Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Acerca de Algunas Dimensiones en Categorías de Módulos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

A R A C E L I R E Y E S M O R A L E S

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. José Ríos Montes

2011

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Alumno:
Reyes Morales, Araceli
56906891
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
303174970

Propietario (Tutor)
Dr. José Ríos Montes

Propietario
Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas

Propietario
Dr. Jaime Castro Pérez

Suplente
M. en C. José Cruz García Zagal

Suplente
Mat. Alma Violeta García López

Datos del trabajo escrito:
Acerca de Algunas Dimensiones en Categorías de Módulos
78p
2011

A mi familia: María y Silvestre,
Bibiana, Mónica, Luis, Maribel, Silvia;
y amigos
Gracias.

En el principio fuiste mineral,
después te volviste planta;
luego te convertiste en animal:
¿cómo ibas a ignorarlo?
Después te volviste hombre.
Cuando hayas trascendido la condición de hombre
te convertirás, sin la menor duda,
en ángel.
Supera incluso la condición angélica:
penetra en el Océano,
para que de gota de agua puedas transmutarte en mar…

Yalal Ud-din Rumi

De todos los infortunios que afligen a la humanidad, el más amargo es ese, que hemos de tener conciencia de mucho y control de nada.

Herodoto

Conviene ahora que sacudas tu pereza…el que sin gloria consume su vida deja en pos de sí el mismo vestigio que el humo en el aire o la espuma en el mar.

Dante Alighieri.
La Divina Comedia, Infierno,
Canto XXIV

Índice general

Introducción

Dentro de la matemática, en particular en álgebra, es común que para el estudio de un objeto le asociemos otro y éste nos de información acerca del primero, más aun, es frecuente la asociación de cierto número que nos mida algo en específico acerca de nuestro objeto de estudio.

En la teoría de anillos el estudio de las dimensiones no es tan exacto como en espacios vectoriales, esto se debe a la gran variedad de tipos de anillos que se tienen. Varias dimensiones definidas en categorías de módulos has sido estudiadas, dos de las más comunes son la dimensión de Krull y la dimensión de Gabriel. Durante este trabajo nos interersará estudiar acerca de la dimensión de Garbiel.

Con la definición de la dimensión de Gabriel y el estudio de ésta se logra "medir" en cierta forma lo lejos que se encuentra un módulo de ser artiniano mediante la asociación de un ordinal especial.

El presente trabajo se realizó bajo la supervisión del Dr. José Ríos Montes y está basado en el artículo *On the atomic dimension in module categories* [5], cuyos autores son Jaime Castro, Francisco Raggi, José Ríos y John Van den Berg; en el cual se define la dimensión atómica, se estudia, se compara con la dimensión de Gabriel y se da la caracterización de ciertos anillos a través de esta dimensión.

Empezamos con el estudio de las teorías de torsión hereditarias asi como de la dimensión de Gabriel, posteriormente hacemos el estudio del artículo antes mencionado, siendo uno de los objetivos que dicho desarrollo sea lo más claro posible.

A partir del segundo capítulo, se entra en materia de lo necesario para definir y estudiar la dimensión atómica, dando la herramienta necesaria.

Durante el tercer capítulo veremos que la dimensión atómica resulta ser de gran interés pues se relaciona con la dimensión de Gabriel.

Finalmente, se menciona una caracterización para anillos definitivos mediante la dimensión atómica.

Algunos de los teoremas que se demuestran durante el trabajo usan como herramienta resultados de retículas modulares, al final se anexa un apéndice que servirá como introducción al estudio de estas estructuras.

El presente trabajo facilita la comprensión de otros artículos relacionados con las dimensiones en categorías de módulos, por ejemplo en [4] y [10], donde se estudian dimensiones relacionadas directamente con la dimensión atómica y la dimensión de Gabriel.

Capítulo 1

Preliminares

Durante este capítulo introduciremos conceptos primordiales para el estudio de la dimensión atómica y algunos resultados importantes. $R-Mod$ denotará la categoría de módulos izquierdos sobre un anillo R.

Comenzaremos definiendo el concepto de teoría de torsión y veremos algunas propiedades. Posteriormente definiremos lo que es una teoría de torsión hereditaria, este concepto es la base de las definiciones de algunas dimensiones en categorías de módulos en las que nos enfocaremos. Exploraremos algunas propiedades de la colección de teorías de torsión hereditarias definidas sobre un anillo y la estructura de la cual está dotada esta colección. Finalmente daremos la definición de dimensión de Gabriel en un anillo y algunos teoremas importantes que nos serán de utilidad a través del desarrollo del presente trabajo.

Definición 1.1. Una *teoría de torsión* τ en $R-Mod$ es una pareja $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ de clases de R-módulos tales que:

1. $Hom_R(T, F) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}_\tau,\ F \in \mathcal{F}_\tau$.
2. Si $Hom_R(M, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $M \in \mathcal{T}_\tau$.
3. Si $Hom_R(T, N) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}_\tau$, entonces $N \in \mathcal{F}_\tau$.

A $\mathcal{T}_\tau$ le llamaremos la *clase de módulos de τ-torsión* y a $\mathcal{F}_\tau$ le llamaremos la *clase de módulos τ-libres de torsión.*

Proposición 1.2. *Sea τ una teoría de torsión, entonces:*
1) $\mathcal{T}_\tau$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.
2) $\mathcal{F}_\tau$ es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones.

Demostración. 1) Sea $M \in \mathcal{T}_\tau$ tal que la sucesión

$$0 \to K \to M \to M/K \to 0$$

es exacta y sea $L \in \mathcal{F}_\tau$, aplicando el funtor $Hom_R(\_\_ , L)$ se tiene

$$0 \to Hom_R(M/K, L) \to Hom_R(M, L) \to Hom_R(K, L)$$

exacta, pero $Hom_R(M, L) = 0$ por tanto $Hom_R(M/K, L) = 0$ y así $M/K \in \mathcal{T}_\tau$ y $\mathcal{T}_\tau$ es cerrada bajo cocientes.

Para ver que es cerrada bajo sumas directas tomemos una familia de módulos $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathcal{T}_\tau$ y L $\in \mathcal{F}_\tau$, entonces

$$Hom_R\left(\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha, L\right) \cong \prod_{\alpha\in A} Hom_R(M_\alpha, L)$$

pero para toda $\alpha \in A$, $Hom_R(M_\alpha, L) = 0$, entonces

$$\prod_{\alpha\in A} Hom_R(M_\alpha, L) = 0$$

y esto implica que $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \in \mathcal{T}_\tau$.

Ahora tomemos $L \in \mathcal{F}_\tau$ y $K, M/K \in \mathcal{T}_\tau$ tales que la sucesión

$$0 \to K \to M \to M/K \to 0$$

es exacta, aplicando el funtor $Hom_R(\_\_ , L)$ tenemos la sucesión exacta

$$0 \to Hom_R(M/K, L) \to Hom_R(M, L) \to Hom_R(K, L)$$

Y como

$$Hom_R(M/K, L) = 0 = Hom_R(K, L)$$

entonces $Hom_R(M, L) = 0$ y consecuentemente $M \in \mathcal{T}_\tau$.

2) Sea $M \in \mathcal{F}_\tau$ y K submódulo de M entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \to K \to M$$

sea $T \in \mathcal{T}_\tau$ y aplicando el funtor $Hom_R(T, \_\_)$ tenemos

$$0 \to Hom_R(T, K) \to Hom_R(T, M)$$

exacta; de donde $Hom_R(T, M) = 0$, así que $Hom_R(T, K) = 0$ y $K \in \mathcal{F}_\tau$.

Veamos que es cerrada bajo productos; sean $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{F}_\tau$ y $T \in \mathcal{T}_\tau$, entonces

$$Hom_R(T, \prod_{\alpha \in A} N_\alpha) \cong \prod_{\alpha \in A} Hom_R(T, N_\alpha)$$

y como $Hom_R(T, N_\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in A$, entonces

$$Hom_R(T, \prod_{\alpha \in A} N_\alpha) = 0$$

Y por tanto $\prod_{\alpha \in A} N_\alpha \in \mathcal{F}_\tau$.

Probemos que $\mathcal{F}_\tau$ es cerrada bajo extensiones: sean $K, N/K \in \mathcal{F}_\tau$ tales que la sucesión

$$0 \to K \to N \to N/K \to 0$$

es exacta en $R - Mod$; sea $T \in \mathcal{T}_\tau$, aplicando $Hom_R(T, \_\_)$ se tiene

$$0 \to Hom_R(T, K) \to Hom_R(T, N) \to Hom_R(T, N/K)$$

de los cuales $Hom_R(T, K) = 0 = Hom_R(T, N/K)$, por tanto

$$Hom_R(T, N) = 0 \text{ y } N \in \mathcal{F}_\tau$$

lo que concluye la prueba.

$\square$

Dada una clase de módulos de torsión $\mathcal{T}$, que es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones; le podemos asociar su respectiva clase de módulos libres de torsión:

$$\mathcal{F} = \{N \in R - Mod \mid Hom_R(M, N) = 0, \forall M \in \mathcal{T}\}$$

para obtener así una teoría de torsión.

Así mismo, si se tiene una clase de módulos $\mathcal{F}_*$ que es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones, consideramos su clase de módulos de torsión asociada:

$$\mathcal{T}_* = \{M \in R-Mod \mid Hom_R(M,N) = 0,\ \forall N \in \mathcal{F}_*\}$$

Introducimos ahora una de las definiciones más importantes del trabajo, la cual será nuestra herramienta primordial.

Definición 1.3. Decimos que una teoría de torsión τ es *hereditaria* si la clase de módulos de τ-torsión es cerrada bajo submódulos.

Es equivalente para una teoría de torsión τ que $\mathcal{T}_\tau$ sea cerrada bajo submódulos y que $\mathcal{F}_\tau$ sea cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Se denotará por $R-tors$ a la clase de todas las teorías de torsión hereditarias definidas en $R-Mod$.

Si $\tau \in R-tors$ y $M \in R-Mod$, denotaremos por $t_\tau(M)$ al mayor submódulo de M que es de τ-torsión; es decir,

$$t_\tau(M) = \sum \{N \subseteq M \mid N \in \mathcal{T}_\tau\}$$

La siguiente Proposición nos da información importante acerca de t_τ.

Proposición 1.4. *Sea $\tau \in R-tors$, entonces*
1) t_τ: $R-Mod \to R-Mod$ es subfuntor de la identidad.
2) t_τ es exacto izquierdo.
3) Si $M \in R-Mod$ entonces $t_\tau(M/t_\tau(M)) = 0$.

Demostración. 1) Sea $f : M \to K$, veamos que $f(t_\tau(M)) \subseteq t_\tau(K)$

$$f(t_\tau(M)) = f(\sum_{\substack{N\subseteq M\\ N\in\mathcal{T}_\tau}} N) = \sum_{\substack{N\subseteq M\\ N\in\mathcal{T}_\tau}} f(N) \subseteq t_\tau(K)$$

la última contención se da ya que $f(N)$ es de τ-torsión pues $f(N) \cong N/Nuc(f|_N)$ y las clases de torsión hereditarias son cerradas bajo cocientes y sumas directas.

2) Para ver que es exacto izquierdo, basta ver que si $N \subseteq M$ entonces $t_\tau(N) = N \cap t_\tau(M)$.

Como t_τ es subfuntor del funtor identidad entonces $t_\tau(N) \subseteq N$ y $t_\tau(N) \subseteq t_\tau(M)$ y por tanto $t_\tau(N) \subseteq N \cap t_\tau(M)$.

Luego, como $t_\tau(M) \cap N$ es un submódulo de $t_\tau(M)$ que es de τ-torsión entonces $t_\tau(M) \cap N \subseteq t_\tau(N)$.

3) Sea $M \in R-Mod$, se tiene

$$t_\tau(M/t_\tau(M)) = \sum \left\{ N/t_\tau(M) \subseteq M/t_\tau(M) \middle| N/t_\tau(M) \in \mathcal{T}_\tau \right\}$$

sea $K/t_\tau(M)$ uno de tales sumandos, así $t_\tau(M) \subseteq K \subseteq M$ y como

$$t_\tau(K) = K \cap t_\tau(M) = K$$

entonces $K \in \mathcal{T}_\tau$ con lo cual $K = t_\tau(M)$ y $t_\tau(M/t_\tau(M)) = 0$.

$\square$

A los subfuntores del funtor identidad que satisfacen 2) y 3) se les conoce como *funtores de torsión* o bien, *radicales exactos izquierdos.*

La clase $R-tors$ es cardinable, pues existe una correspondencia biyectiva entre $R-tors$ y ciertas familias de ideales izquierdos de R, debido a esto podemos trabajar en $R-tors$ como un conjunto sin que nos ocasione problemas. Para dar esta correspondencia introducimos lo siguiente.

Si τ está en $R-tors$ le asignamos el conjunto de ideales izquierdos

$$\mathcal{G}_\tau = \{ {}_RI \subseteq R \mid R/I \in \mathcal{T}_\tau \}$$

observemos que este conjunto no es vacío pues al menos $R \in \mathcal{G}_\tau$.

Proposición 1.5. *Si τ está en $R-tors$ entonces $\mathcal{G}_\tau$ satisface las siguientes condiciones:*
1) Si $I \in \mathcal{G}_\tau$, $r \in R$ entonces $(I : r) \in \mathcal{G}_\tau$.
2) Si $J \in \mathcal{G}_\tau$, ${}_RI$ es tal que $(I : j) \in \mathcal{G}_\tau$ para todo $j \in J$ entonces $I \in \mathcal{G}_\tau$.

Demostración. 1) Sean $I \in \mathcal{G}_\tau$ y $r \in R$. Definimos el siguiente morfismo:

$$\Phi : R \to R/I$$
$$\Phi(a) = ar + I$$

observemos que $Nuc(\Phi) = (I : r)$, luego

$$Im(\Phi) = \Phi(R) \cong R/Nuc(\Phi) = R/(I : r)$$

y como $\Phi(R)$ es submódulo de R/I y $R/I \in \mathcal{T}_\tau$, entonces

$$\Phi(R) \cong R/(I : r) \in \mathcal{T}_\tau$$

es decir, $(I : r) \in \mathcal{G}_\tau$ para todo $r \in R$.

2) Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to (I + J)/I \to R/I \to R/(I + J) \to 0$$

como

$$R/(I + J) \cong \frac{R}{J} / \frac{I + J}{J}$$

entonces $R/(I + J) \in \mathcal{T}_\tau$.

Por otro lado, también se tiene que $(I + J)/I \cong J/(I \cap J)$; tomemos $x \in J/(I \cap J)$ entonces $x = j + (I \cap J)$ con $j \in J$, y notemos que

$$(0 : j + (I \cap J)) = ((I \cap J) : j) = (I : j) \in \mathcal{G}_\tau$$

y por lo tanto

$$(I + J)/I \cong J/(I \cap J) \in \mathcal{T}_\tau$$

y por ser $\mathcal{T}\tau$ cerrada bajo extensiones se tiene que $R/I \in \mathcal{T}_\tau$ y así $I \in \mathcal{G}_\tau$. $\square$

A una familia no vacía de ideales de R que satisface las condiciones 1) y 2) se le llama *filtro idempotente* o *filtro de Gabriel*.

Observación 1.6. *Si $\mathcal{G}$ es un filtro de Gabriel se cumplen las siguientes condiciones adicionales:*
1) Si $I, J \in \mathcal{G}$, entonces $(I \cap J) \in \mathcal{G}$.
2) Si $I \in \mathcal{G}$, $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathcal{G}$.
3) Si $I, J \in \mathcal{G}$ entonces $IJ \in \mathcal{G}$.

Demostración. 1) Sea $x \in I$, $((I \cap J) : x) = (J : x)$ el cual est en $\mathcal{G}$ por el inciso 1) de la Proposición 1.5.

2) Basta notar que para toda $x \in I$; $(J : x) = R$.

3) Sean $I, J \in \mathcal{G}$, $x \in J$, entonces $I \subseteq (IJ : x)$, y por el inciso 2) de esta Proposición y la Proposición 1.5,2) se tiene $IJ \in \mathcal{G}$. □

Ahora bien, demos la correspondencia entre $R - tors$ y filtros de Gabriel en R:

Teorema 1.7. *Existe una correspondencia biyectiva entre las siguientes clases de objetos:*
1) Teorías de torsión hereditarias en $R - Mod$.
2) Filtros de Gabriel en R.
3) Radicales exactos izquierdos.

Demostración. 1) $\leftrightarrow$ 2) Denotemos por $\mathcal{L}$ a la colección de filtros de Gabriel en R. Definimos ahora asignaciones entre $\mathcal{L}$ y $R - tors$:

$$\Phi : R - tors \to \mathcal{L}$$

$$\Phi(\mathcal{T}) = \{{}_R K \subseteq R \mid R/K \in \mathcal{T}\} = \mathcal{G}(\mathcal{T})$$

$$\Psi : \mathcal{L} \to R - tors$$

$$\Psi(\mathcal{G}) = \{M \in R - Mod \mid (0 : m) \in \mathcal{G}, \forall\, m \in M\} = \mathcal{T}^*$$

$\mathcal{G}(\mathcal{T})$ es un filtro de Gabriel por la Proposición 1.5, veamos que $\mathcal{T}^*$ es, en efecto, una clase de torsión hereditaria.

$\mathcal{T}^*$ es cerrada bajo:

Submódulos:

Sea $M \in \mathcal{T}^*$, $N \subseteq M$, $n \in N$, entonces $(0 : n) \in \mathcal{G}$, por tanto $N \in \mathcal{T}^*$.

Imágenes homomorfas:

Tomemos $f : M \to N$ un epimorfismo y $M \in \mathcal{T}^*$, como $(0, m) \subseteq (0 : f(m))$ entonces $f(M) \in \mathcal{T}^*$.

Sumas directas:

Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathcal{T}^*$ y $(m_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$, entonces

$$(0:(m_\alpha)) = \bigcap (0:(m_\alpha)) \in \mathcal{G}$$

por ser una intersección finita, lo cual implica que $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \in \mathcal{T}^*$.

Extensiones:

Tomemos una sucesión exacta en $R-Mod$

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

con $N, M/N \in \mathcal{T}^*$. Sea $m \in M$, entonces $m+N \in M/N$ y $(N:m) = (0:m+N) \in \mathcal{G}$.

Si $r \in (N:m)$ entonces $rm \in N$ y así

$$((0:m):r) = (0:rm) \in \mathcal{G}$$

con esto se tiene $((0:m):r) \in \mathcal{G}$ para toda $r \in (N:m)$; es decir $(0:rm) \in \mathcal{G}$ para toda $rm \in N$, lo que implica $(0:m) \in \mathcal{G}$ y por tanto $M \in \mathcal{T}^*$. Y con esto concluimos que $\mathcal{T}^*$ es una clase de torsión hereditaria.

Ahora veamos que las asignaciones Φ y Ψ son inversas una de la otra:

$\Psi \circ \Phi = 1_{R-tors}$

Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F}) \in R-tors$, entonces

$$\Phi(\mathcal{T}) = \{{}_RK \mid R/K \in \mathcal{T}\} = \mathcal{G}(\mathcal{T})$$

componiendo con Ψ se tiene

$$\Psi(\Phi(\mathcal{T})) = \{M \in R-Mod \mid (0:m) \in \mathcal{G}(\mathcal{T})\ \forall m \in M\} = \mathcal{T}^*$$

Afirmamos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$

$\subseteq]$ Sea $M \in \mathcal{T}$, $m \in M$ entonces $R/(0:m) \cong Rm \in \mathcal{T}$ y $(0:m) \in \mathcal{G}(\mathcal{T})$ por lo tanto $M \in \mathcal{T}^*$.

$\supseteq$] Tomemos $M' \in \mathcal{T}^*$ entonces para todo $m' \in M'$ se tiene que $(0 : m') \in \mathcal{G}(\mathcal{T})$ con lo cual $Rm' \cong R/(0 : m') \in \mathcal{T}$; y considerando el epimorfismo $\bigoplus_{m' \in M} Rm' \to M'$ se tiene que $M' \in \mathcal{T}^*$.

$\Phi \circ \Psi = 1_{\mathcal{L}}$

Sea $\mathcal{G} \in \mathcal{L}$, entonces

$$\Psi(\mathcal{G}) = \{M \in R - Mod \mid (0 : m) \in \mathcal{G}, \ \forall m \in M\}$$

$$\text{y } \Phi(\Psi(\mathcal{G})) = \{_R H \mid R/H \in \Psi(\mathcal{G})\} = \mathcal{G}'$$

Aseveramos que $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$:

$\subseteq$] Sea $I \in \mathcal{G}$ entonces $R/I \in \mathcal{T}$, sea $x \in R/I$, $x = r + I$; $(0 : x) = (0 : r + I) = (I : r)$, como $I \in \mathcal{G}$ se tiene que $(I : r) \in \mathcal{G}$, por tanto $(0 : x) \in \mathcal{G}$ para todo $x \in R/I$, entonces $R/I \in \Psi(\mathcal{G})$ y así $I \in \mathcal{G}'$.

$\supseteq$] Sea $K \in \mathcal{G}'$ entonces $R/K \in \Psi(\mathcal{G})$; esto es, para toda $\overline{x} \in R/K$ se tiene $(0 : \overline{x}) \in \mathcal{G}$, pero

$$(0 : \overline{x}) = (0 : r + K) = (K : r) \in \mathcal{G}, \ r \in R$$

por lo tanto $K \in \mathcal{G}$.

1) $\leftrightarrow$ 3) Denotemos por $R - ler$ a la coleccóin de radicales exactos izquierdos de $R - Mod$.

A cada teoría de torsión hereditaria τ le asignamos el radical exacto izquierdo t_τ (ver Proposición 1.4). Y a cada radical exacto izquierdo t le asignaremos $\mathcal{T}_t = \{M \in R - Mod \mid t(M) = M\}$. Es decir

$$\varphi : R - tors \to R - ler$$

$$\varphi(\mathcal{T}_\tau) = t_\tau$$

$$\vartheta : R - ler \to R - tors$$

$$\vartheta(t) = \mathcal{T}_t$$

Primero notemos que $\mathcal{T}_t$ es una clase de módulos de torsión hereditaria. Es cerrada bajo:

Submódulos:

Sea $M \in \mathcal{T}_t$, N submódulo de M, entonces

$$t(N) = t(M) \cap N = M \cap N = N$$

Cocientes:

Sea $M \in \mathcal{T}_t$, N submódulo de M, entonces

$$t(M/N) \geq (t(M) + N)/N = (M + N)/N = M/N$$

y como t es subfuntor del funtor identidad se tiene que $t(M/N) \leq M/N$. Por tanto $t(M/N) = M/N$.

Sumas directas:

Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{T}_t$, entonces

$$t(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in A} t(M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$$

Extensiones:

Sean $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ una sucesión exacta en $R - Mod$ tal que $N, M/N \in \mathcal{T}_t$ entonces $N = t(N) = N \cap t(M)$, por lo tanto $N \subset t(M)$.

Como t es radical se tiene $t(M/N) = t(M)/N$ pero $t(M/N) = M/N$ entonces $t(M) = M$ y por tanto $\mathcal{T}_t$ es una clase de módulos de torsión hereditaria.

Veamos que $\vartheta \circ \varphi = 1_{R-tors}$ y $\varphi \circ \varphi = 1_{R-ler}$.

Sea $\tau \in R - tors$, $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$, entonces

$$\vartheta(\varphi(\mathcal{T})) = \vartheta(t_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}_{t_{\mathcal{T}}}$$

afirmamos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{t_{\mathcal{T}}}$. En efecto, pues si $M \in \mathcal{T}$ entonces

$$t_{\mathcal{T}}(M) = \sum_{\substack{N \subseteq M \\ N \in \mathcal{T}}} N = M$$

por tanto $M \in \mathcal{T}_{t_\mathcal{T}}$; y si $M \in \mathcal{T}_{t_\mathcal{T}}$ entonces

$$t_\mathcal{T}(M) = M = \sum_{\substack{N \subseteq M \\ N \in \mathcal{T}}} N$$

por tanto $M \in \mathcal{T}$ y $\vartheta \circ \varphi = 1_{R-tors}$.

Tomemos ahora $t \in R - ler$, así

$$\varphi(\vartheta(t)) = \varphi(\mathcal{T}_t) = t_{\mathcal{T}_t}$$

veamos que $t = t_{\mathcal{T}_t}$. Sea $M \in R - Mod$, luego

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{T}_t}(M) &= \sum_{\substack{N \subseteq M \\ N \in \mathcal{T}_t}} N \\ &= \sum_{\substack{N \subseteq M \\ t(N) = N}} N \qquad \text{y como } t \text{ es radical} \\ &= \sum_{\substack{N \subseteq M \\ t(M) \subseteq N}} N \\ &= t(M) \end{aligned}$$

con esto concluimos $\varphi \circ \vartheta = 1_{R-ler}$.

□

Observación 1.8. *Para poder estudiar $R - tors$, debemos tener información acerca de su estructura. Le asignamos el siguiente orden parcial:*

Si τ, $\sigma \in R - tors$ entonces diremos que $\tau \leq \sigma$ si $\mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{T}_\sigma$.

Proposición 1.9. *Son equivalentes:*
1) $\tau \leq \sigma$.
2) $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.
3) Para todo $M \in R - Mod$, $t_\tau(M) \subseteq t_\sigma(M)$.

Demostración. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Sean $\tau \leq \sigma$, $N \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces

$$Hom_R(M, N) = 0 \text{ para toda } M \in \mathcal{T}_\sigma$$

como $\mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{T}_\sigma$ entonces $Hom_R(M,N) = 0$ para toda $M \in \mathcal{T}_\tau$, por tanto $N \in \mathcal{F}_\tau$. El recíproco se obtiene de manera análoga.

1) $\Leftrightarrow$ 3) Sea $M \in R - Mod$, por definición

$$t_\tau(M) = \sum \{N \subseteq M \mid N \in \mathcal{T}_\tau\}$$

$$t_\sigma(M) = \sum \{K \subseteq M \mid K \in \mathcal{T}_\sigma\}$$

suponiendo que $\tau \leq \sigma$ entonces $\mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{T}_\sigma$ lo que implica que $t_\tau(M) \subseteq t_\sigma(M)$ $\forall M \in R - Mod$.

Inversamente, si $\forall M \in R - Mod$ se tiene $t_\tau(M) \subseteq t_\sigma(M)$ entonces $t_\tau \leq t_\sigma$ y por tanto $\tau \leq \sigma$. $\square$

En vista de lo anterior podemos ver que $R - tors$ es una retícula completa, donde el ínfimo y el supremo de una familia

$$\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq R - tors$$

pueden ser descritos como sigue:

$$\mathcal{T}_{\wedge_{\alpha \in A}\tau_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_{\tau_\alpha}$$

$$\mathcal{F}_{\vee_{\alpha \in A}\tau_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{F}_{\tau_\alpha}$$

El siguiente Teorema nos da aun más información acerca de la estructura reticular de $R - tors$.

Teorema 1.10. $(R - tors, \leq, \wedge, \vee)$ *es un marco.*

Demostración. Sea $\tau \in R - tors$, $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq R - tors$, demostraremos que $\vee_\alpha(\tau \wedge \tau_\alpha) = \tau \wedge (\vee_\alpha \tau_\alpha)$.

$\leq]$ $\tau_\alpha \leq \vee_\alpha \tau_\alpha$ $\forall \alpha \in A \Rightarrow \tau \wedge \tau_\alpha \leq \tau \wedge (\vee_\alpha \tau_\alpha)$, por lo tanto

$$\vee_\alpha(\tau \wedge \tau_\alpha) \leq \tau \wedge (\vee_\alpha \tau_\alpha)$$

$\geq]$ Para este lado de la desigualdad supondremos que es falso, entonces existe $M \in R - Mod$ tal que

$$M \in \mathcal{T}_{\tau\wedge(\vee_\alpha \tau_\alpha)} \text{ y } M \notin \mathcal{T}_{\vee_\alpha(\tau\wedge\tau_\alpha)}$$

sea $N = t_{\vee_\alpha(\tau\wedge\tau_\alpha)}(M)$, entonces

$$M/N \in \mathcal{T}_{\tau\wedge(\vee_\alpha \tau_\alpha)} \text{ y } M/N \in \mathcal{F}_{\vee_\alpha(\tau\wedge\tau_\alpha)}$$

en particular $M/N \in \mathcal{T}_\tau$ y $M/N \in \mathcal{T}_{\vee_\alpha \tau_\alpha}$.

Así, existe $\tau_\beta \in \{\tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que $M/N \notin \mathcal{F}_{\tau_\beta}$.

Sea $N'/N = t_{\tau_\beta}(M/N)$ entonces $N'/N \in \mathcal{T}_{\tau\wedge\tau_\beta}$, luego

$$N'/N \in \mathcal{T}_{\vee_\alpha(\tau\wedge\tau_\alpha)}$$

pero $N'/N \subseteq M/N$ y por tanto $N'/N \in \mathcal{F}_{\vee_\alpha(\tau\wedge\tau_\alpha)}$ lo cual es una contradicción. □

Corolario 1.11. $(R-tors, \leq, \wedge, \vee)$ *es una retícula distributiva.*

Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq R-Mod$, denotaremos por $\xi(\{M_\alpha\})$ al menor elemento de $R-tors$ para el cual todos los M_α son de torsión; es decir,

$$\xi(\{M_\alpha\}) = \bigwedge \{\tau \in R-tors; \{M_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}_\tau\}$$

y le llamaremos la *teoría de torsión generada por* $\{M_\alpha\}$.

Denotaremos por $\chi(\{M_\alpha\})$ al mayor elemento de $R-tors$ para el cual todos los M_α son libres de torsión; es decir,

$$\chi(\{M_\alpha\}) = \bigvee \{\tau \in R-tors; \{M_\alpha\} \subseteq \mathcal{F}_\tau\}$$

y le llamaremos la *teoría de torsión cogenerada por* $\{M_\alpha\}$.

En particular $\chi = \chi(\{0\})$ y $\xi = \xi(\{0\})$ denotan al elemento mayor y el elemento menor de $R-tors$, respectivamente. Como abuso de notación escribiremos $\xi(M)$, $\chi(M)$ cuando se trate de la teoría de torsión generada o cogenerada por un sólo módulo.

Ya que $R-tors$ es un marco, entonces todo elemento tiene un único pseudocomplemento, *i.e.* para todo $\tau \in R-tors$ existe $\tau^\perp$ tal que:

1. $\tau \wedge \tau^\perp = \xi$
2. Si $\sigma \in R-tors$ es tal que $\tau \wedge \sigma = \xi$ entonces $\sigma \leq \tau^\perp$.

Denotamos por $R - simp$ a un conjunto fijo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples.

Si $\tau \in R - tors$, decimos que es de tipo *simple* si $\tau = \xi(\mathcal{C})$, $\mathcal{C} \subseteq R - simp$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Ya hemos visto cómo es la estructura de $R - tors$, cuando tenemos una retícula nos preguntamos, entre otras cosas, si existen átomos y coátomos; en este caso resulta que si existen átomos y de hecho están completamente descritos, como nos muestra el siguiente Teorema. La existencia de coátomos es una cuestión que se tratará en capítulos posteriores.

Teorema 1.12. *En la retícula $(R - tors, \leq, \wedge, \vee, \xi, \chi)$ existen átomos. Mas aún, todo átomo en $R - tors$ es de la forma $\xi(S)$ para algún R-módulo izquierdo simple.*

Demostración. Sea $\tau \in R - tors$ tal que $\xi < \tau \leq \xi(S)$ con $S \in R - simp$, demostraremos que, en efecto $\tau = \xi(S)$.

Sea $M \in \mathcal{T}_\tau$, $M \neq 0$ y un elemento no cero $m \in M$, entonces el cíclico $Rm \in \mathcal{T}_\tau$ y existe un epimorfismo de Rm a un módulo simple S', es decir

$$Rm \to S' \to 0$$

es exacta, como la clase $\mathcal{T}_\tau$ es cerrada bajo imágenes homomorfas se tiene $S' \in \mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{T}_{\xi(S)}$, entonces existe $f \in Hom_R(S, E(S'))$ no cero y además $f(S) \cap S' \neq 0$ por ser S' esencial en su cápsula, y por ser también S' simple se tiene

$$f(S) \cap S' = S' \subseteq f(S) \cong S$$

por lo tanto $S \in \mathcal{T}_\tau$, es decir $\xi(S) \leq \tau$, por lo tanto $\xi(S)$ con $S \in R - simp$ es un átomo en $R - tors$.

Luego, sea τ un átomo en $R - tors$, y $M \in \mathcal{T}_\tau$, tomemos $0 \neq m \in M$, entonces existe un epimorfismo $Rm \to S \to 0$ con $S \in R - simp$, lo que implica $S \in \mathcal{T}_\tau$, es decir $\xi(S) \leq \tau$, y como τ es un átomo, se tiene $\tau = \xi(S)$ con $S \in R - simp$, lo cual completa la prueba. $\square$

Introducimos ahora algunas definiciones que nos serán de gran utilidad.

Definición 1.13. Sean $M \in R - Mod$, $\tau \in R - tors$, diremos que M es *τ-cocrítico* si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y es tal que para todo submódulo no cero $N \subseteq M$, $M/N \in \mathcal{T}_\tau$. Diremos que M es *cocrítico* si es τ-cocrítico para alguna teoría de torsión τ.

Definición 1.14. Sea $\tau \in R - tors$, $M \in R - Mod$, un submódulo N de M es *τ-denso* si $M/N \in \mathcal{T}_\tau$.

Definición 1.15. Sean $N \subseteq M \in R - Mod$, $\tau \in R - tors$, diremos que N es *τ-puro* en M si $M/N \in \mathcal{F}_\tau$.

Si M es un R-módulo izquierdo y N un submódulo de M, podemos considerar

$$\mathbb{F} = \{K \subseteq M | N \subseteq K \text{ y } K \text{ es } \tau\text{-puro}\}$$

$$\text{y } H = \bigcap \mathbb{F}$$

diremos que H es la *τ-purificación* de N en M. Notemos que no es vacío pues al menos M forma parte de él, además $M/H \in \mathcal{F}_\tau$ porque tenemos un monomorfismo

$$M/H \hookrightarrow \prod_{K \in \mathbb{F}} M/K.$$

Proposición 1.16. *Sean $\tau \in R - tors$, $N \subseteq M \in R - Mod$ y N' la τ-purificación de N en M. Entonces $N'/N = t_\tau(M/N)$.*

Demostración. Sea $N''/N = t_\tau(M/N)$, así N''/N es un submódulo τ-puro en M/N y N'' es un submódulo τ-puro de M que contiene a N lo que implica $N' \subseteq N''$, si se da la inclusión estricta entonces $N''/N' \neq 0$ y si consideramos la sucesión exacta

$$0 \to N'/N \to N''/N \to N''/N' \to 0$$

como $N''/N \in \mathcal{T}_\tau$ entonces $N'/N \in \mathcal{T}_\tau$, pero $N''/N' \subseteq M/N' \in \mathcal{F}_\tau$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $N' = N''$. $\square$

Sea M un R-módulo, diremos que M es *τ-inyectivo* si para toda sucesión exacta

$$0 \to L \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} N \to 0$$

con $N \in \mathcal{T}_\tau$ y todo morfismo $h : L \to M$, existe un morfismo $\overline{h} : X \to M$ tal que $\overline{h}f = h$.

Si $M \in R - Mod$ denotaremos por $E(M)$ a su cápsula inyectiva. La τ-purificación de M en $E(M)$ es un submódulo τ-inyectivo de $E(M)$ que contiene a M esencialmente, y es el mínimo submódulo con dicha propiedad, llamaremos a la τ-purificación de M en $E(M)$ la *τ-cápsula inyectiva* de M y la denotaremos por $E_\tau(M)$. Nótese que por la Proposición 1.16 se tiene $E_\tau(M)/M = t_\tau(E(M)/M)$.

Definición 1.17. Sea $\tau \in R-tors$, τ es una teoría de torsión *prima* (Goldman) si $\tau = \chi(M)$ para algún R-módulo τ-cocrítico. Denotaremos por $R-sp$ al conjunto de teorías de torsión primas en $R-tors$.

Definición 1.18. Decimos que una teoría de torsión hereditaria τ es *irreducible* si para $\tau', \tau'' \in R-tors$ se tiene $\tau' \wedge \tau'' = \tau$ entonces $\tau' = \tau$ o $\tau'' = \tau$. Denotaremos por $R-irr$ al conjunto de teorías de torsión irreducibles en $R-tors$.

Proposición 1.19. *Sea $\tau \in R-tors$, son equivalentes:*
1) τ es una teoría de torsión irreducible.
2) Si $\tau', \tau'' \in R-tors$ tales que $\tau' \wedge \tau'' \leq \tau$ entonces $\tau' \leq \tau$ o $\tau'' \leq \tau$.

Demostración. Supongamos que τ es una teoría de torsión irreducible, y $\tau'', \tau' \in R-tors$ tales que $\tau' \wedge \tau'' \leq \tau$.

Sean $\sigma' = \tau \vee \tau'$ y $\sigma'' = \tau \vee \tau''$, entonces

$$\tau \leq \sigma' \wedge \sigma'' = (\tau \vee \tau') \wedge (\tau \vee \tau'')$$

y por el Corolario 1.11 se tiene

$$(\tau \vee \tau') \wedge (\tau \vee \tau'') = \tau \vee (\tau' \wedge \tau'') = \tau$$

por lo tanto $\tau = \sigma' \wedge \sigma''$ luego, como τ es irreducible se tiene que $\tau = \sigma'$ o $\tau = \sigma''$, es decir $\tau \geq \tau'$ o $\tau \geq \tau''$.

La implicación recíproca se da por la definición. □

Sea $\tau \in R-tors$, definimos la siguiente cadena transfinita de teorías de torsión hereditarias, indicadas en los ordinales:

1. $\tau_0 = \tau$
2. Si i es un ordinal sucesor, entonces

$$\tau_i = \tau_{i-1} \vee \xi(\{M|M \text{ es } \tau_{i-1}\text{-cocrítico}\})$$

3. Si i es un ordinal límite, entonces

$$\tau_i = \bigvee \{\tau_j | j < i\}$$

Esta cadena es llamada *filtración de Gabriel, de* τ.

Si $\tau \in R{-}tors$, definimos las *generalizaciones* de τ, como el intervalo o subretícula $[\tau, \chi]$ y la denotaremos por $gen(\tau)$.

Definición 1.20. Sea $M \in R - Mod$, $M \neq 0$, decimos que M tiene *τ-dimensión de Gabriel i*, con i un ordinal, si M es de τ_i-torsión pero no es de τ_j-torsión para $j < i$.

Si M no es de τ_i-torsión para ninguna i entonces no está definida la τ-dimensión de Gabriel para M.

Denotaremos a la τ-dimensión de Gabriel de M como τ-$G\dim(M)$, en particular, la ξ-dimensión de Gabriel de M se llama la *dimensión de Gabriel de M*.

Observemos que R tiene τ-G dim igual a γ si y sólo si $\tau_\gamma = \chi$.

Proposición 1.21. *Si R tiene τ-G dim, entonces para cualquier $\sigma, \sigma' \in gen(\tau)$, tales que $\tau \leq \sigma < \sigma' \leq \chi$, existe un módulo σ-cocrítico que es de σ'-torsión.*

Demostración. Sea $\gamma = \tau$-$G\dim(R)$ y h un ordinal mínimo con la propiedad de $\tau_h \nleq \sigma$. Notemos que h no es límite ni cero, si es límite, ya que es mínimo con dicha propiedad se tiene $\tau_j \leq \sigma$ $\forall j < h$ y así $\tau_h = \bigvee_{j<h} \tau_j \leq \sigma$, una contradicción y no es cero pues $\tau_0 = \tau \leq \sigma$.

Entonces h es sucesor y $\tau_h = \tau_{h-1} \vee \xi(\{M \mid M \text{ es } \tau_{h-1}\text{-cocrítico}\})$.

Supongamos que no existe un módulo σ-cocrítico de σ'-torsión.

Afirmamos que para todo ordinal i se tiene $\tau_i \wedge \sigma' \leq \sigma$.

Primero observemos que para todo ordinal $j < h$ se tiene $\tau_j \wedge \sigma' \leq \sigma$, pues para $j < h$, $\tau_j \leq \sigma$.

Asi pues, sea i un ordinal tal que $\tau_j \wedge \sigma' \leq \sigma$ para todo $j < i$, probaremos que $\tau_i \wedge \sigma' \leq \sigma$.

caso 1. i un ordinal límite, en este caso $\tau_i = \bigvee_{j<i} \tau_j$ y

$$\sigma' \wedge \tau_i = \sigma' \wedge (\bigvee_{j<i} \tau_j) = \bigvee_{j<i} (\sigma' \wedge \tau_j) \leq \sigma$$

caso 2. i es sucesor, asi $\tau_i = \tau_{i-1} \vee \xi(\{M \mid M \text{ es } \tau_{i-1}\text{-cocrítico}\})$.

Supongamos que existe $M \in R - Mod$ tal que M es de $(\tau_i \wedge \sigma')$-torsión y sin pérdida de generalidad supongamos que $M \in \mathcal{F}_\sigma$, por hipótesis de inducción $\tau_{i-1} \wedge \sigma' \leq \sigma$, entonces $M \in \mathcal{F}_{\tau_{i-1} \wedge \sigma'}$, sea $N = t_{\tau_{i-1}}(M)$ así

$$N \in \mathcal{T}_{\tau_{i-1} \wedge \sigma'} \subseteq \mathcal{T}_\sigma$$

por lo tanto $N \in \mathcal{T}_\sigma$ y como $M \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces $N = 0$ con lo que se tiene que $M \in \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}$, entonces existe un módulo C τ_{i-1}-cocrítico y $f \neq 0$ $f : C \to E(M)$ monomorfismo, por tanto M contiene un submódulo τ_{i-1}-cocrítico, a saber $f(C) \cap M = C'$, luego

$$C' \subseteq M \in \mathcal{F}_\sigma$$

y si $H \subset C'$, $H \neq 0$, entonces C'/H es de τ_{i-1}-torsión y por ser C'/H un subcociente de M entonces es de $\tau_{i-1} \wedge \sigma'$-torsión, así

$$C'/H \in \mathcal{T}_{\tau_{i-1} \wedge \sigma} \subseteq \mathcal{T}_\sigma$$

entonces C' es un módulo σ-cocrítico que es de σ'-torsión, lo que contradice nuestra hipótesis, por lo tanto $(\tau_i \wedge \sigma') \leq \sigma$ para todo ordinal i.

Como τ-G $\dim(R) = \gamma$, entonces $\tau_\gamma = \chi$ y

$$\sigma' = \chi \wedge \sigma' = \tau_\gamma \wedge \sigma' \leq \sigma$$

lo que es una contradicción y esto finaliza la prueba.

$\square$

Capítulo 2

$\mathcal{A}$-módulos

Este capítulo está centrado en el estudio de los $\mathcal{A}$-módulos, éstos serán básicos para el estudio de la dimensión atómica. Veremos la importancia que tienen éstos módulos y el papel que juegan en la retícula $gen(\tau)$. Además, estudiaremos algunas condiciones para que en la retícula $R-tors$ existan coátomos y la forma de algunos de éstos.

También se dará una caracterización de los módulos semiartinianos vía su retícula de teorías de torsión hereditarias. Finalmente calcularemos la retícula de teorías de torsión hereditarias de un peculiar anillo y analizaremos qué información podemos obtener a través de ella.

Definición 2.1. Sea $\tau \in R-tors$, $\sigma \in gen(\tau)$, diremos que σ es un τ-*átomo* si σ es un átomo en $gen(\tau)$.

Definición 2.2. Sea $\tau \in R-tors$, $\tau \neq \chi$ y $M \in R-Mod$, M es un τ-$\mathcal{A}$-*módulo* si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y $\tau \vee \xi(M)$ es un τ-átomo.

La siguiente Proposición nos da algunas propiedades interesantes acerca de los τ-$\mathcal{A}$-módulos.

Proposición 2.3. *Sea $\tau \in R-tors$, $\tau \neq \chi$, entonces*
1) Si M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo, $M^{(X)}$ es un τ-$\mathcal{A}$-módulo.
2) Si $\sigma \in R-tors$ es un τ-átomo entonces cada $M \in \mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau - \{0\}$ es un τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\sigma = \tau \vee \xi(M)$.
3) Si M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces para cada submódulo $N \subseteq M$, N no nulo, se tiene que N es un τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(N)$.
4) Si M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo y N es un submódulo τ-puro propio de M entonces M/N es un τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\tau \vee (M) = \tau \vee (M/N)$.

Demostración. 1) Sea X un conjunto no vacío y M un τ-$\mathcal{A}$-módulo, como $M^{(X)}$ es submódulo de M^X y $M^X \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $M^{(X)} \in \mathcal{F}_\tau$.

Veamos que $\xi(M) = \xi(M^{(X)})$. Si M es de σ-torsión para alguna teoría de torsión σ entonces $M^{(X)}$ es de σ-torsión por ser una clase cerrada bajo sumas directas y así $\xi(M^{(X)}) \leq \xi(M)$.

Recíprocamente, si $M^{(X)}$ es de σ-torsión para alguna teoría de torsión σ, se tiene que M es de σ-torsión por ser una clase hereditaria, entonces $\xi(M) \leq \xi(M^{(X)})$ y por tanto $\xi(M) = \xi(M^{(X)})$.

2) Sea $M \in \mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$, $M \neq 0$, σ un τ-átomo. Como $M \in \mathcal{T}_\sigma$ entonces $\xi(M) \leq \sigma$; luego,

$$\tau < \tau \vee \xi(M) \leq \sigma \vee \xi(M) = \sigma$$

y por ser σ un τ-átomo entonces $\tau \vee \xi(M) = \sigma$, por lo tanto M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo.

3) Sea M un τ-$\mathcal{A}$-módulo y sea $N \subseteq M$, entonces $N \in \mathcal{F}_\tau$ y por ser N submódulo de M, $\xi(N) \leq \xi(M)$, así

$$\tau < \tau \vee \xi(N) \leq \tau \vee \xi(M)$$

y como $\tau \vee \xi(M)$ es un τ-átomo se tiene $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M)$.

4) Sea M un τ-$\mathcal{A}$-módulo y $N \subseteq M$ un submódulo τ-puro, entonces $M/N \in \mathcal{F}_\tau$. Luego, si M es de σ-torsión para algún $\sigma \in R - tors$ entonces M/N es de σ-torsión, por tanto $\xi(M/N) \leq \xi(M)$ lo que implica

$$\tau < \tau \vee \xi(M/N) \leq \tau \vee \xi(M)$$

y por ser M τ-$\mathcal{A}$-módulo $\tau \vee \xi(M/N) = \tau \vee \xi(M)$. $\square$

A continuación daremos una caracterización de los τ-$\mathcal{A}$-módulos.

Teorema 2.4. *Sea $\tau \in R - tors$ y sea $M \in \mathcal{F}_\tau$, $M \neq 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo.
2) Para cada par de submódulos N', N de M y para cada inyectivo $E \in \mathcal{F}_\tau$ tales que $N' \subset N \subseteq M$ y $N/N' \in \mathcal{F}_\tau$ se tiene

$$Hom_R(N/N', E) = 0 \Rightarrow Hom_R(M, E) = 0$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] Sean $N' \subset N \subseteq M$ tales que $N/N' \in \mathcal{F}_\tau$, por la Proposición 2.3 se tiene

$$\tau < \tau \vee \xi(N/N') = \tau \vee \xi(M)$$

Sea E inyectivo, $E \in \mathcal{F}_\tau$ tal que $Hom_R(N/N', E) = 0$ entonces $E \in \mathcal{F}_{\xi(N/N')}$, luego

$$E \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{\xi(N/N')} = \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(N/N')} = \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(M)}$$

por lo tanto $Hom_R(M, E) = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1)] Ya se tiene $M \in \mathcal{F}_\tau$, veamos que $\tau \vee \xi(M)$ es un τ-átomo.

Sea $\sigma \in R-tors$ tal que $\tau < \sigma \leq \tau \vee \xi(M)$, como $\tau < \sigma$ existe un R-módulo no nulo $K \in \mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$, como K es de σ-torsión $K \notin \mathcal{F}_\sigma$ y $K \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $K \notin \mathcal{F}_{\xi(M)}$ y $Hom_R(M, E(K)) \neq 0$.

Así, existen submódulos $N' \subset N \subseteq M$ y un monomorfismo $N/N' \hookrightarrow K$, luego, como $K \in \mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ se tiene

$$\tau \vee \xi(N/N') \leq \sigma \leq \tau \vee \xi(M).$$

Ahora, sea

$$H \in \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(N/N')} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{\xi(N/N')}$$
$$\Rightarrow Hom_R(N/N', E(H)) = 0 \text{ y } Hom_R(M, E(H)) = 0$$

De esto, tenemos $H \in \mathcal{F}_{\xi(M)}$ y entonces $H \in \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(M)}$ por tanto

$$\tau \vee \xi(N/N') = \sigma = \tau \vee \xi(M)$$

lo que demuestra que M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo. □

En consecuencia tenemos el siguiente resultado el cual nos provee de varios ejemplos de τ-$\mathcal{A}$-módulos.

Corolario 2.5. *Sea $\tau \in R-tors$. Entonces todo módulo τ-cocrítico es un τ-$\mathcal{A}$-módulo.*

Demostración. Sea M un R-módulo τ-cocrítico, entonces $M \in \mathcal{F}_\tau$ y para todo $N \subseteq M$ se tiene $M/N \in \mathcal{T}_\tau$, entonces M cumple con el inciso 2) del Teorema 2.4, por lo tanto M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo. □

El siguiente ejemplo nos muestra que el recíproco de este Corolario no es válido.

Ejemplo 2.6. Consideremos $\tau = \xi$, entonces los módulos ξ-cocríticos son los módulos simples, y los ξ-$\mathcal{A}$-módulos son los módulos M para los cuales $\xi(M)$ es un átomo en $R - tors$. Consideremos ahora $\mathbb{Z} - Mod$ y $\mathbb{Z}_p$ el anillo de los enteros módulo p, con p un número primo, $\mathbb{Z}_p$ es un ξ-$\mathcal{A}$-módulo y $E(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, $\xi(\mathbb{Z}_p) = \xi(\mathbb{Z}_{p^\infty})$, entonces $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\mathbb{Z}_p$ es ξ-cocrítico, pero $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es ξ-cocrítico.

Corolario 2.7. *Sea $\tau \in R - tors$ y $M \in \mathcal{F}_\tau$, son equivalentes:*
1) M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo.
2) Para cada $N' \subset N \subseteq M$ tales que $N/N' \in \mathcal{F}_\tau$ se tiene

$$\tau \vee \xi(N/N') = \tau \vee \xi(M)$$

3) Para cada $N' \subset N \subseteq M$ tales que $N/N' \notin \mathcal{T}_\tau$ se tiene

$$\tau \vee \xi(N/N') = \tau \vee \xi(M)$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] El resultado se sigue de la Proposición 2.3,4).

2) $\Rightarrow$ 1)] Sea $E \in \mathcal{F}_\tau$ tal que $Hom_R(N/N', E) = 0$ entonces $E \in \mathcal{F}_{\xi(N/N')}$ y

$$E \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{\xi(N/N')} = \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(N/N')} = \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(M)} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{\xi(M)}$$

por tanto $Hom_R(M, E) = 0$ y M es τ-$\mathcal{A}$-módulo.

1) $\Rightarrow$ 3)] Se tiene $\xi(N/N') \leq \xi(M)$ pues las clases de torsión hereditarias son cerradas bajo submódulos y cocientes, entonces $\tau \vee \xi(N/N') \leq \tau \vee \xi(M)$ y por ser M un τ-$\mathcal{A}$-módulo se tiene la igualdad.

3) $\Rightarrow$ 2)] Es claro. □

Dado un τ-$\mathcal{A}$-módulo, nos preguntamos qué comportamiento tiene para las teorías de torsión que son mayores o menores que τ, la siguiente Proposición nos da información importante acerca de esto.

Proposición 2.8. *Sea $\tau \in R - tors$, M un τ-$\mathcal{A}$-módulo, entonces:*
1) Para cada $\sigma \geq \tau$ tales que $M \in \mathcal{F}_\sigma$, se tiene que M es un σ-$\mathcal{A}$-módulo.
2) Sea $\sigma \in R - tors$ tal que $M \in \mathcal{T}_\sigma$ entonces M es un $(\sigma \wedge \tau)$-$\mathcal{A}$-módulo.

Demostración. 1) Como $R-tors$ es una retícula distributiva, en particular es modular, entonces se tiene el siguiente isomorfismo entre intervalos:

$$[\tau \wedge \xi(M), \xi(M)] \cong [\tau, \tau \vee \xi(M)]$$

si $\sigma \geq \tau$ y tal que $M \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces

$$[\sigma, \sigma \vee \xi(M)] \cong [\sigma \wedge \xi(M), \xi(M)] \subseteq [\tau \wedge \xi(M), \xi(M)] \cong [\tau, \tau \vee \xi(M)]$$

y como $\tau \vee \xi(M)$ es τ-átomo, entonces se tiene que $\sigma \vee \xi(M)$ es un σ-átomo.

2) Sea $\sigma \in R-tors$ tal que $M \in \mathcal{T}_\sigma$ y notemos que $\sigma \geq \xi(M)$, además tenemos la siguiente relación entre intervalos:

$$[\sigma \wedge \tau, (\sigma \wedge \tau) \vee \xi(M)] \cong [(\sigma \wedge \tau) \wedge \xi(M), \xi(M)] = [\tau \wedge \xi(M), \xi(M)]$$

y como

$$[\tau \wedge \xi(M), \xi(M)] \cong [\tau, \tau \vee \xi(M)]$$

y $\tau \vee \xi(M)$ es un τ-átomo, entonces $(\sigma \wedge \tau) \vee \xi(M)$ es un $(\sigma \wedge \tau)$-átomo. □

Veamos que la clase de τ-$\mathcal{A}$-módulos es cerrada bajo τ-cápsulas inyectivas.

Proposición 2.9. *Sea $M \in R-Mod$, $\tau \in R-tors$. Si M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces $E_\tau(M)$ es un τ-$\mathcal{A}$-módulo.*

Demostración. Por ser M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo tenemos $E_\tau(M) \in \mathcal{F}_\tau$, como $M \subseteq E_\tau(M)$ entonces $\tau \vee \xi(M) \leq \tau \vee \xi(E_\tau(M))$.

Consideremos ahora la sucesión exacta

$$0 \to M \to E_\tau(M) \to E_\tau(M)/M \to 0$$

luego,

$$M \in \mathcal{T}_{\xi(M)} \subseteq \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(M)} \text{ y } E_\tau(M)/M \in \mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(M)}$$

y como $\mathcal{T}_{\tau \vee \xi(M)}$ es cerrada bajo extensiones, entonces $E_\tau(M) \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(M)}$, lo cual implica $\xi(E_\tau(M)) \leq \tau \vee \xi(M)$ y esto nos da la desigualdad opuesta. □

Proposición 2.10. *Sea $\tau \in R-tors$, $M \in \mathcal{F}_\tau$ y $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de submódulos de M tal que:*

a) para todo $\alpha \in A$, K_α es un τ-$\mathcal{A}$-módulo.

b) para cualesquiera $\alpha, \beta \in A$, $\tau \vee \xi(K_\alpha) = \tau \vee \xi(K_\beta)$.

Entonces $\sum_{\alpha \in A} K_\alpha$ es un τ-$\mathcal{A}$-módulo.

Demostración. Como $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq M$ entonces $\sum_{\alpha \in A} K_\alpha \subseteq M \in \mathcal{F}_\tau$, y

$$\begin{aligned} \tau &< \tau \vee \xi(\sum_{\alpha \in A} K_\alpha) \\ &\leq \tau \vee \xi(\bigoplus_{\alpha \in A} K_\alpha) \\ &= \tau \vee (\bigvee_{\alpha \in A} \xi(K_\alpha)) \\ &= \bigvee_{\alpha \in A} (\tau \vee \xi(K_\alpha)) \\ &= \tau \vee \xi(K_\alpha) \end{aligned}$$

y esto es para toda α, es decir,

$$\tau \vee \xi(\sum K_\alpha) \leq \tau \vee \xi(K_\beta),\ \forall \beta \in A$$

por lo tanto $\sum_{\alpha \in A} K_\alpha$ es un τ-$\mathcal{A}$-módulo. □

Corolario 2.11. *Si $\tau \in R-tors$ y M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces $E(M)$ contiene un único τ-$\mathcal{A}$-módulo K máximo tal que $M \subseteq K$ y $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(K)$.*

Definición 2.12. Sea $\tau \in R-tors$ y $M \in R-Mod$, decimos que M es *τ-decisivo* si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y para cualquier $\sigma \in gen(\tau)$, $M \in \mathcal{F}_\sigma$ o $M \in \mathcal{T}_\sigma$.

Teorema 2.13. *Sea $\tau \in R-tors$ y M un τ-$\mathcal{A}$-módulo, entonces M es τ-decisivo.*

Demostración. Sea $\sigma \in gen(\tau)$ y supongamos que $t_\sigma(M) \neq 0$, por la Proposición 2.3,3) $t_\sigma(M)$ es un τ-$\mathcal{A}$-módulo y

$$\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(t_\sigma(M))$$

y como $\tau \vee \xi(t_\sigma(M)) \leq \sigma$ entonces $M \in \mathcal{T}_\sigma$. □

Notemos que no todo módulo τ-decisivo es un τ-$\mathcal{A}$-módulo:

Ejemplo 2.14. Considerando $\tau = \xi$ y $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros, se tiene que $\mathbb{Z}$ es τ-decisivo, pero $\mathbb{Z}$ no es τ-$\mathcal{A}$-módulo.

Proposición 2.15. *Sea $\tau \in R-tors$ y M, N módulos τ-decisivos, son equivalentes:*
1) $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M)$
2) $\chi(N) = \chi(M)$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(N)$ entonces $N \in \mathcal{T}_{\tau\vee\xi(M)}$ y como $N \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $N \notin \mathcal{F}_{\xi(M)}$, lo que implica

$$Hom_R(M, E(N)) \neq 0$$

así $M \notin \mathcal{T}_{\chi(N)}$; luego, como $\tau \leq \chi(N)$ y M es τ-decisivo entonces $M \in \mathcal{F}_{\chi(N)}$ y $\chi(N) \leq \chi(M)$.

Análogamente se obtiene $\chi(M) \leq \chi(N)$.

2) $\Rightarrow$ 1)] Como $\tau \leq \tau \vee \xi(N)$ y M es τ-decisivo, entonces $M \in \mathcal{F}_{\tau\vee\xi(N)}$ o $M \in \mathcal{T}_{\tau\vee\xi(N)}$; supongamos que

$$M \in \mathcal{F}_{\tau\vee\xi(N)} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{\xi(N)}$$

así $Hom_R(N, E(M)) = 0$ lo cual implica que $N \in \mathcal{T}_{\chi(M)} = \mathcal{T}_{\chi(N)}$, pero esto no puede pasar, por lo tanto $M \in \mathcal{T}_{\tau\vee\xi(N)}$, entonces

$$\tau \vee \xi(M) \leq \tau \vee \xi(N).$$

Y por simetría se obtiene la otra desigualdad.

□

Corolario 2.16. *Sea $\tau \in R-tors$ y M un τ-$\mathcal{A}$-módulo, entonces son equivalentes:*
1) $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(N)$
2) $\chi(M) = \chi(N)$

Demostración. Se sigue del Teorema 2.13 y la Proposición 2.15. □

Corolario 2.17. *Sea τ una teoría de torsión hereditaria y M un τ-$\mathcal{A}$-módulo, entonces:*
1) Para todo submódulo no nulo $N \subseteq M$, $\chi(N) = \chi(M)$.
2) Para todo submódulo $N \subseteq M$ τ-puro se tiene $\chi(M) = \chi(M/N)$.
3) $\chi(M)$ es un elemento irreducible en $R-tors$.

Demostración. 1) Sea $N \subseteq M$, como M es τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces N lo es y $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(N)$, por lo tanto $\chi(M) = \chi(N)$.

2) Sea $N \subseteq M$ con N τ-puro, entonces M/N es un τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(M/N)$ asi pues $\chi(M) = \chi(M/N)$.

3) Supongamos que σ, τ son teorías de torsión hereditarias tales que $\sigma \nleq \chi(M)$ y $\tau \nleq \chi(M)$, demostraremos que $\sigma \wedge \tau \nleq \chi(M)$.

Sea $m \in M$, $m \neq 0$, por hipótesis $\chi(M) = \chi(Rm)$, entonces $Rm \notin \mathcal{F}_\sigma$ y $Rm \notin \mathcal{F}_\tau$ por tanto al considerar la parte de torsión de M respecto a las teorías de torsión σ y τ se tiene $t_\tau(M) \subseteq_e M$ y $t_\sigma(M) \subseteq_e M$, entonces

$$t_{\tau\wedge\sigma}(M) = t_\tau(M) \cap t_\sigma(M) \neq 0 \Rightarrow M \notin \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$$

es decir, $\tau \wedge \sigma \nleq \chi(M)$ y $\chi(M)$ es irreducible. □

Diremos que un R-módulo M es un $\mathcal{A}$-*módulo* si existe $\tau \in R - tors$ tal que M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo. Observemos que todo módulo cocrítico es un $\mathcal{A}$-módulo. La siguiente Proposición nos da una caracterización interesante.

Proposición 2.18. *Sea $M \in R - Mod$, $M \neq 0$, son equivalentes:*
1) M es un $\mathcal{A}$-módulo.
2) M es un $\chi(M)$-$\mathcal{A}$-módulo.
3) $M \in \mathcal{T}_\tau$ para todo $\tau \in R - tors$ tal que $\chi(M) < \tau$.
4) Para todo $N \subseteq M$, $N \neq 0$, $\chi(M) \vee \xi(N) = \chi(M) \vee \xi(M)$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] Sea $\tau \in R - tors$ tal que M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo, $M \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $\tau \leq \chi(M)$ y $M \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$, por la Proposición 2.8,1) se tiene que M es un $\chi(M)$-$\mathcal{A}$-módulo.

2) $\Rightarrow$ 3)] Sea τ tal que $\chi(M) < \tau$, por ser M un $\chi(M)$-$\mathcal{A}$-módulo es $\chi(M)$-decisivo, entonces $M \in \mathcal{T}_\tau$.

3) $\Rightarrow$ 4)] Sean $N \subseteq M$, $N \neq 0$ y $\tau = \chi(M) \vee \xi(N)$, así $\chi(M) < \tau$ y por hipótesis $M \in \mathcal{T}_{\chi(M)\vee\xi(N)}$, entonces $\chi(M) \vee \xi(M) < \tau$ y por tanto $\chi(M) \vee \xi(N) = \chi(M) \vee \xi(M)$

4) $\Rightarrow$ 2)] Sea σ tal que $\chi(M) < \sigma \leq \chi(M) \vee \xi(M)$, entonces $t_\sigma(M) \neq 0$ y $\chi(M) \vee \xi(t_\sigma(M)) \leq \sigma \leq \chi(M) \vee \xi(M)$, pero por hipótesis los extremos son iguales,

asi pues $\sigma = \chi(M) \vee \xi(M)$ y M es un $\chi(M)$-$\mathcal{A}$-módulo.

2) $\Rightarrow$ 1)] Es evidente. $\square$

Corolario 2.19. *Sea $M \in R - Mod$ tal que $\chi(M)$ es un coátomo en $R - tors$ entonces M es un $\mathcal{A}$-módulo.*

Proposición 2.20. *Sea P un ideal primo de un anillo R, entonces $\chi(R/P)$ es irreducible.*

Demostración. Sean τ y σ teorías de torsión tales que

$$\tau \wedge \sigma \leq \chi(R/P)$$

sea K la τ-purificación de P en R y K' la σ-purificación de P en R; K y K' son ideales de R y por la Proposición 1.16

$$(K \cap K')/P \in \mathcal{T}_{\tau\wedge\sigma}$$

entonces $(K \cap K')/P \in \mathcal{T}_{\chi(R/P)}$ pero $(K \cap K')/P \subseteq R/P$.

Luego $(K \cap K')/P \in \mathcal{F}_{\chi(R/P)}$ con lo cual se tiene $K \cap K' = P$. Por otro lado también se tiene

$$KK' \subseteq K \cap K' = P$$

y por ser P primo $K \subseteq P$ o $K' \subseteq P$; es decir, $R/P \in \mathcal{F}_\tau$ o $R/P \in \mathcal{F}_\sigma$ o bien $\tau \leq \chi(R/P)$ o $\sigma \leq \chi(R/P)$.

Por lo tanto $\chi(R/P)$ es irreducible. $\square$

Proposición 2.21. *Sea J un ideal de un anillo R, son equivalentes:*
1) J es un ideal primo.
2) J contiene a todos los ideales de R que no son $\chi(R/J)$-densos en R.

Demostración. Primero supongamos que se cumple 1), y sea $\tau = \chi(R/J)$. Notemos que J no es τ-denso en R. Sea H ideal de R tal que no es τ-denso en R; asi pues, existe un morfismo no cero

$$\Phi : R/H \to E(R/J)$$

entonces

$$Im(\Phi) \cap R/J \neq 0 \text{ y } H \subseteq (0 : Im(\Phi) \cap R/J)$$

pues un elemento $x \in Im(\Phi) \cap R/J$ es de la forma $x = \Phi(\overline{y})$ con $\overline{y} \in R/J$ y si $h \in H$ entonces $hx = h\Phi(\overline{y}) = \Phi(\overline{hy}) = \Phi(\overline{0}) = 0$. Luego, por ser J un ideal primo $(0 : Im\Phi \cap R/J) = (0 : R/J) = J$.

Inversamente, supongamos que J contiene a todos los ideales de R que no son $\chi(R/J)$-densos y sean $H, K \subseteq R$ ideales tales que $HK \subseteq J$ y que J no contiene a ninguno de ellos; observemos que $H + J, K + J$ son $\chi(R/J)$-densos en R y por la Observación 1.6,3) $(H + J)(K + J)$ es $\chi(R/J)$-denso en R, pero

$$(H + J)(K + J) \subseteq J$$

y con esto se tiene que J es $\chi(R/J)$-denso en R, lo cual no sucede y por tanto J es ideal primo. $\square$

Proposición 2.22. *Sea R un anillo y P un ideal primo de R, entonces el R-módulo izquierdo R/P es un $\mathcal{A}$-módulo.*

Demostración. Demostraremos que R/P es un $\chi(R/P)$-$\mathcal{A}$-módulo.

Por la Proposición 2.18,4) basta ver que

$$\chi(R/P) \vee \xi(R/P) = \chi(R/P) \vee \xi(I/P)$$

donde I es un ideal izquierdo de R tal que $P \subset I$.

Sea $I/P \subseteq R/P$, $I/P \neq 0$ y sea $\tau = \chi(R/P) \vee \xi(I/P)$. Si demostramos que $R/P \in \mathcal{T}_\tau$ tendremos la igualdad

$$\chi(R/P) \vee \xi(R/P) = \chi(R/P) \vee \xi(I/P)$$

veamos que, en efecto, esto sucede.

Sea $J/P = t_\tau(R/P)$ y supongamos que $J \neq R$, así

$$R/J \in \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\chi(R/P)} \cap \mathcal{F}_{\xi(I/P)}$$

entonces J es un ideal bilateral de R que no es $\chi(R/P)$-denso, y por la Proposición anterior tenemos que $J = P$, lo cual no puede pasar, por lo tanto $R/P \in \mathcal{T}_\tau$. $\square$

Proposición 2.23. *Son equivalentes:*
1) R es un $\mathcal{A}$-módulo.
2) $\chi(R)$ es un coátomo en R-tors.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] Sea $\tau \in R-tors$ tal que $\chi(R) < \tau$, como R es un $\mathcal{A}$-módulo por la Proposición 2.18,3) se tiene $R \in \mathcal{T}_\tau$, entonces $\tau = \chi$ y por tanto $\chi(R)$ es un coátomo en $R - tors$.

2) $\Rightarrow$ 1)] Es evidente por el Corolario 2.19. □

Proposición 2.24. *Sea R un anillo primo, entonces $\chi(R)$ es un coátomo en $R-tors$.*

Observación 2.25. *En general no se cumple que si $\chi(R)$ es coátomo en $R - tors$ entonces es el único coátomo. Una condición necesaria y suficiente para que esto suceda es que R sea decisivo.*

Esto es, si $\chi(R)$ es el único coátomo entonces claramente R es decisivo. Si se tiene R decisivo y τ es tal que $\chi(R) \leq \tau \leq \chi$ entonces, si $R \in \mathcal{T}_\tau$ se tiene $\tau = \chi$ y si $R \in \mathcal{F}_\tau$ se tiene $\tau = \chi(R)$ y es el único coátomo pues si $\tau \neq \chi$, entonces $R \notin \mathcal{T}_\tau$, como R es decisivo $R \in \mathcal{F}_\tau$ y $\tau \leq \chi(R)$.

Lema 2.26. *Sean $\sigma, \tau \in R-tors$ entonces $t_\sigma(R) = t_\tau(R)$ si y sólo si $\sigma \in [\xi(t_\tau(R)), \chi(R/t_\tau(R))]$.*

Demostración. Primero supongamos que $\sigma, \tau \in R-tors$ son tales que $t_\sigma(R) = t_\tau(R)$, entonces $t_\tau(R) \in \mathcal{T}_\sigma$ con lo cual se tiene que $\xi(t_\tau(R)) \leq \sigma$, además

$$R/t_\tau(R) = R/t_\sigma(R) \in \mathcal{F}_\sigma$$

por lo tanto $\sigma \leq \chi(R/t_\tau(R))$.

Ahora supongamos

$$\sigma \in [\xi(t_\tau(R)), \chi(R/t_\tau(R))]$$

entonces $t_\tau(R) \subseteq t_\sigma(R)$ y como $\sigma \leq \chi(R/t_\tau(R))$ se tiene $R/t_\tau(R) \in \mathcal{F}_\sigma$, luego

$$t_\sigma(R)/t_\tau(R) \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_\sigma = 0$$

y así $t_\sigma(R) = t_\tau(R)$. □

Proposición 2.27. *Sea I un elemento máximo en el conjunto $\mathcal{C} = \{t_\tau(R) \mid \tau \in R - tors, \tau \neq \chi\}$ entonces $\chi(R/I)$ es coátomo en $R - tors$.*

Demostración. Si I es máximo en $\mathcal{C} = \{t_\tau(R) \mid \tau \in R - tors, \tau \neq \chi\}$ entonces existe $\tau \in R - tors$ tal que $t_\tau(R) = I$, sea $\sigma \in R - tors$ tal que $\chi(R/t_\tau(R)) < \sigma \leq \chi$ entonces por el Lema anterior se tiene $t_\tau(R) \subset t_\sigma(R)$ por lo tanto $t_\sigma(R) = R$ y con esto concluimos $\sigma = \chi$. □

Definición 2.28. Decimos que un anillo R es semiartiniano izquierdo si para todo R-módulo M, $M \neq 0$, se tiene que $zoc(M) \neq 0$; es decir, todo R-módulo contiene submódulos simples.

La siguiente Proposición nos da una caracterización de los anillos semiartinianos vía su retícula de teorías de torsión hereditarias.

Proposición 2.29. *Son equivalentes para un anillo R:*
1) R es semiartiniano izquierdo.
2) $\xi(R-simp)=\chi$
3) Para toda $\tau \in R-tors$, $\tau \neq \xi$, τ está generada por una familia de módulos simples.
4) La retícula $R-tors$ es de Boole.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] Tenemos que $\xi(R-simp) \leq \chi$, supongamos que se da la desigualdad estricta, entonces existe un R-módulo M no nulo tal que $M \in \mathcal{F}_{\xi(R-simp)}$, entonces

$$Hom_R(S, E(M)) = 0$$

para todo $S \in R-simp$, lo cual implica que

$$Hom_R(S, M) = 0$$

para todo $S \in R-simp$, entonces M no contiene submódulos simples, pero esto no puede suceder pues R es semiartiniano, por lo tanto $\xi(R-simp)=\chi$.

2) $\Rightarrow$ 3)] Sean $\tau \in R-tors$,$\tau \neq \xi$ y $X = \mathcal{T}_\tau \cap (R-simp)$. Observemos que X no es vacío.

Afirmamos que $\tau = \xi(X)$.

Como $X \subseteq \mathcal{T}_\tau$ entonces $\xi(X) \leq \tau$, si se diera la desigualdad estricta entonces existiría $M \in R-Mod$, $M \neq 0$, tal que

$$M \in \mathcal{F}_{\xi(X)} \cap \mathcal{T}_\tau$$

luego, por ser M $\xi(X)$-libre de torsión entonces M no contiene submódulos simples pertenecientes a X

$$i.e.\ Hom_R(S, E(M)) = 0 \text{ para todo } S \in X$$

por hipótesis $\chi = \xi(R{-}simp)$, entonces existe $S \in R{-}simp$ tal que $Hom_R(S, E(M)) \neq 0$ lo cual nos dice que M contiene un submódulo simple y como $M \in \mathcal{T}_\tau$ entonces ese simple pertence a X, lo cual es una contradicción. Así, concluimos que $\xi(X) = \tau$.

3) $\Rightarrow$ 1)] Sea M un R-módulo izquierdo, $M \neq 0$, por hipótesis existe $X \subseteq R-simp$ tal que $\xi(M) = \xi(X)$; entonces existe $S \in X$ tal que $Hom_R(S, E(M)) \neq 0$, por lo tanto M contiene submódulos simples.

$1, 2, 3)$ $\Rightarrow$ 4)] Sea $\tau \in R - tors$, $\xi < \tau < \chi$, por 3) existe $X \subseteq R - simp$ tal que $\tau = \xi(X)$. Sea $\tau' = \xi(R-simp\{X\})$ entonces $\tau \vee \tau' = \xi(R-simp) = \chi$ y $\tau \wedge \tau' = \xi$. Por lo tanto $R - tors$ es de Boole.

4) $\Rightarrow$ 2)] Sea $\tau = \xi(R - simp)$, si $\tau \neq \chi$ entonces existe $\sigma \in R - tors$ $\sigma \neq \xi$ tal que σ es complemento de τ y como σ no es ξ entonces existe $S \in R - simp$ tal que $S \in \mathcal{T}_\sigma$, así

$$\xi < \xi(S) \leq \tau \wedge \sigma = \xi$$

lo cual no puede suceder. Así $\tau = \chi$.

$\square$

Concluimos el capítulo con un ejemplo que nos muestra que el inverso de las Proposiciones 2.24 y 2.27 son falsos:

Ejemplo 2.30. Sea

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

Tenemos los ideales izquierdos de R:

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad I_1 \oplus I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix} \quad I_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & \lambda x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \right\}$$

Además notemos que los ideales mínimos son I_1, I_2 y los comprendidos entre ellos, los I_λ; los máximos son $I_1 \oplus I_2$ e I_3. Por lo que la retícula de ideales izquierdos de R queda:

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix} \arrow[dr, dash] & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix} \arrow[rr, dotted, dash, "I_\lambda"] \arrow[dr, dash] & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix} \arrow[dl, dash] \\
 & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &
\end{tikzcd}$$

Tenemos las siguientes observaciones:

1. $R = I_2 \oplus I_3$ y R es artiniano izquierdo.

2. Cada I_λ es sumando directo de $I_1 \oplus I_2$ y entonces proyectivo.

3. Los simples no isomorfos son $S_1 = I_1$ y $S_2 = R/(I_1 \oplus I_2)$.

4. I_1 es proyectivo y como $I_1 \oplus I_2 \subseteq_e R$ entonces si z es la parte singular, se tiene
$$z(S_2) = S_2$$

5. Como R es semiartiniano entonces toda $\tau \in R - tors$, $\tau \neq \chi$, es generada por una familia de simples, por lo que $R - tors = \{\xi, \xi(S_1), \xi(S_2), \chi\}$ y además $R - tors$ es una retícula de Boole.

6. Como $\chi(R) \in \{\xi, \xi(S_1), \xi(S_2), \chi\}$ y $\chi(R) \neq \xi(S_1)$, $\chi(R) \neq \chi$ y $\chi(R) \neq \xi$ entonces $\chi(R) = \xi(S_2)$ y así $\chi(R)$ es un coátomo en $R - tors$. Entonces la retícula $R - tors$ queda:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \chi \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \xi(S_1) \arrow[dr, dash] & & \xi(S_2) \arrow[dl, dash] \\ & \xi & \end{tikzcd}$$

7. ${}_RR$ no es decisivo pues para $\xi(S_1)$ se tiene $0 \neq t_{\xi(S_1)}(R) = I_1 \oplus I_2 \neq R$.

8. R no es un anillo primo pues $I_1 I_2 = 0$, con esto se tiene un ejemplo que el inverso de la Proposición 2.24 es falso.

9. Además como S_1 es proyectivo simple, S_1 es un ξ-$\mathcal{A}$-módulo y $\mathcal{T}_{\xi(S_1)}$ consiste de módulos no singulares pues son sumas directas de copias de S_1. Luego, $E(S_1)/S_1$ es un módulo singular que es de $\xi(E(S_1))$-torsión, entonces $\xi(S_1) < \xi(E(S_1))$ por tanto $E(S_1)$ no es un ξ-$\mathcal{A}$-módulo, y con esto vemos que la clase de τ-$\mathcal{A}$-módulos no es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

El recíproco de la Proposición 2.27 tampoco es cierto, pues para este anillo se tiene $\chi(R/\{0\}) = \chi(R)$ es un coátomo pero $\{0\}$ no es un elemento máximo en $\mathcal{C} = \{t_\tau(R) \mid \tau \in R - tors, \tau \neq \chi\}$.

Capítulo 3

Dimensión Atómica

Introducimos ahora el concepto de lo que es una filtración atómica y con él lo que es la dimensión atómica de un R-módulo y un anillo. Caracterizaremos la condición de la existencia de dimensión atómica en un anillo y demostraremos algunos teoremas más, haciendo uso de la rica estructura reticular que tenemos en $R-tors$.

Sea $\tau \in R-tors$, en [12] Simmons define una filtración a partir de τ en $R-tors$ como sigue:

1. $\alpha_0 = \tau$
2. Si i es un ordinal sucesor, entoces

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_{i-1} \vee \xi(\{M \mid M \text{ es un } \alpha_{i-1}\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo}\}) \\ &= \bigvee \{\sigma \in R-tors \mid \sigma \text{ es un átomo en } gen(\alpha_{i-1})\} \end{aligned}$$

3. Si i es un ordinal límite, entonces

$$\alpha_i = \bigvee \{\alpha_j \mid j < i\}$$

Luego, como $R-tors$ es un conjunto y esta filtración está indicada en los ordinales entonces existe un ordinal mínimo k tal que $\alpha_k = \alpha_{k+r}$ para todo ordinal r.

Definición 3.1. Sea M un R-módulo no nulo, decimos que M tiene *τ-dimensión atómica* igual a un ordinal h si M es de α_h-torsión pero no es de α_i-torsión para toda $i < h$.

Un anillo R tiene *τ-dimensión atómica izquierda* γ si tiene τ-dimensión atómica como R-módulo izquierdo.

Denotamos a la τ-dimensión atómica de un R módulo izquierdo M (si existe) como τ-$\mathcal{A}$ dim(M).

La ξ-dimensión atómica de un R-módulo es llamada simplemente dimensión atómica del módulo.

Observación 3.2. *Notemos que para un anillo R y una teoría de torsión hereditaria τ se tiene τ-$\mathcal{A}$ dim$(R) = \gamma$ si y sólo si $\alpha_\gamma = \chi$.*

Como consecuencia de la definición se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.3. *Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta en $R - Mod$ entonces*

$$\tau\text{-}\mathcal{A}\ dim(M) = sup\{\tau - \mathcal{A}\ dim(M'), \tau - \mathcal{A}\ dim(M'')\}$$

Si alguno de los lados existe.

Demostración. Supongamos que τ-$\mathcal{A}$ dim$(M) = i$, entonces

$$M \in \mathcal{T}_{\alpha_i} \text{ y } M \notin \mathcal{T}_{\alpha_j}\ \forall j < i$$

como las clases de torsión son cerradas bajo submódulos y cocientes se tiene $M', M'' \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$, entonces M', M'' ya son de torsión para alguna teoría de torsión en la filtración atómica, así, tomando el mínimo para el cual son de torsión M' y M'' tienen τ-dimensión atómica,

$$\text{sea } k = \sup\{\tau - \mathcal{A}\ dim(M'), \tau - \mathcal{A}\ dim(M'')\}$$

así $k \leq i$, luego, como $M', M'' \in \mathcal{T}_{\alpha_k}$ y las clases de torsión son cerradas bajo extensiones entonces $M \in \mathcal{T}_{\alpha_k}$, lo cual implica que $i \leq k$ y por lo tanto son iguales.

Suponiendo que M' y M'' tienen τ-dimensión atómica y usando un argumento similar se tiene lo deseado. □

Veamos algunas equivalencias para decir cuándo R tiene dimensión atómica.

Teorema 3.4. *Sea $\tau \in R - tors$, $\tau \neq \chi$, son equivalentes:*
1) *R tiene τ-$\mathcal{A}$ dim.*
2) *Para todo $\sigma, \sigma' \in gen(\tau)$, $\sigma < \sigma'$ existe un σ-$\mathcal{A}$-módulo M tal que $M \in \mathcal{T}_{\sigma'}$.*
3) *Para todo $\sigma \in gen(\tau)$ con $\sigma \neq \chi$*

$$\sigma = \bigwedge \{\chi(M) \mid \textit{ M es } \sigma\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo}\}$$

4) *Para todo* $\sigma \in gen(\tau)$ *si* $\sigma \neq \chi$ *existe un* σ-$\mathcal{A}$-*módulo.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] Sean $\sigma, \sigma' \in gen(\tau)$ tales que $\sigma < \sigma'$ y sea $\{\alpha_j\}$ la $\mathcal{A}$-filtración de τ en $R - tors$.

Entonces existe γ en los ordinales tal que $\alpha_\gamma = \chi$ y existe i en los ordinales mínimo con la propiedad de $\sigma' \wedge \alpha_i \nleq \sigma$.

Observemos que i no puede ser un ordinal límite pues si lo fuera dado que α_j no cumple la propiedad $\sigma' \wedge \alpha_j \nleq \sigma$ $\forall j < i$ entonces tampoco $\bigvee_{j<i} \alpha_j = \alpha_i$ lo cumpliría; observemos también que $\sigma' \wedge \alpha_0 = \tau \leq \sigma$ entonces $i \geq 1$.

Como $R - tors$ es una retícula modular:

$$[\sigma' \wedge \alpha_{i-1}, \sigma' \wedge \alpha_i] \cong [\alpha_{i-1}, \alpha_{i-1} \vee (\alpha_i \wedge \sigma')] =$$

$$[\alpha_{i-1}, \alpha_i \wedge (\alpha_{i-1} \vee \sigma')] \subseteq [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$$

Y por la descripción de la filtración atómica sabemos que α_i es el supremo de los átomos en $gen(\alpha_{i-1})$; luego, en la subretícula $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ todo elemento es supremo de una colección de átomos en $gen(\alpha_{i-1})$. Entonces todo elemento en $[\sigma' \wedge \alpha_{i-1}, \sigma \wedge \alpha_i]$ es supremo de una colección de átomos en $gen(\sigma \wedge \alpha_i)$, uno de esos átomos, digamos σ'' debe satisfacer que $\sigma'' \nleq \sigma$ porque $\sigma' \wedge \alpha_i \nleq \sigma$.

Sea $N \in \mathcal{T}_{\sigma''} - \mathcal{T}_\sigma$, y $M = N/t_\sigma(N)$, entonces $M \in \mathcal{F}_\sigma$ y como $\sigma' \wedge \alpha_{i-1} \leq \sigma$ tenemos $M \in \mathcal{F}_{\sigma' \wedge \alpha_{i-1}}$, as

$$M \in \mathcal{F}_{\sigma' \wedge \alpha_{i-1}} \cap \mathcal{T}_{\sigma'}$$

por la Proposición 2.3,2) M es un $(\sigma' \wedge \alpha_{i-1})$-$\mathcal{A}$-módulo, y por la Proposición 2.8,1) se tiene que M es un σ-$\mathcal{A}$-módulo.

2) $\Rightarrow$ 3)] Sean $\sigma \in gen(\tau)$, $\sigma \neq \chi$ y

$$\sigma' = \{\chi(M) \mid M \text{ es un } \sigma\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo}\}$$

entonces

$$\sigma \leq \sigma' \leq \chi$$

y si $\sigma < \sigma'$ existiría $M \in R-Mod$ tal que M es σ-$\mathcal{A}$-módulo y $M \in \mathcal{T}_{\sigma'}$ lo cual no puede pasar, entonces $\sigma = \sigma'$.

3) $\Rightarrow$ 4)] Sea $\sigma \in gen(\tau)$, $\sigma \neq \chi$, entonces podemos escribir a σ como

$$\sigma = \bigwedge \{\chi(M) \mid \text{M es } \sigma\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo}\}$$

por lo tanto existe $M \in R-Mod$ tal que M es un σ-$\mathcal{A}$-módulo.

4) $\Rightarrow$ 1)] Sea $\{\alpha_i\}$ la filtración atómica respecto a τ y sea k un ordinal tal que

$$\alpha_k = \alpha_{k+r} \text{ para todo ordinal } r.$$

Si $\alpha_k < \chi$ existiría M un R-módulo tal que M es α_k-$\mathcal{A}$-módulo y entonces $M \in \mathcal{T}_{\alpha_{k+1}} = \mathcal{T}_{\alpha_k}$ lo cual sería una contradicción.

$\square$

A continuación algunos resultados que son consecuencia de la existencia de dimensión atómica en un anillo.

Proposición 3.5. *Sea $\tau \in R-tors$ y supongamos que R tiene τ-$\mathcal{A}$ dim, entonces se cumple lo siguiente:*
1) Para todo R-módulo no nulo M, si $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces M contiene un submódulo que es $\chi(M)$-$\mathcal{A}$-módulo.
2) Para todo $\sigma \in gen(\tau)$.

$$\sigma = \tau \vee \xi(\{M \mid M \text{ es un } \mathcal{A}\text{-módulo y } M \in \mathcal{T}_\sigma\})$$

3) Para todo $\sigma \in gen(\tau)$, $\sigma \neq \chi$, σ es el ínfimo de una colección de elementos irreducibles en $R-tors$.

Demostración. 1) Sea $\{\alpha_i\}$ la filtración atómica de τ en $R-tors$. Sea $M \in \mathcal{F}_\tau$, $M \in R-Mod$, ahora, consideremos el mínimo de los ordinales tales que M no está en la clase libre de torsión del elemento de la filtración atómica indicado en ese ordinal, es decir

$$i = min\left\{j \in OR \mid M \notin \mathcal{F}_{\alpha_j}\right\}$$

observemos que i no es límite, $i \neq 0$ pues $\alpha_0 = \tau$ y $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $i \geq 1$.

Sea σ un átomo en $gen(\alpha_{i-1})$ tal que $M \notin \mathcal{F}_\sigma$ el cual existe por la elección de α_i; luego, $t_\sigma(M) \neq 0$, por la Proposición 2.3,2) $t_\sigma(M) \neq 0$ es un α_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo y como $\chi(M) \geq \alpha_{i-1}$ entonces por la Proposición 2.8,1) $t_\sigma(M)$ es un $\chi(M)$-$\mathcal{A}$-módulo.

2) Sean $\sigma \in gen(\tau)$ y

$$\sigma' = \tau \vee \xi(\{M|\ M \text{ es un } \mathcal{A}\text{-módulo y } M \in \mathcal{T}_\sigma\})$$

entonces $\tau \leq \sigma' \leq \sigma$, si se diera la desigualdad estricta $\sigma' < \sigma$ por el Teorema 3.4,2) existe un σ'-$\mathcal{A}$-módulo $M \neq 0$ tal que $M \in \mathcal{T}_\sigma$, así $M \in \mathcal{F}_{\sigma'}$, pero $M \in \mathcal{T}_{\sigma'}$ y esto no puede ser, por lo tanto $\sigma = \sigma'$.

3) Sea $\sigma \in gen(\tau)$ $\sigma \neq \chi$, entonces

$$\sigma = \bigwedge \{\chi(M) \mid \text{M es } \sigma\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo}\}$$

y como para cada σ-$\mathcal{A}$-módulo M, $\chi(M)$ es un elemento irreducible en $R - tors$ entonces σ es el ínfimo de una colección de elementos irreducibles.

□

Lema 3.6. *Sea $\tau \in R - tors$ y supongamos que $\{\chi(N_i)|\ i \in I\}$ es una familia de elementos distintos en $R - tors$, donde cada N_i es τ-$\mathcal{A}$-módulo, entonces $\bigwedge_{i \in I} \chi(N_i)$ es $\wedge$-irredundante.*

Demostración. Supongamos que $\bigwedge_{i \in I} \chi(N_i)$ no es $\wedge$-irredundante, entonces para alguna $j \in I$ se tiene

$$\chi(N_j) \geq \bigwedge_{k \in I - \{j\}} \chi(N_k)$$

sea $i \in I - \{j\}$, si $N_i \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(N_j)}$ entonces

$$\tau < \tau \vee \xi(N_i) \leq \tau \vee \xi(N_j)$$

$$\text{por lo tanto } \tau \vee \xi(N_i) = \tau \vee \xi(N_j)$$

$$\text{y así } \chi(N_i) = \chi(N_j)$$

lo cual es una contradicción pues $N_i \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(N_j)}$; por tanto $N_i \notin \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(N_j)}$.

Como N_i es τ-decisivo se tiene

$$N_i \in \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(N_j)} \subseteq \mathcal{F}_{\xi(N_j)}$$

$$\text{entonces } \chi(N_i) \geq \xi(N_j)$$

$$\text{y por lo tanto } \chi(N_j) \geq \bigwedge\nolimits_{i \in I - \{j\}} \chi(N_i) \geq \xi(N_j)$$

y esto no puede pasar, así, concluimos que $\bigwedge_{i \in I} \chi(N_i)$ es $\wedge$-irredundante. □

Proposición 3.7. *Sea $\tau \in R-tors$ y supongamos que R tiene τ-$\mathcal{A}$ dim. Entonces para $\sigma \in gen(\tau)$ son equivalentes:*
1) σ es un elemento irreducible en $R-tors$.
2) La retícula $gen(\sigma)$ contiene un único átomo.
3) $\sigma = \chi(M)$ para algún $\mathcal{A}$-módulo $M \in \mathcal{F}_\tau$.

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1)] Es evidente.

3) $\Rightarrow$ 2)] Sea $\lambda \in gen(\sigma)$, como $\lambda > \sigma = \chi(M)$, se tiene $t_\lambda(M) \neq 0$ y como $t_\lambda(M) \subseteq M$ con M un τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces

$$\sigma \vee \xi(M) = \sigma \vee \xi(t_\lambda(M))$$

así $\tau \vee \xi(M)$ es el único σ-átomo.

1) $\Rightarrow$ 3)] Sea

$$\mathcal{L} = \{\chi(M)|\ M \text{ es un } \sigma\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo }\}$$

por el Teorema 3.4,3) $\sigma = \bigwedge \mathcal{L}$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los elementos de $\mathcal{L}$ son distintos, en cuyo caso tenemos que $\bigwedge \mathcal{L}$ es $\wedge$-irredundante.

La irreducibilidad de σ con la $\wedge$-irredundancia de $\bigwedge \mathcal{L}$ implica que $\mathcal{L}$ es un conjunto unitario; es decir, $\mathcal{L} = \chi(M) = \sigma$. □

Teorema 3.8. *Sea $\tau \in R-tors$. Si R tiene τ-dimensión atómica entonces todo elemento $\sigma \in gen(\tau)$, $\sigma \neq \chi$ se descompone en forma única como ínfimo de una familia $\wedge$-irredundate de elementos irreducibles en $gen(\tau)$.*

Demostración. Sea $\sigma \in gen(\tau)$, $\sigma \neq \chi$ y sea

$$\mathcal{L} = \{\chi(M)|\ M \text{ es un } \sigma\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo}\}$$

por el Lema 3.6 $\bigwedge \mathcal{L}$ es $\wedge$-irredundante y por el Teorema 3.4,3) $\sigma = \bigwedge \mathcal{L}$.

Supongamos que $\mathcal{J}$ es otra familia de elementos irreducibles en $gen(\tau)$ cuyo ínfimo es $\wedge$-irredundante y tal que $\sigma = \bigwedge \mathcal{J}$. Veamos que $\mathcal{L} = \mathcal{J}$.

Sea $\pi \in \mathcal{J}$, entonces

$$\bigwedge(\mathcal{J} - \{\pi\}) > \sigma$$

y por el Teorema 3.4,2) existe un σ-$\mathcal{A}$-módulo $N \in \mathcal{T}_{\bigwedge(\mathcal{J}-\{\pi\})}$.

Ahora, si $t_\pi(N) \neq 0$ por la Proposición 2.3,3) se tendría

$$\sigma \vee \xi(t_\pi(N)) = \sigma \vee \xi(N)$$

$$\text{entonces } \pi \geq \sigma \vee \pi \geq \sigma \vee \xi(t_\pi(N)) = \sigma \vee \xi(N)$$

$$\text{y asi } N \in \mathcal{T}_\pi$$

lo cual no puede suceder, por lo tanto $N \in \mathcal{F}_\pi$ y esto implica que $\chi(N) \geq \pi$.

Por la Proposición anterior $gen(\pi)$ tiene un único átomo $\pi \vee \xi(N)$, entonces $\chi(N) = \pi$ o $\chi(N) \geq \pi \vee \xi(N)$.

Si sucede que $\chi(N) \geq \pi \vee \xi(N)$ entonces $\chi(N) \geq \xi(N)$ pero esto es una contradicción, asi que $\chi(N) = \pi \in \mathcal{L}$; y con esto concluimos que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{L}$.

La irredundancia de $\bigwedge \mathcal{L}$ nos da $\mathcal{J} = \mathcal{L}$.

$\square$

Capítulo 4

Dimensión Atómica y Dimensión de Gabriel

En este último capítulo veremos la relación entre la dimensión de Gabriel y la dimensión atómica, bajo qué condiciones coinciden y algunas consecuencias con los elementos de $R - tors$ bajo la existencia de estas dimensiones.

Finalmente daremos las definiciones de anillos definitivos y semidefinitivos izquierdos y, aunque no profundizaremos en su estudio veremos bajo qué condiciones son equivalentes.

Proposición 4.1. *Sea $\tau \in R - tors$. Denotemos por $\{\alpha_i\}$ y $\{\gamma_i\}$ a la filtración atómica y la filtración de Gabriel, respectivamente. Entonces para todo ordinal i se cumple $\gamma_i \leq \alpha_i$.*

Demostración. Por inducción trasfinita sobre los ordinales.

Sea i un ordinal.
Si $i = 0$ entonces $\gamma_0 = \tau = \alpha_0$.

Supongamos que $i > 0$ y $\gamma_j \leq \alpha_j$ $\forall j < i$.

Si i es límite, entonces

$$\gamma_i = \bigvee_{j<i} \gamma_j \leq \bigvee_{j<i} \alpha_j = \alpha_i$$

Si i es sucesor, se tiene $\gamma_{i-1} \leq \alpha_{i-1}$. Sea M un módulo γ_{i-1}-cocrítico, entonces es

γ_{i-1}-decisivo y como $\gamma_{i-1} \leq \alpha_{i-1}$ sucede que $M \in \mathcal{T}_{\gamma_{i-1}}$ o $M \in \mathcal{F}_{\gamma_{i-1}}$.

Si $M \in \mathcal{F}_{\gamma_{i-1}}$ entonces por la Proposición 2.8,1) M es un α_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo; luego, de la definición de α_i tenemos $M \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$. Si $M \in \mathcal{T}_{\gamma_{i-1}}$ entonces $M \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$ y

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \gamma_{i-1} \vee \xi(\{M \mid M \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-cocrítico}\}) \\ &\leq \alpha_{i-1} \vee \xi(\{M \mid M \text{ es un } \alpha_{i-1}\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo}\}) \\ &= \alpha_i\end{aligned}$$

□

La siguiente Proposición relaciona la dimensión de Gabriel y la dimensión atómica.

Proposición 4.2. *Sea $\tau \in R-tors$ y supongamos que $M \in R-Mod$ tiene τ-G dim. Entonces M tiene τ-$\mathcal{A}$ dim y*

$$\tau\text{-}\mathcal{A}\ dim(M) \leq \tau\text{-}G\ dim(M).$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.1. □

Proposición 4.3. *Sea $\tau \in R-tors$ y supongamos que para todo $M \in \mathcal{F}_\tau$, $M \neq 0$, M contiene un submódulo cocrítico. Entonces para todo $\sigma \in gen(\tau)$*

$$\sigma \vee \xi(\{M|\ M \text{ es } \sigma\text{-cocrítico}\}) = \sigma \vee \xi(\{M|\ M \text{ es } \sigma\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo}\})$$

Demostración. Si M es σ-cocrítico entonces es un σ-$\mathcal{A}$-módulo, y así $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

Por hipótesis M contiene un submódulo cocrítico C. Supongamos que C no es σ-cocrítico. Entonces existe un submódulo $0 \neq C' \subseteq C$ tal que $C/C'' \in \mathcal{F}_\sigma$.

Como M es σ-$\mathcal{A}$-módulo, C también lo es. Por el Corolario 2.17,2) se tiene $\chi(C/C') = \chi(C)$ y como C es cocrítico, es $\chi(C)$-cocrítico, entonces

$$C/C' \in \mathcal{T}_{\chi(C)} = \mathcal{T}_{\chi(C/C')}$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto C es σ-cocrítico.

Del lado opuesto, si $0 \neq C \subseteq M$ y M es un σ-$\mathcal{A}$-módulo, entonces $\sigma \vee \xi(C) = \sigma \vee \xi(M)$. □

Lema 4.4. *Sea $\tau \in R - tors$ y $\sigma \in gen(\tau)$, supongamos que R tiene τ-G dim, entonces todo módulo M no cero τ-libre de torsión contiene un submódulo $\chi(M)$-cocrítico.*

Demostración. Suponemos que R tiene τ-G dim, así, por la Proposición 1.21 existe C tal que es $\chi(M)$-cocrítico, entonces existe un morfismo no cero

$$f : C \to E(M)$$

y como C es $\chi(M)$-cocrítico, entonces éste es un monomorfismo, luego $Im(f) \cap M \subseteq M$ es $\chi(M)$-cocrítico. $\square$

A continuación damos condiciones para que un anillo con dimensión atómica tenga dimensión de Gabriel.

Teorema 4.5. *Sea $\tau \in R - tors$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) R tiene τ-G dim izquierda.
2) R tiene τ-$\mathcal{A}$ dim y todo módulo no cero τ-libre de torsión contiene un submódulo cocrítico.
3) R tiene τ-$\mathcal{A}$ dim y para todo $\sigma \in gen(\tau)$, $\sigma \neq \chi$ existen módulos cocríticos $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tales que

$$\sigma = \bigwedge_{\alpha \in I} \chi(C_\alpha)$$

4) R tiene τ-$\mathcal{A}$ dim izquierda y la filtración atómica coincide con la filtración de Gabriel de τ.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] El resultado se sigue de la Proposición 4.2 y el Lema anterior.

2) $\Rightarrow$ 3)] Sea $\sigma \in gen(\tau)$, $\sigma \neq \chi$; como R tiene τ-$\mathcal{A}$ dim entonces

$$\sigma = \bigwedge \{\chi(M) | \text{ es } \sigma\text{-}\mathcal{A}\text{-módulo}\}$$

por hipótesis todo σ-$\mathcal{A}$-módulo M contiene un submódulo C cocrítico, así $\chi(M) = \chi(C)$.

3) $\Rightarrow$ 4)] Sea $\sigma \in gen(\tau)$, $\sigma \neq \chi$ y sea M un σ-$\mathcal{A}$-módulo, existe una familia de módulos cocríticos $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tales que

$$\chi(M) = \bigwedge \chi(C_\alpha)$$

por la Proposición 3.7 la retícula $gen(\chi(M))$ contiene un único átomo, entonces $\chi(M) = \chi(C_\alpha)$ para alguna $\alpha \in I$.

Como C_α es $\chi(C_\alpha)$-cocrítico, entonces existe un submódulo $C'_\alpha \subseteq C_\alpha$ tal que C'_α es isomorfo a un submódulo de M, un argumento similar al de la prueba de la Proposición 4.3 demuestra que C'_α es σ-cocrítico y, por el Corolario 2.16,1) se tiene $\sigma \vee \xi(C'_\alpha) = \sigma \vee \xi(M)$.

De aquí se sigue que la filtración atómica y la de Gabriel coinciden.

4) $\Rightarrow$ 1)] Es claro.

□

Corolario 4.6. *Sea $M \in R-Mod$, $\tau \in R-tors$; supongamos que R tiene τ-G dim, entonces tiene τ-$\mathcal{A}$ dim y*

$$\tau\text{-}G\ dim(M) = \tau\text{-}\mathcal{A}\ dim(M)$$

Con el siguiente resultado describimos a los elementos irreducibles de $gen(\tau)$ en caso que R tenga τ-G dim izquierda.

Denotaremos por $R-sp$ al conjunto de teorías de torsión hereditarias $\chi(M)$, con M un módulo cocrítico, es decir:

$$R - sp = \{\chi(M)|\ M \text{ es cocrítico}\}$$

Proposición 4.7. *Sea $\tau \in R - tors$. Si R tiene τ-G dim izquierda, entonces*

$$R - irr \cap gen(\tau) = R - sp \cap gen(\tau)$$

Demostración. Si R tiene τ-G dim entonces tiene τ-$\mathcal{A}$ dim. Sea $\sigma \in R-irr\cap gen(\tau)$, por la Proposición 3.7,3) $\sigma = \chi(M)$ para algún $\mathcal{A}$-módulo $M \in \mathcal{F}_\tau$, como R tiene τ-G dim izquierda entonces M contiene un submódulo cocr ítico C, donde

$$\sigma = \chi(M) = \chi(C) \in R - sp \cap gen(\tau)$$

Con esto tenemos una contención.

Y ya sabemos que $R-sp\cap gen(\tau) \subseteq R-irr\cap gen(\tau)$ pues todo módulo cocrítico es un $\mathcal{A}$-módulo, todo $\mathcal{A}$-módulo es $\chi(M)$-$\mathcal{A}$-módulo y para cada $\sigma \in gen(\tau)$ si M es un σ-$\mathcal{A}$-módulo , $\chi(M)$ es un elemento irreducible en $R - tors$. □

Teorema 4.8. *Sea $\tau \in R - tors$, si R tiene τ-G dim izquierda, entonces todo $\sigma \in gen(\tau)$, $\sigma \neq \chi$ se descompone en forma única como ínfimo de una familia irredundante de elementos primos en $gen(\tau)$.*

Demostración. Se tiene con el Teorema 3.8 y la Proposición anterior. $\square$

Definición 4.9. Sea R un anillo, decimos que

1. R es un *anillo definitivo izquierdo* si todo R-módulo izquierdo contiene un submódulo cocrítico.

2. R es un *anillo semidefinitivo izquierdo* si todo elemento propio $\tau \in R - tors$ es ínfimo de un conjunto de teorías de torsión primas.

Los anillos semidefinitivos y definitivos son definidos y estudiados por Golan en [7].

Observación 4.10. *Los anillos con dimensión de Gabriel izquierda son anillos definitivos izquierdos y todo anillo definitivo izquierdo es semidefinitivo izquierdo.*

El siguiente resultado nos muestra que, en presencia de la dimensión atómica, los conceptos de dimensión de Gabriel, anillo definitivo y semidefinitivo, son equivalentes.

Teorema 4.11. *Sea R un anillo. Son equivalentes:*
1) R tiene dimensión de Gabriel izquierda.
2) R tiene dimensión atómica izquierda y R es definitivo izquierdo.
3) R tiene dimensión atómica izquierda y R es semidefinitivo izquierdo.
4) R tiene dimensión atómica izquierda y la filtración atómica y de Gabriel en $R - tors$ coinciden.

Demostración. Se sigue del Teorema 4.5, tomando $\tau = \xi$. $\square$

Con los siguientes ejemplos veremos anillos con dimensión atómica pero sin dimensión de Gabriel y que en la retícula $R - tors$ no necesariamente existen coátomos.

Ejemplo 4.12. Sea K un campo y R la K-álgebra generada por $\{x_i\}_I$, $I = [0, 1]$, con el producto en R definido como:

$$x_i x_j = \begin{cases} x_{i+j} & i + j < 1 \\ 0 & i + j \geq 1 \end{cases}$$

Este anillo es estudiado por Viola-Prioli y Viola-Prioli en [14]. Notemos lo siguiente:

i) R es un K-espacio vectorial y sus elementos son de la forma:

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{i_r} x_{i_r}$$

$\alpha_{i_r} \in K$, $i_r \in I$.

ii) $x_1 = 0$, $x_0 = 1$.

iii) R es un anillo conmutativo.

Veamos la descripción de los ideales de R. Las demostraciones detalladas de las afirmaciones que haremos pueden consultarse en [3].

Consideremos

$$M = \langle \{x_i \,|\, i > 0\} \rangle = \sum_{i>0} R x_i$$

Entonces:

i) M está contenido propiamente en R pues no contiene unidades.

ii) M es ideal máximo.

iii) M es idempotente.

iv) M es nilideal.

Luego, para cada $i \in (0,1]$ tenemos los ideales

$$C_i = \{x_j u \,|\, j > i\} \text{ y } A_i = \{x_j u \,|\, j \geq i\}$$

De aqui:

i) C_i, A_i son nilpotentes.

ii) Si $0 < i < i' < 1$ entonces $0 \neq C_{i'} \subset A_{i'} \subset C_i \subset A_i \neq R$.

iii) $C_0 = M$ y $A_0 = R$.

Así, los ideales de R son $\{0, R, M, C_i, A_i\}$ con $i > 0$. Y tenemos las siguientes observaciones:

i) Si $0 < i < 1$ entonces A_i / C_i es simple.

ii) Si $0 < i < i' < 1$ entonces $C_{i'}/A_i$ y $A_{i'}/A_i$ no son simples, más aun, el soclo de ambos es cero.

iii) M es el único ideal máximo de R.

De esto tenemos que los filtros de Gabriel de R son tres: $\mathcal{G}_1 = \{R\}$, $\mathcal{G}_2 = \{R, M\}$, $\mathcal{G}_3 = \{R, M, C_i, A_i, 0 \,|\, i > 0\}$. Luego, dado que cada filtro de Gabriel tiene asociada una teoría de torsión, se tiene que $R - tors$ está formada por ξ, $\xi(R/M)$ y χ dadas por $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_3$ respectivamente. Entonces R tiene dimensión atómica.

Afirmación: $\xi(R/M)$ no tiene módulos cocríticos.

Demostración. Supongamos que existe N que es $\xi(R/M)$-cocrítico, entonces hay un cíclico Rx que es $\xi(R/M)$-cocrítico, y $Rx \cong R/(0 : x)$. Veremos que R/I no es cocrítico para todo ideal ${}_RI$. Como $I \neq R$ entonces:

i) Si $I = M$ se tiene $R/I = R/M \in \mathcal{T}_{\xi(R/M)}$, por lo tanto R/I no es $\xi(R/M)$-cocrítico.

ii) Si $I = C_i$ entonces R/C_i contiene un simple que es $A_i/C_i \cong R/M$ de donde $t_{\xi(R/M)}(R/I) \neq 0$, por tanto R/I no es $\xi(R/M)$-cocrítico.

iii) Si $I = A_i$ entonces $R/A_i \in \mathcal{F}_{\xi(R/M)}$, porque no contiene simples, pero si $0 < s < i$ entonces $(R/A_i)/(A_s/A_i) \cong R/A_s \in \mathcal{F}_{\xi(R/M)}$. Por lo tanto R/I no es $\xi(R/M)$-cocrítico.

$\square$

Entonces R no tiene dimensión de Gabriel.

Para un anillo R, $B(R)$ denotará la retícula de idempotentes centrales de R.

Ejemplo 4.13. Sea $R = \mathbb{Z}_2^{\aleph_0}/\mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)}$ y sea Q el anillo máximo de cocientes de R. Entonces:

i) $B(Q)$ es la completación de Dedekind-MacNeille de $B(R)$. (Consultar sección A.2 del apéndice y [2], [13])

ii) $B(R)$ no tiene átomos, entonces $B(Q)$ no tiene átomos.(Ver [6]. sección 21) *iii*) Existe el siguiente isomorfismo entre retículas:

$$gen(\tau_g(R)) \cong gen(\tau_g(Q)) \cong B(Q)$$

donde $\tau_g(R)$ y $\tau_g(Q)$ denotan las teorías de torsión de Goldie de R y Q respectivamente. Para detalles ver Raggi y Ríos en [10], [11].

En consecuencia de *i*) y *ii*) se tiene que $gen(\tau_g(R))$ y $gen(\tau_g(Q))$ no tienen átomos. Entonces R y Q no tienen dimensión atómica, por el Teorema 3.4 como $gen(\tau_g(R))$ es una retícula de Boole, entonces tampoco tiene coátomos. Por lo tanto $R-tors$ no es una retícual coatómica.

Ejemplo 4.14. Ya vimos que si R es primo entonces $\chi(R)$ es un coátomo en $R-tors$, así R es un $\chi(R)$-$\mathcal{A}$-módulo. Si R es un dominio que no cumple la condición de Ore izquierda entonces no tiene módulos $\chi(R)$-cocríticos, y por tanto R no tiene dimensión de Gabriel. Veamos que esto en efecto sucede.

Sea R un dominio que no cumple la condición de Ore por la izquierda, supongamos que existe C un módulo $\chi(R)$-cocrítico, y consideremos un morfismo no cero $f \in Hom_R(C, E(R))$, entonces f es monomorfismo; luego $Im(f) \cap R \neq 0$ es un módulo $\chi(R)$-cocrítico, sea $N = Im(f) \cap R$ y $x, y \in R$ tales que $x \neq y$, entonces $Nx \neq 0$ y $Ny \neq 0$ por ser R un dominio, luego como N es cocrítico entonces es uniforme, así $Nx \cap Ny \neq 0$, es decir, existen $s, t \in N$ tales que $sx = ty \neq 0$ pero esto no puede suceder porque R no cumple la condición de Ore por la izquierda, entonces $\chi(R)$ no tiene módulos cocríticos. Veamos un ejemplo explícito.

Sea R un anillo con división y $\rho : R \to R$ un endomorfismo no suprayectivo, consideramos

$$R[y, \rho] = \{a_0 + ya_1 + ... + y^n a_n \,|\, a_i \in R\}$$

con las siguientes operaciones:

$$(a_0 + ya_1 + ... + y^n a_n) + (b_0 + yb_1 + ... + y^n b_n) = (a_0 + b_0) + y(a_1 + b_1) + ... + y^n(a_n + b_n)$$

Y la multiplicación de polinomios inducida por la relación:

$$ay = y\rho(a)$$

$$ay^k = y\rho^k(a)$$

Lema 4.15. *Sea $\rho : R \to R$ un endomorfismo inyectivo sobre un anillo R y sea $S = R[y, \rho]$. Si $\{t_i \,|\, i \in I\} \subseteq R$ es linealmente independiente (izquierdo) sobre $\rho(R)$ entonces $\{yt_i\} \subseteq {}_SS$ es linealmente independiente sobre S.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} f_i(y_i t_i) = 0$ con $f_i \in S$, entonces podemos escribir a los f_i como $f_i = \sum_{j=1}^{m} y^j a_{ij}$ con $a_{ij} \in R$, entonces

$$\begin{aligned} 0 =& \big(\sum_{j=1}^{m} y^j a_{ij}\big)\big(\sum_{i=1}^{n} y_i t_i\big) \\ =& \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} y^{j+i} \rho(a_{ij}) t_i \end{aligned}$$

de aquí: $\sum_{j=1}^{m} \rho(a_{ij}) t_i = 0$ entonces $\rho(a_{ij}) = 0$, por lo tanto $f_i = 0$ para toda i. Así $\{yt_i\}$ es linealmente independiente. $\square$

Si ρ es un endomorfismo no suprayectivo sobre un anillo con divisón R y $t \in R - \rho(R)$ entonces $\{1, t\}$ es linealmente independiente (izquierdo) sobre $\rho(R)$ y por el Lema anterior $\{y, yt\}$ es linealmente independiente sobre $R[y, \rho] = S$, es decir, S no cumple la condición de Ore por la izquierda y por lo tanto no tiene módulos $\chi(S)$-cocríticos.

Apéndice A

A.1. Retículas Modulares

Sea L un conjunto, $\leq$ denotará una relación de orden parcial sobre L. Pondremos $a < b$, $a, b \in L$ si $a \leq b$ y $a \neq b$. Usaremos $a \vee b = sup\{a, b\}$ y $a \wedge b = inf\{a, b\}$. Si $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq L$ el ínfimo y el supremo de A los denotaremos por:

$$\text{ínf}(A) = \bigwedge_{x \in A} x = \bigwedge A$$

$$\sup(A) = \bigvee_{x \in A} x = \bigvee A$$

Definición A.1. Sea $(L, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, diremos que L es una *retícula* si para cualesquiera dos elementos $a, b \in L$, $a \vee b$ y $a \wedge b$ están en L. Diremos que L es una *retícula completa* si para cualquier $A \subseteq L$, se tiene $inf(A) \in L$ y $sup(A) \in L$.

Observemos que para cualquier retícula $(L \leq)$ se cumple que para cada $a, b, c \in L$

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Si se cumplen también las desigualdades inversas, es decir, si

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

diremos que la retícula es *distributiva*.

Definición A.2. Una retícula $(L, \leq)$ es *modular* si para cada $a, b, c \in L$ tales que $a \leq b$ se tiene $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$. Notemos que toda retícula distributiva es modular.

Un subconjunto $L' \subseteq L$ es una *subretícula* de L si para cada $a, b \in L'$ se tiene $a \wedge b \in L'$, $a \vee b \in L'$.

Si L y M son conjuntos parcialmente ordenados, una función $f : L \to M$ es *creciente (estrictamente creciente)* si para $a \leq b \in L$ se tiene $f(a) \leq f(b)$ ($a < b$ implica $f(a) < f(b)$).

Un *morfismo de retículas* $\varphi : L \to M$ es una función tal que si $a, b \in L$ entonces $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$ y $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$. Si para $\varphi : L \to L'$ un morfismo de retículas existe $\varphi' : L' \to L$ otro morfismo de retículas tal que $\varphi \circ \varphi' = 1_{L'}$ y $\varphi' \circ \varphi = 1_L$ es llamado *isomorfismo de retículas*, en este caso diremos que las retículas L y L' son *isomorfas*, $L \cong L'$.

Si $(L, \leq)$ es una retícula con $a, b \in L$ tales que $a \leq b$ denotaremos por

$$[a, b] = \{x \in L | a \leq x \leq b\}$$

a dicho conjunto que es una subretícula con el orden parcial inducido, le llamaremos *intervalo.*

Proposición A.3. *Sea $(L, \leq)$ una retícula modular. Para cualesquiera $a, b \in L$ los intervalos $[a \wedge b, a]$ y $[b, a \vee b]$ son isomorfos.*

Demostración. Sean

$$\varphi : [a \wedge b, a] \to [b, a \vee b]$$
$$\varphi(x) = x \vee b$$

$$\vartheta : [b, a \vee b] \to [a \wedge b, a]$$
$$\vartheta(y) = y \wedge a.$$

Ahora, sea $x \in [a \wedge b, a]$ entonces

$$(\vartheta \circ \varphi)(x) = \vartheta(\varphi(x)) = \vartheta(x \vee b) = (x \vee b) \wedge a$$

y como $x \leq a$ y L es modular se tiene $(x \vee b) \wedge a = x \vee (b \wedge a) = x$. Sea $y \in [b, a \vee b]$, tenemos

$$(\varphi \circ \vartheta)(y) = \varphi(\vartheta(y)) = \varphi(y \wedge a) = (y \wedge a) \vee b$$

luego $b \leq y$ y L es modular, asi $(y \wedge a) \vee b = y \wedge (a \vee b) = y$.

Veamos que, en efecto φ y ϑ son morfismos reticulares:

$$\varphi(x \vee x') = (x \vee x') \vee b = (x \vee b) \vee (x' \vee b) = \varphi(x) \vee \varphi(x')$$

$$\varphi(x \wedge x') = (x \wedge x') \vee b \leq (x \vee b) \wedge (x' \vee b) = \varphi(x) \wedge \varphi(x')$$

y si $\varphi(z) \leq \varphi(x) \wedge \varphi(x')$ para alguna z, entonces $\varphi(z) \leq \varphi(x)$ y $\varphi(z) \leq \varphi(x')$, luego

$$\vartheta(\varphi(z)) \leq \vartheta(\varphi(x)) \text{ y } \vartheta(\varphi(z)) \leq \vartheta(\varphi(x'))$$

entonces $z \leq x$ y $z \leq x'$, es decir $z \leq x \wedge x'$, por tanto $z \leq \varphi(x \wedge x')$, así $\varphi(x \wedge x')$ es la más grande de las cotas inferiores y por lo tanto $\varphi(x \wedge x') = \varphi(x) \wedge \varphi(x')$. Así tenemos que φ es morfismo reticular y la prueba para ϑ es análoga.

□

Si $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, diremos que L es un *conjunto dirigido* si es tal que para cualquier par de elementos $x, x' \in L$ existe $z \in L$ tal que $x \leq z$ y $x' \leq z$.

Un elemento $a \in L$ es *el elemento mayor de* L si para todo $x \in L$ se tiene $a \geq x$ y un elemento $b \in L$ es *el elemento menor de* L si para todo $x \in L$ $x \geq b$. A los elementos mayor y menor de L los denotaremos respectivamente por $\underline{1}$ y $\underline{0}$.

Observemos que toda retícula completa $(L, \leq)$ tiene elemento mayor y elemento menor, a saber $\underline{1} = \bigvee L$ y $\underline{0} = \bigwedge L$.

Sea $(L, \leq)$ una retícula con $\underline{0}$ y $\underline{1}$. Si $a \in L$, diremos que $b \in L$ es un *complemento* de a en L si $a \vee b = \underline{1}$ y $a \wedge b = \underline{0}$. Diremos que una retícula es *complementada* si cada elemento tiene complemento.

Proposición A.4. *Sea L una retícula modular complementada, entonces todo intervalo en L es complementado.*

Demostración. Sean $a, b \in L$, con $a \leq b$ y $d \in [a, b]$ y supongamos que d tiene un complemento $c \in L$, entonces por modularidad se tiene $a \wedge (c \vee b) = b \vee (a \wedge c)$, afirmamos que éste es complemento para d en $[a, b]$, en efecto, pues

$$\begin{aligned} d \wedge (a \vee (c \wedge b)) &= a \vee (d \wedge (c \wedge b)) \\ &= a \vee ((d \wedge c) \wedge b) \\ &= a \vee (\underline{0} \wedge b) \\ &= a \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d \vee (b \wedge (a \vee c)) &= b \wedge (d \vee (a \vee c)) \\ &= b \wedge ((d \vee c) \vee a) \\ &= b \wedge (\underline{1} \vee a) \\ &= b. \end{aligned}$$

□

La siguiente Proposición nos muestra que la modularidad de L depende de la propiedad de unicidad de complementos relativos.

Proposición A.5. *La retícula L es modular si y sólo si en todo intervalo I de L se cumple la siguiente propiedad:*
Si $c \in L$ tiene dos complementos, $a, b \in I$ tales que $a \leq b$ entonces $a = b$.

Demostración. Supongamos que L es modular, entonces todo intervalo de L lo es, así pues, supongamos sin pérdida de generalidad que $I = L$, entonces:

$$b = b \vee \underline{1} = b \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c) = a \vee \underline{0} = a$$

Luego, sean $a, b, c \in L$ tales que $a \leq b$, entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$a_1 = (c \wedge b) \vee a \leq (c \vee a) \wedge b = a_2$$

entonces

$$a_1 \wedge c = ((c \wedge b) \vee a) \wedge c \geq (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = c \wedge b$$

y como $a_1 = (c \wedge b) \vee a \leq b$ se tiene

$$a_1 \wedge c = c \wedge b$$

También,

$$a_2 \wedge c = ((c \vee a) \wedge b) \wedge c = ((c \vee a) \wedge c) \wedge (b \wedge c) = b \wedge c$$

Por otro lado

$$a_1 \vee c = ((c \wedge b) \vee a) \vee c = a \vee c$$

y

$$a_2 \vee c = ((c \vee a) \wedge b) \vee c \leq ((c \vee a) \vee c) \wedge (b \vee c) = a \vee c$$

y como $a \leq a_2 = (c \vee a) \wedge b$ se tiene $a_2 \vee c = a \vee c$; es decir, a_1 y a_2 son complementos de c en $[b \wedge c, a \vee c]$ y como $a_1 \leq a_2$ entonces son iguales y por tanto la retícula L es modular.

□

Proposición A.6. *Todo elemento en una retícula distributiva tiene a lo más un complemento.*

Demostración. Supongamos que L es distributiva con $\underline{0}$ y $\underline{1}$ y para $a \in L$ existen dos complementos $b, c \in L$, entonces:

$$c = c \wedge (a \vee b) = (a \wedge c) \vee (a \wedge c) = b \wedge c$$

así $c \leq b$, luego, por simetría se tiene $b \leq c$ y por tanto $b = c$. □

Definición A.7. Diremos que un elemento a en una retícula $(L, \leq)$ es $\wedge$-*irreducible* si para cualesquiera $x, y \in L$ tales que $a = x \wedge y$ se tiene $a = x$ o $a = y$. Diremos que es $\vee$-*irreducible* si para cualesquiera $x, y \in L$ tales que $a = x \vee y$ se tiene $a = x$ o $a = y$.

Un elemento $\bigwedge_{i \in I} a_i$, con I un conjunto finito es $\wedge$-*irredundante* si para cada $i \in I$ se tiene

$$\bigwedge_{i \in I} a_i \neq \bigwedge_{j \in I} \{a_j | j \neq i\}$$

Definición A.8. Una retícula $(L, \leq)$ es *continua superiormente* (o verifica la condición $AB5$) si es completa y para cada subconjunto dirigido $A \subseteq L$ y cada $a \in L$ se tiene

$$a \wedge (\bigvee_{x \in A} x) = \bigvee_{x \in A} (a \wedge x)$$

Definición A.9. Un elemento c en una retícula L es *compacto* si siempre que $c \leq \bigvee_{d \in D} d$ para un subconjunto dirigido $D \subseteq L$ entonces existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$.

Una retícula L es *compacta* si $\underline{1}$ es un elemento compacto y es *compactamente generada* si todo elemento en L se puede escribir como supremo de una colección de elementos compactos.

Proposición A.10. *Toda retícula compactamente generada es superiormente continua.*

Demostración. Supongamos que L es compactamente generada y sea $D \subseteq L$ un conjunto dirigido, para cada $a \in L$ se tiene

$$\bigvee_D (a \wedge d) \leq a \wedge (\bigvee_D d)$$

veamos que se cumple la desigualdad opuesta. Basta ver que $c \leq \bigvee_D (a \wedge d)$ para cada elemento c compacto tal que $c \leq a \wedge (\bigvee_D d)$.

Si $c \leq \bigvee_D d$ entonces existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$, lo cual implica que $c \leq a \wedge d_0$ y así $c \leq \bigvee_D (a \wedge d)$. $\square$

Definición A.11. Sea L una retícula, un elemento $a \in L$ es un *átomo* si cada que $b \leq a$ implica $b = a$ o $b = \underline{0}$. L es *localmente atómica* si todo elemento en L se puede escribir como supremo de una colección de átomos.

Proposición A.12. *Si L es localmente atómica, superiormente continua y modular entonces es complementada.*

Demostración. Sea $a \in L$, con $a \neq \underline{0}$, $a \neq \underline{1}$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{S} = \{(s_i)_I | s_i \text{ es un átomo, y } a \wedge (\bigvee_I s_i) = \underline{0}\}$$

Observemos que este conjunto no es vacío. Supongamos que $\mathcal{S} = \emptyset$, entonces para todo átomo s_i se tiene que $s_i = a \wedge s_i \neq 0$, entonces $a = \bigvee s_i$, pero como L es localmente atómica entonces $a = \bigvee s_i = \underline{1}$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\mathcal{S}$ no es vacío. Y si $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{S}$ entonces como L es superiormente continua $\bigvee \mathcal{C} \in \mathcal{S}$. Así, por el Lema de Zorn podemos hallar una familia máxima de átomos $(s_i)_I$ tales que $a \wedge (\bigvee_I s_i) = \underline{0}$. Sea $c = \bigvee_I s_i$, afirmamos que c es un complemento para a. Basta demostrar que para todo átomo $s \in L$, $s \leq a \vee c$ (pues $\underline{1}$ se escribe como supremo de una colección de átomos). Supongamos que $s \in L$ es un átomo tal que $s \nleq a \vee c$, entonces $s \wedge (a \vee c) = \underline{0}$, y por modularidad tenemos:

$$a \wedge (c \vee s) \leq (a \vee c) \wedge (c \vee s) = ((a \vee c) \wedge s) \vee c = c$$

entonces $a \wedge (c \vee s) \leq a \wedge c = \underline{0}$, lo cual es una contradicción pues la familia $(s_i)_I$ es máxima en $\mathcal{S}$, por tanto se tiene $\underline{1} \leq a \vee c$, es decir $a \vee c = \underline{1}$. $\square$

Teorema A.13. *Las siguientes condiciones son equivalentes para L una retícula modular:*
1) L es compactamente generada y localmente atómica.
2) L es compactamente generada y complementada.
3) L es superiormente continua y localmente atómica.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] Se sigue de las Proposiciones A.10 y A.12.

2) $\Rightarrow$ 3)] Si L es compactamente generada entonces es superiormente continua por A.10, como L es complementada basta ver que si $c \in L$ es un elemento compacto entonces existe un átomo a tal que $a \in [0, c]$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{B} = \{a \in L \,|\, a < c\}$, entonces $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y si $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{B}$ entonces $\bigvee \mathcal{C} \in \mathcal{B}$, pues si $c \leq \bigvee \mathcal{C}$ entonces como c es compacto existe $a_0 \in \mathcal{C}$ tal que $c \leq a_0$ pero $a_0 \in \mathcal{B}$ lo cual es una contradicción, por lo tanto toda cadena tiene cota superior en $\mathcal{B}$. Luego, aplicando el Lema de Zorn, sea a un elemento máximo en $\mathcal{B}$ y b un complemento para a en L, entonces $c \wedge b$ es complemento de a en $[0, c]$, en efecto, pues

$$(c \wedge b) \vee a = c \wedge (b \vee a) = c \wedge \underline{1} = c$$

$$(c \wedge b) \wedge a = c \wedge (b \wedge a) = \underline{0}$$

y como $c \wedge b$ es complemento de a un máximo en $[0, c]$ entonces $c \wedge b$ es átomo, lo cual concluye la prueba.

3) $\Rightarrow$ 1)] Es suficiente demostrar que si una retícula L es superiormente continua, entonces todo átomo es compacto. Supongamos pues que $a \in L$ es un átomo y sea $D \subseteq L$ un conjunto dirigido de tal que $a \leq \bigvee_D d$. Si $a \nleq d$ para cada $d \in D$ entonces $a \wedge d = 0$, así $a = a \wedge (\bigvee_D d) = \bigvee_D (a \wedge d) = 0$ lo cual no puede suceder. $\square$

A.2. Retículas de Boole

En esta sección veremos algunos resultados usados en el ejemplo 4.13.

A una retícula complementada y distributiva (con $\underline{0}$ y $\underline{1}$) le llamaremos *retícula de Boole*. Si L es una retícula de Boole, entonces para cada elemento $a \in L$, a^* denotará al único complemento de a en L.

La siguiente Proposición nos da una caracterización de estas retículas.

Proposición A.14. *Sea L una retícula, la siguientes propiedades son equivalentes:*
1) L es una retícula de Boole.
2) Cada $a \in L$ tiene un único complemento a^*, y $a \wedge b = 0$ si y sólo si $b \leq a^*$.

Demostración. Supongamos que L es de Boole, entonces todo $a \in L$ tiene un único complemento a^* en L. Luego, si $b \leq a^*$ entonces $a \wedge b \leq a \wedge a^* = 0$. Y si $b \in L$ es tal que $a \wedge b = 0$ entonces

$$b = b \wedge \underline{1} = b \wedge (a \vee a^*) = (b \wedge a) \vee (b \wedge a^*) = b \wedge a^*$$

entonces $b \leq a^*$.

Ahora, supongamos que se cumplen las condiciones de 2), primero notemos que $a = a^{**}$ para toda $a \in L$.

Sean $a, b \in L$ entonces un elemento $x \in L$ satisface $a \wedge x \leq b$ si y sólo si $a \wedge x \wedge b^* = 0$. Entonces existe un elemento máximo con la propiedad $a \wedge x \leq b$, a saber $x = (a \wedge b^*)^*$ al cual denotamos por $b : a$.

Luego, sean $a, b, c \in L$ arbitrarios y sea $d = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$, como $a \wedge c \leq d$ y $b \wedge c \leq d$ entonces $a \leq d : c$ y $b \leq d : c$, lo cual implica que $a \vee b \leq d : c$ lo cual nos da que

$$c \wedge (a \vee b) \leq c \wedge (d : c) \leq d = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

y la desigualdad opuesta siempre se da, por lo tanto L es distributiva.

□

Proposición A.15. *Sea L una retícula de Boole completa, entonces*

$$(\bigvee_I a_i) \wedge c = \bigvee_I (a_i \wedge c)$$

$$(\bigwedge_I a_i) \vee c = \bigwedge_I (a_i \vee c)$$

para cualquier familia arbitraria $\{a_i\}_I \subseteq L$ y $c \in L$.

Demostración. Dado que estamos trabajando en una retícula de Boole, si demostramos una de las igualdades la otra la tenemos por dualidad, demostraremos pues la primera igualdad.

La desigualdad

$$(\bigvee_I a_i) \wedge c \leq \bigvee_I (a_i \wedge c)$$

siempre se cumple, para verificar la opuesta probaremos que $(\bigvee_I a_i) \wedge c \leq u$ para toda u cota superior del conjunto $\{a_i \wedge c\}_I$. Sea u tal que $a_i \wedge c \leq u$, tenemos:

$$a_i = a_i \wedge (c \vee c^*) = (a_i \wedge c) \vee (a_i \wedge c^*) \leq u \vee c^*$$

donde c^* denota el complemento de c en L; entonces:

$$(\bigvee_I a_i) \wedge c \leq (u \vee c^*) \wedge c = u \wedge c \leq u$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Proposición A.16. *Sea R un anillo, entonces el conjunto de los idempotentes centrales $B(R)$ forman una retícula de Boole.*

Demostración. Definimos el siguiente orden parcial en $B(R)$:

$$e \leq f \text{ si y sólo si } ef = e$$

Con las siguientes operaciones le damos estructura de retícula complementada a $B(R)$: $e \wedge f = ef$, $e \vee f = e + f - ef$ y $e^* = 1 - e$. □

En el caso conmutativo un anillo es de Boole si todo elemento es idempotente. A todo anillo de Boole R le damos estructura de retícula mediante las operaciones:

$$a \vee b = a + b - ab$$

$$a \wedge b = ab$$

este es un caso particular de A.16. De igual forma toda retícula de Boole se puede ver como un anillo con las operaciones:

$$a + b = (a \wedge b^*) \vee (a^* \wedge b)$$

$$ab = a \wedge b.$$

En adelante los anillos considerados serán anillos de Boole.

Lema A.17. *Sean I un ideal de un anillo R y $\alpha : I \to R$ un homomorfismo, entonces $\alpha(I) \subseteq I$ y $\alpha^2 = \alpha$.*

Demostración. Sea $a \in I$, entonces $\alpha(a) = \alpha(a^2) = a\alpha(a) \in aR \subseteq I$.

Y, $\alpha^2(a) = \alpha(\alpha(a)) = \alpha(a\alpha(a)) = \alpha(a)\alpha(a) = \alpha(a)$, por tanto $\alpha^2 = \alpha$. □

Recordemos la contrucción del anillo máximo de cocientes para cualquier anillo R:

Decimos que un ideal izquierdo $I \subseteq R$ es *denso* si $(I : r)$ no tiene anuladores derechos distintos de cero para todo $r \in R$. Un ideal bilateral I es denso como ideal izquierdo si I tiene anuladores derechos distintos de cero.

Si $\mathcal{D}$ es una familia de ideales densos de un anillo R, entonces el anillo máximo de cocientes de R es

$$Q_{max} = \varinjlim Hom_R(D, R)$$

con $D \in \mathcal{D}$.

Así, del Lema A.17 y dado que el anillo máximo de cocientes se obtiene del límite directo homomorfismos de ideales densos al anillo, concluimos que el anillo máximo de cocientes de un anillo de Boole, también es un anillo de Boole.

Recordemos que un anillo R es autoinyectivo izquierdo si es inyectivo como módulo izquierdo sobre si mismo.

Proposición A.18. *Todo anillo de Boole completo es autoinyectivo.*

Demostración. Sea R un anillo de Boole completo y $\alpha : I \to R$ un homomorfismo de un ideal I. Sea

$$s = \sup\{a \in I \,|\, \alpha(a) = a\}$$

Demostraremos que $\alpha(a) = as$ para toda $a \in I$. Del Lema A.17 tenemos que

$$\alpha(\alpha(a)) = \alpha^2(a) = \alpha(a)$$

para toda $a \in I$, entonces $\alpha(a) \leq s$ y así:

$$\alpha(a) = \alpha(a^2) = a\alpha(a) \leq as.$$

Para la desigualdad opuesta, si $b \in I$ y es tal que $\alpha(b) = b$, entonces para toda $a \in I$ tenemos $ab = a\alpha(b) = \alpha(ab) = b\alpha(a) \leq \alpha(a)$.

Pero sabemos que $B(R)$ es superiormente continua por el Lema A.15, entonces $as = \sup\{ab \,|\, \alpha(b) = b\}$, de aqui se sigue que $as \leq \alpha(a)$, lo cual completa la prueba. $\square$

Para ver el sigiuiente resultado veremos antes qué es la completación de Dedekind-MacNeille.

Si L es una retícula, entonces una *completación superior* (respectivamente *inferior*) para L es una retícula completa $\hat{L}$ que contiene a L como subretícula y es tal que $x = \sup(L \cap [0, x])$, (respectivamente $x = \inf(L \cap [x, 1])$) para toda $x \in \hat{L}$. Si $\hat{L}$ es una completación superior e inferior decimos simplemente que es una *completación* para L.

Sean L y L' retículas completas. Una *conección de Galois* entre L y L' es un par de asignaciones $\sigma : L \to L'$ y $\tau : L' \to L$ que satisfacen:

i) Si $x_1 \leq x_2$ entonces $\sigma(x_1) \geq \sigma(x_2)$, con $x_1, x_2 \in L$.

ii) Si $y_1 \leq y_2$ entonces $\tau(y_1 \geq \tau(y_2)$, con $y_1, y_2 \in L'$.

iii) $x \leq \tau\sigma(x)$ y $y \leq \sigma\tau(y)$, con $x \in L$, $y \in L'$.

Luego, si L es una retícula, para cada subconjunto S de L definimos:

$$Ub(S) = \{ \text{ cotas superiores de } S \text{ en } L\}$$

$$Lb(S) = \{ \text{ cotas inferiores de } S \text{ en } L\}$$

Ub y Lb definen una conección de Galois en el conjunto potencia de L, $\wp(L)$. Notemos que $Ub(S)$ es un filtro en L y $Lb(S)$ es un ideal en L. Para cada subconjunto S de L, escribiremos $\overline{S} = Lb(Ub(S))$. Los ideales S que son considerados cerrados en el sentido de $S = \overline{S}$ forman una retícula completa $\tilde{L} = \wp(L)^c$. El supremo y el ínfimo de una familia de ideales cerrados $\{I_\alpha\}$ en $\tilde{L}$ están dados por:

$$\bigwedge I_\alpha = \bigcap I_\alpha$$

$$\bigvee I_\alpha = \overline{\bigcup I_\alpha}$$

La retícula L es isomorfa a la subretícula de $\tilde{L}$ de ideales principales. Entonces $\tilde{L}$ es una completación para L y observemos que para todo ideal cerrado S se tiene que:

$$S = \bigvee_{x \in S} [0, x] = \bigcap_{x \in Ub(S)} [0, x]$$

Además $L \to \tilde{L}$ no es el único morfismo de retículas que hay pero éste preserva todos los supremos e ínfimos que existen en L.

Si L es una retícula de Boole con completación $*$, para cada subconjunto S de L tenemos:

$$S^* = \{a \in L \,|\, a \wedge s = 0 \text{ para toda } s \in S\}.$$

Entonces $S \mapsto S^*$ es una correspondencia de Galois simétrica de $\wp(L)$ en sí mismo. Luego, como $a \wedge s = 0$ es equivalente a $a \leq s^*$ entonces:

$$S^{**} = \{a \,|\, a \leq b^* \text{ para toda } b \in S^*\} = Lb\{b^* \,|\, b \in S^*\}$$

Pero $b \in S^*$ es equivalente a $b \wedge s = 0$ para toda $s \in S$, es decir, $s \leq b^*$ para toda $s \in S$, entonces $S^{**} = Lb(Ub(S))$ y de aquí se sigue que los ideales cerrados bajo la asignación $S \mapsto S^{**}$ son los mismos que en los ideales definidos en la completación de Dedekind-MacNeille.

Proposición A.19. *La completación de Dedekind-MacNeille de una retícula de Boole L es también un retícula de Boole.*

Demostración. Sean I, J ideales, entonces

$$(I \cup J)^* = \{a \,|\, a \wedge b = 0, b \in I \cup J\} = I^* \cap J^*$$

Entonces $(I \cup I^*)^{**} = (I^* \cap I^{**})^* = 0^* = L$, así I^* es el complemento de I en la reícula $\tilde{L}$ de ideales cerrados. Si J es un ideal tal que $I \cap J = 0$, entonces para toda $a \in I, b \in J$ se tiene $a \wedge b \in I \cap J = 0$, entonces $J \subset I^*$. Y así L es un retícula de Boole por la Proposición A.14. □

El siguiente resultado es debido a Brainerd y Lambek (Ver [2])

Teorema A.20. *Sea $\phi : R \to S$ un monomorfismo entre anillos de Boole. Entonces $B(S)$ es la completación de $B(R)$ si y sólo si S es el anillo máximo de cocientes de R.*

Demostración. Supongamos que $B(S)$ es la completación de $B(R)$, entonces S es un anillo autoinyectivo por la Proposición A.18. Para probar que $S = Q_{max}(R)$ basta ver que S es una extensión escencial del R-módulo R. Pero, cada $s \in S$ se puede escribir como:

$$s = \sup\{a \in R \,|\, a \leq b\} = \sup\{a \in R \,|\, ab = a\}$$

luego, si $b \neq 0$ entonces debe existir $a \neq 0 \in R$ tal que $ab = a$.

Recíprocamente, sabemos que cada retícula de Boole R tiene una completación, la cual es también una retícula de Boole por la Proposición A.19. Hemos probado que esta completación coincide con $Q_{max}(R)$ entonces concluimos que $Q_{max}(R)$ es una completación de R. $\square$

Bibliografía

[1] Bland, Paul E., *Topics in Torsion Theory*. Mathematical Research, Volume 103, Wiley-VCH 1998.

[2] Brainerd, B; Lambek, J, *On the ring of quotients of a Boolean ring*. Canadian Mathematical Bulletin, 2:25-29, 1959.

[3] Castro, Jaime, *Acerca de dimensiones en categorías de módulos. Tesis Doctoral.* Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, México 1992.

[4] Castro, Jaime; Ríos, José; Teply, Mark, *Torsion theoretic dimensions and relative Gabriel correspondence*. Journal of Pure and Applied Algebra, 178(1):101-114, 2003.

[5] Castro, Jaime; Raggi, Francisco; Ríos, José; Van den Berg, John, *On the atomic dimension in module categories*. Communications in Algebra, 33:4679-4692, 2005.

[6] Halmos, Paul R., *Lectures on Boolean Algebras*. Van Nostrand. Princeton, New Jersey 1963.

[7] Golan, Jonathan S., *Torsion Theories*. Longman Scientific & Technical with John Wiley & Sons Inc., New York 1986.

[8] Golan, Jonathan S.; Simmons, Harold, *Derivatives, Nuclei and Dimensions on the Frame of Torsion Theories*. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1988.

[9] Năstăsescu, Constantin; Van Oystaeyen, Freddy, *Dimensions of Ring Theory*. Dordrecht: Reidel, 1987.

[10] Raggi, Francisco; Ríos, José, *On the lattice structure of torsion theories*. Communications in Algebra, 19(2):669-674, 1991.

[11] Raggi, Francisco; Ríos, José, *On the structure of selfinjective regular rings*. Communications in Algebra, 21(10):3763-3771, 1993.

[12] Simmons, Harold, *Near-discreteness of modules and spaces as measured by Gabriel and Cantor*. Journal of Pure and Applied Algebra 56:119-162, 1989.

[13] Stenström, Bo, *Rings of Quotients*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1975.

[14] Viola-Prioli, A. M.; Viola-Prioli, J. E., *Rings whose kernel functors are linearly ordered*. Pacific Journal of Mathematics, 132(1):21-34, 1988.