

Podemos escribir al primer término del miembro de la derecha en la ecuación anterior como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial t} = \rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Utilizando las ecuaciones (2.8) y (2.4), se puede escribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial t} &= \rho \vec{v} \cdot \left[ -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\vec{f}}{\rho} \right] - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \\ &= -\frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \nabla v^2 - \vec{v} \cdot \nabla P + \vec{v} \cdot \vec{f} - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}). \end{aligned}$$

Recuérdese que la primera ley de la termodinámica se puede escribir como  $dw = Tds + VdP = Tds - dP/\rho$ , donde  $w$  es la función entalpía que se define como  $u + P/\rho$ ,  $V$  es el volumen y  $s$  es la entropía del sistema termodinámico (véase apéndice D). Para  $s = cte$ ,

<sup>2</sup> $\eta$  se denomina *viscosidad dinámica* y  $\zeta$  es la *viscosidad de compresión* (relacionada con el cambio de volumen del sistema).

tenemos que  $\nabla w = -\nabla P/\rho$ , entonces la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \nabla v^2 - \rho \vec{v} \cdot \nabla w + \vec{v} \cdot \vec{f} - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \quad (2.16)$$

$$= -\rho \vec{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + u + \frac{P}{\rho} \right) + \vec{v} \cdot \vec{f} - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}). \quad (2.17)$$

Con el objetivo de transformar  $\partial(\rho u)/\partial t$ , utilizaremos la relación termodinámica que, como se verá más adelante es una forma de la primera ley de la termodinámica

$$du = -PdV = \left( \frac{P}{\rho^2} \right) d\rho,$$

se puede derivar  $d(\rho u) = \rho du + u d\rho = (u + P/\rho) d\rho$ , entonces

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \left( u + \frac{P}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( u + \frac{P}{\rho} \right) \nabla \cdot (\rho \vec{v}). \quad (2.18)$$

Combinando las ecuaciones (2.17) y (2.18), se encuentra que la variación de energía es

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) + \nabla \cdot \left[ \vec{v} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u + P \right) \right] = \vec{v} \cdot \vec{f} \quad (2.19)$$

que es la ecuación de conservación de la energía.

### La primera ley de la termodinámica

En una transformación termodinámica arbitraria, dejemos que  $\Delta Q$  denote la cantidad neta del calor absorbido por el sistema y  $P\Delta V$  la cantidad neta de trabajo realizado por el sistema. La primera ley de la termodinámica establece que la cantidad  $\Delta U$ , definida por

$$\Delta U = \Delta Q - P\Delta V,$$

es la misma para todas las transformaciones desde un estado inicial hasta un estado final. Esto inmediatamente define a la cantidad  $U$  como la energía interna. En una transformación infinitesimal, la primera ley se reduce a

$$dU = dQ - PdV. \quad (2.20)$$

La restricción de un proceso adiabático nos permite eliminar el término  $dQ$ . Definiendo  $u$  como la energía interna por unidad de masa y considerando que para una masa constante  $m_0$   $dV = m_0 d(1/\rho) = -m_0 d\rho/\rho^2$ , implica que la primera ley de la termodinámica, expresada

por unidad de masa y en el caso sin generación de entropía, se lee

$$du = \frac{P}{\rho^2} d\rho, \quad (2.21)$$

lo cual nos lleva a

$$\frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_s = \frac{P}{\rho^2} \quad (2.22)$$

### Astrofísica

La ecuación (2.19) toma la siguiente forma para un gas

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right) + \nabla \cdot \left[ \vec{v} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u + P \right) \right] = \vec{v} \cdot \vec{f} - \nabla \cdot \vec{F}_{\text{rad}} - \nabla \cdot \vec{Q} \quad (2.23)$$

El lado derecho de la ecuación anterior tiene dos nuevas cantidades: la primera es el vector de flujo radiativo  $\vec{F}_{\text{rad}} = \int d\nu \int d\Omega \vec{n} I_\nu(\vec{n}, \vec{r})$  donde  $I_\nu$  es la intensidad específica de la radiación en el punto  $\vec{r}$  en la dirección  $\vec{n}$  y las integrales son sobre la frecuencia,  $\nu$ , y el ángulo sólido. El término  $-\nabla \cdot \vec{F}_{\text{rad}}$  da el flujo de energía radiada por unidad de volumen del gas. La segunda cantidad es el flujo conductivo de calor,  $\vec{Q}$ . Esta mide el cambio en que los movimientos aleatorios, principalmente por electrones, transportan energía térmica en el gas. El término  $-\nabla \cdot \vec{Q}$  fija el exponente de  $T$  en la ecuación de la energía. Sin embargo, en este trabajo no se consideran estas dos cantidades puesto que se supone que no hay gradientes de temperatura y además que no se toma en cuenta la conducción.

### Flujo viscoso

La ecuación de movimiento para un fluido viscoso (no relativista) es

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \sigma', \quad (2.24)$$

donde el tensor viscoso  $\sigma'$  tiene las componentes<sup>3</sup>

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji} = \eta \left( v_{i,j} + v_{j,i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} v_{k,k} \right). \quad (2.26)$$

<sup>3</sup>La notación  $v_{i,j}$  representa la derivada con respecto a  $x_j$ , es decir,

$$v_{i,j} = \frac{dv_i}{dx_j}. \quad (2.25)$$

Note que en la ecuación anterior se despreció la viscosidad de bulto, suponiendo que el fluido es incompresible. Cuando  $\sigma' = 0$  es simplemente la ecuación de Euler [véase (2.5)].

Para encontrar la tasa a la cual el fluido es calentado por la disipación viscosa, considere la tasa de cambio de la energía por unidad de masa del fluido,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + u \right) = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{du}{dt}. \quad (2.27)$$

Aquí  $u$  es la energía interna por unidad de masa, y  $du/dt$  está dado por la primera ley de la termodinámica [véase ecuación (2.21)]. Usando la ecuación (2.24) para  $d\vec{v}/dt$  y la ecuación de continuidad (2.4) para  $d\rho/dt$ , entonces

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + u \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \nabla P + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \sigma') - \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{v} + T \frac{ds}{dt} \quad (2.28)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (P\vec{v} - \sigma' \cdot \vec{v}) + T\dot{s} - \frac{1}{\rho} \sigma'_{ij} v_{i,j}. \quad (2.29)$$

Aquí  $s$  es la entropía (véase apéndice D) por unidad de masa y  $T$  es la temperatura. El término de la divergencia en el lado derecho de la ecuación anterior, es el trabajo realizado en una unidad de masa del fluido; si integramos sobre la masa de un elemento del fluido en un volumen  $V$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (P\vec{v} - \sigma' \cdot \vec{v}) \rho dV &= \int (P\vec{v} - \sigma' \cdot \vec{v}) \cdot d\vec{A} \\ &= \int \vec{v} \cdot \vec{f} dA, \end{aligned}$$

donde

$$\vec{f} = P\vec{n} - \sigma' \cdot \vec{n} \quad (2.30)$$

es la fuerza externa por unidad de area actuando sobre una superficie con vector normal unitario  $\vec{n}$ , y  $A$  es el area de dicha superficie. Como los dos últimos términos de la ecuación (2.29) están asociados con el calor interno, estos están exactamente bien balanceados,

$$\begin{aligned} \rho T \dot{s} &= v_{i,j} \sigma'_{ij}, \\ &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \sigma'_{ij}, \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma'_{ij}}{\eta} + \frac{2}{3} \delta_{ij} v_{k,k} \right) \sigma'_{ij}, \end{aligned}$$

pero como  $\sigma'_{ij}$  es simétrico y su traza es  $\sigma'_{ij}\delta^{ij} = 0$ . Encontramos que

$$\rho T \dot{s} = \frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}{2\eta}. \quad (2.31)$$

Esta ecuación muestra que el incremento de entropía depende del cuadrado del gradiente de la velocidad [ver ecuación (2.26)].

### 2.1.4. Ecuación de estado

El movimiento de un fluido está descrito por las ecuaciones (2.4), (2.8) y (2.23). Nótese que se tienen cuatro variables termodinámicas desconocidas:  $\rho$ ,  $P$ ,  $u$  y  $T$ . Se puede relacionar a las variables termodinámicas bajo la suposición de *equilibrio termodinámico*<sup>4</sup>. Se puede describir el estado de una sustancia en equilibrio termodinámico por medio de dos variables termodinámicas.

La *ecuación de estado* es una relación funcional entre los parámetros termodinámicos<sup>5</sup> para un sistema en equilibrio. Si  $P$ ,  $V$  y  $T$  son los parámetros termodinámicos de un sistema, la ecuación de estado toma la forma

$$f(P, V, T) = 0, \quad (2.32)$$

la cual reduce el número de variables independientes del sistema de tres a dos. La función  $f$  debe ser dada como parte de las especificaciones del sistema. Existen distintas ecuaciones de estado en la literatura para distintos problemas; como por ejemplo:

#### Gas Ideal o Gas Perfecto

El gas perfecto es una importante idealización de un sistema termodinámico. Experimentalmente todos los gases tienen un comportamiento universal cuando estos están diluidos. Los parámetros para un gas idealizado son: presión  $P$ , volumen  $V$ , temperatura  $T$  y el número de moléculas  $N$ . La ecuación de estado está dado por la ley de Boyle

$$\frac{PV}{N} = \text{constante} \quad (\text{para temperatura constante}). \quad (2.33)$$

El valor de esta constante depende de la escala experimental de la temperatura usada.

<sup>4</sup>El equilibrio termodinámico prevalece cuando el estado termodinámico de un sistema no cambia con el tiempo.

<sup>5</sup>Los parámetros termodinámicos son cantidades macroscópicas asociadas con el sistema, como son la presión  $P$ , el volumen  $V$ , la temperatura  $T$  y el campo magnético. Estas son definidas experimentalmente.

La ecuación de estado de un gas ideal define una escala de temperatura, la temperatura del gas ideal  $T$ :

$$PV = NkT \quad (2.34)$$

donde

$$k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K},$$

es la constante de Boltzmann. La escala de temperatura que resulta de las mediciones experimentales es la escala Kelvin (K). Una forma equivalente de la ecuación de estado de un gas ideal es

$$PV = nRT, \quad (2.35)$$

donde  $n$  es el número de moles del gas y  $R$  es la constante universal de los gases,

$$R = 8.31510^7 \text{ erg/ K}.$$

Su valor se sigue de la constante de Boltzmann y del número de Avogadro ( $6.205 \times 10^{23}$  átomos/mol).

### Polítropos

Existen dos procesos en los que se puede usar la ecuación politrópica como ecuación de estado: (1) cuando la transformación de un sistema termodinámico experimenta un proceso adiabático ideal  $dQ = 0$  (es decir, no hay transferencia de calor con sus alrededores), usando la primera ley de la termodinámica [ecuación (2.22)] llegamos a que  $P = K\rho^\gamma$  donde  $\gamma = C_V/C_P$ ,  $K$  es una constante,  $C_V$  es la capacidad calorífica a volumen constante y  $C_P$  es la capacidad calorífica a presión constante (véase el apéndice D). Nótese que para este caso la entropía del sistema permanece constante. (2) Cuando se tiene un gas degenerado de fermiones a  $T \rightarrow 0$ , es posible usar a esta ecuación como una ecuación de estado verdadera, es decir, sin necesidad de suponer que el gas experimente un proceso en específico, por ejemplo, un proceso adiabático. Entonces la ecuación de estado se puede escribir de la misma manera que se mencionó anteriormente

$$P = K\rho^\gamma, \quad (2.36)$$

con  $K$  siendo una función de la entropía y  $\gamma$  el índice adiabático. En el límite de electrones no relativistas,  $\gamma = 5/3$  y en el límite de electrones ultra relativistas,  $\gamma = 4/3$ .

## 2.2. Numérica

### 2.2.1. Hidrodinámica lagrangiana

En contraste con los métodos basados en mallas (eulerianos), el método de “Hidrodinámica de Partículas Suavizadas” (SPH por sus siglas en Inglés) es puramente lagrangiano. En la descripción euleriana, las derivadas son calculadas en un punto fijo del espacio, mientras, que en la descripción lagrangiana éstas siguen el movimiento del fluido. Las derivadas temporales lagrangianas (o substanciales),  $d/dt$ , están relacionadas con las derivadas temporales eulerianas,  $\partial/\partial t$ , por [generalizando la ecuación (2.6)]

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.37)$$

Aplicando el operador antes mencionado a la ecuación de continuidad [ecuación (2.4)],

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \vec{v} \cdot \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{d\rho}{dt} - \vec{v} \cdot \nabla \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0, \end{aligned}$$

pero  $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$ , entonces encontramos que la forma lagrangiana de la ecuación de continuidad es

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.38)$$

La ecuación de conservación de momento para un fluido no viscoso, se lee en la forma lagrangiana [véase la ecuación (2.5)]

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{f}, \quad (2.39)$$

esto es, que fuerzas como la gravedad y el campo magnético están en la cantidad  $\vec{f}$ , y el fluido es acelerado por gradientes de presión  $P$ . La ecuación de la energía se obtiene directamente de la primera ley de la termodinámica (adiabática), Ec. (2.22), junto con Ec. (2.38)

$$\frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{v}. \quad (2.40)$$

El conjunto de ecuaciones (2.38), (2.39) y (2.40) deben ser cerradas por una ecuación de estado que relacione las cantidades como la presión,  $P$ , o la velocidad del sonido,  $c_s$ , a una variable macroscópica como la densidad o temperatura. Puede ser tan simple como un polítopo en ciertos casos.

## 2.2.2. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

### Introducción

SPH fue inventado para simular fenómenos astrofísicos no-axisimétricos (Lucy 1977, Gingold & Monaghan 1977). El método de SPH es un método particular. En contraste con el método de la partícula en celda [The Particle in Cell Method (PIC)], SPH no necesita una malla para calcular las derivadas espaciales. En vez de esto, éstas son encontradas por diferenciación analítica de la ecuación de interpolación (ver más adelante). Las ecuaciones de momento y la energía se convierten en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que son más comprensibles en la mecánica y la termodinámica. Por ejemplo, el gradiente de presión llega a ser una fuerza entre un par de partículas.

### Fundamentos

El método SPH utiliza como principal herramienta el método de interpolación, el cual permite expresar cualquier función en términos de un conjunto de puntos desordenados - las partículas.

La integral de interpolación para cualquier función  $A(\vec{r})$  está definida como

$$A_I(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r}', \quad (2.41)$$

donde  $W$  es el kernel de interpolación, el cual tiene 2 propiedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r}' = 1, \quad (2.42)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{r} - \vec{r}', h) = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.43)$$

Aquí  $h$  representa la longitud de interpolación y además es la variable que da la resolución espacial de los cálculos.

Para un trabajo numérico la integral de interpolación puede ser aproximada con una suma de interpolación

$$A_S(\vec{r}) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W(\vec{r} - \vec{r}_b, h), \quad (2.44)$$

donde el índice  $b$  en la suma denota la etiqueta de la partícula, y la suma es sobre todas las partículas. La partícula  $b$  tiene masa  $m_b$ , posición  $\vec{r}_b$ , densidad  $\rho_b$  y velocidad  $\vec{v}_b$ . El valor de cualquier cantidad  $A$  en  $\vec{r}_b$  es denotado por  $A_b$ .

El punto esencial es que podemos construir una interpolación diferencial de una función



con su valor en esa partícula (puntos de interpolación) usando un kernel que sea diferenciable. Derivadas de esta interpolación pueden ser obtenidas por diferenciación, no hay necesidad de usar diferencias finitas ni una malla. Por ejemplo, si queremos  $\nabla A$  podemos usar

$$\nabla A = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_b, h), \quad (2.45)$$

aunque si queremos tener más precisión habrá que escribir la interpolación de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \nabla(\rho A) &= \rho \nabla A + A \nabla \rho \\ \rho \nabla A &= \nabla(\rho A) - A \nabla \rho. \end{aligned}$$

Como veremos más adelante, en particular para el caso del gradiente de presión, se usará una forma simetrizada.

Gingold & Monaghan (1977) usaron un kernel gaussiano para sus cálculos,

$$W(\vec{r}, h) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\vec{r}^2/h^2}, \quad (2.46)$$

este es usado como ejemplo porque cuando  $h \rightarrow 0$  se comporta como una función delta de Dirac. Si uno quiere encontrar un significado físico de una ecuación de SPH, es siempre mejor suponer que el kernel es una gaussiano. Esta es la primera regla de oro del método.

El error en la aproximación de la ecuación 2.41 por la ecuación 2.44 depende del desorden de las partículas. Es importante notar que aunque la suma es formalmente sobre todas las partículas, sólo una pequeña parte de ellas contribuyen porque  $W$  puede ser escogido de manera que caiga rápidamente para  $|\vec{r} - \vec{r}_b| \geq h$ .

La densidad puede ser aproximada por

$$\rho(\vec{r}) = \sum_b m_b W(\vec{r} - \vec{r}_b, h). \quad (2.47)$$

Otro ejemplo es

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \vec{v}_b \cdot \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_b, h), \quad (2.48)$$

pero, para este caso es mejor recordar la segunda regla de oro del método SPH, que es reescribir las ecuaciones con la densidad ubicada dentro de los operadores. Para el caso anterior podemos escribir

$$\nabla \cdot \vec{v} = [\nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{v} \cdot \nabla \rho] / \rho, \quad (2.49)$$

y entonces podemos ahora encontrar la divergencia de una partícula  $a$  de la siguiente manera

$$\rho_a (\nabla \cdot \vec{v})_a = \sum_b m_b (\vec{v}_b - \vec{v}_a) \cdot \nabla_a W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h). \quad (2.50)$$

Aquí se tomó la derivada con respecto a las coordenadas de la partícula  $a$ .

Recuérdese que la vorticidad se define matemáticamente como el rotacional de la velocidad y la vorticidad es estimada de la misma manera por,

$$\rho_a (\nabla \times \vec{v}_a) = \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \times \nabla_a W_{ab} \quad (2.51)$$

Tomando el kernel gaussiano, encontramos que la contribución de la partícula  $b$  a la vorticidad de la partícula  $a$  es proporcional al momento angular relativo por unidad de masa de las dos partículas. Aquí la notación es  $W_{ab} = W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h)$  y  $\vec{v}_{ab} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$ .

### 2.2.3. Discretización

#### Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad puede ser remplazada también por una interpolación

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab} \quad (2.52)$$

o por

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} \quad (2.53)$$

En algunos problemas de acreción puede ser útil tratar la acreción hacia un cuerpo como la pérdida de masa hacia un pozo [Anzer *et al.* (1987)]. En ese caso la ecuación de continuidad es

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} - f(\vec{r}), \quad (2.54)$$

donde  $f(\vec{r})$  es, por ejemplo, una función continua que es cero fuera de una esfera que rodea al origen. Si suponemos que  $h$  es constante en espacio y tiempo, podemos escribir la ecuación de continuidad como

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} - \sum_b m_b \frac{f_b}{\rho_b} W_{ab} \quad (2.55)$$

Si ahora permitimos que la masa varíe con el tiempo, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_a}{dt} &= \sum_b \frac{d}{dt} (m_b W_{ab}) \\ &= \sum_b \left( W_{ab} \frac{dm_b}{dt} + m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} \right)\end{aligned}$$

Substituyendo el resultado anterior con la ecuación de continuidad para el pozo, encontramos que

$$\frac{dm_b}{dt} = -f_b, \quad (2.56)$$

lo cual muestra que, en SPH, un pozo es interpretado como una región en donde las partículas pierden masa. Este tratamiento del pozo es más suave que simplemente eliminar partículas dentro de una esfera que rodea al hoyo.

### Ecuación de momento

Uno puede ahora discretizar la ecuación del momento o ecuación de Euler (sin fuerzas de cuerpo) y obtener que

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}. \quad (2.57)$$

Esta forma resuelve la ecuación de Euler numéricamente, pero no conserva el momento. Para ver esto, se considera la fuerza que ejerce la partícula  $b$  sobre la  $a$ ,

$$\vec{F}_{ba} = \left( m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_b = -\frac{m_a m_b}{\rho_a \rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}, \quad (2.58)$$

y similarmente la fuerza de  $a$  ejercida sobre  $b$

$$\vec{F}_{ab} = \left( m_b \frac{d\vec{v}_b}{dt} \right)_a = -\frac{m_b m_a}{\rho_b \rho_a} P_a \nabla_b W_{ba} = \frac{m_a m_b}{\rho_a \rho_b} P_a \nabla_a W_{ab}. \quad (2.59)$$

Ya que en general  $P_a \neq P_b$ , entonces la ecuación de momento no está por completo determinada por la tercera ley de Newton (acción igual a reacción) por construcción y entonces el momento no se conserva.<sup>6</sup>

En este caso sería mejor simetrizar el término de gradiente de presión reescribiendo

<sup>6</sup>En la ecuación anterior se usó que

$$\nabla_a W_{ab} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} W_{ab} = \frac{\partial W_{ab}}{\partial r_{ab}} \frac{\partial r_{ab}}{\partial \vec{r}_a} = -\frac{\partial W_{ab}}{\partial r_{ab}} \frac{\partial r_{ab}}{\partial \vec{r}_b} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_b} W_{ab} = -\nabla_b W_{ab}. \quad (2.60)$$

En donde  $\partial r_{ab} / \partial \vec{r}_b = -\partial r_{ba} / \partial \vec{r}_a$ .

$\nabla P/\rho$ ,

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho \quad (2.61)$$

Entonces para la partícula  $a$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\nabla P}{\rho} \right)_a &= \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \frac{P_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \rho_b \nabla_a W_{ab} \\ &= \sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W_{ab} \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de momento para la partícula  $a$  se puede escribir como

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W_{ab} \quad (2.62)$$

aquí  $d/dt$  denota una derivada lagrangiana.

### Ecuación de la conservación de energía

La ecuación para el cambio de la energía térmica por unidad de masa

$$\frac{du}{dt} = - \left( \frac{P}{\rho} \right) \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.63)$$

puede ser escrita para una partícula  $a$  en la forma

$$\frac{du_a}{dt} = \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (2.64)$$

Podemos ver que

$$\nabla \cdot \left( \frac{P}{\rho} \vec{v} \right) = \left( \frac{P}{\rho} \right) \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right), \quad (2.65)$$

y entonces podemos escribir al cambio de energía térmica por unidad de masa como

$$\frac{du}{dt} = - \nabla \cdot \left( \frac{P}{\rho} \vec{v} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right). \quad (2.66)$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{du_a}{dt} = - \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \frac{P_b}{\rho_b} \vec{v}_b \cdot \nabla_a W_{ab} + \vec{v}_a \cdot \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \frac{P_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab},$$

y por lo tanto la ecuación de la energía térmica para una partícula  $a$  se puede escribir como

$$\frac{du_a}{dt} = \sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (2.67)$$

Si combinamos la ecuación (2.64) con la ecuación (2.67), encontramos que

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{2} \sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (2.68)$$

que tiene el mismo factor simétrico que la ecuación (2.62). Es una característica de SPH que los términos del gradiente puedan ser escritos de muchas formas.

### Kernel

En el presente trabajo se usó el kernel propuesto por Monaghan y Lattanzio (1985); cuando el sistema tiene simetría azimutal, tenemos que

$$W(r, h) = \frac{10}{7\pi h^2} \begin{cases} 1 - 3v^2/2 + 3v^3/4; & 0 \leq v \leq 1 \\ (2 - v)^3/4; & 1 < v \leq 2 \\ 0 & v > 2, \end{cases} \quad (2.69)$$

donde  $v = r/h$ , y  $r$  es la coordenada radial.

# Capítulo 3

## Discos de acreción

### 3.1. Importancia de la rotación

La manera en la cual cae un gas hacia un agujero negro puede ocurrir de diversas formas. Existen dos clases de soluciones de gran importancia en problemas de acreción. En la *acreción esférica* o *acreción de Bondi* se considera un agujero negro en reposo sumergido dentro de un gas de extensión infinita y con temperatura  $T$ . La *acreción de disco* ocurre sobre un plano debido a que el gas posee un momento angular inicial considerable.

#### 3.1.1. Acreción de Bondi

Considere un objeto condensado (como una estrella o un agujero negro) que se encuentra inmerso dentro de una nube de gas mucho más grande que el objeto condensado. De esta manera, el objeto “central” puede aproximarse mediante un punto, que por comodidad se pondrá en el origen de las coordenadas. Suponga que la gravedad propia del gas es despreciable en comparación con la gravedad que ejerce el objeto central sobre cualquier partícula de fluido en la nube. Suponiendo que el gas en la nube ha alcanzado un estado estacionario ( $\partial/\partial t = 0$ ) y este mismo obedece una relación politrópica y usando coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , entonces las variables son independientes de  $\theta$  y  $\phi$  por simetría esférica, y las velocidades del gas sólo tienen una componente radial  $v_r = v$ . Esta se toma negativa, ya que se quiere considerar la caída del material;  $v > 0$  correspondería a un viento estelar. Por lo tanto, la ecuación de continuidad (2.4) se reduce a<sup>1</sup>

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0. \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Para la expresión siguiente se usa la divergencia de un vector en coordenadas esféricas.

La ecuación anterior puede ser integrada resultando  $r^2 \rho v = cte$ . Como  $-v\rho$  es el flujo interno del material, la constante anterior debe estar relacionada con la tasa de acreción  $\dot{M}$  (constante); la relación es

$$-4\pi r^2 \rho v = \dot{M}. \quad (3.2)$$

En la ecuación de Euler la única contribución a las fuerzas externas,  $\vec{f}$ , es la gravedad <sup>2</sup>, y ésta sólo tiene la componente radial,

$$f_r = -\frac{GM\rho}{r^2}, \quad (3.3)$$

entonces (2.8) se reescribe como

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (3.4)$$

Como tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, podemos cerrar el sistema con la ecuación politrópica (2.36). Esto nos permite tratar la acreción adiabática ( $\gamma = 5/3$ ) e isotérmica ( $\gamma = 1$ ) con la misma ecuación variando  $\gamma$ . Podemos integrar la ecuación (3.4) con ayuda de las ecuaciones (2.36) y (3.1). Primero, podemos escribir

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}.$$

Donde definimos a  $c_s^2 \equiv dP/d\rho$  como la velocidad del sonido. Utilizando la ecuación (3.1), obtenemos que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{vr^2} \frac{d(vr^2)}{dr}.$$

Entonces la ecuación (3.4) se puede escribir como

$$v \frac{dv}{dr} - \frac{c_s^2}{vr^2} \frac{d(vr^2)}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (3.5)$$

Podemos usar

$$\frac{d(v^2)}{dr} = 2v \frac{dv}{dr},$$

para escribir la ecuación (3.5) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dr} - \frac{c_s^2}{2v^2} \frac{d(v^2)}{dr} - \frac{2c_s^2}{r} + \frac{GM}{r^2} &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2}\right) \frac{d(v^2)}{dr} &= -\frac{GM}{r^2} + \frac{2c_s^2}{r}, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>En este problema se ha usado el potencial newtoniano, que se definirá en el siguiente capítulo.

Entonces podemos escribir la ecuación (3.5) como

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) \frac{d(v^2)}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \left( 1 - \frac{2c_s^2 r}{GM} \right). \quad (3.6)$$

Nótese que  $c_s^2$  es en general una función de  $r$ . El análisis de la ecuación se puede hacer bajo ciertas suposiciones. Primero, a distancias lejos de la estrella el factor  $[1 - (2c_s^2 r/GM)]$  debe ser negativo. Esto quiere decir que para  $r$  grande el lado derecho de la ecuación (3.6) es positivo. Sobre el lado izquierdo, el factor  $d(v^2)/dr$  debe ser negativo, ya que se quiere que el gas lejos de la estrella esté en reposo, y que se acelere conforme se aproxima a la estrella con  $r$  decreciendo. Estos dos requerimientos son compatibles si y sólo si para  $r$  grande el flujo del gas es *subsónico*, es decir,

$$v^2 < c_s^2 \quad \text{para } r \text{ grande.}$$

Conforme el gas se aproxima a la estrella,  $r$  decrece y el factor  $[1 - (2c_s^2 r/GM)]$  debe incrementarse. Este eventualmente llegará a ser cero, a menos que algo caliente al gas suficientemente para que  $c_s^2$  sea incrementado. Pero esto es improbable, ya que el factor alcanza el cero en el radio dado por

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2(r_s)}. \quad (3.7)$$

Este radio es llamado el *punto sónico*, que es el punto al cual el gas cambia de ser subsónico a ser supersónico o viceversa. Entonces por lo mencionado anteriormente para  $r < r_s$ , el flujo debe ser *supersónico* cerca de la estrella, es decir,

$$v^2 > c_s^2 \quad \text{para } r \text{ cercana.} \quad (3.8)$$

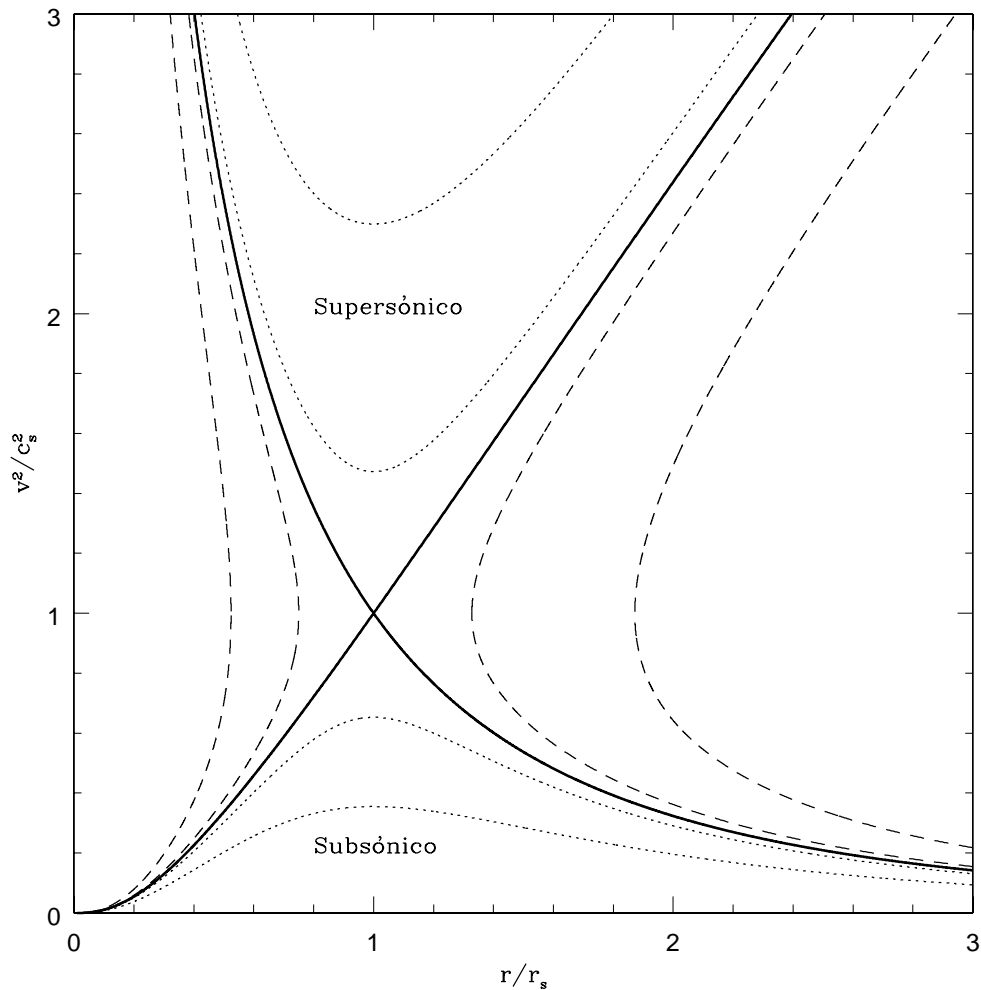
La consecuencia directa es que si  $r = r_s$  el lado izquierdo de la ecuación (3.6) debe desaparecer; esto requiere que

$$v^2 = c_s^2 \quad \text{o} \quad \frac{d(v^2)}{dr} = 0. \quad (3.9)$$

Todas las soluciones para la ecuación (3.6) pueden ser clasificadas por el comportamiento de  $r_s$ . Podemos ver que existen seis familias de soluciones si graficamos  $v^2(r)/c_s^2(r)$  contra  $r/r_s$  (véase la figura 3.1).

La condición de punto sónico nos lleva a relacionar la tasa de acreción  $\dot{M}$  con las condiciones en infinito. Podemos integrar la ecuación (3.4) usando el hecho de que la presión  $P$





**Figura 3.1:** Gráfica para un gas adiabático esféricamente simétrico en un campo gravitacional de una estrella. Para  $v < 0$ , las soluciones son flujos de acreción, mientras que para  $v > 0$  éstas son vientos o “brisas”. En este caso  $\gamma = 4/3$ . Las líneas gruesas son las llamadas soluciones *transónicas*, ya que son una transición entre el flujo sub- y supersónico en  $r_s$ ;  $r_s$  es conocido como el punto sónico para estas soluciones. Las líneas punteadas representan el flujo sub- y supersónico en cualquier punto. Las líneas discontinuas no cubren todo el rango en  $r$  y son bi-valuadas en el sentido en que hay dos soluciones posibles para  $v^2$  en  $r$ . Se excluyen estas por lo antes mencionado, sin embargo podrían representar partes de una solución si existen choques en el gas.

depende sólo de  $\rho$  [véase la ecuación (2.36)],

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} = cte. \quad (3.10)$$

Pero  $c_s^2 = \gamma P/\rho$ , y obtenemos la *integral de Bernoulli*:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = cte. \quad (3.11)$$

Nuestra solución física en infinito, nos dice que  $v^2 \rightarrow 0$  conforme  $r \rightarrow \infty$ , entonces la constante debe ser  $c_s^2(\infty)/(\gamma-1)$ , donde  $c_s(\infty)$  es la velocidad del sonido en el gas lejos de la estrella. El punto sónico nos relaciona  $c_s(\infty)$  con  $c_s(r_s)$ , ya que que en éste  $v^2(r_s) = c_s^2(r_s)$ ,  $GM/r_s = 2c_s^2(r_s)$  y la integral de Bernoulli da

$$c_s^2(r_s) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma-1} - 2 \right) = \frac{c_s^2(\infty)}{\gamma-1} \quad (3.12)$$

ó

$$c_s(r_s) = c_s(\infty) \left( \frac{2}{5-3\gamma} \right)^{1/2}. \quad (3.13)$$

Usando  $c_s^2 = \gamma P/\rho = K\gamma\rho^{\gamma-1}$ , entonces

$$\rho = \frac{c_s^{2/(\gamma-1)}}{(K\gamma)^{1/(\gamma-1)}} \quad (3.14)$$

y ahora aplicando el resultado para la condición en infinito y combinándolo con el punto sónico, encontramos que

$$\rho(r_s) = \rho(\infty) \left[ \frac{c_s(r_s)}{c_s(\infty)} \right]^{2/(\gamma-1)}. \quad (3.15)$$

Ahora se puede obtener  $\dot{M}$  de (3.1)

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v = 4\pi r^2 \rho(r_s) c_s(r_s), \quad (3.16)$$

sustituyendo  $\rho(r_s)$  y  $c_s(r_s)$  por las ecuaciones (3.15) y (3.13), respectivamente, encontramos

$$\dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)} \left[ \frac{2}{5-3\gamma} \right]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)}. \quad (3.17)$$

Valores razonables para el medio interestelar son  $\rho(\infty) = 10^{-24}$  gr cm<sup>-3</sup>,  $c_s(\infty) = 10$  Km s<sup>-1</sup> para una temperatura de  $T(\infty) = 10^4$  K con una masa solar y  $\gamma = 4/3$ . Entonces se puede

expresar la ecuación anterior como

$$\dot{M} = 1.55 \times 10^{11} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left[ \frac{\rho(\infty)}{10^{-24} \text{ gr cm}^{-3}} \right] \left[ \frac{c_s(\infty)}{10 \text{ Km s}^{-1}} \right] \text{ gr s}^{-1}. \quad (3.18)$$

Para un agujero negro de una masa solar encontramos que  $L_{\text{acc}} \simeq 3.5 \times 10^{31} \text{ erg s}^{-1}$ ; en una distancia típica de 1 kpc esto da un flujo demasiado bajo para ser detectado.

Cuando el gas en la nube infinita de gas -la cual proporciona la acreción de Bondi- posee una pequeña rotación, entonces las líneas de corriente que caen hacia el agujero negro resultan no ser líneas radiales. De hecho cuando la nube gira como un cuerpo rígido alrededor de un eje que pasa por el centro del agujero, la acreción se lleva a cabo más o menos en trayectorias parabólicas. El foco de la parábola es el agujero y por lo tanto, las líneas de corriente no terminan en la superficie del agujero como sucede en el caso de la acreción esférica (la única excepción es la línea de corriente que está en el eje de rotación pues cualquier partícula de fluido en esta región carece de momento angular). En el plano ortogonal al eje de rotación y que intersecta al centro del agujero, las líneas provenientes de “arriba” y “abajo” de este plano colisionan con su contraparte simétrica que viene del otro lado del plano. Las mejores simulaciones numéricas de este fenómeno muestran que la componente ortogonal de la velocidad a este plano se anula, después de la interacción mediante la generación de una onda de choque producida por la colisión. En otras palabras, la energía cinética de las partículas en la dirección ortogonal al plano se termaliza (se convierte en energía térmica) y se pierde más tarde mediante radiación. Con esto, las partículas de fluido únicamente tienen componentes de velocidad dentro del plano. Debido a que el momento angular de cada partícula debe conservarse a lo largo de su trayectoria, entonces las partículas de fluido que ahora limitan su movimiento al plano deben girar alrededor del eje de rotación. De esta manera se espera que se produzca un disco de gas que gira alrededor del eje de rotación de la nube.

Las partículas de gas que giran en un plano, alrededor del agujero negro tienden a hacerlo en un disco de gas debido a la simetría del problema. A este objeto gaseoso y masivo que puede ser autogravitante se le denomina *disco de acreción*. El gas gira alrededor del agujero negro de tal forma que comienza a acretarse (caer) hacia el agujero. Esto sucede debido a que una viscosidad genera fricción entre las partículas a diversos radios. De esta manera, se transporta momento angular a las partes más lejanas del disco a expensas de que las partículas sean acretadas hacia el centro del disco, donde se encuentra el agujero negro.

Para el caso en el que la dinámica del gas ha alcanzado un estado estacionario ( $\partial/\partial t = 0$ ) entonces la masa de gas formará una circunferencia o disco. En el presente trabajo se supone que la masa del disco  $M_d$  es mucho menor que la masa del agujero negro  $M_{\text{an}}$  (no autogravitante). Los discos están descritos en coordenadas cilíndricas  $(r, z, \phi)$ , y se supone que los

discos poseen simetría azimutal (las derivadas con respecto a  $\phi$  son iguales a cero).

## 3.2. Discos delgados

Examinemos cuantitativamente la estructura de las regiones internas de un disco de acreción newtoniano que orbita alrededor de un agujero negro de masa  $M$ . Se supone que el gas es depositado en un disco a una tasa constante  $\dot{M}$  y acreta hacia el agujero negro a la misma tasa. Se supone que el plano central del disco se encuentra en el plano ecuatorial del agujero negro, definido como  $z = 0$ . Se supone que el disco de acreción es no auto-gravitante (propuesto que la masa del disco de acreción no sea comparable con la masa del hoyo negro al que está orbitando, es decir,  $M_d/M_{an} \ll 1$ , donde  $M_{an}$  es la masa del agujero negro y  $M_d$  es la masa del disco) y axisimétrico con el eje de rotación coincidiendo con el eje- $z$ . El flujo es adiabático, en particular, no hay enfriamiento radiativo local incluido.

En el movimiento circular kepleriano, cada elemento posee momento angular específico  $l$  (por unidad de masa), donde

$$l = (GMr)^{1/2}.$$

Este resultado nos dice que los gradientes de presión son demasiado pequeños comparados con la fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga. Para  $r$  pequeña, cerca del horizonte de eventos, este valor de  $l$  es menor que el valor de  $l$  en el borde exterior del disco,  $r_D$ . En estado estacionario la tasa a la cual el momento angular debe ser removido del disco por el movimiento del gas debe ser

$$\dot{J} = \dot{M}l(r_D) = \dot{M}(GMr_D)^{1/2}.$$

Definimos al grosor del disco como  $2h$  y  $\Sigma$  como la densidad superficial del disco en  $r$ . Entonces podemos escribir

$$\Sigma \equiv \int_{-h}^h \rho dz.$$

Definamos a  $v_r$  como la magnitud de la velocidad radial interna del gas ( $v_r > 0$ ),  $v_\phi$  la velocidad circular kepleriana y  $\Omega_k$  la velocidad angular kepleriana, entonces

$$v_\phi = r\Omega_k = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}. \quad (3.19)$$

Si se supone que el disco es delgado, esto tiene que satisfacer que

$$h(r) \ll r.$$

De la ecuación (2.30) podemos definir a la fuerza viscosa en la dirección  $\phi$  como la fuerza que es causada por la fricción de los elementos del fluido adyacentes generados por una torca que lleva el momento angular hacia afuera. La normal a la superficie que separa a los elementos del fluido adyacentes en este caso es en la dirección radial, entonces la fuerza está dada por

$$f_\phi = -\sigma'_{r\phi},$$

y para un disco kepleriano tenemos que

$$\sigma'_{r\phi} = \sigma'_{\phi r} = \eta \left( \frac{1}{r} v_{r,\phi} + v_{\phi,r} - \frac{v_\phi}{r} \right). \quad (3.20)$$

Usando la ecuación (3.19), encontramos que

$$\sigma'_{r\phi} = -\frac{3}{2}\eta\Omega_k = -\frac{3}{2}\eta \left( \frac{GM}{r^3} \right)^{1/2}. \quad (3.21)$$

Donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad dinámica ( $\text{gr cm}^{-1} \text{s}^{-1}$ ). Finalmente, se define a  $F$  como el flujo de radiación emitido desde la cara superior (o inferior) del disco.

En estado estacionario, la estructura del disco está determinada por las cuatro ecuaciones de conservación (de masa, momento angular, energía y momento vertical). Además, una ley de viscosidad para  $\eta$  tiene que ser especificada, así como la ley que describe el transporte de radiación del centro hacia la superficie.

### 3.2.1. Estructura radial del disco en estado estacionario

Tomando las suposiciones anteriores, podemos entonces escribir las ecuaciones de conservación para la masa y transporte angular en el disco debido al movimiento radial.

- a) Conservación de la Masa en Reposo. La integración de la ecuación para el flujo de masa,  $\nabla \cdot (\rho v) = 0$ , donde  $\rho = 2\pi r\Sigma$ , nos conduce a

$$\dot{M} = 2\pi r\Sigma v_r = cte. \quad (3.22)$$

La ecuación anterior nos dice que la tasa de masa fluyendo hacia el interior de un cilindro de radio  $r$  es independiente de  $r$ .

- b) Conservación de Momento Angular. Dejemos que  $J^+ = \dot{M}(GMr)^{1/2}$  sea la tasa interna de transporte de momento angular a través del radio  $r$  en el disco debido a gas que entra al flujo. Dejemos que  $J^-$  sea la tasa en el cual el momento angular es consumido por

el agujero. Debido a que el momento angular específico depositado en el agujero no puede exceder el valor de  $l(r_{ms})$  en el borde interno del disco, podemos escribir

$$j^- = \dot{M}(GM r_{ms})^{1/2}. \quad (3.23)$$

Aquí  $r_{ms}$  es la órbita marginalmente estable, que será definida en el siguiente capítulo. La conservación del momento angular requiere que la tasa neta de cambio del momento angular dentro de  $r$  sea igual a la torca ejercida por la tensión viscosa. Entonces,

$$torca = (fuerza \text{ en } \vec{e}_\phi / area) \times (area) \times (r) = j^+ - j^- \quad (3.24)$$

o

$$f_\phi(2\pi r \cdot 2h)r = \dot{M} \left[ (GM r)^{1/2} - (GM r_{ms})^{1/2} \right]. \quad (3.25)$$

Note que la fuerza  $f_\phi$  está determinada únicamente en estado estacionario por  $M$  y  $\dot{M}$ .

c) Conservación de la Energía. La entropía está generada por viscosidad, y de la ecuación (2.31), tenemos

$$\dot{Q} \equiv \rho T \dot{s} = \frac{1}{2} \frac{\sigma'^2}{\eta} \simeq \frac{(\sigma'_{\phi r})^2}{\eta} = -\frac{f_\phi \sigma'_{\phi r}}{\eta}. \quad (3.26)$$

Usando las ecuaciones (3.21), (3.25) y la anterior escrita, tenemos que

$$2h\dot{Q} = \frac{3\dot{M}}{4\pi r^2} \frac{GM}{r} \left[ 1 - \left( \frac{r_{ms}}{r} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.27)$$

Si suponemos que el calor no está almacenado, y además es totalmente radiativo, entonces la ecuación anterior nos da directamente el flujo integrado emitido desde las caras de arriba y abajo del disco en  $r$ :

$$F(r) = \frac{1}{2} \times 2h\dot{Q} = \frac{3\dot{M}}{8\pi r^2} \frac{GM}{r} \left[ 1 - \left( \frac{r_{ms}}{r} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.28)$$

La ecuación anterior nos dice que la distribución radial del flujo emitido es completamente independiente de la ley de viscosidad, la cual no tenemos que especificar todavía.

La luminosidad del disco es

$$L = \int_{r_{ms}}^{\infty} 2F \times 2\pi r dr = \frac{GM\dot{M}}{2r_{ms}} \quad (3.29)$$

Esta luminosidad es exactamente la que uno espera de la conservación de energía. La energía gravitacional newtoniana por gramo en  $r_{ms}$  es  $E_B = GM/2r_{ms}$  y la energía

cinética rotacional por gramo extraída del agujero es  $E_R = 0$ . Entonces la ecuación correcta es  $L = (E_B + E_R)\dot{M}$ .

- d)** Conservación del momento vertical. Como suponemos que no hay movimiento neto del gas en la dirección vertical, la conservación del momento a lo largo de  $\vec{e}_z$  se reduce a la condición de equilibrio hidrostático. Igualando la componente de la fuerza gravitacional del agujero a lo largo de  $\vec{e}_z$  al gradiente de la presión vertical en el disco,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = -\frac{GM}{r^2} \frac{z}{r} \quad (z \ll r). \quad (3.30)$$

Reemplazar las diferenciales en la ecuación anterior por diferencias finitas (que para este caso, tenemos que  $\Delta P \approx P$  y  $\Delta z \approx h$ ) nos conduce a que

$$\frac{1}{\rho} \frac{P}{h} \approx \frac{GM}{r^2} \frac{h}{r}, \quad (3.31)$$

entonces encontramos que

$$h \approx \left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2} \left(\frac{r^3}{GM}\right)^{1/2} \approx \frac{c_s}{\Omega_k}, \quad (3.32)$$

donde  $c_s^2 \approx P/\rho$  es la velocidad del sonido en la mitad del disco. Recuérdese que la velocidad del sonido se define como

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (3.33)$$

A la ecuación (3.32) podemos escribirla como

$$\frac{h}{r} \approx c_s \left(\frac{r}{GM}\right)^{1/2},$$

pero como se supuso que el disco es delgado  $h/r \ll 1$ , esto implica que

$$c_s \ll \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2} = v_\phi,$$

es decir, para un disco delgado requerimos que la velocidad orbital kepleriana sea altamente supersónica. Esto es claramente una condición sobre la temperatura del disco y por lo tanto, en última instancia, sobre el mecanismo de enfriamiento.

- e)** Ley de Viscosidad (discos  $\alpha$ ). Para que el material del disco pueda caer hacia el agujero

negro debe perder momento angular. Dado que cada anillo se encuentra en rotación diferencial debido al potencial central, existe un gradiente radial en la velocidad circular. Esta diferencia de velocidades entre cada anillo contiguo implica que existe fricción entre el fluido de los anillos, por lo cual el material en un anillo ganaría momento angular mientras que el anillo adyacente perdería momento angular: es decir, existe una transferencia de momento angular. A esta fricción interna se le llama *viscosidad*, y existe siempre que haya gradientes de velocidad en un fluido.

La fuente de la viscosidad en el disco de acreción es más parecida a ser una turbulencia a pequeña escala en el flujo de la dinámica del gas. El campo magnético, el cual es arrastrado junto con el plasma, debería contribuir a la viscosidad. Afortunadamente, el flujo integrado y la luminosidad total son independientes de la ley de viscosidad. Desafortunadamente, la estructura del disco y el espectro de radiación emitido dependen de la viscosidad.

Shakura y Sunyaev (1973) construyeron una relación entre la tensión y la viscosidad, ésta se puede escribir con la viscosidad dinámica de la siguiente manera

$$\eta = \alpha c_s h, \quad (3.34)$$

donde  $\alpha$  es el parámetro de viscosidad adimensional, que no puede ser calculado en detalle, pero que satisface

$$\alpha \lesssim 1.$$

Modelos construidos usando la ecuación anterior son llamados discos  $\alpha$ . Varios modelos dejan al valor de  $\alpha$  ser un parámetro libre en la estructura del disco. Con los valores encontrados anteriormente obtenemos,

$$\eta = \alpha \frac{c_s^2}{\Omega_k}. \quad (3.35)$$

En el presente trabajo no se usa ninguna Ley de Viscosidad ya que se supone que el disco no tiene viscosidad, y por lo tanto se hace un análisis dinámico del disco.

**d) Presión.** La presión total del material en el disco es la suma de la presión térmica y la presión de radiación. Para hidrógeno ionizado esto nos lleva a

$$P(\rho, T) \simeq \frac{2\rho kT}{m_p} + P_{\text{rad}}, \quad (3.36)$$



donde, en equilibrio termodinámico local<sup>3</sup>, tenemos que

$$P_{\text{rad}} \simeq \frac{1}{3}aT^4. \quad (3.37)$$

Típicamente, la presión del gas está dominada por la presión de radiación, excepto en regiones externas del disco donde la temperatura es más baja.

- e) Opacidad. Típicamente, en las regiones exteriores del disco la absorción libre-libre domina a la dispersión en el enfriamiento; mientras que en las regiones internas la dispersión domina a la absorción libre-libre en el calentamiento. La opacidad media de Rosseland se puede escribir como

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} \approx \frac{1}{\bar{\kappa}_{\text{dis}}} + \frac{1}{\bar{\kappa}_{\text{abs}}}. \quad (3.38)$$

La absorción en el disco es térmicamente no relativista o transición libre-libre. Ésta puede ser escrita como

$$\bar{\kappa}_{\text{abs}} \simeq \bar{\kappa}_{\text{ll}} \simeq 0.64 \times 10^{23} (\rho [\text{gr cm}^{-3}]) (T [\text{K}])^{-7/2} \text{ cm}^2 \text{ gr}^{-1}.$$

La mayor fuente de dispersión es la de Thompson, cuya opacidad es

$$\bar{\kappa}_{\text{dis}} \simeq \bar{\kappa}_{\text{T}} \simeq 0.4 \text{ cm}^2 \text{ gr}^{-1}.$$

### Solución

La solución algebraica para un disco delgado [descrito con los incisos a) al e)] es algo tediosa, pero ha sido obtenida por Shakura y Sunyaev (1973) y por Novikov y Thorne (1973), siendo esta última una solución relativista. Ellos encontraron que para valores fijos de  $M$  y  $\dot{M}$ , el disco puede convenientemente dividirse en tres regiones distintas, dependiendo del valor de  $r$ . Estas regiones son:

- 1 Una región *externa* para grandes  $r$ , en la cual la presión de radiación está dominada por la presión del gas y la opacidad está controlada por absorción libre - libre.
- 2 Una región *media* para pequeñas  $r$ , en la cual la presión de radiación está dominada por la presión del gas y la opacidad se debe principalmente a la dispersión de electrones.

---

<sup>3</sup>Suponga que todos los niveles de población de los grados de libertad internos y externos que pueden contribuir a la radiación electromagnética están caracterizados por sus valores termodinámicos en una temperatura común  $T$ . En esta situación, la materia se dice que está en *equilibrio termodinámico local* (ETL). La suposición de ETL difiere de ET (equilibrio termodinámico completo) en que el campo de radiación no necesita ser planckiano a la misma  $T$ .

- 3 Una región *interna* para muy pequeñas  $r$ , en donde la presión de radiación domina y la dispersión domina a la absorción en la opacidad, esto es porque la temperatura es mayor en la región interna que en la externa.

La solución del disco dada por Shakura y Sunyaev, suponiendo que no hay presión de radiación (es decir, para las regiones 1 y 2) es

$$\begin{aligned}\Sigma &= 5.2\alpha^{-4/5}\dot{M}_{16}^{7/10}m_1^{1/4}R_{10}^{-3/4}f^{14/5}\text{ gr cm}^{-2}, \\ h &= 1.7 \times 10^8\alpha^{-1/10}\dot{M}_{16}^{3/20}m_1^{-3/8}R_{10}^{9/8}f^{3/5}\text{ cm}, \\ \rho &= 3.1 \times 10^{-8}\alpha^{-7/10}\dot{M}_{16}^{11/20}m_1^{5/8}R_{10}^{-15/8}f^{11/5}\text{ gr cm}^{-3}, \\ T_c &= 1.4 \times 10^4\alpha^{-1/5}\dot{M}_{16}^{3/10}m_1^{1/4}R_{10}^{-3/4}f^{6/5}\text{ K}, \\ \eta &= 1.8 \times 10^{14}\alpha^{4/5}\dot{M}_{16}^{3/10}m_1^{-1/4}R_{10}^{3/4}f^{6/5}\text{ cm}^2\text{ s}^{-1}, \\ v_r &= 2.7 \times 10^4\alpha^{4/5}\dot{M}_{16}^{3/10}m_1^{-1/4}R_{10}^{-1/4}f^{-14/5}\text{ cm s}^{-1},\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}f &= \left[1 - \left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]^{1/4}, \\ R_{10} &= \frac{R}{10^{10}\text{ cm}}, \\ m_1 &= \frac{M}{M_\odot}, \\ \dot{M}_{16} &= \frac{\dot{M}}{10^{16}\text{ gr cm}^{-3}}.\end{aligned}$$

En la solución anterior se supone que el disco es ópticamente grueso, es decir,  $\tau = \rho h \bar{\kappa}$  es  $\gg 1$ , esto quiere decir que el campo de radiación es localmente muy parecido a un cuerpo negro.

Note que el parámetro desconocido  $\alpha$  no introduce en las expresiones antes escritas un alto orden de magnitud. Lo que significa que las cantidades no son particularmente sensibles al valor de  $\alpha$ . También, podemos ver que

$$h/r = 1.7 \times 10^{-2}\alpha^{1/10}\dot{M}_{16}^{3/20}m_1^{3/8}R_{10}^{1/8}f^{3/5}$$

entonces el disco es delgado como se mencionó anteriormente. La velocidad radial es  $v_r \sim 0.3\text{ km s}^{-1}$  que es altamente subsónica ( $c_s \sim 10\text{ km s}^{-1}$ ) mientras que la velocidad circular kepleriana  $v_\phi \sim 1000\text{ km s}^{-1}$  es muy supersónica.

### 3.3. Discos gruesos

En la sección anterior se supuso que el disco era delgado, es decir,  $h/r \ll 1$ . Pero, ¿qué pasa cuando el disco no cumple esta condición? Suponga que el calor es generado a una tasa de  $Q^+(r)$  por la fuerza viscosa, y removido por pérdida radiativa en una tasa  $Q^{\text{rad}}$ . En estado estacionario, el balance total de calor,  $Q^+ = Q^{\text{rad}}$ , es mantenido. El flujo advectivo de calor,  $Q^{\text{adv}}$ , causado por el flujo de acreción de materia, está siempre presente. Sin embargo, este flujo es despreciable para discos delgados, ya que el flujo advectivo es del orden de

$$Q^{\text{adv}} \sim \left(\frac{h}{r}\right)^2 Q^+. \quad (3.39)$$

El enfriamiento advectivo es importante en situaciones en las que  $h/r$  no es pequeño. Para el caso en que  $h(r) \sim r$ , la estructura del disco de acreción cambia significativamente. En este caso el disco es llamado *disco grueso*. El interés actual en la teoría de la estructura, evolución y estabilidad de los discos gruesos es debido a la posibilidad de que éstos podrían explicar las fuentes luminosas en las radio-galaxias. Estos pueden ocurrir durante las etapas tempranas de formación estelar. Los discos gruesos pueden ser formados en sistemas que contienen objetos compactos, como agujeros negros o estrellas de neutrones. Estos pueden ser formados en diferentes escenarios gobernados por fuerzas gravitacionales. Por ejemplo: 1) colapso gravitacional de estrellas masivas rotando, 2) el choque de dos objetos compactos (como estrellas de neutrones o enanas blancas) o 3) el fenómeno de acreción asociado con estrellas binarias de rayos X de baja masa (LMXBs por sus siglas en inglés).

Una vez que el disco está formado, uno se pregunta: ¿Es el disco dinámicamente estable? Para responder a la pregunta anterior, necesitamos considerar la viscosidad, la auto-gravedad, el campo magnético y la distribución de momento angular del material dentro del disco.

Para el presente trabajo no se incluye la viscosidad ni el campo magnético del disco, además se supone que el disco de acreción es no auto-gravitante (proponiendo que la masa del disco de acreción no sea comparable con la masa del hoyo negro al que está orbitando, es decir,  $M_d/M_{an} \ll 1$ , donde  $M_{an}$  es la masa del agujero negro y  $M_d$  es la masa del disco) y axisimétrico con el eje de rotación coincidiendo con el eje- $z$ . El flujo es adiabático, en particular, no hay enfriamiento radiativo local incluido. Se describe el campo gravitacional del hoyo negro en términos de la hidrodinámica clásica (véase el capítulo 2).

Las ecuaciones<sup>4</sup> que describen el problema consisten en:

---

<sup>4</sup>Ecuaciones escritas en coordenadas cilíndricas  $(r, z, \phi)$ .

(i) la ecuación de continuidad [véase (2.4)],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0, \quad (3.40)$$

(ii) las ecuaciones de movimiento [básicamente la ecuación de Euler (2.7) más la fuerza gravitacional del hoyo, la fuerza centrífuga y la viscosidad como fuerzas externas.],

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_r v_z) = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho \frac{l^2}{r^3} + q_r, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_z v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z^2) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} + q_z, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho l) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho l v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho l v_z) = r q_\phi, \quad (3.43)$$

(iii) la ecuación de la energía [sólo tomando la densidad de energía interna; véase la ecuación (2.23)],

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u v_z) = -P \nabla \cdot \vec{v} + Q, \quad (3.44)$$

(iv) y la ecuación de estado [usando la ecuación (2.36) y (2.21)],

$$P = (\gamma - 1) \rho u. \quad (3.45)$$

Aquí  $\vec{q} = (q_r, q_z, q_\phi)$  es la fuerza viscosa<sup>5</sup>,  $Q$  es la función de disipación de calor<sup>6</sup>,  $l$  es el momento angular específico (por unidad de masa) y  $\Phi$  es el potencial gravitacional<sup>7</sup>.

La fuerza viscosa y la función de disipación en coordenadas cilíndricas pueden ser expresadas como

$$q_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma'_{rr}) + \frac{\partial \sigma'_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma'_{\phi\phi}}{r}, \quad (3.46)$$

$$q_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma'_{zr}) + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z}, \quad (3.47)$$

$$q_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma'_{\phi r}) + \frac{\partial \sigma'_{\phi z}}{\partial z} + \frac{\sigma'_{r\phi}}{r}, \quad (3.48)$$

<sup>5</sup>En el presente trabajo no se toma en cuenta esta cantidad, ya que se quiere estudiar los efectos dinámicos del sistema.

<sup>6</sup>Para las simulaciones realizadas, se supone que no hay disipación de calor en el disco, por lo que esta cantidad no es tomada en cuenta.

<sup>7</sup>Veremos más adelante la definición formal de  $\Phi$ .

$$Q = 2\eta \left\{ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{v_\phi^2}{r^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{l}{r^3} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{l}{r} \right) \right]^2 \right\} - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \vec{v})^2$$

Donde

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \vec{v}, & \sigma'_{zz} &= 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \vec{v}, \\ \sigma'_{\phi\phi} &= 2\eta \frac{v_r}{r} - \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \vec{v}, & \sigma'_{rz} &= \sigma'_{zr} = \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \\ \sigma'_{r\phi} &= \sigma'_{\phi r} = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{l}{r^2} \right), & \sigma'_{z\phi} &= \sigma'_{\phi z} = \eta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{l}{r} \right), \end{aligned}$$

son las componentes del tensor de tensiones de la viscosidad. Además,

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

La viscosidad se puede modelar con la ecuación (3.34).

### 3.3.1. Toro estático rotando

#### Equilibrio

En este trabajo se usa un toro estático rotando como condición inicial para los cálculos dependientes del tiempo. Un toro estático está descrito por las ecuaciones (3.40)-(3.45) con las derivadas temporales y todos los términos disipativos iguales a cero. Entonces la ecuación de Euler se puede escribir como

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \Phi + \frac{l^2}{r^3} \nabla r. \quad (3.49)$$

La condición de von Zeipel (véase [6]) establece que para un fluido barotrópico  $P = P(u)$ , tanto la velocidad angular como el momento angular son constantes sobre los cilindros,  $\Omega = \Omega(R)$ ,  $l = l(R)$ , con  $R = r \sin \theta$  siendo la distancia del eje de rotación. La ecuación (3.49) puede ser escrita para la componente radial de la siguiente manera

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} + \frac{l^2}{r^3}.$$

Utilizando la ecuación (2.36) tenemos,

$$\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} + \frac{d\Phi}{dr} - \frac{l^2}{r^3} = 0,$$

Integrando la ecuación desde infinito hasta  $r$ , tenemos

$$\frac{\gamma K}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \Phi - \int_{\infty}^r \frac{l^2(r')}{r'^3} dr' = cte.$$

Note que la constante de integración tiene unidades de energía por unidad de masa. Podemos decir que la constante es el valor inicial del potencial efectivo,  $W_0$ , entonces

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \Phi + \int_r^{\infty} \frac{l^2(r')}{r'^3} dr' = W_0.$$

De modo que

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + W(r,z) = W_0. \quad (3.50)$$

Donde  $W(r,z)$  es el potencial efectivo definido como

$$W(r,z) \equiv \Phi(r,z) + \int_r^{\infty} \frac{l^2(r')}{r'^3} dr'. \quad (3.51)$$

Aquí  $\Phi(r,z)$  es el potencial gravitacional que ejerce una masa puntual (para este trabajo un agujero negro) hacia cada partícula del disco de acreción; esta cantidad se definirá en el siguiente capítulo. La cantidad  $l(r)$  es el momento angular del disco de acreción por unidad de masa, que será definida en el capítulo 5.

### Densidad

La densidad del toro dependiente de  $r$  y  $z$  puede ser escrita con la ayuda de la ecuación (2.36) de la siguiente manera

$$\rho(r,z) = \left[ \left( \frac{1}{K} \right) (W_0 - W(r,z)) \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \right]^{1/(\gamma-1)}. \quad (3.52)$$

Para el presente trabajo, se define a la cantidad  $W_0$  en el plano ecuatorial como

$$W_0 \equiv fW(r_0, 0). \quad (3.53)$$

Aquí,  $r_0$  es el centro de disco (se fijará más adelante) y  $f$  es el factor de llenado para el potencial efectivo. La cantidad  $f$  toma valores entre 0 y 1. Para  $f = 1$  hay una cantidad infinitesimal de gas en el fondo del pozo en  $r_0$ , y conforme  $f$  se hace menor el pozo se va llenando cada vez más.

# Capítulo 4

## Potenciales gravitacionales

### 4.1. Potencial de Newton

La ley de la gravitación de Newton dice que la fuerza central  $F_R$  (fuerza atractiva)<sup>1</sup> es directamente proporcional al producto de las dos masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas:

$$F_R = -G \frac{Mm}{R^2}. \quad (4.1)$$

La letra  $G$  representa la *constante de la gravitación*, una de las constantes naturales de la naturaleza. El potencial gravitacional se puede definir como

$$F_R \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (4.2)$$

Entonces podemos encontrar el potencial gravitacional integrando la ecuación anterior<sup>2</sup>. Por lo tanto podemos escribir al potencial gravitacional de la manera siguiente (por unidad de masa<sup>3</sup>)

$$\Phi(r, z) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (4.4)$$

---

<sup>1</sup>Aquí  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$  es la coordenada radial en coordenadas esféricas. En esta sección se usan las coordenadas cilíndricas para describir el movimiento de una partícula de prueba alrededor de la masa central.

<sup>2</sup>Para integrar la ecuación, usualmente se escribe

$$\Phi = -\int_R^\infty F_{R'} dR'. \quad (4.3)$$

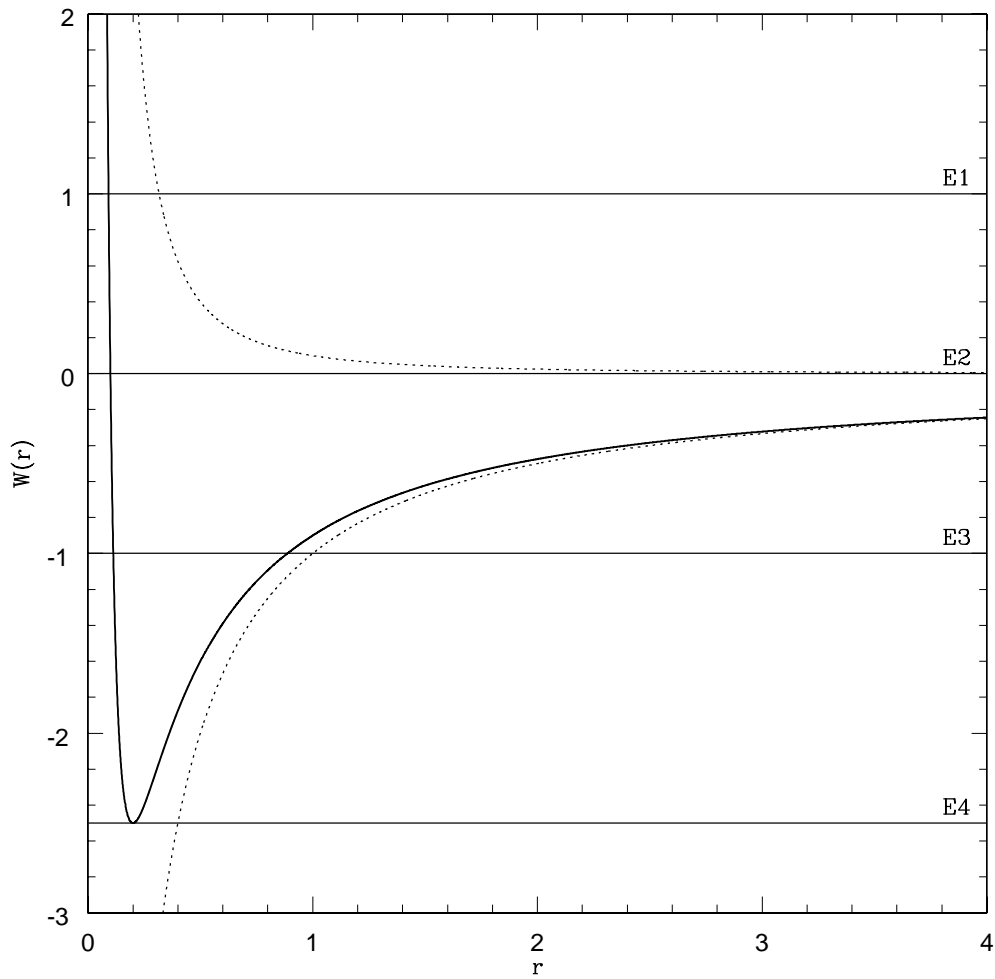
ya que es la fuerza que siente una partícula de prueba cayendo desde infinito hasta la masa central.

<sup>3</sup>Se supone que la masa es infinitamente pequeña comparada con la masa del agujero negro.



Con la ecuación (3.51) obtenemos el potencial efectivo del disco de acreción:

$$W(r, z) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \int_r^\infty \frac{l^2(r')}{r'^3} dr'. \quad (4.5)$$



**Figura 4.1:** La curva punteada superior corresponde al potencial repulsivo centrífugo, mientras que la inferior corresponde al potencial gravitacional. La curva sólida es la suma de éstas.

Si el momento angular permanece constante, obtenemos que

$$W(r, z) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{l^2}{2r^2}. \quad (4.6)$$

El potencial centrífugo (segundo término del lado derecho de la ecuación anterior, que será de-

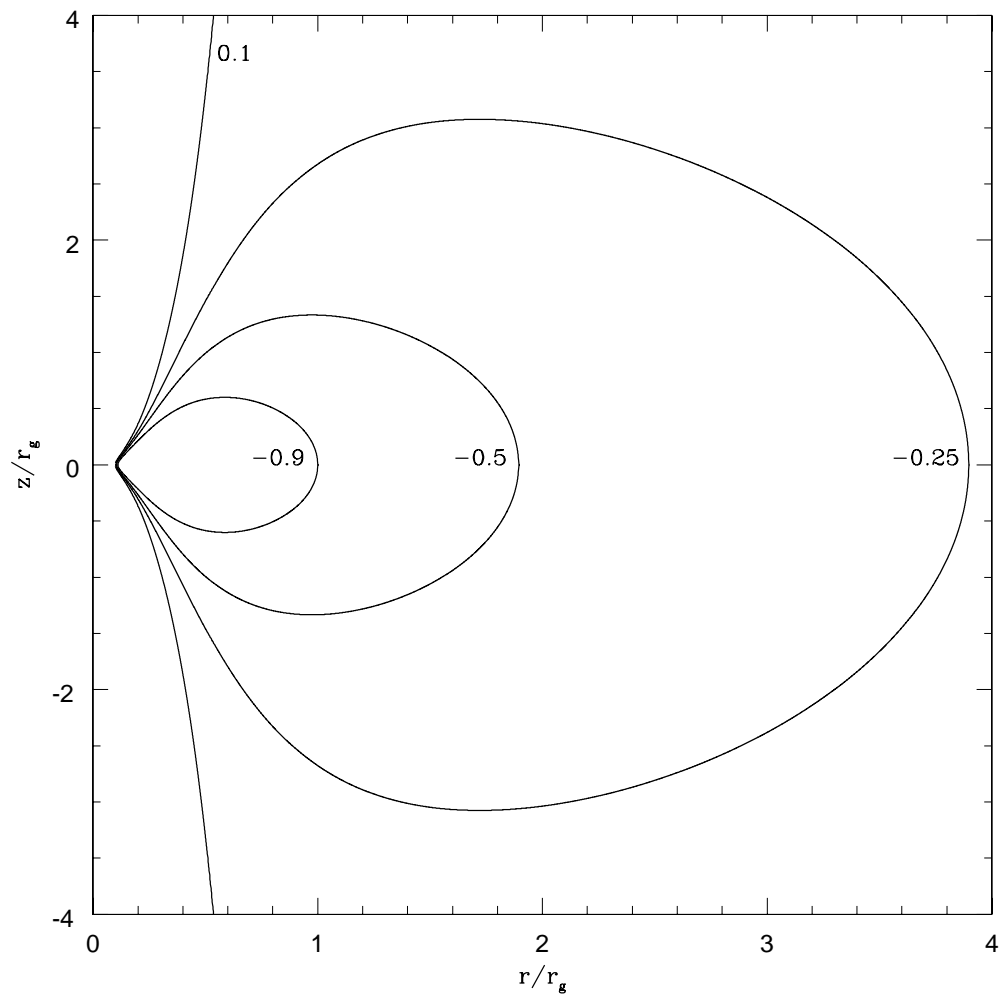
finido más adelante mediante la definición del momento angular específico) es siempre repulsivo mientras que el potencial gravitacional es siempre atractivo. Una gráfica del potencial efectivo (en el plano ecuatorial) se puede ver en la figura 4.1. Para  $l \neq 0$ , el potencial efectivo tiene el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned} W(r) &\rightarrow \infty \\ r &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(r) &\rightarrow 0 \\ r &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

la curva sólo tiene un mínimo en el punto  $r_0 = l^2/GM$  y el valor mínimo del potencial efectivo es  $W_{\min} = -G^2M^2/(2l^2)$ . La parte positiva del potencial efectivo se conoce como barrera centrífuga, esta barrera no existirá para  $l = 0$ . Analicemos las cuatro posibles energías típicas:  $E1$ ,  $E2$ ,  $E3$  y  $E4$ , que representan diversas condiciones iniciales y movimientos cualitativamente diferentes.

- i**  $W = E1$ . Cuando las condiciones iniciales sean tales que la constante de energía sea  $E1 > 0$ , la partícula ficticia de masa  $m$  no puede acercarse al centro de fuerzas más allá de  $r = r_1$ ; a  $r_1$  se le llama el punto de retorno. Si  $r < r_1$  la velocidad radial sería imaginaria (físicamente no aceptable), en  $r = r_1$  la velocidad radial es nula  $\dot{r} = 0$ . La partícula puede alejarse del centro de fuerza sin límite, produciendo un movimiento no acotado o no ligado, la partícula no es atrapada por el campo gravitacional, la órbita es abierta y la partícula no regresa hacia el centro de fuerzas. En este caso la partícula sigue una órbita hiperbólica.
- ii**  $W = E2 = 0$ . En este caso la partícula llega desde infinito con energía cinética nula. La órbita es parabólica.
- iii**  $W = E3 < 0$ . En esta condición el sistema está ligado, la posición relativa de  $r$  está acotada por  $r_3 \leq r \leq r_4$ , los puntos  $r_3$  y  $r_4$  se llaman puntos apsidales. La órbita es cerrada, es una elipse y los puntos apsidales  $r_3$  y  $r_4$  se convierten en el perigeo (perihelio, es decir, más cerca del Sol) y apogeo (afelio, es decir, más lejos del Sol), respectivamente, para el caso de la órbita terrestre.
- iv**  $W = E4 = W_{\min}$ . En este caso sólo existe la posibilidad de  $r_0 = cte$ , es decir, el movimiento es circular  $\dot{r} = 0$  y la velocidad angular  $\dot{\phi} = l/r_0^2 = cte$ , es un movimiento circular



**Figura 4.2:** Equipotenciales para un momento angular constante usando el potencial de Newton.

uniforme, por lo tanto el apogeo y el perigeo coinciden. En el mínimo la derivada del potencial efectivo es nula, y entonces,

$$\begin{aligned} F(r) &= -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{l^2}{r^3} = -r\dot{\phi}^2 = -r\Omega^2, \\ -\frac{GM}{r^2} &= -r\Omega^2, \end{aligned}$$

lo cual significa que la fuerza aplicada iguala a la fuerza centrípeta, ésta es la condición para un movimiento circular uniforme.

La sección meridional de las superficies equipotenciales para momento angular constante son mostradas en la fig. 4.2. La condición de un toro estático tiene que coincidir con alguna de las superficies equipotenciales.

#### 4.1.1. Momento angular kepleriano

La distribución de momento angular kepleriano  $l = l_K(r)$  en órbita circular cumple estrictamente la siguiente condición,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_l = 0. \quad (4.7)$$

Entonces utilizando la ecuación (4.5) en el plano ecuatorial, encontramos que

$$\frac{GM}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} = 0$$

Entonces el momento angular kepleriano se puede escribir como

$$l_K(r) = \sqrt{GMr}. \quad (4.8)$$

## 4.2. Métrica de Schwarzschild

Karl Schwarzschild derivó en 1916 la solución general relativista de las ecuaciones de Einstein (véase apéndice B) para un campo gravitacional rodeando a una masa esférica, eléctricamente neutra y sin rotación. Esta solución describe a un agujero negro como masa esférica y a esta solución se le llama agujero negro de Schwarzschild, en honor a Karl Schwarzschild. La solución de Schwarzschild es la siguiente,

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (4.9)$$

donde

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2, \\ g_{rr} &= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \\ g_{\theta\theta} &= r^2, \\ g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Aquí  $ds$  es la distancia entre dos eventos cercanos en el espacio tiempo (véase apéndice B), y  $r_g$  es el radio gravitacional definido como

$$r_g \equiv \frac{2GM}{c^2}.$$

Un observador estático en este campo gravitacional es quien está fijo en  $r, \theta, \phi$ . El lapso de tiempo propio para un observador está dado por

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2,$$

ó

$$d\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} dt. \quad (4.10)$$

Esto simplemente muestra el tiempo de dilatación gravitacional [corrimiento al rojo (redshift)] para un reloj en el campo gravitacional comparado con un reloj en infinito (es decir,  $d\tau < dt$ ). Note que la ecuación (4.9) tiene una discontinuidad cuando  $r = r_g$ , que corresponde al *horizonte de eventos* ( $\equiv$  Superficie el hoyo negro  $\equiv$  Radio de Schwarzschild). Otro nombre para esto es *límite estático*, porque observadores estáticos no pueden existir dentro de  $r \leq r_g$ ; ellos están dentro del horizonte de eventos.

Un observador estático mide con su marco ortonormal local (véase apéndice B). Usando tildes para denotar cantidades en el marco ortonormal local, tenemos de la ecuación 4.9,

$$\vec{e}_{\hat{t}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \vec{e}_t, \quad (4.11)$$

$$\vec{e}_{\hat{r}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \vec{e}_r, \quad (4.12)$$

$$\vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta, \quad (4.13)$$

$$\vec{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi. \quad (4.14)$$

Es claro que en un marco ortonormal, tenemos

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} g_{tt} = -1, \text{ etc...} \quad (4.15)$$

### 4.2.1. Movimiento de una partícula de prueba

Para seguir el movimiento de una partícula de prueba moviéndose libremente en una geometría de Schwarzschild, ésta seguiría la trayectoria de la geodésica, que se deriva del lagrangiano [véase apéndice C, ecuación (C.23)]

$$2L = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2, \quad (4.16)$$

donde  $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda = p^\alpha$  es el cuadri-momento. Aquí  $\lambda = \tau/m$  para una partícula de masa  $m$ . Las ecuaciones de Euler - Lagrange son

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0, \quad x^\alpha = (t, r, \theta, \phi). \quad (4.17)$$

Para  $t$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , tenemos que

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t} \right] = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2, \quad (4.19)$$

$$\frac{d}{d\lambda} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (4.20)$$

Alternativamente para usar directamente la ecuación para  $r$ , es más fácil usar el hecho que

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 c^2 \quad (4.21)$$

En otras palabras,  $L = -m^2 c^2/2$ . Si restringimos el problema al plano ecuatorial ( $\theta = \pi/2$ ), tenemos que [usando la ecuación (C.24)]

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t} = cte = E = -p_t c^2, \quad (4.22)$$

$$r^2 \dot{\phi} = cte = l = p_\phi. \quad (4.23)$$

Estas son constantes de movimiento para  $t$  y  $\phi$ . Para entender su significado físico, basta con poner a un observador estático en el plano ecuatorial. La energía medida localmente es la componente temporal del cuadri-momento medido en el marco ortonormal local del

observador, que es la proyección del quadri-momento a lo largo del vector temporal:

$$E_{local} \equiv p^{\hat{t}}c^2 = -p_{\hat{t}}c^2 = -c^2 \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{t}} = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_t = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} p_t$$

Entonces

$$E = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} E_{local}. \quad (4.24)$$

Para cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $E_{local} \rightarrow E$ , entonces  $E$  es llamada la “energía en infinito”. Está relacionada con  $E_{local}$  por un factor de corrimiento al rojo. Si  $E$  permanece constante a lo largo de la trayectoria de un fotón entonces para un emisor estático en  $r = r_{em}$  tenemos que

$$h\nu_{em} = E \left(1 - \frac{r_g}{r_{em}}\right)^{-1/2}, \quad (4.25)$$

y para un receptor en  $r \rightarrow \infty$ , tenemos

$$h\nu_{re} = E. \quad (4.26)$$

Entonces

$$\frac{\nu_{em}}{\nu_{re}} = \left(1 - \frac{r_g}{r_{em}}\right)^{-1/2}. \quad (4.27)$$

La interpretación física de  $l$  sigue de la consideración del valor medido localmente de  $\nu^{\hat{\phi}}$ . La componente de la velocidad tangencial es

$$\nu^{\hat{\phi}} = \frac{p^{\hat{\phi}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{p_{\hat{\phi}}}{p_{\hat{t}}} = \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}}}{E_{local}/c^2} = \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\phi}/r}{E_{local}/c^2} = \frac{p_{\phi}/r}{E_{local}/c^2} = \frac{l/r}{E_{local}/c^2}.$$

Por lo tanto,

$$l = \frac{E_{local}}{c^2} r \nu^{\hat{\phi}}. \quad (4.28)$$

Comparando con la expresión newtoniana  $mr\nu^{\hat{\phi}}$ , vemos que  $l$  es el momento angular conservado de la partícula.

Para encontrar la ecuación de movimiento en la dirección radial necesitamos expandir la ecuación (4.21) de la siguiente manera (en el plano ecuatorial, es decir,  $\theta = \pi/2$ ):

$$g_{tt}(p^t)^2 + g_{\phi\phi}(p^{\phi})^2 + g_{rr}(p^r)^2 = -m^2c^2.$$

Si ahora sustituimos los valores correspondientes para  $g_{\mu\nu}$  y para  $p^\nu = \dot{x}^\nu$ , tenemos

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = -m^2 c^2.$$

De las definiciones dadas para la energía y el momento angular como constantes de movimiento [véase las ecuaciones (4.22) y (4.23)] tenemos que

$$\begin{aligned} -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 c^{-4} E^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} + r^2 l^2 r^{-4} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 &= -m^2 c^2, \\ -\frac{E^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} + \frac{l^2}{r^2} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 &= -m^2 c^2. \end{aligned}$$

Ahora podemos despejar a la cantidad  $\dot{r}$  de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 &= -m^2 c^2 + \frac{E^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} - \frac{l^2}{r^2}, \\ \dot{r}^2 &= -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) m^2 c^2 + \frac{E^2}{c^2} - \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \\ \frac{\dot{r}^2}{m^2 c^2} &= -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + \frac{\hat{E}^2}{c^4} - \frac{\hat{l}^2}{r^2 c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \\ \frac{\dot{r}^2}{m^2 c^2} &= \frac{\hat{E}^2}{c^4} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{\hat{l}^2}{r^2 c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \\ \frac{\dot{r}^2}{m^2 c^2} &= \frac{\hat{E}^2}{c^4} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{\hat{l}^2}{r^2 c^2}\right). \end{aligned}$$

Entonces ahora podemos escribir las ecuaciones de movimiento para una partícula de prueba en una métrica de Schwarzschild (partícula con masa)

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\hat{E}^2}{c^2} - c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{\hat{l}^2}{r^2 c^2}\right), \quad (4.29)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\hat{E}}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \quad (4.30)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\hat{l}}{r^2}. \quad (4.31)$$

Donde  $\hat{E}$  y  $\hat{l}$  fueron definidos como la energía y momento angular por masa, respectivamente. A partir de estas ecuaciones podemos encontrar relaciones muy interesantes, como por ejemplo, para órbitas fuera del horizonte de eventos. El valor medido localmente de  $v^{\hat{r}}$ ,



la componente radial de la velocidad, está dado por

$$v^{\hat{r}} = \frac{p^{\hat{r}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{p_{\hat{r}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{r}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r}{E_{local}/c^2} = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} p_r}{E_{local}/c^2} = \frac{c^2 p^r}{E}. \quad (4.32)$$

Recuérdese que  $p^r = mdr/d\tau$ , entonces para un observador en  $r$

$$v^{\hat{r}} = \frac{c^2 dr}{\hat{E} d\tau} = \frac{c^2}{\hat{E}} \left[ \frac{\hat{E}^2}{c^2} - c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{\hat{l}^2}{r^2 c^2}\right) \right]^{1/2} \quad (4.33)$$

$$= \left[ c^2 - \frac{c^6}{\hat{E}^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{\hat{l}^2}{r^2 c^2}\right) \right]^{1/2}. \quad (4.34)$$

Para el caso de una partícula en caída libre con energía  $E = mc^2$ , tenemos que

$$v^{\hat{r}} = \left[ c^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right]^{1/2} = \left( \frac{c^2 r_g}{r} \right)^{1/2} = \left( \frac{2GM}{r} \right)^{1/2}. \quad (4.35)$$

Esto es precisamente la velocidad newtoniana para un observador local en  $r$  que cae libremente del reposo. Para un observador en  $r$  tenemos que la velocidad tangencial se puede escribir como,

$$v^{\hat{\phi}} = \frac{l/r}{E_{local}/c^2} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \frac{c^2 \hat{l}}{\hat{E} r}. \quad (4.36)$$

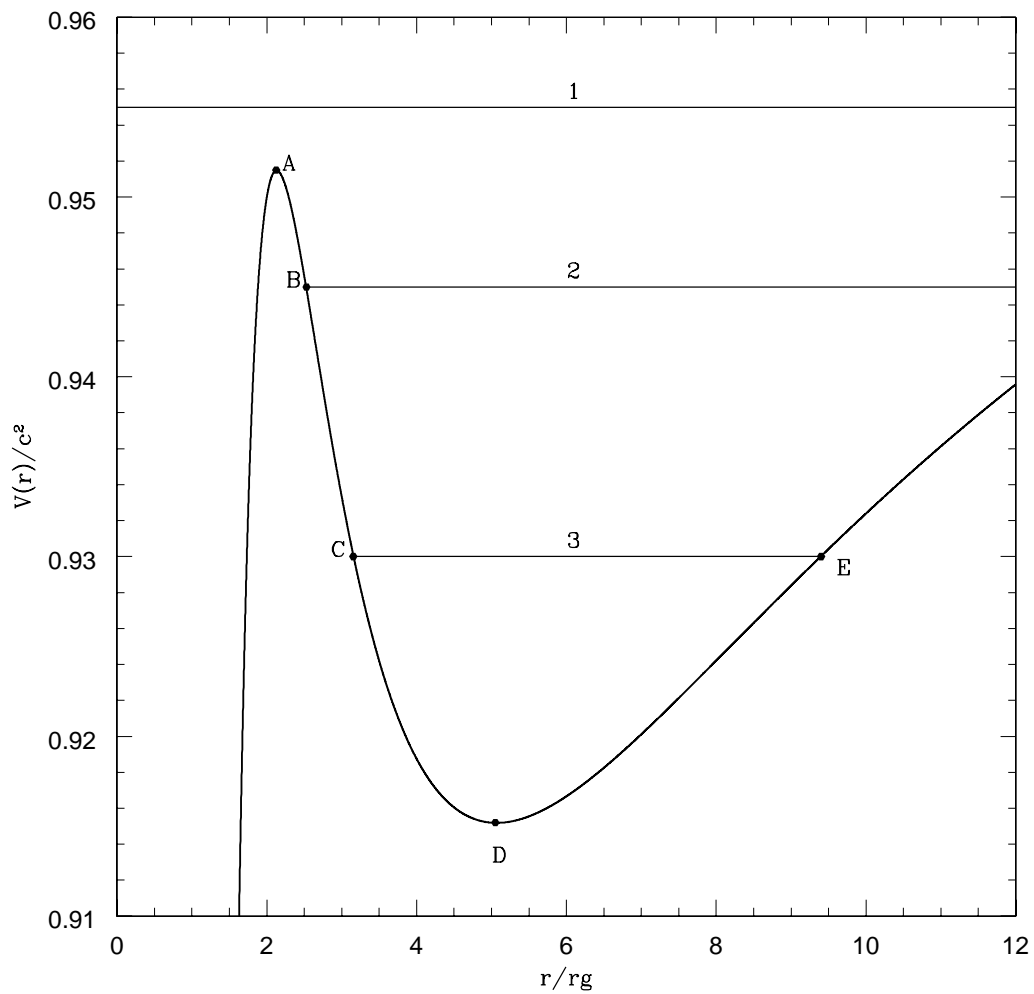
Las ecuaciones de movimiento escritas anteriormente pueden ser integradas [véase las ecuaciones (4.29), (4.30) y (4.31)] y esto nos llevaría a integrales elípticas, que no son particularmente informativas, pero podemos obtener una imagen de las órbitas considerando un “potencial efectivo”,

$$V(r) \equiv c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{\hat{l}^2}{r^2 c^2}\right). \quad (4.37)$$

Por lo tanto la ecuación (4.29) toma la forma siguiente,

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\hat{E}^2}{c^2} - V(r). \quad (4.38)$$

Para un valor fijo de  $\hat{l}$ ,  $V$  es representado esquemáticamente en la figura 4.3. En la gráfica se muestran tres líneas horizontales correspondientes a diferentes valores de  $\hat{E}^2$ . La línea marcada con 1 es una órbita de captura: la partícula es acretada por el agujero negro. La línea marcada con 2 corresponde a una partícula llegando de infinito con energía  $\hat{E}^2$ . Cuando la partícula se aproxima al valor de  $r$  en el punto  $B$ ,  $dr/d\tau$  cambia de signo y regresa a infinito.



**Figura 4.3:** Gráfica del perfil del potencial efectivo para una partícula con masa en reposo orbitando un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M$ . Las tres líneas horizontales son marcadas por diferentes valores de  $\hat{E}^2$  correspondientes a órbitas (1) de captura, (2) no ligadas y (3) ligadas. Véase el texto para mayor información.

La línea marcada con 3, corresponde a la órbita ligada, con dos puntos de retorno  $C$  y  $E$ . El punto  $D$  corresponde a la órbita circular estable. El punto  $A$  es una órbita circular inestable; una partícula ubicada en ese punto caerá al agujero negro si ésta es perturbada hacia el interior del agujero. Si es perturbada hacia el exterior, ésta se va a infinito. Las órbitas 2 y 3 existen para el caso newtoniano para movimiento en un campo gravitacional; las órbitas de captura son únicas para la relatividad general.

### Órbita circular

La condición para órbita circular es que

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = 0. \quad (4.40)$$

Derivando la ecuación (4.37) con respecto a  $r$  obtenemos que

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(-\frac{2\hat{l}^2}{r^3 c^2}\right) + \left(1 + \frac{\hat{l}^2}{r^2 c^2}\right) \left(\frac{r_g}{r^2}\right) = 0, \quad (4.41)$$

$$-\frac{2\hat{l}^2}{r^3 c^2} + \frac{2r_g \hat{l}^2}{r^4 c^2} + \frac{r_g}{r^2} + \frac{r_g \hat{l}^2}{r^4 c^2} = 0, \quad (4.42)$$

$$r_g c^2 r^2 - 2\hat{l}^2 r + 3r_g \hat{l}^2 = 0. \quad (4.43)$$

Resolviendo la ecuación anterior para  $r$ , obtenemos

$$r = \frac{2\hat{l}^2 \pm \sqrt{4\hat{l}^4 - 4(3r_g^2 c^2 \hat{l}^2)}}{2r_g c^2}. \quad (4.44)$$

Nótese que para,

$$4\hat{l}^4 - 4(3r_g^2 c^2 \hat{l}^2) < 0, \quad (4.45)$$

$$\hat{l} < r_g c \sqrt{3}, \quad (4.46)$$

no existe ni máximo ni mínimo para  $V(r)$ . Ahora si  $\hat{l} = 2r_g c$ , tenemos que  $r = 2r_g$  y esto nos da el máximo de  $V(r)_{max} = c^2$ . En este caso  $r = r_{mb} = 2r_g$  es la órbita marginalmente ligada. Despejando  $\hat{l}$  de la ecuación (4.43) y además sustituyendo ese resultado en la ecuación (4.40),

obtenemos que para órbita circular

$$\hat{l}^2 = \frac{r_g c^2 r^2}{2r - 3r_g}, \quad (4.47)$$

$$\hat{E}^2 = c^4 \frac{2(r - r_g)^2}{r(2r - 3r_g)}. \quad (4.48)$$

De esto se sigue que las órbitas circulares no existen por debajo de  $r = (3/2)r_g$ <sup>4</sup>. Pero no todas las órbitas ligadas son estables. Para encontrar la estabilidad de las órbitas derivemos nuevamente el potencial efectivo e igualemos el resultado a cero (esto con el objetivo de ver si existe puntos de inflexión que sean últimas órbitas estables):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{6\hat{l}^2}{r^4} - \frac{12\hat{l}^2 r_g}{r^5} - \frac{2r_g c^2}{r^3} = 0, \\ 3\hat{l}^2 r - 6\hat{l}^2 r_g - r_g c^2 r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si ahora sustituimos el valor de  $\hat{l}$  dado por la ecuación (4.47), obtenemos

$$\begin{aligned} 3 \frac{r_g c^2 r^2}{2r - 3r_g} r - 6 \frac{r_g c^2 r^2}{2r - 3r_g} r_g - r_g c^2 r^2 &= 0, \\ 3r_g c^2 r^3 - 6r_g^2 r^2 c^2 - 2r_g c^2 r^3 + 3r_g^2 c^2 r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación anterior, llegamos a que

$$r = 3r_g. \quad (4.49)$$

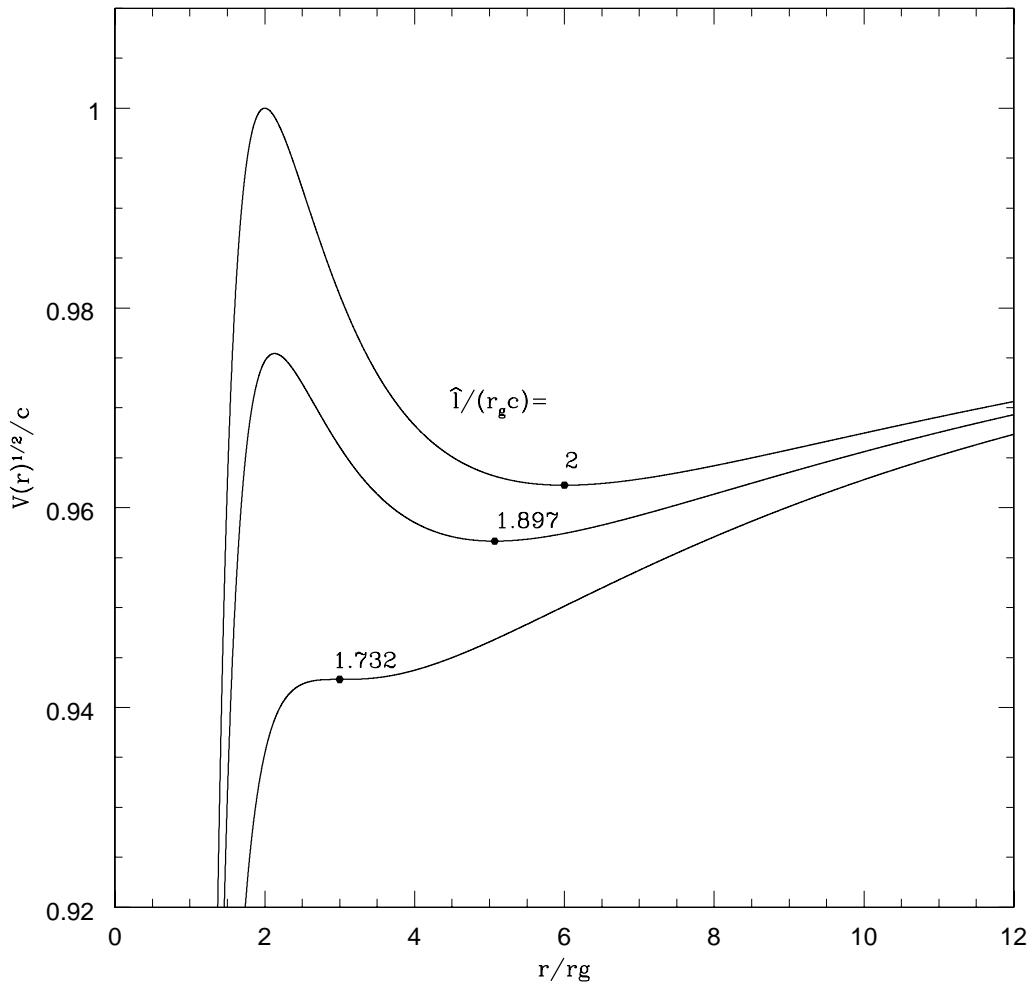
Lo que implica que la última órbita estable está en  $r = 3r_g = r_{ms}$ . Entonces para  $r > 3r_g$  las órbitas son estables y para  $r < 3r_g$  las órbitas son inestables. En la figura 4.4 se muestra el perfil del potencial efectivo para distintos momentos angulares para partículas con masa.

### 4.3. Métrica de Kerr

La métrica estacionaria más general para hoyos negros, con parámetros  $M$  (masa de agujero negro),  $J$  (momento angular del agujero negro) y  $Q$  (carga eléctrica del agujero negro), es llamada la métrica de Kerr-Newmann<sup>5</sup>. Casos especiales son (1) métrica de Kerr ( $Q = 0$ ), (2) métrica de Reissner-Nordstrom ( $J = 0$ ) y (3) la métrica de Schwarzschild ( $J = 0$  y  $Q = 0$ ).

<sup>4</sup>La cantidad  $r = (3/2)r_g$  es el límite para la órbita de un fotón ( $\hat{E} = E/m \rightarrow \infty$ ), dicha órbita será definida más adelante.

<sup>5</sup>Véase por ejemplo, Misner, Thorne y Wheeler, 1973. [45]



**Figura 4.4:** Gráfica del potencial efectivo para partículas con masa con diferentes valores para el momento angular específico  $\hat{l}$  orbitando a un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M$ . Los puntos en la gráfica están ubicados en el fondo del potencial, es decir, son los radios de las órbitas circulares estables. Vemos de la gráfica que sólo existen órbitas para  $\hat{l}/(r_g c) > 1.732 = \sqrt{3}$ .

Es usualmente verdadero que un objeto astrofísico cargado es rápidamente neutralizado por el plasma de sus alrededores. Tendremos que simplificar nuestra discusión, suponemos que los hoyos negros cargados no son probablemente importantes astrofísicamente. Todos los objetos astrofísicos rotan, y entonces esperamos que los hoyos negros formados por colapso gravitacional estén rotando en general.

Esta solución de las ecuaciones de Einstein, descubierta por Kerr in 1963 (véase Kerr *et al.*), no fue primero reconocida como solución de un hoyo negro. Las propiedades de la métrica son más transparentes en las coordenadas de Boyer-Lindquist (1967), donde tenemos

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2, \quad (4.50)$$

donde

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{r_g r}{\Sigma}\right) c^2, \quad (4.51)$$

$$2g_{t\phi} = -\frac{2ar_g r \sin^2 \theta}{\Sigma}, \quad (4.52)$$

$$g_{\phi\phi} = \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{r_g a^2 r \sin^2 \theta}{c^2 \Sigma}\right) \sin^2 \theta, \quad (4.53)$$

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad (4.54)$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma, \quad (4.55)$$

$$\Sigma = r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta, \quad (4.56)$$

$$a = \frac{J}{M}, \quad (4.57)$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + \frac{a^2}{c^2}. \quad (4.58)$$

El hoyo negro está rotando en la dirección de  $\phi$ . La métrica es estacionaria (independiente de  $t$ ) y axisimétrica en el eje polar (independiente de  $\phi$ ). Note que  $a$ , el momento angular por unidad de masa, es medido en  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . El horizonte está localizado en la raíz más grande de la ecuación  $\Delta = 0$ ,

$$r^2 - r_g r + \frac{a^2}{c^2} = 0, \quad (4.59)$$

$$r_+ = \frac{r_g + \sqrt{(r_g)^2 - \frac{4a^2}{c^2}}}{2}, \quad (4.60)$$

$$= \frac{r_g}{2} + \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - \frac{a^2}{c^2}}. \quad (4.61)$$

Nótese que  $a$  debe ser menor que  $r_g c/2$  para que exista un hoyo negro. Si  $a$  excede a  $r_g c/2$ , uno tendría un campo gravitacional con singularidad “desnuda”.

Recordando que

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (4.62)$$

y si fijamos  $\theta = \pi/2$  (plano ecuatorial), obtenemos que el lagrangiano es

$$2L = g_{tt} \dot{t}^2 + g_{\phi\phi} \dot{\phi}^2 + 2g_{\phi t} \dot{\phi} \dot{t} + g_{rr} \dot{r}^2, \quad (4.63)$$

que se puede escribir como

$$2L = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^2 r_g}{c^2 r}\right) \dot{\phi}^2 - \frac{2r_g a}{r} \dot{\phi} \dot{t} + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2, \quad (4.64)$$

donde  $\dot{t} = dt/d\lambda$  y  $\lambda = \tau/m$ , además que  $p^\mu = m\dot{x}^\mu$ . Podemos definir al momento conjugado canónico (véase apéndice C) a la coordenada  $x^\mu$  por

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}. \quad (4.65)$$

Tenemos por lo tanto dos cantidades que están conservadas:

$$E = -p_t = \text{Energía Total}, \quad (4.66)$$

$$l = p_\phi = \text{Componente del momento angular paralelo al eje de simetría}. \quad (4.67)$$

Se pueden obtener las siguientes expresiones,

$$E = -p_t = -\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \quad (4.68)$$

$$= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t} + \frac{r_g a}{r} \dot{\phi}, \quad (4.69)$$

$$l = p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (4.70)$$

$$= -\frac{r_g a}{r} \dot{t} + \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{r_g a^2}{c^2 r}\right) \dot{\phi}. \quad (4.71)$$

Podemos manipular las dos últimas ecuaciones usando matrices y escribir

$$\begin{pmatrix} E \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 & \frac{r_g a}{r} \\ -\frac{r_g a}{r} & r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{r_g a^2}{c^2 r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}.$$

Se puede invertir esta ecuación obteniendo lo siguiente,

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2 \Delta} \begin{pmatrix} r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{r_g a^2}{c^2 r} & -\frac{r_g a}{r} \\ \frac{r_g a}{r} & \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ l \end{pmatrix},$$

y simplificando la matriz anterior encontramos

$$\dot{t} = \frac{(c^2 r^3 + a^2 r + r_g a^2)E - c^2 r_g a l}{c^4 r \Delta}, \quad (4.72)$$

$$\dot{\phi} = \frac{r_g a E + (r - r_g) c^2 l}{c^2 r \Delta}. \quad (4.73)$$

Podemos obtener la tercera integral de movimiento introduciendo  $g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 c^2$ . La ecuación de movimiento radial para una partícula de prueba se puede hallar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} g_{tt}(p^t)^2 + g_{\phi\phi}(p^\phi)^2 + 2g_{\phi t} p^t p^\phi + g_{rr}(p^r)^2 &= -m^2 c^2, \\ -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{r_g a^2}{c^2 r}\right) \dot{\phi}^2 - \frac{2r_g a}{r} \dot{\phi} \dot{t} + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 &= -m^2 c^2. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior podemos sustituir los valores para  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$ , y después de algunas líneas de álgebra, obtenemos que

$$-c^2 r^2 \Delta (c^2 r^3 + a^2 r + r_g a^2) E^2 + c^6 r^2 (r - r_g) \Delta l^2 + 2r_g a c^4 r^2 \Delta E l + c^6 r^5 \Delta \dot{r}^2 = -m^2 c^8 r^3 \Delta^2,$$

obteniendo

$$c^4 r^3 \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = (c^2 r^3 + a^2 r + r_g a^2) E^2 - 2r_g a c^2 E l - c^4 (r - r_g) l^2 - m^2 c^6 r \Delta. \quad (4.74)$$

Podemos definir ahora una función que sea como un potencial efectivo para el movimiento radial en el plano ecuatorial,

$$H(E, l, r, a) = (c^2 r^3 + a^2 r + r_g a^2) E^2 - 2r_g a c^2 E l - c^4 (r - r_g) l^2 - m^2 c^6 r \Delta. \quad (4.75)$$



Las órbitas circulares ocurren cuando  $dr/d\lambda$  tienden a cero. Esto requiere que

$$H = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial r} = 0. \quad (4.76)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser resueltas para  $E$  y  $l$  dando (véase Shapiro & Teukolsky 1983),

$$\hat{E} = \frac{c^2 r^2 - c^2 r_g r \pm ca \sqrt{r_g r/2}}{r(r^2 - 3r_g r/2 \pm 2(a/c) \sqrt{r_g r/2})^{1/2}}, \quad (4.77)$$

$$\hat{l} = \pm \frac{c \sqrt{r_g r/2} (r^2 \mp 2(a/c) \sqrt{r_g r/2} + a^2/c^2)}{r(r^2 - 3r_g r/2 \pm 2(a/c) \sqrt{r_g r/2})^{1/2}}. \quad (4.78)$$

En las ecuaciones antes escritas, el signo superior indica la corotación u órbitas directas, es decir, el momento angular orbital de una partícula paralelo al momento angular del spín del hoyo negro) y el signo inferior a las órbitas de contrarotación.

La velocidad angular de una órbita circular es [12]:

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = \pm \frac{c(r_g/2)^{1/2}}{r^{3/2} \pm (a/c)(r_g/2)^{1/2}}. \quad (4.79)$$

Las órbitas circulares no existen para todos los valores de  $r$ . Por ejemplo, para un valor de  $r$ , este no debe anular el denominador de la ecuación (4.77),

$$r^2 - 3r_g r/2 \pm 2(a/c) \sqrt{r_g r/2} > 0, \quad (4.80)$$

puesto que se tendría otra singularidad en el espacio. La ecuación anterior la podemos escribir como,

$$r^{3/2} - \frac{3}{2} r_g r^{1/2} \pm \frac{2a}{c} \sqrt{\frac{r_g}{2}} > 0. \quad (4.81)$$

Para el caso en que se dé la igualdad, tendríamos una órbita con energía infinita por unidad de masa en reposo, es decir, un fotón. Esta órbita es la frontera más interna de las órbitas circulares de las partículas y ocurre cuando encontramos la raíz de la ecuación anterior [12],

$$r = r_{ph} \equiv r_g \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \cos^{-1} \left( \mp \frac{2a}{cr_g} \right) \right] \right\}. \quad (4.82)$$

Pero para  $r > r_{ph}$  no todas las órbitas serán ligadas. Para órbitas ligadas tenemos que  $\hat{E} < 1$ . Entonces órbitas ligadas existen para  $r > r_{mb}$ , donde  $r_{mb}$  es el radio de la órbita

circular marginalmente ligada con  $\hat{E} = 1$  [12],

$$r_{mb} = r_g \mp \frac{a}{c} + 2 \left( \frac{r_g}{2} \right)^{1/2} \left( \frac{r_g}{2} \mp \frac{a}{c} \right)^{1/2}. \quad (4.83)$$

Incluso para órbitas circulares ligadas no todas son estables. La estabilidad requiere que,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} > 0, \quad (4.84)$$

y esto nos lleva a la condición que

$$1 - \hat{E}^2 \geq \frac{r_g}{3r}. \quad (4.85)$$

Sustituyendo la ecuación (4.77), llegamos a que

$$r^2 - 3r_g r \pm 8 \frac{a}{c} \left( \frac{r_g}{2} \right)^{1/2} r^{1/2} - 3 \frac{a^2}{c^2} \geq 0. \quad (4.86)$$

Resolviendo la ecuación anterior encontramos que  $r_{ms}$ , que es la órbita marginalmente estable, es [12]

$$r_{ms} = \frac{r_g}{2} \left\{ 3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \right\}, \quad (4.87)$$

$$Z_1 = 1 + \left( 1 - \frac{4a^2}{c^2 r_g^2} \right)^{1/3} \left[ \left( 1 + \frac{2a}{c r_g} \right)^{1/3} + \left( 1 - \frac{2a}{c r_g} \right)^{1/3} \right], \quad (4.88)$$

$$Z_2 = \left( \frac{12a^2}{c^2 r_g^2} + Z_1^2 \right)^{1/2}. \quad (4.89)$$

Para  $a/c = r_g/2$ ,  $r_+ = r_{ph} = r_{mb} = r_{ms} = r_g/2$ , y las órbitas del fotón, la marginalmente ligada, la marginalmente estable coinciden con el horizonte. Para cuando  $a = 0$ , todas las órbitas se reducen al caso de Schwarzschild.

#### 4.4. Modificación al potencial de Newton

En los primeros modelos de discos de acreción hacia agujeros negros (por ejemplo, Shakura 1972; Shakura y Sunyaev 1973), el potencial gravitacional newtoniano fue usado para describir el campo gravitacional del agujero. Sin embargo, los efectos relativistas juegan un papel muy importante en las regiones muy cercanas al agujero negro central, donde mucha de la energía es liberada; el efecto relativista más esencial es la existencia de la última órbita circular kepleriana estable en  $r_{ms} = 3r_g$  para el caso de Schwarzschild.

Para  $r > r_{ms}$ , el movimiento radial de la materia acretando en el disco está asociado con la pérdida de momento angular como un resultado del esfuerzo viscoso. Para  $r < r_{ms}$  la materia acretando cae hacia el agujero negro con prácticamente momento angular constante. Como un resultado,  $r_{ms}$  es también el borde más interior del disco de acreción, donde los esfuerzos viscosos dejarán de afectar notablemente a las trayectorias del flujo del gas. En la teoría newtoniana uno puede imitar este comportamiento poniendo el esfuerzo viscoso,  $\sigma'_{r\phi}$ , igual a cero en  $r = r_{ms}$ .

Esta aproximación cuasi-newtoniana describe a un disco de acreción en torno a un agujero negro no rotando. Esto nos permite usar la teoría newtoniana en los procesos físicos en el disco en vez de usar la teoría general de la relatividad, siendo esta última más difícil de manipular analíticamente.

Paczyński y Wiita en 1980 propusieron un pseudo potencial newtoniano en la forma

$$\Phi_{PW}(r, z) = \frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2} - r_g}, \quad (4.90)$$

que reproduce correctamente las posiciones de la última órbita circular estable,  $r_{ms}$ , y la órbita circular marginalmente ligada,  $r_{mb}$  ( $= 2r_g$  para un agujero negro de Schwarzschild).

Para el caso en que se quiera aproximar un disco de acreción en torno a un agujero negro rotando, el potencial cambia significativamente. El potencial demanda que: 1) en caída libre éste debe tender a infinito cuando  $r$  tiende a el horizonte de eventos,  $r_+$  [véase la ecuación (4.61)], del agujero negro; y 2) la posición de la última órbita circular estable debe coincidir con la posición exacta de la relatividad general. El potencial propuesto por Artemova *et al.* (1996) se escribe de la siguiente manera

$$\Phi(r, z) = -\frac{GM}{r_+(1-\beta)} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}^{1-\beta} (\sqrt{r^2 + z^2} - r_+)^{\beta-1}} \right). \quad (4.91)$$

La cantidad  $\beta$  depende sólo del parámetro  $a$ , y por supuesto de  $M$ . Esta cantidad fue definida por el mismo autor como

$$\beta = \frac{r_{ms}}{r_+} - 1, \quad (4.92)$$

donde  $r_{ms}$  es la ecuación (4.87), la misma que en relatividad general. Este potencial funciona para hoyos negros rotando y no rotando ( $a = 0$ , potencial de Paczyński y Wiita). El error en las soluciones a los discos de acreción usando este potencial son del 10 %-20 % en las energías comparadas con las soluciones relativistas.

Cuando  $a = 0$  en las ecuaciones (4.61) y (4.87), la ecuación (4.91) se convierte en la ecuación (4.90), es decir, se reduce al potencial propuesto por Paczyński y Wiita en 1980, y

cuando  $a = cr_g/2$ , la ecuación (4.91) se convierte en la ecuación (4.4), es decir, se reduce al potencial de Newton.

#### 4.4.1. Momento angular kepleriano

Podemos usar la ecuación (4.91) para encontrar el momento angular kepleriano por unidad de masa. Para esto recuérdese que la restricción para órbita circular es (para el plano ecuatorial)

$$\left( \frac{\partial W(r, z=0)}{\partial r} \right)_l = 0. \quad (4.93)$$

Usando la ecuación (3.51), tenemos que

$$W(r, z) = -\frac{GM}{r_+(1-\beta)} \left( 1 - \frac{1}{R^{1-\beta}(R-r_+)^{\beta-1}} \right) + \int_r^\infty \frac{l^2(r')}{r'^3} dr'. \quad (4.94)$$

Derivando la ecuación anterior obtenemos que,

$$\frac{GM}{r^{2-\beta}(r-r_+)^{\beta}} - \frac{l(r)^2}{r^3} = 0.$$

Entonces el momento angular kepleriano por unidad de masa es

$$l_k(r) = \sqrt{\frac{GM r^3}{r^{2-\beta}(r-r_+)^{\beta}}}. \quad (4.95)$$

Cuando  $a = 0$ , que es el potencial de Paczyński-Wiita, obtenemos usando (4.61), (4.87) y (4.92) que  $\beta = 2$ , por lo tanto

$$l_k(r) = \sqrt{\frac{GM r^3}{(r-r_g)^2}}. \quad (4.96)$$

Cuando  $a = cr_g/2$ , que es el potencial de Newton, obtenemos usando (4.61), (4.87) y (4.92) que  $\beta = 0$ , por lo tanto

$$l_k(r) = \sqrt{GM r}. \quad (4.97)$$

#### 4.4.2. Paczyński-Wiita contra Schwarzschild

El potencia de Paczyński-Wiita reproduce correctamente las posiciones de la última órbita circular estable,  $r_{ms}$ , y la órbita circular marginalmente ligada,  $r_{mb}$ . La energía mecánica por

unidad de masa de la última órbita estable para el potencial de Paczyński-Witta es (llamado eficiencia)

$$\epsilon_{PW} = \frac{(r\Omega)^2}{2} + \Phi_{PW} = -0.0625, \quad (4.98)$$

que es muy parecido con el resultado correcto para la métrica de Schwarzschild,  $\epsilon_{Sch} = -0.057$ . La eficiencia del potencial newtoniano, tiene numéricamente un valor más alto,  $\epsilon_N = -0.083$  (para  $r = r_{ms} = 3r_g$ ), y por lo tanto sobreestima la luminosidad total del disco por un factor considerable.

Podemos analizar al potencial de Paczyński-Wiita cuantitativamente de la siguiente manera. De las ecuaciones (3.51) y (4.90) obtenemos que (para  $l = cte$ )

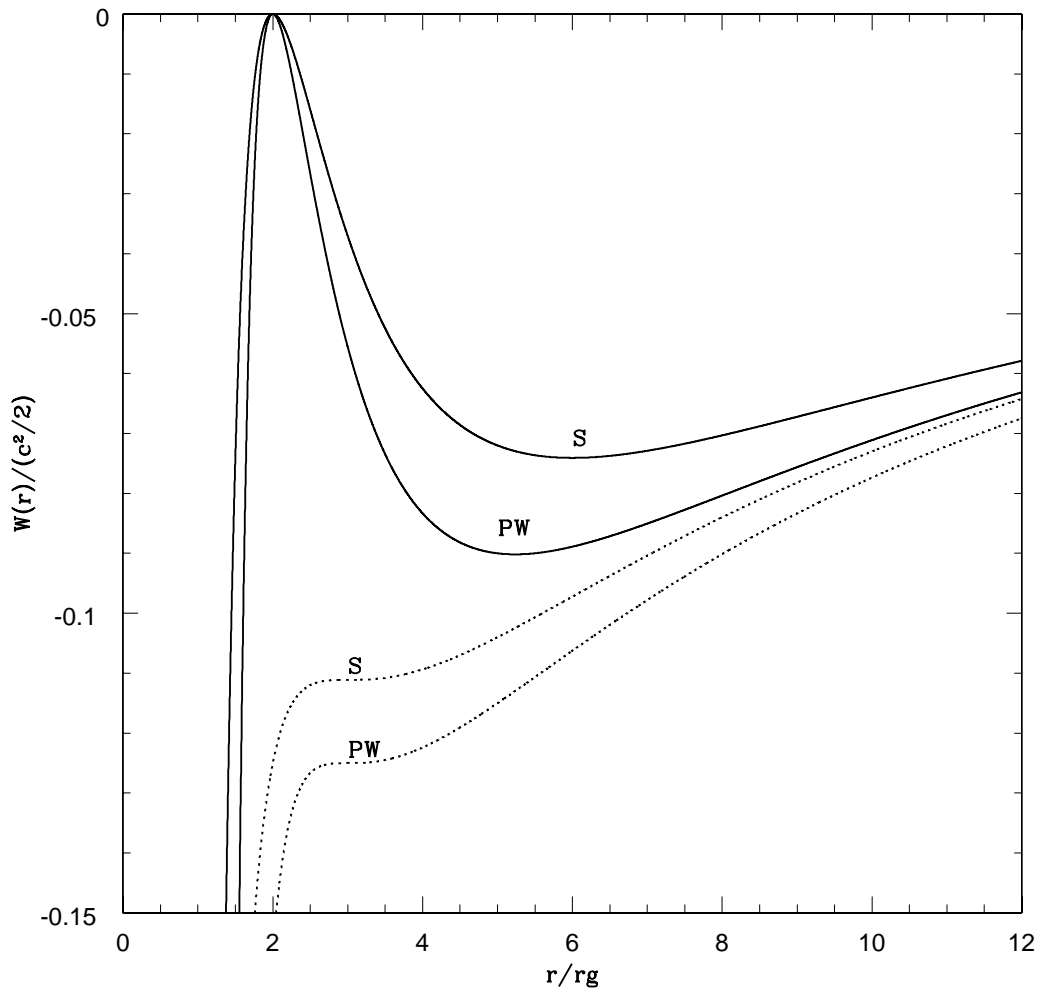
$$\begin{aligned} W(r) &= -\frac{GM}{r-r_g} + \frac{l^2}{2r^2} \\ &= -\frac{GM}{r_g\left(\frac{r}{r_g}-1\right)} + \frac{l^2/r_g^2}{2r^2/r_g^2} \\ &= -\frac{c^2/2}{x-1} + \frac{(c^2/2)(2/c^2)(l^2/r_g^2)}{2x^2} \\ y(x) = \frac{W(x)}{c^2/2} &= -\frac{1}{x-1} + \frac{r_0^2}{x^2}, \end{aligned}$$

donde  $x = r/r_g$ ,  $r_0 = l/(cr_g)$ . El momento angular de la órbita marginalmente ligada la podemos calcular suponiendo que  $y(x) = 0$  cuando  $y'(x) = 0$ , entonces

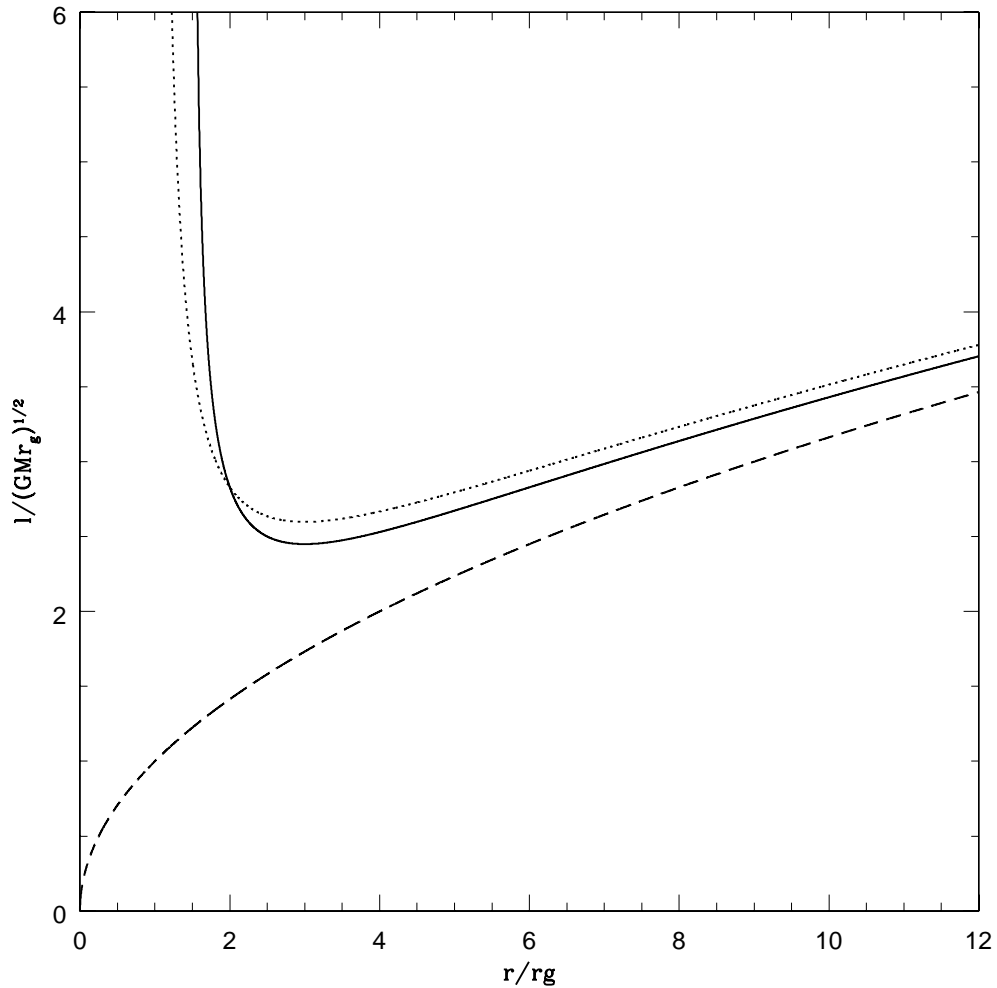
$$\begin{aligned} -\frac{1}{x-1} + \frac{r_0^2}{x^2} &= 0 = y(x) \\ -x^2 + (x-1)r_0^2 &= 0 \\ r_0 &= \frac{x}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2r_0^2}{x^3} &= 0 \\ r_0 &= \frac{x^{3/2}}{2^{1/2}(x-1)}. \end{aligned}$$

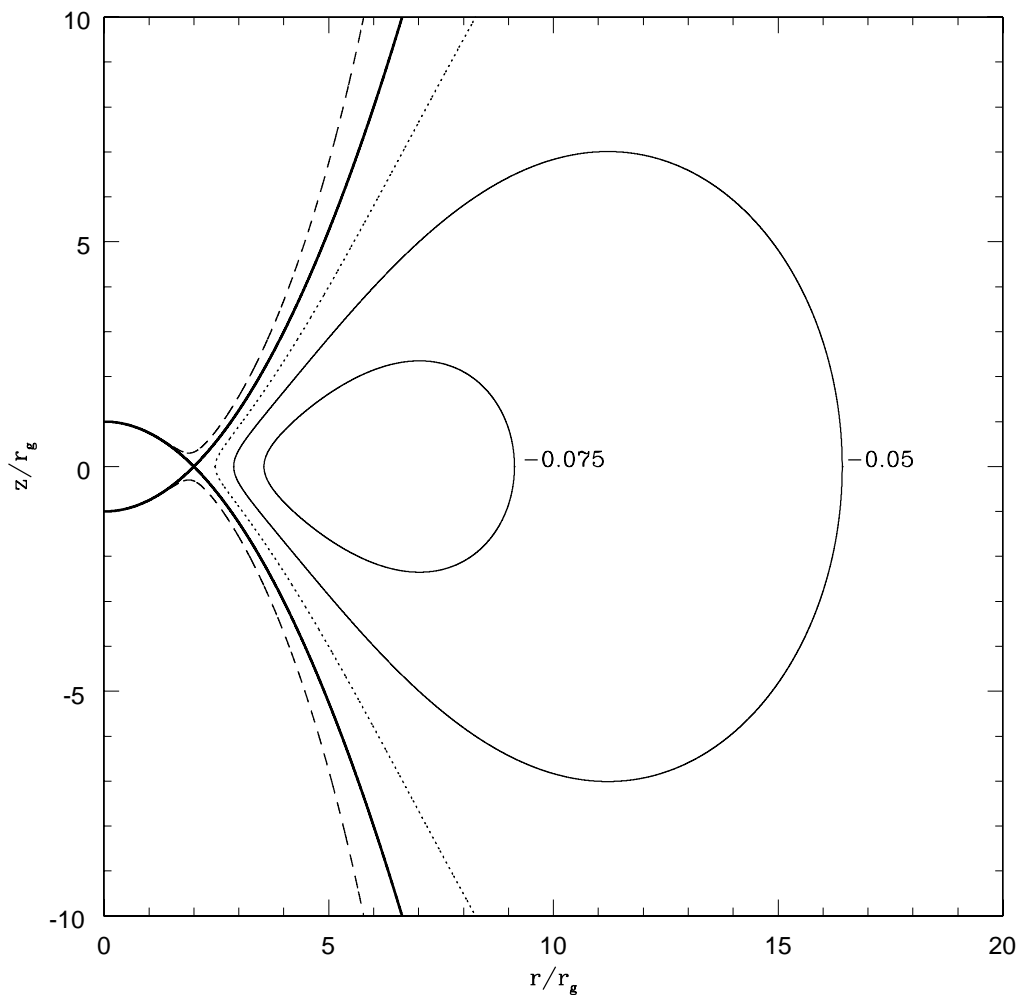
Ahora, igualando las 2 ecuaciones anteriores, obtenemos que  $x = 2$ ; de aquí que  $r_0 = 2$ , por lo tanto  $l = l_{mb} = 2cr_g$ . La cantidad  $l_{ms}$  (la órbita marginalmente estable), pueden ser calculada



**Figura 4.5:** Gráfica comparativa entre el potencial de Schwarzschild y el propuesto por Paczyński-Wiita. Las líneas marcadas con *S* corresponden al potencial de Schwarzschild mientras que las marcadas con *PW* corresponden al de Paczyński-Wiita. Las líneas sólidas corresponden a la órbita marginalmente ligada,  $r_{mb}$  y las líneas punteadas corresponden a la órbita marginalmente estable,  $r_{ms}$ . El valor del momento angular para la órbita marginalmente ligada para la métrica de Schwarzschild y para el potencial de Paczyński-Wiita es  $l_{mb} = 2r_g c$ . El valor del momento angular para la órbita marginalmente estable para la métrica de Schwarzschild es  $l_{ms} = 0.866025l_{mb}$  mientras que para el potencial de Paczyński-Wiita es  $l_{ms} = 0.918558l_{mb}$ .



**Figura 4.6:** Gráfica comparativa entre los momentos angulares keplerianos obtenidos con métrica de Schwarzschild, potencial de Paczyński-Wiita y potencial de Newton. La línea sólida corresponde al momento angular kepleriano obtenido con Schwarzschild. La línea punteada corresponde al momento angular kepleriano obtenido con el potencial de Paczyński-Wiita. La línea discontinua corresponde al momento angular kepleriano obtenido con el potencial de Newton. Vemos que tanto la línea punteada como la sólida tienen una forma muy similar, que difiere cuantitativamente del caso newtoniano.



**Figura 4.7:** Gráfica de la sección meridional de las superficies equipotenciales  $W(r,z) = cte$  para el potencial de Paczyński-Wiita, para el caso en que  $l = l_{ms} = 2r_g c$ . La línea gruesa corresponde al valor inicial  $W_0 = 0.0$  que sería el límite en que una partícula permanece ligada. La línea discontinua y la línea punteada corresponden a  $W = 0.025$  y  $W = -0.025$ , respectivamente. Los otros dos valores mostrados en la gráfica corresponden a un toro grande ( $W_0 = -0.05$ ) y a un toro mediano ( $W_0 = -0.075$ ) en extensión.



recordando que cuando  $r = r_{ms}$ , éste es un punto silla, entonces

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2r_0^2}{x^3} = 0 \\ r_0 &= \frac{x^{3/2}}{2^{1/2}(x-1)} \\ y''(x) &= -\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{6r_0^2}{x^4} = 0 \\ r_0 &= \frac{x^2}{\sqrt{3}(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Igualando, obtenemos que  $l_{ms} = 0.918558l_{mb}$ . Por lo tanto  $r_{ms} = 3r_g$  igual que en los hoyos negros de Schwarzschild. La diferencia es que en relatividad general tenemos que  $l_{ms} = 0.866025l_{mb}$ . Una gráfica comparativa del potencial dado por la relatividad general (Schwarzschild) y el potencial modificado de Newton (Paczyński-Wiita) es mostrada en la figura 4.5. En la figura 4.6 se muestra una comparación entre el momento angular kepleriano obtenido con el potencial de Paczyński-Wiita con el momento angular kepleriano obtenido de la métrica de Schwarzschild. En la figura 4.7 se muestra la sección de cruce meridional para un momento angular constante igual a  $l = l_{ms} = 2r_g c$ .

## 4.5. Frecuencia epicíclica

### 4.5.1. Teoría newtoniana y pseudo newtoniana

Los resultados que serán presentados en el siguiente capítulo pueden ser comparados con el comportamiento de una partícula de prueba en órbita circular alrededor del agujero negro central. Para una perturbación radial pequeña, la partícula mostrará oscilaciones radiales en la frecuencia  $\omega_r$ . Usando la ecuación (3.51) para definir al potencial efectivo de una partícula de prueba girando alrededor del agujero negro, y manteniendo a  $l = cte$  en el plano ecuatorial, obtenemos

$$W(r) = \Phi(r) + \frac{l^2}{2r^2}. \quad (4.99)$$

El potencial gravitacional es supuesto a ser estacionario,  $\partial\Phi/\partial t = 0$ . Las órbitas circulares (es decir, órbitas circulares keplerianas de partículas libres) ocurren en  $r = r_0$ , donde el

potencial efectivo tiene un extremo con respecto a  $r$ ,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_l = 0. \quad (4.100)$$

Note que de la solución  $l = l_K(r)$  de la ecuación anterior se sigue inmediatamente que en el plano ecuatorial las distribuciones de momento angular kepleriana  $l_K$  y velocidad angular kepleriana  $\Omega_K$  están dadas por,

$$l_K = \pm \left(r^3 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^{1/2}, \quad \Omega_K = \frac{l_K}{r^2} = \pm \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}\right)^{1/2}. \quad (4.101)$$

Introduciendo una perturbación de la forma  $\delta r = r - r_0$  podemos expandir en serie de Taylor a  $W$  sobre  $r$  cerca de la órbita circular que inicia con el segundo término,

$$\delta W(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right) \delta r^2.$$

Un pequeño cambio en la órbita de la energía  $\delta E$  puede ser expresado como,

$$\delta E = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right) \delta r^2 + \frac{1}{2} (\delta \dot{r})^2. \quad (4.102)$$

La energía de la órbita perturbada es una constante de movimiento, y por lo tanto  $\delta \dot{E} = 0$ , entonces,

$$\delta \dot{r} \left[ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right) \delta r + \delta \dot{r} \right] = 0. \quad (4.103)$$

Estamos interesados en la solución no trivial  $\delta \dot{r} \neq 0$ , entonces la ecuación anterior toma la conocida forma de un oscilador armónico simple,

$$\delta \ddot{r} + \omega_r^2 \delta r = 0, \quad (4.104)$$

con el cuadrado de la eigenfrecuencia siendo la segunda derivada del potencial efectivo con respecto a la distancia en la dirección radial  $r$ .

A la frecuencia  $\omega_r$  se le llama frecuencia epicíclica (es una frecuencia angular), y está definida por

$$\omega_r \equiv \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)^{1/2}. \quad (4.105)$$

Combinando las ecuaciones (4.95), (4.99) y (4.91) obtenemos que

$$\omega_r^2 = \frac{GM[r - (1 + \beta)r_+]}{r^{3-\beta}(r - r_+)^{\beta+1}}. \quad (4.106)$$

Para el caso newtoniano, tenemos que  $a = cr_g/2$  lo que implica que  $\beta = 0$ , por lo tanto,

$$\omega_r^2 = \frac{GM}{r^3}. \quad (4.107)$$

Para el potencial de Paczyński-Wiita, tenemos que  $a = 0$  lo que implica que  $\beta = 2$  y que  $r_+ = r_g$ , entonces

$$\omega_r^2 = \frac{GM(r - 3r_g)}{r(r - r_g)^3}. \quad (4.108)$$

La frecuencia angular,  $\omega$ , se relaciona con la frecuencia (número de revoluciones por unidad de tiempo de cualquier fenómeno físico),  $\kappa$ , como

$$\omega \equiv 2\pi\kappa. \quad (4.109)$$

### 4.5.2. Relatividad general

El caso completamente relativista es muy similar. En este caso la condición newtoniana para órbita circular puede ser escrita como una condición para las componentes de la cuadrivelocidad para una partícula  $u^\nu = dx^\nu/ds$ ,

$$u^\nu = (u^t, u^\phi), \quad u^r = 0, \quad u^\theta = 0. \quad (4.110)$$

En la teoría newtoniana, la energía y el momento angular son dos constantes de movimiento (es decir, la geodésica). En relatividad general se definen como  $\mathcal{E} = u_t$  y  $l = -u_\phi$ , que también son constantes de movimiento, porque obedecen

$$u^\nu \nabla_\nu \mathcal{E} = 0, \quad u^\nu \nabla_\nu l = 0. \quad (4.111)$$

El momento angular específico definido como  $l_* = l/\mathcal{E}$ , es también una constante de movimiento. La velocidad angular  $\Omega_*$  y el momento angular específico  $l_*$  están relacionados por

$$\Omega_* = -\frac{l_* g_{tt} + g_{t\phi}}{l_* g_{t\phi} + g_{\phi\phi}}, \quad l_* = -\frac{\Omega_* g_{\phi\phi} + g_{t\phi}}{\Omega_* g_{t\phi} + g_{tt}}. \quad (4.112)$$

La definición estandar del potencial efectivo es,

$$\mathcal{U}_{Kerr} \equiv -\frac{1}{2} \ln \left( g^{tt} - 2l_* g^{t\phi} + l_*^2 g^{\phi\phi} \right). \quad (4.113)$$

Esta definición junto con la identidad  $u_\nu u_\mu g^{\nu\mu} = 1$  nos lleva a

$$\ln \mathcal{E} - \mathcal{U}_{Kerr} = 0. \quad (4.114)$$

Consideremos pequeñas oscilaciones con  $\delta l = 0$ ,  $\delta \mathcal{E} \neq 0$ ,  $\delta \dot{\mathcal{E}} = 0$ . Entonces  $\delta x = x(s) - x_0$ ,  $u^x = dx/ds = \delta \dot{x}$ . De la ecuación (4.50) obtenemos

$$1 = u_t u_t g^{tt} + 2u_t u_\phi g^{t\phi} + u_\phi u_\phi g^{\phi\phi} + u^x u^x g_{xx}, \quad (4.115)$$

$$\mathcal{E}^{-2} = e^{-2\mathcal{U}_{Kerr}} + \frac{g_{xx}}{\mathcal{E}^2} (\delta \dot{x})^2, \quad (4.116)$$

$$-2 \frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0^3} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-2\mathcal{U}_{Kerr}} \right) (\delta x)^2 + \frac{g_{xx}}{\mathcal{E}_0^2} (\delta \dot{x})^2, \quad (4.117)$$

$$-2 \frac{\delta \dot{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}_0^3} = (\delta \dot{x}) \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-2\mathcal{U}_{Kerr}} \right) \delta x + 2 \frac{g_{xx}}{\mathcal{E}_0^2} (\delta \dot{x}) \right]. \quad (4.118)$$

Esta última ecuación, con  $\delta \dot{\mathcal{E}} = 0$ ,  $\delta \dot{x} \neq 0$ , tiene la forma de la ecuación de un oscilador armónico simple,  $\delta \ddot{x} + \omega_x^2 \delta x = 0$ , con la frecuencia epicíclica definida como

$$\omega_x^2 \equiv \left( \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{Kerr}}{\partial X^2} \right), \quad (4.119)$$

con  $dX^2 = -g_{xx} dx^2 > 0$  siendo la longitud propia en la dirección  $x$ . Note que estas frecuencias son iguales en la teoría newtoniana cuando las coordenadas son invariantes en la dirección radial o vertical.

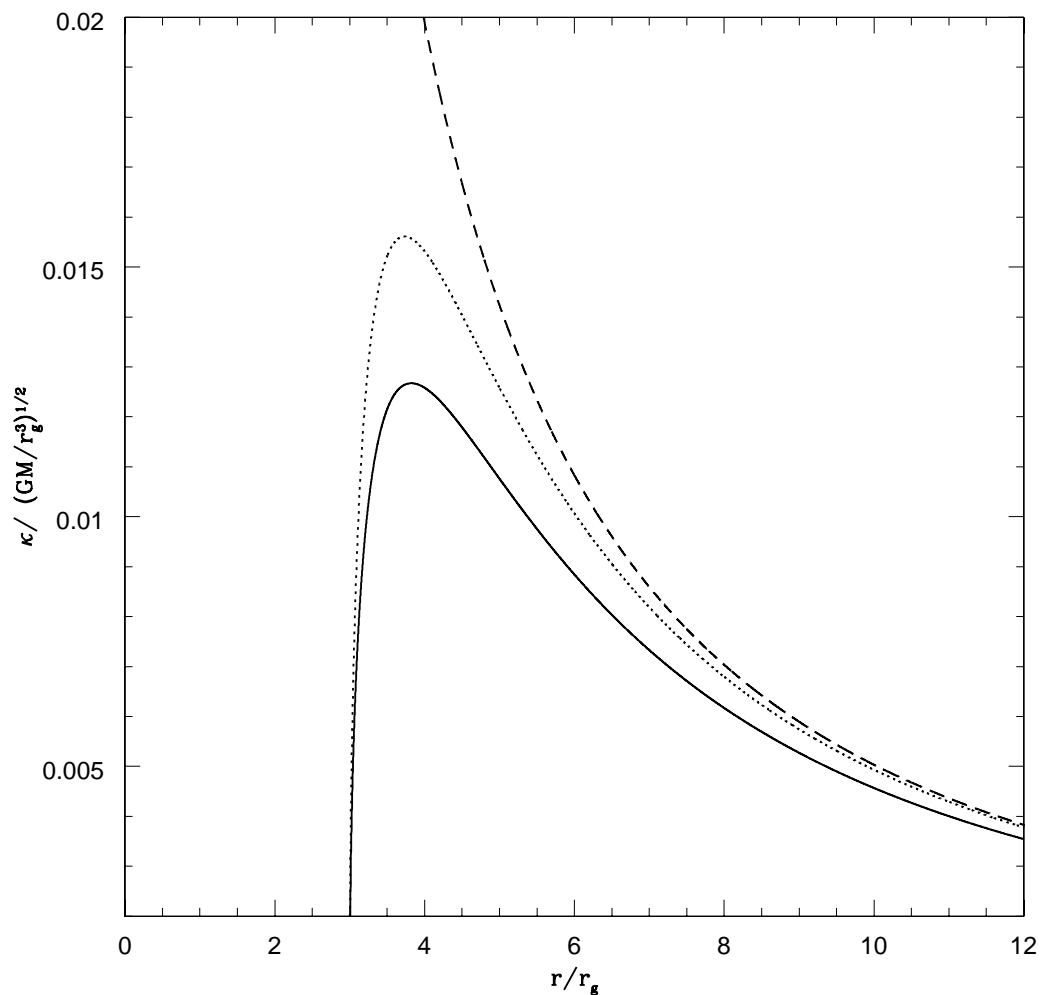
Para el caso en que  $a = 0$ , es decir, la métrica de Schwarzschild, de la ecuación (4.113), obtenemos

$$\mathcal{U}_{Sch} = -\frac{1}{2} \ln \left[ \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} - \frac{l_*^2}{c^2 r^2} \right]. \quad (4.120)$$

Como se demanda que la primera derivada del potencial sea igual a cero, encontramos que el momento angular kepleriano es

$$l_{*K}^2 = \frac{GM r^3}{(r - r_g)^2}. \quad (4.121)$$

Esta expresión es la misma que la ecuación (4.96), encontrada con el potencial de Paczyński-Wiita. Nótese que  $l_{*K}$  no es la misma expresión encontrada con la métrica de Schwarzschild



**Figura 4.8:** Gráfica comparativa entre las frecuencias epicíclicas de Schwarzschild, Paczyński-Wiita y Newton. La línea sólida representa la frecuencia epicíclica obtenida mediante la métrica de Schwarzschild. La línea punteada representa la frecuencia epicíclica del potencial de Paczyński-Wiita. La línea discontinua representa la frecuencia epicíclica obtenida mediante el potencial de Newton.

[véase la ecuación (4.47)], esto es porque  $l_*$  fue encontrada con la ecuación (4.120), y además se definió que  $l_* = l/\mathcal{E}$ .

Con la segunda derivada del potencial efectivo encontramos la frecuencia epicíclica, y obtenemos que

$$\omega_r^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[ \frac{(r - 3r_g)r_g c^2}{r^2(2r^2 - 5r_g r + 3r_g^2)} \right]. \quad (4.122)$$

En la figura 4.8 se muestra la dependencia de esta frecuencia con respecto a la dirección radial del observador y se compara con la frecuencia epicíclica obtenida con el pseudo-potencial newtoniano definido por Paczyński-Wiita y también con la frecuencia epicíclica obtenida con el potencial newtoniano.

# Capítulo 5

## Resultados

Recuérdese que el problema que se quiere estudiar, es la oscilación de toros de acreción en torno a agujeros negros. Los discos de acreción que se estudiaron en el presente trabajo fueron construidos despreciando su autogravedad, viscosidad, disipación de energía y campo magnético. Las ecuaciones (3.40), (3.43), (3.44) y (3.45) describen al sistema. Para poder usar dichas ecuaciones, fue necesario definir al potencial gravitacional del objeto central, para este trabajo se usó el potencial gravitacional de Artemova *et al.* (1996) que ayudó a simular la fuerte gravedad producida por el agujero negro [véase ecuación (4.91)]. La última función que falta por definir, es la distribución de momento angular (se definirá más adelante) para todo el disco, ya que la ecuación (4.95) describe el momento angular para una partícula de prueba girando alrededor del agujero negro y no el momento angular de un disco girando alrededor del agujero negro.

Para poder simular un sistema con las especificaciones antes mencionadas, fue necesario utilizar cuatro códigos numéricos escritos en el lenguaje de programación Fortran 77. Dos de estos códigos (códigos de relajación y evolución) fueron gran parte escritos por el Dr. William Lee del Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México y terminados por el autor de este trabajo. Los otros dos fueron escritos por el autor del presente trabajo (códigos de ajuste de curva y transformada de Fourier rápida). La secuencia que se usó para simular el sistema descrito con anterioridad fue: (i) relajar las partículas (código de relajación) del sistema con el método SPH (véase capítulo 2) utilizando un término de amortiguamiento (se definirá más adelante), es decir, encontrar el equilibrio del disco de acreción [véase ecuación (3.49)], (ii) evolucionar las partículas (código de evolución) del sistema aplicándole una fuerza perturbativa (se definirá más adelante). Una vez evolucionado el sistema, se obtienen las variables hidrodinámicas como funciones del tiempo y se procede a aplicarles (iii) el ajuste de curva (código de ajuste de curva), que nos ayuda a espaciar a la variable temporal uniformemente y reducir a la serie de tiempo a un número de datos

$N = 2^n$ , donde  $N$  es el número total de datos en la serie de tiempo y  $n$  es una potencia escogida de acuerdo al tamaño de la serie de tiempo. Después se procede a aplicarles la transformada de Fourier rápida (código de transformada de Fourier rápida) a estos datos. A partir de las transformadas de Fourier de los datos, se procedió a analizar y graficar los resultados obtenidos.

Las distribuciones de momento angular utilizadas en el presente trabajo son las siguientes:

- Distribución de momento angular constante:

$$l(r) = l_K(r_0) = l_0 = cte, \quad (5.1)$$

- Distribución como ley de potencia en el radio:

$$l(r) = l_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\alpha, \quad (5.2)$$

- Distribución propuesta en el artículo de Qian *et al.* (2009)<sup>1</sup> que contempla distribuciones más generales en radio y ángulo polar:

$$l(r, z) = \begin{cases} l_0 \left( \frac{l_K(r)}{l_0} \right)^\beta \left( \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^{2\zeta} & \text{para } r \geq r_0 \\ l_0 \left( \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^{2\zeta} & \text{para } r < r_0 \end{cases} \quad (5.3)$$

En cada caso se calculó la transformada rápida de Fourier (código de la transformada de Fourier) a la energía total del sistema, esto con el objetivo de observar las oscilaciones radiales de los discos de acreción. Estas transformadas mostraron picos en distintas frecuencias, las gráficas serán mostradas y analizadas más adelante.

## 5.1. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales para este trabajo son obtenidas fijando la masa del objeto central, la ecuación de estado, el valor del índice adiabático, la constante politrópica, el factor de llenado para el potencial,  $W_0$  [véase la ecuación (3.53)] y la distribución del momento angular  $l(r)$ . Los valores que se fijaron para el código son:  $K = 0.96 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-4/3}$  es la constante politrópica<sup>2</sup>,  $\gamma = 4/3$  es el índice adiabático,  $r_g = 2GM/c^2$  es el radio gravitacional o radio

<sup>1</sup>En el artículo de Qian *et al.* (2009) se propone la distribución de momento angular en coordenadas esféricas, y en el presente trabajo se han usado coordenadas cilíndricas, entonces dicho potencial fue transformado de coordenadas esféricas a cilíndricas.

<sup>2</sup>Es la constante politrópica usada en Igumenshchev *et al.* (1996) propuesta en CGS.



de Schwarzschild,  $M_{an} = 2.5M_{\odot}$  es la masa del agujero negro<sup>3</sup> y  $\Omega(r_0) = l(r_0)/r_0^2$  es la velocidad angular específica (por unidad de masa) inicial. Aquí  $G = 6.6742 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  es la constante de gravitación universal y  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  es la velocidad de la luz en el vacío.

## 5.2. Oscilaciones y su análisis

Una vez fijados los valores iniciales, generamos los elementos del fluido que simularán al toro con el método de Monte Carlo para generar los números aleatorios, esto nos permitió crear una distribución de  $N$  partículas con un perfil toroidal en el plano  $r, z$ . Las partículas que caen dentro de este perfil toroidal corresponden a los elementos del fluido de la simulación. Para saber si una partícula está dentro del perfil, se hace que las partículas generadas por el método de Monte Carlo interactúen entre sí. La manera de realizar esto es determinando las interacciones de la  $k$ -ésima partícula con sus vecinos más próximos. La manera más eficiente de hacer esta selección es a través de un árbol binario. Para estas simulaciones se utiliza una subrutina llamada vecinos más próximos. En esta subrutina las partículas deben interactuar entre sí a una distancia mínima,  $h$ . Esta distancia es descrita en la Sección 2.2.2 y fue fijada para el código utilizado como  $h = 0.05r_g$ . Durante la evolución dinámica  $h$  es variable de manera que el número de vecinos de interpolación se mantenga constante (código de evolución).

Estos elementos son relajados dinámicamente con un término de amortiguamiento introducido en las ecuaciones de movimiento con el objeto de obtener el equilibrio (lo más cercano posible) de la distribución. Este término es proporcional a las velocidades radial y vertical de la partícula, es decir,  $-\vec{v}_r/t_{amort}$  y  $-\vec{v}_z/t_{amort}$ , respectivamente. El término de amortiguamiento,  $t_{amort}$ , se calcula a partir del inverso de la velocidad angular inicial  $t_{amort} = 1/\Omega_0$  y no altera la ley de rotación de las partículas.

Al interactuar las partículas entre sí, fue posible medir cantidades físicas como velocidad, fuerza y energía interna  $(\vec{r}, \vec{v}, u)$ . Estas variables van cambiando a lo largo del tiempo, ya que el código evoluciona temporalmente, por lo que fue posible seguir la evolución de la colección de partículas a diferentes tiempos. A partir de estas variables, se pueden determinar la energía cinética y las fuerzas que actúan sobre cada parcela de gas (código de evolución).

Para distintos valores de  $f$  en la ecuación (3.53) fue posible construir toros de distintos tamaños. En estas simulaciones nos enfocamos en las oscilaciones puramente dinámicas del disco, incluso se desea evitar la acreción, es decir, aunque haya acreción no se actualiza la  $M_{an}$ . También se mantienen constantes la entropía y la energía interna del gas, por lo que

<sup>3</sup>Con esta masa se estarían simulando sistemas binarios de rayos X galácticos.

no se altera la ecuación politrópica del gas. El código utilizado calcula las distintas variables hidrodinámicas del sistema, como son la densidad máxima (la densidad en  $r_0$ ) y la energía total como funciones del tiempo. Estos datos son analizados aplicándoles la transformada de Fourier para observar el comportamiento del espectro de frecuencias.

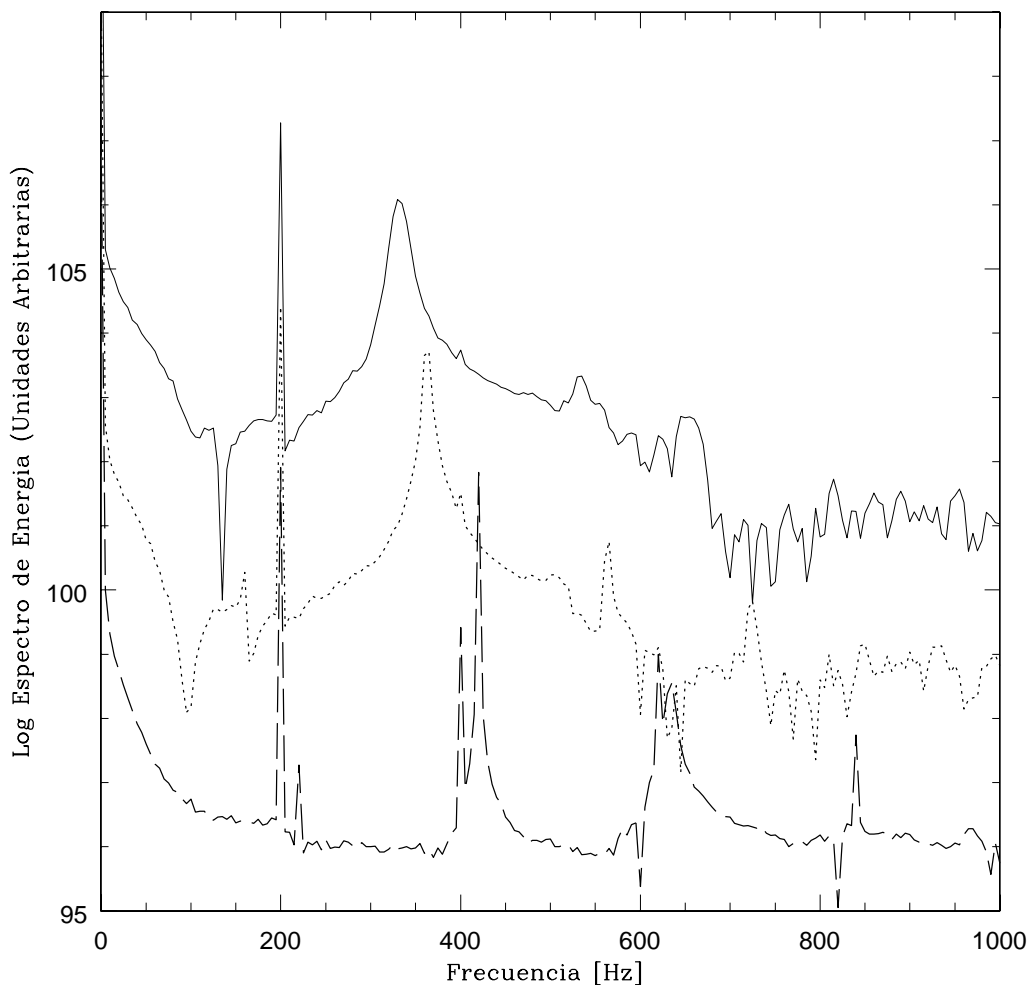
Para poder obtener la respuesta más fuerte en las oscilaciones radiales como una frecuencia epicíclica modificada, se procedió a aplicar una perturbación periódica en la dirección radial. Para todas las simulaciones se usó una perturbación radial introducida en las ecuaciones de movimiento, definida de la siguiente manera:

$$F(r) \equiv -\lambda \left( \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \right) \cdot \exp \left( \frac{r_{ext} - r}{\delta r} \right) \cdot \text{sen}(2\pi \kappa_{pert} t). \quad (5.4)$$

La derivada del potencial es la fuerza radial debida a la gravedad,  $r_{ext}$  es la frontera externa del toro y  $\lambda \ll 1$  es el parámetro adimensional que controla la amplitud de la perturbación. El término exponencial decae con  $\delta r \simeq R$ , que es la extensión radial del disco. La idea de proponer una fuerza de perturbación con esta forma es porque se quiere simular su intensidad dependiendo de la posición del disco y su periodicidad. Esta fuerza reproduce el comportamiento deseado para una fuerza perturbativa, la cual será más intensa cerca del radio interno y más débil en la regiones externas del toro. La fuerza antes mencionada es una aceleración del campo de gravedad. Esta fuerza induce oscilaciones radiales, las cuales pueden ser estudiadas mediante el análisis de Fourier extrayendo las frecuencias principales de cada disco de acreción.

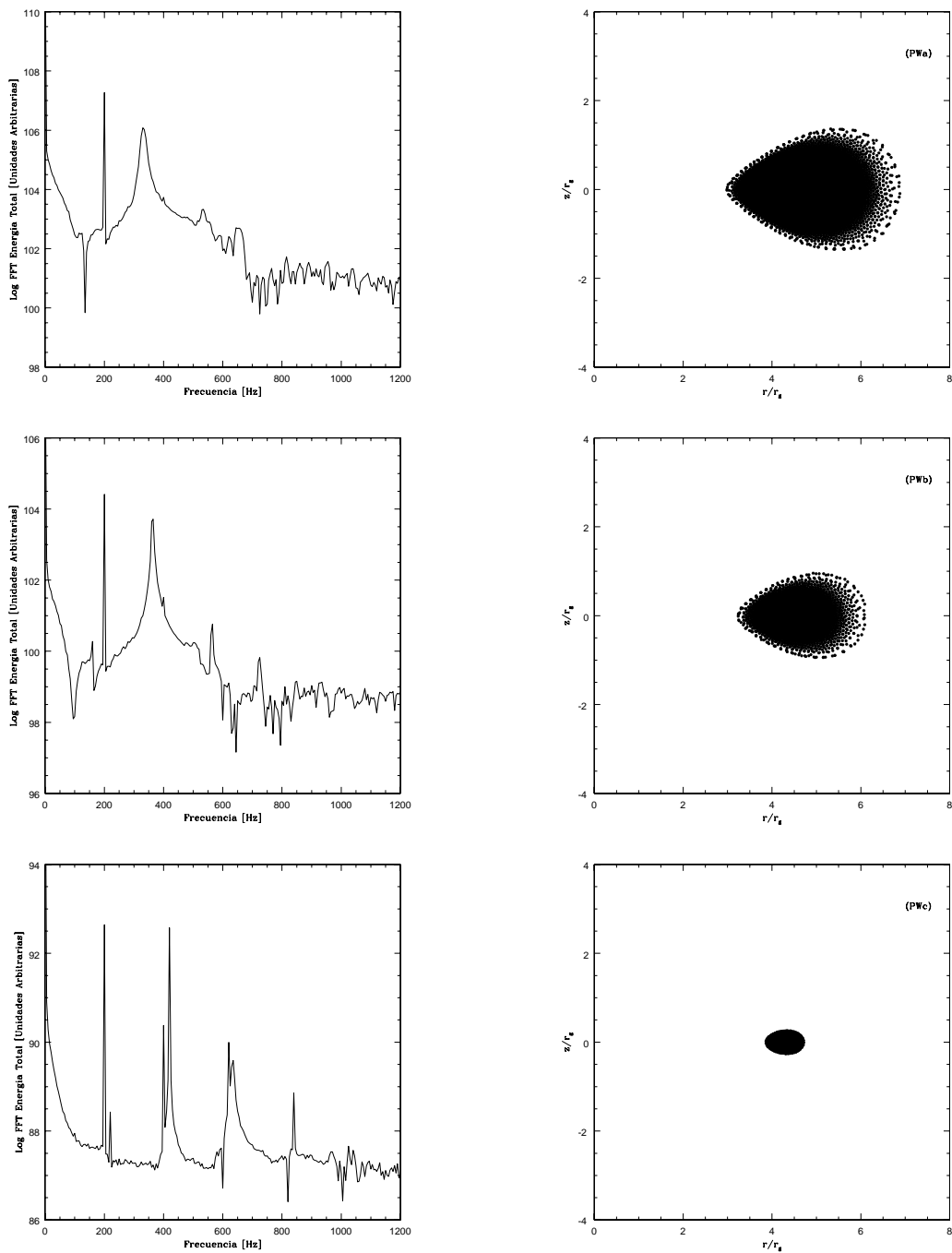
Se realizaron simulaciones usando las distribuciones de momento angular antes mencionadas [momento angular constante, ley de potencia y el momento angular propuesto en el artículo de Qian *et al.* (2009)]. Como resultado de la fuerza impulsiva, los toros experimentan oscilaciones de amplitud pequeña, las cuales pueden ser medidas de varias maneras. Una de estas es simplemente considerar la posición del centro de cada toro,  $(r_0, z_0)$ , definido como la ubicación del punto de densidad máxima, como una función del tiempo. La serie de tiempo correspondiente para cada toro es difícil de analizar. Sin embargo, esta muestra la frecuencia de perturbación  $\kappa_{pert}$  y la frecuencia epicíclica local para la oscilación radial,  $\kappa_r$ . La forma más eficiente para analizar esta serie de tiempo es aplicándole la transformada de Fourier a los datos. Para los cálculos en que el momento angular es casi constante en el espacio, no existen mecanismos para su transporte, y la perturbación no produce ningún tipo de torca. Todos los espectros de frecuencias que se mostrarán más adelante fueron realizados para la energía total del sistema dependiente del tiempo. Se escogió esta variable porque es una variable global del toro y es la variable que más información nos da acerca de la oscilación del toro. En la figura 5.1 se muestra la transformada de Fourier de  $r_0$  para las condiciones iniciales antes men-

cionadas y suponiendo el potencial de Paczyński-Wiita para tres distintos tamaños de toros con una perturbación sinusoidal en  $\kappa_{pert} = 200 \text{ Hz}^4$ . Los valores correspondientes de las frecuencias del modo fundamental radiales para el toro grande [ $W_0 = 0.85W(r_0)$ ; línea sólida], intermedio [ $W_0 = 0.9W(r_0)$ ; línea punteada] y pequeño [ $W_0 = 0.99W(r_0)$ ; línea discontinua] son  $\kappa_r = 330 \text{ Hz}$ ,  $\kappa_r = 365 \text{ Hz}$  y  $\kappa_r = 420 \text{ Hz}$ , respectivamente.



**Figura 5.1:** Transformada rápida de Fourier para la energía total del disco con una distribución de momento angular constante. El pico más grande corresponde a la frecuencia de perturbación,  $\kappa_{pert} = 200 \text{ Hz}$ . El otro pico prominente en cada serie de tiempo corresponde a la frecuencia fundamental del toro. La línea sólida corresponde al toro grande con  $f = 0.85$ . La línea punteada corresponde al toro intermedio con  $f = 0.9$  y la línea discontinua corresponde al toro pequeño con  $f = 0.99$ .

<sup>4</sup>La frecuencia de la perturbación fue fijada para todas las simulaciones en 200 Hz.



**Figura 5.2:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular constante con el potencial de Paczyński-Wiita.

De la figura 5.2 podemos observar que para el toro pequeño, se pueden visualizar los picos  $2\kappa_{pert} = 400$  Hz,  $3\kappa_{pert} = 600$  Hz,  $\kappa_r + \kappa_{pert} = 620$  Hz,  $\kappa_r - \kappa_{pert} = 220$  Hz,  $1.5\kappa_r \simeq 635$  Hz y  $2\kappa_r \simeq 845$  Hz. Las dos primeras frecuencias corresponden a los armónicos de la perturbación. Las dos siguientes corresponden a frecuencias “batidas”<sup>5</sup> entre las frecuencias de perturbación y la fundamental. Además se aprecian sobretonos de la frecuencia natural (modo fundamental) en  $1.5\kappa_r$ , y en  $2\kappa_r$ . En el caso del toro intermedio, se pueden observar los picos  $2\kappa_{pert} = 400$  Hz,  $3\kappa_{pert} = 600$  Hz,  $\kappa_r + \kappa_{pert} = 565$  Hz,  $2\kappa_r \simeq 725$  Hz y  $\kappa_r - \kappa_{pert} \simeq 160$  Hz. En el caso del toro grande, se pueden observar los picos  $2\kappa_{pert} = 400$  Hz,  $\kappa_r + \kappa_{pert} = 530$  Hz,  $2\kappa_r \simeq 660$  Hz y  $\kappa_r - \kappa_{pert} \simeq 135$  Hz. En la figura 5.2 se muestran las transformadas de Fourier y sus respectivos toros. En la tabla 5.1 se presentan densidad máxima<sup>6</sup>, potencial inicial, factor de llenado, los radios interno y externo para  $z = 0$ , momento angular y la frecuencia fundamental a la cual oscila cada uno.

Estos primeros modelos (momento angular constante y potencial de Paczyński-Wiita) fueron usados como base de comparación para los modelos que se presentarán más adelante. En la figura 5.3 se muestran las distribuciones de momento angular constante y en ley de potencias en el radio en el plano ecuatorial. La línea punteada corresponde a la distribución de momento angular constante, observamos que está por arriba del mínimo de la curva de la distribución de momento angular kepleriana dependiente de  $r$ . Esto nos asegura que se están construyendo toros estables. La línea discontinua corresponde a la distribución de momento angular en ley de potencias radial, como se puede observar ésta se encuentra casi en el borde de la distribución descrita por la línea sólida, por lo que con un exponente mayor a 0.1 tendríamos desbordamiento de toros, es decir, toros inestables. Para el caso de la distribución de momento angular propuesta por Qian *et al.*, es muy similar a la línea punteada (distribución de momento angular constante) en la figura 5.3, ya que para  $r < r_0$  el valor de la distribución en el plano ecuatorial es igual que para la distribución de momento angular constante.

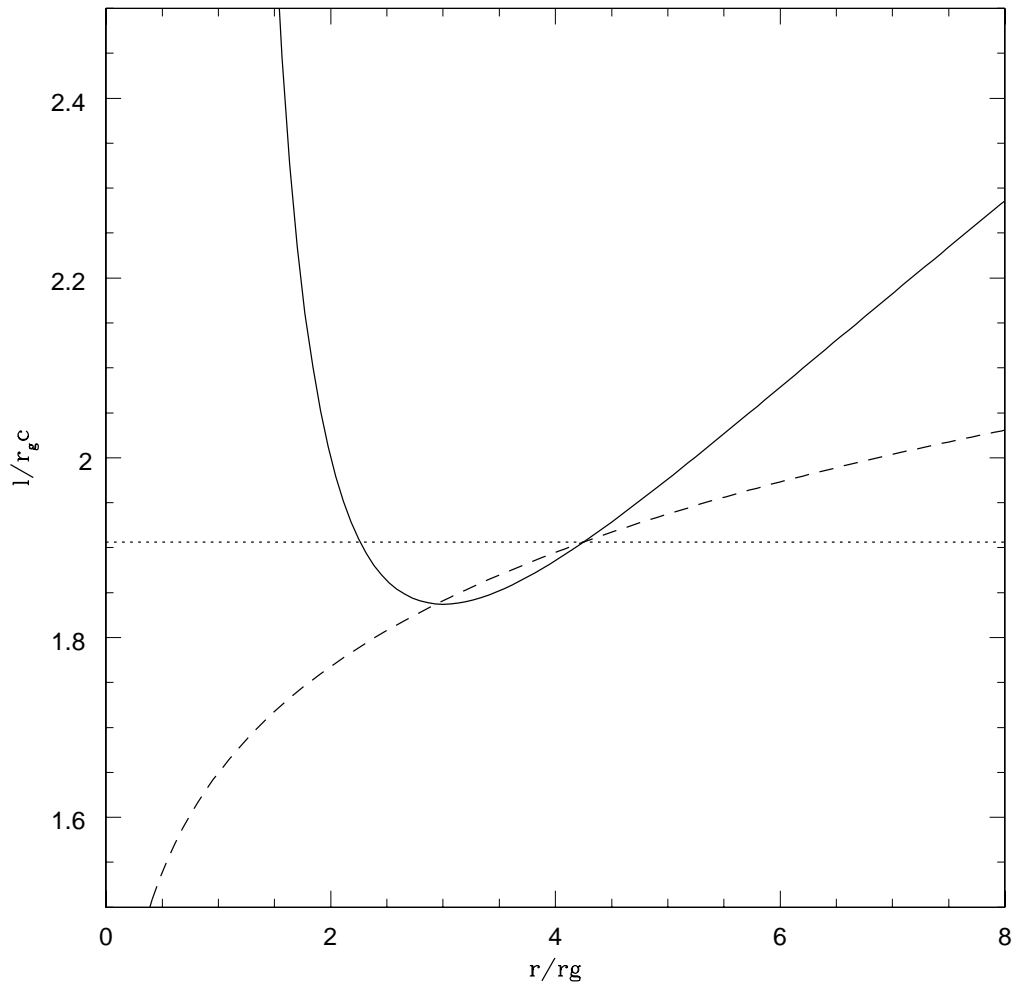
En la figura 5.4 se muestra la dependencia radial de la frecuencia epicíclica para la masa que se ha fijado, el punto que está marcado en la gráfica es la frecuencia epicíclica para  $r_0$ , esta es  $\kappa_* = 425.94Hz$ .

<sup>5</sup>Esto pasa cuando tenemos “batimientos” entre dos frecuencias, que en este caso tenemos

$$\text{sen}(2\pi\kappa_{pert}t) + \text{sen}(2\pi\kappa_r t) \simeq \text{sen}[2\pi(\kappa_{pert} + \kappa_r)t] + \text{sen}[2\pi(\kappa_{pert} - \kappa_r)t].$$

Estas son combinaciones algebraicas de  $\kappa_r$  y  $\kappa_{pert}$ .

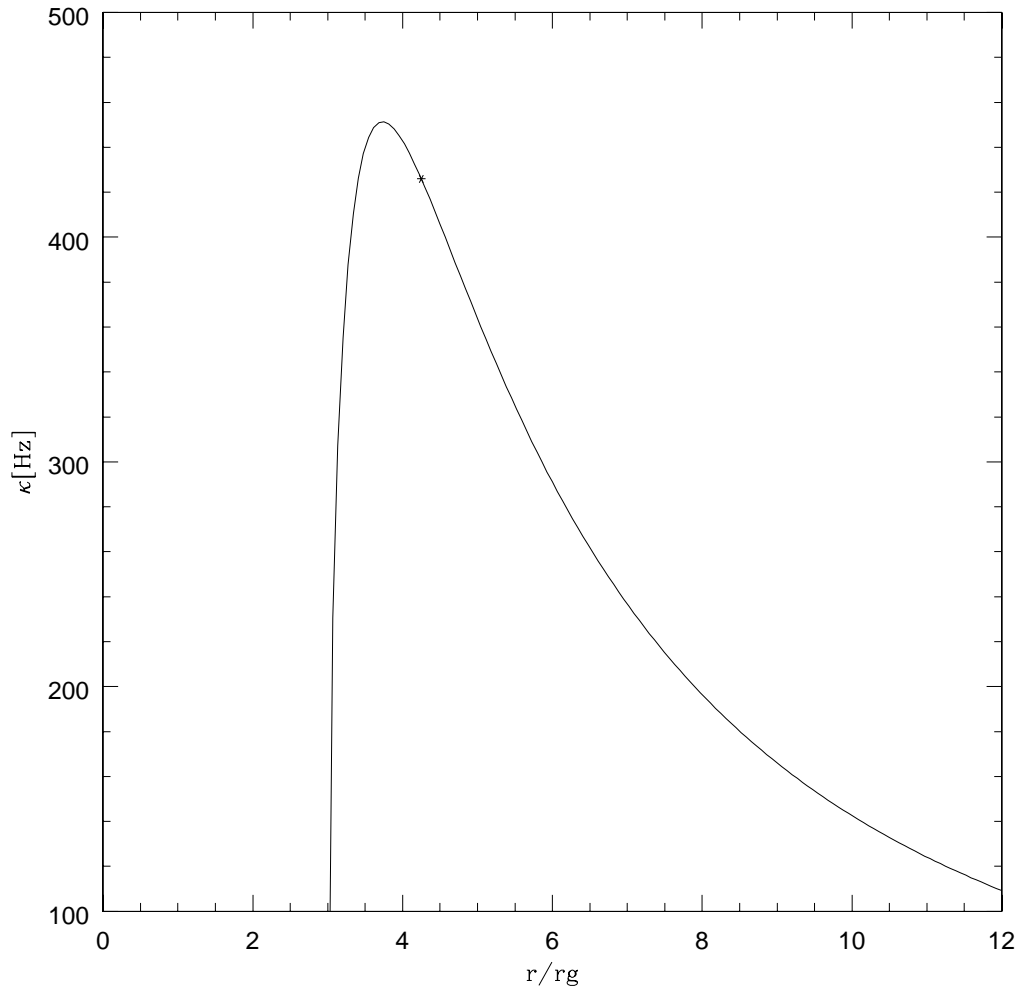
<sup>6</sup>La nomenclatura usada es  $\rho_{max,15} = \rho_{max} \times 10^{-15}$  con unidades de  $\text{kg m}^{-3}$ .



**Figura 5.3:** Distribución de momento angular constante y ley de potencia en el radio con el potencial de Paczyński-Wiita. La línea sólida es la curva descrita por la ecuación (4.96) para  $M_{an} = 2.5M_{\odot}$ . La línea punteada representa a la distribución de momento angular constante, que es  $l_k(r_0 = 4.25r_g)$ . La línea discontinua representa la distribución de momento angular en ley de potencia en el radio con  $\alpha = 0.1$ .

**Tabla 5.1:** Modelos para disco de diferentes tamaños en un potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r[\text{Hz}]$	$l_0/(r_g c)$	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}[\text{MKS}]$
(PWa)	0.85	2.98	6.9	4.25	330	1.9063	-0.0905	6.56259
(PWb)	0.90	3.23	6.12	4.25	365	1.9063	-0.0959	1.94447
(PWc)	0.99	3.86	4.7	4.25	420	1.9063	-0.1054	0.00194



**Figura 5.4:** Frecuencia epicyclica con el potencial de Paczyński-Wiita. La línea sólida es la curva que describe la ecuación (4.108) para  $M_{an} = 2.5M_{\odot}$ . El punto mostrado corresponde a la evaluación de la ecuación (4.108) en  $r = r_0$ , es decir,  $\kappa_*(r = r_0 = 4.25r_g) = 425.94 \text{ Hz}$ .

### 5.2.1. Resultados para el potencial de Newton

En la figura 5.5 se muestran las transformadas de Fourier con sus respectivos toros en sección meridional (grande, intermedio y pequeño) con el potencial de Newton con el momento angular constante. De esta figura podemos observar picos prominentes (frecuencias fundamentales), los cuales se ubican en 395 Hz, 440 Hz y 515 Hz para los modelos (Na), (Nb) y (Nc), respectivamente. Para el caso del toro grande sólo podemos apreciar una frecuencia batida en 595 Hz que es la combinación entre la frecuencia fundamental ( $\kappa_r$ ) y la perturbación ( $\kappa_{pert}$ ), y además se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$  en 790 Hz. En la figura correspondiente al toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas entre la frecuencia fundamental y la perturbativa en 640 Hz ( $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ) y en 240 Hz ( $\kappa_r - \kappa_{pert}$ ), y un sobretono en 880 Hz, correspondiente a  $2\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecian más picos en el espectro como las frecuencias batidas  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , así como un sobretono de la frecuencia natural en 835 Hz, correspondiente a  $1.5\kappa_r$ . Ligeramente se alcanza a observar una frecuencia en 1030 Hz correspondiente al sobretono  $2\kappa_r$ .

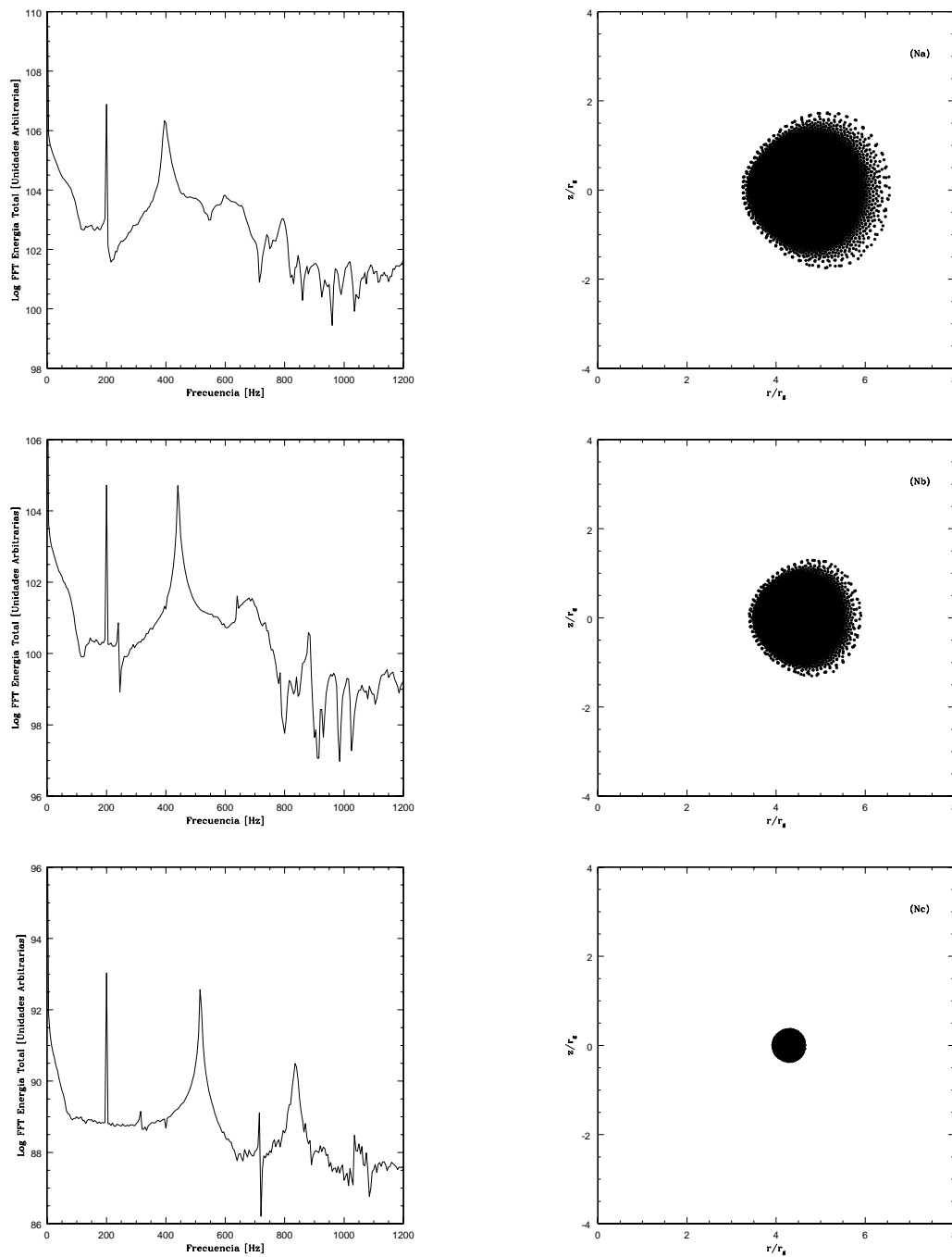
Las secciones meridionales mostradas en la figura 5.5, que corresponden para el potencial de Newton, podemos apreciarlas de forma más circular que las secciones meridionales mostradas en la figura 5.2, que corresponden para el potencial de Paczyński-Wiita. Es más claro si comparamos los modelos (Nc) y (PWc). Recuérdese que la velocidad angular radial para el potencial de Newton,  $\Omega_r$ , es igual a la velocidad angular vertical,  $\Omega_z$ , por lo tanto el tiempo de cruce de una onda de sonido para el potencial de Newton es el mismo para  $r$  y  $z$ . En cambio para el potencial de Paczyński-Wiita las velocidades angulares son diferentes, donde  $\Omega_r < \Omega_z$ , por lo tanto el tiempo de cruce de una onda de sonido para el potencial de Paczyński-Wiita es menor en  $r$  que en  $z$ . Esto tiene que ver con la geometría del toro, ya que como pudimos observar los toros construidos con el potencial de Newton son casi círculos y para el potencial de Paczyński-Wiita los toros son elípticos.

En la tabla 5.2 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los toros.

**Tabla 5.2:** Modelos para disco de diferentes tamaños en un potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$l_0/(r_g c)$	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(Na)	0.85	3.22	6.54	4.25	395	1.4577	-0.1000	8.84425
(Nb)	0.90	3.38	5.91	4.25	440	1.4577	-0.1058	2.62052
(Nc)	0.99	3.90	4.66	4.25	515	1.4577	-0.1164	0.00262





**Figura 5.5:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular constante con el potencial de Newton.

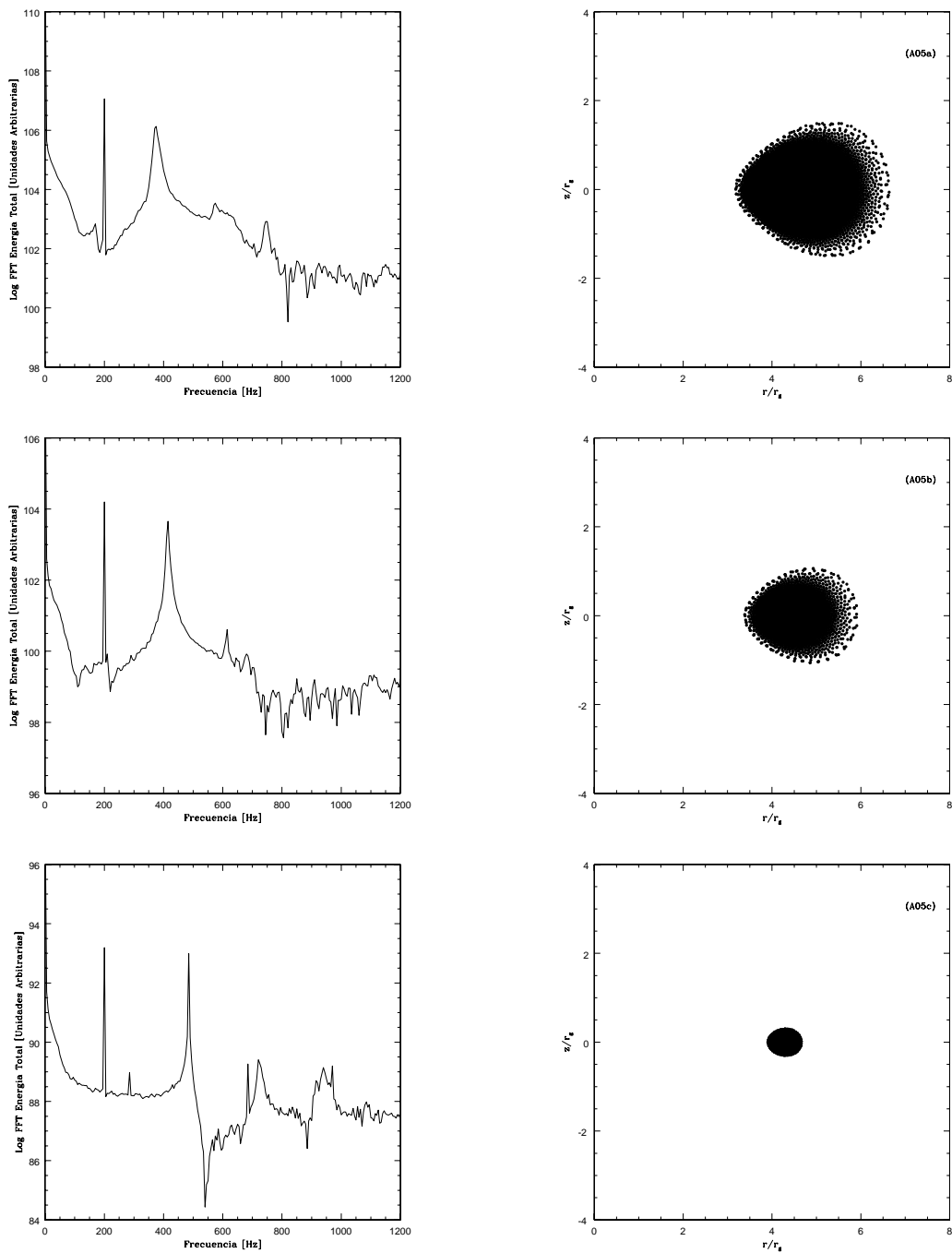
### 5.2.2. Resultados para el potencial de Artemova

En la figura 5.6 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros con el potencial de Artemova *et al.* (1996) para un parámetro de Kerr,  $a = 0.5(cr_g/2)$ . De esta figura podemos observar picos prominentes (frecuencias fundamentales), los cuales se ubican en 375 Hz, 415 Hz y 485 Hz para los modelos (A05a), (A05b) y (A05c), respectivamente. Para el caso del toro grande sólo podemos apreciar una frecuencia batida en 575 Hz que es la combinación entre la frecuencia fundamental ( $\kappa_r$ ) y la perturbación ( $\kappa_{pert}$ ), y además se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$  en 750 Hz. En la gráfica (transformada de Fourier) del toro intermedio se aprecia un frecuencia batida entre la frecuencia fundamental y la perturbativa en 615 Hz ( $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ), y un sobretono en 680 Hz correspondientes a  $1.65\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecian más picos en el espectro, como las frecuencias batidas  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , así como dos sobretonos de la frecuencia natural uno en 720 Hz y el otro en 970 Hz correspondientes a  $1.5\kappa_r$  y  $2\kappa_r$ , respectivamente. Ligeramente se alcanza a observar una frecuencia en 1085 Hz correspondiente a la frecuencia batida  $\kappa_r + 3\kappa_{pert}$ . En la tabla 5.3 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.3:** Modelos para disco de diferentes tamaños en el potencial de Artemova *et al.* (1996) para un parámetro de Kerr,  $a = 0.5(cr_g/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$l_0/(r_g c)$	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A05a)	0.85	3.20	6.65	4.25	375	1.70589	-0.0965	7.95938
(A05b)	0.90	3.36	5.91	4.25	415	1.70589	-0.1022	2.35834
(A05c)	0.99	3.91	4.68	4.25	485	1.70589	-0.1124	0.00235

En la figura 5.7 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros con el potencial de Artemova *et al.* (1996) para un parámetro de Kerr,  $a = 0.9(cr_g/2)$ . De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias los cuales se ubican en 394 Hz, 435 Hz y 511 Hz para los modelos (A09a), (A09b) y (A09c), respectivamente. Para el caso del toro grande sólo podemos apreciar una frecuencia batida en 594 Hz que es la suma entre la frecuencia fundamental ( $\kappa_r$ ) y la perturbación ( $\kappa_{pert}$ ), y además se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$  en 788 Hz. Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas entre la frecuencia fundamental y la perturbativa en 635 Hz y en 235 Hz correspondientes a  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , respectivamente. En el toro pequeño se aprecian más picos en el espectro como las frecuencias batidas  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , en 711 Hz y 311 Hz, res-



**Figura 5.6:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular constante con el potencial de Artemova *et al.* para  $a = 0.5(r_g c/2)$ .

pectivamente. Se aprecian sobretonos de la frecuencia natural en 745 Hz, 860 Hz, 1025 Hz, 1070 Hz correspondientes a  $1.5\kappa_r$ ,  $1.5\kappa_r + .5\kappa_{pert}$ ,  $2\kappa_r$  y  $1.5\kappa_r + 1.5\kappa_{pert}$ , respectivamente. En la tabla 5.4 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.4:** Modelos para disco de diferentes tamaños en el potencial de Artemova *et al.* (1996) para un parámetro de Kerr,  $a = 0.9(cr_g/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

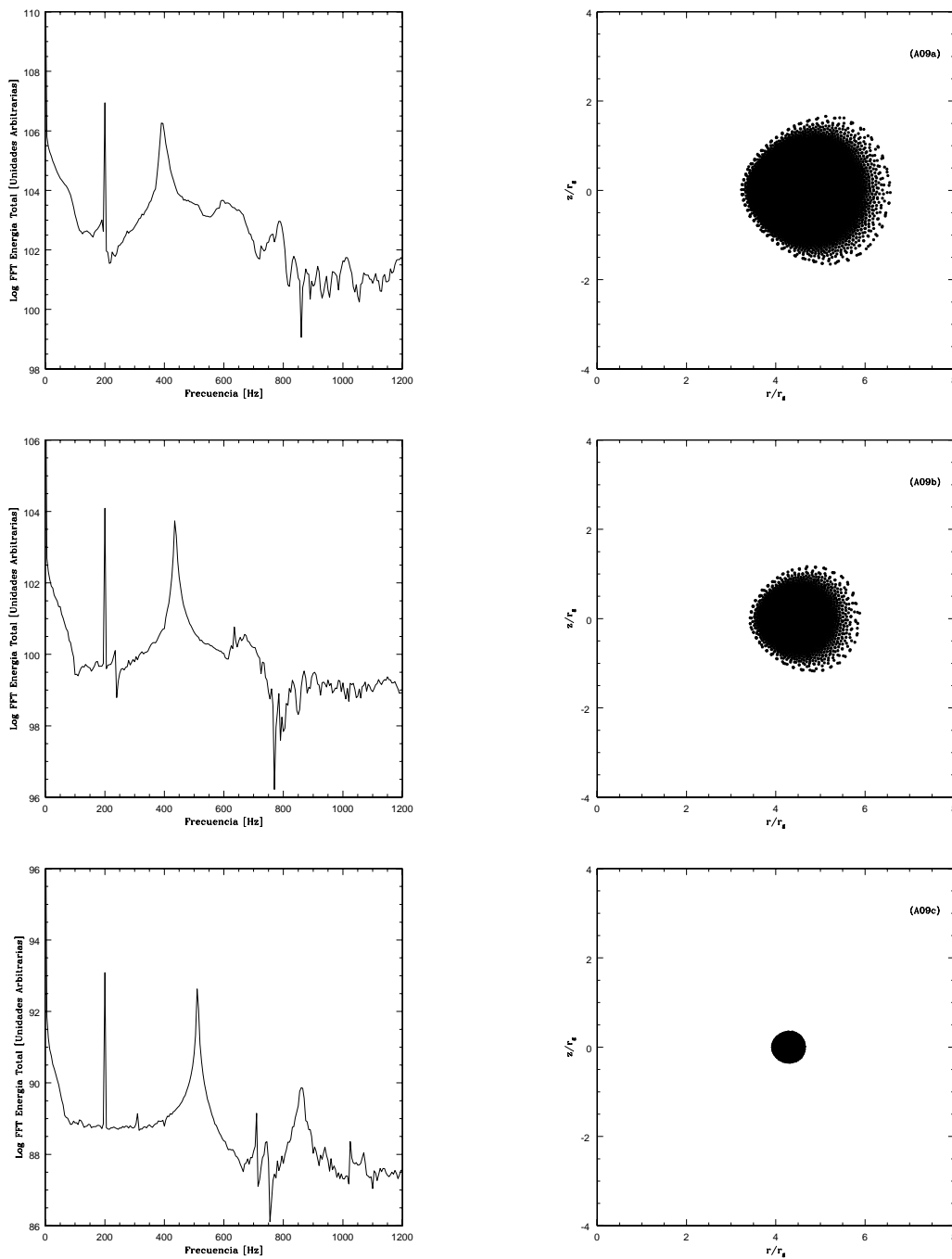
Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$l_0/(r_g c)$	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A09a)	0.85	3.22	6.56	4.25	394	1.54328	-0.0965	8.68556
(A09b)	0.90	3.41	5.88	4.25	435	1.54328	-0.1022	2.57350
(A09c)	0.99	3.92	4.65	4.25	511	1.54328	-0.0965	0.00257

Comparando las secciones meridionales de los modelos (Nc), (PWc), (A05c) y (A09c), podemos ver un comportamiento en la geometría del disco. Vemos que conforme el parámetro de Kerr  $a \rightarrow r_g c/2$  el disco de acreción es más circular, ya que los modelos contruidos con el potencial de Newton corresponden a un parámetro de Kerr  $a = r_g c/2$  y los modelos contruidos con el potencial de Paczyński-Wiita corresponden a un parámetro de Kerr  $a = 0(r_g c/2)$ .

### 5.2.3. Resultados para la distribución de momento angular como ley de potencia en el radio

Los siguientes toros fueron contruidos con una distribución de momento angular en forma de ley de potencias en el radio, definida por la ecuación 5.2. Note que en el centro del disco de acreción,  $r_0$ , la distribución se reduce al caso constante, pero esto no es en todo el disco. Para radios menores que  $r_0$ , el momento angular kepleriano evaluado en  $r_0$  es reducido mientras que para radios mayores el momento angular es aumentado. Este aumento y esta reducción son muy pequeños, puesto que el índice fue fijado a  $\alpha = 0.1$ .

En la figura 5.8 se muestran las transformadas de Fourier y sus distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Newton. De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 395 Hz, 436 Hz y 515 Hz para los modelos (Nd), (Ne) y (Nf), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar una frecuencia batida en 595 Hz que es la suma entre la frecuencia fundamental ( $\kappa_r$ ) y la perturbación ( $\kappa_{pert}$ ), y además se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$  en 790 Hz. Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas entre la frecuencia fundamental y la per-



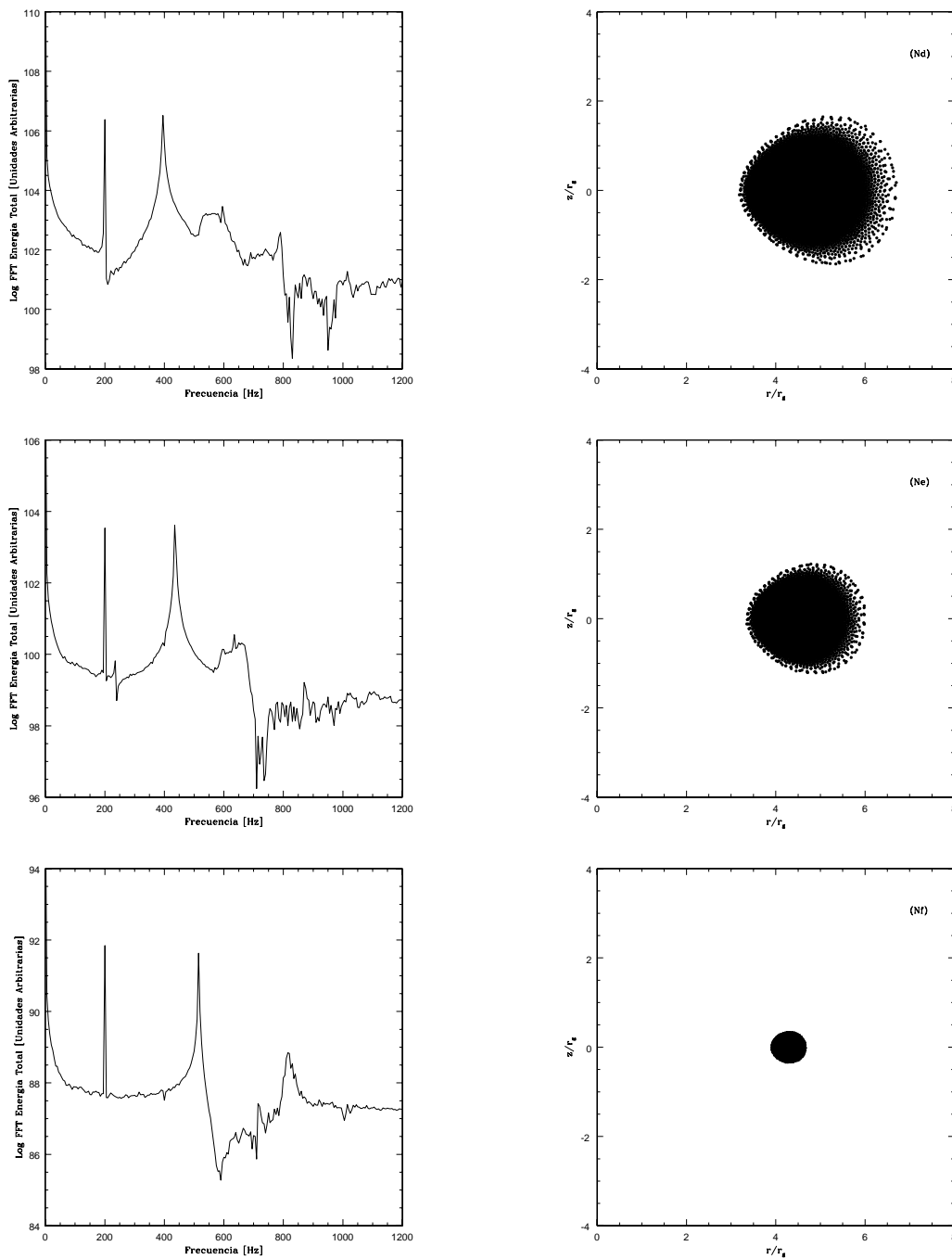
**Figura 5.7:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular constante con el potencial de Artemova *et al.* para  $a = 0.9(r_g c/2)$ .

turbativa en 636 Hz y en 236 Hz correspondientes a  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , respectivamente. Además ligeramente se alcanza a apreciar el sobretono  $2\kappa_r$  en 870 Hz. En el toro pequeño se aprecian las frecuencias batidas  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + 1.5\kappa_{pert}$ , en 715 Hz y 815 Hz, respectivamente. Ligeramente se alcanza a apreciar un sumidero en 400 Hz que corresponde a un sobretono de la perturbación en  $2\kappa_{pert}$ . En la tabla 5.5 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.5:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(Nd)	0.85	3.23	6.72	4.25	395	-0.0888	6.2116
(Ne)	0.90	3.37	5.98	4.25	436	-0.0941	1.8404
(Nf)	0.99	3.91	4.66	4.25	515	-0.1035	0.0018

En la figura 5.9 se muestran las transformadas de Fourier y sus distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Paczyński-Wiita. Analizando esta figura observamos que para los modelos (PWd) y (PWe) se tiene un desbordamiento del disco hacia el agujero negro, esto es por el tipo de distribución de momento angular, puesto que las partículas más cercanas al agujero tienen menor momento angular que las que están más lejos del agujero. Se observan picos prominentes en los espectros de frecuencias los cuales se ubican en 315 Hz, 350 Hz y 415 Hz para los modelos (PWd), (PWe) y (PWf), respectivamente. Para el toro grande se aprecia una frecuencia resonante de la frecuencia de perturbación en 400 Hz, la frecuencia batida entre la frecuencia fundamental ( $\kappa_r$ ) y la perturbación ( $\kappa_{pert}$ ) en 515 Hz ( $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ) y además se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$  en 630 Hz. Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas entre la frecuencia fundamental y la perturbativa en 150 Hz y en 550 Hz correspondientes a  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ , respectivamente. Además se observa una frecuencia en 400 Hz correspondiente a un sobretono de la perturbación, por último se alcanzan a ver dos picos más, uno en 465 Hz y el otro en 695 Hz correspondientes a  $0.5\kappa_r + 1.5\kappa_{pert}$  y a  $\approx 2\kappa_r$ , respectivamente. Esta última siendo un sobretono de la frecuencia fundamental. En el toro pequeño se aprecian las frecuencias batidas  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , en 615 Hz y 215 Hz, respectivamente. Se alcanza a apreciar una frecuencia en 400 Hz, correspondientes a  $2\kappa_{pert}$  que es un sobretono de la perturbación. En 535 Hz tenemos un pico correspondiente a  $1.25\kappa_r$ , ligeramente se aprecia otro pico en 735 Hz, que correspondería a  $1.25\kappa_r + \kappa_{pert}$  una frecuencia batida entre la perturbación y la frecuencia fundamental, además se observa otra frecuencia en 835 Hz correspondiente a  $\simeq 2\kappa_r$  o quizá a  $1.25\kappa_r + 1.5\kappa_{pert}$ . En la tabla 5.6 se



**Figura 5.8:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular en ley de potencias en el radio con el potencial de Newton.

muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

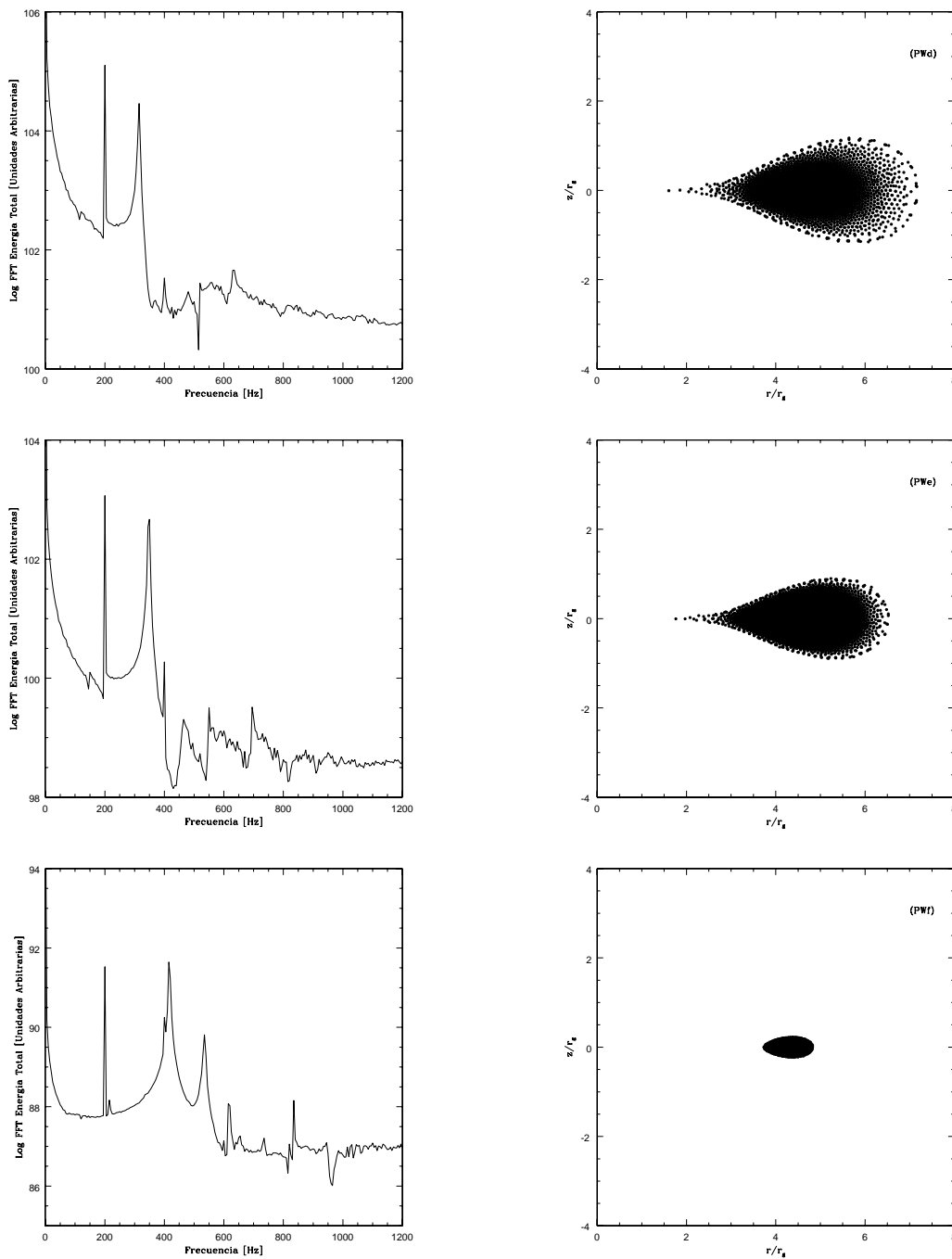
**Tabla 5.6:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(PWd)	0.85	2.56	7.15	4.25	315	-0.0715	3.23713
(PWe)	0.90	2.58	6.52	4.25	350	-0.0757	0.95914
(PWf)	0.99	3.73	4.83	4.25	415	-0.0833	0.00095

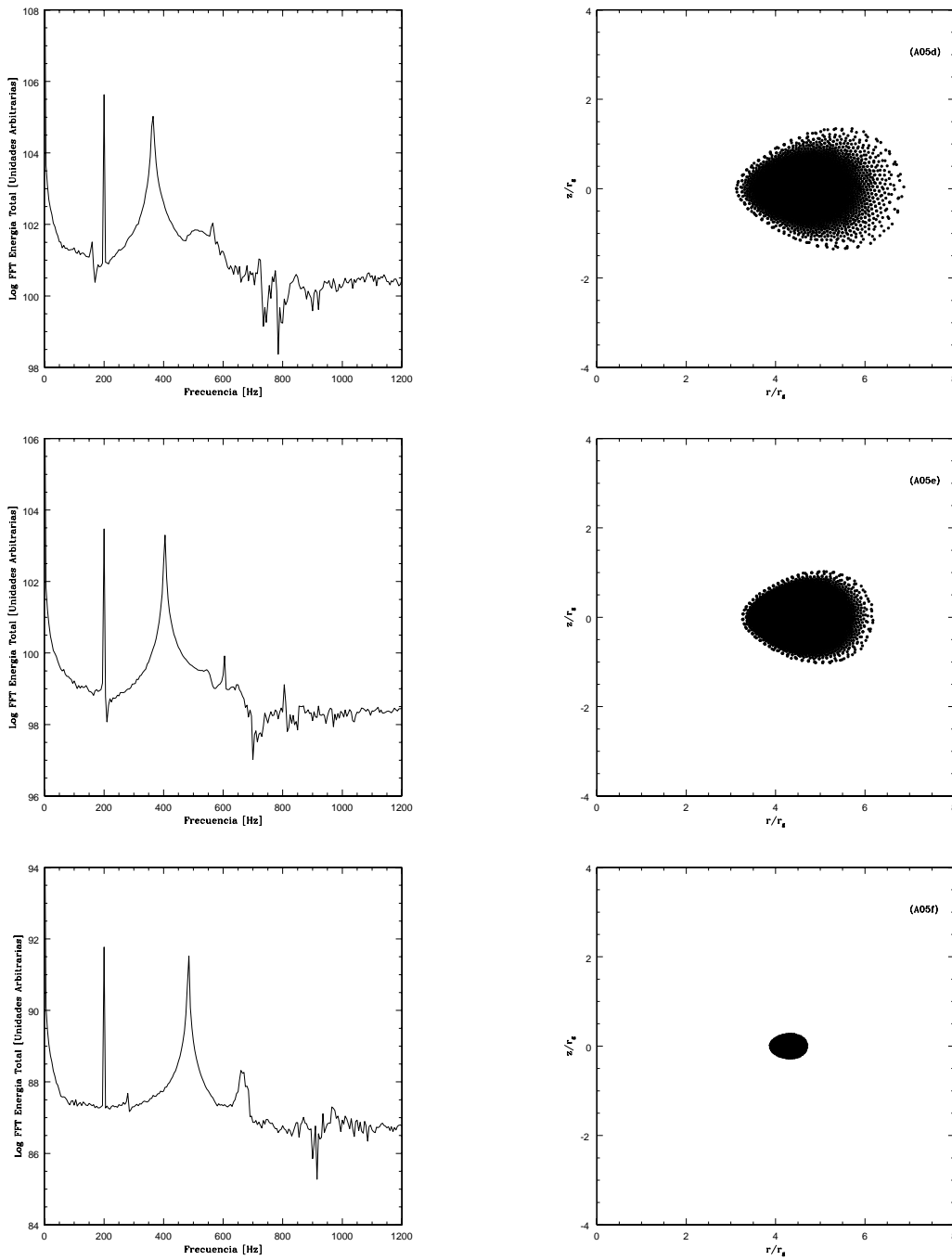
En la figura 5.10 se muestran las transformadas de Fourier y sus distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . Se observan picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 365 Hz, 405 Hz y 485 Hz para los modelos (PWd), (PWe) y (PWf), respectivamente. Para el toro grande se aprecian dos frecuencias batidas en 165 Hz y 565 Hz, correspondientes a  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ , respectivamente. Se aprecia una frecuencia en 729 Hz que corresponde a  $2\kappa_r$  que es un sobretono de la frecuencia fundamental. Se alcanza a apreciar ligeramente una frecuencia en 765 Hz correspondiente a  $\kappa_r + 2\kappa_{pert}$ , y por último se alcanza a apreciar una frecuencia en 845 Hz que corresponde a  $\simeq (2\kappa_r + .5\kappa_{pert})$  que es una frecuencia batida entre la frecuencia fundamental y la frecuencia perturbativa. Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas entre la frecuencia fundamental y la perturbativa en 605 Hz y en 805 Hz correspondientes a  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + 2\kappa_{pert}$ , respectivamente. En el toro pequeño se aprecia la frecuencia batida  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , en 285 Hz. Se alcanza a apreciar un frecuencia en 660 Hz, correspondientes a  $1.5\kappa_r + 0.25\kappa_{pert}$  que es un frecuencia batida entre las frecuencias fundamental y la perturbación. Ligeramente se alcanza a apreciar la frecuencia resonante  $2\kappa_r$  en 770 Hz. En la tabla 5.7 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

En la figura 5.11 se muestran las transformadas de Fourier y sus distintos tamaños de los toros con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . Se observan picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 389 Hz, 430 Hz y 510 Hz para los modelos (A09d), (A09e) y (A09f), respectivamente. Para el toro grande se aprecian dos frecuencias batidas en 589 Hz y 189 Hz, correspondientes a  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , respectivamente. Se aprecia una frecuencia en 775 Hz que corresponde a  $2\kappa_r$  que es un sobretono de la frecuencia fundamental. Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas entre la frecuencia fundamental y la perturbativa en 630 Hz y en 230 Hz





**Figura 5.9:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular en ley de potencias en el radio con el potencial de Paczyński-Wiita.



**Figura 5.10:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular en ley de potencias en el radio con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ .

**Tabla 5.7:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

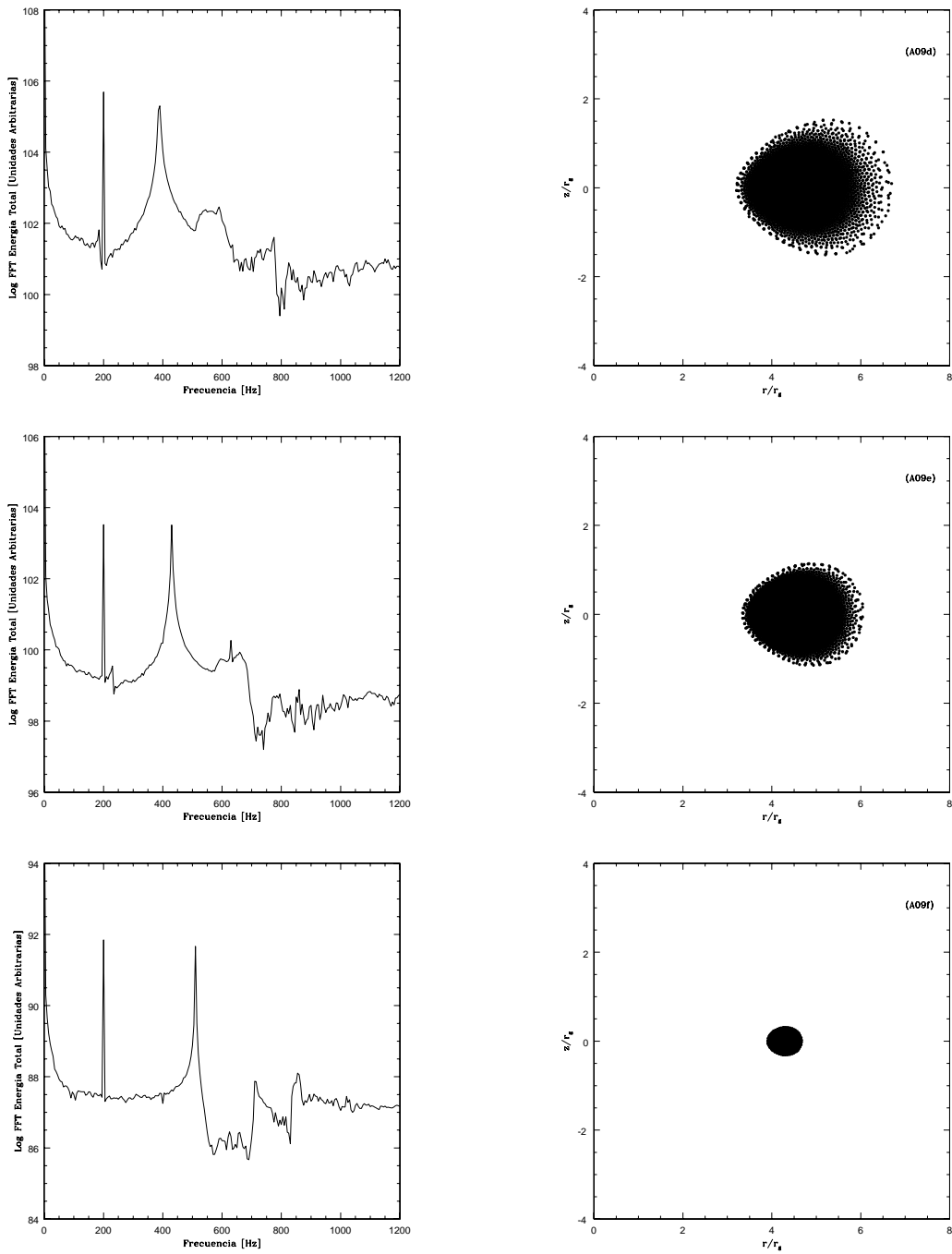
Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A05d)	0.85	3.13	6.89	4.25	365	-0.0813	4.75808
(A05e)	0.90	3.27	6.15	4.25	405	-0.0861	1.40980
(A05f)	0.99	3.86	4.71	4.25	485	-0.0947	0.00140

correspondientes a  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , respectivamente. Ligeramente se aprecia la frecuencia 860 Hz correspondiente a  $2\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecia la frecuencia batida  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ , en 710 Hz. Se alcanza a apreciar un frecuencia en 855 Hz, correspondientes a  $1.5\kappa_r + 0.5\kappa_{pert}$  que es una frecuencia batidad entre las frecuencias fundamental y la perturbación. Ligeramente se alcanza a apreciar un sobretono de la perturbación en  $2\kappa_{pert}$ . En la tabla 5.8 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

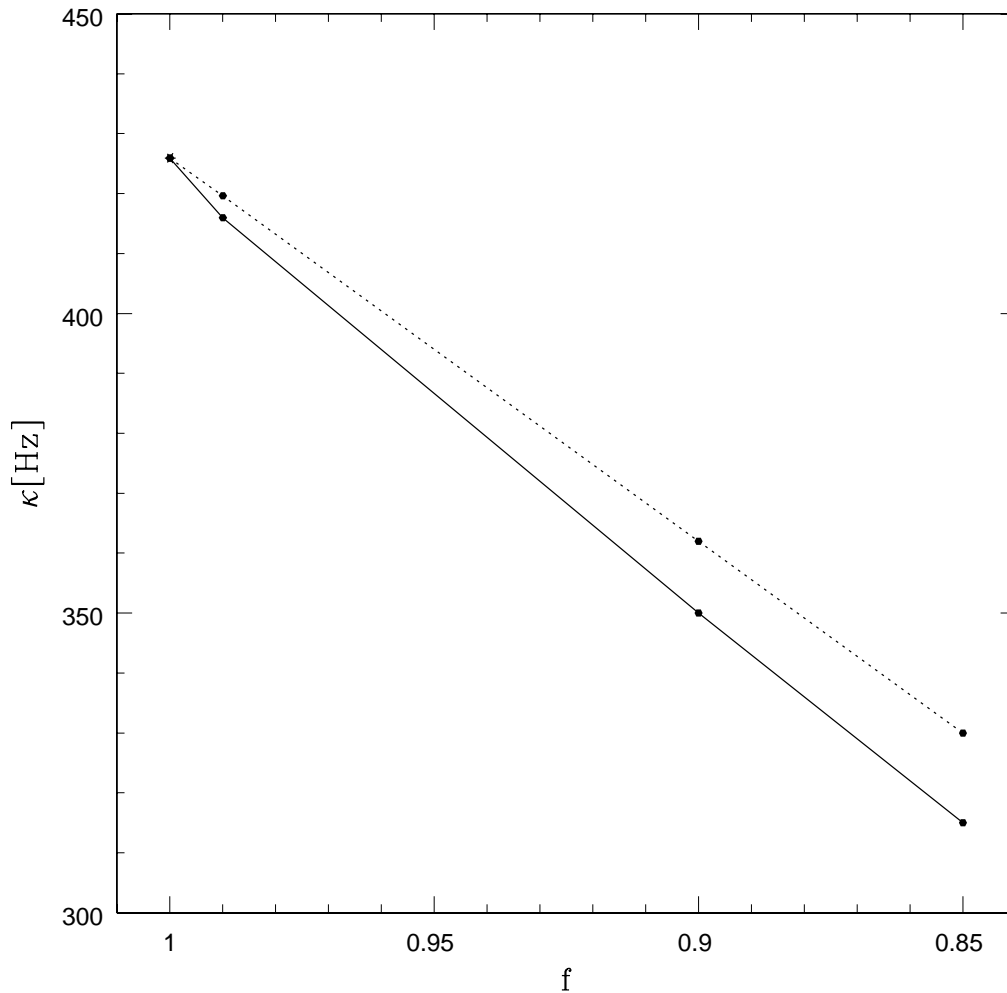
**Tabla 5.8:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A09d)	0.85	3.23	6.71	4.25	389	-0.0869	5.81291
(A09e)	0.90	3.33	6.05	4.25	430	-0.0920	1.72234
(A09f)	0.99	3.90	4.66	4.25	510	-0.1012	0.00172

En la figura 5.12 se presenta una comparación entre las frecuencias naturales obtenidas con las distribuciones de momento angular constante (línea punteada) y ley de potencia en el radio (línea sólida) ambas para el potencial de Paczyński-Wiita. El punto marcado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica obtenida de manera analítica. Se puede observar que la línea sólida decae más rápido que la línea punteada, es decir, las frecuencias naturales de toros construidos con una ley de potencia en el radio decaen más rápidamente que la frecuencias naturales de toros construidos con momento angular constante.



**Figura 5.11:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular en ley de potencias en el radio con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ .



**Figura 5.12:** Gráfica que esquematiza cómo decrece monótonicamente la frecuencia del modo fundamental,  $\kappa_r$ , conforme  $f$  decrece también (es decir se aumenta el tamaño del toro). La frecuencia fundamental parte de la frecuencia epicíclica,  $\kappa_*$ , encontrada analíticamente. Para este caso la frecuencia epicíclica es 425.94 Hz para  $r = r_0 = 4.25r_g$ . El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica analítica mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ . La línea sólida representa a las frecuencias del modo fundamental con un momento angular como ley de potencia en el radio [ $l(r) \propto r^{0.1}$ ] mientras que la línea punteada representa a las frecuencias del modo fundamental con un momento angular constante (véase la figura 5.4). Se puede apreciar que la línea sólida decae más rápidamente que la línea punteada.

### 5.2.4. Resultados para la distribución de momento angular propuesta por Qian *et al.* (2009)

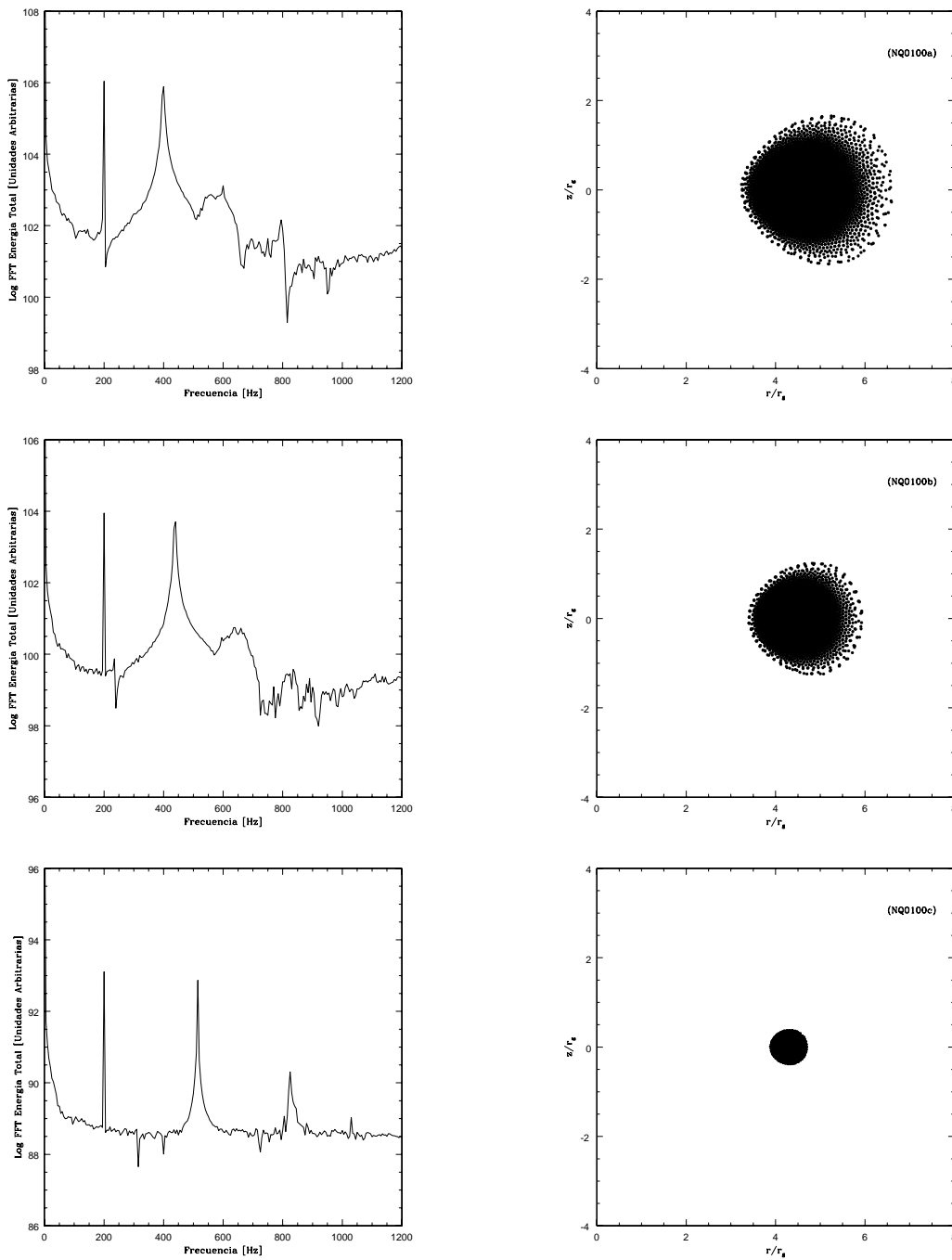
Los siguientes toros fueron construidos con la distribución de momento angular propuesta por Qian *et al.* (2009), definida por la ecuación 5.3. Note que en el centro del disco de acreción,  $r_0$ , la distribución se reduce al caso constante, pero esto no es en todo el disco. Para este trabajo se fijaron los exponentes que aparecen en la ecuación 5.3 de la siguiente manera,  $\beta = 0.0, 0.1$  y  $\zeta = 0.0, 0.1$ . Para el caso en que  $\beta = 0.0$  y  $\zeta = 0.0$ , la ecuación 5.3 se reduce a la ecuación 5.1, que es un caso ya considerado anteriormente.

#### Resultados para $\beta = 0.1$ y $\zeta = 0.0$

En la figura 5.13 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Newton. De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 399 Hz, 440 Hz y 515 Hz para los modelos (NQ0100a), (NQ0100b) y (NQ0100c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar una frecuencia batida en 599 Hz que es la suma entre la frecuencia fundamental ( $\kappa_r$ ) y la perturbación ( $\kappa_{pert}$ ), y además se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$  en 798 Hz. Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas entre la frecuencia fundamental y la perturbativa en 640 Hz y en 240 Hz correspondientes a  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , respectivamente. Además se alcanza a apreciar el sobretono  $1.5\kappa_r$  en 660 Hz, este sobretono esta en la misma joroba en donde se ubica la frecuencia batida  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ . En esta joroba se alcanzan a apreciar estas dos frecuencias. Ligeramente se alcanza a apreciar el sobretono  $2\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecian claramente tres sumideros en 315 Hz, 400 Hz y 715 Hz correspondientes a  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ ,  $2\kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ , respectivamente. Ligeramente se alcanza a apreciar una frecuencia en 1030 Hz corresponde a al sobretono  $2\kappa_r$ . El otro pico prominente ubicado en 823 Hz corresponde a la frecuencia batida  $\kappa_r + 1.5\kappa_{pert}$ . En la tabla 5.9 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.9:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(NQ0100a)	0.85	3.23	6.58	4.25	399	-0.0947	7.5200
(NQ0100b)	0.90	3.42	5.92	4.25	440	-0.1003	2.2281
(NQ0100c)	0.99	3.88	4.69	4.25	515	-0.1103	0.0022



**Figura 5.13:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.0$  con el potencial de Newton.

En la figura 5.14 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Paczyński-Wiita. De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 329 Hz, 362

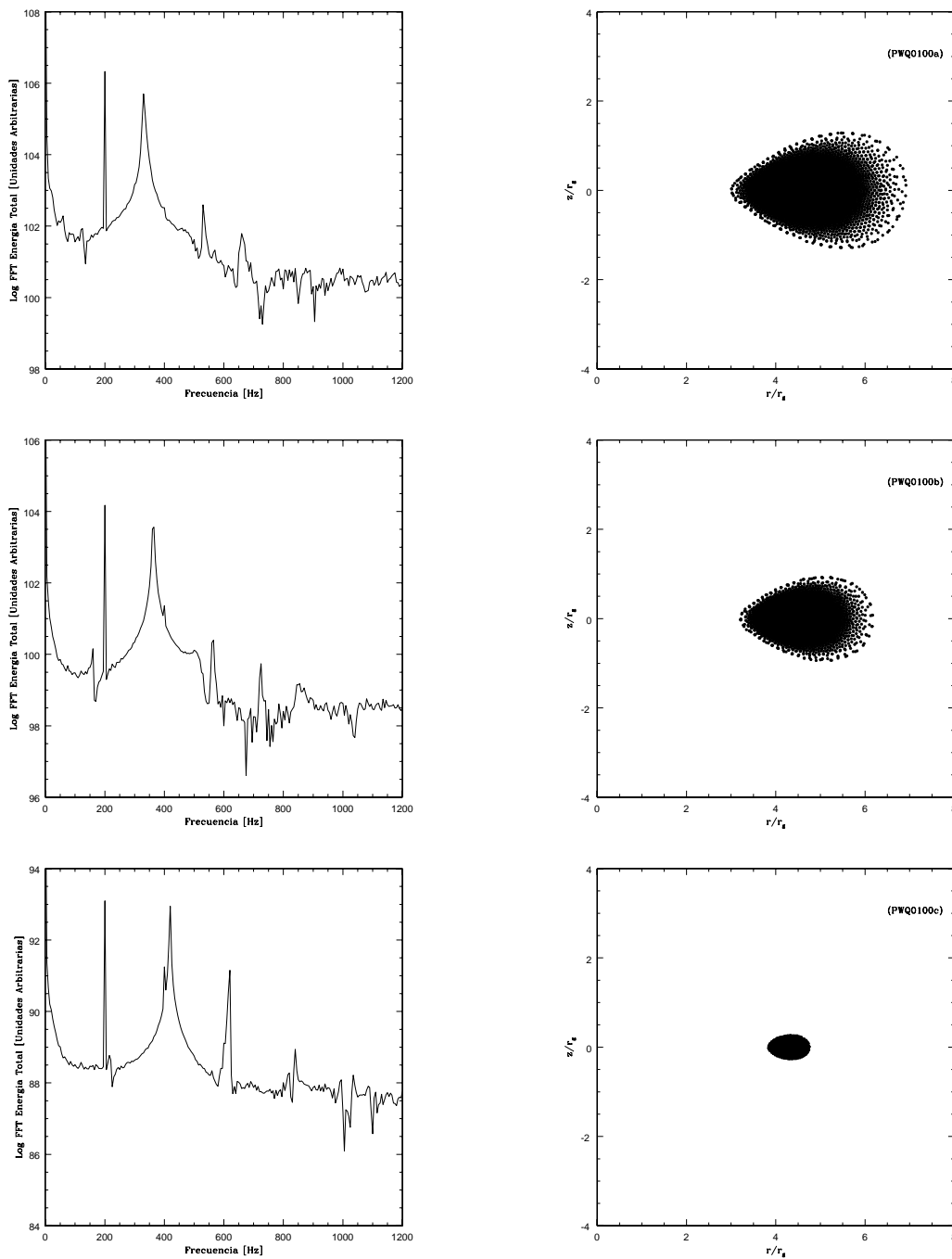
Hz y 420 Hz para los modelos (PWQ0100a), (PWQ0100b) y (PWQ0100c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar una frecuencia batida en 529 Hz que es la suma entre la frecuencia fundamental ( $\kappa_r$ ) y la perturbación ( $\kappa_{pert}$ ), y se aprecia  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  en 129 Hz, siendo este último un sumidero. Por último se aprecia una frecuencia en 658 Hz correspondiente a el sobretono  $2\kappa_r$ . Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas entre la frecuencia fundamental y la perturbativa en 162 Hz y en 562 Hz correspondientes a  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ , respectivamente. Además se alcanza a apreciar el sobretono  $2\kappa_r$  en 724 Hz, y además ligeramente el sobretono  $2\kappa_{pert}$  en 400 Hz. En el toro pequeño se aprecian claramente un sumidero en 1000 Hz correspondiente a  $5\kappa_{pert}$ , siendo un sobretono de la perturbación. Son visibles las frecuencias batidas  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ,  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $2\kappa_r + \kappa_{pert}$ , y además se aprecian los sobretonos  $2\kappa_r$  y  $2\kappa_{pert}$ . En la tabla 5.10 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.10:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(PWQ0100a)	0.85	3.01	6.92	4.25	329	-0.0850	5.4378
(PWQ0100b)	0.90	3.22	6.17	4.25	362	-0.0900	1.6112
(PWQ0100c)	0.99	3.84	4.75	4.25	420	-0.0990	0.0016

En la figura 5.15 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 375 Hz, 412 Hz y 485 Hz para los modelos (A05Q0100a), (A05Q0100b) y (A05Q0100c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar dos frecuencias batidas,  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  en 175 Hz y 575 Hz, respectivamente. Por último se aprecia una frecuencia en 750 Hz que corresponde al sobretono  $2\kappa_r$ . Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas entre la frecuencia fundamental y la perturbativa en 212 Hz y en 612 Hz correspondientes a  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ , respectivamente. Además se alcanza a apreciar el sobretono  $2\kappa_r$  en 824 Hz, siendo este un sumidero. El sumidero más grande que se aprecia en la gráfica corresponde a  $\kappa_r + 1.5\kappa_{pert}$  en 712 Hz. En el toro pequeño se aprecian claramente un sumidero acompañado de un pico en 927 Hz correspondiente a  $1.5\kappa_r + \kappa_{pert}$ . Son visibles las frecuencias batidas  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ,  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , y además se aprecian los sobretonos de la frecuencia fundamental en  $1.5\kappa_r$  y  $2\kappa_r$ . En la tabla 5.11 se muestran los





**Figura 5.14:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.0$  con el potencial de Paczyński-Wiita.

valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.11:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

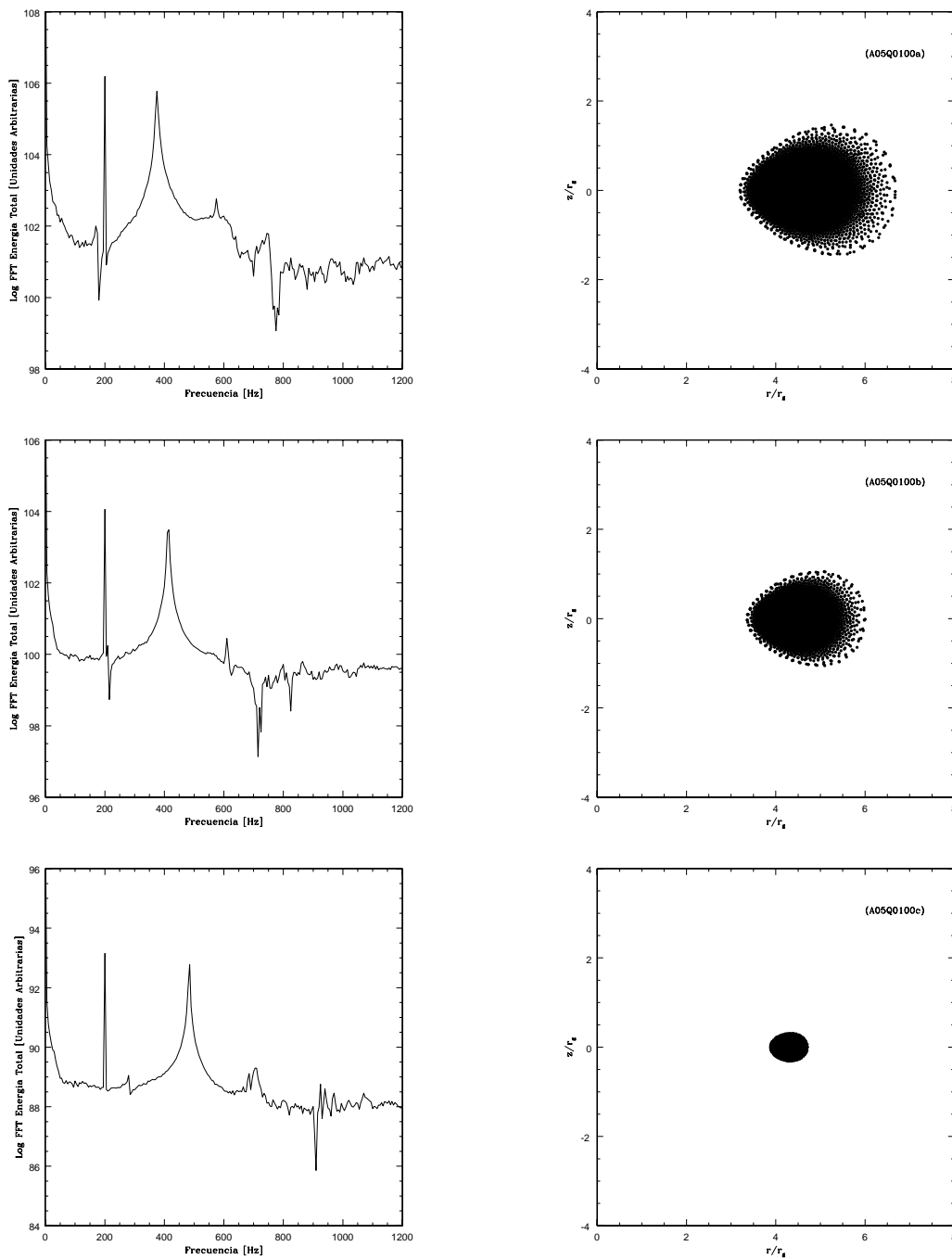
Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A05Q0100a)	0.85	3.19	6.67	4.25	375	-0.0909	6.6613
(A05Q0100b)	0.90	3.36	5.98	4.25	412	-0.0963	1.9737
(A05Q0100c)	0.99	3.88	4.71	4.25	485	-0.1059	0.0019

En la figura 5.16 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 395 Hz, 435 Hz y 510 Hz para los modelos (A09Q0100a), (A09Q0100b) y (A09Q0100c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar la frecuencia batida,  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ , en 595 Hz, y además se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$  en 790 Hz. Para el toro intermedio se aprecian una joroba en seguida de la frecuencia del modo fundamental. En esta joroba se alcanza a apreciar tres pequeños picos correspondientes a  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ,  $1.5\kappa_r$  y  $0.5\kappa_r + 2.5\kappa_{pert}$  en 635 Hz, 653 Hz y 717 Hz, respectivamente. Se alcanza a apreciar la frecuencia batida  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y el sobretono  $2\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecian claramente un sumidero acompañado de un pico en  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ . Se aprecian dos sumideros más (más pequeños) correspondientes a  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $2\kappa_{pert}$ . El otro pico prominente fue localizado en  $0.5\kappa_r + 3\kappa_{pert}$ , y por último se alcanza a apreciar el sobretono  $2\kappa_r$ .

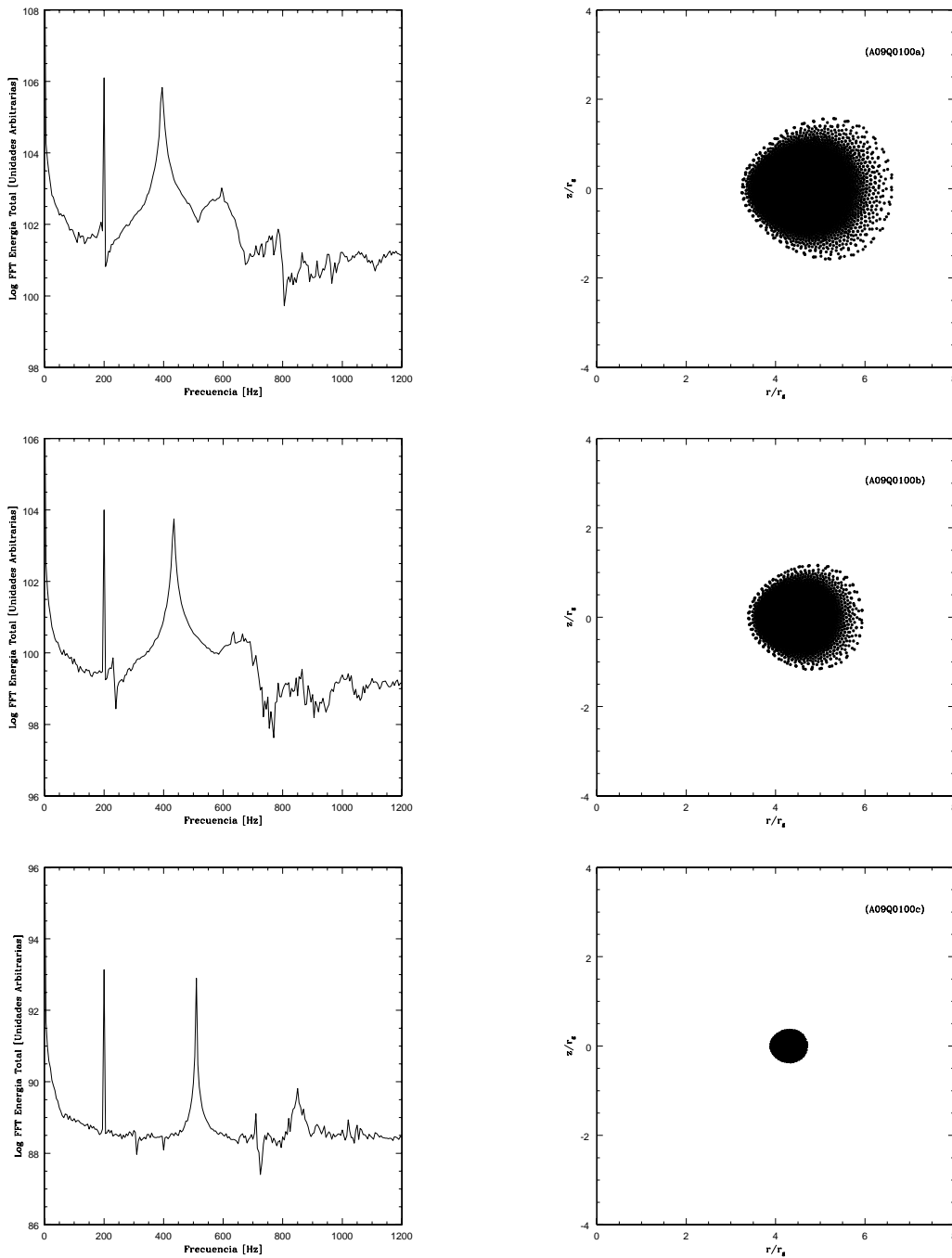
En la tabla 5.12 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

### Resultados para $\beta = 0.1$ y $\zeta = 0.1$

En la figura 5.17 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Newton. De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 395 Hz, 435 Hz y 515 Hz para los modelos (NQ0101a), (NQ0101b) y (NQ0101c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar dos frecuencias batidas en 595 Hz y 890 Hz correspondientes a  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $2\kappa_r + 0.5\kappa_{pert}$ , respectivamente. Además podemos apreciar dos frecuencias resonantes de la frecuencia del modo fundamental en  $1.5\kappa_r$  y  $2\kappa_r$ . Para el toro intermedio se



**Figura 5.15:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.0$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ .



**Figura 5.16:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.0$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ .

**Tabla 5.12:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A09Q0100a)	0.85	3.26	6.60	4.25	395	-0.0939	7.3419
(A09Q0100b)	0.90	3.38	5.93	4.25	435	-0.0995	2.1753
(A09Q0100c)	0.99	3.89	4.70	4.25	510	-0.1094	0.0022

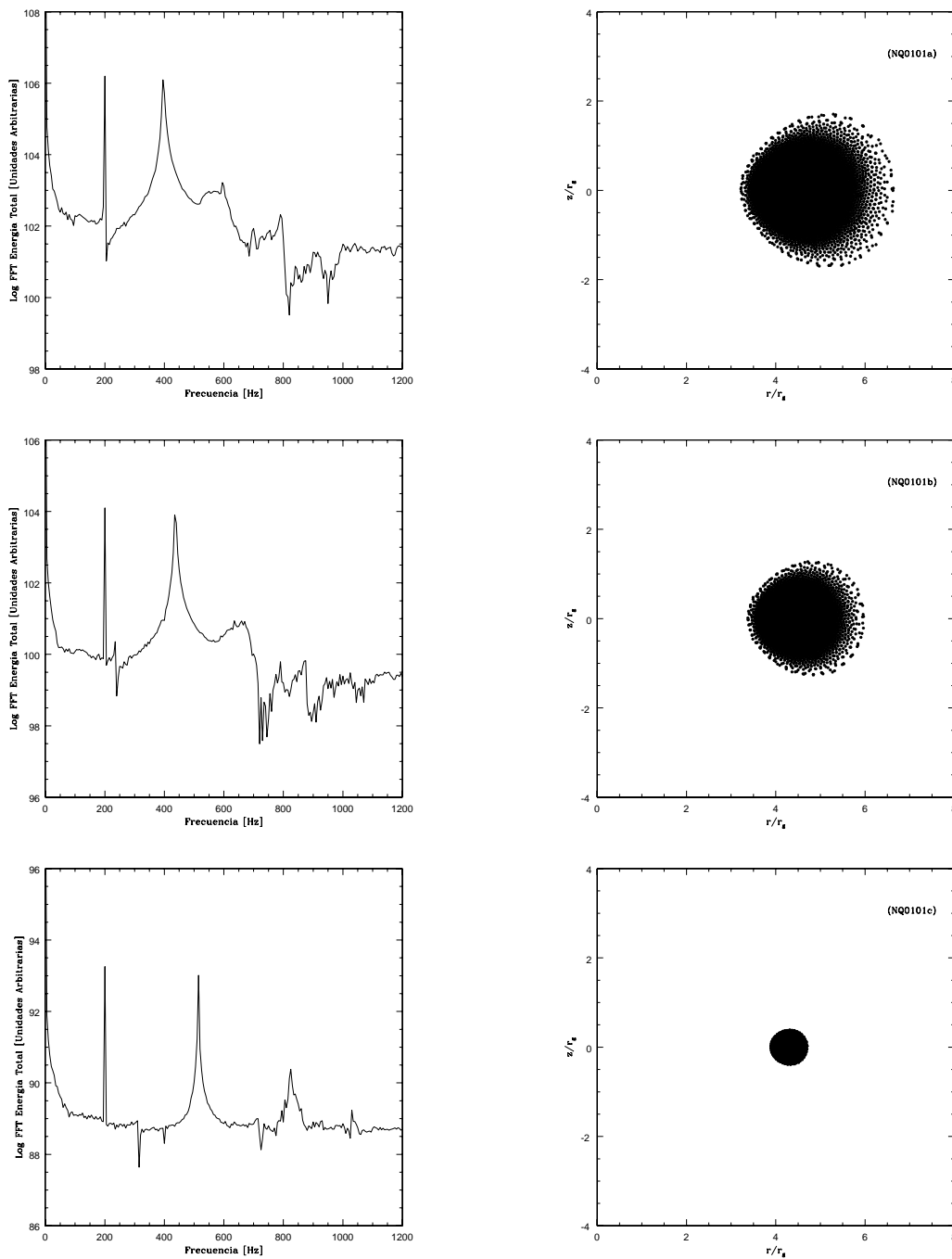
observa una joroba y en ésta se ubican la frecuencia batida  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y el sobretono  $1.5\kappa_r$ , siendo esta última una frecuencia resonante del modo fundamental. Además se observa la frecuencia batida  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , y las frecuencias resonantes  $2\kappa_r$  y  $4\kappa_{pert}$ . En el toro pequeño se aprecian claramente dos sumideros ubicados por debajo de la frecuencia fundamental, estos corresponden a  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $2\kappa_{pert}$ . Se aprecia otro sumidero acompañado de un pequeño pico en  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ . El otro pico prominente en el espectro corresponde a la frecuencia batida  $\kappa_r + 1.5\kappa_{pert}$ , y el último pico al sobretono de la frecuencia natural ubicado en  $2\kappa_r$ .

En la tabla 5.13 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.13:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(NQ0101a)	0.85	3.21	6.63	4.25	395	-0.0947	7.5200
(NQ0101b)	0.90	3.37	5.95	4.25	435	-0.1003	2.2281
(NQ0101c)	0.99	3.89	4.70	4.25	515	-0.1103	0.0022

En la figura 5.18 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Paczyński-Wiita. De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 329 Hz, 360 Hz y 420 Hz para los modelos (PWQ0101a), (PWQ0101b) y (PWQ0101c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar dos frecuencias batidas en  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , siendo este último un sumidero. Por último se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$ . Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas localizadas en  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ . Se



**Figura 5.17:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Newton.

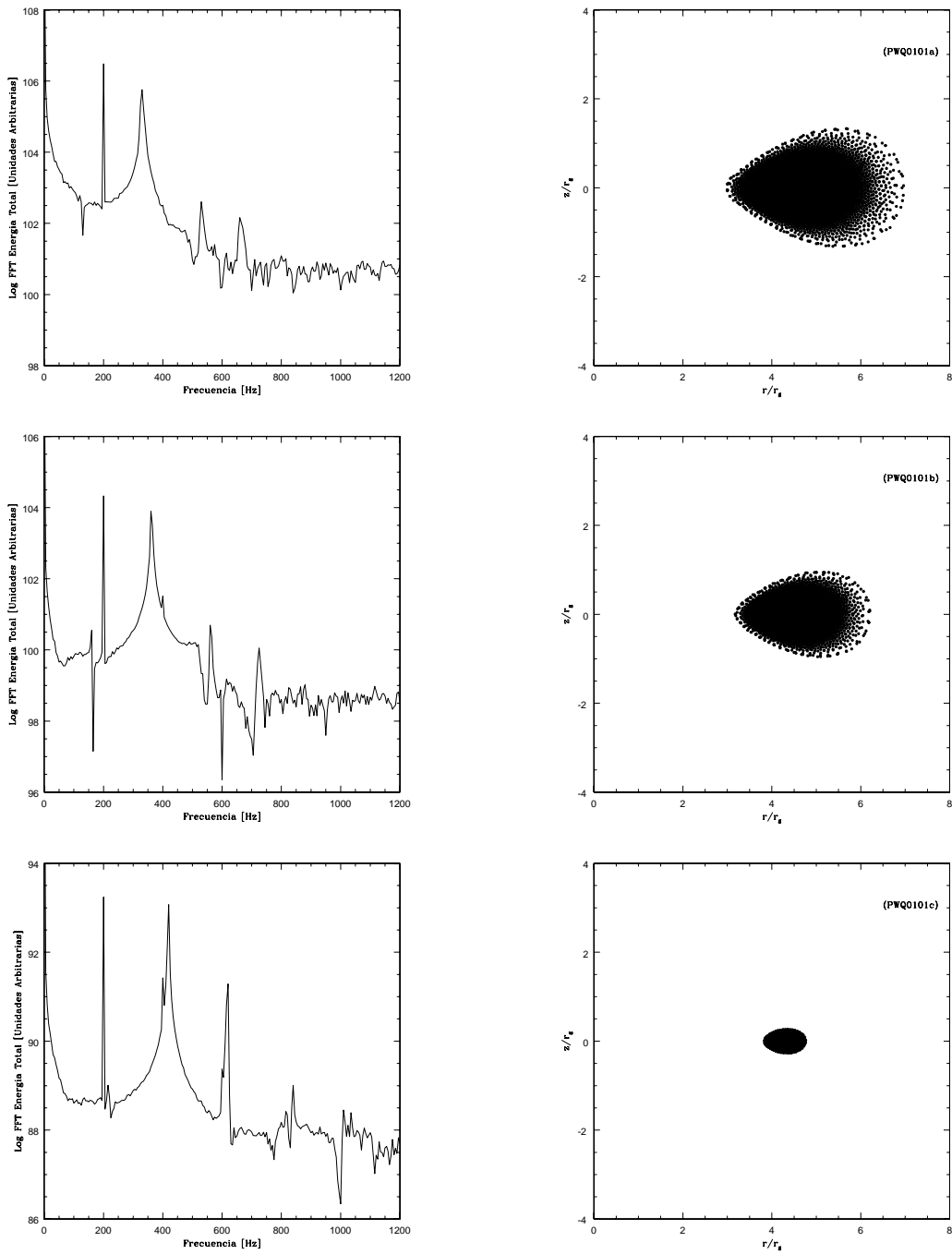
pueden observar las resonancias de la frecuencia de perturbación en  $2\kappa_{pert}$  y  $3\kappa_{pert}$  (sumidero), y además se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecian tres frecuencias batidas ubicadas en  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ,  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + 2\kappa_{pert}$ , además podemos apreciar resonancias de la frecuencia de perturbación en  $2\kappa_{pert}$ ,  $3\kappa_{pert}$ ,  $4\kappa_{pert}$  y  $5\kappa_{pert}$ . Por último se alcanza a ver un pico en  $2\kappa_r$ . En la tabla 5.14 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.14:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(PWQ0101a)	0.85	2.99	6.96	4.25	329	-0.0850	5.4378
(PWQ0101b)	0.90	3.17	6.21	4.25	360	-0.0900	1.6112
(PWQ0101c)	0.99	3.83	4.76	4.25	420	-0.0990	0.0016

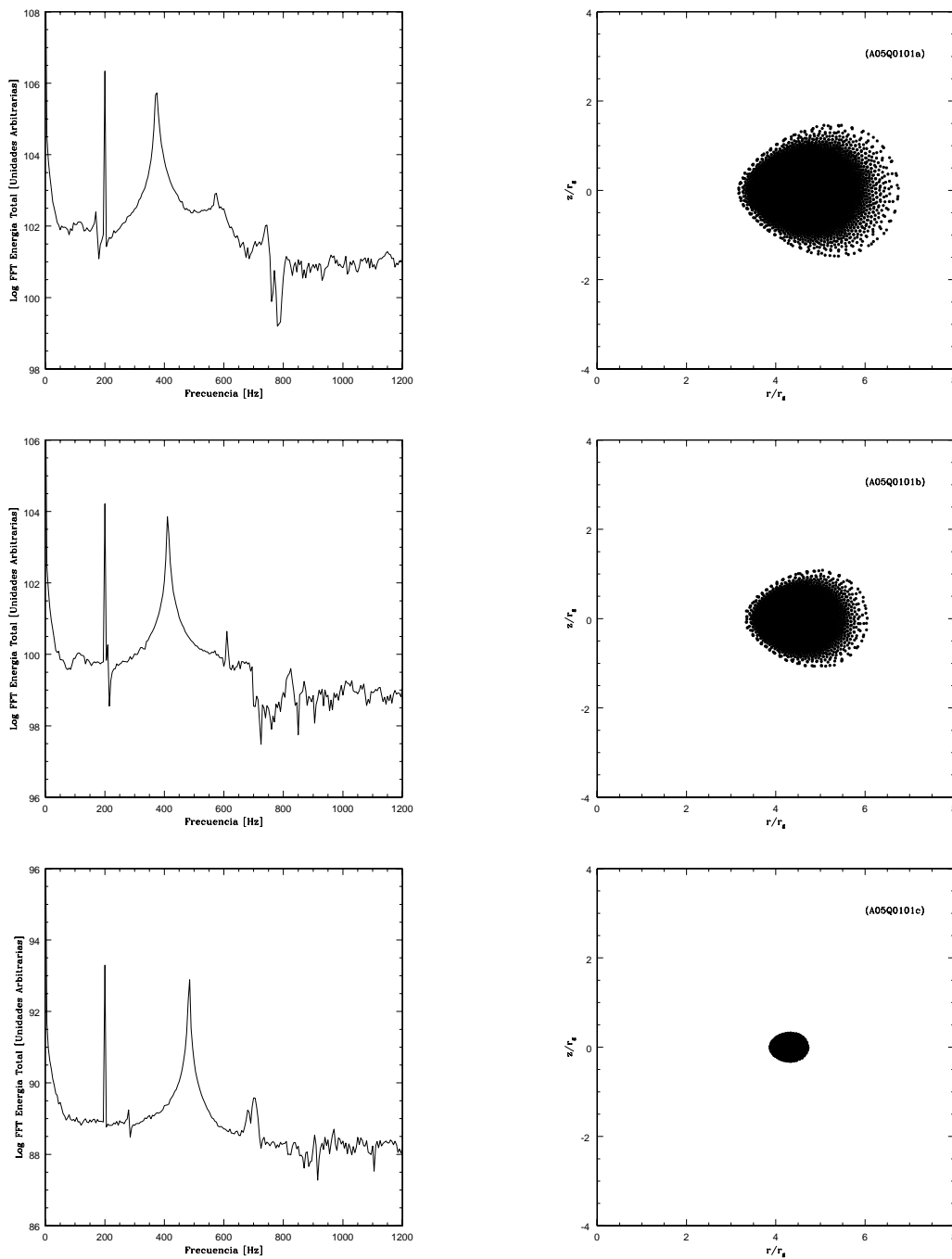
En la figura 5.19 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 372 Hz, 410 Hz y 485 Hz para los modelos (A05Q0101a), (A05Q0101b) y (A05Q0101c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar tres frecuencias batidas en  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ ,  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + 2\kappa_{pert}$  (sumidero), y además un sobretono en  $2\kappa_r$ . Para el toro intermedio se aprecian cuatro frecuencias batidas en  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ ,  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ,  $1.5\kappa_r + 0.5\kappa_{pert}$  y  $2\kappa_r + 0.25\kappa_{pert}$ . Además se alcanza a apreciar el sobretono  $2\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecian dos frecuencias batidas localizadas en  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ,  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , y además se aprecian dos sobretonos de la frecuencia fundamental en  $1.5\kappa_r$  y  $2\kappa_r$ . En la tabla 5.15 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

En la figura 5.20 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 392 Hz, 435 Hz y 510 Hz para los modelos (A09Q0101a), (A09Q0101b) y (A09Q0101c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar las frecuencias batidas,  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , y además el sobretono  $2\kappa_r$ . Para el toro intermedio se aprecian las frecuencias batidas  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , y además las frecuencias resonantes  $2\kappa_r$  y  $1.5\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecian claramente tres sumideros en  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ ,  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $2\kappa_{pert}$ , el otro pico prominente en el espectro corresponde a la fre-



**Figura 5.18:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Paczyński-Wiita.





**Figura 5.19:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ .

**Tabla 5.15:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A05Q0101a)	0.85	3.17	6.75	4.25	372	-0.0909	6.6613
(A05Q0101b)	0.90	3.35	6.04	4.25	410	-0.0963	1.9737
(A05Q0101c)	0.99	3.86	4.71	4.25	485	-0.1059	0.0019

cuencia batida  $0.5\kappa_r + 3\kappa_{pert}$ , y ligeramente se observa un pico en  $2\kappa_r$  correspondiente a un sobretono de la frecuencia natural.

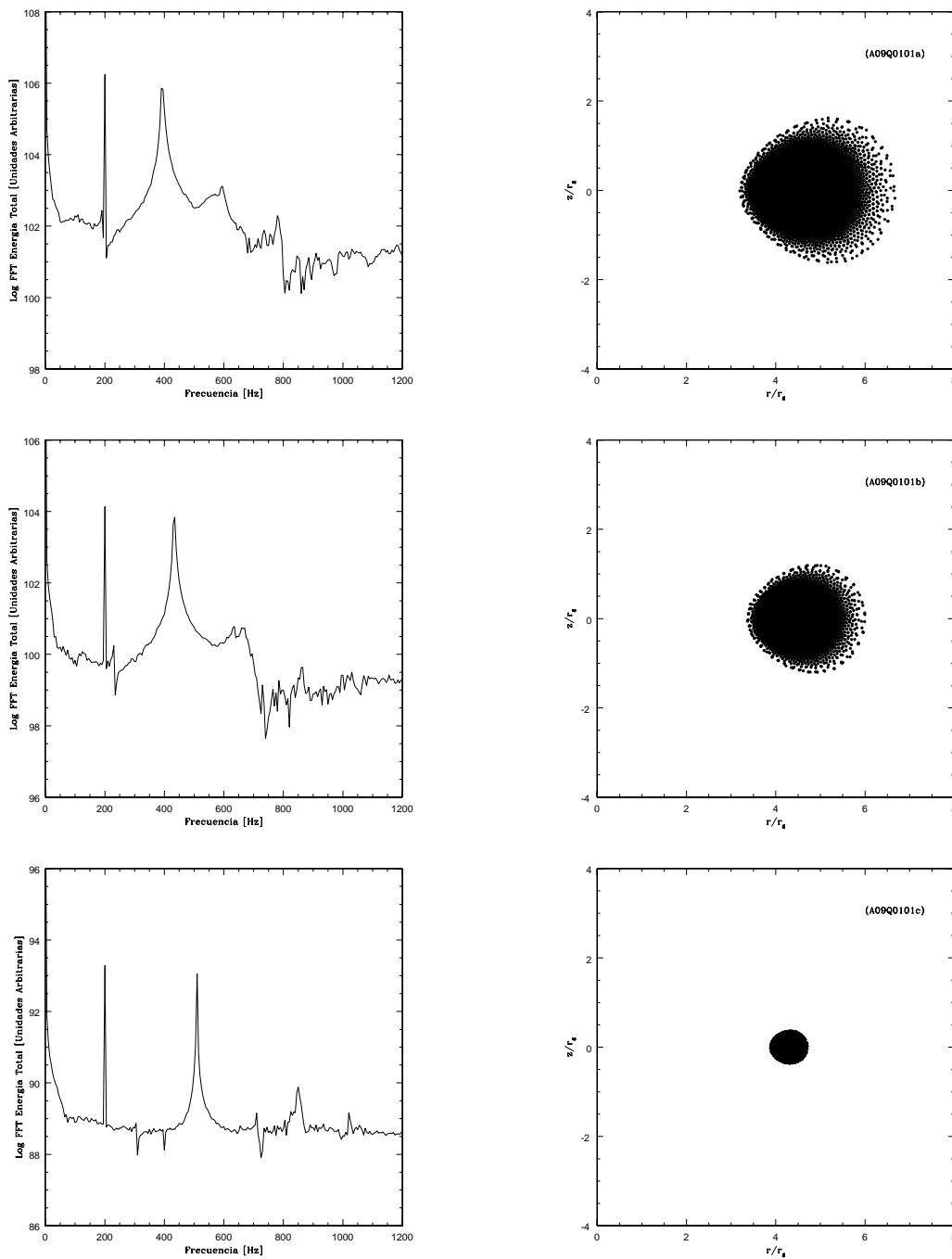
En la tabla 5.16 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.16:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A09Q0101a)	0.85	3.23	6.66	4.25	392	-0.0939	7.3419
(A09Q0101b)	0.90	3.38	6.00	4.25	435	-0.0995	2.1753
(A09Q0101c)	0.99	3.88	4.71	4.25	510	-0.1094	0.0022

### Resultados para $\beta = 0.0$ y $\zeta = 0.1$

En la figura 5.21 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Newton. De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 395 Hz, 440 Hz y 515 Hz para los modelos (NQ0001a), (NQ0001b) y (NQ0001c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar la frecuencia batida  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y el sobretono  $2\kappa_r$ . Para el toro intermedio se observa una joroba y en ésta se ubican la frecuencia batida  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y el sobretono  $1.5\kappa_r$ , siendo esta última una frecuencia resonante del modo fundamental, además se observa la frecuencia batida  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , y las frecuencias resonantes  $2\kappa_r$  y  $4\kappa_{pert}$ . En el toro pequeño ligeramente se aprecian dos sumideros ubicados por debajo de la frecuencia



**Figura 5.20:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.1$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ .

fundamental, estos corresponden a  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $2\kappa_{pert}$ . Se aprecia otro sumidero acompañado en  $2\kappa_r - 2\kappa_{pert}$ . El otro pico prominente en el espectro corresponde a la frecuencia batida  $2\kappa_r - \kappa_{pert}$ , además de la frecuencia batida  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  casi después del más grande sumidero y por último se alcanza a observar el sobretono de la frecuencia natural ubicado en  $2\kappa_r$ .

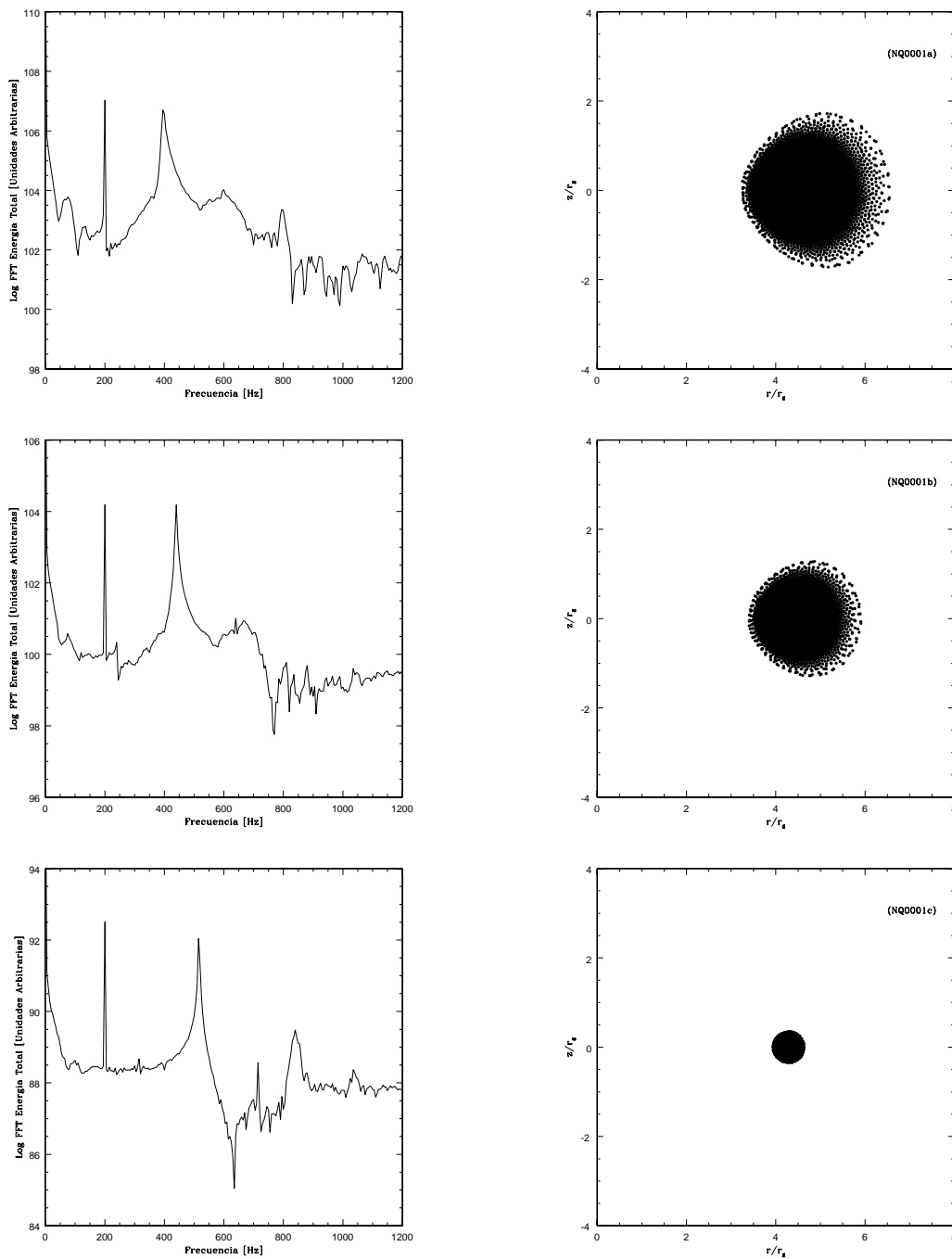
En la tabla 5.17 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.17:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Newton. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

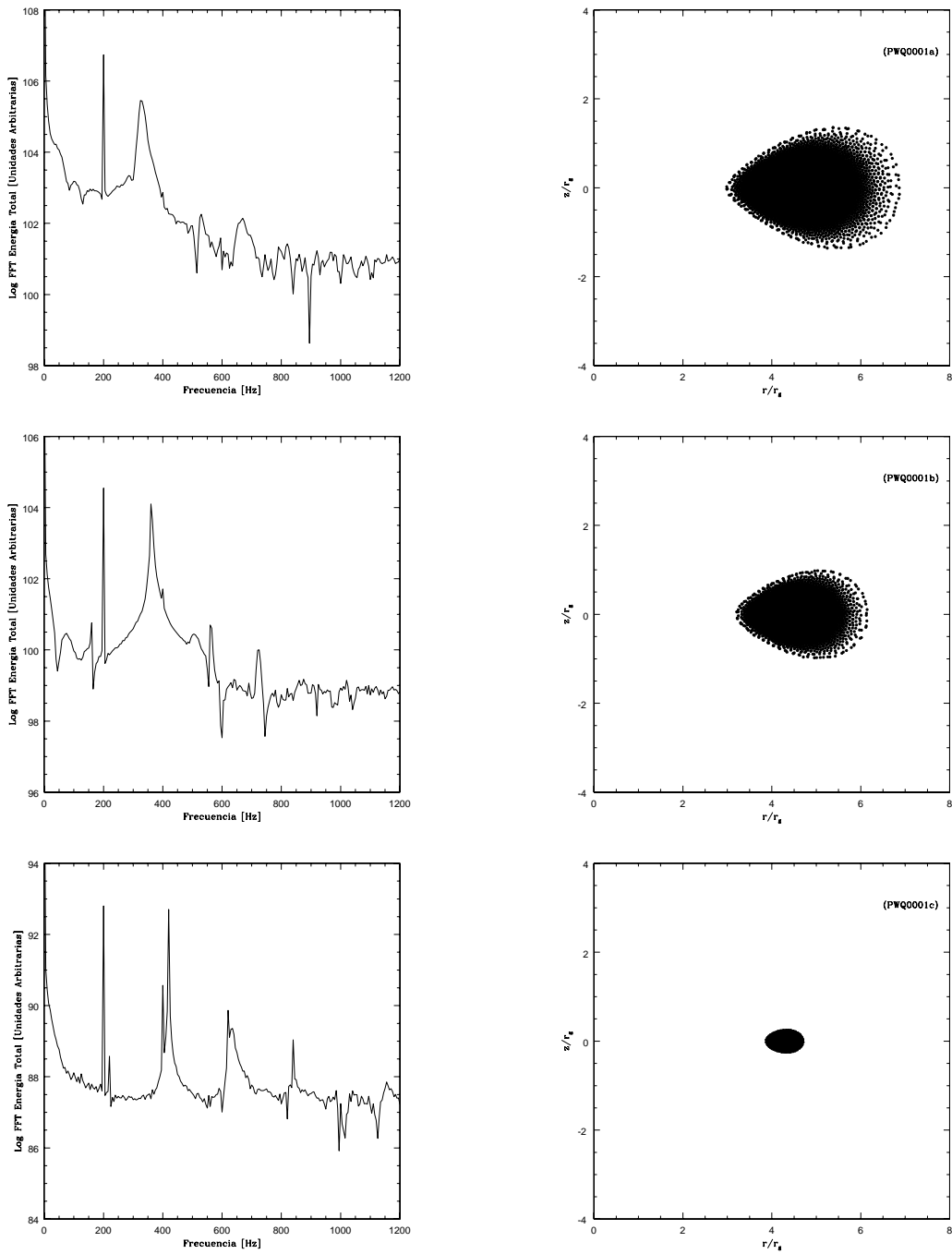
Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(NQ0001a)	0.85	3.25	6.54	4.25	395	-0.1000	8.8442
(NQ0001b)	0.90	3.40	5.89	4.25	440	-0.1058	2.6205
(NQ0001c)	0.99	3.93	4.65	4.25	515	-0.1164	0.0026

En la figura 5.22 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Paczyński-Wiita. De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 327 Hz, 360 Hz y 420 Hz para los modelos (PWQ0001a), (PWQ0001b) y (PWQ0001c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar una frecuencia batida en  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ , una resonancia de la frecuencia perturbativa en  $2\kappa_{pert}$ , y la frecuencia resonante  $2\kappa_r$ . El sumidero más grande que se alcanza a apreciar corresponde a  $4.5\kappa_{pert}$ . Para el toro intermedio se aprecian dos frecuencias batidas localizadas en  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ . Se pueden observar las resonancias de la frecuencia de perturbación en  $2\kappa_{pert}$ ,  $2.5\kappa_{pert}$  y  $3\kappa_{pert}$  (sumidero), y además se aprecia el sobretono  $2\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecian tres frecuencias batidas ubicadas en  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ,  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $2\kappa_r + 1.5\kappa_{pert}$ , además podemos apreciar resonancias de la frecuencia de perturbación en  $2\kappa_{pert}$ ,  $3\kappa_{pert}$ ,  $4\kappa_{pert}$  (ligeramente) y  $5\kappa_{pert}$  (sumidero). Por último se alcanza a ver dos resonancias de la frecuencia natural en  $1.5\kappa_r$  y  $2\kappa_r$ . En la tabla 5.18 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

En la figura 5.23 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 371 Hz, 410 Hz y 485 Hz para los modelos (A05Q0001a), (A05Q0001b) y (A05Q0001c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar dos frecuencias batidas en  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ , y además un sobretono de la frecuencia natural en  $2\kappa_r$ . Para el toro intermedio se aprecian tres frecuencias batidas en  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ ,



**Figura 5.21:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian et. para  $\beta = 0.0$  y  $\zeta = 0.1$  al con el potencial de Newton.



**Figura 5.22:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.0$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Paczyński-Wiita.

**Tabla 5.18:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Paczyński-Wiita. Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

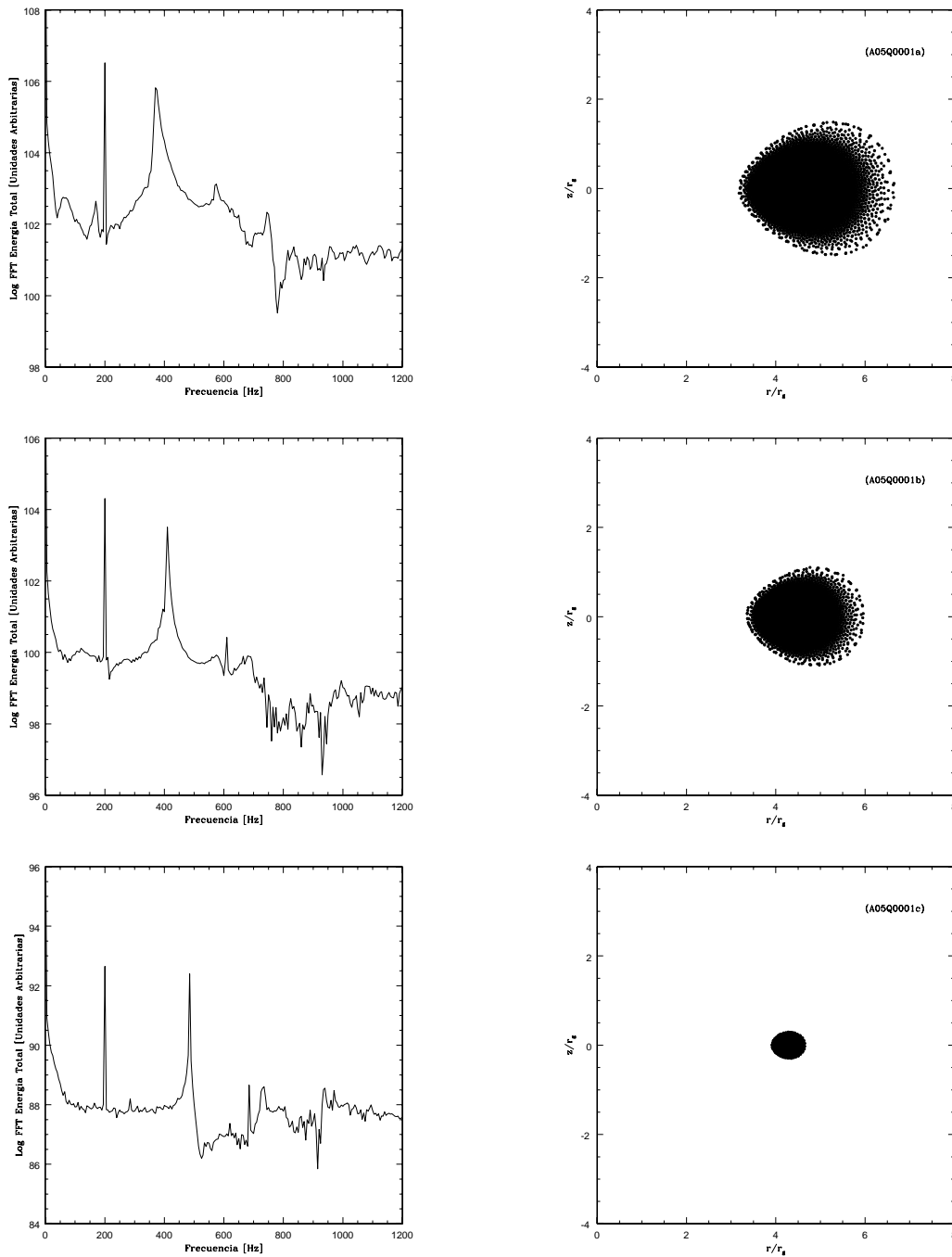
Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(PWQ0001a)	0.85	3.00	6.85	4.25	327	-0.0905	6.5626
(PWQ0001b)	0.90	3.21	6.13	4.25	360	-0.0958	1.9444
(PWQ0001c)	0.99	3.89	4.70	4.25	420	-0.1054	0.0019

$\kappa_r + \kappa_{pert}$ ,  $2\kappa_r + 0.5\kappa_{pert}$ , siendo este último el sumidero más grande que se aprecia en el espectro, además se alcanza a apreciar el sobretono de la frecuencia natural  $2\kappa_r$ , y dos resonancias de la frecuencia perturbativa en  $2\kappa_{pert}$  (ligeramente se alcanza a apreciar) y  $3.5\kappa_{pert}$ . En el toro pequeño se aprecian cuatro frecuencias batidas localizadas en  $\kappa_r + \kappa_{pert}$ ,  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ ,  $1.5\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $1.5\kappa_r - 0.5\kappa_{pert}$ , y además se aprecian dos sobretonos de la frecuencia fundamental en  $1.5\kappa_r$  y  $2\kappa_r$ . En la tabla 5.19 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.19:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A05Q0001a)	0.85	3.20	6.63	4.25	371	-0.0965	7.9593
(A05Q0001b)	0.90	3.35	5.96	4.25	410	-0.1022	2.3583
(A05Q0001c)	0.99	3.92	4.65	4.25	485	-0.1124	0.0024

En la figura 5.24 se muestran las transformadas de Fourier y los distintos tamaños de los toros en sección meridional con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . De esta figura podemos observar picos prominentes en los espectros de frecuencias, los cuales se ubican en 394 Hz, 435 Hz y 510 Hz para los modelos (A09Q0001a), (A09Q0001b) y (A09Q0001c), respectivamente. Para el caso del toro grande podemos apreciar las frecuencias batidas,  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , y además el sobretono de la frecuencia del modo fundamental en  $2\kappa_r$ . Para el toro intermedio se aprecian las frecuencias batidas  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y  $\kappa_r - \kappa_{pert}$ , y además las frecuencias resonantes  $2\kappa_r$  y  $1.5\kappa_r$ . En el toro pequeño se aprecian tres frecuencias batidas en  $\kappa_r - \kappa_{pert}$  (muy ligeramente),  $\kappa_r + \kappa_{pert}$  y



**Figura 5.23:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.0$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.5(r_g c/2)$ .



$1.5\kappa_r + 0.5\kappa_{pert}$ , siendo este último el otro pico prominente en el espectro, y se observa un pico en  $2\kappa_r$  correspondiente a un sobretono de la frecuencia natural.

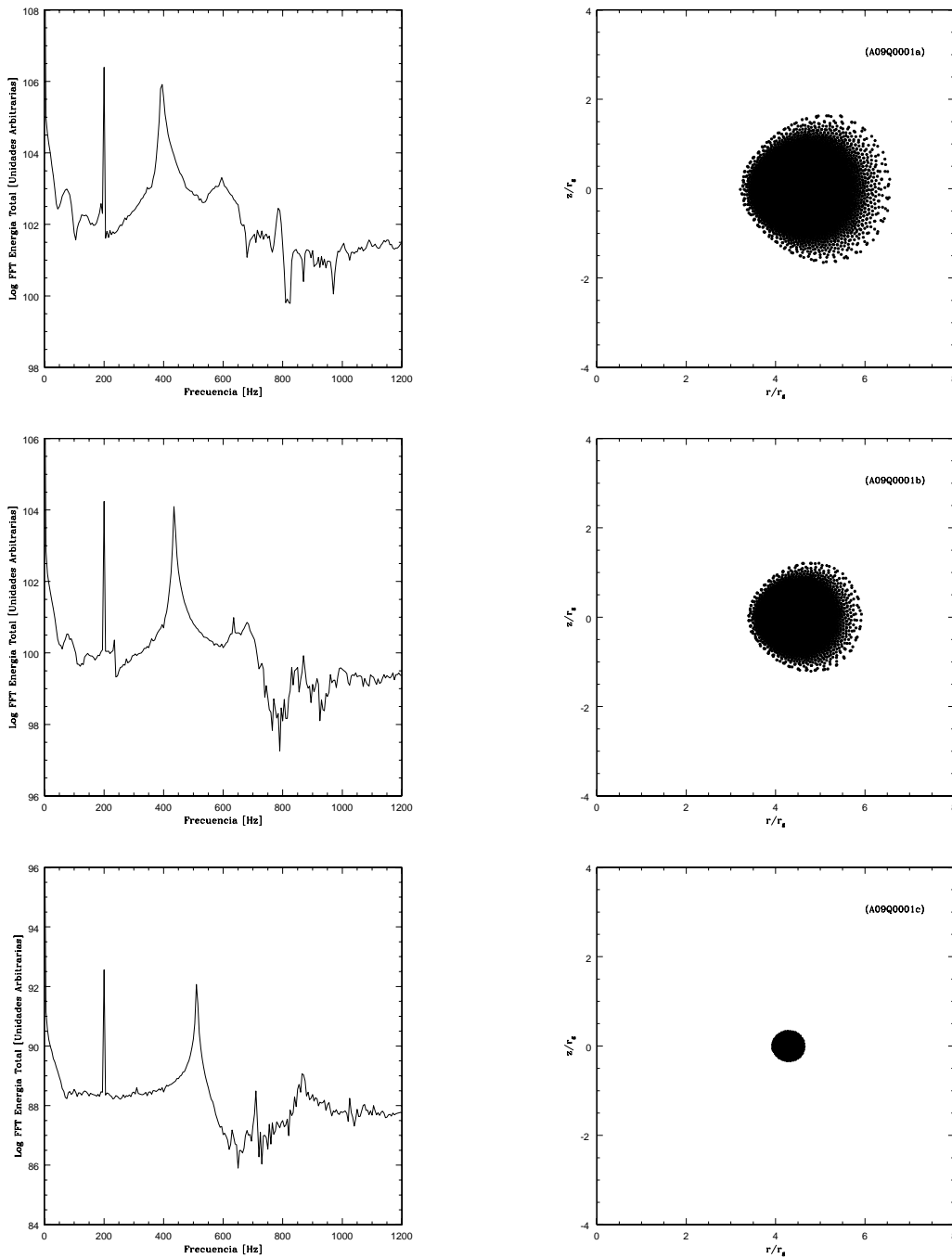
En la tabla 5.20 se muestran los valores obtenidos para cada uno de los tamaños de los toros.

**Tabla 5.20:** Modelos para disco de diferentes tamaños con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ . Se muestra el radio interno del disco  $r_{in}$ , el radio externo  $r_{ex}$ , la ubicación del centro del disco,  $r_0$  o el punto de máxima densidad, la densidad central del disco o densidad máxima y la frecuencia  $\kappa_r$  de oscilación del modo fundamental medido a través de la variación de la densidad máxima.

Modelo	$f$	$r_{in}/r_g$	$r_{ex}/r_g$	$r_0/r_g$	$\kappa_r$ [Hz]	$W_0/(c^2/2)$	$\rho_{max,15}$ [MKS]
(A09Q0001a)	0.85	3.26	6.52	4.25	394	-0.0993	8.6855
(A09Q0001b)	0.90	3.40	5.92	4.25	435	-0.1052	2.5735
(A09Q0001c)	0.99	3.93	4.64	4.25	510	-0.1157	0.0026

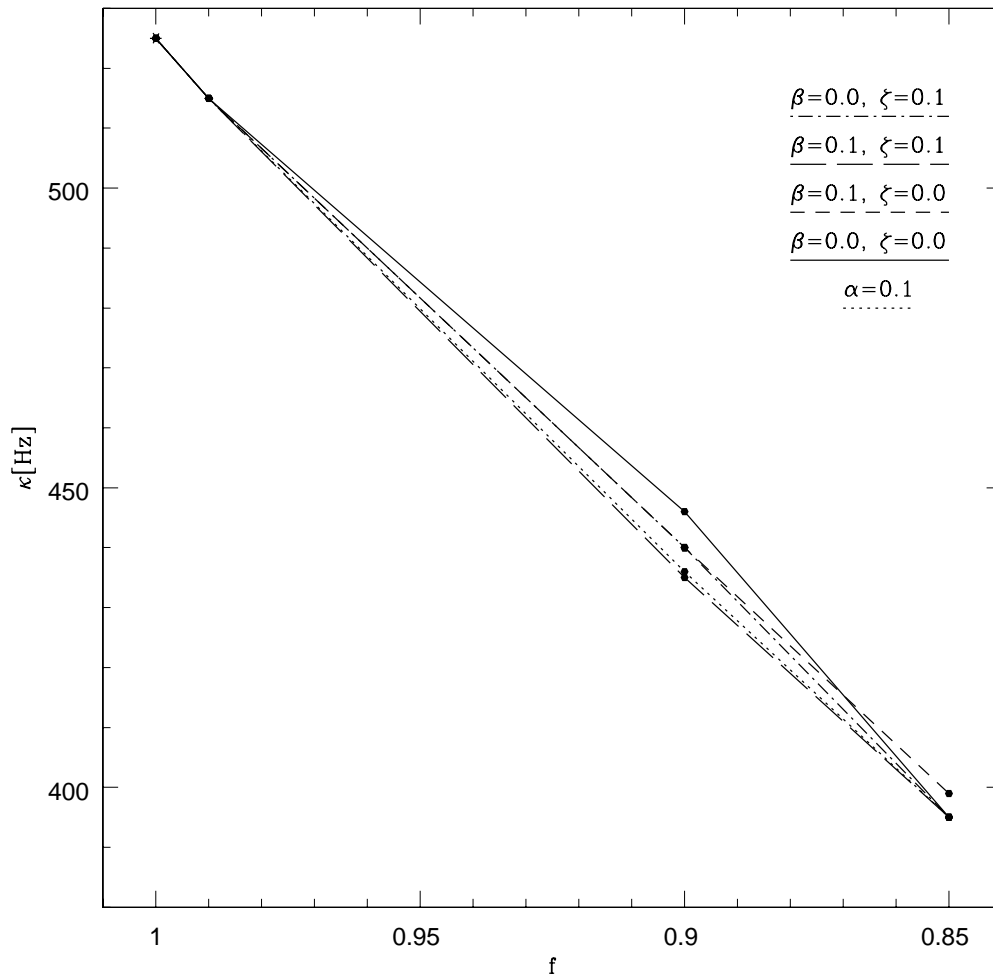
### 5.2.5. Interpretación

En la figura 5.1 al igual que en los demás espectros de frecuencias mostrados en otras, se aprecian picos prominentes. Entonces una perturbación periódica induce eficientemente modos de oscilación en una relación 2:3:4:... dependiendo del modelo usado, por ejemplo, en el modelo (PWc) para el toro pequeño se observa este comportamiento. Por otro lado los picos a más alta frecuencia están asociados a modos acústicos relacionados con ondas de presión que se dispersan dentro del disco, a estas frecuencias se les llama *modos-p*, esta explicación fue propuesta por Zanotti *et al.* (2003). El modelo que pretende explicar las oscilaciones de los discos gruesos mediante modos-p, se basa en lo bien que los modelos numéricos elaborados por Rezzolla *et al.* (2003) se ajustan a las observaciones de los sistemas binarios de baja masa observados en rayos X (LMXB). Dichos autores proponen que estos modos podrían explicar las relaciones armónicas en las oscilaciones causi-periódicas de alta frecuencia observadas en sistemas binarios de rayos X conteniendo a un candidato como agujero negro. Estas oscilaciones observadas pueden ser inducidas por procesos como la viscosidad, turbulencia o campos magnéticos que modifican las órbitas de las partículas que componen al gas que orbita al agujero negro. Cabe mencionar que Rezzolla *et al.* (2003) modelaron toros analíticos con: (i) métrica de Schwarzschild, y (ii) perturbación impulsiva global mientras que en el presente trabajo se ha tratado con pseudo-potenciales newtonianos y perturbaciones periódicas dentro del disco en la dirección radial. A pesar de esto se han encontrado resultados semejantes, indicando que reflejan propiedades naturales de estos discos.

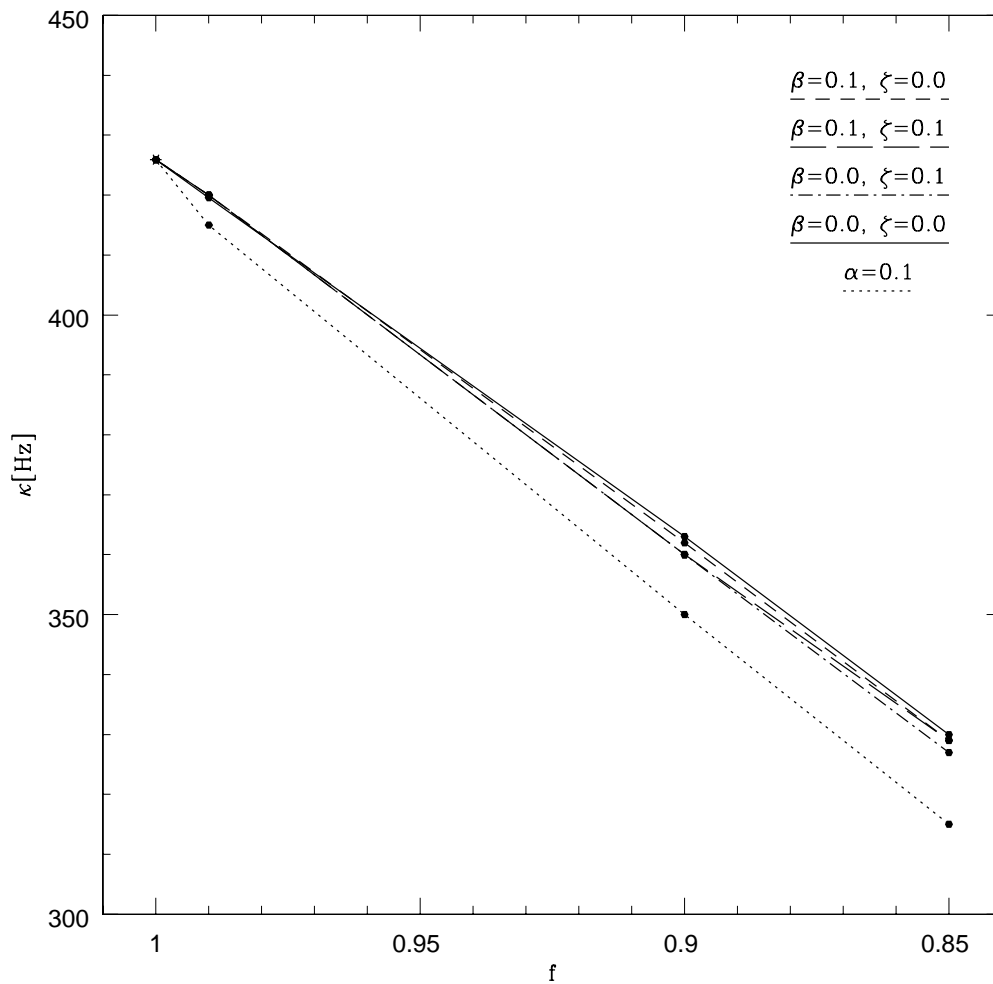


**Figura 5.24:** Transformadas de Fourier de las oscilaciones radiales del centro del toro para un toro pequeño, intermedio y grande (panel izquierdo), y sus secciones meridionales correspondientes (panel derecho) para un momento angular de Qian *et al.* para  $\beta = 0.0$  y  $\zeta = 0.1$  con el potencial de Artemova *et al.* con el parámetro de Kerr,  $a = 0.9(r_g c/2)$ .

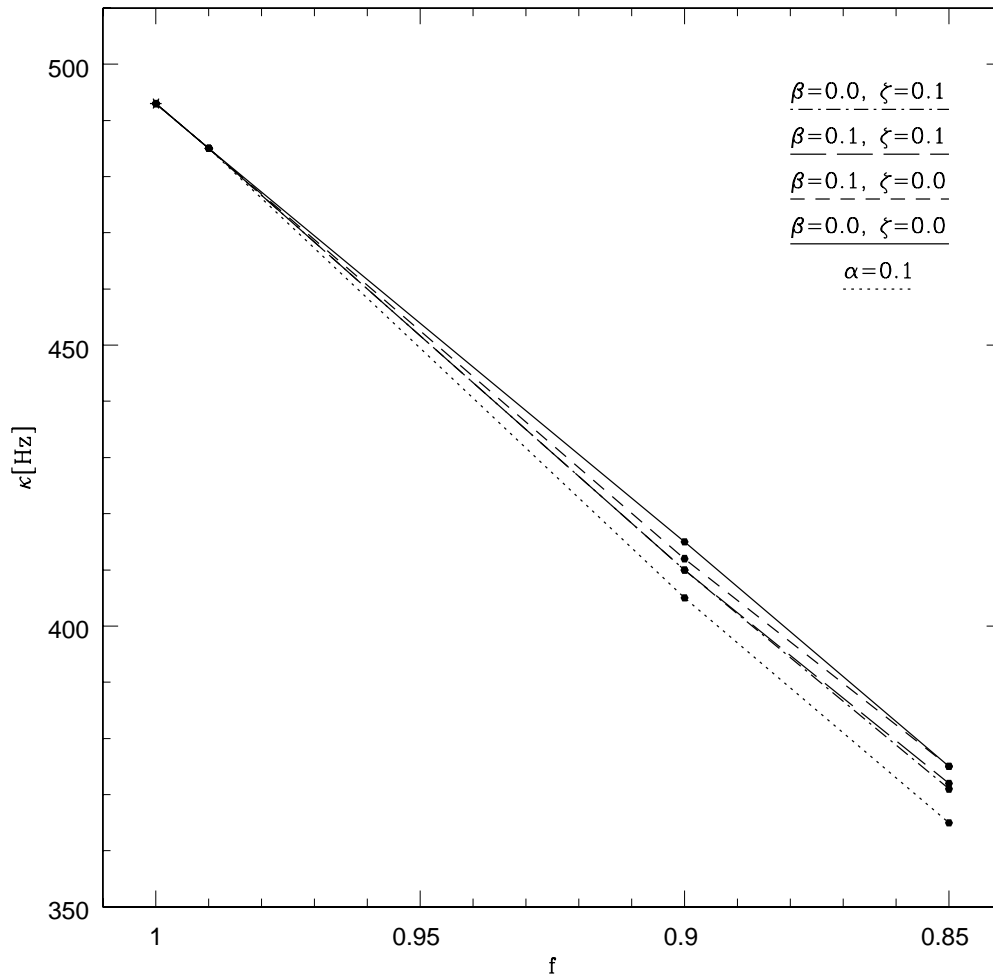
En la figuras 5.25, 5.26, 5.27 y 5.28 se muestran todas las frecuencias del modo fundamental obtenidas para los potenciales de: (i) Newton, (ii) Paczyński-Wiita, (iii) Artemova *et al.* con parámetro de Kerr,  $a = 0.5(cr_g/2)$ , y (iv) Artemova *et al.* con parámetro de Kerr,  $a = 0.9(cr_g/2)$ , respectivamente, estas con las distribuciones de momento angular: (i) constante, (ii) ley de potencias en el radio con  $\alpha = 0.1$ , y (iii) aquellas dadas por Qian *et al.* (2009), que contemplan distribuciones más generales en radio y ángulo polar con  $\beta = \{0.0, 0.1\}$  y  $\zeta = \{0.0, 0.1\}$ . En dichas gráficas es posible observar cómo decrecen las frecuencias naturales conforme  $f$  es disminuido. También se observa que para el caso de una distribución de momento angular en ley de potencias en el radio, las frecuencias decaen más rápidamente. Se observó que las distribuciones de momento angular dadas por Qian *et al.* están ligeramente por debajo de la distribución de momento angular constante.



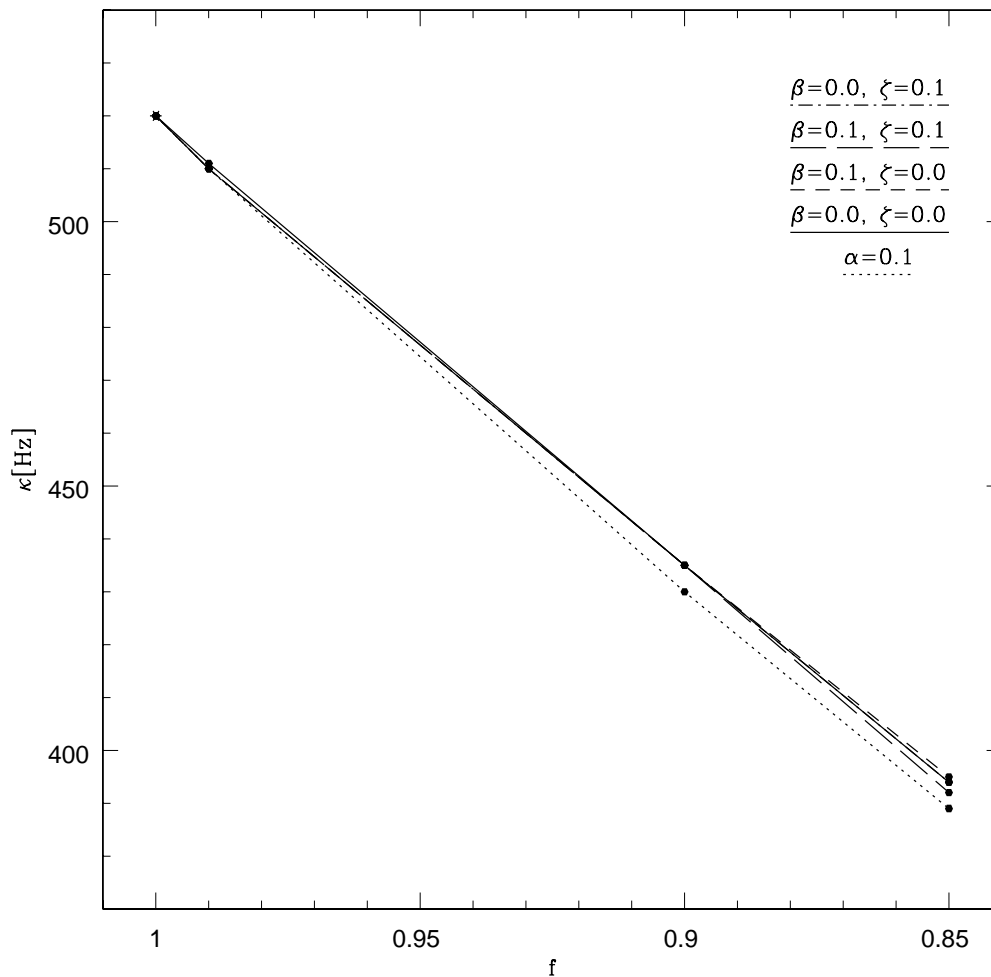
**Figura 5.25:** Gráfica que esquematiza la variación de las frecuencias del modo fundamental con respecto al factor de llenado  $f$  usando el potencial de Newton con todas las distribuciones de momento angular usadas en este proyecto. El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicyclic analítica (525 Hz) mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ .



**Figura 5.26:** Gráfica que esquematiza la variación de las frecuencias del modo fundamental con respecto al factor de llenado  $f$  usando el potencial de Paczyński-Wiita con todas las distribuciones de momento angular usadas en este proyecto. El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica analítica (425.94 Hz) mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ .



**Figura 5.27:** Gráfica que esquematiza la variación de las frecuencias del modo fundamental con respecto al factor de llenado  $f$  usando el potencial de Artemova *et al.* con parámetro de Kerr,  $a = 0.5(cr_g/2)$ , con todas las distribuciones de momento angular usadas en este proyecto. El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica analítica (493 Hz) mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ .



**Figura 5.28:** Gráfica que esquematiza la variación de las frecuencias del modo fundamental con respecto al factor de llenado  $f$  usando el potencial de Artemova *et al.* con parámetro de Kerr,  $a = 0.9(cr_g/2)$ , con todas las distribuciones de momento angular usadas en este proyecto. El punto mostrado con un asterisco representa a la frecuencia epicíclica analítica (520 Hz) mientras que los otros tres puntos representan el valor de la frecuencia fundamental encontrada para cada  $f$ .

# Capítulo 6

## Discusión y conclusiones

Se ha presentado cómo oscilan estructuras toroidales de gas en rotación hacia agujeros negros desde un enfoque pseudo-newtoniano, despreciando la auto gravedad de los discos de acreción, y estos con simetría axisimétrica. Se han considerado discos gruesos ( $r \sim h$ ) y delgados ( $r \ll h$ ) construidos con distintas leyes de rotación, así cómo con distintos potenciales gravitacionales que simulan los efectos de la fuerte gravedad producidos por la masa central. Después de haber construido las condiciones iniciales en equilibrio hidrostático, haber aplicado una perturbación periódica radial al disco en el tiempo y aplicarle la transformada de Fourier a la evolución temporal de la energía total del sistema, fue posible observar cómo respondió el disco de acreción. Para las distribuciones de momento angular: (i) ley de potencia en el radio, (ii) y el propuesto por Qian *et al.* (2009), se escogió que los exponentes radiales fueran pequeños, puesto que para exponentes mayores de más o menos 0.15 los toros son inestables y algunos terminan acretando toda su masa al agujero negro.

Se pudo observar que conforme crece el tamaño del toro (disminuyendo el valor del factor de llenado,  $f$ ) la frecuencia del modo fundamental decrece monótonicamente (véase la figura 5.4) desde la frecuencia epicíclica encontrada analíticamente para una partícula de prueba fijada en la posición del centro del toro [véase la ecuación (4.106)]. Este comportamiento fue observado para cada distribución de momento angular usada, por lo que no dependió de la distribución de momento angular usada ni del potencial gravitacional usado, dependió sólo del valor de  $f$ .

En todos los toros construidos fue posible localizar la frecuencia del modo fundamental,  $\kappa_r$ , y además otros picos en el espectro de frecuencias (transformada de Fourier de la energía total del sistema), estos picos a más altas frecuencias pueden estar relacionados con ondas de sonido atrapadas en el disco de acreción apareciendo en secuencias 2:3:..., independientemente de la distribución de momento angular. Se pudieron localizar frecuencias batidas en el espectro, esto resulta por la aplicación de perturbaciones al disco de acreción, ya que es



posible que se mezclen las frecuencias (modo fundamental y perturbación). Por lo tanto, es posible decir, que perturbaciones periódicas pueden inducir los modos de oscilación de un toro que orbita a un agujero negro, y estos pueden ser explicados a través de los modos-p que fueron estudiados por Zanotti *et al.* (2003), Rezzolla *et al.* (2003), entre otros. Las frecuencias resonantes del modo fundamental encontradas en este trabajo son similares a las obtenidas por estos autores.

El tamaño del toro dependió del espín del agujero negro o parámetro de Kerr,  $a$ , y del factor de llenado,  $f$ . Los toros contruidos con el potencial de Paczyński-Wiita ( $a = 0$ , discos elípticos) fueron más anchos en la dirección radial que toros contruidos con  $a > 0$  ( $cr_g/2$ ). Se observó que conforme  $a \rightarrow (cr_g/2)$  los toros se encogían radialmente y se expandían verticalmente, es decir, se hacían más circulares en sección meridional. Este comportamiento se ve más claro cuando se comparan los modelos (PWc), (A05c), (A09c) y (PWc).

Se observó que las frecuencias del modo fundamental crecían conforme el parámetro de Kerr,  $a$ , tendía a  $r_gc/2$ , es decir, del potencial de Paczyński-Wiita al potencial de Newton, pasando por el potencial propuesto por Artemova *et al.* (1996). Este comportamiento fue observado cuando se mantenía fijo el factor de llenado,  $f$ .

Estos resultados (las frecuencias altas que se muestran en los espectros de frecuencias) se podrían aplicar a la fenomenología cuasi-periódica en los rayos X observada en sistemas binarios de rayos X conteniendo a un agujero negro como candidato (también pueden ser usados para una estrella de neutrones). En el artículo de Remillard *et al.* (1999) se reporta la existencia de la 300 Hz QPO en el microquasar GRO J1655-40, mientras que Strohmayer *et al.* (2001) reportó el descubrimiento de que este mismo objeto astrofísico tiene otra QPO en 450 Hz. Abramowicz y Kluźniak (2001) proponen que la frecuencia de 450 Hz es una proporción 3:2 de la frecuencia conocida previamente en 300 Hz en la misma fuente, ya que 450 Hz, es la frecuencia máxima de las HFQPOs (véase el capítulo 1) para un sistema binario de rayos X de baja masa con un agujero negro como candidato. Esto nos hace pensar que los modelos desarrollados en este trabajo pueden ser aplicados a objetos astrofísicos como estos.

En el capítulo 1, se presentó que las frecuencias pueden ser escaladas por el inverso de la masa del objeto compacto (para ese caso un agujero negro con la ISCO como radio). McClintock y Remillard (2006) reportaron que las QPOs para los sistemas binarios de rayos X observados con un agujero negro como candidato (véase la figura 1.3) también pueden ser escaladas mediante una proporción de  $M^{-1}$ , esto con ayuda del análisis estadístico hecho por Greene *et al.* 2001. Este escalamiento es un fuerte argumento en favor de los orígenes relativistas del fenómeno QPO.

La comparación de los modelos propuestos en el presente trabajo con las observaciones, es posible hacerla a través de las QPOs observadas en los modelos y en las observaciones. La

fenomenología de las QPOs es compleja, y como podemos observar los modelos propuestos en este trabajo están más o menos en acuerdo con ella (rangos de las QPOs, véase el capítulo 1). Suponiendo que la QPO 450 Hz observada en la fuente de rayos X GRO J1655-40 sea la frecuencia del modo fundamental, entonces nos es posible calcular el espín o momento angular del agujero negro dada una medida de su masa.

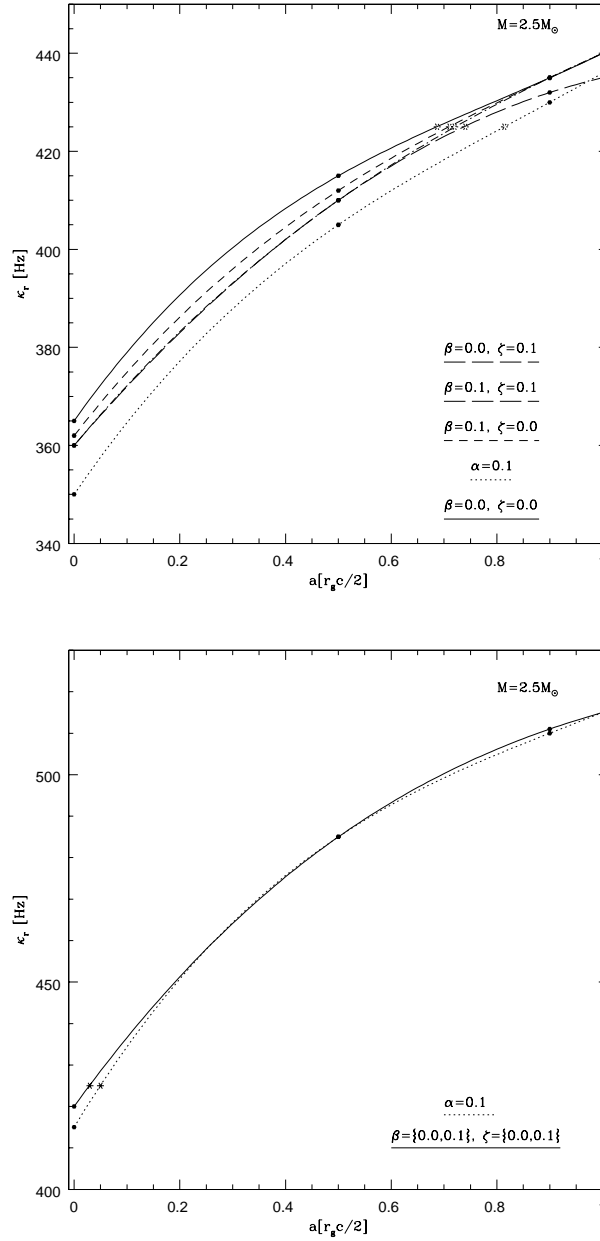
El diagnóstico del objeto central (por ejemplo agujero negro) es posible realizarlo si conocemos ciertos parámetros de éste, como es la masa,  $M$ , y la frecuencia del modo fundamental,  $\kappa_r$ .

Suponga que tenemos a un agujero negro en un sistema binario de rayos X de baja masa, con una masa de  $M_{an} = 2.5M_{\odot}$ . Si el agujero negro tuviera otra masa, esta podría ser escalada como  $M^{-1}$ . Por ejemplo, considere el modelo (A05d) que nos dió como resultado una frecuencia del modo fundamental en 365 Hz para una masa de  $2.5M_{\odot}$ , si la masa del objeto observado fuera  $5M_{\odot}$ , entonces tenemos que dividir a 365 Hz entre 2, obteniendo 182.5 Hz (véase capítulo 1).

También suponga que observamos a la frecuencia del modo fundamental del toro,  $\kappa_r$ , en 425 Hz. Teniendo estos parámetros (masa y frecuencia) es posible obtener una medición del espín del agujero negro. Lo que se tendría que hacer, es observar cómo cambia la frecuencia del modo fundamental como función del parámetro  $a$ , observando los modelos presentados en el capítulo anterior, vemos que sólo para el modelo de disco grueso, es decir,  $f = 0.85$ , la frecuencia planteada de 425 Hz no corresponde al rango obtenido, 315-399 Hz. Por lo tanto se tendría que analizar sólo con los toros medianos,  $f = 0.9$ , y pequeños,  $f = 0.99$ , y esto suponiendo que los toros mantienen una distribución de momento angular: (i) constante, (ii) ley de potencias en el radio con  $\alpha = 0.1$ , ó (iii) aquellas dadas por Qian *et al.* que consideran distribuciones más generales en radio y ángulo polar con  $\beta = \{0.0, 0.1\}$  y  $\zeta = \{0.0, 0.1\}$ . Note que la ley de rotación con la que gira el disco de acreción es desconocida.

En la figura 6.1 se muestra la dependencia de la frecuencia del modo fundamental con respecto al parámetro  $a$ . Analizando la figura (haciendo inferencia estadística) encontramos que si el disco fuera pequeño, entonces el espín del agujero negro sería  $a = 0.04 \pm 0.01(cr_g/2)$ , mientras que si el disco fuera intermedio el espín sería  $a = 0.73 \pm 0.04(cr_g/2)$ . Por lo tanto, conforme el disco sea más grueso ( $r \sim h$ ) entonces el espín del agujero negro será mayor, es decir, el agujero negro girará con mayor rapidez.

En el presente trabajo se supuso que el disco no es auto gravitante, que el agujero negro no tiene campo magnético, simetría azimutal, que el gas es ideal y que el movimiento del disco era puramente dinámico (despreciando viscosidad y disipación de energía), lo cual en una situación de la astrofísica real estas condiciones no son estrictamente ciertas. Los campos magnéticos juegan un papel muy importante en el comportamiento del disco, posiblemente



**Figura 6.1:** Gráficas que esquematizan la dependencia de la frecuencia del modo fundamental con respecto al parámetro de Kerr,  $a$ , en unidades de  $r_g c/2$ . Los puntos circulares son las frecuencias del modo fundamental encontradas con las simulaciones hechas en el presente trabajo para toros intermedios y pequeños, es decir,  $f = 0.9$  y  $f = 0.99$ , respectivamente. Los puntos marcados con un asterisco en las curvas corresponden al modo fundamental observado en 425 Hz, suponiendo que la masa del agujero fuera  $M = 2.5 M_\odot$ . La figura en la parte superior corresponde a un disco intermedio mientras que la inferior a un disco pequeño.

---

produciendo modos adicionales o distintos. La viscosidad y la disipación de energía podrían cambiar la geometría de los toros, ya que podría existir liberación o absorción de energía en el disco de acreción. Esto por supuesto cambiaría la oscilación de los discos de acreción.

# Apéndice A

## Tensores

Los tensores son importantes en muchas áreas de la física, incluyendo relatividad general y electrodinámica. Escalares y vectores son casos particulares de los tensores. A una cantidad que no cambia bajo rotaciones de un sistema de coordenadas es llamado escalar. Un *escalar* es especificado por un número real y es un *tensor de orden 0*. Una cantidad cuyas componentes son afectadas por la rotación de un sistema de coordenadas es llamado vector. Un *vector* es especificado por  $N = N^1$  números reales y es un *tensor de orden 1*. Un *tensor de orden n* tiene  $N^n$  componentes que se transforman bajo un camino definido.

Existen varias leyes de transformación de un sistema coordinado a otro. Una posible ley de transformación para un vector es

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j, \quad (\text{A.1})$$

en donde  $a_{ij}$  es el coseno del ángulo entre el eje  $x'_i$  y el eje  $x_j$ .

Si empezamos con un vector distancia diferencial  $d\vec{r}$ , entonces, tomando  $dx'_i$  a ser una función de las variables no primadas, tenemos que

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j, \quad (\text{A.2})$$

por la derivada total. Si introducimos que

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}, \quad (\text{A.3})$$

las ecuaciones (A.1) y (A.2) son consistentes. Cualquier conjunto de cantidades  $A^j$  se trans-

forman de acuerdo a

$$A'^i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A^j, \quad (\text{A.4})$$

es definido como un vector *contravariante*, cuyos índices se escriben como superíndices. El gradiente de un escalar  $\nabla\phi$ , definido por

$$\nabla\phi = \hat{x} \frac{\partial\phi}{\partial x^1} + \hat{y} \frac{\partial\phi}{\partial x^2} + \hat{z} \frac{\partial\phi}{\partial x^3}, \quad (\text{A.5})$$

(usando  $x^1, x^2, x^3$  por  $x, y, z$ , respectivamente), se transforma como

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x'^i} = \sum_j \frac{\partial\phi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \quad (\text{A.6})$$

usando  $\phi = \phi(x, y, z) = \phi(x', y', z') = \phi'$ , siendo  $\phi$  un escalar. Note que la ecuación anterior difiere de la ecuación (A.4) en que tenemos  $dx^j/dx'^i$  en vez de  $dx^i/dx^j$ . La ecuación (A.6) es tomada como una definición de un vector *covariante*, denotado por un *subíndice*. El análogo covariante de la ecuación (A.4) es

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j. \quad (\text{A.7})$$

Sólo en coordenadas cartesianas se tiene que

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = a_{ij}, \quad (\text{A.8})$$

entonces no hay diferencia entre transformaciones covariantes y contravariantes.

Ahora procedemos a definir los tensores de rango 2 covariante, contravariante y mixto mediante las siguientes ecuaciones por medio de sus transformaciones de coordenadas:

$$A'^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} A^{kl}, \quad (\text{A.9})$$

$$B'^i_j = \sum_{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} B^k_l, \quad (\text{A.10})$$

$$C'^i_j = \sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} C_{kl}. \quad (\text{A.11})$$

Claramente, el orden del tensor va con el número de derivadas parciales en la definición: 0 para un escalar, 1 para un vector, 2 para un tensor de orden 2, y así sucesivamente. Los rangos para cada índice (subíndice o superíndice) dependen del número de dimensiones del

espacio. El número de índices es independiente de la dimensión del espacio. Vemos que  $A^{kl}$  es contravariante con respecto a los índices,  $C_{kl}$  es covariante con respecto a los dos índices, y  $B_l^k$  es contravariante con respecto al índice  $k$  y covariante con respecto al índice  $l$ .

En el caso de un tensor general, una componente puede estar asociado con varios ejes coordenados. Entonces una componente tendrá generalmente varios índices. La ley de transformación de un tensor general es

$$T_{l\dots n}^{ab\dots d} = \sum_{a'b'\dots d'l'\dots n'} \frac{\partial x'^a}{\partial x^a} \frac{\partial x'^b}{\partial x^b} \cdots \frac{\partial x'^d}{\partial x^d} \frac{\partial x^l}{\partial x'^l} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} T_{l'\dots n'}^{a'b'\dots d'}. \quad (\text{A.12})$$

Note que algunos índices están puestos como superíndices o subíndices dependiendo de la parte correspondiente de la transformación, es decir, si los vectores son covariantes o contravariantes.

### A.0.6. Adición y sustracción de tensores

La adición y sustracción de tensores están definidas en términos de sus elementos individuales, igual que para los vectores. Si

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad (\text{A.13})$$

entonces

$$A^{ij} \pm B^{ij} = C^{ij}.$$

Desde luego que,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  deben ser tensores del mismo orden y estar expresados en un espacio del mismo número de dimensiones.

### A.0.7. Convención para la suma

En análisis tensorial es acostumbrado adoptar una convención para la suma para escribir a las ecuaciones tensoriales en una forma más compacta. Mientras se distinga entre contravarianza y covarianza, podemos estar de acuerdo que cuando un índice aparece sobre un lado de la ecuación, uno como superíndice y uno como subíndice (excepto para las coordenadas donde ambos son subíndices o superíndices), automáticamente sumamos sobre ese índice. Esta convención es *todo índice que en una expresión dada se repita dos veces se sobreentiende la suma respecto del mismo, prescindiendo de escribir el signo de suma*. Entonces podemos

escribir a la ecuación (A.10) como

$$B_j'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} B_l^k, \quad (\text{A.14})$$

con la suma en el lado derecho sobre  $k$  y  $l$  implícita. Esta es la convención para la suma de Einstein. El índice  $i$  es superíndice porque está asociado con la contravariante  $x'^i$ ; igualmente  $j$  es subíndice porque está relacionado al gradiente covariante.

### A.0.8. Simetría y antisimetría

El orden en que los índices aparecen en nuestra descripción de un tensor es importante. En general,  $A^{mn}$  es independiente de  $A^{nm}$ , pero hay casos de interés particular. Si, para todo  $m$  y  $n$ ,

$$A^{mn} = A^{nm}, \quad (\text{A.15})$$

llamamos al tensor *simétrico*. Si, por otro lado,

$$A^{mn} = -A^{nm}, \quad (\text{A.16})$$

el tensor es *antisimétrico*. Todos los tensores pueden ser expresados por sus partes simétrica y antisimétrica por la identidad (para el tensor de segundo orden)

$$A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm}), \quad (\text{A.17})$$

el primer término del lado derecho siendo el tensor simétrico, y el segundo, el tensor antisimétrico.



## Apéndice B

# Conceptos de relatividad general

Las modificaciones al fuerte campo gravitacional debido a la relatividad general llegan a ser importantes cuando consideramos las propiedades de estabilidad y equilibrio de una enana blanca, estrella de neutrones o un agujero negro. La relatividad general es una teoría relativista de la gravitación. La gravitación newtoniana puede ser descrita como una teoría de campo para un campo escalar  $\Phi$ , satisfaciendo la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0. \quad (\text{B.1})$$

La aceleración gravitacional de cualquier objeto en el campo está dada por  $-\nabla\Phi$ .

La relatividad nos dice que todas las formas de energía son equivalentes a la masa, así que una teoría relativista de la gravedad tendría todas las formas de energía como fuentes del campo gravitacional, no sólo  $\rho_0$ .

Uno de los más grandes descubrimientos de Einstein fue hacer a la relatividad general un teoría geométrica de la gravitación. En la teoría especial de la relatividad, el espacio tiempo consiste de eventos, los cuales requieren cuatro números para su completa especificación: tres números para especificar la ubicación espacial con respecto a las coordenadas escogidas, y un número para especificar el tiempo. Geométricamente, el espacio tiempo es representado por una superficie de cuatro dimensiones, cada punto en la superficie corresponde a un evento en el espacio tiempo.

Un observador en el espacio tiempo hace mediciones asignando coordenadas a los eventos. Existe una familia preferida de observadores en la relatividad especial: los observadores inerciales, para quienes una partícula libre se mueve con velocidad uniforme. Todos los observadores inerciales están relacionados por la transformación de Lorentz. Al sistema de coordenadas de un observador inercial es llamado sistema coordenado inercial, o marco de Lorentz.

El intervalo (distancia) entre dos eventos cercanos en el espacio tiempo está dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\text{B.2})$$

donde  $dt$ ,  $dx$ ,  $dy$ , y  $dz$  son las diferencias entre las coordenadas de los eventos evaluados en cualquier marco de Lorentz. El intervalo  $ds$  no depende del marco inercial usado para evaluarlo -esto es la invarianza de Lorentz. Escribiendo  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  y  $x^3 = z$ , podemos escribir la ecuación (B.2) como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (\text{B.3})$$

donde

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (\text{B.4})$$

es una matriz diagonal de  $4 \times 4$  y hay una suma implícita de 0 a 3 para los índices repetidos en la ecuación (B.3). La cantidad  $\eta_{\alpha\beta}$  es llamada tensor métrico del espacio tiempo euclideo -esto es, euclideo excepto por el signo menos en la ecuación (B.4). Nótese que la parte espacial del tensor métrico es euclidiano. Esta geometría es llamada espacio de Minkowski.

Uno puede usar marcos no lorentzianos (o no inerciales) para describir al espacio tiempo. Por ejemplo, uno puede usar coordenadas polares para la parte espacial de la métrica, o usar el sistema de coordenadas de un observador acelerado. Si la relación entre las coordenadas inerciales  $x^\alpha$  y las no inerciales  $y^\alpha$  es

$$x^\alpha = x^\alpha(y^\gamma), \quad (\text{B.5})$$

la ecuación (B.3) se convierte en

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(y^\gamma) dy^\alpha dy^\beta, \quad (\text{B.6})$$

donde por regla de la cadena

$$g_{\alpha\beta}(y^\gamma) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\beta} \eta_{\lambda\sigma}. \quad (\text{B.7})$$

En la relatividad general, el espacio tiempo es todavía un superficie de eventos de cuatro dimensiones, pero ahora el intervalo entre eventos cercanos está dado por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta, \quad (\text{B.8})$$

donde al no escoger las coordenadas  $x^\alpha$  que puedan reducir la métrica a la ecuación (B.3) en cualquier punto, entonces se dice que el espacio tiempo está curvado. Las funciones  $g_{\alpha\beta}$  son usadas para representar las variables del campo gravitacional. El intervalo  $ds$  es todavía invariante, entonces la transformación para las componentes de  $g_{\alpha\beta}$  del tensor métrica de las coordenadas  $x'^\alpha$  a las coordenadas  $x^\alpha$  es

$$g_{\alpha\beta}(y^\gamma) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} g'_{\lambda\sigma}. \quad (\text{B.9})$$

La interpretación física de la relatividad general depende del concepto de marcos inerciales locales. En general  $g_{\alpha\beta}$  (véase la ecuación (B.8)) no puede ser diagonalizada por una transformación de coordenadas a  $\eta_{\alpha\beta}$  en cualquier punto del espacio tiempo, podemos escoger cualquier evento en el espacio tiempo a ser el origen de las coordenadas y entonces en ese punto podemos diagonalizar  $g_{\alpha\beta}$ . Uno puede encontrar una transformación de coordenadas que ubique a la primera derivada de  $g_{\alpha\beta}$  en el origen. En otras palabras, una expansión en serie de Taylor de la métrica en el origen escogido quedaría como

$$ds^2 = [\eta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(|x|^2)] dx^\alpha dx^\beta. \quad (\text{B.10})$$

Cualquier parte pequeña de la coordenada en la cual la métrica toma la forma de la ecuación anterior es llamada marco inercial local. Para ver la razón de esta designación, considere el marco inercial local de un observador en el espacio tiempo. Un observador está representado por una línea de universo<sup>1</sup> de todos los eventos que el o ella experimentan. Se escoge algún evento en particular sobre la línea de universo como el origen usado en la ecuación (B.10), y se construye un cuadri-vector unitario  $\mathbf{e}_t$  tangente a la línea de la coordenada  $t$ , y similarmente se construye  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ , y  $\mathbf{e}_z$ . Ya que  $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$ , ésta es una tétrada ortonormal; esto es,  $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t = -1$ ,  $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1$ ,  $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_x = 0$ , y así sucesivamente.

Un observador que es descrito por la tétrada ortonormal local descrita arriba es llamado un observador inercial local u observador local de Lorentz. La relatividad general afirma que todas las leyes no gravitacionales de la física son las mismas en un marco inercial local como en la relatividad especial. Esta ley es llamada Principio de Equivalencia.

El Principio de Equivalencia es una generalización de un principio que dice que las leyes mecánicas no permiten detectar localmente un campo gravitacional. Los efectos de la gravitación siempre desaparecen en un marco de caída libre (es decir, inercial).

---

<sup>1</sup>Para describir qué es una línea de universo, primero suponga que se describe al espacio tiempo con un plano en dos dimensiones, el plano  $t-x$ . Un solo punto en este espacio es un punto fijado por  $x$  y  $t$ , y es llamado un evento. Una línea en el espacio nos da la relación  $x = x(t)$ , y entonces puede representar la posición de una partícula en diferentes tiempos. Esta es la llamada línea de universo de la partícula.

El principio de Equivalencia nos dice cómo formular leyes no gravitacionales en presencia de un campo gravitacional. Se empieza con cualquier ley de la relatividad especial -por ejemplo, la conservación de la energía momento:

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$\nabla_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}. \quad (\text{B.12})$$

Aquí  $T^{\alpha\beta}$  es el tensor de energía momento, y la ecuación (B.11) dice que su cuadi-divergencia desaparece. Por el Principio de Equivalencia, la ecuación (B.11) debe ser válida en un marco inercial local, donde la métrica tiene la forma (B.10). Se desea escribir a la ecuación (B.11) en la forma que sea válida en cualquier sistema de coordenadas donde la métrica tenga la forma (B.8). Las matemáticas necesarias para hacer esto es llamada cálculo tensorial, o geometría diferencial. Se necesita definir un operador más general que la ecuación (B.12), a este operador se le llama derivada covariante. La derivada covariante se define como

$$\nabla'_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\kappa}, \quad (\text{B.13})$$

donde las cantidades  $\Gamma^{\nu}_{\alpha\kappa}$  son los símbolos de Christoffel (véase la ecuación (C.20)). Estas derivadas no son removibles en cualquier punto por alguna transformación de coordenadas, y las derivadas de  $g_{\alpha\beta}$  representan el efecto del campo gravitacional.

La implementación matemática de el Principio de Equivalencia es algunas veces llamada Principio de Covarianza General.

La distribución de masa energía que determinará la geometría,  $g_{\alpha\beta}$ , está descrita por las ecuaciones de campo de Einstein. Estas fueron formuladas por Einstein como

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi \frac{G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (\text{B.14})$$

Aquí  $G^{\alpha\beta}$ , es el tensor de Einstein, es un tensor de segundo orden, es un operador diferencial no lineal actuando sobre  $g_{\alpha\beta}$ . El término fuente para las ecuaciones de campo de Einstein es el tensor de energía momento no gravitacional,  $T^{\alpha\beta}$ . Esta complicada ecuación se reduce a la ecuación de Poisson (B.1) en el límite newtoniano. También se garantiza la conservación de la energía momento ya que  $\nabla'_{\alpha} G^{\alpha\beta} \equiv 0$ .

El tensor de energía momento para el caso de un fluido perfecto toma la siguiente forma

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^{\alpha}u^{\beta} + pg^{\alpha\beta}, \quad (\text{B.15})$$

donde  $u^{\alpha}$  es la cuadi-velocidad del fluido,  $\rho$  la densidad y  $p$  la presión. Este tensor se reduce

a la ecuación (2.12) cuando  $pu^\alpha u^\beta = 0$  y  $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  tomando los valores 1, 2 y 3.

Para poder definir el tensor de Einstein, primero se define al *tensor de curvatura de Riemann* (con ayuda de los símbolos de Christoffel) de la siguiente manera

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha \equiv \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma. \quad (\text{B.16})$$

Después se define al *tensor de Ricci*,  $R_{\alpha\beta}$  (con ayuda del tensor de Riemann):

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\mu\beta}^\mu = R_{\beta\alpha}. \quad (\text{B.17})$$

Esta es la contracción de  $R_{\alpha\nu\beta}^\mu$  sobre los índices primero y tercero. Similarmente el *escalar de Ricci* es definido como

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (\text{B.18})$$

El tensor de Einstein es definido como (utilizando el tensor y escalar de Ricci)

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = G^{\beta\alpha}. \quad (\text{B.19})$$

El tensor  $G^{\alpha\beta}$  está construido sólo del tensor de Riemann y la métrica, y además es libre de divergencias como una identidad.

El tensor de Riemann es la caracterización de la curvatura. Si el tensor es cero, entonces el espacio es idénticamente plano. Este tensor tiene 20 componentes independientes (en cuatro dimensiones). El tensor de Ricci, el escalar de Ricci, y el tensor de Einstein son contracciones del tensor Riemann. En particular, el tensor de Einstein es simétrico y de segundo rango, lo que significa que tiene diez componentes independientes.

# Apéndice C

## Partícula libre en un campo gravitacional

Una partícula de prueba es una idealización de un objeto material (es decir, un objeto muy pequeño comparado con el objeto de estudio). Es supuesta a ser muy pequeña (que no perturbe el espacio tiempo alrededor de esta), sin carga (no responde a las fuerzas electromagnéticas), esférica (no siente torcas). Simplemente se mueve libremente en el campo gravitacional.

El movimiento de una partícula libre se determina, en la teoría especial de la relatividad (sin campos gravitacionales), a partir del principio de mínima acción:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \quad (\text{C.1})$$

según el cual la partícula se mueve de manera que su línea de universo sea una extremal entre un par dado de puntos de universo, es decir, en nuestro caso una recta (en el espacio ordinario de tres dimensiones, esta recta corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme).

Para verificar la afirmación anterior, se puede escribir al integrando en la forma

$$ds = (-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta)^{1/2}d\lambda, \quad (\text{C.2})$$

donde

$$\dot{x}^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}. \quad (\text{C.3})$$

Aquí  $\lambda$  es cualquier parámetro a lo largo de la línea de universo. La expresión (C.2) para  $ds$  es invariante bajo un cambio del parámetro  $\lambda \rightarrow \lambda(\lambda')$ . El lagrangiano para la ecuación (C.1) es

$$L = (-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta)^{1/2}. \quad (\text{C.4})$$

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange obtenidas de la ecuación (C.1) son

simplemente (estas son obtenidas del cálculo de variaciones)

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}. \quad (\text{C.5})$$

El lado derecho de la ecuación anterior es cero ya que  $L$  es independiente de  $x^\alpha$ . Entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = -(-\eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{-1/2} \eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta = -L^{-1} \eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta, \quad (\text{C.6})$$

y obtenemos que

$$-L^{-1} \eta_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + \eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta L^{-2} \frac{dL}{d\lambda} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Reordenando la ecuación llegamos a

$$\eta_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta - \eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \frac{1}{L} \frac{dL}{d\lambda} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Reescalando  $\lambda \rightarrow \lambda(\lambda')$  podemos hacer que  $L$  permanezca constante a lo largo de la curva. En particular, uno puede parametrizar las líneas de universo de una partícula por la longitud a lo largo de la curva - esto es simplemente su tiempo propio, usualmente denotado por  $\tau$  (Realmente,  $s = c\tau$ ). Para este caso  $\lambda = s$ ,  $L = 1$  a lo largo de la curva, y entonces la ecuación anterior queda de la siguiente manera

$$\eta_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta = 0. \quad (\text{C.9})$$

Multiplicando por la matriz inversa de  $\eta_{\alpha\beta}$ , denotada por  $\eta^{\gamma\alpha}$ , obtenemos que

$$\eta^{\gamma\alpha} \eta_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta = \delta_\beta^\gamma \ddot{x}^\beta = \ddot{x}^\gamma = 0 = \frac{d^2 x^\gamma}{d\lambda^2}, \quad (\text{C.10})$$

la cual es la ecuación de movimiento para una partícula con velocidad uniforme en una línea recta. Geométricamente, las curvas de longitud extremal son llamadas geodésicas. Las geodésicas de un espacio de Minkowski (relatividad especial) son líneas rectas cuadrimensionales. El caso tratado anteriormente, donde  $ds^2 < 0$ , describe geodésicas del tipo temporal, las líneas de universo de una partícula libre. Fotones, u otras partículas sin masa, viajan a la velocidad de la luz de modo que  $ds^2 = 0$ ; a los fotones que viajan libremente se les dice que viajan en a lo largo de una geodésica nula. En este caso el parámetro  $\lambda$  no puede ser escogido como el tiempo propio. Es conveniente escogerlo como

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = p^\alpha, \quad (\text{C.11})$$

el cuadri-momento del fotón. Como  $\eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0$  para todo tiempo para un fotón, esta es una opción válida para  $\lambda$  (para una partícula con masa se puede escoger que  $\lambda = \tau/m$ ). Entonces la ecuación (C.10) se lee como

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda} = 0; \quad \text{que es, } p^\alpha = \text{constante.} \quad (\text{C.12})$$

Por el Principio de Equivalencia la ecuación (C.1) debe ser un principio variacional para el movimiento de una partícula de prueba en la relatividad general: las partículas libres se mueven a lo largo de geodésicas del espacio tiempo. Entonces el lagrangiano de una partícula de prueba se puede escribir como

$$L = [-g_{\alpha\beta}(x^\gamma) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta]^{1/2}. \quad (\text{C.13})$$

Utilizando la ecuación (C.5) encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{2} [-g_{\gamma\beta}(x^\alpha) \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta]^{-1/2} \frac{\partial g_{\gamma\beta}(x^\alpha)}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta = -\frac{1}{2} L^{-1} g_{\gamma\beta, \alpha} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= -L^{-1} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta. \end{aligned}$$

Si suponemos que  $L = \text{constante}$ , podemos escribir a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange como

$$g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + \dot{x}^\beta \frac{dg_{\alpha\beta}}{d\lambda} - \frac{1}{2} g_{\gamma\beta, \alpha} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta = 0. \quad (\text{C.14})$$

Por la regla de la cadena podemos escribir a la derivada que aparece en el segundo término como

$$\frac{dg_{\alpha\beta}}{d\lambda} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\lambda}, \quad (\text{C.15})$$

donde podemos definir

$$g_{\alpha\beta, \gamma} \equiv \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}. \quad (\text{C.16})$$

Entonces la ecuación final queda escrita como

$$g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + g_{\alpha\beta, \gamma} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta - \frac{1}{2} g_{\gamma\beta, \alpha} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta = 0. \quad (\text{C.17})$$

Como  $g_{\alpha\beta}$  es un tensor simétrico, podemos escribir al segundo término de la ecuación anterior como

$$g_{\alpha\beta, \gamma} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta, \gamma} + g_{\gamma\alpha, \beta}) \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta \quad (\text{C.18})$$



De modo que la ecuación (C.17) se puede escribir como

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0, \quad (\text{C.19})$$

donde

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\gamma\beta,\alpha}). \quad (\text{C.20})$$

Multiplicando por la matriz inversa del tensor métrico, denotado por  $g^{\lambda\alpha}$ , obtenemos que

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0, \quad (\text{C.21})$$

donde

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda = g^{\lambda\alpha}\Gamma_{\alpha\beta\gamma}. \quad (\text{C.22})$$

Los símbolos- $\Gamma$  son llamados símbolos de Christoffel. La ecuación (C.21) es la forma final de la ecuación geodésica en relatividad general. Note que el Principio de Equivalencia se satisface: en un marco inercial local, uno puede escoger coordenadas de modo que  $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ , esto es que las  $\Gamma$ 's se anulen. Por lo tanto el movimiento de una partícula de prueba en un marco inercial local tiene velocidad uniforme en una línea recta. Los  $\Gamma$ 's en la ecuación (C.21) representan los efectos del campo gravitacional. Existe otro lagrangiano con el que se llega a la misma ecuación geodésica antes mencionada, este es

$$L = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta. \quad (\text{C.23})$$

La ecuación se obtiene de la misma manera como con el lagrangiano mostrado en la ecuación (C.13). Una relación muy importante para describir a la partícula de prueba es la definición del momento conjugado canónico a la coordenada  $x^\alpha$ , este se escribe como

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}. \quad (\text{C.24})$$

De las ecuaciones (C.23) y (C.11), obtenemos que

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = g_{\alpha\beta}p^\beta \quad (\text{C.25})$$

o

$$p^\alpha = g^{\alpha\beta}p_\beta. \quad (\text{C.26})$$

Note que si  $L$  es independiente de la coordenada  $x^1$  (por ejemplo), se dice que  $p_1$  es una constante de movimiento.

# Apéndice D

## Conceptos de termodinámica

La termodinámica es una teoría fenomenológica de la materia. A continuación se enlistan algunos conceptos que estudia la termodinámica, estos conceptos serán extremadamente breves, ya que se espera que el lector esté familiarizado con dichos conceptos.

- Un sistema termodinámico es cualquier sistema macroscópico.
- Los parámetros termodinámicos son cantidades macroscópicas medibles, asociadas con el sistema, como son la presión  $P$ , el volumen  $V$ , la temperatura  $T$ , y el campo magnético  $B$ . Éstas son definidas experimentalmente.
- Un estado termodinámico es especificado por un conjunto de parámetros termodinámicos necesarios para la descripción del sistema.
- El equilibrio termodinámico prevalece cuando el estado termodinámico del sistema no cambia con el tiempo.
- La ecuación de estado es una relación funcional entre los parámetros termodinámicos de un sistema en equilibrio. Si  $P$ ,  $V$  y  $T$  son los parámetros termodinámicos del sistema, la ecuación de estado toma la forma

$$f(P, V, T) = 0, \quad (\text{D.1})$$

la cual reduce el número de variables independientes del sistema de tres a dos. La función  $f$  debe ser dada como parte de la especificación del sistema.

- El concepto de trabajo es tomado de la mecánica clásica. Por ejemplo, para un sistema cuyos parámetros son  $P$ ,  $V$  y  $T$ , el trabajo  $dW$  realizado por un sistema en el cual el

volumen se incrementa por  $dV$  está dado por

$$dW = PdV. \quad (\text{D.2})$$

- El calor es una cantidad de energía que absorbe un sistema si su temperatura se incrementa mientras no haya trabajo realizado. Si  $\Delta Q$  es una pequeña cantidad de calor absorbido, y  $\Delta T$  es un pequeño cambio en la temperatura acompañando a la absorción de calor, entonces la capacidad calorífica  $C$  está definida como

$$C = \frac{\Delta T}{\Delta Q}. \quad (\text{D.3})$$

Entonces la capacidad calorífica a volumen constante se puede definir como

$$C_V \equiv \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_V, \quad (\text{D.4})$$

y de la misma manera se puede definir a la capacidad calorífica a presión constante

$$C_P \equiv \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_P. \quad (\text{D.5})$$

### Primera ley de la termodinámica

La primera ley de la termodinámica establece que la cantidad  $dU$ , definida como

$$dU = dQ - dW, \quad (\text{D.6})$$

es la misma para todas las transformaciones de un estado inicial a un estado final. Esto define inmediatamente a una función de estado  $U$ , llamada energía interna. La entalpía del sistema puede ser definida como

$$H = U + PV. \quad (\text{D.7})$$

La entalpía mide la cantidad de energía absorbida o liberada por un sistema termodinámico.

### Segunda ley de la termodinámica

La segunda ley de la termodinámica nos dice que no existe transformación termodinámica cuyo único efecto sea extraer una cantidad de calor de un depósito de calor dado y convertirlo en trabajo.

**Entropía**

La entropía de un sistema termodinámico se define como

$$TdS = dQ, \quad (\text{D.8})$$

que usando la primera ley de la termodinámica, obtenemos

$$TdS = dU + dW. \quad (\text{D.9})$$

La entropía mide el desorden de un sistema.

**Tercera ley de la termodinámica**

La tercera ley de la termodinámica establece que no es posible alcanzar el cero absoluto ( $T = 0$ ) en un número finito de etapas. También puede definirse como: la entropía de un sistema en el cero absoluto es una constante universal, la cual puede ser tomada como cero.

# Bibliografia

- [1] Abel T., arXiv:1003.0937v1 [astro-ph.CO], 2010.
- [2] Abramowicz M. A., Kluźniak W., *A&A*, 374:L19-L20, 2001.
- [3] Abramowicz M. A., Kluźniak W., gr-qc/0206063v1, 2002.
- [4] Abramowicz M. A., Kluźniak W., astro-ph/0411709v1, 2004.
- [5] Abramowicz M. A., Blaes O. M., Horák J., Kluźniak W., Rebusco P., Paper II, astro-ph/0511375v1, 2005.
- [6] Abramowicz M. A., ASPC, 403, 29A, 2009.
- [7] Anzer U., Börner G., Monaghan J.J., *Astron. Astrophys.*, 176, 235-244, 1987.
- [8] Arfken G., *Mathematical methods for physicists*, Academic Press, 1985.
- [9] Artemova I.V., Björnsson G., Novikov I.D., 1996, *Apj*, 461, 565-571.
- [10] Balbus S. A., Hawley J. F., *ApJ*, 376:214-222, 1991.
- [11] Balbus S. A., Hawley J. F., *Reviews of Modern Physics*, 70:1-53, 1998.
- [12] Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A., 1972, *Apj*, 178, 347-369.
- [13] Boyer R. H., Lindquist R. W., *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 8, Num. 2, 1967.
- [14] Choudhuri A. R., *Astrophysics for Physicists*, Cambridge University Press, 2010.
- [15] Combes F. *Astrophysics and Space Science*, 265: 417–424, 1999.
- [16] Daigne F., Font J. A., astro-ph/0311618v1, 2003.
- [17] Frank J., King A., Raine D., *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press, 2002.

- [18] Giacconi R., Gursky H., Paolini F. R., *Physical Review Letters*, 9, 1962.
- [19] Giacconi R., Gursky H., Kellogg E., Schreier E., Tananbaum H., *ApJ*, 167:L67-L73, 1971.
- [20] Gingold R. A., Monaghan J. J., *Mon. Not. R. Astr. Soc*, 181, 375-389, 1977.
- [21] Greene, J., Bailyn C. D., Orosz J. A., *ApJ*, 554:1290-1297, 2001.
- [22] Haaser N. B., La Salle J. P., Sullivan J. A., *Análisis Matemático*, Vol. 2, Trillas, 2003.
- [23] Hawley J. F., Balbus S. A., *ApJ*, 376:223-233, 1991.
- [24] Hoffman K., *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1971.
- [25] Huang K., *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, 1987.
- [26] Igumenshchev I.V., Chen X., Abramowicz M.A., 1996, *MNRAS*, 278, 236.
- [27] Karttunen H., *Fundamental Astronomy*, Springer, 2007.
- [28] Kato S., *PASJ*, 53, 1-24, 2001.
- [29] Kluźniak W., Abramowicz M. A., astro-ph/0105057v1, 2001.
- [30] Kluźniak W., Abramowicz M. A., Kato S., Lee W. H., Stergioulas N., astro-ph/0308035v1, 2003.
- [31] Kluźniak W., Abramowicz M. A., Lee W. H., astro-ph/0402013v1, 2004.
- [32] Kluźniak W., Abramowicz M. A., Bursa M., Török G., *RevMexAA*, 27, 18-25, 2007.
- [33] Kerr R. P., *Physical Review Letters*, 11, 1963.
- [34] Landau L. D., Lifshitz E. M., *Mechanics*, Vol. 1, Reed Educational, 2000.
- [35] Landau L. D., Lifshitz E. M., *The Classical Theory of Fields*, Vol. 2, Reed Educational, 2000.
- [36] Landau L. D., Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics*, Vol. 6, Reed Educational, 2000.
- [37] Lee W. H., Kluźniak W., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 335, L29-L32, 2002.
- [38] Lee W. H., Abramowicz M. A., Kluźniak W., astro-ph/0402084v2, 2004.
- [39] Lee W. H., *Astronomische Nachrichten*, 326: 838-844, 2005.

- [40] Lewin W., H. G., van der Klis M., *Compact Stellar X-ray Sources*, Cambridge University Press, 2006.
- [41] Lucy L. B., ApJ, 82, 1977.
- [42] Lynden-Bell D., Nature, 223:690-694, 1969.
- [43] McClintock J., Remillard R. A., ApJ, 308:110-122, 1986.
- [44] McClintock J., Remillard R. A., astro-ph/0306213v4, 2004.
- [45] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973.
- [46] Monaghan J. J., Lattanzio J.C., Astron. Astrophys. 149, 135-143, 1985.
- [47] Monaghan J. J., Annu. Rev. Astron. Astrophys., 30: 543-74, 1992.
- [48] Montero P. J., Rezzolla L., Yoshida S' i, astro-ph/0407642v1, 2004.
- [49] Novikov I. D., Thorne K. S., *Astrophysics of Black Hole*, Black holes (Les astres occlus),343-450, 1973.
- [50] Oppenheimer, J. R., Volkoff, G. M., Physical Review, 55, 374-381, 1939.
- [51] Paczyński B., Wiita P. J., Astron. Astrophys. 88, 23-31, 1980.
- [52] Padmanabhan T., *Gravitation: Foundations and Frontiers*, Cambridge University Press, 2010.
- [53] Piran T., ApJ, 221:652-660, 1978.
- [54] Prendergast K. H., Burbidge G. R., ApJ, 151, 1968.
- [55] Press W. H., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 2007.
- [56] Pringle J. E., Rees M. J., A&A, 21, 1-9, 1972.
- [57] Pringle J. E., Ann. Rev. Astron. Astrophys, 19: 137-62, 1981.
- [58] Qian L., Abramowicz M.A., Fragile P.C., Horák J., Machida M., Straub O., 2009, A&A, 498, 471-477.
- [59] Remillard R. A., Morgan E. H., McClintock J. E., Bailyn C. D., Orosz J. A. ApJ, 522, 397, 1999.

- [60] Remillard R. A., Muno M., McClintock J. E., Orosz J. A. *ApJ*, 580, 1030-1042, 2002.
- [61] Remillard R. A., McClintock J. E., astro-ph/0606352v1, 2006.
- [62] Rezzolla L., Yoshida S' i., Zanutti O., *MNRAS*, 344, 978-992, 2003a.
- [63] Rezzolla L., Yoshida S' i. Maccarone T.J., Zanutti O., *MNRAS*, 344,L37-L41, 2003b.
- [64] Rosswog S., arXiv:0903.5075v2 [astro-ph.IM], 2009.
- [65] Rubio-Herrera E., Lee W. H., *MNRAS*, 000, 1-10, 2005.
- [66] Rybicki G. B., Lightman A. P., *Radiative processes in astrophysics*, Wiley-VCH, 2004.
- [67] Schutz B. F., *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, 2007.
- [68] Shakura N. I., *Astronomicheskii Zhurnal*, 49:921, 1972.
- [69] Shakura N. I., Sunyaev R. A., *Astron. & Astrophys.* 24, 337-335, 1973.
- [70] Shapiro S. L., Teukolsky S. A., *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, John Wiley & Sons, 1983.
- [71] Strohmayer T. E., *ApJ*, 552:L49-L53, 2001.
- [72] van der Klis M., Wijnands A. D., Horne K., Chen W., *ApJ*, 481:L97-L100, 1997.
- [73] van der Klis M., astro-ph/0410551v1, 2004.
- [74] Wagoner R. V., Silbergleit A., Ortega-Rodríguez M., *ApJ*, 559:L25-L28, 2001.
- [75] Zanutti O., Rezzolla L., Font J. A., *MNRAS*, 341, 2003.
- [76] Zanutti O., Font J. A., Rezzolla L., Montero P. J., *MNRAS*, 000, 1-12, 2004.
- [77] Zurek W. H., Benz W., *ApJ*, 308: 123-133, 1986.