



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**COMPARACIÓN ENTRE UN MODELO
HIDRODINÁMICO COMPLETO Y EL MODELO
HIDROLÓGICO EN RIEGO POR MELGAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

HIDRÁULICA

P R E S E N T A:

LEONID VLADIMIR CASTANEDO GUERRA

T U T O R:

Dr. HEBER ELEAZAR SAUCEDO ROJAS

Diciembre 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Carlos Fuentes Ruiz

Secretario: Dr. Víctor Hugo Alcocer Yamanaka

Vocal: Dr. Heber Eleazar Saucedo Rojas

1^{er}. Suplente: Dr. Luis Rendón Pimentel

2^{do}. Suplente: M.I. José Alfredo González Verdugo

Lugar donde se realizó la tesis:

CUERNAVACA, MOR.

TUTOR DE TESIS:

Dr. HEBER ELEAZAR SAUCEDO ROJAS

FIRMA

COMPARACIÓN ENTRE UN MODELO HIDRODINÁMICO COMPLETO Y EL MODELO HIDROLÓGICO EN RIEGO POR MELGAS

I. Introducción	1
Objetivos	2
2. Antecedentes	3
2.1 Riego por melgas	3
2.2 Fases hidráulicas del riego por melgas	3
2.3 Descripción de flujo de agua a superficie libre	4
2.3.1 Ecuaciones de Saint-Venant	4
2.3.2 Modelo de inercia cero	5
2.3.3 Modelo de la onda cinemática	6
2.3.4 Modelo hidrológico o balance de volumen	6
2.4 Descripción del flujo del agua en el suelo	7
2.4.1 Conceptos básicos	7
2.4.1.1 Relaciones volumétricas en el sistema agua-suelo	7
2.4.1.2 Porosidad volumétrica total	8
2.4.2 Infiltración	8
2.4.2.1 Las ecuaciones base	9
2.4.2.1.1 Ecuación de continuidad	9
2.4.2.1.2 Ley de Darcy	9
2.4.2.2 Ecuación de Richards	11
2.4.2.3 Ecuación de Kostiaikov-Lewis	12
2.4.2.4 Ecuación de Green y Ampt	12
2.4.2.5 Ecuación tipo Fokker-Plank (contenido de humedad)	13
3. Modelo hidrológico en el diseño en riego por gravedad	14
3.1 Diseño de riego por gravedad	14
3.2 El modelo hidrológico	17
3.2.1 Fase de avance	18
3.2.2 Fase de almacenamiento	19
3.2.3 Fase de consumo	20
3.2.4 Fase de recesión	21
4. Modelo hidrodinámico completo	23
4.1 Flujo de agua en el suelo: ecuación de Richards	23
4.1.1 Condiciones límites	24
4.1.2 Características hidrodinámicas	25
4.1.3 Cálculo de la lámina infiltrada	26
4.1.4 Solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional	26

4.2 Flujo del agua sobre la superficie del suelo: ecuaciones de Saint-Venant	28
4.2.1 Esquema numérico para la fase de avance	28
4.2.2 Condiciones límites	28
4.2.3 Solución numérica monótona de las ecuaciones de Saint-Venant	29
5. Eficiencias en el riego por melgas	34
5.1 Eficiencia de aplicación	34
5.2 Eficiencia de requerimiento de riego	34
5.3 Eficiencia de uniformidad	34
5.4 Cálculo del gasto óptimo	35
5.4.1 Relaciones entre la longitud de la melga y el gasto óptimo	37
6. Comparación del modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico	40
6.1 Introducción	40
6.2 Comparación de modelos	41
6.3 Cuadro de diseño de riego por melgas	47
7. Conclusiones	51
8. Bibliografía	52

INDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 3.1	Riego por melgas.	14
Ilustración 3.2	Riego por surcos.	15
Ilustración 3.3	Representación esquemática del avance del riego por gravedad para el primer paso de tiempo δt .	10
Ilustración 3.4	Representación esquemática del avance del riego por gravedad para el paso de tiempo δt_m .	11
Ilustración 3.5	Representación esquemática del riego por gravedad al final de la fase de almacenamiento.	12
Ilustración 3.6	Esquema del riego por gravedad al inicio de la fase de recesión.	21
Ilustración 4.1	Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional.	24
Ilustración 4.2	Disposición de las celdas de cálculo para la fase de avance.	29
Ilustración 4.3.	Disposición de la malla lagrangiana para las fases de avance almacenamiento, consumo y recesión.	33
Ilustración 5.1	Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo <i>franco-arcilloso</i> para tres láminas de aplicación: 8, 10 y 12 cm, considerando que $\alpha_1 = 3.05$, $\alpha_2 = 2.58$, $\alpha_3 = 2.35$. Ks expresado en m/s.	38
Ilustración 5.2	Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo tipo <i>arcilla</i> para tres láminas de riego: 8, 10 y 12 cm, considerando que $\alpha_1 = 24.82$, $\alpha_2 = 23.74$, $\alpha_3 = 22.30$. Ks expresado en m/s.	39
Ilustración 5.3	Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo tipo <i>limo</i> para tres láminas de riego: 8, 10 y 12 cm, considerando que $\alpha_1 = 3.09$, $\alpha_2 = 2.73$, $\alpha_3 = 2.45$. Ks expresado en m/s.	39

Ilustración 6.1	Evolución de la lámina infiltrada obtenida mediante las ecuaciones de Richards y de Green y Ampt para el suelo tipo limo.	42
Ilustración 6.2	Evolución de la lámina infiltrada obtenida mediante las ecuaciones de Richards y de Green y Ampt para el suelo tipo franco arcilloso.	43
Ilustración 6.3	Evolución de la lámina infiltrada obtenida mediante las ecuaciones de Richards y de Green y Ampt para el suelo tipo arcilla.	43
Ilustración 6.4	Perfiles de escurrimiento superficial y subterráneo obtenidos con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo para el suelo tipo <i>limo</i> .	44
Ilustración 6.5	Perfiles de escurrimiento superficial y subterráneo obtenidos con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo para el suelo tipo <i>franco-arcilloso</i> .	45
Ilustración 6.6	Perfiles de escurrimiento superficial y subterráneo obtenidos con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo para el suelo tipo <i>arcilloso</i> .	45
Ilustración 6.7	Perfil de la lámina infiltrada obtenido con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo, para el suelo tipo <i>limo</i> , ($L_r = 8$ cm).	46
Ilustración 6.8	Perfil de la lámina infiltrada obtenido con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo, para el suelo tipo <i>franco-arcilloso</i> , ($L_r = 8$ cm).	47
Ilustración 6.9	Perfil de la lámina infiltrada obtenido con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo, para el suelo tipo <i>arcilla</i> , ($L_r = 8$ cm).	47
Ilustración 6.10	Comparación del gasto óptimo de riego, entre el modelo hidrológico y el hidrodinámico completo, para cada tipo de suelo, con lámina de 10 cm. Nota: escala logarítmica en los valores de gasto y en orden inverso.	49
Ilustración 6.11	Diferencia en porcentaje entre los gastos unitarios de riego del modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico, para cada tipo de suelo y para las diferentes láminas.	50
Ilustración 6.12	Diferencia entre los valores del gasto unitario de riego, sin considerar los suelos tipo <i>arcilloso</i> y <i>arcillo-limoso</i> .	50

INDICE DE CUADROS

Cuadro 5.1	Características hidrodinámicas para el diseño de riego por melgas. Modelo hidrológico.	35
Cuadro 5.2	Características hidrodinámicas para el diseño de riego por melgas. Modelo hidrodinámico completo.	37
Cuadro 6.1	Error cuadrático medio para los tipos de suelo franco-arcilloso, limo, arcilla, relacionando los resultados obtenidos del modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico.	48
Cuadro 6.2	Diseño del riego por melgas: gasto en $l/s/m^2$ para la aplicación óptima de la lámina de riego con el modelo hidrológico. Pendiente topográfica $J_0=0.002$.	48
Cuadro 6.3	Diseño del riego por melgas: gasto en $l/s/m^2$ para la aplicación óptima de la lámina de riego con el modelo hidrodinámico completo. Pendiente topográfica $J_0=0.002$.	49
Cuadro 6.4	Diferencia en el gasto óptimo de riego calculado con el modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico.	51

RESUMEN

Se presenta una comparación entre el modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico en riego por melgas. A efecto de reducir las variaciones originadas por diferencias en las evoluciones de la lámina infiltrada obtenidas con las ecuaciones de Green y Ampt y de Richards, utilizadas en el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo, respectivamente, se realiza el ajuste del parámetro de succión en el frente de humedecimiento de la ecuación de Green y Ampt, a manera de reproducir la evolución de la lámina infiltrada obtenida mediante la aplicación de la ecuación de Richards. La comparación se ha efectuado a partir del análisis de los perfiles de flujo superficial y subsuperficial que se presentan en el riego, así como de la distribución final de la lámina infiltrada, y se ha encontrado que existen diferencias entre los elementos analizados, las cuales pueden atribuirse al empleo de una ecuación de cantidad de movimiento general en el modelo hidrodinámico completo. Las diferencias en los perfiles de flujo inducen diferencias en la distribución final de la lámina infiltrada y por lo tanto en el gasto óptimo de riego, de forma que al analizar su comportamiento para los suelos de triángulo de texturas en los cuales es conveniente la aplicación del riego por melgas, se encuentra que la diferencia entre los gastos óptimos de riego proporcionados por el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo crece conforme se incrementa el contenido de arcilla en el suelo.

I. INTRODUCCIÓN

Los campos del conocimiento donde existe una componente utilitaria en la descripción del orden de las cosas, tienen que ver con aplicaciones del ingenio para la solución de problemas que generen aplicaciones inmediatas, es decir se relacionan con la aplicación de la ciencia a la ingeniería, en este ámbito se inscribe el presente trabajo, que pretende realizar la comparación entre dos modelos de diseño de riego por melgas; el modelo hidrodinámico completo, que describe detalladamente el fenómeno denominado riego por melgas, y que tiene bases físico-matemáticas; el modelo hidrológico, que describe el fenómeno de riego por melgas considerando ecuaciones de movimiento simplificadas. El trabajo se estructura como sigue:

En el capítulo II se presentan los antecedentes y una descripción del riego por melgas. También se presentan las ecuaciones base y una revisión de los modelos más difundidos que se utilizan para simular el flujo del agua en el riego por melgas.

En el capítulo III se presenta una descripción del modelo hidrológico, en términos de la forma de modelar el flujo del agua en el suelo mediante la ecuación de Green y Ampt y la simulación del flujo sobre la superficie del suelo por medio de la ecuación de conservación de masa.

Una descripción del modelo hidrodinámico completo, se presenta en el capítulo IV, en términos de la modelación del flujo de agua en el suelo mediante la ecuación de Richards, y la simulación del flujo sobre la superficie del suelo por medio de las ecuaciones de Saint-Venant.

Los resultados obtenidos se presentan en el capítulo VI. Mediante la aplicación del modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico para la determinación del gasto óptimo de riego, se han obtenido cuadros de diseño, el gasto óptimo ha sido considerado como aquel para el cual el coeficiente de uniformidad es máximo, manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego. La comparación de los modelos se ha efectuado con base en los cuadros de diseño, manteniendo como elemento de comparación la igualdad del tirante en la cabecera de la melga en ambos modelos de simulación, puede concluirse como producto de dicha comparación, que la diferencia entre los gastos óptimos de riego proporcionados por el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo crece conforme se incrementa el contenido de arcilla en el suelo.

OBJETIVOS

El objetivo general del presente trabajo es realizar una comparación entre dos modelos en el riego por melgas, el hidrodinámico completo, y el hidrológico. Los objetivos particulares son: i) cálculo del gasto de riego óptimo, es decir, aquel para el cual se obtiene la mayor eficiencia de uniformidad manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego, ii) realizar la comparación entre los modelos con base en cuadro de diseño de riego por melgas.

2. ANTECEDENTES

2.1 Riego por melgas

Una melga es una franja de terreno, generalmente de forma rectangular, determinada por dos bordos longitudinales paralelos y dos bordos transversales. La melga tiene una pendiente longitudinal que coincide con la dirección del riego, y una transversal que es nula o muy pequeña (generalmente menor que 0.1%).

Es hasta fechas recientes que se ha dado una mayor importancia al papel que desempeña el suelo en la modelación del riego por gravedad, en los modelos pioneros reportados en la literatura e incluso en varios actuales, se tiene en cuenta su efecto a través de leyes de infiltración muy simplificadas que tienen deficiencias desde el punto de vista de la representación físico-matemática del proceso. Una limitante a tener en cuenta es, por ejemplo, que la estimación de los parámetros que intervienen en estas leyes de infiltración dependen de las condiciones inicial y de frontera en que se efectúan las pruebas de infiltración que sirven para calibrar los parámetros que en ellas intervienen.

La complejidad que presenta el tratamiento analítico de las ecuaciones diferenciales que pueden utilizarse para modelar el riego por gravedad, ha motivado que se hayan presentado un número reducido de funciones analíticas para describir el fenómeno, obtenidas para formas simplificadas de las ecuaciones de movimiento. Esta situación ha motivado el uso de aproximaciones numéricas para la obtención de soluciones discretas, que permiten determinar las formas de las variables hidráulicas para puntos particulares del dominio de la solución de las ecuaciones diferenciales.

2.2 Fases hidráulicas del riego por melgas

En el riego por melgas pueden distinguirse cuatro fases: avance, almacenamiento, consumo y recesión. La fase de avance inicia con la introducción del agua en la melga y termina cuando se alcanza el extremo de la misma. La fase de almacenamiento comienza a partir de que el agua llega al extremo de la melga y culmina cuando se deja de aplicar el gasto de aporte en la cabecera. La fase de consumo o de recesión vertical, se define como el tiempo que transcurre desde el momento en que se deja de aplicar el gasto de aporte en la cabecera de la melga hasta la desaparición del tirante en dicha posición. La fase de recesión comienza a partir de que el tirante de agua desaparece en el inicio de la melga y termina cuando el tirante desaparece en el otro extremo de la misma.

Los modelos para riego por melgas en su mayoría tienen en cuenta solamente la fase de avance. En el ámbito experimental se reconoce la fase de avance como aquella que presenta la identificación más sencilla y por lo tanto la que ocupa el interés en la mayoría de los trabajos experimentales efectuados tanto en campo como en laboratorio.

2.3 Descripción del flujo del agua a superficie libre

2.3.1 Ecuaciones de Saint-Venant

En una melga la relación entre su ancho y el tirante de agua permite considerar las ecuaciones correspondientes al escurrimiento sobre una superficie de ancho infinito (Woolhiser, 1975):

Continuidad

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad 2.1$$

Cantidad de movimiento

$$h^2 \frac{\partial q}{\partial t} + 2qh \frac{\partial q}{\partial x} + (gh^3 - q^2) \frac{\partial h}{\partial x} + gh^3 (J - J_o) + \beta qh \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad 2.2$$

donde $q(x,t) = U(x,t) h(x,t)$ es el gasto por unidad de ancho de melga $[L^2T^{-1}]$, x es la coordenada espacial en la dirección principal del movimiento del agua en la melga $[L]$; t es el tiempo $[T]$; U es la velocidad media $[LT^{-1}]$; h es el tirante de agua $[L]$; J_o es la pendiente topográfica de la melga $[LL^{-1}]$; J es la pendiente de fricción $[LL^{-1}]$; $V_i = \partial I / \partial t$ es el flujo de infiltración $[LT^{-1}]$, es decir el volumen de agua infiltrado en la unidad de tiempo por unidad de longitud de la melga, I es la lámina infiltrada $[L]$; g es la aceleración gravitacional $[LT^{-2}]$; el parámetro adimensional $\beta = 1 - \alpha$, siendo $\alpha = 1 - U_{ix}/U$, donde U_{ix} es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración.

Para cerrar el sistema es necesario disponer de una relación entre las variables hidráulicas q y h con la pendiente de fricción, dicha relación se denomina ley de resistencia hidráulica. Fuentes *et al.* (2000) han demostrado que no es recomendable utilizar la ley de resistencia de Manning-Strickler en el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards.

Lo anterior tiene como base el análisis en los tiempos muy cortos del acoplamiento, se deduce que la ley de resistencia de Manning-Strickler solamente puede ser utilizada para un reducido número de funciones gasto de riego aplicado en la cabecera de la melga, en particular para cuando el gasto de riego se comporta como una función potencia de 1/6 del tiempo, en consecuencia, dicha ley de resistencia no debe utilizarse en el caso en que el gasto de riego es constante.

Asimismo se deduce que, al hacer uso de dicha ley de resistencia, sus parámetros dependen de las condiciones de frontera, en particular la evolución de la lámina de riego en los tiempos muy cortos dependerá del gasto de riego, situación que es falsa en el contexto de la ley de infiltración proporcionada por la ecuación de Richards. En consecuencia, en este trabajo se adopta el uso de una ley potencial de resistencia (Fuentes *et al.*, 2004) que incluye como casos particulares a los de Chézy y Poiseuille:

$$q = k v \left(\frac{h^3 g J}{v^2} \right)^d \quad 2.3$$

Donde v es el coeficiente de viscosidad cinemática $[L^2 T^{-1}]$ y k es un factor adimensional. De esta ley se deduce la de Chézy, haciendo $d=1/2$ y la de Poiseuille con $d=1$.

Existen formas de las ecuaciones de Saint-Venant en las que no se tiene en cuenta el efecto de la infiltración en la conservación de la cantidad de movimiento, motivo por el cual se les denomina ecuaciones de Saint-Venant con ecuación de cantidad de movimiento incompleta. Entre las formas simplificadas de las ecuaciones de Saint-Venant se reconoce el modelo de inercia cero u onda difusiva, el modelo de onda cinemática y el modelo hidrológico o de balance de volumen.

2.3.2 Modelo de inercia cero

El modelo de inercia cero puede obtenerse eliminando los términos inerciales de la ecuación de momentum (ecuación 2.2):

$$\frac{\partial h}{\partial x} = J_0 - J \quad 2.4$$

de tal forma que las ecuaciones (2.1) y (2.4) constituyen el modelo de inercia cero.

Fuentes *et al.* (2001) conceptualizan el modelo de inercia cero teniendo en cuenta en la ecuación de momentum que la derivada material es cero, en contraparte a la forma tradicional mostrada en la ecuación (2.4), expresan las ecuaciones de Saint-Venant en términos de la velocidad media $U(x,t) = q(x,t)/h(x,t)$ y consideran que no existe extracción de agua, de tal forma que la ecuación (2.2) puede escribirse como :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad 2.5$$

la ecuación (2.1) expresada para la velocidad media, en combinación con la ecuación (2.5) constituyen el modelo de inercia cero en este enfoque.

2.3.3 Modelo de la onda cinemática

Se puede simplificar aún más la aproximación, eliminando el término de la variación del tirante en el espacio en la ecuación (2.4), lo cual resulta en la ecuación del flujo uniforme.

$$J = J_0 \quad 2.6$$

la combinación de las ecuaciones (2.1) y (2.6) constituyen el modelo de onda cinemática.

2.3.4 Modelo hidrológico o de balance de volumen

Si se ignora la ecuación de cantidad de movimiento y se resuelve solamente la ecuación de continuidad, ecuación (2.1), se obtiene el modelo de balance de volumen o modelo hidrológico. La versión integral de la ecuación de continuidad puede escribirse para el caso de una melga como:

$$Q_0 t = \int_0^{x_f} h(x,t) dx + \int_0^{x_f} l(x,t) dx$$

donde x_f es la posición del frente de avance en el tiempo. Si se considera un valor medio del tirante y que el suelo es homogéneo se puede escribir:

$$Q_0 t = \bar{h} x_f(t) + \int_0^{x_f} l(\tau) dx \quad 2.7$$

donde $\tau = t - t_x$ es el tiempo de contacto, siendo t_x el tiempo que tarda el frente de avance en llegar a una distancia x . Es común utilizar una función exponencial o potencial para expresar la función de avance $x_f(t)$ y existen diversas aproximaciones para estimar el tirante medio $\bar{h}$.

El modelo de onda cinemática se limita respecto a las condiciones de pendiente y no puede manejar condiciones de frontera aguas abajo que afecten el flujo aguas arriba (Cunge *et al.*, 1980). El uso del modelo de balance de volumen también está limitado por las condiciones de la pendiente topográfica de la melga.

2.4 Descripción del flujo del agua en el suelo

2.4.1 Conceptos básicos

2.4.1.1 Relaciones volumétricas en el sistema agua-suelo

Es conveniente expresar el contenido de agua que en un momento dado contiene el suelo en términos relativos. Es bastante común expresar el contenido de agua como una fracción gravimétrica (ω), es decir, como la razón de la masa de agua (M_v) y la masa del suelo (M_s):

$$\omega = \frac{M_v}{M_s} \quad 2.8$$

Nótese que las unidades de ω son $[M/M]$.

Para el proceso de infiltración es, sin embargo, más conveniente expresar el contenido de agua como una fracción volumétrica (θ), es decir, como la razón del volumen de agua (V_w) y el volumen total del suelo (V_t):

$$\theta = \frac{V_w}{V_t} \quad 2.9$$

Las unidades del contenido volumétrico de agua (θ) son $[L^3/L^3]$.

La relación entre los contenidos gravimétrico y volumétrico de agua se establece fácilmente. Por una parte, la masa y el volumen del agua están relacionados por: $M_w = \rho_w V_w$, donde ρ_w es la densidad del agua $[M/L^3]$. Por otra parte, la masa y el volumen total del suelo están relacionados por: $M_s = \rho_t V_t$, en donde ρ_t es la densidad aparente del suelo $[M/L^3]$. Con estas dos relaciones y las ecuaciones (2.8) y (2.9) se deduce:

$$\theta = \frac{\rho_t}{\rho_w} \omega \quad 2.10$$

Algunas veces, la razón de densidades ρ_t/ρ_w es llamada densidad aparente relativa o simplemente densidad aparente del suelo, se denota por D_a .

El contenido volumétrico de agua máximo se alcanza, en principio, cuando el volumen de agua es igual al volumen total de los poros del suelo.

Este valor de θ es denominado contenido volumétrico de agua a saturación y se denota por θ_s . En ausencia de aire atrapado, θ_s coincide con la porosidad volumétrica total del suelo.

2.4.1.2 Porosidad volumétrica total

La porosidad volumétrica total del suelo (ϵ) [L^3/L^3] se define como el volumen total de los poros del suelo (V_v) relativo al volumen total del suelo (V_t):

$$\epsilon = \frac{V_v}{V_t} \quad 2.11$$

Si se denota por ρ_o la densidad real del suelo, definida de suerte que la masa del suelo seco se obtenga a partir del volumen que ocupa la fracción sólida: $M_s = \rho_o V_s$, entonces la porosidad volumétrica total se calcula con la expresión:

$$\epsilon = 1 - \frac{\rho_t}{\rho_o} \quad 2.12$$

Cuando sólo se conoce la densidad aparente (ρ_t), la densidad real se puede considerar como: $\rho_o = 2.65 \text{ g/cm}^3$. Si ambas densidades son desconocidas, la porosidad puede estimarse según el triángulo de texturas de Rawls y Brakensiek (1983).

Para fines prácticos se puede aceptar que cuando el suelo se satura no queda aire atrapado, es decir, se acepta la igualdad entre el contenido volumétrico de agua a saturación y la porosidad volumétrica total del suelo: $\theta_s = \epsilon$.

2.4.2 Infiltración

El proceso de infiltración se refiere a la entrada de agua en el perfil de suelo desde sus fronteras. Generalmente, se hace referencia a la infiltración vertical, donde el agua se mueve de forma descendente desde la superficie del suelo. El agua en el frente de avance del patrón de humedecimiento se mueve hacia las zonas más secas del suelo bajo la influencia de gradientes de potencial de presión.

Para describir el proceso de infiltración vertical existen diversos modelos tanto empíricos como mecanicistas. Dichos modelos tienen el rasgo característico de que la velocidad de infiltración es máxima en los primeros instantes del proceso de infiltración y decrece con el tiempo, a medida que el frente de humedecimiento se aleja de la superficie. El procedimiento empírico para el desarrollo de los modelos de infiltración consiste, en encontrar una función del tiempo, que corresponda a las características observadas de la velocidad de infiltración. Por otro lado el proceso mecanicista consiste en resolver la ecuación de transferencia (ecuación que describe el movimiento del agua en el suelo), con la finalidad de derivar una expresión, analítica o numérica, que describa el proceso de infiltración.

2.4.2.1 Las ecuaciones base

Las ecuaciones generales que describen el flujo del agua en el suelo se derivan de dos leyes fundamentales: la ecuación de continuidad y la ley de Darcy.

2.4.2.1.1 Ecuación de continuidad

La aplicación del principio de conservación de masa al flujo de agua en un volumen elemental de suelo, considerado indeformable, conduce a la ecuación de continuidad siguiente (Fuentes, 1992):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + S_w = 0 \quad 2.13$$

donde q es el volumen de agua que atraviesa en la unidad de tiempo (gasto volumétrico) una superficie unitaria de suelo expuesta perpendicularmente a la dirección del movimiento, o flujo del agua [L^3T^{-1}]; θ es el contenido volumétrico de agua y es una función del potencial de presión [L^3L^{-3}], $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ es el operador gradiente; x, y, z son las coordenadas espaciales, t es el tiempo y S_w es un término que representa la extracción del agua por las plantas [L^3L^{-3}].

2.4.2.1.2 Ley de Darcy

A la escala macroscópica el flujo de agua en el suelo es descrito por la ley de Darcy generalizada, la cual establece que el flujo de agua en un medio poroso parcialmente saturado es proporcional al gradiente hidráulico (Fuentes, 1992):

$$\mathbf{q} = -K(\Psi) \nabla H \quad ; \quad H = \Psi - z \quad 2.14$$

donde H es el potencial hidráulico, igual a la suma del potencial de presión del agua en el suelo (Ψ), expresado como la altura de una columna equivalente de agua (positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada del suelo), y del potencial gravitacional asimilado a la coordenada vertical (z), orientada positivamente hacia abajo [L]; $K(\Psi)$ es un coeficiente empírico denominado conductividad hidráulica el cual en un suelo parcialmente saturado es una función del potencial de presión [LT^{-1}].

La ecuación (2.14) asume dos hipótesis principales:

1. La fuerza que provoca el flujo isotérmico del agua en un suelo, rígido y no saturado, es la suma del potencial matricial (de presión) y el potencial gravitacional. El suelo no contiene membranas semipermeables para solutos y el potencial de presión del aire es cero.
2. La conductividad hidráulica del suelo no saturado es función del contenido de agua o del potencial de presión.

La ley de Darcy (ecuación 2.14) sólo es aplicable a casos donde el régimen de flujo es laminar, es decir cuando las fuerzas inerciales son despreciables respecto a las fuerzas viscosas, y donde las interacciones suelo-agua no originan modificaciones significativas en la fluidez. Sin embargo, también pueden ocurrir desviaciones cuando el gradiente y los poros son muy pequeños debido a la influencia de las fuerzas de adsorción.

En forma unidimensional la ley de Darcy, para una columna vertical de suelo, se expresa de la siguiente manera:

$$q(z,t) = -K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z} + K(\Psi) \quad 2.15$$

Por su parte la ecuación 2.13 se escribe en forma unidimensional:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} + S_w = 0 \quad 2.16$$

El asumir la ecuación (2.14) en la ecuación (2.16) permite obtener la ecuación general para el flujo del agua en suelos parcialmente saturados.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\Psi) \nabla (\Psi - z)] - S_w \quad 2.17$$

La ecuación diferencial (2.17) es altamente no lineal debido a que K y ψ son funciones no lineales del contenido de humedad θ .

2.4.2.2 Ecuación de Richards

La descripción del proceso de infiltración del agua en el suelo puede efectuarse teniendo como base la ecuación de Richards (1931), que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad con el campo de velocidades calculado conforme a la ley de Darcy y que en su forma tridimensional, sin tener en cuenta la extracción de agua por las plantas se escribe como:

$$C(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\Psi) \nabla \Psi] - \frac{dK}{d\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad 2.18$$

donde ψ es el potencial de presión del agua en el suelo expresado como la altura de una columna equivalente de agua [L] (positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada del suelo); $C(\Psi) = d\theta/d\Psi$ es denominada la capacidad específica de humedad del suelo, $\theta = \theta(\Psi)$ es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua [L³L⁻³] y es una función de Ψ conocida como curva característica de humedad o curva de retención del agua; $K = K(\Psi)$ es la conductividad hidráulica [LT⁻¹] que en un suelo parcialmente saturado es una función del potencial de presión; el potencial gravitacional es asimilado a la coordenada espacial z orientada positivamente hacia abajo [L], $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ es el operador gradiente; x , y son las otras dos coordenadas espaciales [L] y t el tiempo [T].

Childs y Collis-George (1950) introdujeron el concepto de difusividad capilar o difusividad hidráulica:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\Psi}{d\theta} \quad 2.19$$

para obtener a partir de la ecuación (2.18) una ecuación tipo Fokker-Planck para la infiltración:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad 2.20$$

La ley de infiltración, es decir la forma en que evoluciona la lámina infiltrada en el tiempo, puede obtenerse mediante la integración de los perfiles de humedad generados con la solución de la ecuación de Richards.

El estudio de soluciones analíticas para describir el flujo del agua en el suelo se aborda considerando la ecuación de Fokker-Planck de la infiltración unidimensional. Existen soluciones que proporcionan formas analíticas exactas para algunos casos específicos, como por ejemplo la solución para una columna de suelo sujeta a una condición de Neumann en su superficie, teniendo en cuenta una condición inicial de contenido volumétrico de agua constante en el perfil de suelo. Sin embargo, el tratamiento del riego por gravedad involucra básicamente una condición de frontera de tipo Dirichlet, para la cual a la fecha no ha sido publicada la solución general para cualquier forma de las características hidrodinámicas del suelo y válida para todo tiempo, se han efectuado grandes esfuerzos para obtener soluciones aproximadas para una columna de suelo, entre las cuales pueden citarse las de Philip (1957) y Parlange (1982).

2.4.2.3 Ecuación de Kostiakov - Lewis

La ecuación de Kostiakov (1923) describe la evolución de la lámina infiltrada mediante una función potencia de un solo término cuya variable independiente es el tiempo:

$$I(t) = k t^a \quad 2.21$$

donde $I(t)$ es la lámina infiltrada en la columna de suelo, k y a son parámetros de ajuste. Esta ecuación tiene dos desventajas importantes: i) no puede ser ajustada para diferentes condiciones de campo que tienen una influencia marcada en el proceso de infiltración como el contenido volumétrico de agua y ii) para tiempos de aplicación del riego grandes la ecuación predice velocidades de infiltración que tienden a cero, lo cual no es necesariamente correcto para cualquier condición de flujo. Para subsanar la última de las limitaciones se introduce un término lineal en el tiempo y se obtiene una forma modificada denominada la ecuación de Kostiakov-Lewis:

$$I(t) = k t^a + f_0 t \quad 2.22$$

el término f_0 representa la velocidad de infiltración en los tiempos largos que en teoría debe ser equivalente a la conductividad hidráulica a saturación del suelo.

2.4.2.4 Ecuación de Green y Ampt

Green y Ampt en 1911 toman como base la ley de Darcy con el objeto de deducir una ecuación simple para la infiltración vertical del agua en el suelo teniendo en cuenta las siguientes hipótesis: a) el perfil de humedad inicial en una columna de suelo es uniforme: $\theta = \theta_o$, b) la presión del agua en la superficie del suelo es hidrostática: $\Psi = h \geq 0$, siendo h el tirante del agua, c) existe un frente de humedecimiento bien definido caracterizado por una presión negativa $\Psi = \Psi_f < 0$; Ψ_f es denominado presión de frente de humedecimiento, d) la región entre la superficie del suelo y el frente de humedecimiento (z_f) está completamente saturada (flujo en pistón): $\theta = \theta_s$ $K = K_s$. La combinación de estas hipótesis, de la ecuación de continuidad y de la ley de Darcy, permiten obtener la expresión siguiente para la lámina infiltrada (Fuentes, 1992):

$$I(t) = K_s + \lambda \ln \left(1 + \frac{I}{\lambda} \right) \quad 2.23$$

con $\lambda = (h + h_f)(\theta_s - \theta_o)$ donde $h_f = -\Psi_f$ es la succión en el frente de humedecimiento.

2.4.2.5 Ecuación tipo Fokker-Plank (contenido de humedad)

Al definir la difusividad hidráulica como:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\Psi}{d\theta} \quad 2.24$$

con la cual la ley de Darcy se puede expresar de la siguiente manera:

$$q(\theta, t) = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \quad 2.25$$

Childs y Collis-George (1950) deducen la ecuación tipo Fokker-Plank no lineal, cuya forma unidimensional, considerando nula la extracción por las plantas, se escribe:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad 2.26$$

Para resolver la ecuación (2.26) se debe especificar dos condiciones de frontera, la condición inicial y por supuesto las funciones $D(\theta)$ y $K(\theta)$.

3. Modelo Hidrológico en el Diseño del Riego por Gravedad

3.1 Diseño de riego por gravedad

El riego por gravedad es la forma que más se utiliza para aplicar el agua en los distritos y unidades de riego en México. Una melga es una franja de terreno, generalmente de forma rectangular, determinada por dos bordos longitudinales paralelos y dos bordos transversales. La melga tiene una pendiente longitudinal que coincide con la dirección del riego, y una transversal que es nula o muy pequeña (generalmente menor que 0.1%).



Ilustración 3.1 Riego por melgas.

El surco puede considerarse como un caso particular de la melga en donde el ancho es muy pequeño. El surco tiene una pendiente longitudinal, que como en el caso de la melga, coincide con la dirección del riego y, a diferencia de la melga, puede ser trazado sobre terrenos con pendientes transversales fuertes.



Ilustración 3.2 Riego por surcos.

El objetivo en el riego por gravedad es aplicar la lámina de riego, calculada previamente, de manera uniforme a lo largo de la melga, esto puede realizarse siempre y cuando las pendientes sean uniformes y además la transversal sea nula o muy pequeña, lo cual se logra nivelando o emparejando el terreno. En el caso del surco, la pendiente transversal del terreno no es importante, pues su ancho es muy pequeño y cada surco es independiente de los otros, por lo que, únicamente se requiere que la pendiente longitudinal sea uniforme.

Para la pendiente longitudinal de la melga o del surco se elige la pendiente natural del terreno, pues modificarla implica aumentar el volumen de tierra por moverse y, por lo tanto, los costos de nivelación, además de que se aumenta la profundidad de los cortes, lo cual no es recomendable desde el punto de vista agronómico, ya que se elimina la capa fértil del suelo. El rango de pendientes recomendadas en la práctica, de 0.05% a 0.5%.

La dirección, la pendiente y la longitud de una melga son parámetros de diseño, puesto que no se pueden seleccionar libremente. En el caso del riego por melgas las variables de diseño son el ancho y el gasto de riego. En cambio, en surcos, la única variable de diseño es el gasto de riego, dado que el espaciamiento depende del cultivo.

Considerando lo anterior, se puede definir el gasto de riego unitario, $Q_u [L^3 T^{-1} L^{-1}]$, como:

$$Q_u = \frac{Q_g}{P} \quad 3.1$$

donde Q_g es el gasto de riego de la melga o del surco $[L^3 T^{-1}]$ y P es el perímetro mojado de la melga o del surco $[L]$. Para el caso de la melga se puede considerar el perímetro mojado igual al ancho de la misma, $B [L]$, pero en surcos depende de la sección transversal y del espaciamiento, $E [L]$.

En melgas, una vez obtenido el gasto de riego unitario, el ancho se puede obtener como:

$$B = \frac{Q_a}{Q_u} \quad 3.2$$

donde Q_a el gasto de riego que maneja el usuario en su parcela $[L^3 T^{-1}]$, el cual puede variar entre 20 y 120 l/s. Es evidente que en este caso $Q_a = Q_g$.

En surcos, el gasto de riego, Q_g , se obtiene directamente de la expresión (3.1):

$$Q_g = Q_u P \quad 3.3$$

El número de surcos que se pueden regar simultáneamente, N_s , se obtiene como:

$$N_s = \frac{Q_a}{Q_g} \quad 3.4$$

Para fines prácticos, en surcos, el perímetro mojado (P), se puede considerar igual al espaciamiento (E), (Rendón *et al.* 1977).

Con respecto al ancho de la melga (B), en cereales de grano pequeño como trigo, arroz, cebada y avena, no existe ninguna restricción si el terreno está bien nivelado y la pendiente transversal es nula o muy pequeña. En este caso la única limitante es el gasto de riego disponible. Sin embargo, no se recomiendan en la práctica anchos mayores de 50 metros. Si el terreno no está bien nivelado o la pendiente transversal no es muy pequeña, se recomienda que el ancho sea menor de 20 metros. En algunos cultivos de corte, como la alfalfa, se recomienda que el ancho sea un múltiplo del ancho de la cosechadora.

3.2 El modelo hidrológico

Este modelo consiste en presentar de manera integral la ecuación de conservación de la masa. Para el caso de un suelo homogéneo y suponiendo un tirante constante ($\bar{h}$), a lo largo del surco o de la melga, la ecuación de conservación de la masa se escribe como:

$$Q_0 t = \bar{h} x_f(T) + \int_0^{x_f} I(x) dx \quad 3.5$$

donde x_f es la posición del frente de avance [L] en el tiempo T , x es la distancia a lo largo de la melga o del surco medida a partir de la cabecera aguas arriba, T_0 es el tiempo de infiltración definido como $T_0 = T - T_x$, siendo T_x , el tiempo que tarda el frente de avance en llegar al punto situado a la distancia X , e I es la lámina infiltrada [L].

Rendón *et al.* (1977) desarrollaron el programa de computo RIGRAV para resolver numéricamente la ecuación (3.5), considerando que $\bar{h}$ y la función de infiltración $I(T_0)$ son conocidos. Para el cálculo de h utilizan la expresión:

$$\bar{h} = 0.8 h_n \quad 3.6$$

donde h_n es el tirante normal para régimen permanente.

La ley de resistencia fractal, permite calcular el tirante normal como (Fuentes 1992):

$$h_n = \sqrt[3]{\frac{\omega q_0}{g J_0}} \quad 3.7$$

con:

$$\omega = J_* v \left(\frac{q_0}{v} \right)^{\frac{1}{d}-1} \quad 3.8$$

donde $J_* = 1/\kappa^{1/d}$. El valor de h_n corresponde con el tirante normal para un canal en el que no se presenta infiltración.

Se utilizan los datos de un experimento reportado por Fuentes (1992), en el cual se disponen de los siguientes datos, pendiente topográfica $J_0 = 0.002$ m/m; parámetros para la ley de resistencia de Fuentes *et al.* (2004): $d = 1$, $\kappa = 1/54$, es decir el comportamiento correspondería con una rugosidad de la superficie del suelo típica de los experimentos de riego por melgas.

En cuanto a la función de infiltración, el programa de cómputo utiliza la ecuación propuesta por Green y Ampt (1911).

El programa RIGRAV resuelve la ecuación (3.5) para el primer paso de tiempo δt [T], de la siguiente manera:

$$X_1 = \frac{Q_u \delta t}{h + I_1 f} \quad 3.9$$

Donde f es el factor de forma de la celda líder que varía entre 0.5 y 1.

En la ilustración 3.3 se muestra esquemáticamente el avance del riego por gravedad para el primer paso de tiempo δt .

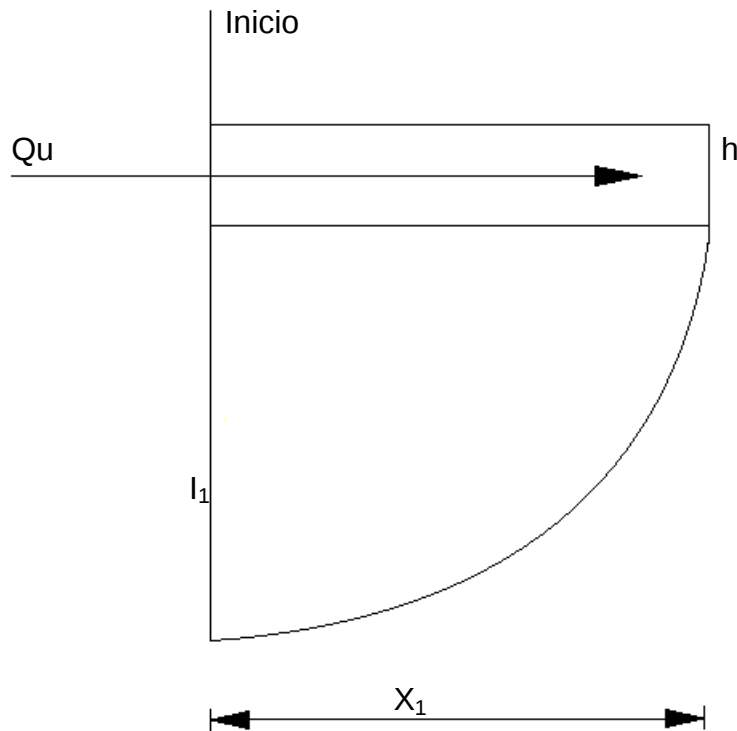


Ilustración 3.3 Representación esquemática del avance del riego por gravedad para el primer paso de tiempo δt .

3.2.1 Fase de avance

El paso de tiempo es constante, por lo que RIGRAV resuelve la ecuación (3.5), hasta que el frente de avance alcanza el extremo de la melga o del surco, con la siguiente expresión general:

$$X_m = \frac{m\delta t Q_u - h \sum_{i=1}^{m-1} X_i - \frac{1}{2} \sum_{i=m}^2 (l_j + l_{j-1}) X_i}{h + l_1 f} \quad 3.10$$

En la ilustración 3.4 se presenta el esquema del avance del riego de gravedad para el paso de tiempo δt_m .

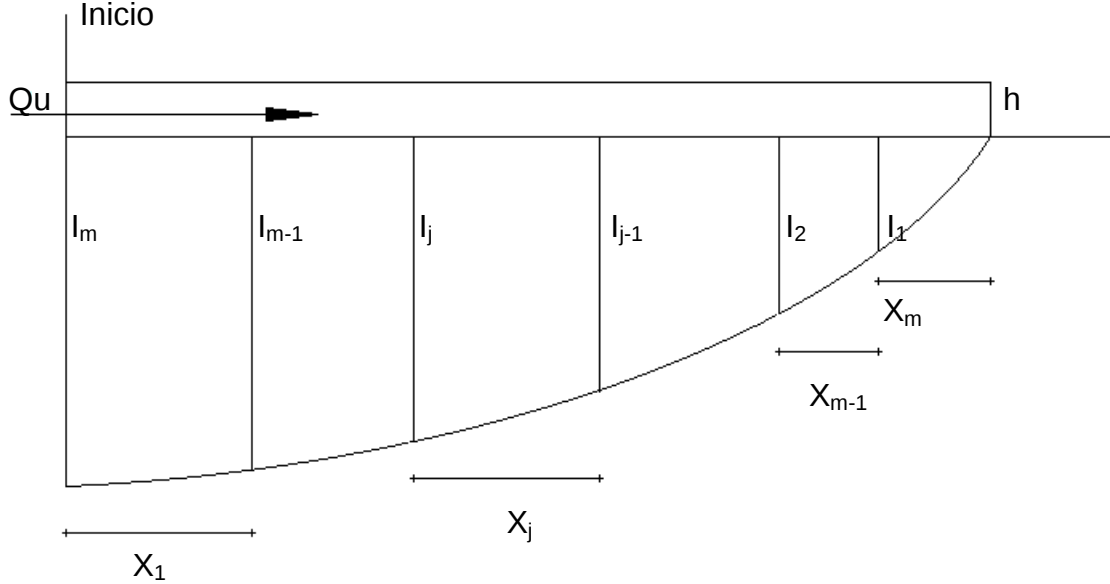


Ilustración 3.4 Representación esquemática del avance del riego por gravedad para el paso de tiempo δt_m .

Es evidente que el último δt_m de la fase de avance es menor que δt , por lo que el tiempo de avance T_a , se calcula como:

$$T_a = \sum_{j=1}^{m-1} \delta t_j + \delta t_m \quad 3.11$$

donde T_a es el tiempo que tardó el frente de avance en alcanzar el extremo D [L].

Al final de la fase de avance, se calcula el perfil del agua superficial con una expresión exponencial, que varía entre el tirante normal (h_n) en el inicio y cero al final de la melga o del surco.

3.2.2 Fase de almacenamiento

Al final de la fase de almacenamiento, RIGRAV resuelve la ecuación siguiente:

$$Q_u T_r = Dh + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=m}^1 (I_j + I_{j-1}) X_i \quad 3.12$$

donde T_r es el tiempo de riego, D [L] la longitud de la melga o el surco, I_m es la lámina infiltrada correspondiente al tiempo T_r , I_o corresponde al tiempo $T_r - T_a$ e I_j corresponde al tiempo de infiltración $T_{oj} = T_r - T_{aj}$, con T_{aj} como el tiempo de avance para el punto j .

En la ilustración 3.5 se presenta el esquema del riego por gravedad al final de la fase de almacenamiento.

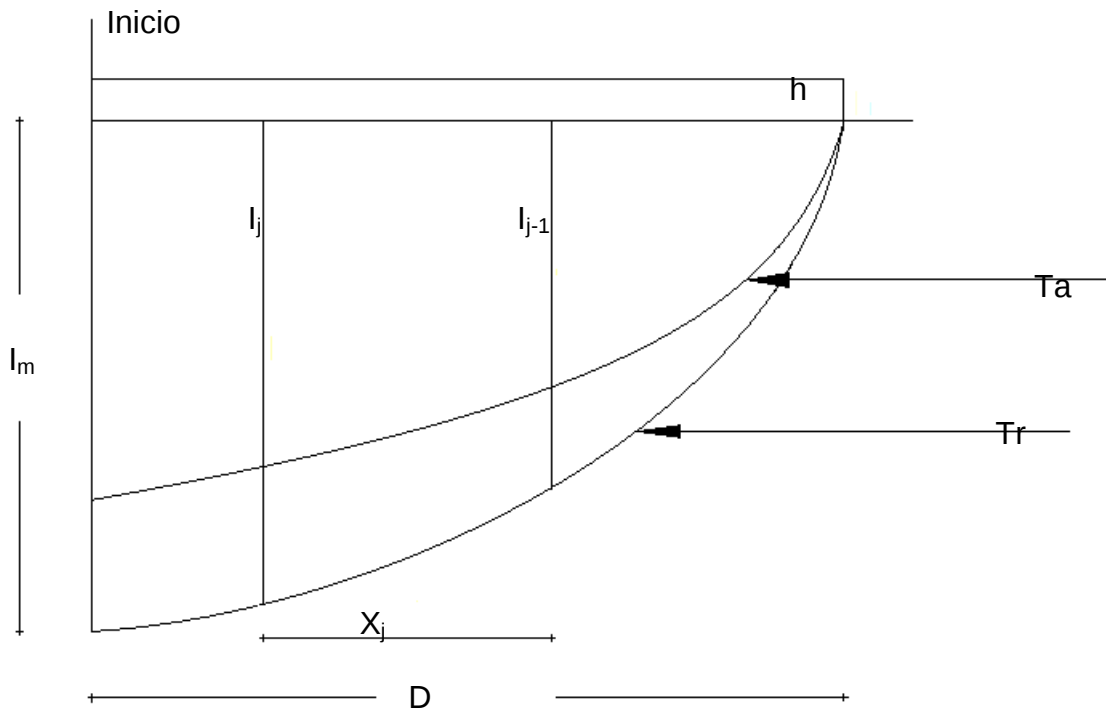


Ilustración 3.5 Representación esquemática del riego por gravedad al final de la fase de almacenamiento.

Al final de la fase de almacenamiento el perfil del agua superficial se calcula con una función tipo exponencial, con (h_n) al inicio de la melga o del surco.

3.2.3 Fase de consumo (Fc)

La duración de la fase de consumo f_c se calcula con la ayuda de la ecuación de infiltración de Green y Ampt (1911), donde $\delta t f_c$ es el tiempo requerido para que se infiltre el tirante normal al inicio de la melga o del surco.

El inicio de la fase de recesión (T_{fr}) se define como:

$$Tf_r = T_r + \Delta t f_c \quad 3.13$$

3.2.4 Fase de recesión (Fr)

Al inicio de la recesión, el volumen superficial (V_s) se calcula con la siguiente expresión:

$$V_s = Q_u T_r - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=m}^1 (I_j + I_{j-1}) X_i \quad 3.14$$

donde I_m es la lámina infiltrada en la cabecera en el tiempo Tf_r , I_o es la lámina infiltrada en el otro extremo para el tiempo $Tf_r - T_a$ e I_j corresponde al tiempo de infiltración $T_{oj} = Tf_r - T_{aj}$.

En la ilustración 3.6 se presenta el esquema de riego por gravedad para el inicio de la fase de recesión.

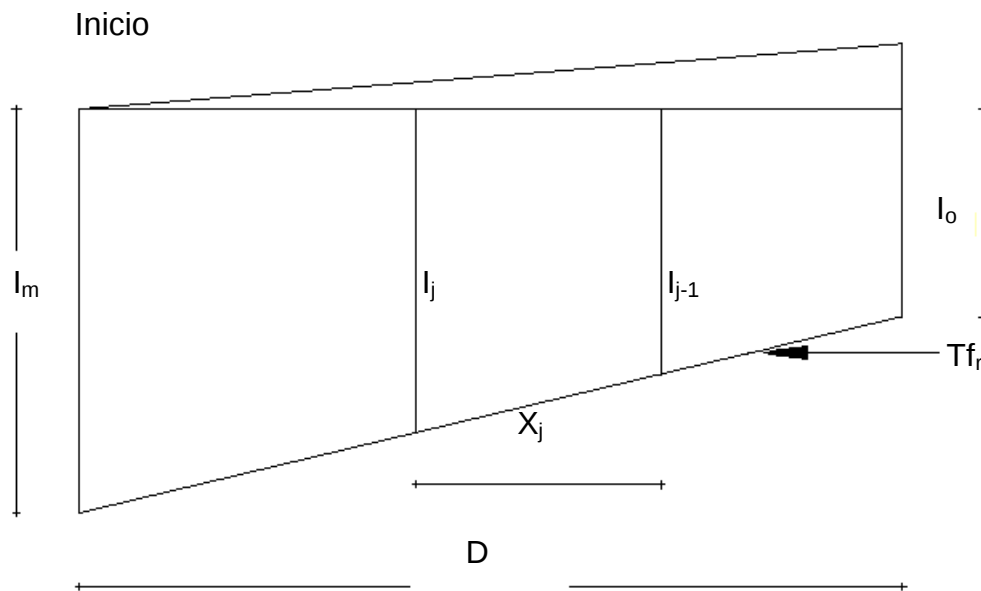


Ilustración 3.6 Esquema del riego por gravedad al inicio de la fase de recesión.

Al inicio de la fase de recesión, nuevamente se calcula el perfil del volumen superficial con una función tipo exponencial, donde el tirante es cero en la cabecera de la melga.

Este mismo procedimiento se repite para definir el tiempo en que el frente de recesión alcanza el siguiente punto, hasta que el frente llega al último punto situado en el extremo aguas abajo.

Posteriormente, el programa RIGRAV calcula la eficiencia de aplicación (E_a), la eficiencia del requerimiento de riego (E_r) y el coeficiente de uniformidad (CUC). Finalmente, RIGRAV presenta el perfil de la lámina infiltrada.

La teoría de infiltración que se utiliza en el modelo hidrológico, es la propuesta por los químicos australianos Green y Ampt en 1911. Por supuesto existen proposiciones más recientes basadas en principios físicos más sofisticados, como la teoría de Parlange y sus colaboradores (1982, 1985, 1990) que contiene, como caso particular, la teoría de Green y Ampt que se menciona.

4. Modelo hidrodinámico completo

Saucedo *et al.* (2005), presentan un esquema numérico para el acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por melgas. La solución de las ecuaciones de Saint-Venant se aproxima utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para la ecuación de Richards se utilizan elementos finitos para la integración en el espacio y diferencias finitas implícitas para la integración en el tiempo. A partir del análisis de diferentes formas de aproximación de las derivadas espaciales y temporales, así como de la forma de cálculo de los coeficientes de la ecuación de cantidad de movimiento, deducen una solución numérica monótona conveniente que efectúa la discretización de la ecuación de momentum teniendo en cuenta tres aspectos: i) las derivadas en el espacio y la pendiente de fricción en una celda de cálculo se aproximan adelante en el tiempo, ii) las derivadas en el tiempo se aproximan utilizando una forma ponderada en tiempo y espacio, iii) los coeficientes son calculados en el tiempo anterior. La solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant para las fases de avance, almacenamiento y consumo se aproxima utilizando un esquema de paso de tiempo constante, mientras que para la fase de recesión se hace uso de un esquema de paso de espacio fijo.

4.1. Flujo del agua en el suelo: ecuación de Richards

El riego es un fenómeno que se efectúa en tres dimensiones, lo cual hace necesario que el flujo del agua en el suelo sea descrito utilizando la ecuación (2.7) en su forma tridimensional, sin embargo, debido al esfuerzo de cómputo que esto significa, es conveniente aceptar la hipótesis de que el fenómeno se efectúa en planos paralelos al desarrollo de la melga, entonces es posible utilizar la forma bidimensional de la ecuación de Richards:

$$C(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\Psi) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad 4.1$$

que ha de resolverse sobre el dominio de solución que se muestra en la ilustración 4.1.

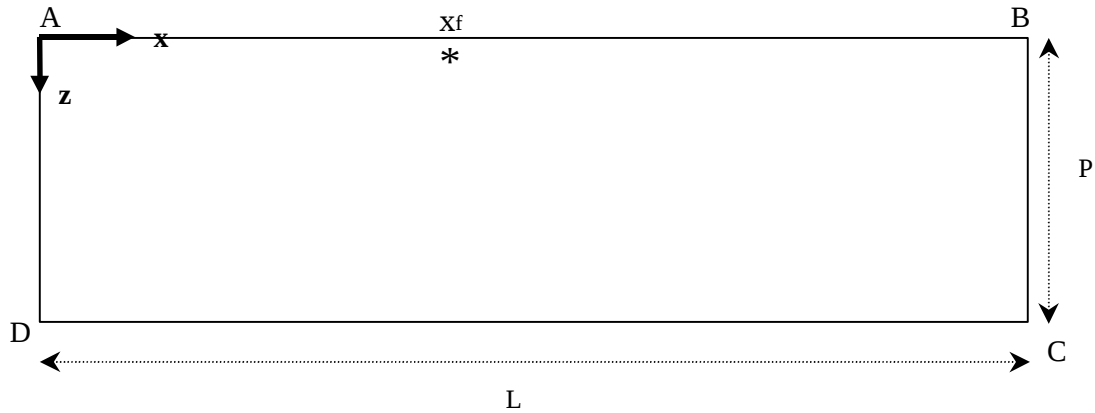


Ilustración 4.1. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional.

4.1.1. Condiciones límites

Como condición inicial para la solución de la ecuación de Richards bidimensional se debe especificar la distribución de las presiones en el espacio:

$$\Psi = \Psi_0(x, z) \quad 4.2$$

Las condiciones de frontera correspondientes pueden considerarse como sigue: $\overline{Ax_f}$ frontera tipo Dirichlet con potencial prescrito utilizando las ecuaciones de Saint-Venant, $\overline{x_fB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$ fronteras tipo Neumann con flujo nulo, $\overline{CD}$ frontera bajo gradiente unitario:

$$\Psi = h, \quad x \in \overline{Ax_f}, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad 4.3$$

$$-K(\Psi) \frac{\partial(\Psi - z)}{\partial z} = 0, \quad x \in \overline{x_fB}, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad 4.4$$

$$-K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad x = L, \quad z \in \overline{BC}, \quad t > 0 \quad 4.5$$

$$\frac{\partial(\Psi - z)}{\partial z} = -1, \quad x \in \overline{CD}, \quad z = P, \quad t > 0 \quad 4.6$$

$$-K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad z \in \overline{DA}, \quad t > 0 \quad 4.7$$

4.1.2. Características hidrodinámicas

La solución de la ecuación de Richards hace indispensable representar las propiedades hidrodinámicas del suelo expresando el potencial de presión (ψ) como una función del contenido volumétrico de agua (θ) y la conductividad hidráulica K como una función de θ .

Como es señalado por Fuentes *et al.* (1992), la combinación de las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange es conveniente en estudios teóricos, como la construcción de soluciones analíticas exactas, y en estudios experimentales puede ser más conveniente la utilización de la combinación de la curva de retención propuesta por van Genuchten (1980), considerando la restricción de Burdine (1953), con la curva de conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964), debido a que satisfacen las propiedades integrales de la infiltración y a la facilidad para la identificación de sus parámetros.

La curva de retención propuesta por van Genuchten (1980) se escribe como:

$$\frac{\theta(\psi)-\theta_r}{\theta_s-\theta_r} = \left[1 - \left(\frac{\psi}{\psi_d}\right)^n\right]^{-m} \quad 4.8$$

donde ψ_d es un valor característico de la presión del agua en el suelo, m y n son dos parámetros de forma empíricos relacionados por la restricción de Burdine (1953): $m=1-2/n$, con $0 < m < 1$ y $n > 2$, θ_s es el contenido volumétrico de agua a saturación efectiva del suelo y θ_r es el contenido volumétrico de agua residual.

La conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964) se representa como:

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}\right)^\eta \quad 4.9$$

donde η es un parámetro de forma empírico y positivo.

4.1.3. Cálculo de la lámina infiltrada

La lámina infiltrada, necesaria para resolver numéricamente las ecuaciones de Saint-Venant se calcula como:

$$I(x_i, t) = \int_0^F [\theta(x_i, z, t) - \theta_0(x_i, z, 0)] dz \quad 4.10$$

donde F es la posición del frente de humedecimiento y θ_0 es el contenido volumétrico de agua inicial en la columna de suelo localizada en una posición x_i , dichas posiciones corresponden con los puntos donde se resuelven las formas discretas de las ecuaciones de Saint-Venant.

4.1.4. Solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional

La ecuación de Richards bidimensional es discretizada en el espacio utilizando elementos finitos y en el tiempo mediante un esquema implícito en diferencias finitas.

El procedimiento se encuentra bien documentado en la literatura y pueden consultarse los detalles en Neumann (1973) y Huyakorn y Pinder (1983). Se asume la solución de elemento finito expresada como una combinación lineal de funciones de base $\phi_j(x, z)$ definidas en relación con la función delta de Kronecker y aplicadas a cada nudo en particular:

$$\psi_n(x, z, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \phi_j(x, z) \quad 4.11$$

donde $a_j(t)$ son coeficientes a ser determinados y n el número de nudos donde se obtiene la solución de elemento finito. Se sustituye en la primera forma débil de la ecuación de Richards, que se obtiene al multiplicar dicha ecuación por una función de peso y aplicar el teorema de Green, teniendo en cuenta lo siguiente: i) Se consideran las funciones de peso iguales a las funciones de base (ϕ) correspondientes a los nudos interiores. ii) Se asume una variación lineal de las características hidrodinámicas sobre cada elemento expresándola mediante las funciones de forma, i.e.: $\hat{C} = \phi_g C_g$ y $\hat{K} = \phi_g K_g$, iii) Se utiliza un sistema de masa concentrado con la finalidad de obtener una matriz diagonal y para mejorar la estabilidad del esquema (Neumann, 1973; Mori, 1980). Se aproxima la derivada temporal mediante un esquema implícito en diferencias finitas y se obtiene:

$$\left[\frac{M^{k+1}}{\Delta t} + K^{k+1} \right] a^{k+1} = \left[\frac{M^{k+1}}{\Delta t} \right] a^k + B^{k+1} + Q^{k+1} \quad 4.12$$

donde las matrices se calculan como se indica a continuación cuando se utilizan funciones de base lineales:

$$M_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[C_g \int_R \bar{\varphi}_g \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k dR \right] = \sum_e C_j \frac{\Delta}{3} \quad 4.13$$

$$K_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[K_g \int_R \varphi_g \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dR \right] = \sum_e \frac{\bar{K}}{4\Delta} (m_j m_k + p_j p_k) \quad 4.14$$

$$B_k = K_g \int_R \varphi_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dR = \sum_e \frac{\bar{K}}{2} p_k \quad 4.15$$

$$Q_k = \int_{\Gamma} q \bar{\varphi}_k d\Gamma = \sum_e \frac{q L_j}{2} \quad 4.16$$

en las ecuaciones anteriores $\bar{\varphi}$ representa las funciones denominadas de masa concentrada, definidas como funciones unitarias en la región baricéntrica correspondiente a un nudo específico, y cero en el resto del dominio. R es el dominio de solución y Γ la porción de su frontera sujeta a una condición de tipo Neumann, Δ es el área del elemento, $\bar{K}$ es la conductividad en el elemento calculada como el promedio aritmético de las conductividades obtenidas en cada una de sus esquinas (como consecuencia de la forma adoptada para las funciones de base), C_j es la capacidad específica estimada en el nudo j , L_j es la longitud de frontera correspondiente a cada nudo bajo condición de Neumann, m y p son factores geométricos definidos según las funciones de base: $m_i = z_j - z_k$ y $p_i = x_j - x_k$ donde los subíndices i, j , y k corresponden a las esquinas del elemento triangular y corren sobre sus tres posibles permutaciones secuenciadas.

4.2. Flujo del agua sobre la superficie del suelo: ecuaciones de Saint-Venant

4.2.1. Esquema numérico para la fase de avance

La descripción del flujo del agua en el riego por melgas requiere tener en cuenta la ecuación de Richards para describir el flujo del agua en el suelo y las ecuaciones de Saint-Venant para el flujo del agua sobre la superficie del suelo, de tal forma que su acoplamiento permita conocer las formas de los perfiles de flujo superficial y la distribución de los potenciales de presión en el suelo según avanza el riego. El tirante proporcionado por la solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant se utiliza para definir una condición de frontera tipo Dirichlet para la ecuación de Richards, cuya solución numérica permite el cálculo de la lámina infiltrada necesaria para la solución de las ecuaciones de Saint-Venant, teniéndose por lo tanto un procedimiento iterativo.

El esquema numérico para resolver las ecuaciones de Saint-Venant en su forma completa (ecuaciones 2.1 y 2.2) tiene como base el esquema presentado por Strelkoff y Katopodes (1977) para la forma de inercia cero de las ecuaciones de Saint-Venant. La solución de las formas discretas linealizadas de las ecuaciones de Saint-Venant obtenida aproximando el gasto y tirante medios para cada celda de cálculo centrados en el espacio e implícitos en el tiempo, permite obtener una solución numérica para la forma del perfil de flujo superficial que cumple con el requisito de ser monótona decreciente en el sentido del movimiento del agua, situación que no se cumple en el caso de algunas de las aproximaciones reportadas en la literatura, cuando son estimados el gasto y tirante medios para cada celda de cálculo centrados en espacio y tiempo. La falta de monotonía de la forma del perfil de flujo superficial no es reportada de manera explícita en la literatura (Walker y Scogerboe, 1983; Strelkoff, 1983, Catalán *et al.* 1988), sin embargo al hacer uso de los procedimientos descritos en estos trabajos, es posible detectar el problema que existe en la monotonía de la solución para el perfil de flujo superficial, situación que no se presenta cuando se utiliza el esquema numérico desarrollado para el modelo hidrodinámico completo.

4.2.2 Condiciones límites

Las condiciones inicial y de frontera que deben sujetar a las ecuaciones de Saint-Venant para modelar la fase de avance en el riego por melgas son las siguientes:

$$q(x,0)=0 \quad \text{y} \quad h(x,0)=0 \quad 4.31$$

$$q(0,t)=q_0, \quad q(x_f,t)=0, \quad h(x_f,t)=0 \quad 4.32$$

donde $x_f(t)$ es la posición del frente de onda para el tiempo t y q_0 el gasto de aporte en la entrada de la melga, que puede variar en el tiempo en caso de requerirse.

4.2.3 Solución numérica monótona de las ecuaciones de Saint-Venant

La ecuación de continuidad se discretiza utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas considerando la deformación de la frontera del dominio de solución para seguir el frente de avance. En la ilustración 4.2 se muestra la disposición de las celdas para expresar en diferencias finitas las ecuaciones de Saint-Venant.

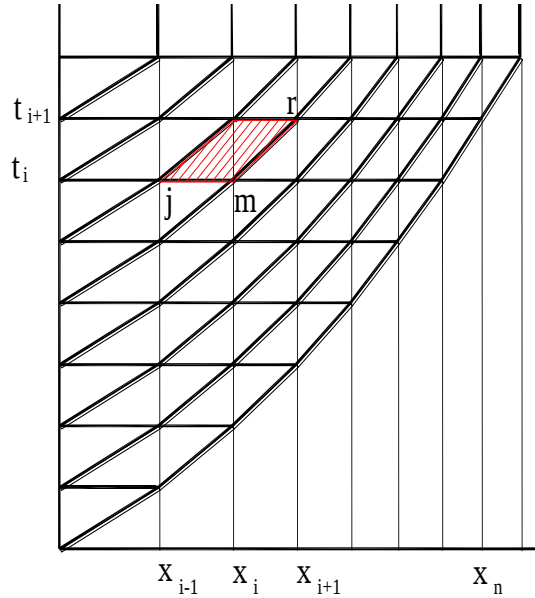


Ilustración 4.2. Disposición de las celdas de cálculo para la fase de avance.

La forma discreta de la ecuación de continuidad es:

$$\begin{aligned} & [\omega q_i + (1-\omega)q_j] \delta t - (x_i - x_j) [\omega(h_i + l_i) + (1-\omega)(h_j + l_j)] \\ & - [\omega q_r + (1-\omega)q_m] \delta t + (x_r - x_m) [\omega(h_r + l_r) + (1-\omega)(h_m + l_m)] \\ & - [\phi h_i + (1-\phi)h_r + \phi l_i + (1-\phi)l_r] (x_r - x_i) \\ & + [\phi h_j + (1-\phi)h_m + \phi l_j + (1-\phi)l_m] (x_m - x_j) = 0 \end{aligned} \quad 4.33$$

Para obtener formas monótonas de los perfiles de flujo superficial, se propone la siguiente forma discreta de la ecuación de momentum:

$$\begin{aligned}
& 2\bar{q}\bar{h}(q_r - q_l)\delta t + (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)(h_r - h_l)\delta t \\
& + \bar{h}^2(x_r - x_l) [\omega q_r + (1 - \omega)q_l - \omega q_m - (1 - \omega)q_j] \\
& + g\delta t \bar{h}^3(x_r - x_l) [\omega J_r + (1 - \omega)J_l - J_o] + \\
& + \beta \delta t \bar{q}\bar{h}(x_r - x_l) [\omega I_r + (1 - \omega)I_l - \omega I_m - (1 - \omega)I_j] = 0
\end{aligned}
\tag{4.34}$$

los valores medios de gasto y tirante por celda pueden ser calculados ponderando en el tiempo y en el espacio los valores de los extremos de la misma, sin embargo, es conveniente calcular los valores medios para cada celda ponderando en el espacio y utilizando valores implícitos en el tiempo:

$$\bar{q} = (1 - \phi)q_m + \phi q_j \tag{4.35}$$

$$\bar{h} = (1 - \phi)h_m + \phi h_j \tag{4.36}$$

Se introducen las variables pequeñas δh_r , δq_r , δh_l , δq_l , tales que, para las celdas interiores se tiene:

$$h_l = h_j + \delta h_l \tag{4.37}$$

$$h_r = h_m + \delta h_r \tag{4.38}$$

$$q_l = q_j + \delta q_l \tag{4.39}$$

$$q_r = q_m + \delta q_r \tag{4.40}$$

La variable δq_r de la última celda es sustituida por la variable $\delta \delta$ que denota la corrección a la posición del frente de avance:

$$x_{fi} = x_{fi-1} + \delta \delta \tag{4.41}$$

Donde x_{fi} es la posición del frente de avance para el tiempo i - ésimo. Para la primera celda se escribe:

$$h_l = h_m + \delta h_l \tag{4.42}$$

$$q_l = q_m + \delta q_l \tag{4.43}$$

El sistema de ecuaciones algebraicas es resuelto utilizando el método del gradiente conjugado preconditionado, lo anterior tiene como finalidad reducir los errores de redondeo asociados con la utilización de métodos directos.

Los factores de peso en el tiempo y el espacio se denotan como ω y ϕ respectivamente. Las expresiones que definen las entradas del sistema matricial se muestran a continuación según el tipo de celda que se trate:

CONTINUIDAD

Primera celda

$$[-\phi(x_r - x_l)]\delta h_l + [-\omega\delta t]\delta q_r + [(\omega + \phi - 1)(x_r - x_l)]\delta h_r =$$

$$-\omega\delta tq_l - [\omega(h_m + l_r) + (1 - \omega)(h_m + l_m) - \phi h_m - \phi l_l - (1 - \phi)h_m - (1 - \phi)l_r](x_r - x_l) \quad 4.44$$

Celdas interiores

$$[\omega\delta t]\delta q_l + [-\omega(x_m - x_j) - \phi(x_r - x_l)]\delta h_l + [-\omega\delta t]\delta q_r + [(\omega + \phi - 1)(x_r - x_l)]\delta h_r =$$

$$\delta t(q_m - q_j) - [\phi h_j + \phi l_j + (1 - \phi)h_m + (1 - \phi)l_m - \omega(h_j + l_l) + (1 - \omega)(h_j + l_j)](x_m - x_j)$$

$$-[\omega(h_m + l_r) + (1 - \omega)(h_m + l_m) - \phi h_j - \phi l_l - (1 - \phi)h_m - (1 - \phi)l_r](x_r - x_l) \quad 4.45$$

Última celda

$$[\omega\delta t]\delta q_l + [-\omega(x_m - x_j) - \phi(x_m - x_j)]\delta h_l + [-\phi(h_j + l_j)]\delta\delta =$$

$$-\delta tq_j - [\phi h_j + \phi l_j + \omega(h_j + l_l) - (1 - \omega)(h_j + l_j) + \phi h_j + \phi l_l](x_m - x_j) \quad 4.46$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Primera celda

$$\begin{aligned}
& \left[-2\delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3\phi g\delta t \bar{h}^3 (x_r - x_l) \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_l + \left[2\bar{q}\bar{h}\delta t + (1-\phi) \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_r - x_l) \frac{J_m}{q_m} + (1-\phi)\bar{h}^2 (x_r - x_l) \right] \delta q_r \\
& + \left[\delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3(1-\phi)g\delta t \bar{h}^3 (x_r - x_l) \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_r = -g\delta t \bar{h}^3 (x_r - x_l) (J_m - J_o) \\
& - \beta \bar{q}\bar{h} (x_r - x_l) [(1-\phi)I_r + \phi I_l - I_m]
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Celdas interiores:

$$\begin{aligned}
& \left[-2\bar{q}\bar{h}\delta t + \phi \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_r - x_l) \frac{J_j}{q_j} + \phi \bar{h}^2 (x_r - x_l) \right] \delta q_l + \left[-\delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3\phi g\delta t \bar{h}^3 (x_r - x_l) \frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_l + \\
& \left[2\bar{q}\bar{h}\delta t + (1-\phi) \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_r - x_l) \frac{J_m}{q_m} + (1-\phi)\bar{h}^2 \right] \delta q_r + \left[-\delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3(1-\phi)g\delta t \bar{h}^3 (x_r - x_l) \frac{J_m}{h_m} \right] \delta h_r \\
& = -2\bar{q}\bar{h}\delta t (q_m - q_j) - \delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) (h_m - h_j) - g(x_r - x_l)\delta t \bar{h}^3 ((1-\phi)J_m + \phi J_j - J_o) \\
& - \beta \bar{q}\bar{h} (x_r - x_l) \{ [(1-\phi)I_r - \phi I_l] - [(1-\phi)I_m - \phi I_j] \}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Última celda

$$\begin{aligned}
& \left[-2\bar{q}\bar{h}\delta t + \phi \frac{g\delta t}{d} \bar{h}^3 (x_m - x_j) \frac{J_j}{q_j} + \bar{h}^2 (x_m - x_j) \right] \delta q_l + \left[-\delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) - 3\phi g\delta t \bar{h}^3 (x_m - x_j) \frac{J_j}{h_j} \right] \delta h_l + \\
& \left[g\delta t \bar{h}^3 (J_j - J_o) + \phi \beta \bar{q}\bar{h} (I_l - I_j) \delta \delta \right] = 2\bar{q}\bar{h}\delta t q_j + \delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) h_j - g\delta t \bar{h}^3 (x_m - x_j) (J_j - J_o) \\
& - \phi \beta \bar{q}\bar{h} (x_m - x_j) (I_l - I_j)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Para el primer nivel de tiempo se tiene:

Continuidad

$$[-\phi(x_r - x_l)]\delta h_l + [-\phi l_l]\delta\delta = -\omega\delta t q_l \quad 4.50$$

Cantidad de movimiento

$$[-2\delta t (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)]\delta h_l + [2g\bar{h}^3(J_l - J_o) + \bar{h}^2 q_l + \beta\bar{q}\bar{h}l_l]\delta\delta = 4\bar{q}\bar{h}\delta t q_l \quad 4.51$$

Esquema numérico para las fases de almacenamiento, consumo y recesión

Para el desarrollo del esquema numérico para las fases de almacenamiento, consumo y recesión, se obtuvo por un procedimiento similar al de la fase de avance, en este caso la disposición de la malla lagrangiana se muestra en la ilustración 4.3.

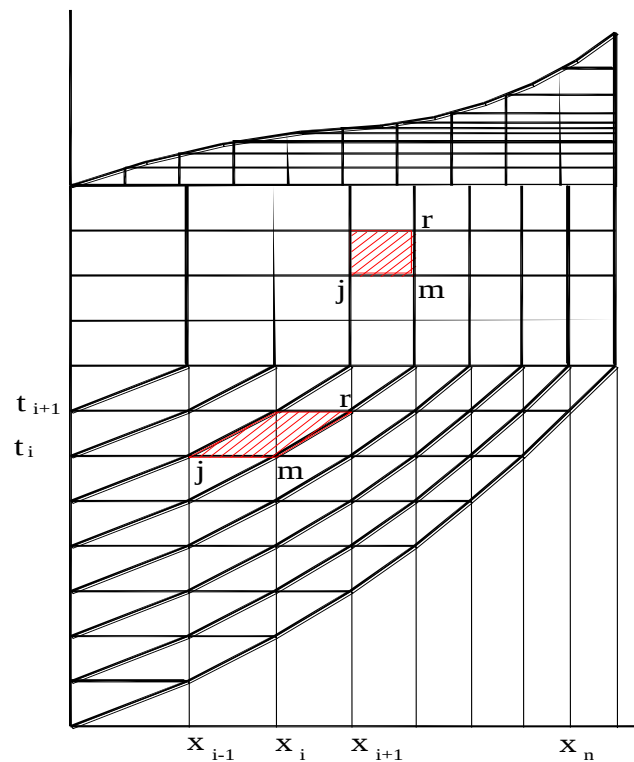


Ilustración 4.3. Disposición de la malla lagrangiana para las fases de avance almacenamiento, consumo y recesión.

5. Eficiencias en el riego por melgas

5.1 Eficiencia de aplicación

La eficiencia de aplicación (E_a) se define como:

$$E_a = \frac{V_r}{V_p} \quad 5.1$$

donde V_r es el volumen requerido para satisfacer las necesidades de agua en la zona de raíces del cultivo [L^3] y V_p es el volumen de proyecto [L^3]. V_r se obtiene con la expresión: $V_r = L_n A_r$, donde L_n es la lámina de riego neta [L], definida conforme a los requerimientos de agua del cultivo, y A_r es la superficie de riego considerada [L^2]. El volumen de proyecto se calcula como: $V_p = Q_p T_r$ donde Q_p es el gasto de proyecto [$L^3 T^{-1}$] y T_r es el tiempo requerido para el riego [T]. Si en la expresión (5.1) el numerador y el denominador se dividen entre A_r se obtiene: $E_a = L_n / L_b$, siendo L_b la lámina de riego bruta y L_n la lámina de riego neta.

5.2 Eficiencia de requerimiento de riego

La eficiencia de requerimiento de riego (E_r) se define como:

$$E_r = \frac{V_d}{V_r} \quad 5.2$$

donde V_r y V_d son respectivamente el volumen requerido por el cultivo y el volumen disponible [L^3]. Esta eficiencia indica la manera en que se están satisfaciendo las necesidades de agua del cultivo

5.3 Eficiencia de uniformidad

En el riego, lo ideal es que todas las plantas reciban la misma cantidad de agua, situación que equivale a aplicar una lámina uniforme en toda la longitud de la melga.

Para evaluar la uniformidad en la distribución de la lámina infiltrada se utiliza el coeficiente de uniformidad de Christiansen (CUC):

$$CUC = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |l_i - \hat{l}|}{n\hat{l}} \quad 5.3$$

donde I_i es la lámina infiltrada en el punto i [L], $\hat{I}$ es la lámina infiltrada media [L] y n es el número de puntos considerados para efectuar el cálculo. Generalmente se considera que un CUC mayor o igual que 0.80 es aceptable en el riego por melgas (Rendón *et al.*, 1997).

5.4 Cálculo del gasto óptimo

Los modelos se utilizan para la determinación del gasto para el cual se obtiene la mayor eficiencia de uniformidad manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego, es decir, para determinar el gasto óptimo de riego teniendo en cuenta diferentes láminas de riego y longitudes de melga. En el caso de los dos modelos comparados en este trabajo, los parámetros que intervienen se determinaron utilizando los valores reportados en la literatura por Rawls y Brakensiek (1983) relacionados con el triángulo de texturas.

Textura del suelo	Porosidad Total ϵ , (cm ³ /cm ³) (θ_s) Contenido de humedad a saturación	Capacidad de Campo (cm ³ /cm ³) (θ_{cc})	Punto de marchitamiento permanente (cm ³ /cm ³) (θ_{pmp})	Contenido de humedad inicial (cm ³ /cm ³) (θ_o)	Presión en el frente de humedecimiento (cm) (hf)	Conductividad hidráulica a saturación (cm/h) (K _s)
Arcilla	0.49	0.48	0.24	0.360	100	0.05
Arcilla Limosa	0.48	0.43	0.21	0.320	100	0.05
franco-arcillo-limoso	0.48	0.37	0.20	0.285	58	0.08
Franco-arcilloso	0.48	0.35	0.19	0.270	35	0.15
Arcilla-arenosa	0.43	0.35	0.23	0.290	28	0.18
Limo	0.50	0.28	0.09	0.185	33	0.40
Franco	0.48	0.24	0.14	0.190	22	0.70
Franco-limoso	0.54	0.28	0.13	0.205	28	0.58
Franco-arcillo-arenoso	0.42	0.23	0.15	0.190	12	1.00
Franco-arenoso	0.44	0.17	0.09	0.130	11	3.00

Cuadro 5.1. Características hidrodinámicas para el diseño de riego por melgas. Modelo hidrológico.

Es posible obtener relaciones entre el gasto óptimo y la longitud de melga para diversos tipos de suelo, diferenciados según su caracterización hidrodinámica, procediendo como a continuación se indica.

El contenido volumétrico de agua residual ha sido asumido igual a cero de acuerdo con Fuentes *et al.* (1992).

El contenido volumétrico de agua necesario para asignar la condición inicial para la ecuación de Richards se determinó teniendo en cuenta la humedad aprovechable de cada tipo de suelo, suponiendo que se ha consumido el 50% de dicha humedad antes de la aplicación del riego. La humedad aprovechable se determinó restando los contenidos volumétricos de agua correspondiente a la capacidad de campo (CC) y al punto de marchitamiento permanente (PMP), los valores de CC Y PMP para cada tipo de suelo fueron calculados conforme a los reportados por Rawls y Brakensiek (1983) asociados al triángulo de texturas.

$$\theta_o = \frac{\theta_{cc} - \theta_{pmp}}{2} + \theta_{pmp} \quad 5.4$$

Para el caso de modelo hidrodinámico completo, las características hidrodinámicas se muestra en el cuadro (5.2); se tiene que el contenido volumétrico de agua a saturación ha sido asimilado a la porosidad total del suelo (Φ), los valores de dicha porosidad han sido determinados haciendo uso de los valores proporcionados por Rawls y Brakensiek (1983) en relación con la textura del suelo.

Para determinar el valor del parámetro de forma m de la característica de humedad del suelo, se construyó una curva granulométrica para cada suelo con base en los porcentajes de arena, limo y arcilla presentes en el triángulo de texturas (IMTA, 1997). La curva granulométrica fue ajustada usando la siguiente ecuación (Fuentes, 1992):

$$F(D) = \left[1 + \left(\frac{D_g}{D} \right)^N \right]^{-M} \quad 5.5$$

y se siguió el procedimiento sugerido por Fuentes *et al.* (1992) para determinar los valores de m y η ; haciendo uso en el último caso de la porosidad total del suelo. La conductividad hidráulica a saturación se obtuvo de los gráficos reportados por Rawls y Brakensiek (1983) según la textura del suelo. La escala de presiones Ψ_d se determinó en relación con el parámetro de succión en el frente de humedecimiento (h_f) de la ecuación de Green y Ampt (1911) estimado para cada suelo mediante los gráficos de Rawls y Brakensiek (1983).

En el cuadro 5.2. se muestran los valores de los parámetros involucrados en las características hidrodinámicas para diez tipos de suelo.

Textura del suelo	θ_s (cm ³ /cm ³)	K_s (cm/h)	n	η	m	Ψ_d (cm)
Arcilla	0.490	0.050	2.0468	61.17	0.0229	100
Arcilla limosa	0.480	0.050	2.0920	31.55	0.0440	100
Franco-arcillo-limoso	0.480	0.080	2.1990	15.33	0.0905	58
Franco-arcilloso	0.480	0.150	2.1537	19.30	0.0714	35
Arcilla arenosa	0.430	0.180	2.0676	41.47	0.0327	28
Limo	0.500	0.400	2.6585	5.60	0.2477	33
Franco	0.480	0.700	2.2195	13.93	0.0989	22
Franco limoso	0.540	0.580	2.2637	12.01	0.1165	28
Franco-arcillo-arenoso	0.420	1.000	2.1588	18.44	0.0736	12
Franco arenoso	0.440	3.000	2.2232	13.62	0.1004	11

Cuadro 5.2 Características hidrodinámicas para el diseño de riego por melgas. Modelo hidrodinámico completo.

5.4.1 Relación entre la longitud de la melga y el gasto óptimo

La eficiencia de uniformidad medida a través del coeficiente de uniformidad de Christiansen (CUC) puede obtenerse para diferentes combinaciones de longitud y gasto de aporte en la cabecera de la melga.

Para cada longitud de melga es posible determinar el valor del gasto de aporte que produce un máximo en el coeficiente de uniformidad manteniendo valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego, el gasto así determinado se denomina gasto óptimo. Al correlacionar diversos valores de gastos de aporte óptimos y longitudes de melga es posible establecer que existe una proporción básicamente lineal entre ambas variables para un suelo considerado homogéneo.

La cantidad de agua que es proporcionada en la cabecera de la melga puede calcularse como el producto del gasto de aporte (q_o) por el tiempo de riego (τ_r) mientras que la cantidad de agua que ha sido aplicada en la melga es proporcionada por el producto de la longitud de la melga (L) y la lámina de riego (I_r), el balance de la masa proporciona:

$$q_o \tau_r = L I_r \quad 5.6$$

entonces:

$$q_o = \frac{l_r}{\tau_r} L \quad 5.7$$

si se especifican el tipo de suelo, la pendiente topográfica de la melga y el factor de fricción de la ley de resistencia hidráulica, es posible encontrar una relación lineal entre el gasto de aporte y la longitud de la melga, es decir:

$$q_o = c L \quad 5.8$$

la comparación de las ecuaciones (5.7) y (5.8) implica que:

$$c = \frac{l_r}{\tau_r} \quad 5.9$$

como c es un valor constante, se deduce que para la aplicación de una lámina de riego específica existe un tiempo de riego único para obtener un valor máximo del coeficiente de uniformidad.

A manera de ejemplo se muestra en la ilustración 5.1, 5.2, y 5.3, la relación que guardan el gasto óptimo y la longitud de la melga para los suelos, *franco-arcilloso*, *arcilla* y *limo* las láminas aplicadas son 8, 10 y 12 cm.

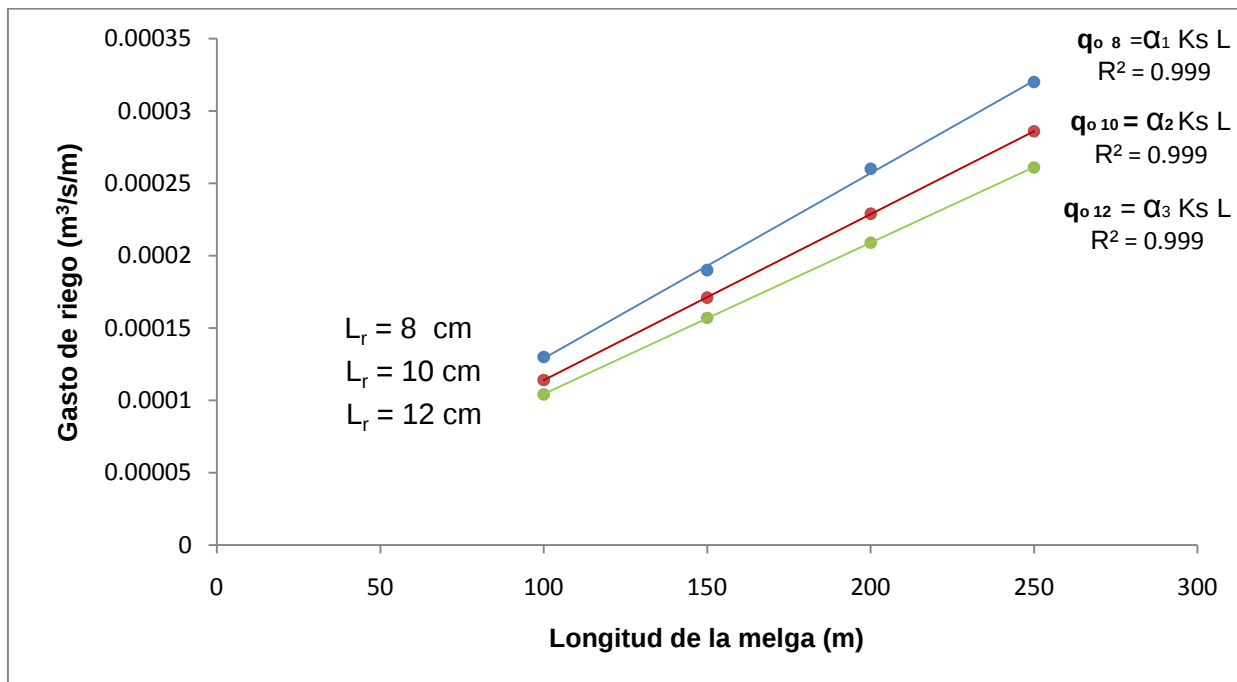


Ilustración 5.1. Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo *franco-arcilloso* para tres láminas de riego: 8, 10 y 12 cm, considerando que $\alpha_1 = 3.05$, $\alpha_2 = 2.58$, $\alpha_3 = 2.35$. K_s expresado en m/s.

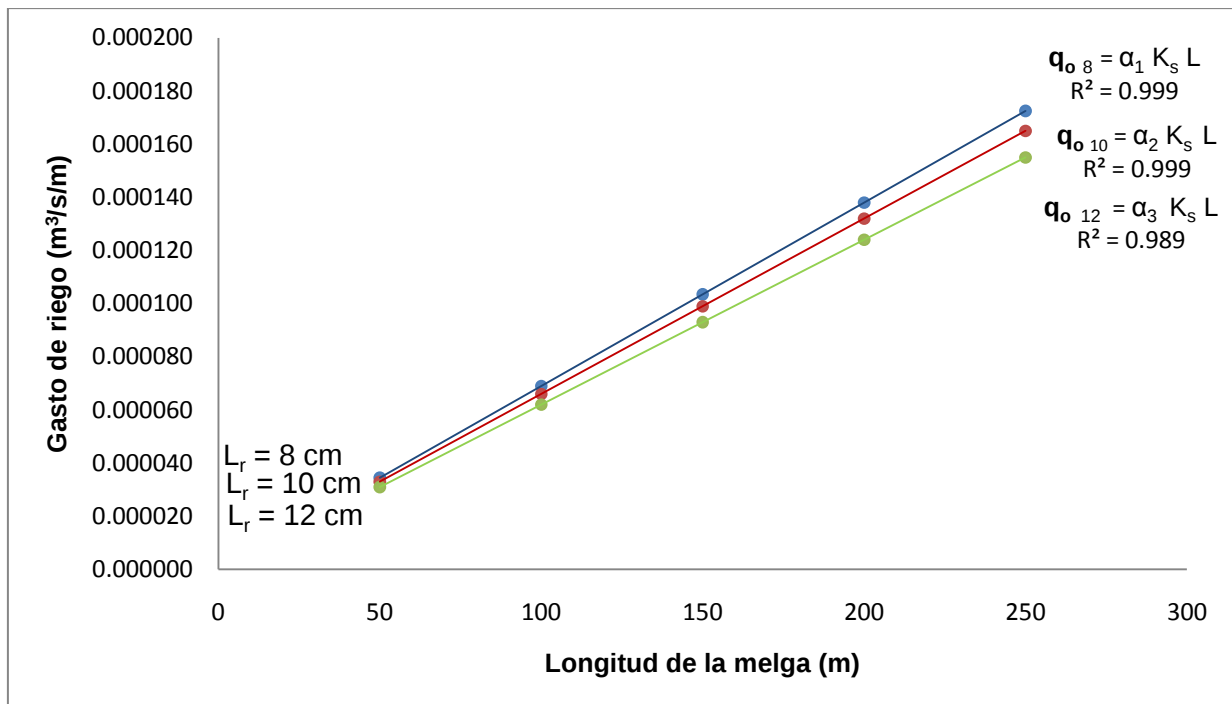


Ilustración 5.2. Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo tipo *arcilla* para tres láminas de riego: 8, 10 y 12 cm, considerando que $\alpha_1 = 24.82$, $\alpha_2 = 23.74$, $\alpha_3 = 22.30$. K_s expresado en m/s.

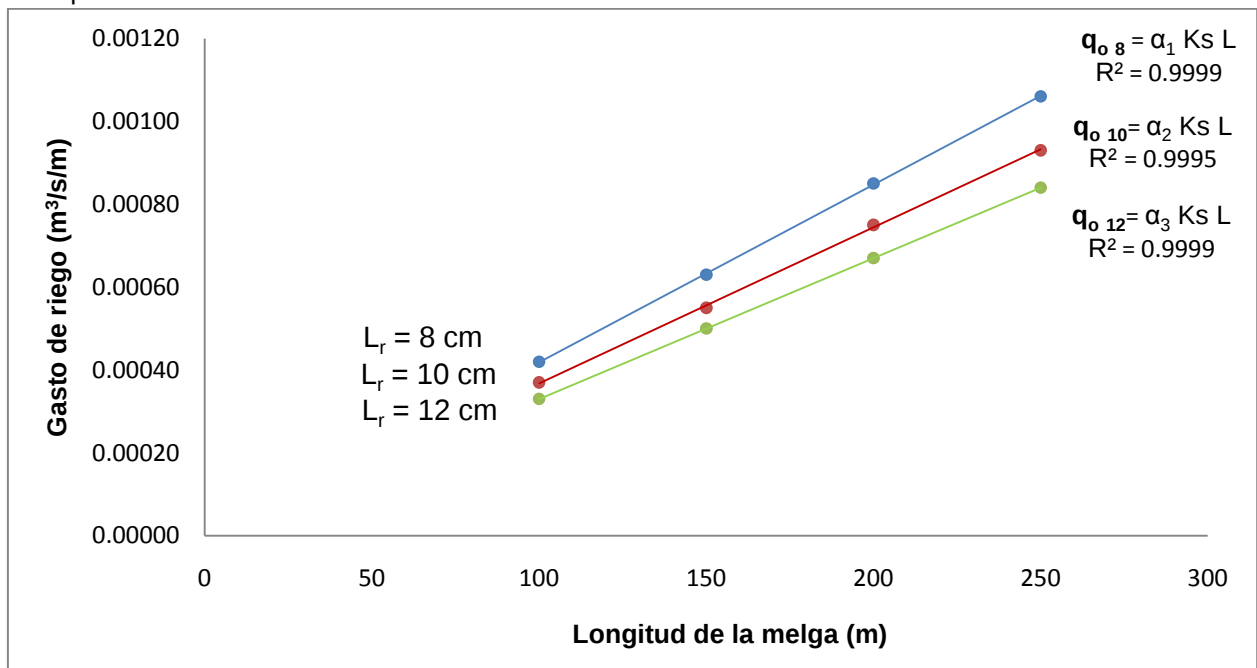


Ilustración 5.3. Relación entre la longitud de melga y el gasto de aporte óptimo para el suelo tipo *limo* para tres láminas de riego: 8, 10 y 12 cm, considerando que $\alpha_1 = 3.09$, $\alpha_2 = 2.73$, $\alpha_3 = 2.45$. K_s expresado en m/s.

6. Comparación del modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico

6.1 Introducción

El objetivo del diseño de riego por melgas es conseguir la aplicación de una lámina de riego requerida por el cultivo de la manera más uniforme, conservando valores lo más elevados posibles de las eficiencias de aplicación y de requerimiento de riego. El diseño del riego consiste en determinar el gasto de aporte y el tiempo durante el cual se aplica dicho gasto en la cabecera de la melga de forma tal que se cumpla con el objetivo mencionado, las variables predeterminadas son la longitud de la melga y aquellas relacionadas con la caracterización hidrodinámica del suelo.

Para el diseño del riego por melgas se pueden utilizar dos métodos (Rendón *et al.*, 1997): pruebas de riego y modelos matemáticos.

Las pruebas de riego consisten en hacer experimentos de campo en donde las variables experimentales son el gasto de riego, la longitud de la melga y el tipo de suelo. Con base en los resultados de los experimentos, para cada tipo de suelo se obtiene una tabla o una relación empírica en donde se representan las combinaciones de gasto de riego unitario y longitud que permiten aplicar uniformemente una lámina de riego específica.

Las pruebas de riego tienen la desventaja de requerir un tiempo considerable para su ejecución, son costosas y se debe efectuar un gran número de ellas. Por estas razones son recomendadas sólo para calibrar los métodos de diseño (Rendón *et al.* 1997).

En la actualidad existen diversos modelos que permiten la descripción de las cuatro fases del riego por melgas haciendo uso de ecuaciones diferenciales o algebraicas, de tal forma que utilizando estos modelos matemáticos es posible describir el flujo del agua tanto en el suelo como sobre la superficie del mismo, prediciendo con cierto grado de aproximación el comportamiento de las variables hidráulicas durante el riego, en consecuencia, es posible estimar el gasto para el cual se tendrá la mayor uniformidad dadas las condiciones del suelo. Entre los modelos disponibles se puede mencionar el RIGRAV (Rendón *et al.* 1997) que utiliza una combinación del modelo hidrológico para describir el flujo superficial y la ecuación de Green y Ampt (1911) para modelar el flujo del agua en el suelo. Otro modelo disponible es el BRDFW (Strelkoff *et al.* 1983), que utiliza la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo superficial y una ley de infiltración tipo Kostiaikov para describir el flujo del agua en el suelo, es decir, una forma que no tiene base físico-matemática para la descripción del fenómeno.

Otro modelo es el mencionado anteriormente (Saucedo, 2003), que utiliza la forma completa de las ecuaciones de Saint-Venant para describir el flujo superficial y la ecuación de Richards para describir el flujo del agua en el suelo, y tiene utilidad con fines de diseño del riego por melgas, con las ventajas de incorporar dos ecuaciones con base físico-matemática para describir el proceso.

6.2 Comparación de modelos

La comparación de los resultados obtenidos mediante la aplicación del modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico en riego por melgas, en términos de los perfiles de flujo y la distribución final de la lámina infiltrada, se realizó para tres tipos de suelos contrastantes: limo, franco-arcilloso y arcilla.

Para propiciar una evolución en el tiempo de la lámina infiltrada, semejante en el caso de las ecuaciones utilizadas para describir el flujo del agua en el suelo, es decir la ecuación de Green y Ampt para el modelo hidrológico y la ecuación de Richards para el modelo hidrodinámico completo, se realizó el ajuste del parámetro h_f de la ecuación de Green y Ampt de manera de reproducir la evolución de la lámina infiltrada proporcionada por la ecuación de Richards, los resultados del ajuste se muestran en las ilustraciones 6.1 a 6.3.

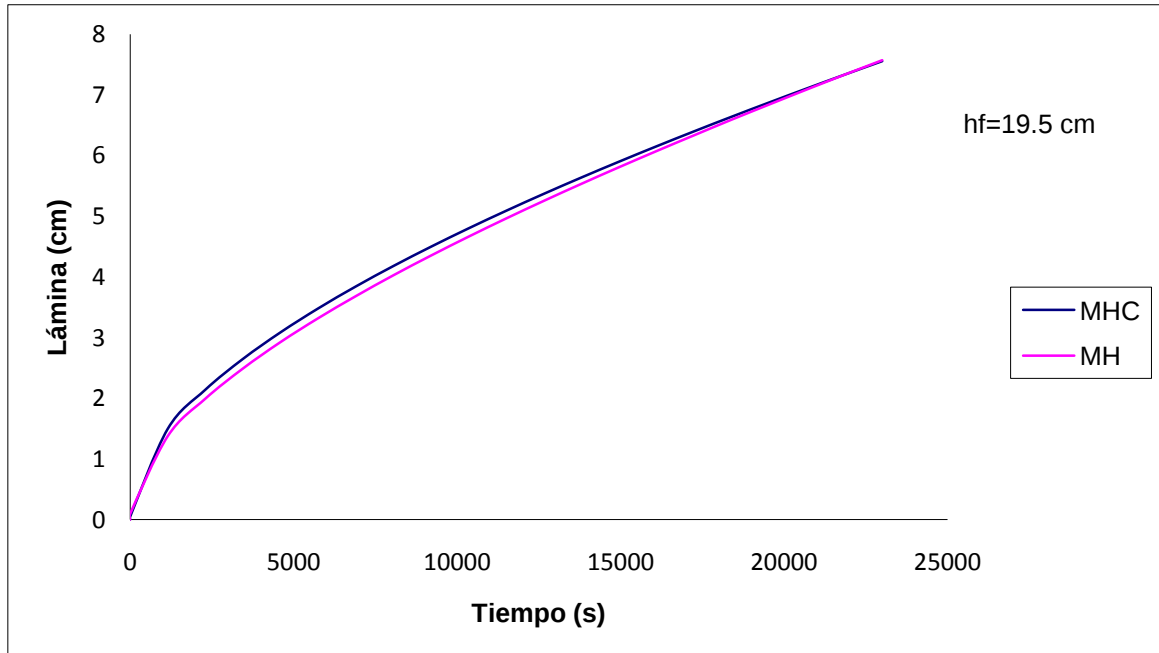


Ilustración 6.1. Evolución de la lámina infiltrada obtenida mediante las ecuaciones de Richards y de Green y Ampt para el suelo tipo limo.

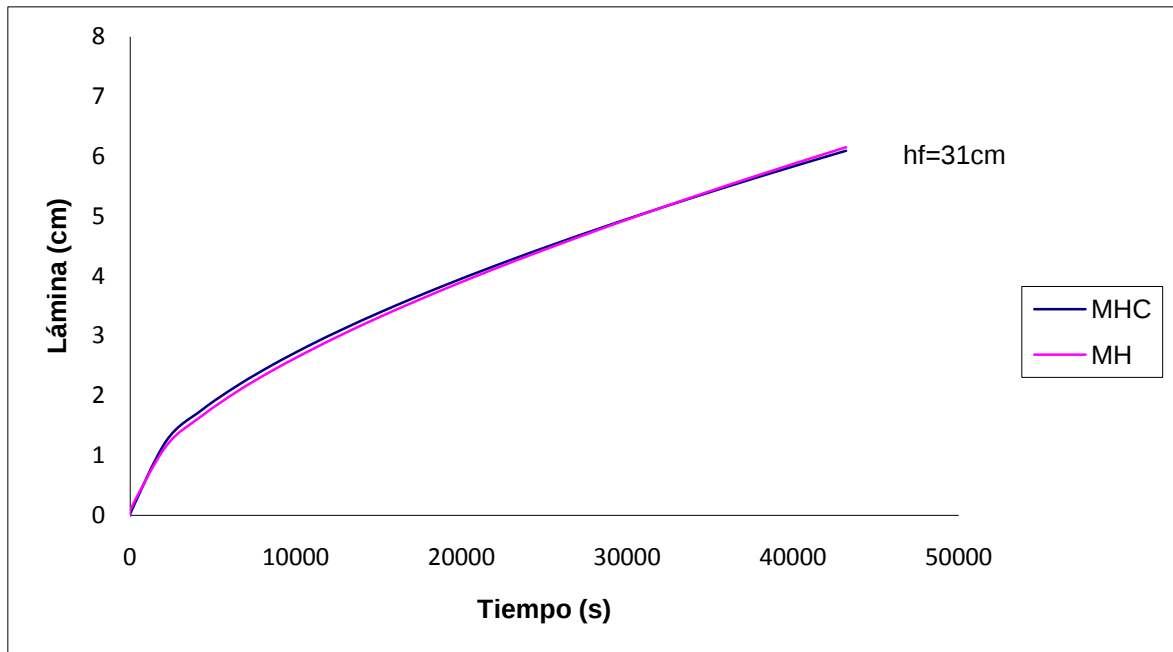


Ilustración 6.2. Evolución de la lámina infiltrada obtenida mediante las ecuaciones de Richards y de Green y Ampt para el suelo tipo franco arcilloso.

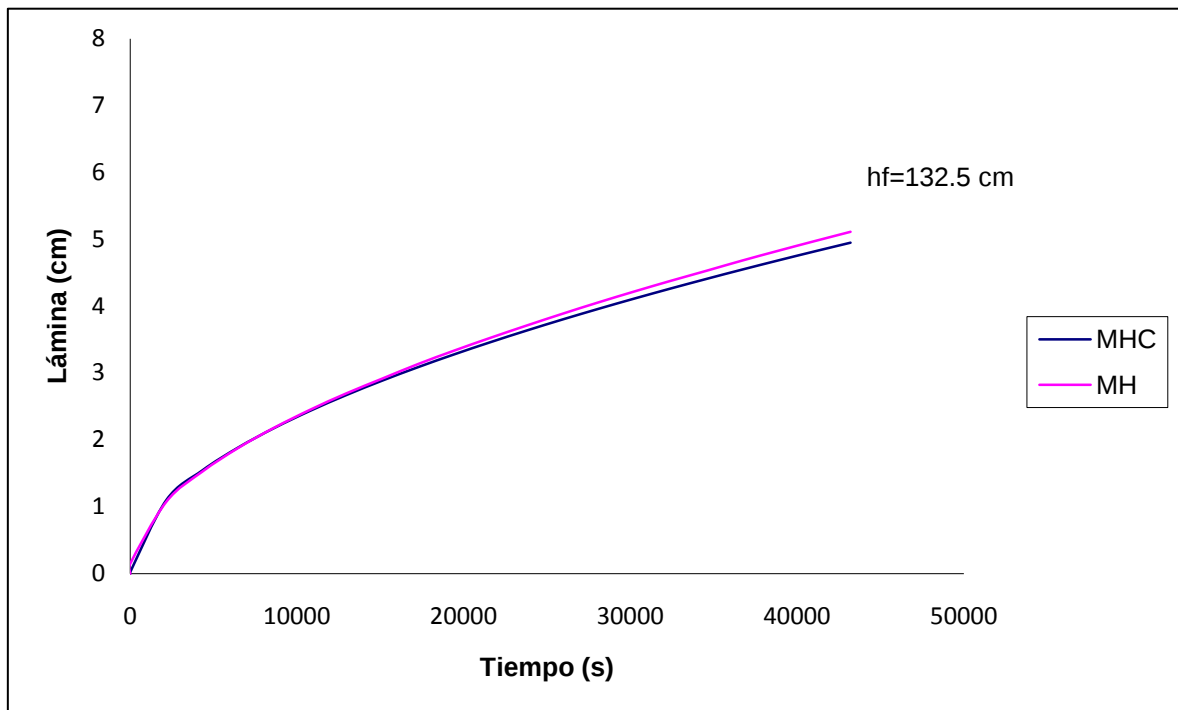


Ilustración 6.3. Evolución de la lámina infiltrada obtenida mediante las ecuaciones de Richards y de Green y Ampt para el suelo tipo arcilla.

Una vez realizado el ajuste de parámetros de la ecuación de Green y Ampt de manera de reproducir la evolución de la lámina infiltrada proporcionada por la ecuación de Richards, se realizó la comparación de los perfiles de flujo para un tiempo seleccionado durante el riego. En las figura 6.4. a 6.6., puede apreciarse la comparación entre los perfiles de flujo que proporcionan el modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico, el tiempo de las representaciones corresponde con el tiempo en el que se alcanza el final de la fase de avance según el modelo hidrológico, puede apreciarse que, no obstante el ajuste realizado para utilizar evoluciones de la lámina infiltrada muy similares en ambos modelos, existen diferencias entre los perfiles obtenidos, lo cual puede ser debido principalmente al uso de la ecuación de cantidad de movimiento en el modelo hidrodinámico completo, la cual genera una diferencia importante en la representación del fenómeno, ya que el modelo hidrológico solamente hace uso de la ecuación de conservación de la masa.

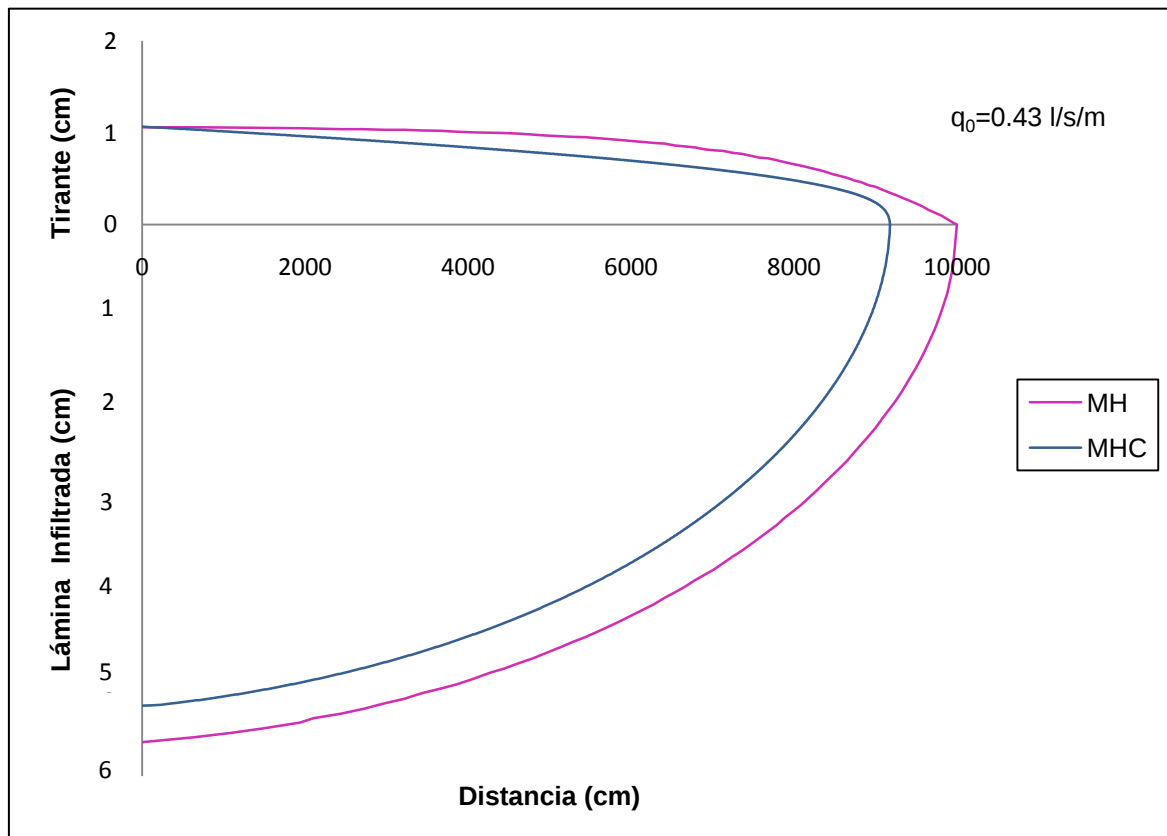


Ilustración 6.4. Perfiles de escurrimiento superficial y subterráneo obtenidos con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo para el suelo tipo limo.

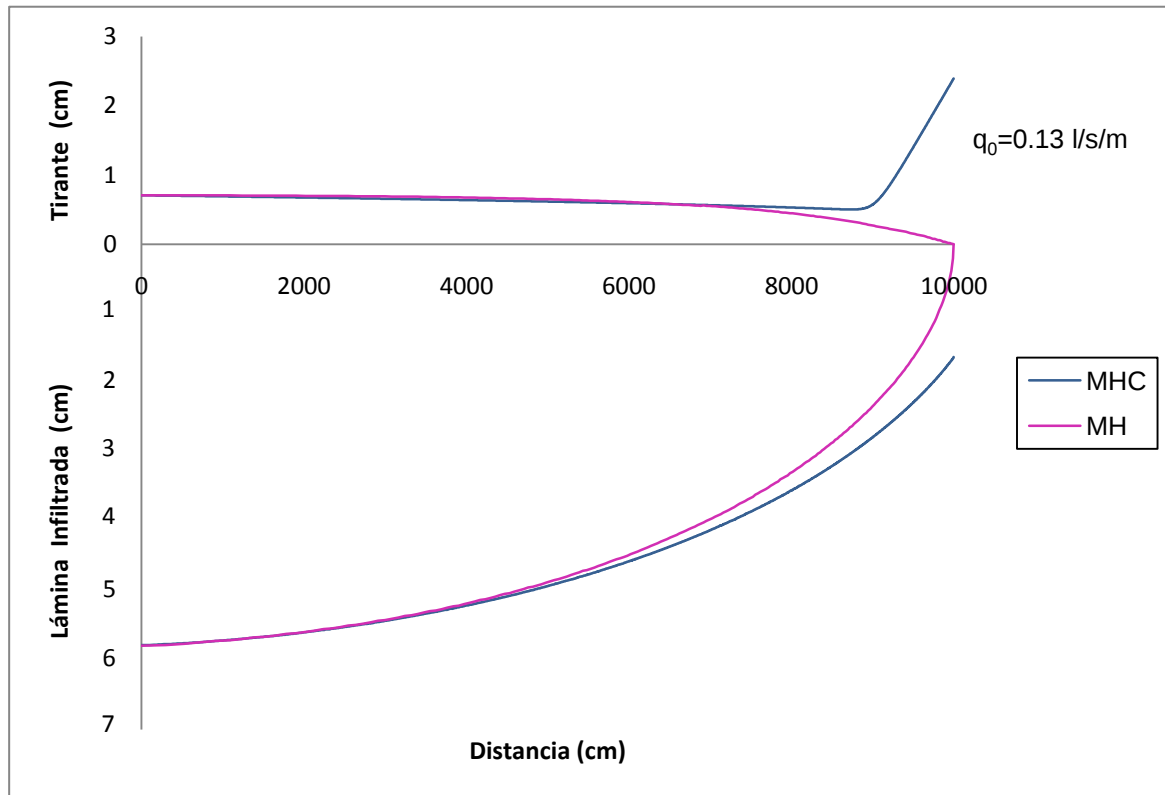


Ilustración 6.5. Perfiles de escurrimiento superficial y subterráneo obtenidos con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo para el suelo tipo franco-arcilloso.

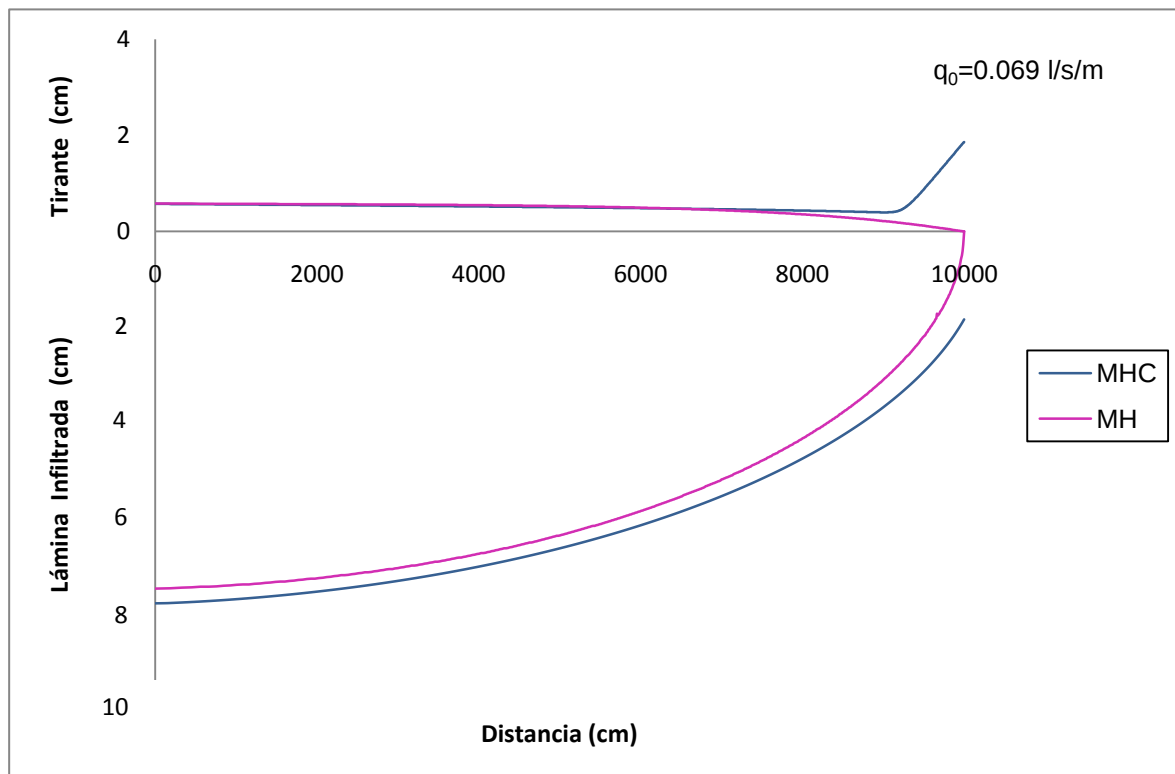


Ilustración 6.6. Perfiles de escurrimiento superficial y subterráneo obtenidos con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo para el suelo tipo arcilloso.

El objetivo básico del riego es que las plantas reciban una misma cantidad de agua, calculada conforme a su requerimiento de riego, independientemente de la posición que ocupan dentro de una parcela de riego. En este sentido, se compararon las distribuciones finales de las láminas infiltradas obtenidas mediante la aplicación del modelo hidrodinámico completo y del modelo hidrológico, las cuales pueden apreciarse en las ilustraciones 6.7 a 6.9.

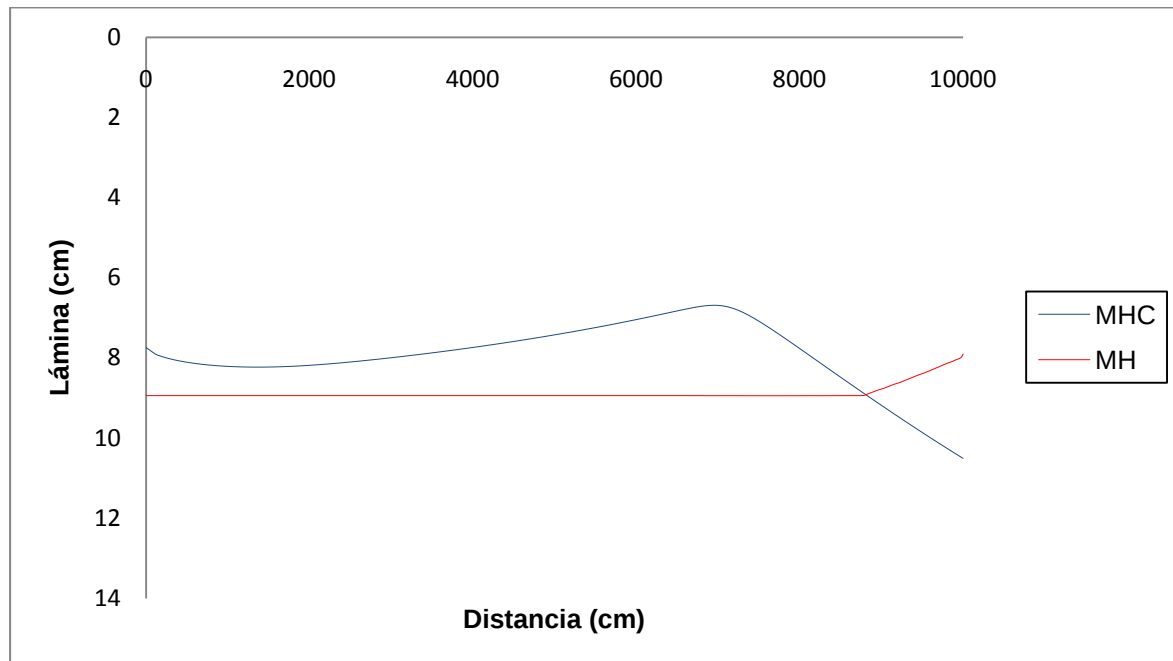


Ilustración 6.7. Perfil de la lámina infiltrada obtenido con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo, para el suelo tipo limo ($L_r = 8$ cm).

En la Ilustración 6.8, se muestra el perfil de la lámina infiltrada obtenido con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo para el suelo tipo franco-arcilloso.

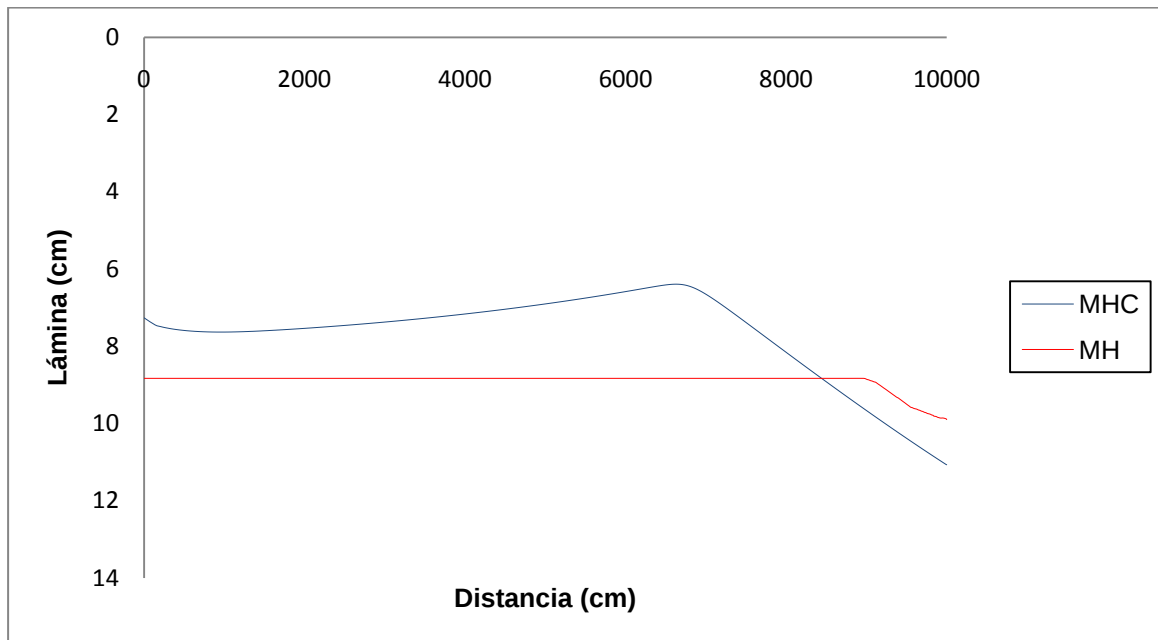


Ilustración 6.8. Perfil de la lámina infiltrada obtenido con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo, para el suelo tipo franco-arcilloso ($L_r = 8$ cm).

En la Ilustración 6.9, se muestra el perfil de la lámina infiltrada obtenido con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo para el tipo de suelo arcilloso.

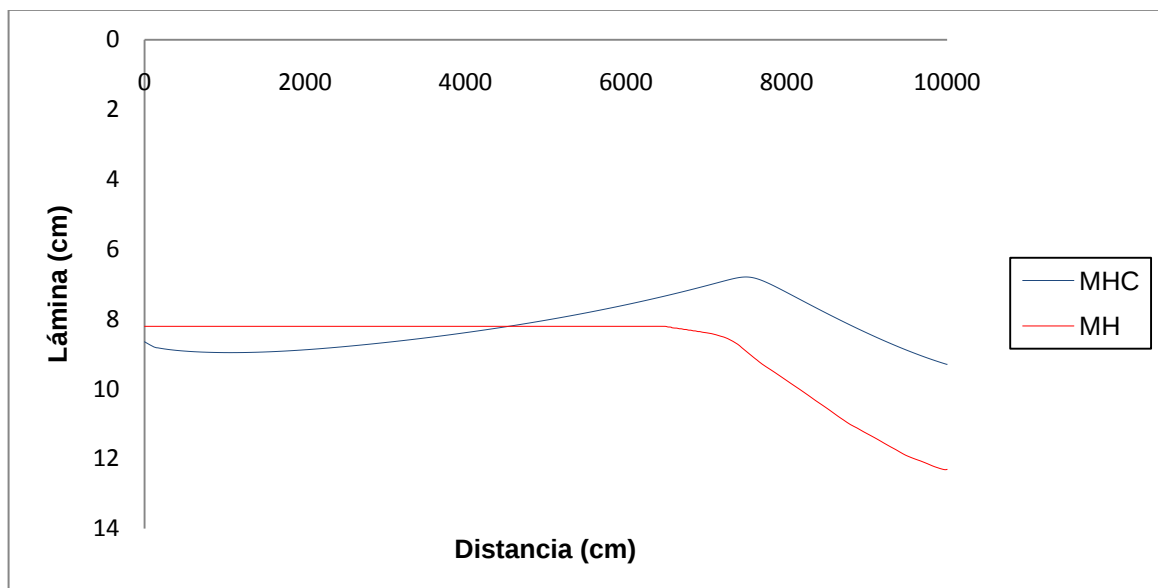


Ilustración 6.9. Perfil de la lámina infiltrada obtenido con el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo, para el suelo tipo arcilloso ($L_r = 8$ cm).

Se calculó el error cuadrático medio entre las distribuciones finales de la lámina infiltrada, de la siguiente forma:

$$E_{cm} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (L_{r_{MHCj}} - L_{r_{MHj}})^2} \quad 6.4$$

donde : $L_{r_{MHCj}}$ es la lámina de riego calculada con el modelo hidrodinámico completo y $L_{r_{MHj}}$ es la lámina de riego calculada con el modelo hidrológico.

Se obtuvo el resultado mostrado en el cuadro 6.1. Puede apreciarse que la diferencia entre las distribuciones finales de la lámina infiltrada calculadas con ambos modelos, crece conforme se incrementa el contenido de arcilla en el suelo.

Textura del suelo	Error cuadrático medio (cm)
Franco-arcilloso	0.97
Limo	1.13
Arcilla	1.72

Cuadro 6.1. Error cuadrático medio para los tipos de suelo franco-arcilloso, limo, arcilla, relacionando los resultados obtenidos del modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico.

6.3 Cuadro de diseño de riego por melgas

Se presentan los cuadros de diseño de riego por melgas. En el cuadro 6.3 se presentan los valores de gasto unitario (C), y tiempo de riego (Tr), para el diseño de riego con base en el modelo hidrológico. En el cuadro 6.4 se presentan los valores de gasto unitario (C), y tiempo de riego (Tr), para diseño de riego con base en el modelo hidrodinámico completo.

Textura del suelo	L _r = 8 cm		L _r = 10 cm		L _r = 12 cm	
	C (l/s/m ²)	Tr (h)	C (l/s/m ²)	Tr (h)	C (l/s/m ²)	Tr (h)
Arcilla	0.00069	18.12	0.00066	19.96	0.00062	22.92
Arcilla Limosa	0.00072	21.21	0.00065	26.57	0.00062	29.55
Franco-arcillo-limoso	0.0009	19.2	0.0008	26.0	0.0007	29.71
Franco-arcilloso	0.0013	13.3	0.0011	17.3	0.0010	20.90
Arcilla-arenosa	0.0012	13.45	0.0010	23.07	0.00095	27.20
Limo	0.0043	4.5	0.0038	5.8	0.0034	7.2
Franco	0.0057	3.4	0.0051	4.4	0.0047	5.3
Franco-limoso	0.0058	3.4	0.0051	4.4	0.0046	5.5
Franco-arcillo-arenoso	0.0054	3.3	0.0052	3.9	0.0048	5.0
Franco-arenoso	0.0185	1.0	0.0171	1.3	0.0160	1.5

Cuadro 6.2. Diseño del riego por melgas: gasto en l/s/m² para la aplicación óptima de la lámina de riego con el modelo hidrológico. Pendiente topográfica $J_o = 0.002$.

Textura del suelo	$L_r = 8 \text{ cm}$		$L_r = 10 \text{ cm}$		$L_r = 12 \text{ cm}$	
	C (l/s/m ²)	Tr (h)	C (l/s/m ²)	Tr (h)	C (l/s/m ²)	Tr (h)
Arcilla	0.00012	224.1	0.0001	338.2	0.00009	445
Arcilla Limosa	0.00014	201.6	0.00012	270.5	0.00011	362.5
Franco-arcillo-limoso	0.00060	44.1	0.00050	66.6	0.00046	82.9
Franco-arcilloso	0.00088	31.4	0.00078	44.0	0.00072	57.8
Arcilla-arenosa	0.00090	28.7	0.00080	42.4	0.00072	52.0
Limo	0.00399	6.90	0.00333	10.0	0.00296	13.7
Franco	0.00411	6.40	0.00354	9.6	0.00326	12.5
Franco-limoso	0.00446	6.20	0.00388	8.8	0.00349	11.6
Franco-arcillo-arenoso	0.00490	5.80	0.00476	7.4	0.00464	9.0
Franco-arenoso	0.02476	1.20	0.02223	1.6	0.02073	2.0

Cuadro 6.3. Diseño del riego por melgas: gasto en l/s/m² para la aplicación óptima de la lámina de riego con el modelo hidrodinámico completo. Pendiente topográfica $J_o=0.002$.

En la ilustración 6.10, se presenta la comparación de los valores de gasto unitario de riego para los diez tipos de suelo correspondientes a una lámina de riego de 10 cm.

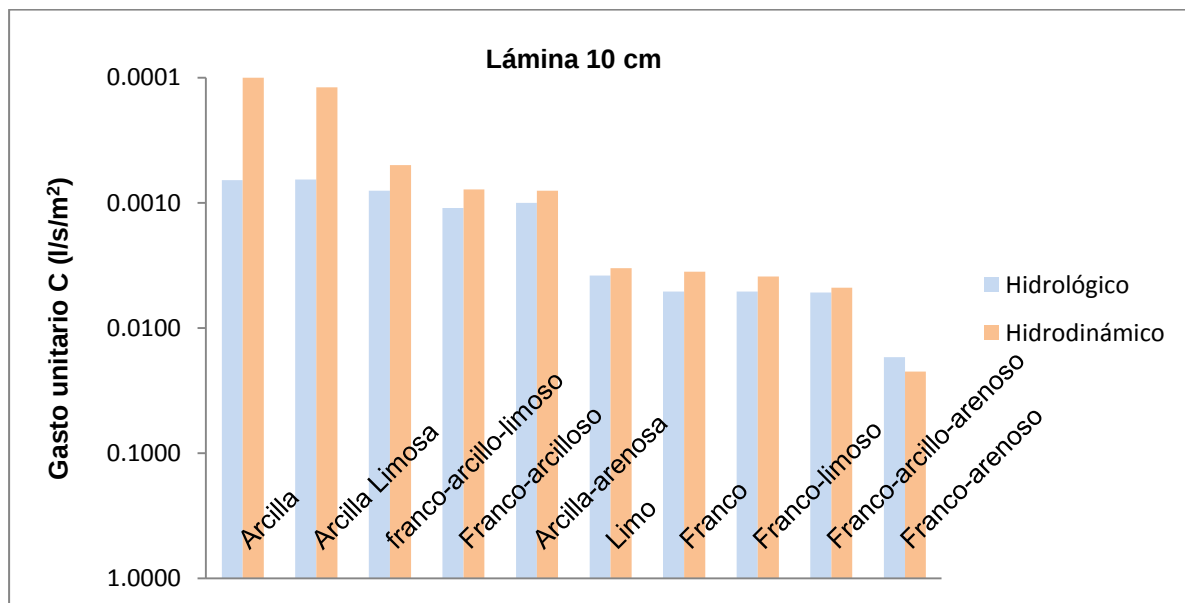


Ilustración 6.10. Comparación del gasto óptimo de riego, entre el modelo hidrológico y el hidrodinámico completo, para cada tipo de suelo, con lámina de 10 cm. Nota: escala logarítmica en los valores de gasto y en orden inverso.

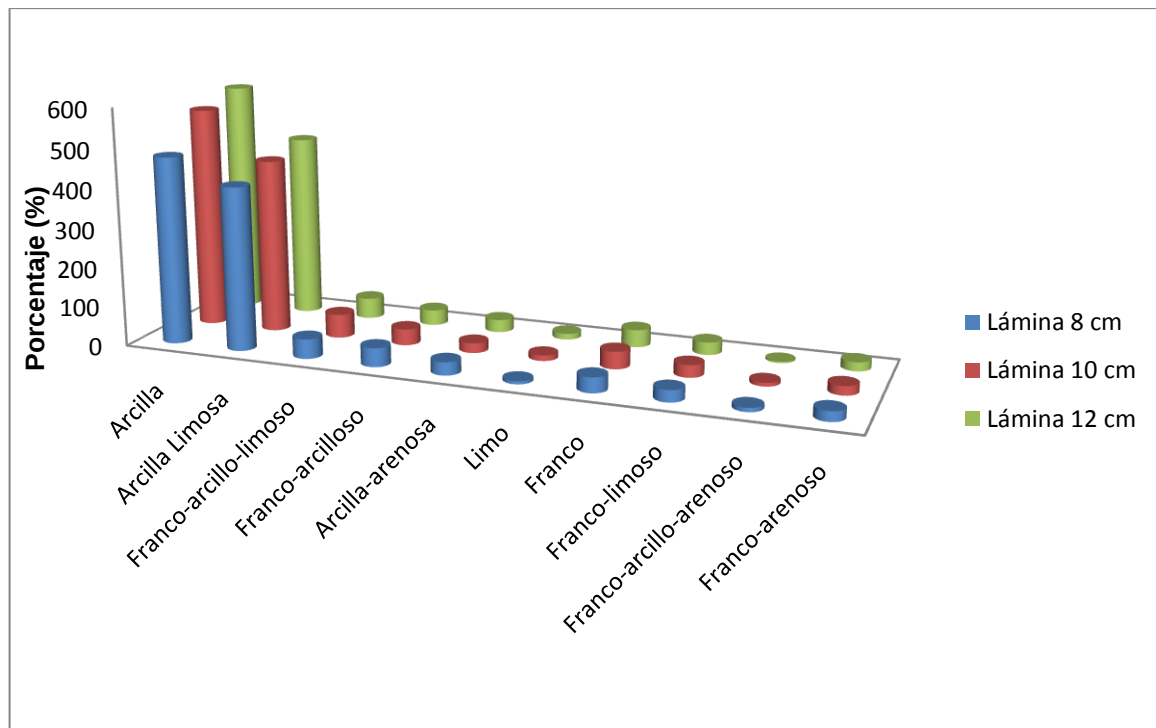


Ilustración 6.11 Diferencia en porcentaje entre los gastos unitarios de riego del modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico, para cada tipo de suelo y para las diferentes láminas.

En la ilustración 6.12, se presenta la comparación de los valores de gasto unitario de riego para los tipos de suelo correspondientes a los cuadros de diseño de riego por melgas, sin considerar los suelos tipo arcilla y el tipo arcilla-limosa, esto con base en los datos obtenidos con el modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico.

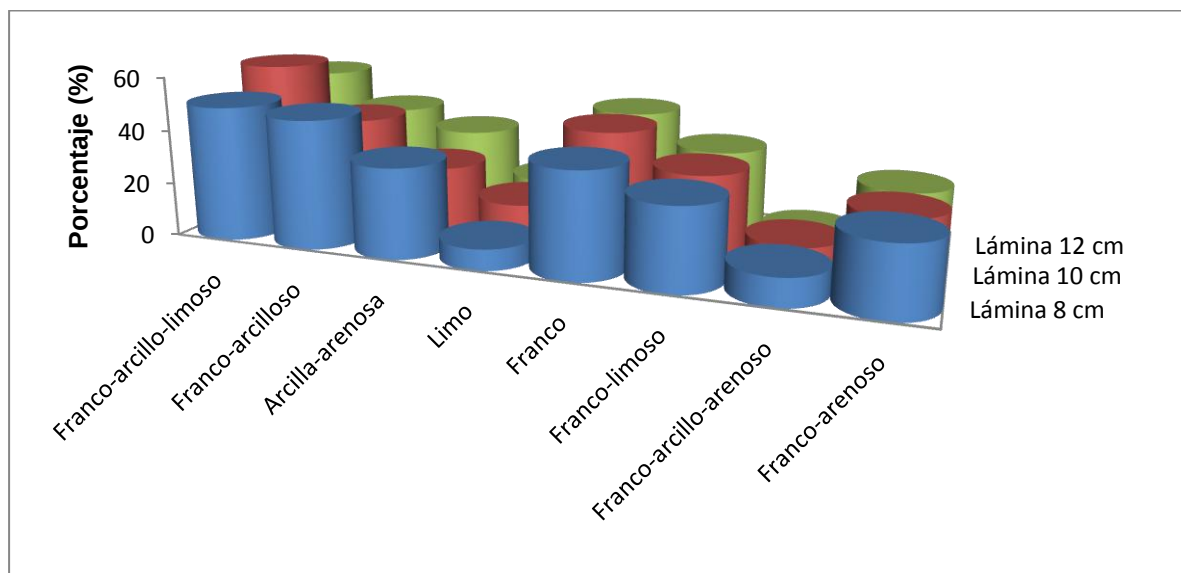


Ilustración 6.12 Diferencia entre los valores del gasto unitario de riego, sin considerar los suelos tipo arcilloso y arcillo-limoso.

En el cuadro 6.4 se puede apreciar la diferencia en porcentaje del gasto unitario, entre el modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico.

<i>Textura del suelo</i>	<i>Diferencia en el gasto óptimo de riego</i>		
	<i>Lr = 8 cm (%)</i>	<i>Lr =10 cm (%)</i>	<i>Lr =12 cm (%)</i>
<i>Arcilla</i>	<i>475.0</i>	<i>560.0</i>	<i>588.9</i>
<i>Arcilla Limosa</i>	<i>414.3</i>	<i>441.7</i>	<i>463.6</i>
<i>Franco-arcillo-limoso</i>	<i>50.0</i>	<i>60.0</i>	<i>52.2</i>
<i>Franco-arcilloso</i>	<i>47.7</i>	<i>41.1</i>	<i>38.9</i>
<i>Arcilla-arenosa</i>	<i>33.3</i>	<i>25.0</i>	<i>31.9</i>
<i>Limo</i>	<i>7.8</i>	<i>14.1</i>	<i>14.9</i>
<i>Franco</i>	<i>38.7</i>	<i>44.1</i>	<i>44.2</i>
<i>Franco-limoso</i>	<i>30.0</i>	<i>31.5</i>	<i>31.8</i>
<i>Franco-arcillo-arenoso</i>	<i>10.2</i>	<i>9.3</i>	<i>3.4</i>
<i>Franco-arenoso</i>	<i>25.3</i>	<i>23.1</i>	<i>22.8</i>

Cuadro 6.4. Diferencia en el gasto óptimo de riego calculado con el modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico.

7. Conclusiones

Se ha realizado una comparación entre el modelo hidrodinámico completo y el modelo hidrológico en riego por melgas. A efecto de reducir las variaciones originadas por diferencias en las evoluciones de la lámina infiltrada obtenidas con las ecuaciones de Green y Ampt y de Richards, utilizadas en el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo, respectivamente, se realizó el ajuste del parámetro de succión en el frente de humedecimiento de la ecuación de Green y Ampt, de manera de reproducir la evolución de la lámina infiltrada obtenida mediante la aplicación de la ecuación de Richards. La comparación se ha efectuado a partir del análisis de los perfiles de flujo superficial y subsuperficial que se presentan en el riego, así como de la distribución final de la lámina infiltrada, y se ha encontrado que existen diferencias entre los elementos analizados, las cuales pueden atribuirse al empleo de una ecuación de cantidad de movimiento general en el modelo hidrodinámico completo. Las diferencias en los perfiles de flujo inducen diferencias en la distribución final de la lámina infiltrada y por lo tanto en el gasto óptimo de riego, de forma que al analizar su comportamiento para los suelos de triángulo de texturas en los cuales es conveniente la aplicación del riego por melgas, se encuentra que la diferencia entre los gastos óptimos de riego proporcionados por el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo crece conforme se incrementa el contenido de arcilla en el suelo.

8. Bibliografía

1. Bautista E., y W. Wallender, 1992. *Hydrodynamic furrow irrigation model with specified space steps*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Vol. 118, No. 3.
2. Blair, A. W. y T.E. Smerdon, 1988. *Infiltration from irrigation advance data I: Experimental*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 114(1):18-29.
3. Bradford S., y N. Katopodes, 1998. *Nonhydrostatic model for surface irrigation*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Vol 124, No. 4.
4. Catalán E. A., J. Chavez, O. Palacios, B. Cuevas y C. Fuentes, 1988. *Modelo hidrodinámico para la predicción del avance en el riego por melgas*. Sobretiro de Agrociencia num 73. México.
5. Childs, E. C., y N. Collis-George, 1950. *The permeability of porous materials*. Proc. Roy. Soc. Ser. A(201):392-405.
6. Fuentes C., 1992. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non saturés*. Tesis de Doctorado de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia. 267 pp.
7. Fuentes C., R. Haverkamp, y J.-Y. Parlange, 1992. *Parameter constraints on closed-form soil-water relationships*. Journal of Hydrology. 134:117-142.
8. Fuentes, C., J.-Y. Parlange y H. Saucedo, 2001. *Una solución de similitud de las ecuaciones de Saint-Venant*. Memorias del XI Congreso Nacional de Irrigación, Guanajuato, México.
9. Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange, y R. Haverkamp, 2001. *Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados*. Ingeniería Hidráulica en México. 16(2): 119-137.
10. Fuentes, C., B de León, H. Saucedo y J.Y. Parlange, 2004. *El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: la ley potencial de resistencia hidráulica*. Ingeniería Hidráulica en México.
11. Haverkamp, R., J.-Y. Parlange, J. L. Starr, G. Schmitz y C. Fuentes, 1990. *Infiltration under ponded conditions: 3. A predictive equation based on physical parameters*. Soil Sci. 149: 292-300.
12. IMTA: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, 1997. *Manual para diseño de zonas de riego pequeñas*. México.

13. Katopodes N., y T. Strelkoff, 1977. *Hydrodynamics of border irrigation, complete model*. Journal of the Irrigation and Drainage Division. IR3:309-324. 13188.
14. Kostiakov, A. N., 1932. *On the dynamics of the coefficient of water-percolation in soils and on the necessity for studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration*. Trans. Sixth International Society of Soil Science, Russian Part A: 17-21.
15. Lewis, M. R., y W. E. Milne, W. E., 1938. *Analysis of border irrigation*. Agri. Engr., 19:267-272.
16. Neumann, S. P., 1973. *Saturated-unsaturated seepage by finite elements*. Journal of the Hydraulics Division. ASCE. HY12, pap. 10201, 2233-2250.
17. Pacheco, P. 1994. *Comparación de los métodos de riego por surcos y por melgas y alternativas de diseño en el cultivo del arroz (Oryza sativa L)*. Tesis de Maestría en Ciencias, Colegio de Postgraduados en Ciencias Agrícolas. México.
18. Parlange, J.-Y., 1971. *Theory of water movement in soils, 2, One-dimensional infiltration*. Soil Sci. 111:170-174.
19. Parlange, J.-Y., R. D. Braddock, I. Lisle y R.E. Smith, 1982. *Three parameter infiltration equation*. Soil Sci., 111: 170-174.
20. Parlange, J.-Y., R. Haverkamp y J. Touma. 1985. *Infiltration under ponded conditions. Part I. Optimal analytical solutions and comparisons with experimental observations*. Soil Sci. 139:305-311.
21. Philip, J.R., 1957a. *The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution*. Soil Sci., 83: 345-357.
22. Philip, J.R., 1957b. *The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations*. Soil Sci., 84: 257-264.
23. Philip, J. R., y D. A. Farrell, 1964. *General solution of the infiltration-advance problem in irrigation hydraulics*. Geop. Res., 69(4):621-631.
24. Playán E., W. R. Walker y G. P. Merkley, 1994. *Two-dimensional simulation of basin irrigation. II: Applications*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Vol. 120, No. 5.
25. Rawls, W.J., Brakensiek, D.L., Miller N. 1983. *Green-Ampt infiltration parameter from soil data*. Journal of Hydraulic Engineering. Vol. 109.
26. Rendón L., C. Fuentes y G. Magaña. 1997. *Diseño del riego por gravedad*. En Manual para Diseño de Zonas de Riego Pequeñas. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. México.

27. Richards, L. A., 1931. *Capillary conduction of liquids through porous mediums*. Physics 1:318-333.
28. Sakkas, G. J., y T. Strelkoff, 1974. *Hydrodynamics of surface irrigation, advanced phase*. Journal of the Irrigation and Drainage Division. IR1:31-48. 10422.
29. Saucedo H., C. Fuentes y M. Zavala, 2000. *Acoplamiento numérico de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en la fase de avance del riego por melgas*. Memorias del X Congreso Nacional de Irrigación, Chihuahua, México.
30. Saucedo H., C. Fuentes, M. Zavala y J.-Y. Parlange, 2001. *La hipótesis del tiempo de contacto en el riego por gravedad*. Memorias del XI Congreso Nacional de Irrigación, Guanajuato, México.
31. Saucedo H., C. Fuentes, M. Zavala y J.-Y. Parlange, 2001. *Un modelo para describir el flujo del agua en el riego por melgas*. Memorias del XI Congreso Nacional de Irrigación, Guanajuato, México.
32. Saucedo H., C. Fuentes, M. Zavala y M. Vauclin, 2002. *Una solución de elemento finito para la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo*. Ingeniería Hidráulica en México, vol. XVII, núm. 1, pp. 93-105.
33. Saucedo H., C. Fuentes y M. Zavala, 2003. *Gasto óptimo en el riego por melgas*. Memorias del XII Congreso Nacional de Irrigación, Zacatecas, Zac., México. Mesa 8. Modelación hidroagrícola.
34. Saucedo H., C. Fuentes y M. Zavala, 2003. *Cálculo del gasto óptimo de riego por melgas con presencia de un manto freático*. Memorias del XII Congreso Nacional de Irrigación, Zacatecas, Zac., México. Mesa 8. Modelación hidroagrícola.
35. Singh, V., y S. M. Bhallamundi, 1996. *Complete hydrodynamic border-strip irrigation model*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 122(4):189-197.
36. Strelkoff T., y N. Katopodes, 1977. *Border-irrigation hydraulics with zero inertia*. Journal of the Irrigation and Drainage Division. IR3:325-342. 13189.
37. Strelkoff T., 1983. *BRDFLW, a mathematical model of border irrigation*. US Department of Agriculture. Agricultural Research Service. Phoenix, Arizona, USA.
38. Wallender W., y M. Rayej, 1990. *Shooting method for Saint-Venant equations of furrow irrigation*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. Vol. 116, No. 1.
39. Weir, G. J., 1983. *A mathematical model for border strip irrigation*. Water Resources Research 19(4): 1011-1018.