UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

EL PROBLEMA DE INVERSIÓN RESPECTO A UN CONJUNTO, EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

PRESENTA

ELIZABETH MORALES MADUEÑA.

ASESOR: **FÍS. MAT. MANUEL VALADEZ RODRÍGUEZ.**

DICIEMBRE DE 2010

Con todo mi cariño para

María de Jesús y Mauricio, mis padres.
Carlos †, Dulce y Juán José, mis hermanos.

Agradecimientos

Por su apoyo y cariño a lo largo de toda mi vida, por su siempre oportuno y sabio consejo, por su ejemplo, ... , y por tantas cosas más, les estoy infinitamente agradecida a mis padres, María de Jesús Madueña Molina y Mauricio Morales Núñez; y por que sé que siempre estarán a mi lado agradezco a mis hermanos Carlos †, Dulce y Juán José.

Por ser un excelente maestro y consejero, por su ayuda en las diversas materias, por su paciencia al dirigirme en este trabajo agradezco al Prof. Manuel Valadéz Rodríguez.

Por su incondicional amistad a lo largo de estos años, un especial agrade-cimiento para todos mis compañeros que estuvieron a mi lado a lo largo de la carrera.

Y por la educación que recibí agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México y a los muchos buenos maestros que tuve.

Índice general

Introducción

El objetivo del presente trabajo es extender la transformación de inversión respecto al círculo en el plano euclidiano, a conjuntos en espacios producto interno más generales.

El problema de inversión respecto al círculo surge del problema de Apolonio, a partir de ahí se comienza a hacer un estudio de las propiedades que se cumplen al aplicar este concepto desde una perspectiva geométrica, como se verá en el tercer capítulo del presente trabajo.

El significado intuitivo de la transformación de inversión respecto al círculo es el de disponer de un espejo circular, y considerar la reflexión de los puntos o cunjuntos de puntos en el plano, asignando a cada punto P un punto P', llamado imagen de P bajo la transformación.

La inversión respecto a un conjunto en un espacio producto interno, re-presenta la generalización de la inversión respecto al círculo, siendo entonces esta última un caso particular de la transformación que se propone.

En el primer capítulo se definirán los productos internos y se darán ejem-plos de estos. De igual forma se definirá el concepto de forma bilineal simétrica para usar sus propiedades en relación con los productos internos en espacios reales (un producto interno en un espacio vectorial real es una forma bili-neal simétrica). A partir de ello determinar con facilidad la naturaleza de la gráfica que representa, siendo este el conjunto respecto al cual se aplica la transformación de inversión.

En el segundo capítulo utilizamos la relación biunívoca que existe entre el plano y el campo de los complejos para ver la transformación de inversión respecto al círculo en el plano complejo, tomando en cuenta las propiedades de los números complejos pero principalmente la existencia del inverso multiplicativo de un número complejo distinto de cero. La transformación de inversión es un caso particular de transformación de *Möbius* (o transformación conforme). Este tipo de transformaciones tienen la propiedad de mandar rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

Por último, se propone una generalización de la transformación de inversión respecto a conjuntos, en espacios normados. Un ejemplo de norma es la euclidiana; mediante la cual se define la inversión respecto al círculo; clásica y con la que estamos más familiarizados. Lo que se hace en el presente trabajo es proponer otras normas y aplicar dicha transformación respecto a conjuntos.

Capítulo 1

Espacios Producto Interno

1.1 Vectores y valores propios

Esta primera sección la iniciaremos mencionando algunos conceptos tales como *espacio vectorial*, *base de un espacio vectorial*, *transformación lineal* y *operador lineal* ya que para la teoría que vamos a desarrollar acerca de valores y vectores propios dichas definiciones serán fundamentales.

Definición 1. *La estructura de espacio vectorial consiste de un campo F, cuyos elementos se llaman escalares (pueden ser números reales $\mathbb{R}$, complejos $\mathbb{C}$, racionales $\mathbb{Q}$, etc.), un conjunto V de elementos llamados vectores y dos operaciones, de las cuales una es adición o suma que asocia a cada par de vectores α, β de V un vector $\alpha + \beta$ de V y otra multiplicación escalar, que asocia a cada vector α de V y a cada escalar c de F a un vector $c\alpha$ de V, de tal modo que se cumple lo siguiente:*

Para todos los vectores α, β, γ vectores de V y todos los escalares c, c_1, c_2 escalares de F,

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

3. *Existe un elemento 0 de V, único, al cual se le llama vector nulo (o vector cero) tal que $\alpha + 0 = \alpha$,*

4. *Para cada* α *de* V *existe un* $-\alpha$*, único, en* V*, tal que* $\alpha + (-\alpha) = 0$ *,*

5. $1\,\alpha = \alpha$*,*

6. $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$*,*

7. $c(\alpha + \beta) = c\beta + c\alpha$*,*

8. $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$*.*

El siguiente concepto nos permite escribir un vector en función de otros vectores en el mismo espacio vectorial.

Definición 2. *Un vector* α *de* V *se llama* **combinación lineal** *de los vectores* $\alpha_1, ...\alpha_n$ *de* V*, si existen escalares* $c_1, ..., c_n$ *de* F *tales que*

$$\alpha = c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n = \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i.$$

Cuando se trabaja con un subconjunto de V, nos interesa saber si tienen la misma estructura del espacio V. La siguiente definición nos dice en que casos se preserva la estructura de espacio vectorial.

Definición 3. *El subespacio* W *de* V *generado por un subconjunto no vacío* S *de* V *es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de* S*. Así, si* S *es un subconjunto no vacío de* V *y si* α *y* β *pertenecen al subespacio* W *generado por* S*, entonces, existen vectores* $\alpha_1, ..., \alpha_m$ *y* $\beta_1, ..., \beta_n$ *de* S *tales que*

$$\alpha = x_1\alpha_1 + ... + x_m\alpha_m \quad y \quad \beta = y_1\beta_1 + ... + y_n\beta_n,$$

para algunos escalares x_i *y* y_j *de* F*.*
Y, por tanto, si c *es un escalar, se tiene*

$$c\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m}(c_ix_i)(\alpha_i) + \sum_{i=1}^{m} y_i\beta_i,$$

de donde, el vector $c\alpha + \beta$ pertenece a W y, por tanto, W es un subespacio de V.

Los subespacios se pueden unir para generar la siguiente definición.

Definición 4. *Si $W_1, W_2, ..., W_k$ son subespacios de V, se define la suma de estos como el subespacio de V generado por la unión de los W_j. Evidentemente, W contiene a cada uno de estos subespacios.*

$$W = W_1 + W_2 + ... + W_k.$$

Si un vector es una combinación lineal de otros vectores, entonces clasificamos la combinación por medio de sus escalares.

Definición 5. *Sea S un subconjunto de V, de vectores. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ vectores distintos de S y considérese la combinación lineal*

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n = 0. \tag{1}$$

Se dice que el conjunto S es linealmente dependiente si no todo escalar c_i es nulo. El subconjunto S se dirá linealmente independiente si resulta que (1) implica que todos los c_i son nulos. Si el conjunto S es finito; digamos $S = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$, en ocasiones se dice que los vectores $\alpha_1, ..., \alpha_m$ son linealmente dependientes o linealmente independientes.

Definición 6. *Sea V un espacio vectorial. Una* **base** *de V es un subconjunto linealmente independiente de V que genera el espacio V.*

Por ejemplo, sea F un campo, y en F^n sea S el subconjunto que consta de los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ definidos por

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$$

$$.....$$

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1).$$

Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ escalares de F, y hagase $\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$. Entonces

$$\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Lo anterior muestra que los vectores e_i generan F^n. Como $\alpha = 0$ si, y sólo si, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ son linealmente independientes. El conjunto $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es, por tanto, una base de F^n la cual es llamada *base canónica* de F^n.

Dado que las bases fueron definidas como subconjuntos de vectores, obviamente éstas no estan ordenadas; esto es, dada una base de un espacio vectorial no existe una manera natural de colocar los vectores que la componen (salvo posiblemente en el caso de la base canónica de F^n). En lo que sigue, será de importancia para nosotros el orden en que se presentan los elementos de una base.

Definición 7. *Una* **base ordenada** *de un espacio vectorial V es una sucesión $\alpha_1, \alpha_2...$ de vectores linealmente independientes de V que generan V.*

Incurriendo un poco en abuso de notación, escribiremos por ejemplo $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..\}$, para indicar la sucesión $\alpha_1, \alpha_2, ...$

Definición 8. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo campo F. Una* **transformación lineal** *de V en W es una función T de V en W tal que*

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta),$$

para todos los vectores α y β de V y todo escalar c de F.

Un resultado importantante es el siguiente: si V y W son ambos espacios vectoriales sobre el campo F y si $\mathcal{B} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es una base ordenada de V y $\beta_1, ..., \beta_n$ son vectores cualesquiera de W, entonces existe una única transformación lineal T de V en W, tal que

$$T(\alpha_j) = \beta_j, \qquad j = 1, .., n.$$

Lo anterior se obtiene así: dado un α de V, existe una única n-ada $(x_1, ..., x_n)$ tal que

$$\alpha = x_1\alpha_1 + ... + x_n\alpha_n.$$

Aplico la transformación lineal T

$$T(\alpha) = T(x_1\alpha_1 + ... + x_n\alpha_n) = T(x_1\alpha_1) + ... + T(x_n\alpha_n) = x_1T(\alpha_1) + ... + x_nT(\alpha_n),$$

de donde

$$T(\alpha) = x_1\beta_1 + ... + x_n\beta_n.$$

T es una correspondencia bien definida que asocia con cada α de V un vector $T(\alpha)$ de W, pues cada base ordenada de V determina una correspondencia biunívoca

$$\alpha \to (x_1, x_2, ..., x_n),$$

entre todos los vectores de V y el conjunto de todas las n-adas de F^n. Se define la *matriz de las coordenadas de α respecto a la base ordenada $\mathcal{B}$* como

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

El símbolo $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ pretende indicar la dependencia de esta matriz respecto de la base.

Definición 9. *Si V es un espacio vectorial sobre el campo F, un* **operador lineal** *sobre V es una transformación lineal de V en V.*

Definimos ahora los conceptos de *valor propio y vector propio* de un operador.

Definición 10. *Sea V un espacio vectorial sobre el campo F y sea T un operador sobre V. Se dice que un escalar c es un* **valor propio** *de T si existe un vector no nulo α de V tal que $T(\alpha) = c\alpha$; se dice que α es un* **vector propio** *de T asociado con el valor propio c.*

Los elementos c y α de la definición también son llamados *eigenvalor* y *eigenvector* del operador T respectivamente.

Toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con elementos en el campo F es un operador sobre el espacio vectorial F^n. Por definición, un eigenvalor de A es un elemento c de F tal que existe un vector no nulo X de F^n que satisface la igualdad $AX = cX$, es decir $cX - AX = 0$ y usando la linealidad de los operadores se tiene $(cI - A)X = 0$, de aquí que la matriz $cI - A$ es no inversible pues $X \neq 0$. Para calcular los eigenvalores de A, usaremos el hecho de que $cI - A$ es no inversible. Definimos el polinomio característico P_A de la matriz A mediante

$$P_A(t) = det(tI - A).$$

De aqui, los eigenvalores de A corresponden a las raices del polinomio P_A ya que $det(tI - A) = 0$ si t es una de tales raices, es decir $t = c$. De hecho se puede probar que un escalar c es un eigenvalor de A si y sólo si es una raiz de su polinomio característico.

Ejemplo 1. *Calcularemos los eigenvalores de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es, por definición

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t-3 & 1 \\ 2 & 1 & t-3 \end{vmatrix} = (t+2)(t-4)^2 = 0,$$

de donde se concluye que los valores de t para los cuales $P_A(t) = 0$ son $t = 4, -2$; esto es 4 y -2 son los eigenvalores de A, ya que son las raíces de su polinomio característico. Procedemos ahora a calcular los eigenvectores correspondientes a dichos eigenvalores proponiendo una terna no nula $X^t = (x_1, x_2, x_3)$ y sustituyendo los valores de $t = c_j$ en la igualdad

$$\begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t-3 & 1 \\ 2 & 1 & t-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo esta igualdad con $t = c_1 = 4$, resulta $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$, lo que podemos escribir en la forma $x_3 = -2x_1 - x_2$. Eligiendo primero $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, tomando después $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, se obtienen los eigenvectores

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De manera semejante, con $t = c_2 = -2$ resulta el par de igualdades $x_1 = 2x_3$; $x_2 = x_3$. Si hacemos $x_3 = 1$, se obtiene

$$X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que es un eigenvector de A con eigenvalor igual a -2. Por lo tanto X_1, X_2 y X_3 son vectores propios de A. Más aún si formamos la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

formada por los vectores propios, entonces la inversa será

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Así $Q^{-1}AQ = D$, donde D es la matriz diagonal formada por los valores propios de A, es decir

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.2 Productos internos y espacios con producto interno

Es importante mencionar que los conceptos de *producto interno*, *norma* de un vector y *ortogonalidad* de vectores representan la generalización de los conceptos de *producto escalar* o *producto punto* en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Comencemos con una definición esencial; se trata de lo que es un *producto interno.*

Definición 11. *Sea F el campo de los números reales o el de los números complejos y sea V un espacio vectorial sobre F. Un* **producto interno** *sobre V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores α y β de V un escalar $\langle\alpha,\beta\rangle$ de F, de tal forma que para cualesquiera vectores α, β y γ de V y para todo escalar c de F,*

a) $\langle c\alpha+\beta,\gamma\rangle = c\langle\alpha,\gamma\rangle + \langle\beta,\gamma\rangle$,

b) $\langle\beta,\alpha\rangle = \overline{\langle\alpha,\beta\rangle}$, ($\overline{\langle\alpha,\beta\rangle}$ *es el complejo conjugado de* $\langle\alpha,\beta\rangle$ *).*

c) Es definido positivo si $\alpha \neq 0$, entonces $\langle\alpha,\alpha\rangle > 0$.

Aunque hay una infinidad de formas de definir un producto interno en un espacio vectorial dado, el que nosotros vamos a usar en esta parte es el llamado *producto interno canónico* en F^n. Este se define como sigue: dados un campo ($\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) y dos vectores cualesquiera $\alpha = (x_1,...,x_n)$ y $\beta = (y_1,...,y_n)$ de F^n, se propone

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j.$$

Si F es el campo de los números reales, al producto así definido se le denomina también *producto escalar* o *producto punto* de α y β y se le denota por $\alpha \cdot \beta$.

Definición 12. *Sea V un espacio vectorial sobre el campo F y sea $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno sobre V. Si $\alpha \in V$,entonces la* **norma** *de α, se define como el número real no negativo $\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$, esto es*

$$||\alpha|| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle},$$

y la función $f\colon V \to F$ definida por $f(\alpha) = ||\alpha||^2$ se le denomina **forma cuadrática determinada por el producto interno** *$\langle\ ,\ \rangle$.*

A la norma del vector α se le denotará por $||\alpha||$.

Para el caso de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^1$ y el producto interno canónico sobre éstos, la norma de un vector α coincide con su magnitud.

El siguiente lema, junto con su prueba será fundamental para el objetivo de este trabajo; es importante mencionar que todo producto interno sobre un espacio de dimensión finita n sobre el campo F tiene asociada una matriz de $n \times n$ con elementos en F, es decir:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = Y^* A X,$$

de donde $X = [\alpha]_{\mathcal{B}}$, $Y = [\beta]_{\mathcal{B}}$.

Definición 13. *Sea $A \in M_{n\times n}(F)$, entonces $\overline{A^t} = A^*$.*

Lema 1. *Sean V un espacio vectorial de dimensión n, $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno y F un campo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). $A = (a_{ij})$ es la matriz de $\langle\ ,\ \rangle$ con respecto a alguna base ordenada $\mathcal{B}$ de V si y sólo si $A^* = A$, a_{jj} es un real positivo y* $\det(A) > 0$.

Prueba. Sabemos que $\langle \beta, \alpha \rangle = \overline{\langle \alpha, \beta \rangle}$, por la definición de producto interno y que $\langle \alpha, \beta \rangle = Y^* A X$ por definición. Ahora bien, $\langle \beta, \alpha \rangle = X^* A Y = (Y^* A^* X)^*$ lo que es igual a $\overline{\langle \alpha, \beta \rangle}$ si y sólo si $A^* = A$. Para demostrar que a_{jj} es un real positivo, tomemos $\alpha = \beta$ y $E_j = [\alpha]_{\mathscr{B}}$, donde $(E_i)_j = \delta_{ij}$ y $\alpha \neq 0$. El producto interno $\langle \alpha, \alpha \rangle = E_j^* A E_j = a_{jj}$ es un real positivo, por el inciso c) de definición 6.

Por último, para demostrar que $\det(A) > 0$, usaremos el hecho de que toda matriz simétrica es diagonalizable, es decir, la matriz A es equivalente a una matriz D; esto es

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_n \end{pmatrix},$$

por lo tanto $\det(A) = \det(D)$ con $c_j \in \mathbb{R}$. Ahora, sea $\alpha \neq 0$ tal que $X = [\alpha]_{\mathscr{B}}$, donde X es un vector propio de A con valor propio $c_j, (j = 1, 2, ..., n)$. Al realizar el producto interno de α con α se tiene $\langle \alpha, \alpha \rangle = X^* A X = X^*(AX) = X^*(c_j X) = c_j X^* X = c_j \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$. □

Para comprender el concepto anterior, lo aplicaremos en las matrices $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2. *Sean* $(a_{ij}) = A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *y una función* $f\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \times \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}$ *la función definida por*

$$f(X, Y) = Y^t A X.$$

Tenemos que f *es un producto interno sobre* $\mathbb{R}^{2\times 1}$ *si, y sólo si,* $A = A^t$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ *y* $\det(A) > 0$.

En efecto, del inciso b) de la definición 5 se tiene que $A = A^t$. *Como*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

para verificar que $a_{11} > 0$ *proponemos el vector* $X^t = [\alpha]_{\mathcal{B}} = (1,0)$ *y usando el inciso* c) *de la definición 5, sustituimos en la función*

$$f(X,X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > 0,$$

de donde $a_{11} > 0$. *Analogamente probaremos que* $a_{22} > 0$, *proponiendo el vector* $Y^t = [\beta]_{\mathcal{B}} = (0,1)$ *y sustituimos en la función*

$$f(Y,Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > 0,$$

por lo tanto $a_{22} > 0$.

Probemos que $\det(A) > 0$ *de la forma que sigue, sea*

$$f(X,X) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

desarrollando el producto de matrices resulta

$$f(X,X) = (a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2).$$

Si proponemos

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 = detA = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

y

$$a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

entonces $x_1 = \sqrt{a}_{22}$ *(por ser* $a_{22} > 0$*) y* $x_2 = \dfrac{-a_{12}}{\sqrt{a}_{22}}$.

Así $f(X,X) = \det(A) > 0$ *y* $X = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{12} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Otro concepto que será necesario para desarrollos posteriores, es el de forma bilineal. De hecho, veremos que todo producto interno sobre un espacio vectorial real, corresponde a una forma bilineal.

Definición 14. *Se define una* **forma bilineal** *sobre V como una función $g\colon V \times V \to F$ tal que*

1.
$$g(c\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = cg(\alpha_1, \beta) + g(\alpha_2, \beta), \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta \in V, c \in F.$$

2.
$$g(\alpha, c\beta_1 + \beta_2) = \bar{c}g(\alpha, \beta_1) + g(\alpha, \beta_2), \forall \alpha, \beta_1, \beta_2 \in V, c \in F.$$

Una forma bilineal g es simetrica si

3.
$$g(\alpha, \beta) = g(\beta, \alpha), \forall \alpha, \beta \in V.$$

De lo anterior podemos decir que la función f de lema 1 es una forma bilineal simétrica (todo producto interno real es una forma bilineal simétrica).

Para nuestros propósitos, la siguiente definición es importante.

Definición 15. *Sea V un espacio vectorial sobre el campo F. Con cada forma bilineal simétrica g sobre V se asocia una función $f\colon V \to F$, llamada $forma$ cuadrática determinada por g y definida por*

$$f(\alpha) = g(\alpha, \alpha) = X^t C X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}, x_i x_j,$$

donde $C = (c_{ij})$ es la matriz (simétrica) de g relativa a alguna base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ y $X = [\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Con esto, toda forma bilineal g sobre un espacio de dimensión finita V tiene asociada una matriz con respecto a alguna base ordenada $\mathcal{B}$, y si g cumple con ser simétrica, la matriz es simétrica.

Ahora, sabiendo esto, consideremos los dos siguientes teoremas (la demostraciones de estos teoremas no se harán, pero se pueden consultar en el libro de Álgebra Lineal [10]):

Teorema 1. *Sea V un espacio producto interno complejo (real) de dimensión finita, con dim$V \geq 1$. Si T es un operador autoadjunto (simétrico) sobre V, entonces, existe una base ortogonal de V constituida por vectores propios de T.*

Teorema 2. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y T un operador sobre V. Supongase que existe una base $\mathcal{B}$ de V que consta de vectores propios de T. Entonces, T es diagonalizable.*

Es decir, lo que nos aseguran los dos teoremas anteriores es que si la matriz C (o el operador T) es simétrica entonces existe una base de V constituida por vectores propios de la matriz y así, la mariz C es una matriz diagonalizable. Este resultado nos es de gran importancia en el lema 1 visto en esta sección.

1.3 Espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el producto canónico

La función cuadrática más general en las variables x y y esta representada por la igualdad

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{2}$$

donde convenimos que los coeficientes A, B,...,F son números reales. Para soluciones reales (x, y) de dicha ecuación se obtiene, en general, la representación gráfica de una cónica en el plano xy; es decir, gráficamente la ecuación (2) nos describe una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola, o algún caso degenerado de éstas como son un punto, una recta o un par de rectas. El conjunto de soluciones (x, y) también puede ser el conjunto vacío.

Tomando en cuenta que toda forma cuadrática proviene de una forma bilineal simétrica y que toda forma simétrica es diagonalizable, podemos llevar la forma cuadrática

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

a la expresión más simple

$$A'x'^2 + C'y'^2,$$

bajo una transformación lineal S tal que $S(x', y') = (x, y)$ definida por:

$$S(x', y') = x'u + y'u^{\perp} = (x, y), \tag{3}$$

donde $u = (u_1, u_2)$ es un vector unitario y $u^{\perp} = (-u_2, u_1)$. Nuestro objetivo es entonces resolver la ecuación

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F', \tag{4}$$

para los coeficientes A',B',...,F', de tal forma que B' se anule.

Sustituyendo en el miembro de la izquierda de (4) los valores de x y y dados por $(x, y) = S(x', y')$ se llega a que

$$A' = u_1^2 A + 2u_1 u_2 B + u_2^2 C,$$

$$B' = u_1^2 B + u_1 u_2 (C - A) - u_2^2 B,$$

$$C' = u_1^2 C - 2u_1 u_2 B + u_2^2 A,$$

$$D' = u_1 D + u_2 E,$$

$$E' = u_1 E - u_2 D,$$

$$F' = F,$$

o bien, definiendo los vectores $\alpha_0 = (A, B)$, $\beta_0 = (B, C)$ y $\gamma_0 = (D, E)$ y sustituyendo el producto interno

$$A' = u^{\cdot}(u \cdot \alpha_0, u \cdot \beta_0),$$

$$B' = u^\perp \cdot (u \cdot \alpha_0, u \cdot \beta_0),$$

$$C' = u^\perp \cdot (u^\perp \cdot \alpha_0, u^\perp \cdot \beta_0),$$

$$D' = u \cdot \gamma_0,$$

$$E' = u^\perp \cdot \gamma_0,$$

$$F' = F.$$

Ahora, si para todo $\alpha = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ definimos la transformación lineal $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$$L(\alpha) = (\alpha_0 \cdot \alpha, \beta_0 \cdot \alpha), \tag{5}$$

las expresiones para A', B' y C' se pueden escribir en la forma

$$A' = u \cdot L(u),$$

$$B' = u^{\perp} \cdot L(u),$$

$$C' = u^{\perp} \cdot L(u^{\perp}).$$

La iguadad (2) se puede escribir como

$$(L(\alpha) + 2\gamma_0) \cdot \alpha + F = 0.$$

Recordando nuestro objetivo de resolver (4) de tal forma que B' sea nulo, retomamos la igualdad obtenida para $B' = u^{\perp} \cdot L(u)$. Aquí $B = 0$ en el único caso de ser $L(u)$ paralelo a u. De aquí se sigue que $L(u) = \lambda u$ para algún λ en $\mathbb{R}$. Como $L(u) = (\alpha_0 \cdot u, \beta_0 \cdot u)$, entonces $(\alpha_0 \cdot u, \beta_0 \cdot u) - \lambda u = 0$. De esta última ecuación nos resultan las siguientes igualdades

$$u \cdot (A - \lambda, B) = 0, \tag{6}$$

$$u \cdot (B, C - \lambda) = 0. \tag{7}$$

Lo que quiere decir que u es ortogonal tanto a $(A - \lambda, B)$ como a $(B, C - \lambda)$. Nuestro interés es ahora encontrar el valor de λ, lo cual haremos utilizando el resultado anterior en la forma

$$(A - \lambda, B)^{\perp} \cdot (B, C - \lambda) = 0.$$

Realizando operaciones propias del producto interno llegamos a que

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda - (B^2 - AC) = 0. \tag{8}$$

Es decir, hemos obtenido una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = \frac{(A+C) - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{(A+C) + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2}.$$

Lo que hicimos fue que de la ecuación (8) encontramos dos valores para λ tales que cumplieran con

$$\lambda^2 - (A+C)\lambda - (B^2 - AC) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Desarrollando el mienbro derecho de esta igualdad, nos queda

$$\lambda^2 - (A+C)\lambda - (B^2 - AC) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2. \qquad (9)$$

Ahora, tomemos $\lambda = \lambda_1$, entonces $L(u) = \lambda_1 u$. Sustituyendo en la igualdad que hemos obtenido para $A' = u \cdot L(u)$ resulta $A' = u \cdot \lambda_1 u$; es decir $A' = \lambda_1$, con $B' = 0$ como lo hemos convenido.

Falta encontrar un valor para C' y todo parece indicar que llegaremos a que $C' = \lambda_2$. Para comprobar que así ocurre usaremos la igualdad (9), de donde $A + C = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\lambda_1\lambda_2 = -(B^2 - AC)$. Reacomodando los terminos llegamos a la siguiente expresión $C - \lambda_1 = \lambda_2 - A$, que utilizaremos en el desarrollo de la ecuación (7); es decir

$$u \cdot (B, C - \lambda_1) = u \cdot (B, \lambda_2 - A) = -u \cdot (A - \lambda_2, B)^{\perp} = u^{\perp} \cdot (A - \lambda_2, B) = 0.$$

Esto implica que si u es solución de las ecuaciones (6) y (7) con $\lambda = \lambda_1$, entonces $u^{\perp}$ es solución de las mismas ecuaciones con $\lambda = \lambda_2$ y $L(u^{\perp}) = \lambda_2 u^{\perp}$. Sustituyendo en la igualdad obtenida para C' tenemos $C' = u^{\perp} \cdot L(u^{\perp}) = u^{\perp} \cdot \lambda_2 u^{\perp} = \lambda_2$. Con esto queda demostrado que $A' = \lambda_1$, $B' = 0$ y $C' = \lambda_2$, donde λ_1 y λ_2 son raíces de la ecuación (8), donde (8) es la llamada ecuación característica.

Como se mencionó al principio de este capítulo: de que toda forma cuadrática proviene de una forma bilineal simétrica, se tiene que, en el caso de $\mathbb{R}^2$,

$$f(\alpha) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 = X^tDX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Y la ecuación característica (8) sale a partir de la matriz D, donde $(A+C)$ es la traza de la matriz y $-(B^2 - AC)$ es el determinante, entonces la ecuación característica la podemos escribir como $\lambda^2 - trD + detD = 0$. Los valores de λ que son soluciones de esta ecuación, son los eigenvalores de la matriz D.

Reescribiendo el miembro derecho de la ecuación (4) en términos de los eigenvalores λ_1 y λ_2 tenemos

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

y completando los cuadrados, la expresión anterior queda como

$$\lambda_1(x' + \frac{D'}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{E'}{\lambda_2})^2 = \frac{D'^2}{\lambda_1} + \frac{E'^2}{\lambda_2} - F'. \tag{10}$$

La forma de la cónica va a depender directamente de los valores que se obtengan para λ_1, λ_2, D' y E', ya que $F = F'$, según sea el caso.

A continuación veremos algunos ejemplos donde determinaremos la na-turaleza de la gráfica para cada ecuación usando la teoría desarrollada.

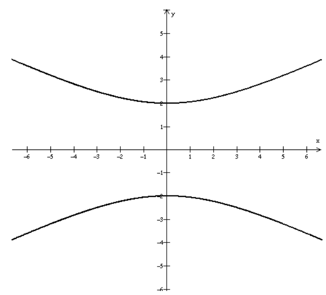

Figura 1: Hipérbola

Sea $3x^2-10xy+3y^2-32=0$, la forma cuadrática es $3x^2-10xy+3y^2$ y tiene como coeficientes $A=3$, $B=-5$ y $C=3$. Sustituyendo en la ecuación característica $\lambda^2-(A+C)\lambda-(B^2-AC)$, dicha ecuación queda como $\lambda^2-6\lambda-16=0$, donde los eigenvalores son $\lambda_1=-2$ y $\lambda_2=8$, y si sustituimos estos valores en la ecuación (10), vemos que se trata de una hipérbola por ser opuestos los signos de λ_1 y λ_2; graficando la nueva ecuación $-2x'^2+8y'^2=32$ confirmamos que efectivamente se trata de una hipérbola (Ver Figura 1).

La ecuación $3x^2-10xy+3y^2-32=0$ describe exactamente la misma figura que $-2x'^2+8y'^2=32$ pero rotada (Ver Figura 2), lo que nos muestra que la transformación $S(x',y')=(x,y)=x'u+y'u^{\perp}$ al ser aplicada a una función que proviene de una forma bilineal simétrica, realiza la rotación a la cónica . Y como la trasformación de rotación es rígida, es decir, prevalece la forma del espacio geométrico, en este caso el vector u con su respectivo vector ortogonal, serán quienes realicen dicho movimiento. Para este ejercicio encontraremos el vector u considerando el vector $(A-\lambda_1,B)$ de la ecuación (6) y sustituyendo los coeficientes correspondientes se llega a $(A-\lambda_1,B)=5(1,-1)$. Un vector unitario ortogonal a $(1,-1)$ es $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, por lo tanto, la rotación de coordenadas $(x,y)=S(x',y')$ para esta ecuación

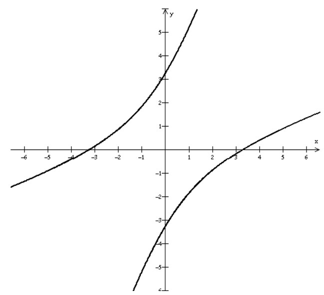

Figura 2: Hipérbola

queda como

$$S(x',y') = x'(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)) + y'(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y', x'+y').$$

Otro ejemplo es el de la ecuación $x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y-6=0$ que tiene como lugar geométrico una parábola (Ver Figura 3), donde la forma cuadrática es $x^2+2xy+y^2$ con $A=1$, $B=1$ y $C=1$, entonces la ecuación característica queda como $\lambda^2-2\lambda=0$. Los eigenvalores en este caso son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=2$, quedando la ecuación en su forma diagonal como

$$2(y'-\frac{E'}{2})^2 = -2D'x' + \frac{E'^2}{2} - F'.$$

Y calculando u de forma similar que el ejemplo anterior tenemos que $(A-\lambda_1, B) = (1,1)$, quedando $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ y $u^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-,1)$. Sustituyendo estos vectores en la transformación $S(x',y')$ nos resulta

$$S(x',y') = x'(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)) + y'(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)) = \frac{-1}{\sqrt{2}}(x'+y', -x'+y').$$

Procedemos ahora a calcular los valores para D' y E' mediante las igualdades obtenidas en términos del producto interno, que son $D' = u\cdot\gamma_0$ y $E' = u^{\perp}\cdot\gamma_0$ con $\gamma_0 = (D,E)$. Sustituyendo los valores correspondientes nos queda $D' = \frac{-1}{\sqrt{2}}(-1,1)\cdot(-\sqrt{2},3\sqrt{2}) = 4$ y $E' = \frac{-1}{\sqrt{2}}(-1,-1)\cdot(-\sqrt{2},3\sqrt{2}) =$

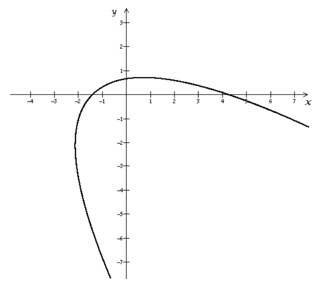

Figura 3: Parábola

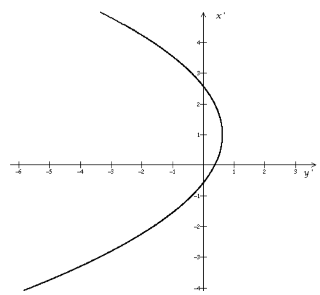

Figura 4: Parábola

-2. Finalmente sustituyendo estos elementos en la ecuación que resultó de aplicar la transformación de rotación, queda

$$2(y' - 1)^2 = -8x' + 5.$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por dos se obtiene

$$(y' - 1)^2 = -4(x' - \frac{5}{2}),$$

que corresponde a la cuación de una parábola (Ver Figura 4).

Capítulo 2

Transformación de Regiones con Funciones Complejas

2.1 Grupos, isometrías y el Disco de Poincaré.

En esta subsección trataremos algunos conceptos que nos serán de vital importancia en le desarrollo del presente trabajo.

Definición 16. *Un* **grupo** *es un conjunto* $G \neq \emptyset$ *con una operación binaria*

$$G \times G \to G$$

$$(g, h) \mapsto gh,$$

que satisface las siguientes propiedades

a. cerradura, $gh \in G, \forall g, h \in G$.

b. asociatividad,$(gh)k = g(hk), \forall g, h, k \in G$.

c. existencia del elemento neutro $e \in G$ *tal que para cada* $g \in G, eg = ge = g$.

d. existencia de una inverso $g^{-1} \in G, \forall g \in G$, *tal que* $gg^{-1} = e = g^{-1}g$.

Damos a continuación un par de ejemplos para comprender la definición anterior.

Ejemplo 3. *Sea X un conjunto arbitrario, entonces el conjunto*

$$S(X) = \{\phi : X \to X | \phi \quad es \quad invertible\},$$

es un grupo frente a la composición de funciones. A $S(X)$ se le llama el grupo de permutaciones del conjunto X o grupo de simetría del conjunto X.

Ejemplo 4. *Las transformaciones rígidas en $\mathbb{R}^2$. Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $p \in \mathbb{R}^2$ entonces la transformación A es una*

- *rotación, si* $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
- *replexión, si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$*, la reflexión es con respecto al eje x.*
- *traslación, si $A(x, y) = (x + a, y + b), a, b \in \mathbb{R}$.*

Las tres transformaciones anteriores representan las tranformaciones rígidas. Al conjunto de todas las tranformaciones rígidas en el plano es un grupo bajo la composición de las transformaciones.

Cuando nos referimos a **grupo generado**, debe entenderse como el conjunto de todas las composiciones posibles entre las transformaciones que se definan y sus respectivos inversos, y que a su vez, sean cada una de estas un grupo. Ahora bien, cuando una transformación preserva la distancia entre cualesquiera dos puntos se le llama **isometría**; es decir

$$d(p, q) = d(A(p), A(q)).$$

Por ejemplo, la composición de reflexiones, traslaciones y rotaciones. Al igual veremos, que las transformaciones de $M\ddot{o}bius$ en particular, también son isometrías y se definen como sigue:

Definición 17. *La* **Transformación de Möbius** *es una transformación en* $\mathbb{C}$ *dada por:*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

donde z *es un número complejo de la forma* $x+iy$, *y* a, b, c, d *son números reales tales que* $ad - cb \neq 0$.

Por último, definamos el *disco de Poincaré*, pero no sin antes referirnos a la geometría hiperbólica.

La *geometría hiperbólica* es aquella que cumple con los primeros cuatro postulados propuestos por Euclides:

1. Desde cualquier punto a cualquier otro punto se puede trazar un segmento.

2. Cualquier segmento se puede prolongar por derecho.

3. Con cada centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo.

4. Los ángulos rectos son iguales.

5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta.

Pero el quinto postulado, es el que diferencía la geometría euclideana de la geometría hiperbólica, quedando como:

5. Por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas que separan las infinitas rectas no secantes (paralelas) de las infinitas secantes.

Entonces, así como el plano euclídeo se representa con los puntos y rectas usuales en $\mathbb{R}^2$, para representar el plano hiperbólico existen diferentes

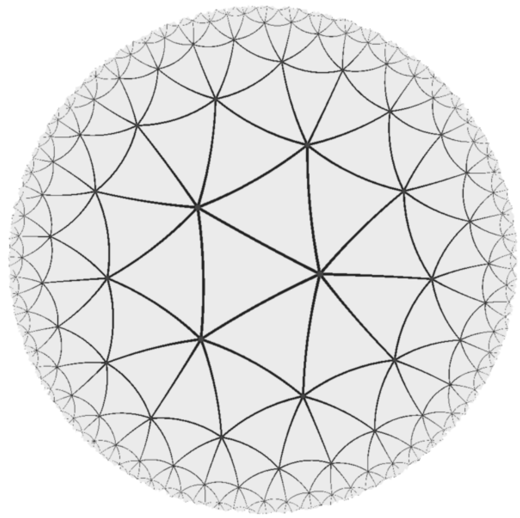

Figura 5: Disco de Poincaré

modelos, entre ellos esta el *disco de Poincaré*, el cual representa al plano como el interior de un círculo, pero las rectas están representadas por arcos de circunferencia ortogonales a la circunferencia borde (Ver Figura 5).

2.3 Transformación de regiones

Se tiene el siguiente problema. Determinar la región $\mathbf{R}'$ del plano uv (plano complejo) en la que se transforma la región $\mathbf{R}$ del plano xy dada por

$$\mathbf{R} = \{(x, y)|\ x^2 + (y+1)^2 \leq 1\}, \tag{11}$$

bajo la función

$$f(z) = \frac{i - z}{i + z}. \tag{12}$$

Para resolver este problema, se multiplica y divide la igualdad (12) por el conjugado del número $i + z$, lo que resulta

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

de donde

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y+1)^2}, \qquad v(x, y) = \frac{2x}{x^2 + (y+1)^2}. \tag{13}$$

Si h es cualquier número positivo y se propone

$$x^2 + (y+1)^2 = h^2, \tag{14}$$

las igualdades (13) quedan como

$$u(x, y) = \frac{1}{h^2}(1 - x^2 - y^2), \qquad v(x, y) = \frac{2x}{h^2}. \tag{15}$$

Ahora, de (14) despejamos a y, se tiene $y = -1 \pm \sqrt{h^2 - x^2}$, que elevado al cuadrado nos queda $y^2 = 1 + h^2 - x^2 \pm 2\sqrt{a^2 - x^2}$, de aqui

$$1 - x^2 - y^2 = -h^2 \pm 2\sqrt{h^2 - x^2}$$

Al combinar este resultado con las igualdades (15), se llega a que

$$(u+1)^2 + v^2 = \left(\frac{2}{h}\right)^2. \tag{16}$$

Si hacemos $h = 1$ en (14) vemos que la frontera de la región $\mathbf{R}$ se transforma en la circunferencia $(u+1)^2 + v^2 = 4$, del plano uv; así mismo si $h > 1$ vemos que el radio de la circunferencia en el plano uv se hace más pequeño y si $h < 1$ el radio se hace más grande. Es decir, si $h < 1$ la circunferencia $x^2 + (y+1)^2 = h$ que esta dentro de la región $\mathbf{R}$ se transforma en una circunferencia de radio mayor a 2 en el plano uv según la igualdad (16). Con esto, se puede concluir que la imagen de la región $\mathbf{R}$ dada en (11) es el conjunto

$$\mathbf{R} = \{(u,v)|\ (u+1)^2 + v^2 \geq 4\}.$$

Consideremos ahora, en el mismo espacio de los complejos, una circunferencia C con centro en p y radio r, la transformación de inversión de un número complejo z respecto a la circunferencia C seguida de una reflexión en el eje real, esta dada por la función

$$I_C(z) = \frac{r^2}{\overline{z-p}} + p. \tag{17}$$

Esta transformación es otro caso particular de $Transformación\ de$ $M\ddot{o}-bius$.

Aquí es importante ver porqué es necesaria la reflexión en el eje real ya una vez aplicada la transformación de inversión, por ejemplo, de (17) si $p = 0 + 0i$ y $r = 1$, entonces

$$I_C(z) = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}z} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Es decir, lo que hace esta transformación es mandar el número complejo z en otro número complejo $\frac{z}{|z|^2}$ que está sobre la misma dirección (Ver

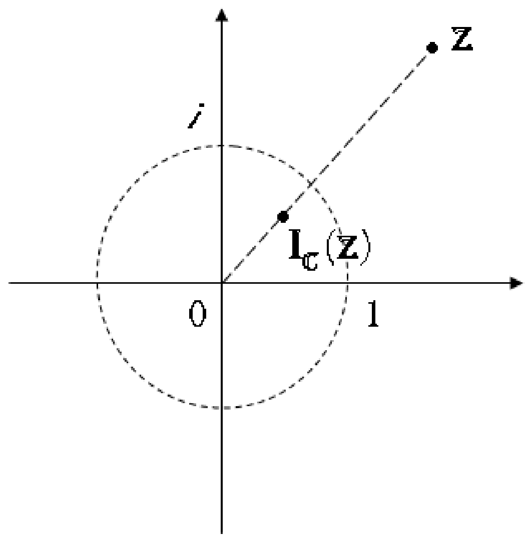

Figura 6: Transformación de un número complejo z bajo I_C.

Figura 6); cumpliendo así con lo que se definirá para la transformación de inversión en el Capítulo 3.

Una de las propiedades más importantes de esta transformación es la siguiente:

- Las rectas se transforman en rectas y las circunferencias en circunferencias.

La cual es fácil de verificar si consideramos que la ecuación de una recta o de una circunferencia puede escribirse de la forma

$$A(x^2 + y^2) + ax + by + C = 0,$$

con A, a y $b \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}$. Si escribimos $z = x + iy$, esta ecuación se transforma en:

$$Az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + C = 0,$$

con $A \in \mathbb{R}$, $\beta = (\frac{a}{2} - i\frac{b}{2}), C \in \mathbb{C}$.

Ahora supongamos que el radio de la circunferencia respecto a la cual se invierte es igual a uno y su centro lo tiene en el origen, entonces para cualquier número complejo $z \neq 0$, le corresponderá como inverso el número

$$I_C(z) = I_C(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \xi + i\eta = w.$$

Tomando en cuenta que $-\xi y = \eta x$, se tiene

$$x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad y = \frac{-\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

Ahora aplicando la transformación de inversión definida en (17) a la ecuación que representa a una circunferencia o una recta se obtiene

$$A + \beta w + \overline{\beta}\overline{w} + Cw\overline{w} = 0.$$

La que represeneta a una circunferencia o recta.

Esta transformación de inversión tiene una gran aplicación en la teoría del potencial; como transformación geométrica se atribuye su descubrimiento a Steiner en 1824, pero lord Kelvin, llegó independientemente a la inversión en 1845, y él así como otros más la aplicaron con mucha eficacia en Electrostática y en Hidrodinámica.

Lo importante aquí es que dicha transformación es conforme, es decir, preserva ángulos, por eso es que lleva circunferencias y rectas del plano euclidiano en circunferencias y rectas.

Tenemos aquí dos propiedades de la tranformación de inversión respecto al círculo que son:

1. Si la circunferencia C es ortogonal a la frontera del Disco de Poincaré, entonces la transformación es una isometría del Disco.

2. Toda isometría del Disco de Poincaré es composición de estas transformaciones con C ortogonal al disco.

Verificaremos la propiedad 1 en la forma que sigue; denotemos por $\triangle$ el Disco de Poincaré y la frontera de $\triangle$ por $\partial\triangle$, entonces C toca a $\partial\triangle$ en los puntos p_1 y p_2. Por lo tanto, divide a $\partial\triangle$ en dos arcos que denotamos por γ_1 interior a C, y γ_2 exterior de C. La reflexión en C manda la circunferencia $\partial\triangle$ en alguna circunferencia, y como la reflexión preserva ángulos, dicha circunferencia debe ser ortogonal a C. Como los puntos p_1 y p_2 son puntos fijos de la reflexión, entonces la imagen de $\partial\triangle$ coincide con sí misma. Entonces el arco γ_1 se transforma en el arco γ_2 y la parte de $\triangle$ que está en el interior de C la manda a la parte que está en el exterior y viceversa.

Para la segunda propiedad usaremos como ejemplo tres circunferencias ajenas C_1, C_2 y C_3, ortogonales a la frontera del Disco de Poincaré y sus centros colocados en un triángulo equilatero.

Sea F el grupo generado por las inversiones I_{C_1}, I_{C_2}, I_{C_3}, con cualquier composición de estas funciones y sus inversos, por ejemplo $T_1 = I_{C_2} \circ I_{C_1}$, $T_2 = I_{C_3} \circ I_{C_2}$ vamos obteniendo un conjunto de circunferencias más pequeñas que por pares, aparecen dentro de cada una de las circunferencias anteriores (Ver Figura 7). Las nuevas circunferencias son ortogonales al Disco de Poincaré (que en la figura se representa con lineas punteadas) pues esta transformación preserva ángulos.

En el límite de ésta construcción, las circunferencias tienden a circunferencias de radio cero, es decir son puntos y todos están colocados a lo largo de la frontera de del Disco de Poincaré.

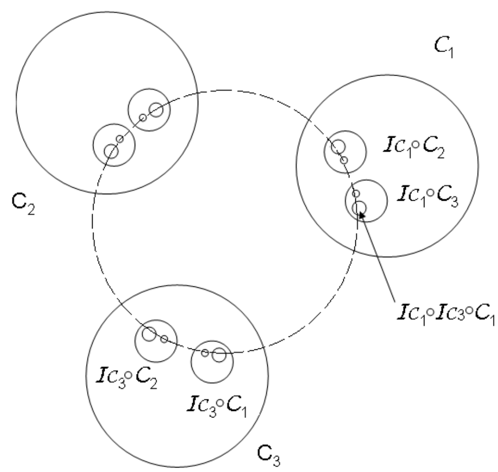

Figura 7: Inversiones del grupo F y su Conjunto Límite

Capítulo 3

Inversión respecto a conjuntos

3.1 Definición y ejemplos

Definición 18. *Se dice que un espacio vectorial real o complejo, junto con un producto interno definido sobre él, es un* **espacio producto interno**.

Un espacio producto interno real de dimensión finita se conoce también como *espacio euclideo* o *euclidiano*.

Definición 19. *Sean V es un espacio producto interno real, $a > 0$ un elemento de $\mathbb{R}$ y C el conjunto dado por $C = \{\gamma \in V \ / \ \|\gamma\| = a\}$. Si α, β son elementos de V con $\alpha \neq 0$, se dice que β* **es la inversión de α respecto a C** *si cumple*

$$\beta = \frac{a^2}{\|\alpha\|^2}\alpha. \tag{18}$$

De aquí se deduce que si β es la inversión de α respecto a C, entonces $\|\alpha\|\|\beta\| = a^2$.

La inversión de un vector respecto a C es única, pues si definimos la transformación inversión de la siguiente manera

$$f(\alpha) = \frac{a^2}{\|\alpha\|^2}\alpha,$$

y suponemos que se cumple $f(\alpha) = f(\beta)$, entonces $\frac{a^2}{\|\alpha\|^2}\alpha = \frac{a^2}{\|\beta\|^2}\beta$, es decir $\|\beta\|^2\alpha = \|\alpha\|^2\beta$, que en términos de producto interno, esta expresión nos queda como $\langle\beta,\beta\rangle\alpha = \langle\alpha,\alpha\rangle\beta$. Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por el vector β, nos resulta $\langle\beta,\beta\rangle\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$, de donde $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle$, por propiedades de producto interno, esto es lo mismo que $\langle\alpha,\beta-\alpha\rangle = 0$. De aquí es inmediato que $\beta - \alpha = 0$ o bien $\beta = \alpha$. Por lo desarrollado anteriormente, tenemos que la función f es inyectiva o, también se dice que la función f es uno a uno.

Ahora, sea $R = \{\alpha \in V \ / \ \|\alpha\| < a\}$. Diremos que este conjunto es una región de V y que C es la frontera de R. Claramente, la inversión respecto a C de cualquier elemento de R pertenece a $V - R$ y viceversa. La inversión respecto a C de cualquier elemento α de C es el mismo α.

En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico y $a = 1$ se tiene

$$\beta = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y),$$

pues en este caso, el conjunto C consta de los elementos que cumplen $\|\gamma\|^2 = x^2+y^2 = 1$, y respecto a este conjunto, que es una circunferencia, se está invirtiendo. Sea $\beta = (\xi,\eta)$, entonces se tiene

$$(\xi,\eta) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y), \tag{19}$$

donde

$$\xi = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Tomando en cuenta que $\xi y = \eta x$, la función inversa f^{-1} queda como

$$f^{-1}(\xi,\eta) = \frac{1}{\xi^2+\eta^2}(\xi,\eta). \tag{20}$$

Si $f^{-1}(\xi,\eta)=(x,y)$, entonces

$$x=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad y=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

De esta forma, si lo que queremos invertir es una recta que tiene por ecuación $y=mx+b$ con $b\neq 0$, la función inversa está dada por

$$\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}=\frac{m\xi}{\xi^2+\eta^2}+b,$$

igualdad que se puede escribir en la forma

$$\xi^2+\eta^2+\frac{m}{b}\xi-\frac{1}{b}\eta=0. \tag{21}$$

Completando los cuadrados, resulta

$$(\xi+\frac{m}{2b})^2+(\eta-\frac{1}{2b})^2=\frac{1+m^2}{4b^2}. \tag{22}$$

Así, bajo la función f, la recta $y=mx+b$ se transforma en la circunferencia obtenida en (22).

Si $b=0$, la recta $y=mx$ se transforma en la misma recta. Si $m=0$, la recta $y=b$ se transforma en la circunferencia

$$\xi^2+(\eta-\frac{1}{2b})^2=\frac{1}{4b^2}.$$

Ahora, si al espacio producto interno $\mathbb{R}^2$ le cambiamos el producto interno canónico por otro producto interno, se tiene lo siguiente:

Tomemos el producto interno $\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=5x_1y_1-2x_2y_1-2x_1y_2+2x_2y_2=1$ que tiene asociada la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ el cual cumple con ser $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, $A^t=A$ y $detA=6>0$. Éste producto interno des-cribe una cónica, como se vio en el primer capítulo, y la matriz A puede ser diagonalizada ya que es simétrica. El polinomio característico de A

es $\lambda^2-7\lambda+6=0$, y tiene como eigenvalores $c_1=6$ y $c_2=1$. Dos eigenvectores correspondientes a estos eigenvalores son $(2,-1)$ y $(1,2)$ respecivamente. Con esto, la forma cuadrática queda como $6x^2+y^2=1$, y describe una elipse.

El invertir un punto α respecto al conjunto $\|\gamma\| = 1$ con $\|\alpha\|^2 = 6x^2+y^2$ se tiene

$$\beta = \frac{1}{6x^2+y^2}(x,y).$$

A continuación procedemos a analizar algunos casos en los que lo que se invierte es alguna función respecto a esta norma, como lo son una recta, una circunferencia, una elipse, etc.

Es facil ver que si lo que se invierte es la función $y=mx$, con $x\neq 0$, pues resulta ser la misma función, pero si se invierte la función $y=mx+b$, con $b\neq 0$, respecto a la elipse, se tiene como función inversa

$$\frac{(\xi+\frac{m}{12b})^2}{\frac{6+m^2}{144b^2}}+\frac{(\eta-\frac{1}{2b})^2}{\frac{6+m^2}{24b^2}}=1. \tag{23}$$

La ecuación anterior describe una elipse. Si $m=0$, se tiene la función $y=b$, con $b\neq 0$, a la que le corresponde como función inversa la siguiente ecuación

$$\frac{\xi^2}{\frac{6}{144b^2}}+\frac{(\eta-\frac{1}{2b})^2}{\frac{6}{24b^2}}=1,$$

esto, respecto a la elipse.

En la figura 8 se muestra la inversión de la ecuación $y=x-1{,}5$ respecto a la elipse $6x^2+y^2=1$.

Tenemos en inversión respecto a una elipse, que si lo que se invierte es otra elipse, supongamos que tiene por ecuación

$$6(x-h)^2+(y-k)^2=p \qquad \text{con h, k, p} \neq 0 \text{ en } \mathbb{R},$$

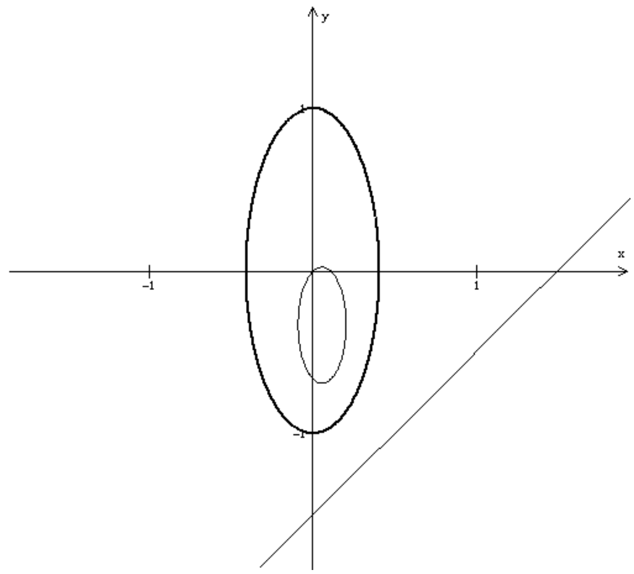

Figura 8: Inversión de una recta $y = mx + b$ respecto a una elipse

respecto a la elipse $6x^2 + y^2 = 1$, la función inversa correspondiente es

$$6(6h^2 + k^2 - p)(\xi - \frac{h}{6h^2 + k^2 - p})^2 + (6h^2 + k^2 - p)(\eta - \frac{k}{6h^2 + k^2 - p})^2$$

$$= \frac{p}{6h^2 + k^2 - p}. \tag{24}$$

La ecuación anterior corresponde a una elipse también. Entonces, la transformación de inversión respecto a una elipse, manda elipses en elipses.

Cuando una elipse pasa por el origen, su función inversa es una recta. Para ver esto tomemos la ecuación de la elipse descrita por ecuación (23), que como vimos, dicha elipse pasa por el origen. Si invertimos (23) respecto a la elipse $6x^2 + y^2 = 1$, nos resulta como función inversa lo siguiente

$$\frac{(\frac{\xi}{6\xi^2+\eta^2} + \frac{m}{12b})^2}{\frac{6+m^2}{144b^2}} + \frac{(\frac{\eta}{6\xi^2+\eta^2} - \frac{1}{2b})^2}{\frac{6+m^2}{24b^2}} = 1.$$

Haciendo operaciones se llega a que la ecuación anterior es lo mismo que $\eta = m\xi + b$, siendo esta la ecuación de la recta que en un principio habíamos invertido.

El siguiente paso consistirá en ver que es lo que pasa cuando se invierte una elipse respecto a otra elipse con mismo centro, o dicho de otra forma, cuando $h, k = 0$ de ecuación (24). Sustituyendo estos valores en (24) se llega a que la función inversa de $6x^2 + y^2 = p$, con $p \neq 0$, respecto a la elipse $6x^2 + y^2 = 1$ es

$$6p\xi^2 + p\eta^2 = 1.$$

Por ejemplo, tomemos a la elipse $6x^2 + y^2 = 2$, si la invertimos respecto a la elipse $6x^2 + y^2 = 1$, la función inversa nos resulta ser la función $12x^2 + 2y^2 = 1$ (Ver Figura 9), la cual describe una elipse.

Para los casos en que $h = 1$, $k = 2$ y $p = 4$, se obtiene por ecuación inversa de

$$6(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4,$$

la ecuación

$$36(x - \frac{1}{6})^2 + 6(y - \frac{1}{3})^2 = \frac{2}{3}.$$

La expresión anterior corresponde a una elipse con centro $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ (Ver Figura 10).

En general, cualquier elipse que tenga su centro en el origen, tiene por ecuación $ax^2 + by^2 = 1$. Al invertir una elipse que cumpla con lo anterior respecto a la elipse $6x^2 + y^2 = 1$, va a tener por función inversa lo siguiente

$$a(\frac{x}{6x^2 + y^2})^2 + b(\frac{y}{6x^2 + y^2})^2 = 1.$$

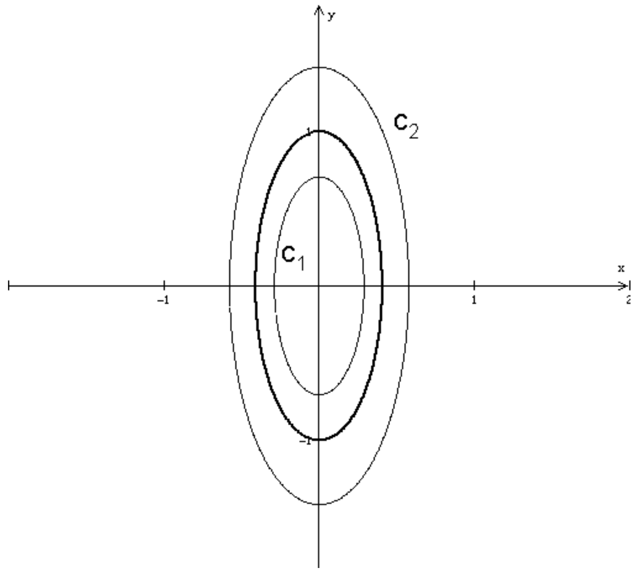

Figura 9: La inversión de la elipse c_2 respecto a otra elipse con mismo centro, queda la elipse c_1.

Para el caso de $a = 8$ y $b = 12$, no nos resulta una elipse, como se puede ver en Figura 11.

Podemos invertir también una circunferencia respecto a la elipse, o cualquier función continua.

Veamos el caso en el que la circunferencia que se invierte tiene como centro el origen, ya dependiendo de dónde se encuentre la circunferencia (interior o exterior a la elipse de inversión) se obtiene la función inversa (Ver Figura 12 y Figura 13). En general, la función inversa que corresponde es

$$(\frac{\xi}{6\xi^2+\eta^2})^2 + (\frac{\eta}{6\xi^2+\eta^2})^2 = r^2,$$

que depende del radio de la circunferencia que se quiera invertir.

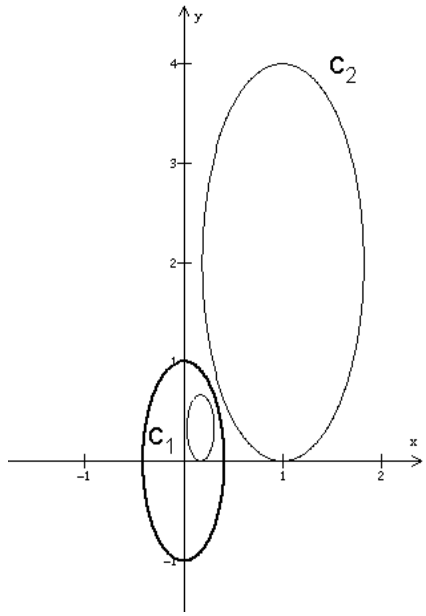

Figura 10: La inversión de la elipse c_2 respecto a otra elipse con diferente centro, queda la elipse c_1.

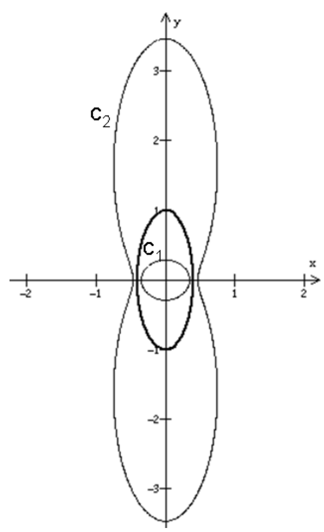

Figura 11: La inversión de la elipse c_1 respecto a otra elipse, queda la figura c_2.

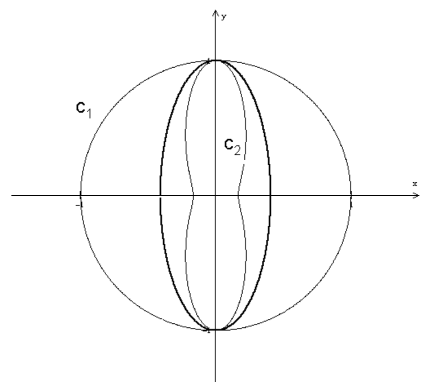

Figura 12: La inversión de la circunferencia c_1 que está fuera de la elipse de inversión, queda la figura c_2.

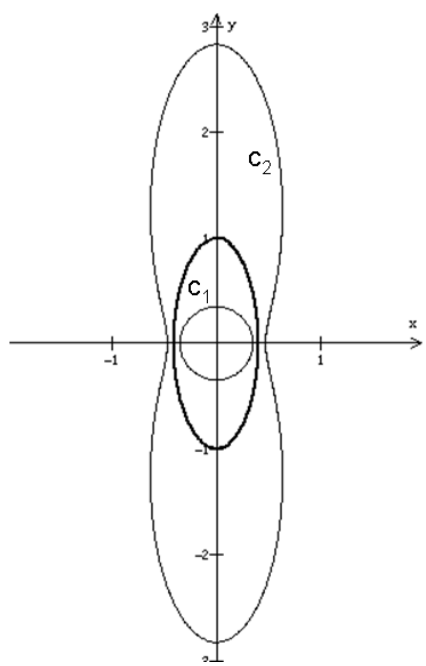

Figura 13: La inversión de la circunferencia c_1 que está dentro de la elipse de inversión, queda la figura c_2.

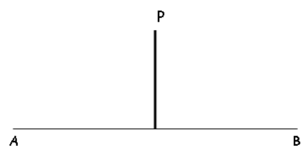

Figura 14: Mediatriz

3.2 Reseña historica (El Problema de Apolonio)

El problema de Apolonio de Perga (de 260 a 190 antes de J.C.) se resume en lo siguiente:

Problema. Encontrar el lugar geométrico de un punto P tal que sus distancias a dos puntos fijos A y B tienen una razón constante $\frac{1}{m}$, de manera que

$$|AP| = m|BP|. \tag{25}$$

Vemos que si $m = 1$, el lugar geométrico de P consistirá en la mediatriz de AB (Ver Figura 14).

Supongamos que $m \neq 1$ y sea P un punto cualquiera que cumple la ecuación (25) y sean C y C' los puntos de intersección de las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle APB$ con la recta AB. Sobre la recta AP sean E y F los puntos de intersección tales que cumplen con ser BE paralela a CP y BF paralela a $C'P$ (Ver Figura 15). El triángulo CPC' es recto pues $2\alpha + 2\beta = 180^o$ por ser ángulos suplementarios, y por consiguiente $\alpha + \beta = 90^o$, siendo entonces la recta BF perpendicular a la recta CP, al igual que la recta BE es perpendicular a la recta PC'. Como $FP{=}BP{=}PE$ y por el Teorema de Thales tenemos que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{PE} = \frac{AP}{BP}, \tag{26}$$

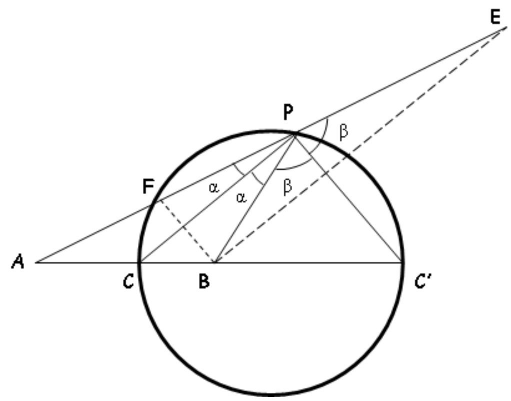

Figura 15: Circulo de Apolonio

y

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AP}{FP} = \frac{AP}{BP}. \tag{27}$$

Lo que quiere decir que C y C' dividen a la recta AB en la razón $\frac{1}{m}$ para cualquier punto P en el plano, entonces, como el ángulo $\angle CPC'$ es recto, el lugar geométrico descrito por P será una circunferencia de diámetro CC'.

A este resultado se le conoce como el *El círculo de Apolonio*, el cual tiene la propiedad de invertir A en B y viceversa (Ver sección 3.4 Inversión respecto al círculo). Lo cual probaremos de una forma muy sencilla, tomando el punto O como el centro de la circunferencia y r como el radio. Por (26) y (27), las distancias $a = AO$ y $b = BO$ cumplen las igualdades

$$\frac{a-r}{r-b} = \frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B} = \frac{a+r}{b+r},$$

de donde resulta

$$(a-r)(b+r) = (a+r)(r-b).$$

Es decir $ab = r^2$, lo cual prueba que el punto a invierte en el punto b y b invierte en a.

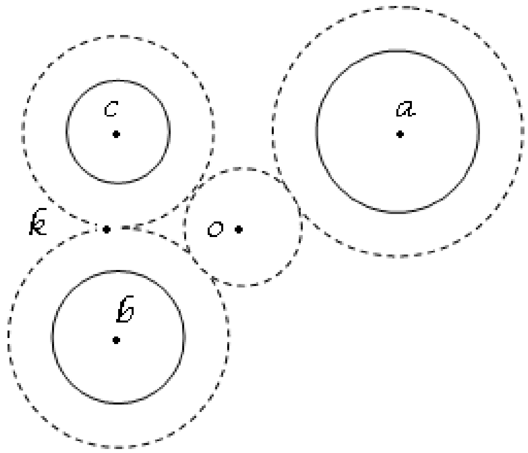

Figura 16: Construcción al problema de Apolonio

3.2.1 Aplicaciones del problema de Apolonio

Un problema que se puede resolver usando los resultados del problema de Apolonio, consiste en que dadas tres circunferencias arbitrarias en el plano, con la condición de que sus centros no son colineales, se debe hallar una cuarta circunferencia tangente a éstas. También se puede encontrar la solución usando un poco de álgebra. Primero veremos cómo se resuelve usando inversión.

La construcción para el primer caso es muy sencilla tomando en cuenta algunas cuestiones como el que tres circunferencias no tengan el mismo radio, ya que en caso de ser así, el círculo de Apolonio será una circunferencia de radio infinito, o dicho de otra forma, una recta. Para el caso en el que las tres circunferencias sean concéntricas, no existirá solución geométrica del problema.

Dicho esto, propongamos las circunferencias de centros a, b y c (Ver Figura 16). Como podemos ver, ninguna de las tres circunferencias es tangente a otra, lo cual, para el desarrollo que vamos a dar, resulta no favorable. Hagamos entonces que, a lo más, dos de ellas sean tangentes y llamemos k al punto de intersección. Para que ésto suceda debemos incrementar una distancia d el radio de las tres circunferencias, ya que la circunferencia que sea tangente a las tres circunferencias dadas, tendrá el mismo centro que la que será tangente a estas tres nuevas circunferencias con radio incrementado. Si ρ es el radio de la circunferencia tangente a las otras tres, el radio para esta nueva circunferencia será $\rho - d$ (Ver Figura 14).

Tomemos k como el centro de la circunferencia respecto a la cual vamos a invertir estas cuatro circunferencias. Sabemos que, una circunferencia que pasa por el centro de inversión se invierte en una recta que no pasa por k, siendo esta recta, perpendicular a la cuerda diametral de dicha circunferencia que pasa por k, y una circunferencia que no pasa por k se invierte en una circunferencia que no pasa por k (Ver Figura 17). Entonces tanto la circunferencia de centro a como la circunferencia tangente a las tres circunferencias obtenidas después de incrementar sus radios (denotamos su centro por o) se invertirán en otras dos circunferencias.

Teniendo ya construido ésto, nuestro problema se reduce a encontrar el centro de la circunferencia inversa a la circunferencia de centro o, ya que por colinealidad, el punto o estará soble la línea ko', siendo o' el centro de la circunferencia inversa a la de centro o.

Por ser la circunferencia de centro o tangente a las circunferencias de centros a, b y c, la circunferencia de centro o' también lo será a sus respectivos inversos, entonces la circunferencia de centro o' tiene como radio r la mitad de la distancia entre las rectas b' y c', es decir, el punto o' estará sobre la recta paralela media a las rectas b' y c', para ser así, la circunferencia de centro o' tangente a b' y c', y para ser, a su véz, también tangente a la circunferencia

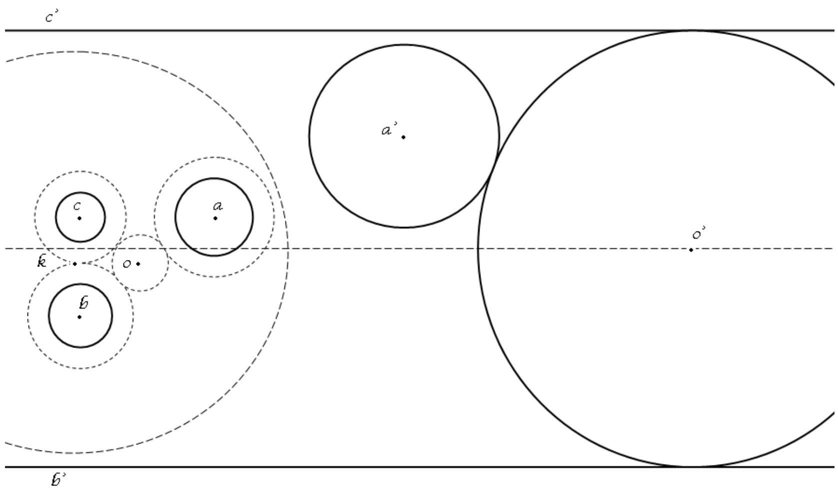

Figura 17: Segmentos inversos

de centro a'. Tracemos una recta que pase por a' y que intersecte a la paralela media en el punto o'. Pero el segmento $a'o'$ debe medir $r+s$, obteniendo así la circunferencia inversa a la circunferencia de centro o, ya que encontramos el punto o', del cual o será su inverso.

Otra manera de resolver este problema es desde el punto vista algebraico. Suponemos que los centros de las circunferencias son los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) y tienen radios r_1, r_2 y r_3, respectivamente. Designamos el centro y el radio de la circunferencia pedida por (x, y) y r. La condición para que la circunferencia sea tangente a los tres circunferencias dadas es que las distancias entre el centro de la circunferencia pedida y los centros de las tres circunferencias dadas sea igual a la suma o diferencia de los respectivos radios, según sean tangentes exterior o interiormente (Ver Figura 18). Tenemos entonces las siguientes ecuaciones

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0, \tag{28}$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0, \tag{29}$$

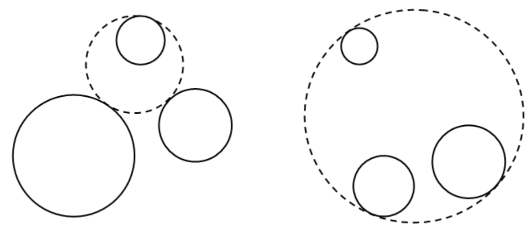

Figura 18: Círculos de Apolonio

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0. \tag{30}$$

Desarrollando estas ecuaciones tenemos

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_1 - 2yy_1 \pm 2rr_1 + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = 0, \tag{31}$$

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_2 - 2yy_2 \pm 2rr_2 + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 = 0, \tag{32}$$

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_3 - 2yy_3 \pm 2rr_3 + x_3^2 + y_3^2 - r_3^2 = 0. \tag{33}$$

Restando (32) de (31), obtenemos una ecuación lineal

$$ax + by + cr = d, \tag{34}$$

donde $a = 2(x_2 - x_1)$, $b = 2(y_2 - y_1)$, $c = \pm 2(r_2 - r_1)$ y $d = x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 - x_2^2 - y_2^2 + r_2^2$. Del mismo modo, restamos (33) de (32) y obtenemos la ecuación lineal

$$a'x + b'y + c'r = d', \tag{35}$$

con $a' = 2(x_3 - x_2)$, $b' = 2(y_3 - y_2)$, $c' = \pm 2(r_3 - r_2)$ y $d' = x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 - x_3^2 - y_3^2 + r_3^2$. Resolvemos (34) y (35) respecto a x y y en términos de r, se llega a que

$$x = \frac{b'd - bd' - (b'c - bc')r}{b'a - ba'}, \tag{36}$$

$$y = \frac{a'd - ad' - (a'c - ac')r}{a'b - ab'}. \tag{37}$$

Sustituyendo (36) y (37) en ecuación (28) resulta la siguiente ecuación de segundo grado

$$(\frac{b'd - bd' - (b'c - bc')r}{b'a - ba'} - x_1)^2 + (\frac{a'd - ad' - (a'c - ac')r}{a'b - ab'} - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0. \tag{38}$$

Sean $m = \frac{b'd-db'}{b'a-ba'} - x_1$, $m' = \frac{b'c-bc'}{b'a-ba'}$, $n = \frac{a'd-ad'}{a'b-ab'} - y_1$ y $n' = \frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}$, la ecuación (38) nos queda como sigue

$$(m - m'r)^2 + (n - n'r)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0 \tag{39}$$

o

$$(m'^2 + n'^2 - 1)r^2 - 2(mm' + nn' \pm r_1)r + m^2 + n^2 - r_1^2 = 0. \tag{40}$$

Sean $o = m'^2 + n'^2 - 1$, $p = mm' + nn' - r_1$(tangente interiormente), $p' = mm' + nn' + r_1$(tangente exteriormente) y $q = m^2 + n^2 - r_1^2$. Entonces la ecuación (40) queda como

$$or^2 - 2pr + q = 0, \tag{41}$$

que tiene como soluciones para r una positiva y otra negativa. La que a nosotros nos va a interesar es la positiva; esto es

$$r = \frac{p + \sqrt{p^2 - oq}}{o}.$$

Ya obtenido el valor de r, se sustituirá éste en las ecuaciones (36) y (37) para obtener así el centro (x, y) de la circunferencia que será tangente a las tres circunferencias dadas.

Se tendrán en general ocho soluciones de este problema correspondientes a las posibles combinaciones de los signos más y menos en las ecuaciones (28), (29) y (30), esto es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Lo cual podemos inferir si nos fijamos en la figura 16.

En el transcurso del proceso algebraico para obtener los valores de x, y y r puede que no obtengamos valores reales, lo cual sucederá en los casos que se mencionaron al principio de esta sección, es decir, que los centros de las tres circunderencias dadas sean concéntricos, lo cual es muy fácil de verificar dadas las ecuaciones, o que los centros sean colineales y las circunferencias del mismo radio; aquí la solución será una recta.

3.3 El problema de inversión en general

La idea de invertir respecto a un conjunto puede ser aún más general si lo extendemos a *espacios normados*. Esto se define como:

Definición 20. *Sean V un espacio vectorial y F un campo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma $\|\cdot\|$ en V es una función que asigna a cada elemento de V un número real no negtivo, esto es*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\},$$

de tal forma que si α y β son elementos de V y λ es un escalar, entonces

1. $\|\alpha\| \geq 0$,
2. $\|\alpha\| = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$,
3. $\|\lambda\alpha\| = |\lambda|\|\alpha\|$,
4. $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

Al espacio V junto con la función $||\cdot||$ se le llama *espacio lineal normado* y se le denota por $(V, ||\cdot||)$.

Para obtener el inverso de un vector, por ejemplo, respecto a la *norma usual* en $\mathbb{R}^2$ que se define como sigue

$$\|(x, y)\| = |x| + |y|, \tag{42}$$

el vector $\alpha = (x, y)$ tendrá como inverso el siguiente vector

$$\beta = \frac{1}{(|x| + |y|)^2}(x, y),$$

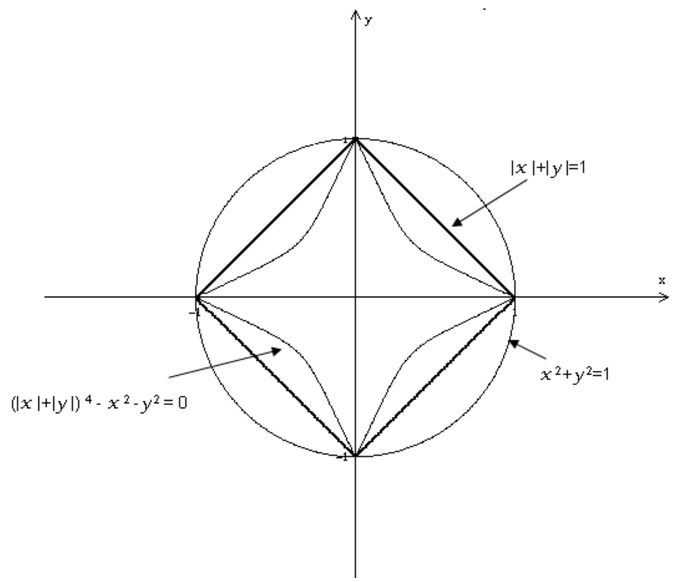

Figura 19: Inversión de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ respecto a la norma $|x| + |y| = 1$.

siendo así β, la inversión respecto al conjunto $C = \{\gamma \in \mathbb{R}^2| \quad \|\gamma\| = 1\}$ del vector α.

Por ejemplo, si queremos invertir la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ respecto a esta norma, se tiene por función inversa

$$(\frac{\xi}{(|\xi| + |\eta|)^2})^2 + (\frac{\eta}{(|\xi| + |\eta|)^2})^2 = 1,$$

que es lo mismo que poner

$$(|\xi| + |\eta|)^4 - \xi^2 - \eta^2 = 0.$$

(Ver Figura 19).

Otro ejemplo de norma es la llamada *norma suprema*, que en $\mathbb{R}^2$ se define como

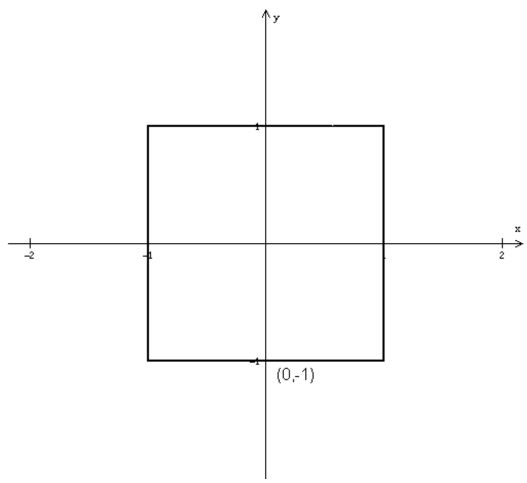

Figura 20: Norma suprema

$$||(x,y)|| = máx\{|x|,|y|\}. \tag{43}$$

La gráfica para este conjuno, definido como $C = \{\gamma \in \mathbb{R}^2| \quad \|\gamma\| = 1\}$ se muestra en figura 20.

Si invertimos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ respecto a éste conjunto, se obtiene la función

$$x^4 - x^2 - y^2 = 0, \qquad en\ el\ caso\ de\ ser\ |x|\ el\ máximo$$

o

$$y^4 - x^2 - y^2 = 0, \qquad en\ el\ caso\ de\ ser\ |y|\ el\ máximo.$$

(Ver Figura 21).

En general estas normas son aplicadas a espacios de orden superior, esto es, en $\mathbb{R}^n$ las normas dadas en ecuación (42) y (43) se definen como

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|, \qquad con\ x\ \in\ \mathbb{R}^n$$

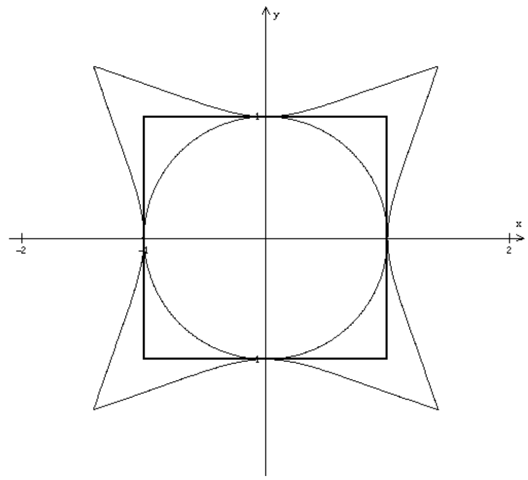

Figura 21: Inversión de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ respecto a la norma $máx\{|x|, |y|\} = 1$.

y

$$||x|| = máx\{|x_i| : \quad i \in \{1, ..., n\}\},$$

respectivamente.

Con esto el problema de inversión se extiende a espacios más generales, es decir, nosotros podemos aplicar la transformación de inversión respecto a conjuntos de espacios lineales normados, e incluso, podemos invertir cualquier funsión que se encuentre en el subespacio del espacio vectorial.

Por ejemplo, si invertimos respecto a la *norma euclidiana* en el espacio $\mathbb{R}^3$ la elipse $6x^2 + z^2 = 1$, con $y = 0$, tendrá por funsión inversa

$$\xi^4 - 6\xi^2 + \eta^4 + \zeta^4 - \zeta^2 + 2\xi^2\eta^2 + 2\xi^2\zeta^2 + 2\eta^2\zeta^2 = 0$$

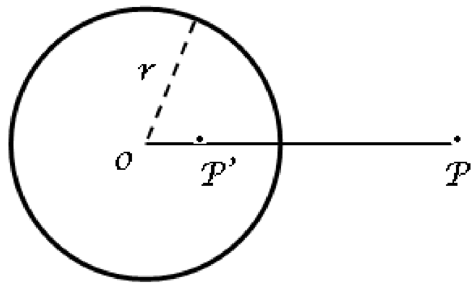

Figura 22: Inversión de un punto P

3.4 Inversión respecto al círculo

Como vimos al principio de este tercer capítulo, en el caso específico del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico, la transformación de inversión es la inversión respecto al círculo. En esta sección veremos las propiedades que tiene pero en un sentido más geométrico.

Definición 21. *Dada una circunferencia de centro O y radio r, se dice que un punto P' es el inverso de un punto P, si y sólo si $P'O \times PO = r^2$ (ver Figura 22).*

Al punto O se le llama *centro de inversión*, a r se le conoce como *radio de inversión* y al punto P' se le llama *antecedente* de P. Un ejemplo similar al de la transformación de inversión respecto al circulo es la simetría del plano respecto a una recta L, como un espejo, que tiene como imagen de un punto P, situado de un lado del plano, a el punto P' situado del otro lado de L, siendo entonces L la mediatríz del segmento PP', esta transformación es tambien conocida como reflexión. Y para el caso de inversión respecto el círculo, es como si se tuviera un espejo circular.

De dicha transformación se pueden enlistar las siguientes propiedades, además de las ya dadas en transformación de regiones (sección 2.2):

3. El inverso de un punto interior al círculo es siempre un punto exterior a él.

4. El inverso de un punto en la circunferencia es el propio punto.

5. Todo punto del plano, excepto el centro de inversión tiene un inverso único.

6. Una recta que pasa por O se trasforma en una recta que pasa por O.

7. Una recta que no pasa por O se trasforma en una circunferencia que pasa por O.

8. Una circunferencia que pasa por O se transforma en una recta que no pasa por O.

9. Una circunferencia que no pasa por O se transforma en una circunferencia que no pasa por O.

De lo anterior, procedamos ahora a verificar cada una de las propiedades que se mencionaron. Las propiedades 1, 2 y 3 salen de inmediato de la definición y la cuarta, es evidente al igual que las tres anteriores, ya que por definición todo punto en la recta tiene su inverso sobre la misma recta, siempre y cuando esta pase por el centro de inversión.

Para ver que se cumple la quinta propiedad (Ver Figura 23) tomemos a Q como un punto en la circunferencia que se va a invertir diametralmente opuesto a O; el centro de inversión. Sea P un punto cualquiera en la circunferencia que se va a invertir distinto de O y de Q. Sea Q' el inverso de Q y sea P' el inverso de P. Como el triángulo OPQ es rectángulo y $OP \times OP' = OQ \times OQ'$, entonces el triángulo $OQ'P'$ es también rectángulo, por semejanza, y por lo tanto P' describe una recta perpendicular a OQ'. Es decir, el inverso de una

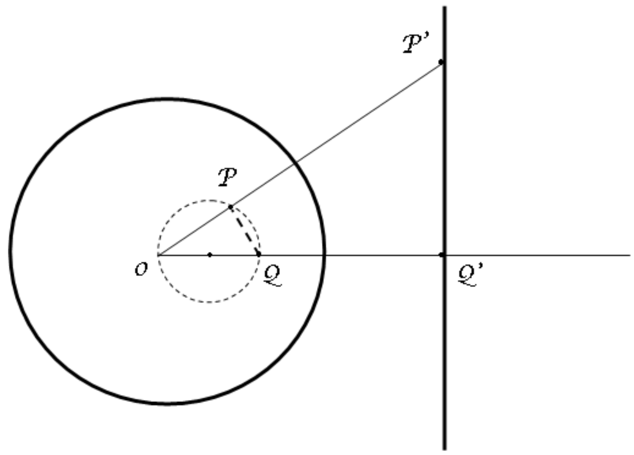

Figura 23: Inversión de una recta

circunferencia que contiene al centro de inversión es una recta perpendicular a la secante que contiene al diámetro OQ y que pasa por el inverso de Q, o sea Q'. Y de esta forma queda demostrado a su vez la sexta propiedad por el hecho de que si la circunferencia que pasa por O tiene como inversa una recta que no pasa por O, entonces la inversa de una recta que no pasa por O será una circunferencia que pase por O.

Y por ultimo, para verificar la sexta propiedad, veremos dos casos. Uno, el cual resulta evidente, que es cuando la circunferencia es concéntrica, es decir, tiene su centro en O y esta contenida dentro de la circunferencia de inversión, donde la circunferencia inversa a ésta, estará fuera de la de inversión, pero igual tendrá su centro en O. El otro caso es cuando se tiene una circunferencia que no es concéntrica con la de inversión (Ver Figura 24).

Pero antes de proseguir con la verificación de esta última propiedad, es necesario ver algo relacionado con *potencia* de un punto ya que dicho concepto lo utilizaremos en lo que respecta a la verificación.

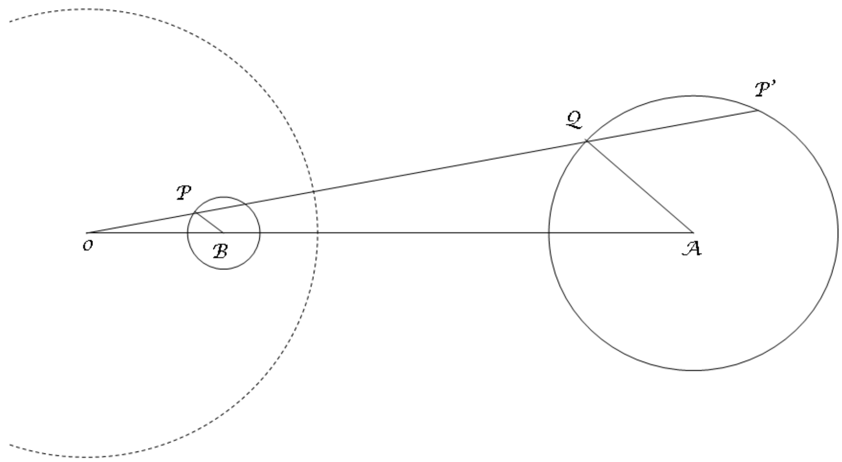

Figura 24: Inversión de una circunferencia

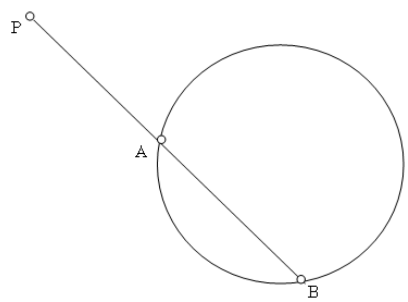

Figura 25: Potencia de un punto

Definición 22. *El producto de los segmentos determinados por una secante a un círculo trazada desde un punto en el plano es constante. Dicha constante se llama* **potencia** *del punto con respecto al círculo (Ver Figura 25), esto es* $PA \times PB$ *es constante para cualquier secante al círculo que se trace desde el punto* P*. A dicha constante la denominaremos* **w**.

Ésta definición es facil de visualizar, si sólo trazamos otra secante a la circunferencia que parta del punto P y llamemos C y D a los puntos de intersección con el círculo (Ver figura 26). De donde se tiene que el triángulo

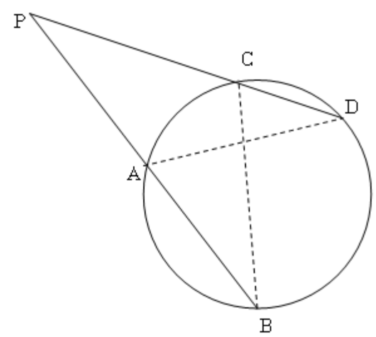

Figura 26: Potencia de un punto

PCB semejante al triángulo PAD, pues el ángulo $\angle PDA$ es igual al ángulo $\angle PBC$ por abrir el mismo arco, al igual que los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DCB$, y por ser ángulos complementarios de estos dos últimos los ángulos $\angle PAD$ y $\angle PCB$, consecuentemente también son iguales. Por el Teorema de Semejansa se tiene

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{CB},$$

y entonces $PA \times PB = PC \times PD = \mathbf{w}$.

Ahora si, retomando nuestro objetivo de verificar la propiedad 7, supon-gamos que queremos invertir la circunferencia de centro A con respecto a la circunferencia de centro O (Ver Figura 22); sea OP una secante a la circunferencia de centro A, sea P un punto de intersección entre la circunferencia de centro A y la secante, sea Q el otro punto de intersección y sea P' el inverso de P. Tracemos el radio QA y tracemos $P'B$ paralela a QA. Como $OP \times OP' = r^2$ y $OQ \times OP = w$ y, por otra parte, $\frac{OP'}{OQ} = \frac{OB}{OA} = \frac{BP'}{AQ}$, pues los triángulos OBP' y OAQ son semejantes, entonces $OB = \frac{r^2 OA}{w}$; es decir, OB es constante, luego P' describe una circunferencia.

Por último, consideremos dos curvas que se intersequen en un punto P, una de las cuales contiene un punto A y la otra un punto B. Las inversas

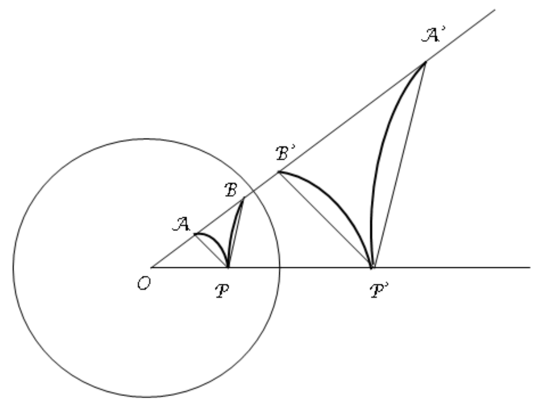

Figura 27: Inversión de un ángulo entre dos rectas

de dichas curvas tendrán que intersecarse en P', el inverso de P y contendrán a A', el inverso de A y a B', el inverso de B, respectivamente. Como se cumple que $OP \times OP' = OA \times OA' = OB \times OB'$, entonces los triángulos OPA y $OA'P'$ son semejantes, al igual que los triángulos OPB y $OB'P'$, por lo tanto, si trazamos secantes a las curvas que contengan P y P' y que pasen por A, B, A' y B' (Ver Figura 27), se tendrá que $\angle OPA = \angle P'A'O$, $\angle OPB = \angle P'B'O$ y, por lo tanto, $\angle APB = \angle OPB - \angle OPA = \angle P'B'O - \angle P'A'O = \angle P'A'O + \angle B'P'A' - \angle P'A'O = \angle B'P'A'$. Ahora, si tomamos el límite cuando A y B tienden a P, y por lo tanto A' y B' tienden a P', entonces las secantes tienden a las tangentes y los ángulos tienden a los ángulos entre las curvas. Por lo tanto, hemos demostrado que los ángulos se preservan bajo la inversión, por ello se dice que la inversión es una $transformación\ conforme$.

Conclusiones

Observamos que la geometría euclidiana no es la única geometría posible, hay otras clases que son igualmente lógicas y casi tan útiles como ella, y en algunos aspectos, más sencillas.

Hemos visto que la inversión es una transformación de todo el espacio inversivo en sí mismo, ya que dependiendo del conjunto respecto al cual se esté invirtiendo, se mandan rectas que pasan por el centro de inversión en rectas, círculos en círculos, rectas en círculos (para el caso en que el conjunto es un círculo), elipses en elipses, rectas en elipses (en el caso en que el conjunto una es elipse), etc.

Se trató dicha transformación empleando el campo de los complejos y el de los reales en en plano, pero en sí, se puede trabajar en espacios con dimensión mayor. Y el conjunto o función que se invierte puede ser un subespacio del espacio respecto al cual se invierte, pues habría puntos a los que no se les podría definir un punto inverso.

Bibliografía

[1] Cárdenas, S., *Geometría*

Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2010.

[2] Courant, R., *¿Qué es la matemática?*

Aguilar S. A. de ediciones, España, 1971.

[3] Coxeter, H. S. M., *Fundamentos de Geometría*

EDITORIAL LIMUSA, México, 1971.

[4] Derrick, William R., *Variable Compleja con Aplicaciones*

Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1989.

[5] Giles, John R., *Introduction to the Analysis of Metric Spaces*

Cambridge University Press, New York, 1987.

[6] Hoffman, K., *Álgebra Lineal*

Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

[7] Lascurain Orive, A., *Curso básico de Variable Compleja*

Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2007.

[8] Marsden, J. E. - Hoffman, M. J., *Análisis básico de Variable Compleja*

Trillas, México, 1996.

[9] Ramírez Galarza, A. I., - Sienra Loera, G., *Invitación a las geometrías no euclidianas*

Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2000.

[10] Valadéz Rodríguez, M., *Álgebra Lineal, Productos Internos y Teoremas de Estructura*

Editoriales Acatlán, UNAM, México, 2003.